

Edition 2025 - 2026

mathématiques

Terminale
Enseignement de spécialité

Avec
programmes
Python

Stéphane Pasquet

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS	iii
AUTRES OUVRAGES	iv
SITES INTERNET	v
1 Suites numériques	1
2 Continuité, dérivabilité et convexité d'une fonction	55
3 Logarithme népérien	137
4 Fonctions trigonométriques	192
5 Équations différentielles, primitives et intégration	214
6 Vecteurs, droites et plans de l'espace	285
7 Orthogonalité et distances dans l'espace	305
8 Combinatoire et dénombrements	337
9 Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale	365
10 Somme de variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres	397

☞ 253 exercices entièrement corrigés

AVANT—PROPOS

Ce livre est un recueil de cours et d'exercices corrigés basé sur le programme mis en place à la rentrée 2020.


Le programme est structuré autour de trois grands thèmes mathématiques :

- algèbre et analyse;
- géométrie dans l'espace;
- probabilités & combinatoire.

Le programme insiste sur le côté historique ; j'ai pris la décision de ne pas trop insister dessus dans la mesure où des sites Internet traitent de cet aspect des mathématiques de manière convenable.

Les exercices sont classés par degré de difficulté :

- ★ exercices d'application des notions du cours, exercices d'un niveau facile;
- ★★ exercice d'un niveau intermédiaire, où il faut mobiliser les notions du cours et réfléchir un peu;
- ★★★ exercices de réflexion, niveau élevé.

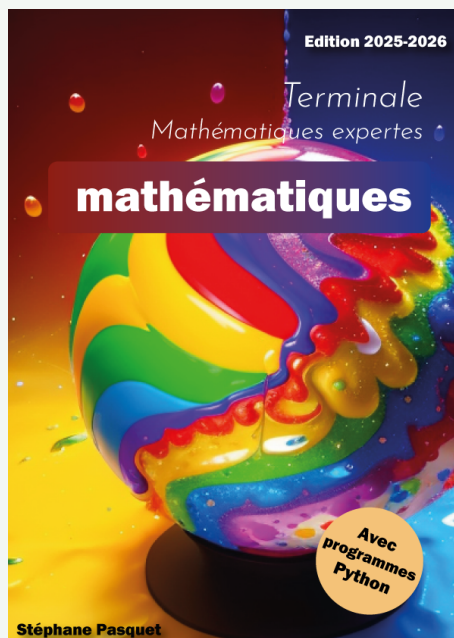
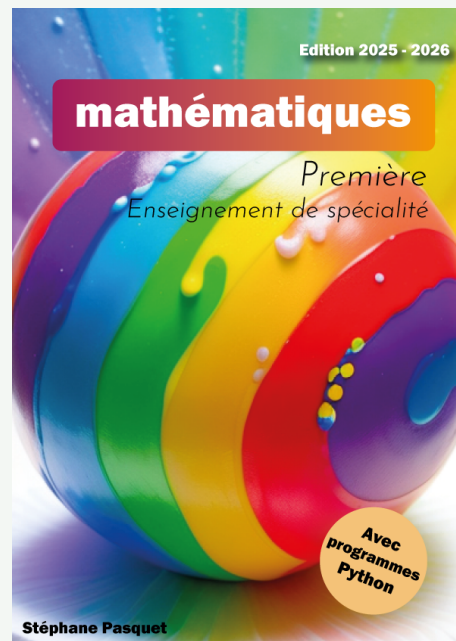
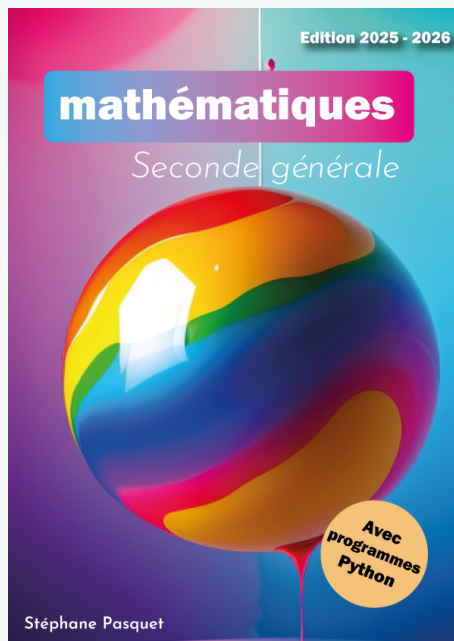
De plus, pour chaque exercice, vous aurez la possibilité de signaler une erreur, ou de laisser un commentaire en cliquant sur l'icône .

Protection du livre : toute revente de ce document ailleurs que sur mathweb.fr est formellement interdite.

Stéphane Pasquet.

Dernière date d'édition : 3 novembre 2025.

AUTRES OUVRAGES



Aussi disponibles sur <https://mathweb.fr>

SITES INTERNET



<https://courspasquet.fr>

Cours particuliers de mathématiques en ligne



<https://mathweb.fr>

Ressources mathématiques et Python



<https://rezoprof.mathweb.fr>

Mise en relation entre professeurs et élèves , toutes disciplines – 100 % GRATUIT!

1

Suites numériques

Plan du chapitre

I	Raisonnement par récurrence	2
II	Limite d'une suite	3
1	Définitions	3
2	Des limites de référence	4
3	Limite et comparaison	4
a	Théorèmes fondamentaux	4
b	Comportement à l'infini de (q^n)	5
4	Suite majorée ou minorée	5
5	Opérations et limites	6
a	Somme et produit	6
b	Quotient	7
	Enoncés	8
	Corrigés des exercices	22

I - Raisonnement par récurrence

Propriété 1 (principe de récurrence)

Soit \mathcal{P}_n une propriété dépendant d'un entier naturel n . Si :

- pour un entier n_0 , \mathcal{P}_{n_0} est vraie (initialisation),
- pour tout entier naturel $k \geq n_0$, le fait que \mathcal{P}_k soit vraie implique que \mathcal{P}_{k+1} est vraie (hérédité),

alors \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur à n_0 .

Remarque 1

si $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ alors on dira que la propriété est héréditaire.

Définition 1

Une *démonstration par récurrence* est une démonstration dans laquelle on utilise le principe de récurrence.

Attention 1



Une démonstration par récurrence comporte impérativement deux étapes : initialisation et hérédité.

Exemple 1

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Initialisation : comme :

$$1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6},$$

la propriété est vraie au rang 1.

- Hérédité : soit k un entier non nul arbitrairement fixé ; supposons la propriété vraie au rang k :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, soit :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\&= \frac{k+1}{6} [k(2k+1) + 6(k+1)] \\&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Ainsi, on a montré que si la propriété est vraie au rang k , alors elle est vraie au rang $k+1$.

La propriété considérée est donc vraie pour tout rang $n \geq 1$ en vertu du principe de récurrence.

II - Limite d'une suite

II . 1 - Définitions

Définition 2

On dit que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ si u_n se rapproche de plus en plus de ℓ quand n tend vers $+\infty$.

On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Remarque 2

si (u_n) converge vers ℓ alors on dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 2

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 car plus n prend de grandes valeurs positives, plus $\frac{1}{n}$ se rapproche de 0.

Définition 3

- On dit que la limite de (u_n) est $+\infty$ si u_n prend des valeurs de plus en plus grandes. On écrira alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la limite de (u_n) est $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ tend vers $+\infty$. On écrira alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 3

- La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$ car plus n prend de grandes valeurs, plus n^2 aussi.
- La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n^2$ tend vers $-\infty$ car $v_n = -u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Définition 4

On dit que la suite (u_n) *diverge* quand sa limite est infinie.

Remarque 3

Certaines suites ne sont ni convergentes ni divergentes : elles n'ont pas de limite.
La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \cos(n)$ n'a pas de limite car ses valeurs varient entre -1 et 1 sans jamais se rapprocher d'une valeur fixe.

II . 2 - Des limites de référence

Propriété 2

Soit p un entier strictement positif.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty.$$

II . 3 - Limite et comparaison

II . 3 . a - Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 (théorème de comparaison)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soit n_0 un entier naturel.

- Si, pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si, pour $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Exemple 4

- 1 Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$. Alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 2 Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \leq -n^2$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 2 (théorème d'encadrement)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites, soit ℓ un nombre réel et soit n_0 un entier naturel. Si, pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Remarque 4

Ce théorème est aussi appelé « théorème des gendarmes », mais ce n'est pas son appellation conventionnelle mathématique.

Exemple 5

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

II . 3 . b - Comportement à l'infini de (q^n)

Propriété 3 (inégalité de Bernoulli)

Pour tout réel $x > -1$ ($x \neq 0$) et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

Propriété 4

Soient q un nombre réel et n un entier naturel.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q < -1$, alors (q^n) n'a pas de limite en $+\infty$.

Propriété 5

Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ converge vers 0.

II . 4 - Suite majorée ou minorée

Définition 5

- Une suite (u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

- Une suite (u_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, m \leq u_n.$$

- Une suite est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemple 6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

- Pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n} \leq 1$ donc $u_n \leq 1 + 1$, soit $u_n \leq 2$.

La suite (u_n) est donc majorée par 2.

- De plus, $\frac{1}{n} > 0$ pour tout entier naturel n non nul donc $u_n > 1$.

La suite (u_n) est donc minorée par 1.

- La suite (u_n) est minorée et majorée; elle est donc bornée.

Théorème 3 (théorème de convergence)

Toute suite croissante et majorée converge.

Toute suite décroissante et minorée converge.

Toute suite monotone et bornée converge.

II . 5 - Opérations et limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, ℓ et ℓ' représentent des réels.

Dans les tableaux suivants, « F.I. » signifie : « Forme Indéterminée ». Ce sont des cas où l'on ne peut pas conclure immédiatement quant à la valeur de la limite. Dans de tels cas, il est nécessaire de transformer l'écriture.

II . 5 . a - Somme et produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
	$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

II . 5 . b - Quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell > 0$	0^+ (0 en restant positif) 0^- (0 en restant négatif)	$+\infty$ $-\infty$
$\ell < 0$	0^+ (0 en restant positif) 0^- (0 en restant négatif)	$-\infty$ $+\infty$
0	0	Fl.
ℓ	$+\infty$ $-\infty$	0 0
$+\infty$	$+\infty$	Fl.
$+\infty$	$-\infty$	Fl.
$-\infty$	$-\infty$	Fl.

Attention 2

Les quatre formes indéterminées à retenir sont :



$\frac{\infty}{\infty}$ « $\frac{\infty}{\infty}$ »	$\infty - \infty$ « $\infty - \infty$ »
$0 \times \infty$ « $0 \times \infty$ »	$\frac{0}{0}$ « $\frac{0}{0}$ »

Raisonnement par récurrence sans suite

Exercice 1.1 (une somme avec factorielles)



Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$$

où $k! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (k-1) \times k$.

1 Calculer S_1 , S_2 et S_3 .

Vérifier que $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Solution page 22

Exercice 1.2 (somme des premiers carrés)



On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2.$$

Montrer par récurrence que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution page 22

Exercice 1.3 (inégalité de Bernoulli)



Montrer par récurrence l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Bernoulli* :

$$\forall x \geq -1, x \neq 0, \forall n > 1, (1+x)^n > 1+nx$$

Solution page 23

Exercice 1.4 (factorielle et inégalité)



Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $n! > n^2$.

Il faudra faire preuve d'initiative dans cet exercice.

On rappelle que $n! = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n$.

Solution page 24

Exercice 1.5 (inégalité)



- 1 Résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation : $4n > 2(n+1)$.
- 2 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $2^n > 2n$.

Solution page 25

Exercice 1.6 (de l'importance de l'initialisation)



Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

« $4^n + 1$ est divisible par 3. »

- 1 On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un entier k arbitrairement fixé.
Montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est alors vraie.
- 2 $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?
- 3 Que cela vous inspire-t-il?

Solution page 25

Exercice 1.7 (en arithmétique)



Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

- 1 Pour tout entier naturel n , $4^n - 3n - 1$ est divisible par 9.
- 2 Pour tout entier naturel n , $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Solution page 26

Exercice 1.8 (formule du binôme de Newton)



Montrer par récurrence l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

appelée *formule du binôme de Newton*.

Aide : on pourra s'aider de la formule suivante :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{où } \binom{n}{k} \text{ est le coefficient binomial « } k \text{ parmi } n \text{ »}.$$

Solution page 27

Raisonnement par récurrence avec une suite

Exercice 1.9 (conjecturer une formule et la démontrer)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fraction irréductible.
- 2 Conjecturer la formule qui donne u_n puis la montrer par récurrence.

Solution page 29

Exercice 1.10 (avec une fonction croissante)

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f :

x	0	5
$f(x)$	1	5

On définit alors la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 0$ et par l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 5$.

Solution page 29

Exercice 1.11 (suite définie par récurrence)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.

Solution page 30

Exercice 1.12 (suite définie par récurrence)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

Solution page 30

Limites

Exercice 1.13 (fractions rationnelles)

Déterminer la limite des suites suivantes.

1 $a_n = \frac{3n+2}{4n-1}$

2 $b_n = \frac{n^2-3n+1}{n+7}$

3 $c_n = \frac{3n-7}{n^2+1}$

Solution page 30

Exercice 1.14 (avec racines carrées)

Déterminer les limites des suites suivantes.

1 $u_n = \frac{n^2+3n-2}{\sqrt{n}+1}$

2 $v_n = \sqrt{\frac{4n+1}{n+2}}$

3 $w_n = \frac{2\sqrt{n}+n-3}{\sqrt{n}+1}$

Solution page 31

Exercice 1.15 (théorème des gendarmes)

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ où $u_n = \frac{n + \cos(n)}{n^2}$.

Solution page 32

Exercice 1.16 (limite d'une somme avec factorielles)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$$

où $k! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (k-1) \times k$.

1 Montrer que pour tout entier naturel k , $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$.

2 En déduire que pour tout entier naturel n , $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

3 Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Solution page 32

Exercice 1.17 (théorème des gendarmes)

Soit $a \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans les cas suivants.

1 $u_n = \frac{n + \sin(n)}{n + \cos(n)}$

2 $u_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \sin^p(a)$.

Solution page 33

Exercice 1.18 (théorème de comparaison)



Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sin(n)}{n+1}$

2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n - n^3}{1+n^2}$

Solution page 34

Exercice 1.19 (construction graphique des premiers termes)



Dans un repère orthonormé, construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 10$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Solution page 35

Étude complète d'une suite

Exercice 1.20 (étude d'une suite)



On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1 Étudier la monotonie de (u_n) .
- 2
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n^2$.
 - b. Déterminer alors la limite de (u_n) .
- 3 Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer la propriété conjecturée.

Solution page 35

Exercice 1.21 (récurrence et théorème de convergence)



Soit la fonction f définie sur $[0; 2]$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

- 1 Déterminer les variations de f sur $[0; 2]$.
Montrer alors l'implication suivante :

$$x \in [1; 2] \Rightarrow f(x) \in [1; 2].$$

- 2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in [1; 2]$ et que $u_n \leq u_{n+1}$.

- 3 En déduire que la suite (u_n) converge.

Solution page 37

Exercice 1.22 (étude d'une suite homographique)



Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$.

- 1 Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera alors son premier terme et sa raison.
- 2 En déduire la limite de la suite (u_n) .

Solution page 37

Exercice 1.23 (suite homographique & suite arithmétique)



On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
 et la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}.$$

- 1 Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 2 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution page 38

Exercice 1.24 (étude se ramenant à une suite géométrique)



On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

- 1 Calculer les 10 premiers termes de cette suite à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur. Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de (u_n) ?
- 2 On pose $v_n = u_n - 4n + 10$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.
 - b. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .
 - c. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Donner l'expression de S_n en fonction de n .

Solution page 39

Exercice 1.25 (une suite arithmético-géométrique)



On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- 1** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.$$

- 2** Montrer que (u_n) est convergente.

- 3** Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 16$.

- a.** Calculer v_0 .
- b.** Montrer que (v_n) est géométrique.
- c.** En déduire une expression de v_n , puis de u_n en fonction de n .
- d.** Déterminer la limite de (u_n) .

Solution page 39

Exercice 1.26 (les coccinelles)



On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = kx(1 - x),$$

k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k .

- 1** Supposons $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

- a.** Étudier le sens de variations de la suite (u_n) .
- b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 1$.
- c.** La suite (u_n) est-elle convergente ?
- d.** Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

- 2** Supposons maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.

- a.** Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 1]$ et montrer que $f(\frac{1}{2}) \in [0; \frac{1}{2}]$.
- b.** En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
 - montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$;
 - établir que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- c.** La suite (u_n) est-elle convergente ?

Solution page 41

Exercice 1.27 (suites d'abscisses et convergence)



On se donne deux points distincts A_0 et B_0 .

Soit A_1 le milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 celui de $[A_0A_1]$.

De façon générale, pour tout entier naturel n , on désigne par :

A_{n+1} le milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

On munit la droite (A_0B_0) du repère $(A_0 ; \vec{i})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{A_0B_0}$.

On note a_n et b_n les abscisses respectives des points A_n et B_n dans le repère $(A_0 ; \vec{i})$.

On a donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

- 1 Construire une droite (A_0B_0) en prenant $A_0B_0 = 10$ cm.
Sur cette droite, placer les points A_1 et B_1 , puis les points A_2 et B_2 .
Calculer les valeurs de a_1 , b_1 , a_2 et b_2 .
- 2 Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- 3 Démontrer que la suite (u_n) définie par :

$$u_n = a_n - b_n$$

est géométrique.

- 4 Démontrer que la suite (v_n) définie par :

$$v_n = 3a_n + 2b_n$$

est constante.

- 5 Les suites (a_n) et (b_n) sont-elles convergentes?
Que peut-on en déduire pour les points A_n et B_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Solution page 42

Exercice 1.28 (suites imbriquées)



Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_0 = v_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 0,6u_n + 0,3v_n \\ v_{n+1} = 0,4u_n + 0,7v_n \end{cases}$$

On pose alors pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases}$$

- 1 Montrer que (a_n) est constante.
- 2 Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
- 3 En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis celle de v_n en fonction de n .
- 4 Démontrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Solution page 44

Exercice 1.29 (les états du manchot : avec des probabilités)



Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :

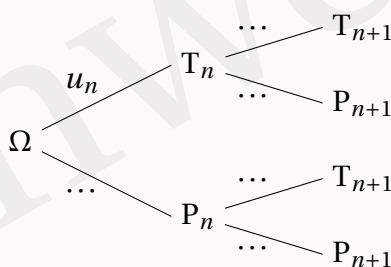
- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n -ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongoir lors de son n -ième passage. »

On considère alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n .

- 1**
 - a. Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.
 - b. Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.
 - c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



- d. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.
 - e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n) .

- 2** On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - c. Calculer la limite de la suite (u_n) . Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1.e. ?

Solution page 45

Exercice 1.30 (probabilités et mouvement d'une puce)



On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C. Soit n un entier naturel. À l'instant initial $n = 0$, la puce se trouve en A.

- Si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- Si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est soit en A, soit en C de façon équiprobable.
- Si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On désigne par A_n (resp. B_n et C_n) l'événement :

« À l'instant n , la puce est en A (resp. B et C). »

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, et $c_n = P(C_n)$.

On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.

Pour traiter cet exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1 Étude du mouvement pour $1 \leq n \leq 3$.

- Donner a_1 , b_1 et c_1 . Calculer $a_1 + b_1 + c_1$.
- À l'instant $n = 2$, dans quelles cases la puce peut-elle se trouver? Déterminer a_2 , b_2 et c_2 .
- À l'instant $n = 3$, dans quelles cases la puce peut-elle se trouver? En déduire a_3 . Calculer b_3 et vérifier que $c_3 = \frac{17}{18}$.

2 Étude du cas général.

- Conjecturer les cases sur lesquelles la puce peut se trouver à l'instant n lorsque l'entier n est pair ($n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$), et les cases sur lesquelles elle peut se trouver si l'entier n est impair ($n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$).

En déduire (sans autre justification) la valeur de a_{2k+1} .

- Démontrer que :

$$\begin{cases} b_{2k+1} = \frac{1}{3} a_{2k} \\ a_{2k+2} = \frac{1}{2} b_{2k+1} \end{cases}$$

- Démontrer que pour tout entier naturel k , $a_{2k} = \frac{1}{6^k}$.

3 a. Déterminer le plus petit entier naturel N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow a_n \leq 10^{-6}.$$

- Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

Solution page 46

Exercice 1.31 (exercice de recherche)



On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} \end{cases}$$

- 1 Pour tout entier naturel n , on définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel λ tel que la suite soit géométrique.
- 2 Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution page 47

Exercice 1.32 (les suites de Héron)



Pour un réel a strictement positif quelconque, on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \end{cases}$$

- 1 Compléter la fonction Python (page suivante) afin que l'instruction :

```
>>> heron(4,7,20)
```

retourne les $n + 1$ premiers termes de la suite $(u(4)_n)$.

Code Python 1-1

```
1 def heron(a,u,n):
2     if u <=0:
3         return "Le premier terme doit être strictement positif."
4     elif a <= 0:
5         return "La valeur de 'a' doit être strictement positive."
6     else:
7         L = [ ... ]
8         k = 0
9         while k < ...:
10             u = ...
11             L.append(...)
12             k = ...
13     return ...
```

- 2 L'instruction renvoie alors la liste suivante :

```
[7, 3.7857142857142856, 2.4211590296495955, 2.0366301688743387,
 2.0003294091613366, 2.0000000271231317, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0,
 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0]
```

Faites deux conjectures à partir de ces valeurs.

On se propose d'étudier mathématiquement la suite (u_n) pour une valeur de $a > 0$.

Pour cela, on introduit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

- 3 Calculer $f'(x)$, puis donner les variations de f sur $]0; +\infty[$ en fonction de a .
- 4 En déduire que $u_1 \geq \sqrt{a}$, quelle que soit la valeur de $u_0 > 0$.
- 5 Montrer que pour tout réel $x \geq \sqrt{a}$, $f(x) \leq x$.
- 6 Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sqrt{a} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- 7 Déduire que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
- 8 On admet que $\ell = f(\ell)$. Déterminer alors la limite de (u_n) .

Solution page 48

Exercice 1.33 (suites imbriquées)



On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

- 1
 - a. Calculez u_1 et v_1 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.
 - d. En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 2 On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

- a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

- b. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
d. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

- e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

Code Python 1-3

```

1 def seuil():
2     n = 0
3     r = 1
4     while abs( r - sqrt(2) ) > 10**(-4):
5         r = (2 + r) / (1 + r)
6         n = n + 1
7     return n

```

(« abs » désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et $10^{**}(-4)$ représente 10^{-4}).

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle?

Solution page 49

Exercice 1.34 (exercice de recherche)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \lambda u_n + P(n) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

où P est un polynôme et où $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

On pose alors la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_n + Q(n),$$

où Q est un polynôme.

- 1** Montrer l'équivalence suivante :

$$(v_n) \text{ est une suite géométrique} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n) = \lambda Q(n) - Q(n+1).$$

On suppose maintenant que $P(n) = an + b$, a et b étant deux réels non nuls.

- 2** Trouver, en fonction de λ , a et b , l'expression du polynôme Q .
3 En déduire, en fonction de λ , u_0 , a , b et n , une expression de v_n , puis de u_n .
4 Application : déterminer l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 7$.
Vérifier la formule trouvée pour les premiers termes de (u_n) .

Solution page 51

Exercice 1.35 (l'escargot de Gardner)



Léo l'escargot avance à la vitesse de 1 m/h sur un élastique de 100 mètres qui peut s'allonger à l'infini.

Au début de chaque heure, on allonge l'élastique de 100 mètres de façon homogène, ce qui signifie qu'au début de la 1^{re} heure écoulée, l'escargot se trouvait à 1 mètre du point de départ avant l'allongement de l'élastique et se retrouve à 2 mètres du point de départ après car pour passer de 100 m à 200 m, on a multiplié par 2.

Au bout de la 2^e heure, Léo avance de 1 mètre et après allongement, il se trouve à 4,50 mètres. On note u_n la distance (en mètre) parcourue par Léo au bout de n heures avant l'allongement de l'élastique. Ainsi, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$.

- 1** a. Expliquer la valeur de u_2 .
b. Calculer u_3 .
- 2** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n + 1$.
- 3** On note p_n le pourcentage représentant l'avancement de Léo par rapport à la longueur de l'élastique (avant allongement) à l'étape n . Ainsi, $p_1 = 1$ et $p_2 = 1,5$.
Montrer que $p_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
- 4** Montrer par récurrence que $p_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.
- 5** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $p_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
- 6** En déduire la limite de la suite (p_n) .
Que peut-on alors conclure quant à Léo? N'y a-t-il pas alors un paradoxe?

Solution page 52

Corrigé de l'exercice 1.1 page 8

- 1
- $S_1 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2!}$.
 - $S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3!}$.
 - $S_3 = S_2 + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24} = 1 - \frac{1}{24} = 1 - \frac{1}{4!}$.

On constate alors que $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ pour $n = 1, n = 2$ et $n = 3$.

- 2 Démontrons par récurrence cette dernière conjecture. Nous avons réalisé l'initialisation dans la question précédente.

Supposons que pour un entier k fixé, $S_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$ (HR). Alors,

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + \frac{k+1}{(k+2)!} \\
 &= 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\
 &= 1 - \frac{1}{(k+1)!} \times \frac{k+2}{k+2} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\
 &= 1 - \frac{k+2}{(k+2)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\
 &= 1 - \frac{1}{(k+2)!}.
 \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

La formule est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

Corrigé de l'exercice 1.2 page 8

Posons $P(n)$ la propriété :

$$(P_n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- 1 Initialisation.

$$S_1 = 1^2 = 1 \text{ et } \frac{1 \times (1+1)(2 \times 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Donc $P(1)$ est vraie.

- 2 Hérédité.

Supposons que pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= S_k + (k+1)^2 \\&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\&= (k+1) \left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right] \\&= (k+1) \left[\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \right] \\&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}\end{aligned}$$

« $k_1 = -2$ » est une racine évidente du polynôme $2k^2 + 7k + 6$ donc la seconde racine k_2 est telle que $k_1 k_2 = \frac{c}{a}$, donc $k_2 = -\frac{1}{2} \times \frac{6}{2} = -\frac{3}{2}$.

Donc $2k^2 + 7k + 6 = 2(k+2)\left(k + \frac{3}{2}\right) = (k+2)(2k+3)$.

Finalement, on a :

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

L'hérédité est donc vérifiée.

3 Conclusion.

Quel que soit l'entier naturel $k \geq 1$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Corrigé de l'exercice 1.3 page 8

- **Initialisation.**

Pour $n = 2$, $(1+x)^n = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

$$1 + nx = 1 + 2x$$

Or, $x^2 > 0$ donc $1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$; ainsi, $(1+x)^2 > 1 + 2x$.

L'inégalité est donc vraie au rang $n = 2$.

- **Hérédité.**

On suppose que l'inégalité est vraie au rang n , c'est-à-dire que l'on suppose que pour un entier n quelconque supérieur strictement à 1 :

$$\forall x \geq -1, x \neq 0, (1+x)^n > 1 + nx \quad (\text{HR})$$

et on souhaite démontrer que :

$$\forall x \geq -1, x \neq 0, (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x.$$

$\forall x \geq -1, x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \times (1+x) \\ &> (1+nx) \times (1+x) && \text{par HR} \\ &> 1+nx+x+x^2 && \text{en développant} \\ &> 1+(n+1)x+x^2.\end{aligned}$$

Or, $x^2 > 0$ donc $1+(n+1)x+x^2 > 1+(n+1)x$, d'où :

$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x.$$

Ainsi, si l'inégalité est vraie à un rang n quelconque, elle l'est aussi au rang $n+1$: l'hérédité est démontrée.

Par conséquent, l'inégalité de Bernoulli est vraie pour tout entier naturel n supérieur strictement à 1.

Corrigé de l'exercice 1.4 page 8

Posons :

$$\mathcal{P}_n : \quad \forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}, n! > n^2.$$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie.

- *Initialisation.*

$$4! = 2 \times 3 \times 4 = 24 \text{ et } 4^2 = 16 \text{ donc pour } n = 4, n! > n^2.$$

- *Hérédité.*

Supposons que pour un certain entier k fixé supérieur ou égal à 4, \mathcal{P}_k est vraie, c'est-à-dire que $k! > k^2$ (HR).

Démontrons alors que $(k+1)! > (k+1)^2$, soit $(k+1)! > k^2 + 2k + 1$.

$$\begin{aligned}(k+1)! &= k! \times (k+1) \\ &> k^2 \times (k+1) && \text{d'après (HR)}\end{aligned}$$

Il faudrait démontrer maintenant que $k^2(k+1) \geq (k+1)^2$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned}k^2(k+1) - (k+1)^2 &= (k+1)[k^2 - (k+1)] \\ &= (k+1)(k^2 - k - 1) \\ &= (k+1)[k(k-1) - 1].\end{aligned}$$

$$\forall k \geq 4,$$

$$\left. \begin{array}{l} k(k-1) - 1 \geq 4 \times 3 - 1, \text{ soit } k(k-1) - 1 \geq 11 \\ k+1 \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow (k+1)[k(k-1) - 1] \geq 55 > 0.$$

Donc $k^2(k+1) - (k+1)^2 \geq 0$, soit $k^2(k+1) \geq (k+1)^2$.

Ainsi, $(k+1)! > (k+1)^2$. La propriété \mathcal{P}_n est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4.

Corrigé de l'exercice 1.5 page 9

1 Résolvons dans \mathbb{N} l'inéquation :

$$\begin{aligned}4n > 2(n+1) &\iff 4n > 2n+2 \\ &\iff 2n > 2 \\ &\iff n > 1.\end{aligned}$$

2 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad 2^n > 2n.$$

- **Initialisation :** pour $n = 3$, $2^n = 2^3 = 8$ et $2n = 2 \times 3 = 6$.
 $8 > 6$ donc $2^3 > 2 \times 3$.
 $\mathcal{P}(3)$ est donc vraie.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k arbitrairement fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie, c'est-à-dire que $2^{k+1} > 2(k+1)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(k) \text{ vraie} &\Rightarrow 2^k > 2k \\ &\Rightarrow 2 \times 2^k > 2 \times 2k \\ &\Rightarrow 2^{k+1} > 4k > 2(k+1) \text{ (d'après la question précédente car } k > 1) \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie.}\end{aligned}$$

L'hérédité est alors prouvée.

- **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 3$.

Corrigé de l'exercice 1.6 page 9

1 Supposons que pour un entier k fixé, $4^k + 1$ est divisible par 3. Alors, il existe un entier naturel p tel que :

$$4^k + 1 = 3p.$$

On a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned}4^k + 1 &= 3p \\ \Rightarrow 4 \times (4^k + 1) &= 4 \times 3p \\ \Rightarrow 4^{k+1} + 4 &= 12p \\ \Rightarrow 4^{k+1} + 4 - 3 &= 12p - 3 \\ \Rightarrow 4^{k+1} + 1 &= 3(4p - 1).\end{aligned}$$

Ainsi, $4^{k+1} + 1$ est un multiple de 3, et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On dit que la propriété \mathcal{P} est *héréditaire*.

- 2 $\mathcal{P}(0)$ stipule que $4^0 + 1 = 2$ est un multiple de 3, ce qui est loin d'être vrai.
De même, $\mathcal{P}(1)$ stipule que $4^1 + 1 = 5$ est un multiple de 3, ce qui n'est pas le cas.

Donc $\mathcal{P}(n)$ n'est pas vraie pour tout entier naturel n .

- 3 Ce qui précède nous permet de constater que ce n'est pas parce qu'une propriété est héréditaire qu'elle est tout le temps vraie.

Le principe de récurrence s'appuie d'ailleurs sur le fait qu'il est nécessaire de vérifier que la propriété est vraie pour un entier (généralement, le plus petit possible : c'est l'hérédité).

Donc il faut veiller à faire l'initialisation lors d'un raisonnement par récurrence sans quoi, le raisonnement est faux.

Corrigé de l'exercice 1.7 page 9

- 1 Posons $\mathcal{P}(n) : 4^n - 3n - 1 = 9p$, où p est un entier relatif.

- **Initialisation.**

Pour $n = 0$, on a :

$$4^n - 3n - 1 = 4^0 - 3 \times 0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9 \times 0.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k arbitrairement fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie, c'est-à-dire que :

$4^{k+1} - 3(k+1) - 1 = 9p$, soit $4^{k+1} - 3k - 4 = 9p$, où p est un entier relatif.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(k) \text{ vraie} &\Rightarrow 4^k - 3k - 1 = 9p \\ &\Rightarrow 4 \times (4^k - 3k - 1) = 4 \times 9p \\ &\Rightarrow 4^{k+1} - 12k - 4 = 4 \times 9p \\ &\Rightarrow 4^{k+1} - 3k - 9k - 4 = 4 \times 9p \\ &\Rightarrow 4^{k+1} - 3k - 4 = 4 \times 9p + 9k \\ &\Rightarrow 4^{k+1} - 3k - 4 = 9(4p + k) \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie.}\end{aligned}$$

En effet, $4p + k$ est un entier relatif (car c'est une combinaison linéaire de deux entiers relatifs).

- **Conclusion.**

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(k)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ vraie donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , à savoir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4^n - 3n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

2 Posons $\mathcal{P}(n) : 7 \times 3^{5n} + 4 = 11p$, où p est un entier naturel (non nul).

- **Initialisation.**

Pour $n = 0$, on a :

$$7 \times 3^{5n} + 4 = 7 \times 3^0 + 4 = 7 + 4 = 11 = 11 \times 1.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k arbitrairement fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie, c'est-à-dire que :

$$7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11p.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(k) \text{ vraie} &\Rightarrow 7 \times 3^{5k} + 4 = 11p \\ &\Rightarrow 3^5 \times (7 \times 3^{5k} + 4) = 3^5 \times 11p \\ &\Rightarrow 7 \times 3^{5k} \times 3^5 + 4 \times 3^5 = 11 \times 3^5 p \\ &\Rightarrow 7 \times 3^{5k+5} + 972 = 11 \times 3^5 p \\ &\Rightarrow 7 \times 3^{5(k+1)} + 4 + 968 = 11 \times 3^5 p \\ &\Rightarrow 7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11 \times 3^5 p - 968 \\ &\Rightarrow 7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11 \times 3^5 p - 11 \times 88 \\ &\Rightarrow 7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11 \times (3^5 p - 88) \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie.}\end{aligned}$$

- **Conclusion.**

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(k)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ vraie donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , à savoir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 7 \times 3^{5n} + 4 \text{ est un multiple de } 11.$$

Corrigé de l'exercice 1.8 page 9

- **Initialisation.**

Pour $n = 0$,

$$(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

Ainsi, la formule est vraie pour $n = 0$ et l'initialisation est alors vérifiée.

- **Hérédité.**

On suppose que pour un n arbitraire, l'égalité est vraie donc :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (\text{HR})$$

et montrons qu'elle l'est aussi au rang $n + 1$, donc montrons que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Dans un premier temps, remarquons que :

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n (a + b) = a(a + b)^n + b(a + b)^n.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \rightarrow b(a + b)^n &= b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{par (HR)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ \rightarrow a(a + b)^n &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^p b^{n+1-p} \quad \text{en posant } p = k + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \quad \text{en prenant } k = p \text{ (car c'est une variable muette)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \\ (a + b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{(n+1)-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} \\ (a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

Or,

$$a^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{(n+1)-(n+1)} \quad \text{et} \quad b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0}$$

donc on peut incorporer a^{n+1} et b^{n+1} dans la somme :

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

L'hérédité est alors vérifiée. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 1.9 page 10

1 Calculons :

$$u_1 = \frac{1}{2 - u_0}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2 - u_1}$$

$$u_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{2 - u_2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}}$$

$$u_3 = \frac{3}{4}$$

2 Posons $P(n)$ la propriété : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

- **Initialisation.**

Faite dans la question 1.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k , $P(k)$ est vraie (H.R.). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $u_{k+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} \quad (\text{H.R.}) \\ &= \frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

- **Conclusion.**

Quel que soit l'entier naturel k , $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 1.10 page 10

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 5$.

- **Initialisation.**

$u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 5$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k fixé, $0 \leq u_k \leq 5$.

Alors, puisque f est croissante sur $[0; 5]$, on peut prendre l'image de chaque membre de cet encadrement sans changer le sens des inégalités : les images de 0, u_k et 4 sont rangées dans le même ordre :

$$f(0) \leq f(u_k) \leq f(5)$$

soit :

$$1 \leq u_{k+1} \leq 5 \quad \text{et donc :} \quad 0 \leq u_{k+1} \leq 5.$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $0 \leq u_n \leq 5$ pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 1.11 page 10

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.

- *Initialisation.*

$u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- *Hérédité.*

Supposons que pour un entier k fixé, $1 \leq u_k \leq 2$.

Alors, on a :

$$\begin{aligned} 1 \leq u_k \leq 2 &\Rightarrow 1 + 1 \leq 1 + u_k \leq 1 + 2 \\ &\Rightarrow 2 \leq 1 + u_k \leq 3 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{1 + u_k} \leq \sqrt{3} \\ &\Rightarrow 1 \leq \sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq \sqrt{3} \leq 2 \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 1.12 page 10

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

- *Initialisation.*

$u_0 = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- *Hérédité.*

Supposons que pour un entier k fixé, $\frac{1}{2} \leq u_k \leq 1$.

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq u_k \leq 1 &\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + u_k \leq 1 + 1 \\ &\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 1 + u_k \leq 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + u_k} \leq \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq \frac{2}{3} \leq 1 \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 1.13 page 11

1 $a_n = \frac{3n+2}{4n-1} = \frac{n(3+\frac{2}{n})}{n(4-\frac{1}{n})} = \frac{3+\frac{2}{n}}{4-\frac{1}{n}}$, pour $n > 0$.

Or, d'après le cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n} = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{4}$$

$$2 \quad b_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n + 7} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(1 + \frac{7}{n}\right)} = \frac{n \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{7}{n}}, \text{ pour } n > 0.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times 1}{1} = +\infty$$

$$3 \quad c_n = \frac{3n - 7}{n^2 + 1} = \frac{n \left(3 - \frac{7}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{7}{n}}{n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}, \text{ pour } n > 0.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$$

Corrigé de l'exercice 1.14 page 11

1 Pour cette question, on aura besoin de voir que $n^2 = n \times n = n \times \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Ainsi, $\frac{n^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}$.

$$u_n = \frac{n^2 + 3n - 2}{\sqrt{n} + 1} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{n\sqrt{n} \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}, \text{ pour } n > 0.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n\sqrt{n}) = +\infty$$

$$2 \quad v_n = \sqrt{\frac{4n + 1}{n + 2}} = \sqrt{\frac{n \left(4 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}} = \sqrt{\frac{4 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}}, \text{ pour } n > 0.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$$

$$3 \quad w_n = \frac{2\sqrt{n} + n - 3}{\sqrt{n} + 1} = \frac{n \left(\frac{2\sqrt{n}}{n} + 1 - \frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{3}{n}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}, \text{ pour } n > 0.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{n}} = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{1} = +\infty$$

Corrigé de l'exercice 1.15 page 11

Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on a :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} n-1 &\leq n + \cos(n) \leq n+1 \\ \Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2} &\leq \frac{n + \cos(n)}{n^2} \leq \frac{n+1}{n^2} \end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

De même,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Corrigé de l'exercice 1.16 page 11

1 Pour tout entier naturel k ,

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{(k+1)}{k! \times (k+1)} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

$$\begin{aligned} 2 \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

$$3 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)! = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

Corrigé de l'exercice 1.17 page 11

$$1 \quad u_n = \frac{n + \sin(n)}{n + \cos(n)} = \frac{\mathcal{N}\left(1 + \frac{\sin(n)}{n}\right)}{\mathcal{N}\left(1 + \frac{\cos(n)}{n}\right)}.$$

Or, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} -1 \leq \sin(n) \leq 1 & \text{donc } -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ -1 \leq \cos(n) \leq 1 & \text{donc } -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$$

$$2 \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \sin^p(a) = \frac{1}{n} (1 + \sin(a) + \sin^2(a) + \dots + \sin^n(a)) = \frac{1}{n} \times \frac{1 - \sin^{n+1}(a)}{1 - \sin(a)}.$$

En effet, nous pouvons voir la somme :

$$1 + \sin(a) + \sin^2(a) + \dots + \sin^n(a)$$

comme étant la somme :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

avec $q = \sin(a)$ ($a \neq \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ donc $\sin(a) \neq 1$).

De plus,

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin(a) \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq \sin^{n+1}(a) \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 \leq -\sin^{n+1}(a) \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - \sin^{n+1}(a) \leq 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{1 - \sin^{n+1}(a)}{1 - \sin(a)} \leq \frac{2}{1 - \sin(a)} \\ &\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{1 - \sin(a)}}_{\text{constante}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{1 - \sin(a)}}_{\text{constante}} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Corrigé de l'exercice 1.18 page 12

1 Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sin(n)}{n+1}$.

Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin(n) \leq 1 &\iff n^2 - 1 \leq n^2 + \sin(n) \leq n^2 + 1 \\ &\iff \frac{n^2 - 1}{n+1} \leq \frac{n^2 + \sin(n)}{n+1} \leq \frac{n^2 + 1}{n+1} \text{ car } n+1 > 0. \end{aligned}$$

Or, $\frac{n^2 - 1}{n+1} = \frac{n(n - \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})}$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \frac{1}{n} \right) &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n+1} = +\infty \text{ (par quotient).}$$

On a :

$$\underbrace{\frac{n^2 - 1}{n+1}}_{\rightarrow +\infty} \leq \frac{n^2 + \sin(n)}{n+1}$$

donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sin(n)}{n+1} = +\infty}$$

2 Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n - n^3}{1 + n^2}$.

Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} -1 \leq (-1)^n \leq 1 &\iff (-1) - n^3 \leq (-1)^n - n^3 \leq 1 - n^3 \\ &\iff \frac{-1 - n^3}{1 + n^2} \leq \frac{(-1)^n - n^3}{1 + n^2} \leq \frac{1 - n^3}{1 + n^2} \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1 - n^3}{1 + n^2} = \frac{\cancel{n^3} \left(\frac{1}{n^2} - n \right)}{\cancel{n^3} \left(\frac{1}{n^2} + 1 \right)} = \frac{\frac{1}{n^2} - n}{\frac{1}{n^2} + 1}.$$

De plus,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - n \right) &= -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 1 \right) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - n}{\frac{1}{n^2} + 1} = -\infty \text{ (par quotient).}$$

On a :

$$\frac{(-1)^n - n^3}{1 + n^2} \leq \underbrace{\frac{1 - n^3}{1 + n^2}}_{\rightarrow -\infty}$$

donc, d'après le théorème de comparaison,

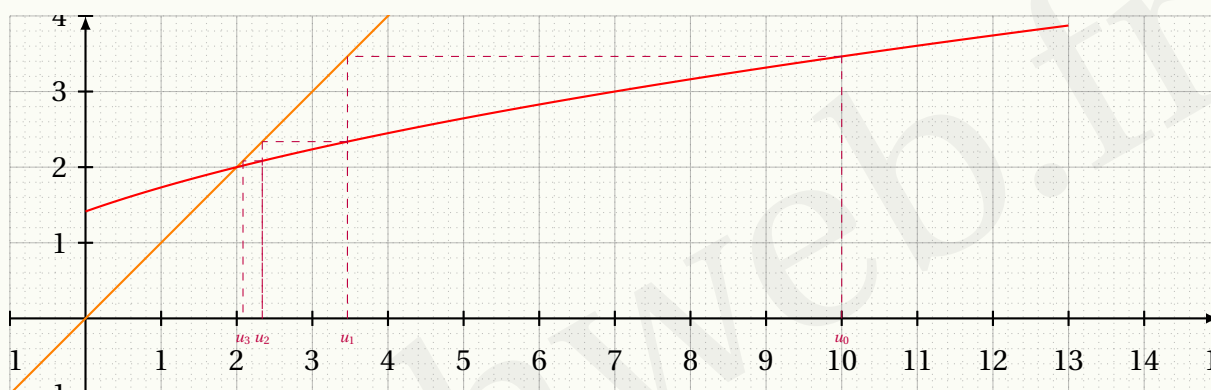
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n - n^3}{1 + n^2} = -\infty$$

Remarque 6

Quand on a un encadrement de la forme $v_n \leq u_n \leq w_n$ et que l'on souhaite déterminer la limite de u_n , il suffit de prendre une partie de cet encadrement quand $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et/ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ est infinie, car le théorème des gendarmes ne fonctionne pas avec une limite infinie.

Corrigé de l'exercice 1.19 page 12

Le fait que $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ nous dit que $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \sqrt{2 + x}$. Il faut donc tracer la courbe représentative de la fonction f (en rouge ci-dessous) ainsi que la droite d'équation $y = x$ (en orange ci-dessous) pour transformer les images (en ordonnées) en abscisses.



On peut alors conjecturer que la limite de cette suite est l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite, soit la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2 + x} &\iff x^2 = 2 + x \\ &\iff x^2 - x - 2 = 0 \quad , \quad \Delta = 9 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

Attention 4



Ce n'est qu'une conjecture... On pourra le démontrer à l'aide du théorème du point fixe (voir chapitre sur la continuité).

Corrigé de l'exercice 1.20 page 12

$$\begin{aligned} 1 \text{ On a : } u_{n+1} - u_n &= u_n + 2n + 3 - u_n \\ &= 2n + 3 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

2 a. Posons $P(n)$ la propriété : $u_n \geq n^2$.

• **Initialisation.**

$u_0 = 1 \geq 0$ donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Supposons que pour un entier naturel k positif, $P(k)$ est vraie (H.R.). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geq (k+1)^2$.

$$\begin{aligned}u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\&\geq k^2 + 2k + 3 \quad (\text{H.R.}) \\&\geq k^2 + 2k + 1 + 2 \\&\geq (k+1)^2 + 2 \\&\geq (k+1)^2\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

• **Conclusion.**

Quel que soit l'entier naturel k , $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. D'après le théorème de comparaison des suites et d'après la question précédente, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

3 Calculons les premiers termes de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}u_0 &= 1 \\u_1 &= u_0 + 2 \times 0 + 3 = 4 \\u_2 &= u_1 + 2 \times 1 + 3 = 9 \\u_3 &= u_2 + 2 \times 2 + 3 = 16 \\u_4 &= u_3 + 2 \times 3 + 3 = 25\end{aligned}$$

On peut alors conjecturer que $u_n = (n+1)^2$. Montrons cela par récurrence.

• **Initialisation.**

Faite précédemment.

• **Hérédité.**

On suppose que pour un entier naturel k , $u_k = (k+1)^2$ (qui constitue la propriété $P(k)$). Montrons que $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\&= (k+1)^2 + 2k + 3 \\&= k^2 + 4k + 4 \\&= (k+2)^2\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

• **Conclusion.**

Quel que soit l'entier naturel k , $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 1.21 page 12

1 On a :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; 2]$.

On en déduit alors :

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

$$\text{Or, } f(1) = \frac{3}{2} > 1 \text{ et } f(2) = \frac{5}{3} < 2.$$

Ainsi,

$$x \in [1; 2] \Rightarrow f(x) \in [1; 2]$$

2 Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \in [1; 2]$.

Démontrons qu'elle est vraie pour tout entier naturel n par récurrence.

• *Initialisation.*

$$u_0 = 1 \in [1; 2].$$

• *Hérédité.*

Supposons que $P(k)$ soit vraie, où k est un entier naturel. Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi.

D'après la question précédente, on a : $u_k \in [1; 2] \Rightarrow f(u_k) \in [1; 2]$.

Or, $f(u_k) = u_{k+1}$ donc $P(k+1)$ est vraie.

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

De plus, f est croissante sur $[1; 2]$ donc $f(u_n) > u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} > u_n$.

3 De la question précédente, on peut conclure que la suite (u_n) est croissante et bornée, donc majorée. Or, *toute suite croissante et majorée converge*.

Donc (u_n) est convergente.

Corrigé de l'exercice 1.22 page 13

1 On a $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} - 2}{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} + 3} = \frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n + 6 + 3u_n + 6} \\ &= \frac{-u_n + 2}{4u_n + 12} = -\frac{1}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 3} = -\frac{1}{4} v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = -\frac{1}{4}$ et de raison $q = -\frac{1}{4}$.

- 2** La suite (v_n) converge vers « 0 » comme suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 . Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 3} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

Corrigé de l'exercice 1.23 page 13

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{4u_n} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{4u_n} - \frac{2u_n}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4u_n}{2u_n - 1} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2u_n}{u_n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2(u_n - \frac{1}{2})}{u_n - \frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ et de raison

$$r = 2.$$

- 2** D'après ce qui précède, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ car $r > 0$ d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} = +\infty,$$

ce qui signifie que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 1.24 page 13

1 On trouve :

- $u_1 = -0,5$
- $u_2 = 0,75$
- $u_3 = 3,375$
- $u_4 = 6,6875$
- $u_5 = 10,34375$
- $u_6 = 14,171875$
- $u_7 = 18,0859375$
- $u_8 = 22,04296875$
- $u_9 = 26,021484375$

On peut alors conjecturer que (u_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$.

2 a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 4(n+1) + 10$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10 \\
 &= \frac{1}{2}u_n - 2n + 5 \\
 &= \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10) \\
 &= \frac{1}{2}v_n.
 \end{aligned}$$

On déduit alors que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 \times 0 + 10 = 11$.

b. On a alors : $v_n = 11 \times \frac{1}{2^n}$ et donc : $u_n = v_n + 4n - 10 = \frac{11}{2^n} + 4n - 10$.

$$\begin{aligned}
 \text{c. } S_n &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{11}{2^k} + 4k - 10 \right) \\
 &= 11 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} + 4 \sum_{k=0}^n k - 10 \sum_{k=0}^n 1 \\
 &= 11 \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 10(n+1) \\
 &= 22 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + 2(n-5)(n+1).
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.25 page 13

1 Posons $\mathcal{P}(n) : 4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

• **Initialisation.**

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 12 = 1 + 12 = 13.$$

On a alors : $4 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Supposons que pour un entier k fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(k) \text{ vraie} &\Rightarrow 4 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 20 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{4} \times 4 \leq \frac{1}{4} u_k \leq \frac{1}{4} \times u_{k+1} \leq \frac{1}{4} \times 20 \\
 &\Rightarrow 1 + 12 \leq \frac{1}{4} u_k + 12 \leq \frac{1}{4} u_{k+1} + 12 \leq 5 + 12 \\
 &\Rightarrow 13 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 17 \\
 &\Rightarrow 4 \leq 13 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 17 \leq 20 \\
 &\Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie.}
 \end{aligned}$$

• **Conclusion.**

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(k) \text{ vraie} \Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie}$ donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , à savoir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.$$

2 D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée (par 20) donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

- 3** **a.** $v_0 = u_0 - 16 = 4 - 16 = -12$.
b. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - 16 \\
 &= \frac{1}{4} u_n + 12 - 16 \\
 &= \frac{1}{4} u_n - 4 \\
 &= \frac{1}{4} \left(u_n - \frac{4}{1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} (u_n - 16) \\
 &= \frac{1}{4} v_n.
 \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

c. On déduit de la question précédente que :

$$v_n = v_0 \times q^n = -12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

et que :

$$u_n = v_n + 16 = 16 - 12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

d. $0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 16$.

Corrigé de l'exercice 1.26 page 14

1 $u_{n+1} = u_n(1 - u_n), u_0 = 0,4.$

a. $u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n$
 $= -u_n^2$
 ≤ 0 car un carré est toujours positif ou nul.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$; la suite (u_n) est donc décroissante.

b. • *Initialisation.*

$u_0 = 0,4$ donc $0 \leq u_0 \leq 1.$

• *Hérédité.*

On suppose que pour un entier n donné, $0 \leq u_n \leq 1.$

$u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$; de plus, par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq 1$ et donc :

$$0 \leq 1 - u_n \leq 1.$$

Par produit, $0 \leq u_n(1 - u_n) \leq 1.$ Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1.$

L'hérédité est alors vérifiée : $u_n \Rightarrow u_{n+1}.$

Par conséquent, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1.$

c. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge d'après le théorème de convergence des suites monotones.

d. Avec de telles hypothèses, la population de coccinelles tend à disparaître.

2 $u_{n+1} = 1,8u_n(1 - u_n), u_0 = 0,3.$

a. $f(x) = 1,8x(1 - x) = 1,8(x - x^2)$ donc $f'(x) = 1,8(1 - 2x).$

Donc $f'(x) \geq 0 \iff 1 - 2x \geq 0$

$\iff 1 \geq 2x$

$\iff x \leq \frac{1}{2}$

De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,8 \times 0,5 \times 1,5 = 0,45 \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$ D'où le tableau :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
f	0 \longrightarrow	0,45 \longrightarrow	0

b. • *Initialisation.*

$u_0 = 0,3$ et $u_1 = f(0,3) = 1,8 \times 0,3 \times 0,7 = 0,378.$

Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}.$

- *Hérédité.*

Supposons que pour un entier n donné, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\iff f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

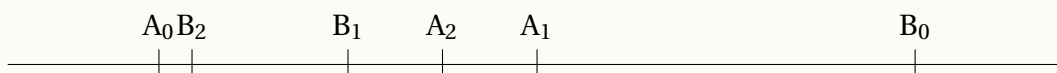
$$\iff 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}. \text{ L'hérédité est alors vérifiée.}$$

Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

- c. De la question précédente, on déduit que (u_n) est croissante ($u_{n+1} \geq u_n$) et majorée (par $\frac{1}{2}$) donc elle converge.

Corrigé de l'exercice 1.27 page 15

1



$$\bullet a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet b_1 = \frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\bullet b_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{7}{16}$$

- 2 On peut s'inspirer de ce qui a été fait à la question précédente pour écrire :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}} \quad ; \quad \boxed{b_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}}$$

- 3 $u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$

$$= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

$$= \frac{b_n - a_{n+1}}{2}$$

$$u_{n+1} = \frac{b_n - \frac{a_n + b_n}{2}}{2}$$

$$= \frac{2b_n - a_n - b_n}{4}$$

$$= \frac{b_n - a_n}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} \times (a_n - b_n)$$

$$\boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 4 \quad v_{n+1} &= 3a_{n+1} + 2b_{n+1} \\
 &= \frac{3a_n + 3b_n}{2} + \frac{2a_n + 2a_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{5a_n + 3b_n + 2a_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{5a_n + 3b_n + 2 \frac{a_n + b_n}{2}}{2} \\
 &= \frac{10a_n + 6b_n + 2a_n + 2b_n}{4} \\
 &= \frac{12a_n + 8b_n}{4} \\
 &= 3a_n + 2b_n
 \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est constante.

5 D'après les questions 3 et 4, on a :

$$\begin{cases} u_n = a_n - b_n & L_1 \\ v_n = 3a_n + 2b_n & L_2 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} 3u_n - v_n = -5b_n & 3L_1 - L_2 \\ 2u_n + v_n = 5a_n & 2L_1 + L_2 \end{cases}$$

D'où :

$$a_n = \frac{2u_n + v_n}{5} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{v_n - 3u_n}{5}.$$

Or, (u_n) est géométrique donc :

$$u_n = u_0 q^n = \underbrace{(-1)}_{=a_0-b_0} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

De plus, (v_n) est constante donc :

$$v_n = v_0 = 3a_0 + 2b_0 = 2.$$

On a alors :

$$a_n = \frac{-2\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 2}{5} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2 + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{5}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{4} < 1$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2}{5}.$$

On peut déduire alors que les points A_n et B_n se rapprochent de plus en plus du point d'abscisse $\frac{2}{5}$.

Corrigé de l'exercice 1.28 page 15

$$\begin{aligned}
 1 \quad a_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\
 &= 0,6u_n + 0,3v_n + 0,4u_n + 0,7v_n \\
 &= u_n + v_n \\
 &= a_n.
 \end{aligned}$$

Ainsi, (a_n) est constante.

Or, $a_0 = u_0 + v_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc $a_n = 1$ pour tout entier naturel n .

$$\begin{aligned}
 2 \quad b_{n+1} &= 4u_{n+1} - 3v_{n+1} \\
 &= 4(0,6u_n + 0,3v_n) - 3(0,4u_n + 0,7v_n) \\
 &= 2,4u_n + 1,2v_n - 1,2u_n - 2,1v_n \\
 &= 1,2u_n - 0,9v_n \\
 &= 0,3(4u_n - 3v_n) \\
 &= 0,3b_n.
 \end{aligned}$$

Ainsi, (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,3$ et de premier terme :

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 4u_0 - 3v_0 \\
 &= 4 \times 0,5 - 3 \times 0,5 \\
 b_0 &= 0,5.
 \end{aligned}$$

3 D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{2}(0,3)^n.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_n = 3u_n + 3v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 4u_n - 3v_n \\ 3a_n + b_n = 7u_n \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3v_n = 4\left(\frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n\right) - b_n \\ u_n = \frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{4}{7}a_n - \frac{1}{7}b_n \\ u_n = \frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{4}{7} - \frac{1}{14}(0,3)^n \\ u_n = \frac{3}{7} + \frac{1}{14}(0,3)^n \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$4 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,3)^n = 0 \text{ car } 0 < 0,3 < 1.$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \frac{3}{7}}.$$

Corrigé de l'exercice 1.29 page 16

- 1 a. T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.

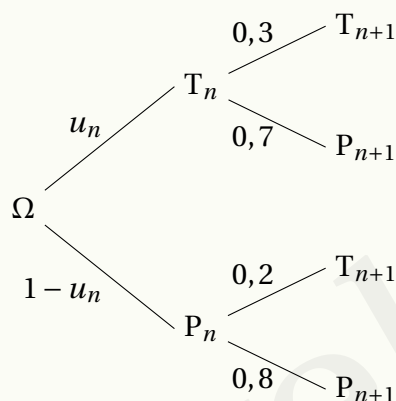
D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongoir est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.

- b. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25 = \frac{1}{4}.$$

- c. L'arbre est le suivant :



- d. Toujours d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p(T_{n+1}) \\
 &= p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) \\
 &= u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 \\
 &= 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n \\
 &= 0,1u_n + 0,2.
 \end{aligned}$$

- e. La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.
Il semble que u_n ait pour limite $0,222\dots$

- 2 a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9}$

$$\begin{aligned}
 &= 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} \\
 &= \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} \\
 &= \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} \\
 &= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n.
 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{10}$; son premier terme est :

$$v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}.$$

b. On sait que $v_n = v_1 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

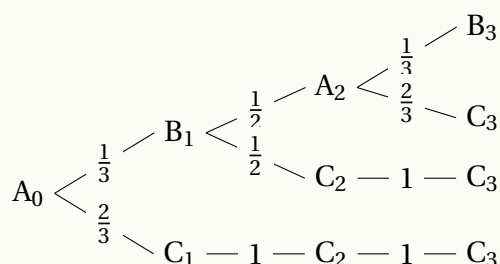
Comme $u_n = v_n + \frac{2}{9}$, on a $u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

c. Comme $0 < \frac{1}{10} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{9}$.

Or $\frac{2}{9} = 0,222\dots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.

Corrigé de l'exercice 1.30 page 17

1 Faisons un bel arbre de probabilités pour nous aider :



a. $a_1 = P(A_1) = 0$; $b_1 = \frac{1}{2}$ et $c_1 = \frac{2}{3}$ d'après l'énoncé.

$a_1 + b_1 + c_1 = 1$, ce qui est normal car la somme des probabilités d'événements formant une partition de l'univers est toujours égale à 1.

b. À l'instant $n = 2$, la puce peut se trouver en A ou C car à l'instant $n = 1$, elle se trouve en B ou C uniquement.

On a alors les valeurs de a_2 , b_2 et c_2 page suivante.

- $a_2 = P_{B_1}(A_2) \times P(B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

- $b_2 = 0$.

- $c_2 = 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

c. Pour $n = 3$, la puce se trouve en B ou C.

- $a_3 = 0$.

- $b_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$.

- $c_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$.

2 a. On s'inspire de ce qui a été fait pour conjecturer que $a_{2k+1} = 0$. En effet, pour les rangs impairs, la puce ne peut pas être en A car pour les rangs pairs, elle se trouve en A ou C.

b. $b_{2k+1} = P_{A_{2k}}(B_{2k+1}) \times P(A_{2k}) = \frac{1}{3} a_{2k}$.

$a_{2k+2} = P_{B_{2k+1}}(A_{2k+2}) \times P(B_{2k+1}) = \frac{1}{2} b_{2k+1}$.

c. De la question précédente, on déduit : $a_{2k+2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a_{2k} = \frac{1}{6} a_{2k}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } a_{2k} &= \frac{1}{6} a_{2(k-1)} = \frac{1}{6^2} a_{2(k-2)} = \frac{1}{6^3} a_{2(k-3)} = \dots \\ &= \frac{1}{6^k} a_{2(k-k)} = \frac{1}{6^k} a_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{a_{2k} = \frac{1}{6^k}} \quad \text{car } a_0 = 1.$$

3 $a_n \leq 10^{-6} \Rightarrow a_{2k} \leq 10^{-6}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6^k} \leq 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{6^k} \leq \ln 10^{-6}$$

$$\Rightarrow k \ln \frac{1}{6} \leq -6 \ln 10$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{-6 \ln 10}{-\ln 6}$$

$$\Rightarrow k \geq 8 \Rightarrow n \geq 4$$

Le plus petit entier n tel que $a_n \leq 10^{-6}$ est donc $n = 4$.

4 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{6^k} = 0$.

Donc (a_n) converge vers 0.

Corrigé de l'exercice 1.31 page 18

1 Pour que (v_n) soit géométrique de raison q , il faut que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= q v_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} u_n - \frac{2}{3} + \lambda &= q (u_n + \lambda) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(u_n - \frac{4}{3} + 2\lambda \right) &= q (u_n + \lambda). \end{aligned}$$

Ainsi, il faut que $q = \frac{1}{2}$ et que $-\frac{4}{3} + 2\lambda = \lambda$, soit $\boxed{\lambda = \frac{4}{3}}$.

2 (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, donc elle converge vers 0 (car sa raison est strictement comprise entre 0 et 1).

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{4}{3} \right) = 0$, ce qui signifie que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{4}{3}}$.

Corrigé de l'exercice 1.32 page 18

1 La fonction Python complétée est la suivante :

Code Python 1-4

```
1 def heron(a,u,n):
2     if u <=0:
3         return "Le premier terme doit être strictement positif."
4     elif a <= 0:
5         return "La valeur de 'a' doit être strictement positive."
6     else:
7         L = [ u ]
8         k = 0
9         while k < n:
10            u = 0.5 * (u + a / u)
11            L.append(u)
12            k = k + 1
13        return L
```

2 On peut constater :

- d'une part que la suite $(u(4)_n)$ semble être décroissante;
- d'autre part, que la suite $(u(4)_n)$ semble converger vers 2.

3 On a : $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right) = \frac{x^2 - a}{2x^2}$.

$x^2 - a$ est un polynôme du second degré dont les racines sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$, d'où le tableau page suivante.

x	0	\sqrt{a}	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f		$\searrow \sqrt{a} \nearrow$	

4 D'après les variations de f , si $x \in [0; \sqrt{a}[$ alors $f(x) \geq \sqrt{a}$.

Or, $u_1 = f(u_0)$ donc si $u_0 \in]0; \sqrt{a}]$ alors $u_1 \geq \sqrt{a}$.

De plus, si $u_0 \geq \sqrt{a}$, d'après les variations de f , $f(u_0) \geq \sqrt{a}$.

Ainsi, quelle que soit la valeur de $u_0 > 0$, $u_1 \geq \sqrt{a}$.

5 Montrer que pour tout réel $x \geq \sqrt{a}$, $f(x) \leq x$.

Considérons alors la fonction $g(x) = f(x) - x$:

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} - x \right).$$

Sa dérivée est alors :

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{a}{x^2} - 1 \right)$$

donc $g'(x) < 0$ sur $[\sqrt{a}; +\infty[$, ce qui signifie que g est strictement décroissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$.

De plus, $g(\sqrt{a}) = 0$ donc $g(x) \leq 0$ sur $[\sqrt{a}; +\infty[$. On a alors $f(x) - x \leq 0$, soit $f(x) \leq x$.

6 Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sqrt{a} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

• *Initialisation.*

$u_1 > \sqrt{a}$ et $u_2 = f(u_1) \leq u_1$ d'après la question précédente.

On a donc bien $\sqrt{a} \leq u_2 \leq u_1$.

L'initialisation est alors réalisée.

• *Hérédité.*

Supposons que pour un entier $k > 1$, $\sqrt{a} \leq u_{k+1} \leq u_k$.

D'après la question **3**, f est strictement croissante sur $]\sqrt{a}; +\infty[$ donc :

$$f(\sqrt{a}) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$$

soit :

$$\sqrt{a} \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}.$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$,
 $\sqrt{a} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

7 La suite (u_n) est, d'après la question précédente, décroissante et minorée. Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge.

8 On admet que $\ell = f(\ell)$, soit $f(\ell) - \ell = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} g(\ell) = 0 &\iff \frac{a}{\ell} - \ell = 0 \\ &\iff a - \ell^2 = 0 \\ &\iff \ell = -\sqrt{a} \text{ ou } \ell = \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Or, $\ell > 0$ car $u_n > 0$. Donc $\ell = \sqrt{a}$.

Ainsi, la limite de (u_n) est égale \sqrt{a} .

Corrigé de l'exercice 1.33 page 19

1 a. $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$.

$$v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3.$$

b. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2u_n + v_n - v_n \\ &= u_n \\ &> 0 \text{ par hypothèses de départ.} \end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} > v_n$ pour tout entier n ; la suite (v_n) est donc strictement croissante.

Or, $v_0 = 1$ donc pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.

c. • *Initialisation.*

$u_0 = 1 \geq 0 + 1$. L'inégalité est donc vraie pour $n = 0$.

- *Hérédité.*

Supposons que pour un entier k fixé, $u_k \geq k + 1$ (HR).

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + v_k \\ &\geq (k + 1) + 1 \text{ par (HR) et car } v_n \geq 1. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, quel que soit l'entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.

- d. $u_n \geq n + 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2

- a. On sait que pour tout entier naturel n ,

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$$

donc, en divisant par $u_n^2 > 0$:

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$$

- b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{u_n^2} \right) = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes (théorème d'encadrement), on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$$

- c. D'après la question précédente, par somme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2 = 2 + 0$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \sqrt{2}$$

- d. Pour tout entier naturel n , on a d'une part :

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{2 + r_n}{1 + r_n} &= \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} \\ &= \frac{\frac{2u_n + v_n}{u_n}}{\frac{u_n + v_n}{u_n}} \\ &= \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}. \end{aligned}$$

Donc :

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$$

- e. La valeur de n renvoyée par le programme correspond à la première valeur de n pour laquelle $|r - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$.

Cela signifie que r_5 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

Corrigé de l'exercice 1.34 page 20

$$\begin{aligned} 1 \quad v_{n+1} &= u_{n+1} + Q(n+1) \\ &= \lambda u_n + P(n) + Q(n+1) \\ &= \lambda \left(u_n + \frac{1}{\lambda} P(n) + \frac{1}{\lambda} Q(n+1) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } (v_n) \text{ est une suite géométrique} &\iff u_n + \frac{1}{\lambda} P(n) + \frac{1}{\lambda} Q(n+1) = v_n \\ &\iff \frac{1}{\lambda} P(n) + \frac{1}{\lambda} Q(n+1) = Q(n) \\ &\iff P(n) = \lambda Q(n) - Q(n+1). \end{aligned}$$

$$2 \quad \text{Posons } Q(n) = \alpha n + \beta.$$

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} P(n) &= \lambda Q(n) - Q(n+1) \\ &\iff an + b = \lambda \alpha n + \lambda \beta - \alpha n - \alpha - \beta \\ &\iff (a + \alpha - \lambda \alpha)n + b + \alpha + \beta - \lambda \beta = 0 \\ &\iff \begin{cases} a + \alpha(1 - \lambda) = 0 \\ b + \alpha + \beta(1 - \lambda) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De la 1^{re} équation, on déduit :

$$\alpha = \frac{a}{\lambda - 1}$$

et de la 2^e équation, on tire :

$$\beta = \frac{1}{\lambda - 1} \left(b + \frac{a}{\lambda - 1} \right).$$

Ainsi,

$$Q(n) = \frac{a}{\lambda - 1} n + \frac{b}{\lambda - 1} + \frac{a}{(\lambda - 1)^2}.$$

- 3 Nous savons que (v_n) est une suite géométrique de raison λ . Ainsi, $v_n = v_0 \lambda^n$ pour tout entier naturel n .

$$\text{Or, } v_0 = u_0 + Q(0) = u_0 + \frac{b}{\lambda - 1} + \frac{a}{(\lambda - 1)^2}, \text{ donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(u_0 + \frac{b}{\lambda - 1} + \frac{a}{(\lambda - 1)^2} \right) \lambda^n.$$

De plus, $v_n = u_n + Q(n)$, donc $u_n = v_n - Q(n)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_0 + \frac{b}{\lambda - 1} + \frac{a}{(\lambda - 1)^2} \right) \lambda^n - \frac{a}{\lambda - 1} n - \frac{b}{\lambda - 1} - \frac{a}{(\lambda - 1)^2}.$$

- 4 Application : $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 7$ donc $\lambda = 2$, $a = -3$ et $b = 7$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(5 + \frac{7}{2-1} + \frac{-3}{(2-1)^2}\right) \times 2^n - \frac{-3}{2-1}n - \frac{7}{2-1} - \frac{-3}{(2-1)^2}$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 9 \times 2^n + 3n - 4.$$

Vérifions sur les premiers termes :

n	Avec la formule de récurrence	Avec la formule trouvée
0	$u_0 = 5$ par définition	$u_0 = 9 \times 2^0 + 3 \times 0 - 4 = 9 - 4 = 5$
1	$u_1 = 2u_0 - 3 \times 0 + 7 = 10 + 7 = 17$	$u_1 = 9 \times 2^1 + 3 \times 1 - 4 = 18 + 3 - 4 = 17$
2	$u_2 = 2u_1 - 3 \times 1 + 7 = 34 - 3 + 7 = 38$	$u_2 = 9 \times 2^2 + 3 \times 2 - 4 = 36 + 6 - 4 = 38$

Corrigé de l'exercice 1.35 page 21

- 1 a. Pour calculer u_2 , on prend en compte que l'allongement est homogène; ainsi, quand Léo est à 1 mètre du point de départ, quand on tire l'élastique pour faire passer sa longueur de 100 mètres à 200 mètres, on la multiplie par 2 donc on doit faire de même pour la longueur qui sépare Léo du point de départ.
Par conséquent, après l'allongement, Léo se trouve à $1 \times 2 = 2$ mètres du point de départ. Il suffit ensuite d'ajouter 1 mètre et on obtient $u_2 = 3$.
- b. Sur ce même principe, on calcule u_3 : quand on allonge l'élastique de sorte à ce que sa longueur passe de 200 mètres à 300 mètres, on la multiplie par $\frac{300}{200} = 1,5$.
Pour obtenir la valeur de u_3 , on multiplie donc u_2 par 1,5 puis on ajoute 1 :

$$u_3 = 1,5u_2 + 1 = 1,5 \times 3 + 1 = 5,5.$$

- 2 Selon le même principe que précédemment, pour calculer u_{n+1} connaissant u_n , il faut trouver le « coefficient d'allongement ». Notons ℓ_n la longueur de l'élastique, en mètre, à l'étape n (avant l'allongement).

Ainsi, $\ell_1 = 100$, $\ell_2 = 200$ et par extension, $\ell_n = 100n$.

Le « coefficient d'allongement » est donc $k_n = \frac{100(n+1)}{100n} = 1 + \frac{1}{n}$.

Ainsi,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n + 1.$$

- 3 $u_3 = 5,5$ et $\ell_3 = 300$ donc $p_3 = \frac{u_3}{\ell_3} \times 100 = \frac{11}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

- 4 Montrons par récurrence la formule proposée.

- *Initialisation.*

Nous l'avons montré pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

- *Hérédité.*

Supposons que pour un entier $n > 0$, $p_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Quand on allonge l'élastique de 100 mètres, le pourcentage ne change pas car l'allongement est homogène (conserve les proportions). En ajoutant 1 mètre, proportionnellement à la longueur ℓ_{n+1} , on a ajouté $\frac{1}{n+1}$ %.

Ainsi, $p_{n+1} = p_n + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.

L'hérédité est alors vérifiée. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

5 Faisons un raisonnement par récurrence encore une fois.

- *Initialisation.*

Pour mieux comprendre, nous n'allons pas vérifier uniquement pour le premier rang, mais pour plusieurs.

$$\rightarrow p_{2^0} = p_1 = 1 \geq 1 + \frac{0}{2};$$

$$\rightarrow p_{2^1} = p_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2};$$

$$\rightarrow p_{2^2} = p_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} \geq 1 + 2 \times \frac{1}{2};$$

$$\rightarrow p_{2^3} = p_8 = p_4 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \geq 1 + 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \times \frac{1}{2}.$$

L'inégalité est alors vraie pour $n = 0$, jusqu'à $n = 3$.

- *Hérédité.*

On suppose que $p_{2^{n-1}} \geq 1 + (n-1) \times \frac{1}{2}$.

$$p_{2^n} = p_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{=s_n}.$$

Or, $\frac{1}{2^k+p} \geq \frac{1}{2^{k+1}}$ pour tout entier k et pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq k+1$.

Ainsi, dans la mesure où il y a $2^{(n-1)}$ termes dans s_n ,

$$s_n \geq 2^{(n-1)} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$p_{2^n} \geq 1 + (n-1) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

soit

$$p_{2^n} \geq 1 + n \times \frac{1}{2}.$$

L'hérédité est vérifiée donc la formule est vraie pour tout entier naturel n .

6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2}n\right) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des suites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2^n} = +\infty$.

En posant $N = 2^n$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} N = +\infty$, on peut écrire $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N = +\infty$.

Cela sous-entend donc que le pourcentage de chemin fait par Léo sur l'élastique dépassera 100, ce qui signifie qu'il arrivera au bout de l'élastique.

Cela peut alors surprendre car le procédé ne permet a priori pas de l'envisager. C'est ce que l'on appelle un paradoxe qui peut s'expliquer de la façon suivante : pour n assez grand, on démontre (pas nous ! mais les grands mathématiciens...) que $p_n \approx \ln n$ (à une constante près, que l'on appelle la constante d'Euler, et que l'on note γ) donc si on cherche n tel que $p_n \geq 100$, on cherche n pour que $\ln n \geq 100$, soit $n \geq e^{100}$. Or, $e^{100} \approx 2,7 \times 10^{43}$. Alors, même si Léo faisait 1 mètre par seconde, il faudra à peu près $2,7 \times 10^{43}$ secondes pour qu'il atteigne le bout de l'élastique, ce qui correspond à $8,56 \times 10^{35}$ années... Autant dire jamais !

2

Continuité, dérivabilité et convexité d'une fonction

Plan du chapitre

I	Limites	56
1	Limite aux infinis	56
2	Limite en un point fini	57
3	Opérations et comparaison sur les limites	58
II	Continuité	59
1	Continuité en un point a	59
2	Fonctions continues de référence	60
3	Continuité d'une fonction composée	60
4	Continuité et tableau de variations	61
5	Fonction définie et fonction continue	61
6	Théorème des valeurs intermédiaires	62
III	Dérivation	62
1	Dérivabilité en un point a	62
2	Dérivabilité et continuité	63
3	Règles de dérivation	63
IV	Convexité d'une fonction	64
1	Dérivée seconde	64
2	Fonction concave, fonction convexe	64
3	Point d'inflexion	64
	Enoncés	66
	Corrigés des exercices	87

I - Limites

I . 1 - Limite aux infinis

Définition 6

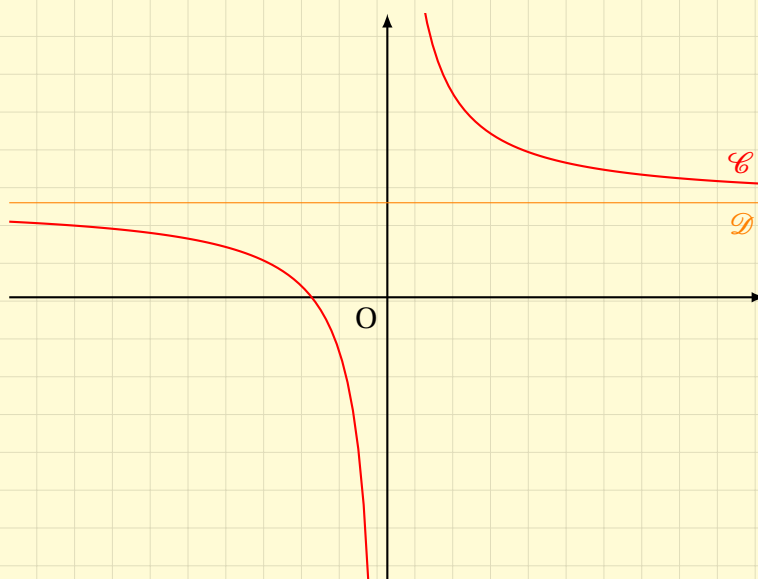
La limite d'une fonction f en $-\infty$ (resp. $+\infty$) est la valeur (si elle existe) vers laquelle se rapproche $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$). On la note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$). Cette limite, quand elle existe, peut être un nombre réel ou un infini.

Exemple 7

- 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ car plus x se rapproche de $-\infty$, plus $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0.
- 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ car plus x devient grand, plus son carré aussi.

Remarque 7

Soit a un réel. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$) alors la courbe représentative \mathcal{C} de f se rapproche de la droite d'équation $y = a$ en $-\infty$ (resp. $+\infty$). Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une *asymptote horizontale* de \mathcal{C} .



Ici, \mathcal{D} est une asymptote horizontale de \mathcal{C} en $-\infty$ et en $+\infty$.

Propriété 6 (fractions rationnelles)

La limite aux infinis d'une fraction rationnelle est égale à la limite du rapport des termes de plus haut degré.

Exemple 8

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{8x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{8x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{-x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x) = -\infty.$$

Propriété 7 (exponentielle)

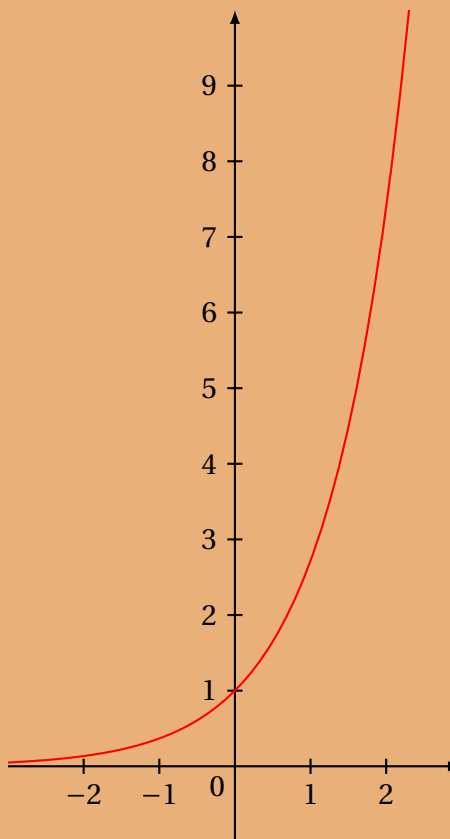
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

(L'exponentielle l'emporte sur tout polynôme)



I . 2 - Limite en un point fini

Définition 7

Soit a un réel fini. La limite d'une fonction f en a est la valeur vers laquelle $f(x)$ se rapproche quand x se rapproche de a . On la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Remarque 8

Il se peut que, lorsque x se rapproche de a tout en lui étant inférieur, la limite soit différente du cas où x se rapproche de a en lui étant supérieur. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x).$$

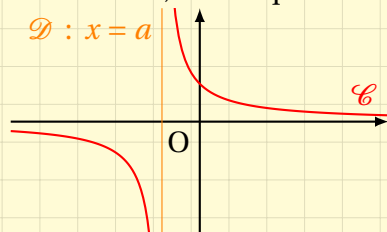
Exemple 9

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Remarque 9

Soit a un réel. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors la courbe représentative \mathcal{C} de f se rapproche de la droite d'équation $x = a$.

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* de \mathcal{C} .



Ici, \mathcal{D} est une asymptote verticale de \mathcal{C} en a .

Propriété 8

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty.$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^n} \right) = +\infty, n \in \mathbb{N}.$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x^{2n}} \right) = +\infty, n \in \mathbb{N}.$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right) = -\infty, n \in \mathbb{N}.$

I . 3 - Opérations et comparaison sur les limites

Dans un cas général, les opérations sur les limites de fonctions sont identiques à celles concernant les suites. Le *théorème des gendarmes* et le *théorème de comparaison* sont aussi valables pour les fonctions.

Propriété 9 (composition)

Soient u et v deux fonctions. On définit la fonction f par $f(x) = u[v(x)]$. Alors,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{X \rightarrow y} u(X) \quad , \quad \text{où } y = \lim_{x \rightarrow \alpha} v(x),$$

α pouvant représenter un nombre fini ou un infini.

Remarque 10

On peut aussi noter :

$$f(x) = u[v(x)] = (u \circ v)(x)$$

(lire « u rond v »). On dit que f est une *fonction composée*.

Exemple 10

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

II - Continuité

II . 1 - Continuité en un point a

Définition 8

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si :

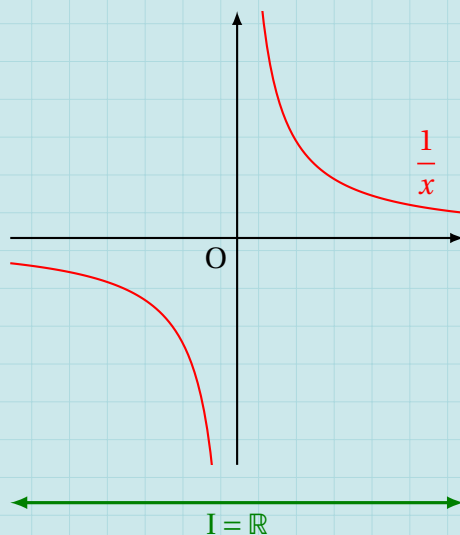
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

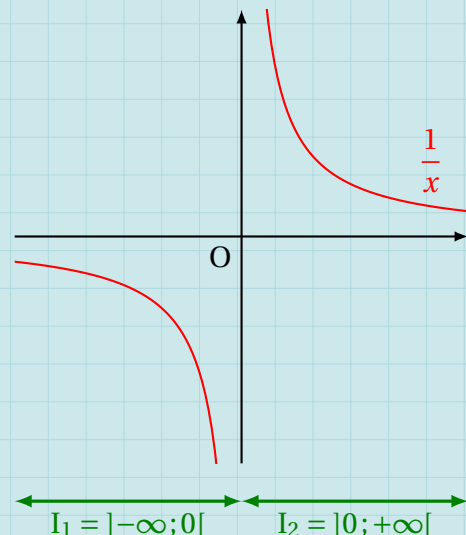
Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative d'une fonction continue sur I peut se tracer sans lever le crayon sur cet intervalle.

Exemple 11 (et contre-exemple)

La courbe représentative de la fonction inverse n'est pas continue sur \mathbb{R} (car ses limites en 0 sont infinies). En revanche, elle l'est sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$.



Il y a un « trou » au niveau de $x = 0$ donc la fonction n'est pas continue en 0, donc pas continue sur \mathbb{R} .



Il n'y a pas de trou sur chaque intervalle I_1 et I_2 donc la fonction est continue sur I_1 et sur I_2 .

Remarque 11

- Dans le second cas, on ne dit pas que la fonction est continue sur $I_1 \cup I_2$, mais *continue sur chacun des intervalles*.
- Quand une fonction n'est pas continue, on ne dit pas qu'elle est *discontinue*.

Définition 9

On appelle *point de discontinuité* tout point en lequel une fonction n'est pas continue.

Exemple 12

$x = 0$ est un point de discontinuité de la fonction inverse.

II . 2 - Fonctions continues de référence

Propriété 10

- 1 Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} .
- 2 Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- 3 La fonction racine carrée est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- 4 Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur \mathbb{R} .
- 5 Les fonctions obtenues par somme, produit ou quotient de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Exemple 13

- 1 La fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 5$ est continue sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.
- 2 La fonction $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ est continue sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions continues sur \mathbb{R} .
- 3 La fonction $x \mapsto (x^2 + 1) \cos(x)$ est continue sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions continues sur \mathbb{R} .
- 4 La fonction $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ est continue sur $] -\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur ces deux intervalles.

II . 3 - Continuité d'une fonction composée

Propriété 11

Soit $f = v \circ u$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .
Si u est continue sur I et si v est continue sur $u(I)$ alors f est continue sur I .

Exemple 14


Soient $u : x \mapsto x - 1$ et $v : \sqrt{x}$.

Notons $f(x) = (v \circ u)(x) = \sqrt{x-1}$.

u est continue sur \mathbb{R} mais f n'est pas définie sur \mathbb{R} car $x - 1 < 0$ pour $x < 1$. Ainsi, f est définie sur $I = [1 ; +\infty[$, et elle est continue sur I car u est continue sur I et v est continue sur $u(I) = [0 ; +\infty[$.

II . 4 - Continuité et tableau de variations

Dans un tableau de variations, un point de discontinuité est représenté par une double barre verticale. Par exemple, pour la fonction inverse, on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

II . 5 - Fonction définie et fonction continue

Une fonction peut être définie sur un intervalle I sans nécessairement être continue sur I .

Exemple 15

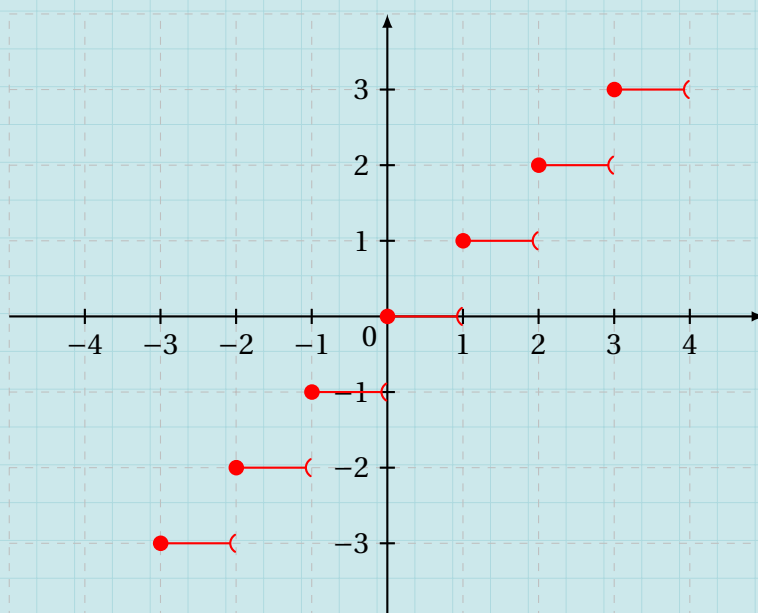
on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = E(x) = \lfloor x \rfloor.$$

Cette fonction est appelée *fonction partie entière* : pour tout entier relatif n ,

$$\forall x \in [n ; n+1[, \quad f(x) = n.$$

Sa représentation graphique est la suivante :



Cette fonction est définie en tout point de \mathbb{R} , mais elle n'est pas continue sur \mathbb{R} .

II . 6 - Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .

Attention 5



Ce théorème assure, sous certaines hypothèses, l'existence d'*au moins un* antécédent à k , mais il n'assure pas son unicité et ne permet pas de calculer sa valeur.

Propriété 12 (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a ; b]$.

Exemple 16

Soit $f(x) = \cos x - x$. Alors, $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur \mathbb{R} donc f est strictement décroissante. f est aussi continue sur \mathbb{R} comme la somme de deux fonctions continues sur \mathbb{R} .

De plus,

- $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$
- $f(\pi) = \cos \pi - \pi = -\pi < 0$

donc $0 \in]f(\pi) ; f(0)[$. Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; \pi]$.

III - Dérivation

III . 1 - Dérivabilité en un point a

Définition 10

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I . On dit que f est dérivable en a si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est une limite réelle finie ℓ .

ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a , et on le note $f'(a)$.

Par extension, on dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point a de I . La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée fonction dérivée de f .

III . 2 - Dérivabilité et continuité

Théorème 5

Si f est une fonction définie et dérivable en a alors elle est continue en a .

Attention 6



La réciproque de ce théorème est fautive : une fonction peut être continue sans être dérivable. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0 car :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +1.$$

III . 3 - Règles de dérivation

Théorème 6 (théorème de dérivation des fonctions composées)

Soit $f(x) = (v \circ u)(x)$. Sa dérivée, quand elle existe, est :

$$f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)].$$

On en déduit alors les propriétés suivantes :

Propriété 13

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Dérivée	Condition
e^u	$u' e^u$	
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I
u^n	$nu' u^{n-1}$	
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	

Exemple 17

Soit $f(x) = e^{x^2}$.

On peut écrire $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$.

Ainsi, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$.

IV - Convexité d'une fonction

IV . 1 - Dérivée seconde

Définition 11

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée f' soit elle aussi dérivable sur I .

On appelle *dérivée seconde de f* la dérivée de la dérivée de f , et on la note f'' .

Exemple 18

Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = (3x^2)' = 6x$.

IV . 2 - Fonction concave, fonction convexe

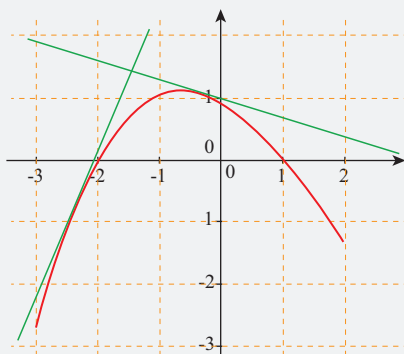
Définition 12

On dit que f est *concave* sur un intervalle I si $f''(x) < 0$ sur I .

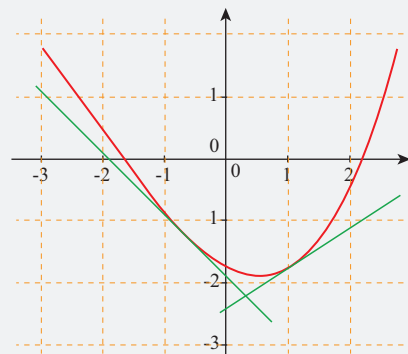
On dit que f est *convexe* sur un intervalle I si $f''(x) > 0$ sur I .

Interprétation graphique :

- la courbe représentative d'une fonction *convexe* sur un intervalle I sera toujours *au-dessus* de ses tangentes;
- la courbe représentative d'une fonction *concave* sur un intervalle I sera toujours *en dessous* de ses tangentes.



Fonction concave sur $[-3 ; 2]$



Fonction convexe sur $[-3 ; 2]$

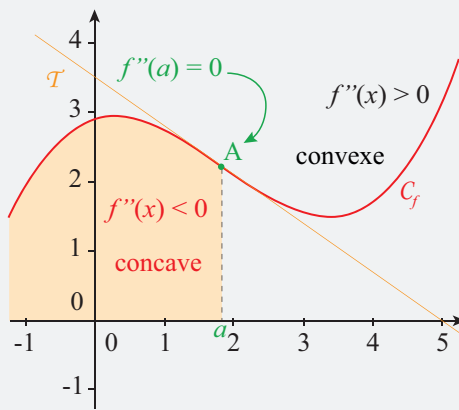
IV . 3 - Point d'inflexion

Définition 13

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

On dit que le point de coordonnées $(a ; f(a))$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

Graphiquement, cela se traduit par un changement de convexité en a .

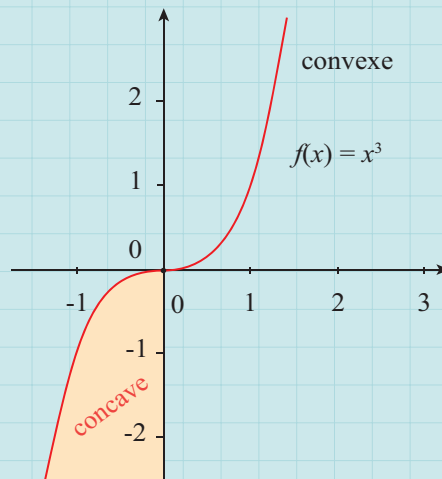


Exemple 19

Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f''(x) = 6x$ et :

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty ; 0[$;
- $f''(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$;
- $f''(x) = 0$.

Donc le point de coordonnées $(0 ; f(0))$, c'est-à-dire l'origine du repère, est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .



Calculs de limites

Limites à l'infini

Exercice 2.1 (divers cas)

Calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$.

1 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

3 $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

2 $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4 $k(x) = \frac{x^2 + 1}{\sin \frac{1}{x}}$

Solution page 87

Exercice 2.2 (fractions rationnelles)

Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{4+x}$

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1}$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1}$

Solution page 87

Exercice 2.3 (parlons asymptôte)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x + 1}{x - 5}.$$

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale dont on donnera son équation.

Solution page 89

Exercice 2.4 (théorèmes de comparaison et des gendarmes)

À l'aide du théorème de comparaison ou du théorème de gendarmes, calculer les limites suivantes.

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x^2}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sin x)$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)e^x$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{x - 7 \sin x}$

Solution page 89

Exercice 2.5 (expressions conjuguées)



À l'aide d'une expression conjuguée, déterminer les limites suivantes.

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})$

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3-x} - \sqrt{x^2-3})$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2+x+1})$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} - \sqrt{10-x})$

Solution page 91

Exercice 2.6 (pêle-mêle)



Calculer les limites suivantes.

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + 4x - 1}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1})$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} \right)$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1})$

Solution page 93

Exercice 2.7 (limites d'une fonction)



Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Solution page 94

Exercice 2.8 (avec une exponentielle)



Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5)e^{2x}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{7+2x}$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{3x-2}$

6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$

Solution page 95

Limites en un nombre fini

Exercice 2.9 (fractions rationnelles)



Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{3x - 5}{x - 2}$

2 $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x - 9}{x - 3}$

3 $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 9x - 5}$

4 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 8x - 9}$

5 $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8}$

6 $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4}$

Solution page 97

Exercice 2.10 (méthodes diverses)



Calculer les limites suivantes.

1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$

2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x - 2}$

3 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$

4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

Solution page 99

Exercice 2.11 (règle de l'Hospital)



Soient f et g deux fonctions définies et dérivables en un nombre réel a telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.

1 Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

On pourra considérer le taux d'accroissement des fonctions f et g en $x = a$.

2 Application : calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)}$

Solution page 100

Exercice 2.12 (avec une exponentielle)



Calculer les limites suivantes.

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$

2 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2e^{x-1}}{e^{x-1} - 1}$

Solution page 100

Exercice 2.13 (pour les cracks)



On pose :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Solution page 101

Exercice 2.14 (pour les cracks)



On pose :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} - \sqrt{7}}{x - 2}.$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Solution page 101

Continuité et dérivabilité

Lectures graphiques

Exercice 2.15 (tangente et équation)



On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$ page suivante. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

à l'aide du tableau de variations, répondre aux questions suivantes.

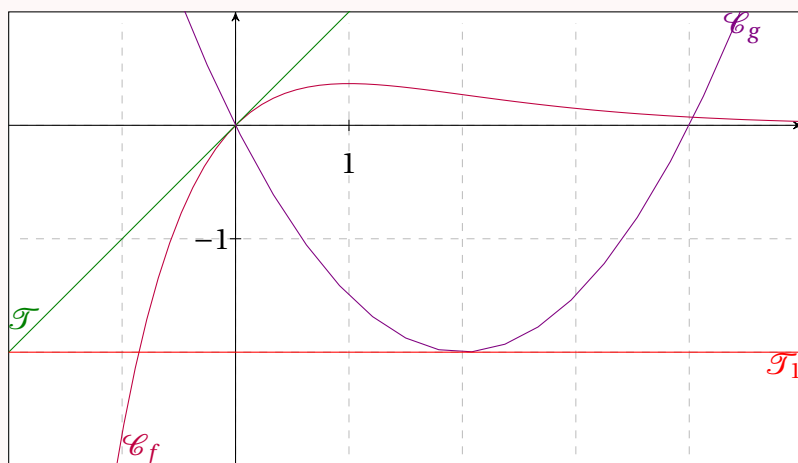
Aucune justification n'est demandée.

x	2	3	10	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		<div><div><div>$-\infty$</div><div>6</div><div>4</div></div><div><div>$-\infty$</div><div>-5</div><div>4</div></div></div>			

- Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
- Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$?

Solution page 102

Exercice 2.16 (nombres dérivés et inéquation)



- \mathcal{T} est la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
- \mathcal{T}_1 est la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 2.
- \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_f se coupent en deux points d'abscisses respectives 0 et 4.

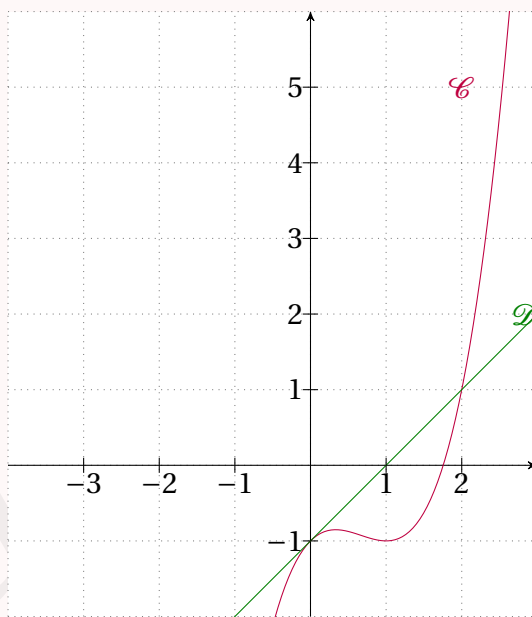
À l'aide du graphique ci-dessus, répondez aux questions suivantes.

- 1 Que vaut $f'(0)$? $g'(2)$?
- 2 Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sur $[-2; 5]$.

Solution page 102

Exercice 2.17 (nombres dérivés et équation)

Une fonction f est représentée par la courbe \mathcal{C} ci-dessous.



\mathcal{D} est la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
Le point de \mathcal{C} d'abscisse 1 est un minimum local.

Répondre aux questions suivantes par lectures graphiques :

- 1 Donner la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$.
- 2 Donner la valeur de $f'(1)$.
- 3 Donner, sur $[-3; 3]$, les solutions de l'équation :

$$f(x) = x - 1.$$

- 4 Dresser un tableau de signes de la fonction f' .

Solution page 102

Exercice 2.18 (image, nombre dérivé et tableau de signes)

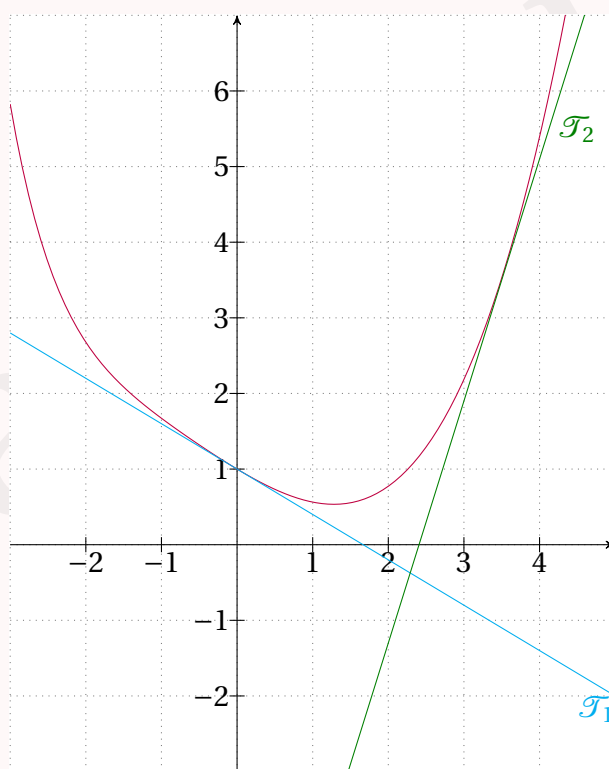


La courbe suivante représente une fonction f sur $[-3; 5]$.

La droite \mathcal{T}_1 est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

La droite \mathcal{T}_2 est tangente à la courbe au point d'abscisse 3,5.

- 1 Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
- 2 Avec la précision que permet le graphique, déterminer $f(3,5)$ et $f'(3,5)$.
- 3 Dresser un tableau de signes de f' avec la précision que permet le graphique.



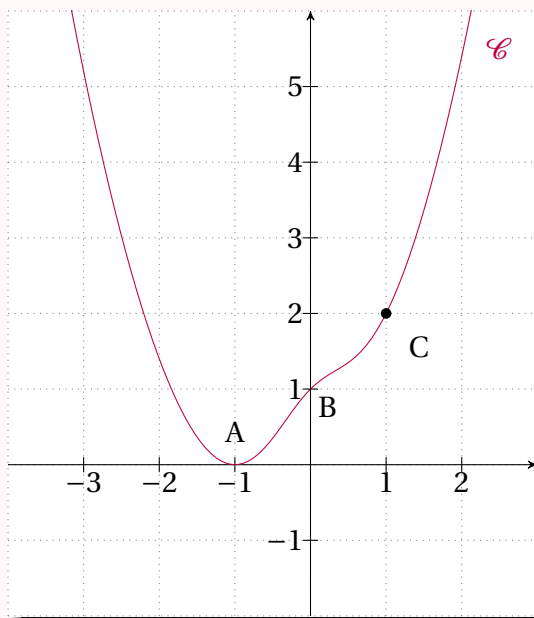
Solution page 103

Exercice 2.19 (coefficients indéterminés)



La courbe \mathcal{C} ci-dessous est celle d'une fonction f telle que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2 + 1}.$$



On sait :

- Condition (1) : que les points A $(-1; 0)$, B $(0; 1)$, C $(1; 2)$ appartiennent à \mathcal{C} ;
- Condition (2) : l'axe des abscisses est tangente à \mathcal{C} au point A.

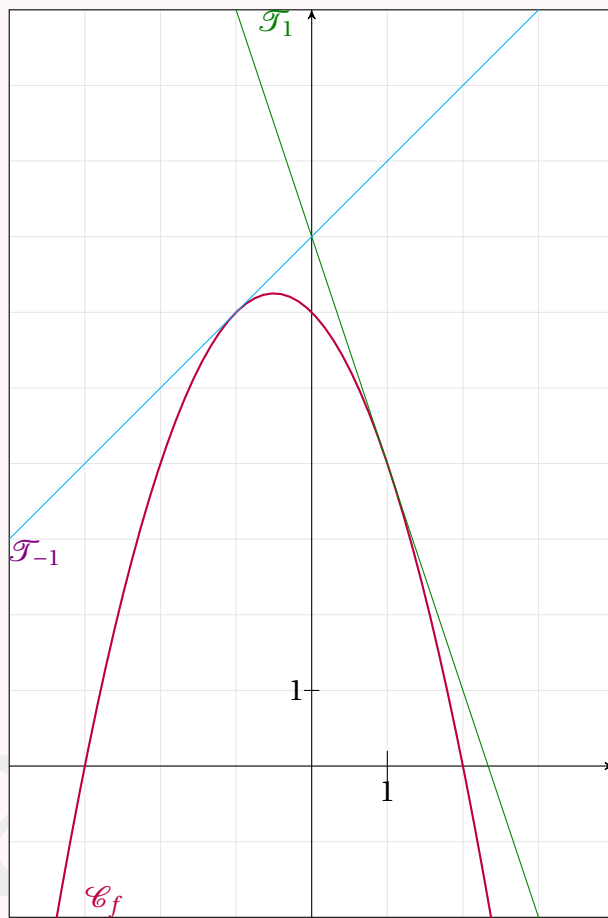
- 1 Exprimez en fonction de a , b , c et d la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.
Quelle équation peut-on alors écrire à partir de la condition (2) ?
- 2 écrivez, en fonction de a , b , c et d , les trois équations que permet d'établir la condition (1).
- 3 Trouvez alors, à l'aide des quatre équations établies, la valeur de a , b , c et d .

Solution page 103

Exercice 2.20 (coefficients indéterminés)



On a représenté ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_{-1} .



On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- 1 Par lecture graphique, donner la valeur de $f(0)$.
En déduire la valeur de c .
- 2 Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .
- 3 Par lecture graphique, donner la valeur des nombres $f'(1)$ et $f'(-1)$.
En déduire les valeurs de a et b .
- 4 Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Retrouver ce résultat par le calcul.

Solution page 104

Fonctions définies par morceaux

Exercice 2.21 (continuité en un point)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Justifier.

Solution page 105

Exercice 2.22 (continuité en un point)

On définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - k & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de k la fonction g est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Solution page 105

Exercice 2.23 (continuité en un point et dérivabilité)

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; 4]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

- 1 La fonction f est-elle continue en 0?
- 2 La fonction f est-elle continue en 2?
- 3 Étudier la dérivabilité de la fonction f sur \mathcal{D} .
- 4 Interpréter graphiquement les résultats des questions 1 et 3.

Solution page 105

Exercice 2.24 (continuité et dérivabilité en un point)

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

- 1 f est-elle continue en 1?
- 2 f est-elle dérivable en 1?
- 3 Justifier que f est dérivable pour tout $x \neq 1$.

Solution page 107

Exercice 2.25 (racine carrée et cosinus)



On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1 f est-elle continue en 0?

2 f est-elle dérivable en 0?

Solution page 108

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 2.26 (exercice de base)



Montrer que l'équation $3x^3 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles dont on donnera une valeur approchée à 0,001 près.

Solution page 108

Exercice 2.27



On considère la fonction f définie sur $[-2; 1]$ par : $f(x) = xe^{-x} + 2$.

1 Montrer que $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

2 En déduire les variations de f .

3 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . Donner alors une valeur approchée de α au centième.

Solution page 109

Exercice 2.28 (taux de médicament)



On injecte par voie intraveineuse un médicament.

Le taux du produit dans le sang est modélisé par la fonction :

$$f(t) = (1 - 0,02t)e^{-0,2t}, \quad t \in [0; 50].$$

où t représente le temps après injection, exprimé en heures.

1 Montrer que f est strictement décroissante sur $[0; 50[$.

2 Montrer que l'équation $f(t) = 0,5$ admet une unique solution sur $[0; 50]$. En Donner alors une valeur approchée au dixième. Interpréter ce résultat.

Solution page 109

Exercice 2.29 (démonstration)



Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

En considérant la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.

Solution page 110

Exercice 2.30 (approximation d'une fonction par une autre)



Partie A

On considère la fonction u définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par :

$$u(x) = 1 + (x - 1)\sqrt{1 + x}.$$

- 1 Montrer que $u'(x) = \frac{3x+1}{2\sqrt{1+x}}$.
- 2 En déduire les variations de u , puis le signe de $u(x)$ sur $[0; \frac{1}{2}]$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur $[0; \frac{1}{2}]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad ; \quad g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2.$$

On considère alors la fonction d définie sur $[0; 1]$ par :

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

- 1 Montrer que $d'(x) = \frac{u(x)}{2\sqrt{1+x}}$.
- 2 En déduire les variations de d sur $[0; \frac{1}{2}]$.
Dresser un tableau de variations complet.
- 3 Pour $x \in [0; \frac{1}{2}]$, majorer l'erreur commise en approximant $f(x)$ par $g(x)$.
- 4 Proposer une méthode sans calculatrice pour approximer $\sqrt{4,5}$.

Solution page 110

Exercice 2.31 (dilution d'un produit dans le sang)



Une entreprise pharmaceutique étudie la dilution dans le sang d'un nouveau produit. Après observations, elle modélise le taux de présence dans le sang de ce produit à l'aide de la fonction f définie par :

$$f(t) = 1,5(t+1)e^{-t} - 0,5$$

où t est le temps, exprimé en heures, écoulé depuis son injection.

Ainsi, $f(0) = 1$ signifie que 100 % du produit est initialement présent dans le sang.

- 1 Quel est, en pourcentage, le taux de présence de ce produit après 1 heure?
- 2 Montrer que la dérivée de $f(t)$ peut s'exprimer sous la forme : $f'(t) = -1,5te^{-t}$.
- 3 Quel est le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$?
- 4 Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
- 5 Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$. Donner alors une valeur approchée de α au centième.
Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.

- 6 On admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(t) = 1,5(t-1)e^{-t}.$$

Déterminer à quel moment la vitesse de dilution du produit commence à diminuer.

Solution page 111

Exercice 2.32

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

- 1 Montrer que $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
En déduire le sens de variations de g sur \mathbb{R} .
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 3 Montrer que $f'(x) = g(x) - 2$.
En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur \mathbb{R} .
- 4 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 1]$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Solution page 113

Exercice 2.33

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x}.$$

- 1 Montrer que pour tout réel x non nul, $f(-x) = -f(x)$.
On se place alors sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2 Calculer la limite de f en $+\infty$.
- 3 En vous aidant de l'égalité : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, déterminer la limite de f en 0.
- 4 Montrer que la dérivée de f est : $f'(x) = \frac{(x-1)e^{2x} - x - 1}{x^2 e^x}$.
- 5 On pose $u(x) = (x-1)e^{2x} - x - 1$.
 - a. Montrer que $u''(x) = 4xe^{2x}$.
 - b. En déduire que l'équation $u'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
 - c. En déduire les variations de u sur $[0; +\infty[$, puis que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.
- 6 Dédurre de ce qui précède le sens de variations de f sur $]0; +\infty[$.

Solution page 114

Avec le théorème du point fixe

Exercice 2.34 (étude de fonction et suites)



Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = x - e^{\frac{1}{x}}.$$

1 Calculer :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **b.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **c.** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$ **d.** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

2 Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

3 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur $]0; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = e^{\frac{1}{u_n}} \end{cases}$$

On admet que la suite converge.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$, où α est la valeur trouvée dans la partie A.

Solution page 116

Exercice 2.35 (existence d'une solution à une équation)



Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation :

$$(E) \quad : \quad e^x = \frac{1}{x}$$

admet une unique solution dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

On pose pour tout réel x :

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1 Démontrer que x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2 Étude du signe de f .

a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur \mathbb{R} , notée α .

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

On pose pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$:

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

- 3** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
- 4** En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
- 5** Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 6** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
- 7** En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
- 8** Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .
- 9** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Solution page 117

Exercice 2.36 (une fraction infinie)



L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur de la fraction infinie :

$$\frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{\ddots}}}}$$

Pour cela, on pose pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n} \end{cases}$$

- 1** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.
- 2** Montrer que (u_n) est strictement croissante. En déduire que (u_n) converge. On pose ℓ cette limite. Calculer ℓ . Conclure.

Solution page 119

Exercice 2.37**Partie A : étude d'une fonction exponentielle**

Soit la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2 Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$, puis sa dérivée seconde.
- 3 Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- 4 Étudier la convexité de f sur \mathbb{R} . Préciser l'abscisse des éventuels points d'inflexion de \mathcal{C} .
- 5 Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- 6 Justifier que $e^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 2$.

Partie B : étude d'une suite

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > \alpha$, α étant l'unique solution à l'équation $f(x) = 0$.

- 1 Justifier que $f(u_n) > 0$ pour tout entier naturel n .
- 2 En déduire que (u_n) est strictement décroissante, puis que (u_n) converge.
- 3 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \alpha$.

Solution page 120

Exercice 2.38 (méthode de Newton)

[3] On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = e^{-x} - \sqrt{x}$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est nommée \mathcal{C} .

- 1 Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
- 2 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; 1[$. On la notera α .
- 3 Montrer que l'équation réduite de la tangente (T_0) à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 1$ est :

$$y = -\left(\frac{2+e}{2e} + 1\right)x + \frac{4-e}{2e}.$$

On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_0 = 1$ et en considérant que pour tout entier naturel n , x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente (T_n) à \mathcal{C} au point d'abscisse x_n et de l'axe des abscisses.

Ainsi, x_1 est l'abscisse du point d'intersection de (T_0) et de l'axe des abscisses.

4 Montrer que $x_1 = \frac{4-e}{2+e}$.

5 a. Montrer que sur \mathbb{R}_+^* , $f'(x) \neq 0$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

6 On considère le programme Python suivant :

Code Python 2-5

```
1 from math import exp,sqrt
2 x = 1
3 for i in range(4):
4     x = x - (exp(-x) - sqrt(x)) / (-exp(-x)-1/(2*sqrt(x)))
5     print(x)
```

a. Quelles sont les valeurs affichées par ce programme?

b. À quoi correspondent-elles?

c. Émettre une conjecture quant à la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.

7 On admet que, pour tout entier naturel n , \mathcal{C} est toujours au-dessus de (T_n) .
Expliquer les raisons pour lesquelles, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $x_n \leq \alpha$.

8 Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
En déduire qu'elle converge vers α .

Solution page 122

Convexité

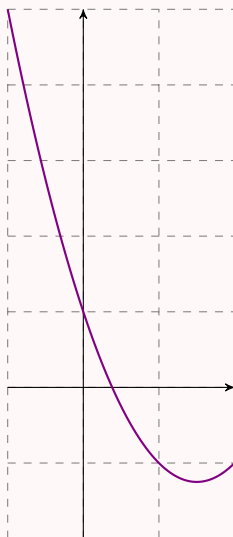
Exercice 2.39 (lectures graphiques)



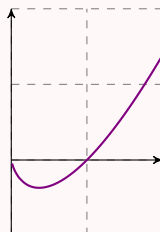
Pour chacune des courbes suivantes, étudier la convexité de la fonction correspondante sur l'intervalle où la courbe est tracée.

Préciser, s'il y a lieu, la position des points d'inflexion.

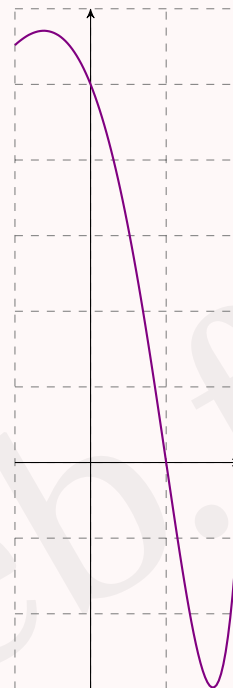
1



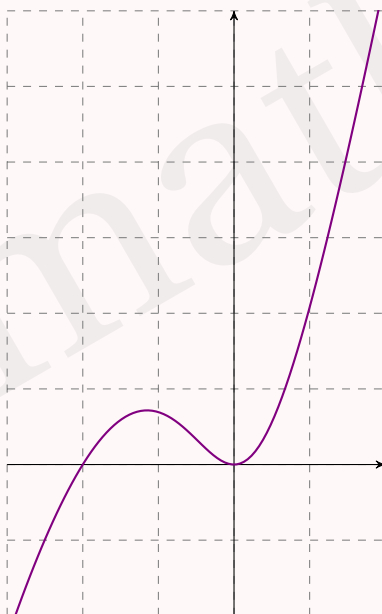
2



3



4



5

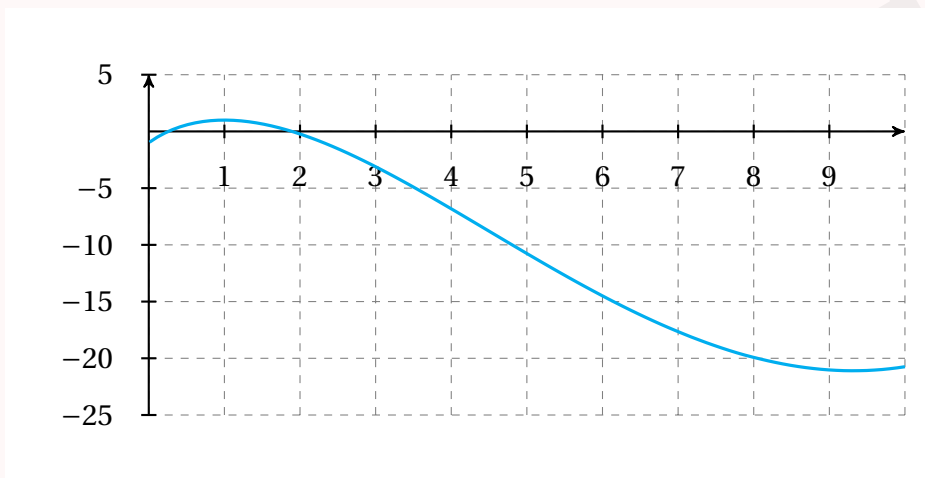


Solution page 124

Exercice 2.40 (point d'inflexion)



On considère une fonction f dont la courbe représentative est la suivante :



Placer approximativement son point d'inflexion et préciser les intervalles où f est concave et convexe.

Solution page 125

Exercice 2.41 (étude d'une convexité)



Déterminer la convexité de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur \mathbb{R} .

Solution page 125

Exercice 2.42 (propagation d'une rumeur)



Lors de la propagation d'une rumeur, le nombre d'individus propageant cette rumeur x jours après son commencement est donné, en unité, par la fonction :

$$f(x) = 100 + x^4 e^{-0,1x} \quad \text{pour } x \in [0; 50].$$

1 Déterminer le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement.

2 a. Prouver que $f'(x) = x^3(4 - 0,1x)e^{-0,1x}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 50]$

3 Dans cette question, on admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = x^2 e^{-0,1x} (0,01x^2 - 0,8x + 12).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur $[0; 50]$.

4 En déduire :

a. le nombre de jours qu'il faut attendre avant que le nombre d'individus propageant cette rumeur diminue (arrondi à l'unité) ;

b. le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur (arrondi à l'unité) ;

c. le nombre de jours qu'il faut attendre avant que la croissance du nombre d'individus propageant cette rumeur diminue.

Solution page 126

Exercice 2.43 (point d'inflexion)



La courbe représentative de la fonction f telle que $f''(x) = (x-1)^2 e^x$ admet-elle un point d'inflexion ?

Solution page 127

Étude de fonctions

Exercice 2.44



On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}.$$

- 1** En étudiant la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1$, déterminer le domaine de définition de $f(x)$.

On notera α la valeur telle que $u(\alpha) = 0$.

- 2** Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse α est verticale.

Solution page 127

Exercice 2.45



On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

- 1** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 2 a.** Montrer que sa dérivée est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2}.$$

- b.** Résoudre l'équation :

$$X^2 + 4X - 1 = 0,$$

puis en déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $]0; +\infty[$.

Dresser alors un tableau de variations complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

On veillera notamment à calculer la valeur de l'extremum de f .

Solution page 128

Exercice 2.46

On considère la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{|2x^2 - x - 1|}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- 1 La fonction f est-elle continue en 1 ?
- 2 La fonction f est-elle continue en -1 ?
- 3 La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
- 4 La fonction f est-elle dérivable en -1 ?
- 5 La fonction f est-elle dérivable en $-\frac{1}{2}$?
- 6 a. Montrer que, sur $] -1; -\frac{1}{2}[$, la dérivée de f s'exprime par : $f'(x) = \frac{-2x^3 + 3x - 1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$.
b. En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur $] -1; -\frac{1}{2}[$.
- 7 a. Montrer que, sur $]-\frac{1}{2}; 1[$, la dérivée de f s'exprime par : $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$.
b. En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur $]-\frac{1}{2}; 1[$.
- 8 Dresser un tableau de variations complet de f sur $] -1; 1[$.
Tracer alors la courbe représentative de f en mettant en valeur les tangentes et asymptotes caractéristiques.

Solution page 130

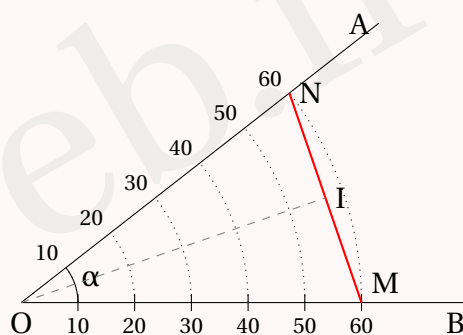
Exercice 2.47 (approximation d'un angle)

On se propose ici de trouver une méthode pour donner une valeur approchée d'un angle (en degrés) sans le rapporteur.

On considère donc un angle géométrique \widehat{AOB} , puis un point M sur (OB) tel que $OM = 60$ mm et un point N sur (OA) tel que $ON = 60$ mm.

On considère alors le point I , projeté orthogonal de O sur $[MN]$.

- 1 Justifier que OMN est isocèle en O .
- 2 Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{360}\alpha\right) = \frac{MN}{120}$, où MN est exprimée en mm.
- 3 On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \sin x$.
a. Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.
b. En déduire que sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2} - 1\right]$.



c. Expliquer alors pourquoi, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on peut remplacer $\sin x$ par x au risque de commettre une erreur inférieure à 1.

4 En déduire que l'on peut assimiler α (en degrés) à MN (en mm).

Il suffit donc de mesurer MN pour avoir une approximation de α en degrés.

5 À l'aide de la formule d'Al-Kashi, exprimer l'expression de la fonction g qui représente la longueur MN en fonction de α .

On pose alors $d(\alpha) = g(\alpha) - \alpha$.

6 Tracer la courbe représentative de d dans un repère orthogonal. Que conclure?

Solution page 135

Corrigé de l'exercice 2.1 page 66

$$\begin{aligned} 1 \quad f(x) &= x^3 + 4x^2 - 5x + 1 \\ &= x^3 \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$2 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} 3 \quad h(x) &= \sqrt{x^2 + 2x + 3} \\ &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} \\ &= x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \quad \text{pour } x > 0 \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = 1$.

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$$4 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{par quotient : } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

Corrigé de l'exercice 2.2 page 66

Attention 9



Dans mon cours, j'ai inséré la propriété 1 sur les limites des fractions rationnelles, mais beaucoup d'enseignants ne l'utilisent pas et préfèrent passer par la méthode générale consistant à factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré. C'est ainsi que je vais corriger toutes les questions portant sur les limites de fractions rationnelles pour aider au mieux les élèves.

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{4+x}. \text{ Pour } x > 0 :$$

$$\begin{aligned} \frac{3-x}{4+x} &= \frac{x \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{x \left(\frac{4}{x} + 1 \right)} \\ &= \frac{\frac{3}{x} - 1}{\frac{4}{x} + 1}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} - 1 \right) = -1$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = 1$.

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{4+x} = -1$$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1}$. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1} &= \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2$.

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1}$. Pour $x < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1} &= \frac{x^2 \left(1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \frac{1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} \right) = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$.

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1} = 1$$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1}$. Pour $x < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1} &= \frac{x^2 \left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{x \left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right)}{1 - \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1} = -\infty$$

Corrigé de l'exercice 2.3 page 66

L'existence d'une asymptote horizontale est directement liée à l'existence d'une limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$.

Calculons donc, par exemple, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en notant que $f(x)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-3x + 1}{x - 5} \\ &= \frac{x \left(-3 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{5}{x}\right)}, \quad x \neq 0 \\ &= \frac{-3 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{5}{x}}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, par quotient, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3.$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$.

Corrigé de l'exercice 2.4 page 66

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x^2}$. Pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq x &\iff -1 \leq -\sin x \leq 1 \\ &\iff 0 \leq 1 - \sin x \leq 2 \\ &\iff 0 \leq \frac{1 - \sin x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x^2} = 0$$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)e^x.$

Pour tout réel x ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \iff -e^x \leq \cos(x)e^x \leq e^x.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)e^x = 0$$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sin x).$ Pour tout réel x ,

$$-1 \leq -\sin x \leq x \iff x^2 - 1 \leq x^2 - \sin x \leq x^2 + 1$$

En tenant compte de ce qui est encadré, et d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sin x) = +\infty$$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{x-7\sin x}.$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \iff -7 \leq -7\sin x \leq 7$$

$$\iff x - 7 \leq x - 7\sin x \leq x + 7$$

$$\iff \frac{1}{x+7} \leq \frac{1}{x-7\sin x} \leq \frac{1}{x-7}$$

$$\iff \frac{4x+3}{x+7} \leq \frac{4x+3}{x-7\sin x} \leq \frac{4x+3}{x-7} \quad \text{car } 4x+3 > 0.$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{x+7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} = 4.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{x-7\sin x} = 4$$

Corrigé de l'exercice 2.5 page 67

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}).$

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{x+2 - (x-1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}) = +\infty$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}} = 0.$

On en déduit alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}) = 0$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1}).$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1})(\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 + x + 1})}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 1 - (2x^2 + x + 1)}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{-x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 + x + 1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1} &= \frac{x^2(-1 + \frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})} + \sqrt{x^2(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}} \\ &= \frac{x^2(-1 + \frac{2}{x})}{x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + x\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}, \text{ pour } x > 0 \\ &= \frac{x \times x(-1 + \frac{2}{x})}{x[\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}]}, \text{ pour } x > 0 \\ &= \frac{x(-1 + \frac{2}{x})}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}, \text{ pour } x > 0\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(-1 + \frac{2}{x}\right) = -\infty$ (par produit)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = 1 + \sqrt{2} > 0$

Donc, par quotient, on déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1}) = -\infty$$

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3-x} - \sqrt{x^2-3}).$

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} - \sqrt{x^2-3} &= \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{x^2-3})(\sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-3})}{\sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-3}} \\ &= \frac{3-x-x^2+3}{\sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-3}} \\ &= \frac{-x^2-x+6}{\sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-3}} \\ &= \frac{x^2(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x})}{\sqrt{x^2(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x})} + \sqrt{x^2(1-\frac{3}{x})}} \\ &= \frac{x^2(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x})}{\sqrt{x^2} \left[\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right]} \\ &= \frac{x^2(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x})}{-x \left[\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right]}, \quad \text{pour } x < 0 \\ &= \frac{-x(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x})}{\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}}}, \quad \text{pour } x < 0 \end{aligned}$$

Attention 10



On calcule une limite en $-\infty$ donc on prendra les calculs en considérant que $x < 0$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x} \right) \right] = -\infty$ (par produit)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right) = 1$

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3-x} - \sqrt{x^2-3}) = -\infty$$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} - \sqrt{10-x}).$

$$\begin{aligned} \sqrt{5-x} - \sqrt{10-x} &= \frac{(\sqrt{5-x} - \sqrt{10-x})(\sqrt{5-x} + \sqrt{10-x})}{\sqrt{5-x} + \sqrt{10-x}} \\ &= \frac{5-x-10+x}{\sqrt{5-x} + \sqrt{10-x}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{5-x} + \sqrt{10-x}}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{10-x} = +\infty \text{ donc par somme,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} + \sqrt{10-x}) = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5}{X} \right) = 0$, en considérant que $X = \sqrt{5-x} + \sqrt{10-x}$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} - \sqrt{10-x}) = 0$$

Corrigé de l'exercice 2.6 page 67

1 Pour $x \neq 0$,
$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + 4x - 1} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

Or, pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = 2;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 3.$

Ainsi, par quotient,
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + 4x - 1} = \frac{2}{3}$$

2 Pour $x \neq 0$,
$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\left(2 + \frac{3}{x} \right)}.$$

Or, pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} \right) = 2.$

Par quotient, on a donc
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} = \frac{1}{2}$$

3
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{x^2 + 3 - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \text{ donc par somme :}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}) = +\infty$. Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}) = 0$

$$\begin{aligned} 4 \quad \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1} &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{pour } x \neq 0 \\ &= x\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - x\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x > 0 \\ &= x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$ donc par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = 1.$$

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1}) = +\infty$

Corrigé de l'exercice 2.7 page 67

- Limite en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty.$$

Ainsi, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$$

- Limite en $-\infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty.$$

Ainsi, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = -\infty.$$

Par passage à l'inverse, on a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right) = 0$$

Corrigé de l'exercice 2.8 page 67

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}.$

On sait d'après le cours (croissance comparée) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, en inversant l'expression, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0$$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{7+2x}.$

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{7+2x} &= \frac{e^x}{x\left(\frac{7}{x}+2\right)} \\ &= \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{2+\frac{7}{x}}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2+\frac{7}{x}} = \frac{1}{2}.$

Ainsi, par produit, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{7+2x} = +\infty$$

Remarque 16

Quand on doit calculer une limite à l'infini d'une expression où est présente l'exponentielle, il faut s'arranger pour transformer l'expression de sorte à faire apparaître une croissance comparée.

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{3x-2}.$

Comme dit dans la remarque précédente, on doit faire apparaître une croissance comparée dans l'expression. La plus appropriée semble être $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$

$$\begin{aligned} \frac{e^{5x}}{3x-2} &= \frac{e^{5x}}{\frac{3}{5} \times 5x - 2} \\ &= \frac{e^{5x}}{\frac{3}{5} \left(5x - \frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{e^{5x}}{\frac{3}{5} \left(5x - \frac{10}{3}\right)} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x - \frac{10}{3}} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x \left(1 - \frac{10}{3 \times 5x}\right)} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3x}}. \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{5x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ en posant $X = 5x$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right) = 1$;
- $\frac{5}{3} > 0$.

Ainsi, par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{3x-2} = +\infty$$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5)e^{2x}$.

On va tenter de faire apparaître la croissance comparée $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

$$\begin{aligned} (x+5)e^{2x} &= \left(\frac{1}{2} \times 2x + 5\right) e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} \times 2xe^{2x} + 5e^{2x}. \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$, avec $X = 2x$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5e^{2x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Ainsi, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5)e^{2x} = 0$$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1}e^{-x} &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{e^x}, \quad x > 0 \\ &= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{e^x}, \quad x > 0 \\ &= \frac{x}{e^x} \times \sqrt{1+\frac{1}{x}}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1$.

Ainsi, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x} = 0$$

6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$.

$$(3-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} = 3e^{-\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} 3e^X = 0$ en posant $X = -\sqrt{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}) = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ avec $X = -\sqrt{x}$.

Ainsi, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} = 0$$

Corrigé de l'exercice 2.9 page 68

1 $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{3x-5}{x-2}.$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (3x-5) = 3 \times 2 - 5 = 1 > 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x-2) = 0^-$ (« 0 » par valeurs négatives)

Or, $\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X < 0}} \frac{1}{X} = -\infty$ donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{3x-5}{x-2} = -\infty$$

Remarque 17

Comment peut-on écrire que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x-2) = 0^-$? Il suffit juste de prendre une valeur de x inférieure à 2 (par exemple, $x = 0$) et de regarder le signe de l'expression : $0 - 2 = -2 < 0$. Le « signe du 0 » sera donc négatif.

2 $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x-9}{x-3}.$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x-9) = 3 - 9 = -6 < 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x-3) = 0^+$

Or, $\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \frac{-6}{X} = -\infty$ donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x-9}{x-3} = -\infty$$

3 $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{x^2+x+1}{2x^2-9x-5}.$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} (x^2+x+1) = 5^2+5+1 = 31 > 0$
- Remarquons que les racines de $2x^2-9x-5$ sont $-\frac{1}{2}$ et 5.

Par conséquent, $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} (2x^2-9x-5) = 0^-$ car en prenant $x = 0$ (entre les racines), on trouve $-5 < 0$.

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 9x - 5} = -\infty$$

4 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 8x - 9}.$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (3x^2 - 5x + 2) = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 + 8x - 9) = 0$

Par conséquent, « 1 » est une racine du numérateur et du dénominateur. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 8x - 9} &= \frac{(x-1)(3x-2)}{(x-1)(x+9)} \\ &= \frac{3x-2}{x+9}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 8x - 9} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x-2}{x+9} = \frac{3 \times 1 - 2}{1 + 9} = -\frac{1}{8}$$

5 $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3x-5}{x^2+2x-8}.$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (3x-5) = 3 \times 2 - 5 = 1 > 0;$
- Remarquons que x^2+2-8 admet pour racines -4 et 2 , donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x^2+2x-8) = 0^+$
(en prenant $x = 3$, donc entre les racines, on trouve $7 > 0$).

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3x-5}{x^2+2x-8} = +\infty$$

6 $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4}$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (2x^2 + 3x + 1) = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (-5x^2 - x + 4) = 0$

Cela signifie que l'on peut factoriser par $x - (-1) = x + 1$ au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4} = \frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(4-5x)} = \frac{2x+1}{4-5x} \text{ pour } x \neq -1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x+1}{4-5x} = \frac{-1}{9}$$

Corrigé de l'exercice 2.10 page 68

$$\begin{aligned} 1 \quad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} &= \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-1)} \times \sqrt{(x+1)}}{(\sqrt{x-1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}. \end{aligned}$$

Notons que le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ est $]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$ donc quand on parle de la limite de $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ en 1, il est sous-entendu que $x > 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{par quotient : } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = +\infty$$

Or, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = +\infty}$

$$\begin{aligned} 2 \quad \frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2} &= \frac{(\sqrt{x^2+x-2}-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)} \\ &= \frac{x^2+x-2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)} \\ &= \frac{x^2+x-6}{(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)} \end{aligned}$$

On factorise x^2+x-6 en calculant son discriminant et on arrive à :

$$\begin{aligned} &= \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)} \\ &= \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}+2} \quad \text{pour } x \neq 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}+2} &= \frac{2+3}{\sqrt{2^2+2-2}+2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2} = \frac{5}{4}}$

3 On pose $u(x) = \cos x$. Alors, $u'(x) = -\sin x$ et :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{u(x) - u(\pi)}{x - \pi} = u'(\pi) = -\sin \pi = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = 0}$

4 On pose $u(x) = \sqrt{x+1}$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{u(x) - u(1)}{x-1} = u'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \text{ Ainsi, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Corrigé de l'exercice 2.11 page 68

1 On peut écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \frac{x - a}{g(x) - g(a)}$$

car $f(a) = g(a) = 0$.

Or, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ d'après la définition du nombre dérivé (vue en classe de première).

De même, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$ donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = \frac{1}{g'(a)}$ ($g'(a) \neq 0$ par hypothèses).

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = f'(a) \times \frac{1}{g'(a)}$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

2 Posons $f(x) = \cos(5x) - \cos(3x)$ et $g(x) = \sin(4x) - \sin(3x)$.

Alors, $f'(x) = -5\sin(5x) + 3\sin(3x)$ et $g'(x) = 4\cos(4x) - 3\cos(3x)$.

Ainsi, $f'(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

f et g vérifient toutes les conditions nécessaires pour utiliser la règle de l'Hospital donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)} = 0}$$

Corrigé de l'exercice 2.12 page 68

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

On a donc une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » donc on pense à faire apparaître un ou plusieurs taux d'accroissement.

$$\frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x - 1}{x - 0} \times \frac{x - 0}{e^{2x} - 1}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = u'(0) = e^0 = 1$ avec $u(x) = e^x$ et donc $u'(x) = e^x$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{v(x) - v(0)} = \frac{1}{v'(0)} = \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2}$ avec $v(x) = e^{2x}$ et donc $v'(x) = 2e^{2x}$.

On en déduit alors que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2}}$$

$$2 \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2e^{x-1}}{e^{x-1} - 1}.$$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 2e^{x-1} = 2 > 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (e^{x-1} - 1) = 0^-$

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2e^{x-1}}{e^{x-1} - 1} = -\infty$$

Corrigé de l'exercice 2.13 page 69

Multiplions le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par l'expression conjuguée du numérateur :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x\sqrt{1+x^2}}{x(\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2\sqrt{1+0^2}}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1$$

Corrigé de l'exercice 2.14 page 69

Multiplions le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par l'expression conjuguée du numérateur :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} - \sqrt{7}}{x - 2} \times \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} + \sqrt{7}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} + \sqrt{7}} \\ &= \frac{x^2 + \sqrt{x^2 + 5} - 7}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{x^2 - 7 + \sqrt{x^2 + 5}}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{x^2 - 7 + \sqrt{x^2 + 5}}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} + \sqrt{7})} \times \frac{x^2 - 7 - \sqrt{x^2 + 5}}{x^2 - 7 - \sqrt{x^2 + 5}} \\ &= \frac{(x^2 - 7)^2 - (x^2 + 5)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} + \sqrt{7})(x^2 - 7 - \sqrt{x^2 + 5})} \\ &= \frac{x^4 - 15x^2 + 44}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 5}} + \sqrt{7})(x^2 - 7 - \sqrt{x^2 + 5})}. \end{aligned}$$

En posant $X = x^2$, $x^4 - 15x^2 + 44 = X^2 - 15X + 44$, polynôme dont une racine évidente est $X_1 = 4$; donc l'autre racine est X_2 telle que $X_1 X_2 = \frac{c}{a}$, soit $4X_2 = 44$, soit $X_2 = 11$.

Donc $X^2 - 15X + 44 = (X - 4)(X - 11)$.

Ainsi, $x^4 - 15x^2 + 44 = (x^2 - 4)(x^2 - 11) = (x - 2)(x + 2)(x^2 - 11)$. D'où :

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)(x^2-11)}{(x-2)(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}+\sqrt{7}})(x^2-7-\sqrt{x^2+5})}.$$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{(2+2)(2^2-11)}{2\sqrt{7} \times (-6)} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Corrigé de l'exercice 2.15 page 69

- 1 La tangente à \mathcal{C} en $x = 3$ est horizontale; comme $f(3) = 6$, son équation est : $y = 6$.
- 2 Il y a deux solutions à l'équation $f(x) = 4$: l'une sur l'intervalle $]2; 3[$ et l'autre sur l'intervalle $]3; 10[$.

Corrigé de l'exercice 2.16 page 70

- 1 $f'(0) = 1$ car $f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente \mathcal{T} . Et pour calculer le coefficient directeur de cette droite, on considère deux points qui sont sur cette droite : par exemple, $A(-1; -1)$ et $O(0; 0)$.

$$f'(0) = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{0 - (-1)}{0 - (-1)} = 1.$$

$g'(2) = 0$ car la tangente à \mathcal{C}_g est horizontale, et comme toute droite horizontale, elle a un coefficient directeur nul.

- 2 $f(x) \geq g(x) \iff x \in [0; 4]$ car c'est sur cet intervalle que \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g .

Corrigé de l'exercice 2.17 page 70

- 1 $f(0)$ est l'ordonnée du point de \mathcal{C} d'abscisse 0 : c'est le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées. Donc $f(0) = -1$.

$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0. C'est donc le coefficient directeur de \mathcal{D} . Donc $f'(0) = 1$ (les points de coordonnées $(0; -1)$ et $(1; 0)$ sont sur la droite donc le coefficient directeur est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = 1$).

- 2 L'énoncé dit que le point de la courbe d'abscisse 1 est un minimum local. Donc $f'(1) = 0$.

- 3 \mathcal{D} a pour équation $y = x - 1$ (coefficient directeur égal à 1 et coupe l'axe des ordonnées en -1). Donc l'équation revient à trouver les abscisses des points d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{C} .

Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = 2$.

- 4 La fonction f est croissante jusqu'à $\frac{1}{3}$, puis décroissante jusqu'à 1, puis croissante, d'où le tableau de signes page suivante.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+

Corrigé de l'exercice 2.18 page 71

- 1 $f(0) = 1$ (cela correspond à l'ordonnée du point d'abscisse 0 qui est sur la courbe).
 $f'(0) = -\frac{3}{5}$. Pour déterminer cette valeur, on prend deux points de la tangente à la courbe passant par le point d'abscisse $x = 0$. Les points $A(0; 1)$ et $B(5; -2)$ sont sur cette tangente. On calcule alors la pente de cette droite :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 1}{5 - 0} = -\frac{3}{5}.$$

- 2 $f(3,5) \approx 3,5$ et $f'(3,5) \approx 3,2$.
 3 Le tableau de signes de la fonction f' est le suivant :

x	$-\infty$	1,5	$+\infty$
f'	-	0	+

Corrigé de l'exercice 2.19 page 72

1 $f'(x) = 2ax + b - \frac{2dx}{(x^2 + 1)^2}$.

La condition (2) permet d'écrire : $f'(-1) = 0$, soit :

$$-2a + b + \frac{1}{2}d = 0.$$

- 2 La condition (1) permet d'écrire :

- $A(-1; 0) \in \mathcal{C} \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c + \frac{1}{2}d = 0$
- $B(0; 1) \in \mathcal{C} \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c + d = 1$
- $C(1; 2) \in \mathcal{C} \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + \frac{1}{2}d = 2$

- 3 Nous avons alors le système suivant :

$$\begin{cases} -2a + b + \frac{1}{2}d = 0 & E_1 \\ c + d = 1 & E_2 \\ a - b + c + \frac{1}{2}d = 0 & E_3 \\ a + b + c + \frac{1}{2}d = 2 & E_4 \end{cases}$$

En faisant $(E_4) - (E_3)$, on arrive à l'équation :

$$(E_4) - (E_3) : 2b = 2$$

Ainsi, $\underline{b = 1}$, d'où le système suivant :

$$\begin{cases} -2a & + \frac{1}{2}d = -1 & E'_1 \\ & c + d = 1 & E'_2 \\ a + c & + \frac{1}{2}d = 1 & E'_3 \end{cases}$$

En faisant $(E'_3) - (E'_2)$, on a :

$$(E'_3) - (E'_2) : a - \frac{1}{2}d = 0$$

Soit : $\underline{d = 2a}$. L'équation (E'_1) est donc équivalente à :

$$-d + \frac{1}{2}d = -1$$

Soit : $\underline{d = 2}$ et donc $\underline{a = 1}$. L'équation (E'_2) donne alors : $c + 2 = 1$, soit $\underline{c = -1}$.

Finalement, on a : $f(x) = x^2 + x - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$.

Corrigé de l'exercice 2.20 page 73

1 $f(0) = 6$ car \mathcal{C}_f coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée égale à 6.
De plus, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $\underline{c = 6}$.

2 $f'(x) = 2ax + b$.

3 $f'(1) = -3$ car le coefficient directeur de \mathcal{T}_1 est égal à -3 .
 $f'(-1) = 1$ car le coefficient directeur de \mathcal{T}_{-1} est égal à 1.
 $f'(1) = 2a + b = -3$ et $f'(-1) = -2a + b = 1$. D'où :

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \implies (2a + b) + (-2a + b) = -3 + 1 \implies 2b = -2 \implies b = -1.$$

alors,

$$2a + b = -3 \implies 2a + (-1) = -3 \implies 2a = -3 + 1 = -2 \implies a = -1.$$

4 L'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions -3 et 2 . En effet, \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives -3 et 2 .

$f(x) = -x^2 - x + 6$ donc son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25,$$

d'où deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Corrigé de l'exercice 2.21 page 74

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Sur $]-\infty; 1]$, f est une fonction polynôme de degré 2 donc continue;
- sur $]1; +\infty[$, f est une fonction affine donc continue;
- de plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = (1-1)^2 + 3 = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1 + 2 = 3$, donc f est continue en 1.

Ainsi, f est continue sur \mathbb{R} .

Corrigé de l'exercice 2.22 page 74

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - k & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, g est continue comme fonction polynôme d'une part, et exponentielle d'autre part.

Pour que g soit continue sur \mathbb{R} , il faut que g soit continue en 0, c'est-à-dire que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^2 + 3x - k) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^x + 2),$$

soit quand :

$$-k = e^0 + 2 \quad \text{donc} \quad \boxed{k = -3}$$

Corrigé de l'exercice 2.23 page 74

1 Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \times \frac{\sqrt{4-x}+2}{\sqrt{4-x}+2} \\ &= \frac{(x-2)(\sqrt{4-x}+2)}{4-x-4} \\ &= \frac{(x-2)(\sqrt{4-x}+2)}{-x} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [(x-2)(\sqrt{4-x}+2)] &= -8 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-x) &= 0^- \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\text{par quotient}) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [(x-2)(\sqrt{4-x}+2)] &= -8 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x) &= 0^+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\text{par quotient}) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ donc f n'est pas continue en 0.

2 Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \left(\sqrt{4-x} + 2 \right) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 2} (-x) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(par quotient)} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

Ainsi, $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

La fonction f est donc continue en 0.

3 La fonction $x \mapsto x - 2$ est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \sqrt{4-x} - 2$ est dérivable partout où $4-x > 0$, donc pour $x < 4$, et s'annule pour $x = 0$.

La fonction $X \mapsto \frac{1}{X}$ est dérivable pour tout X non nul.

Ainsi, f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 4[$.

- **Dérivabilité en 4.**

Le taux d'accroissement de f en 0 est :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{f(4-h) - f(4)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{2-h}{\sqrt{h}-2} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{2-h}{\sqrt{h}-2} \times \frac{\sqrt{h}+2}{\sqrt{h}+2} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{(2-h)(\sqrt{h}+2)}{h-4} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \tau(h) = -\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 4.

- **Dérivabilité en 0.**

La fonction f n'est pas continue en 0, donc elle n'est pas dérivable en 0.

4 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f (notée \mathcal{C}).

De plus, $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \tau(h) = -\infty$ donc \mathcal{C} admet une tangente verticale dirigée par le bas en 4.

Corrigé de l'exercice 2.24 page 74

$$\begin{aligned}
 1 \quad f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+x+2}+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} \\
 &= \frac{x^2+x-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} \\
 &= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} \\
 &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} \quad \text{si } x \neq 1
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{4} = f(1)$. Donc, f est continue en 1.

2 Le taux d'accroissement de f en 1 est :

$$\begin{aligned}
 \tau(x) &= \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} - \frac{3}{4}}{x-1} \\
 &= \frac{4\sqrt{x^2+x+2} - (3x+5)}{4(x-1)^2} \times \frac{4\sqrt{x^2+x+2} + (3x+5)}{4\sqrt{x^2+x+2} + (3x+5)} \\
 &= \frac{16x^2 + 16x + 32 - 9x^2 - 30x - 25}{4(x-1)^2 (4\sqrt{x^2+x+2} + (3x+5))} \\
 &= \frac{7x^2 - 14x + 7}{4(x-1)^2 (4\sqrt{x^2+x+2} + (3x+5))} \\
 &= \frac{7(x-1)^2}{4(x-1)^2 (4\sqrt{x^2+x+2} + (3x+5))} \\
 &= \frac{7}{4(4\sqrt{x^2+x+2} + (3x+5))}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 1} \tau(x) = \frac{7}{16}.$$

La limite du taux d'accroissement de f en 1 étant une valeur finie, f est dérivable en 1.

Je n'ai pas pris l'expression $\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ car les modifications d'écriture étaient plus longues que celles faites ci-dessus. Vous pouvez toujours essayer...

3 La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+x+2}$ est dérivable pour tout x où le radicant est strictement positif, ce qui est toujours le cas car le discriminant de x^2+x+2 est strictement négatif. Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+x+2}-2$ est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction $X \mapsto \frac{1}{X}$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est dérivable pour $x \neq 1$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable pour $x \neq 1$ comme produit de deux fonctions dérivables pour $x \neq 1$.

Corrigé de l'exercice 2.25 page 75

1 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-0^2} = 1;$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1.$

Les deux limites (à droite et à gauche de zéro) sont égales, donc f est continue en 0.

2 La dérivée de $u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est $u'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, et sa limite en 0 est :

$\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = 0.$

La dérivée de la fonction $v : \cos(x)$ est $v'(x) = -\sin(x)$ et sa limite en 0 vaut :

$\lim_{x \rightarrow 0} v'(x) = 0.$

Les deux limites étant égales, la fonction f est dérivable en 0 (le nombre dérivé à gauche est égal au nombre dérivé à droite).

Corrigé de l'exercice 2.26 page 75

Posons $f(x) = 3x^3 - 5x + 1$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

• $f'(x) = 9x^2 - 5$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow 3,48$	$\searrow -1,48$	$\nearrow +\infty$	

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 3,48 \quad ; \quad f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx -1,48.$$

• Notons $I_1 = \left] -\infty; -\frac{\sqrt{5}}{3} \right[$, $I_2 = \left] -\frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3} \right[$ et $I_3 = \left] \frac{\sqrt{5}}{3}; +\infty \right[$.

f est continue et strictement monotone sur I_k , $k = 1, 2, 3$.

De plus, d'après les variations de f , $0 \in f(I_k)$, $k = 1, 2, 3$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chacun des intervalles I_k , $k = 1, 2, 3$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que chacun d'eux.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles :

→ $\alpha \approx -1,381;$

→ $\beta \approx 0,205;$

→ $\gamma \approx 1,176.$

Corrigé de l'exercice 2.27 page 75

1 f est de la forme $u \times v$ avec :

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = e^{-x}, \quad v'(x) = -e^{-x}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 1 \times e^{-x} + (e^{-x}) \times x \end{aligned}$$

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$$

2 $e^{-x} > 0$ pour tout réel x donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$, c'est-à-dire positif sur $[-2; 1]$ (intervalle où est définie notre fonction f).

Par conséquent, f est strictement croissante sur $[-2; 1]$.

3 Sur $[-2; 1]$,

- f est continue (comme produit de deux fonctions continues) et strictement croissante;
- $f(-2) = -2e^2 + 2 \approx -12,8 < 0$ et $f(1) = e^{-1} + 2 > 0$; ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre $f(-2)$ et $f(1)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in [-2; 1]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0,85$ (il suffit de dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ sur $[-2; 1]$ avec un pas de 0,01 pour x).

Corrigé de l'exercice 2.28 page 75

1 f est de la forme $u \times v$ avec :

$$u(t) = 1 - 0,02t, \quad u'(t) = -0,02, \quad v(t) = e^{-0,2t}, \quad v'(t) = -0,2e^{-0,2t}.$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (u'v + v'u)(t) \\ &= -0,02e^{-0,2t} - 0,2(1 - 0,02t)e^{-0,2t} \\ &= [-0,02 - 0,2(1 - 0,02)t]e^{-0,2t} \\ &= (0,004t - 0,22)e^{-0,2t}. \end{aligned}$$

$e^{-0,2t} > 0$ pour tout réel t donc $f'(t)$ est du signe de $0,004t - 0,22$.

$$0,004t - 0,22 > 0 \iff t > \frac{0,22}{0,004} \iff t > 55.$$

Ainsi, $f'(t) < 0$ sur $[0; 50]$. La fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

2 Sur $[0; 50]$,

- f est continue et strictement décroissante;
- $f(0) = 0$ et $f(50) = 0$ donc 0,5 est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(50)$.

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in [0; 50]$ telle que $f(\alpha) = 0,5$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3,1$.

Cela signifie qu'au bout de 3,1 h, soit 3 heures 06 min, le taux du médicament dans le sang sera de 0,5.

Corrigé de l'exercice 2.29 page 75

Posons $g(x) = f(x) - x$.

- $g(0) = f(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$;
- $g(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$;
- g est continue (car c'est la somme de deux fonctions continues) sur $[0; 1]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$, ce qui signifie qu'il en est de même pour l'équation $f(x) = x$ car $g(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Corrigé de l'exercice 2.30 page 76

Partie A

$$\begin{aligned} \text{1 } u'(x) &= 1 \times \sqrt{1+x} + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \sqrt{1+x} + \frac{x-1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x} \times 2\sqrt{1+x}) + x-1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2(1+x) + x-1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2+2x+x-1}{2\sqrt{1+x}} = \boxed{\frac{3x+1}{2\sqrt{1+x}}} \end{aligned}$$

- 2 Sur $[0; \frac{1}{2}]$, $3x+1 > 0$ donc u est strictement croissante.

De plus, $u(0) = 1 + (0-1)\sqrt{1+0} = 1-1 = 0$.

On en déduit alors que $u(x) \geq 0$ sur $[0; \frac{1}{2}]$.

Partie B

$$\begin{aligned} \text{1 } d'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} + \frac{x\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1+x} + x\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1 + (x-1)\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} = \boxed{\frac{d(x)}{2\sqrt{1+x}}} \end{aligned}$$

- 2 $d'(x)$ est du signe de $d(x)$ sur $[0; \frac{1}{2}]$ car $2\sqrt{1+x} > 0$.

D'après la partie A, $d(x) \geq 0$ sur $[0; \frac{1}{2}]$ donc $d'(x) \geq 0$.

Ainsi, d est croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$.

On a : $d(0) = f(0) - g(0) = 1 - 1 = 0$ et $d\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{19}{16}$.

On a le tableau suivant :

x	0	1
$f(x)$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{19}{16}$

3 Les variations de d nous suggèrent qu'en approximant $f(x)$ par $g(x)$ pour $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$,

l'erreur commise est inférieure ou égale à $\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{19}{16}$, soit inférieure à 0,04.

4 $\sqrt{4,5} = \sqrt{4 + 0,5}$

$$= \sqrt{4 \left(1 + \frac{0,5}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{1 + \frac{1}{8}}$$

$$= 2\sqrt{1 + \frac{1}{8}}$$

$$= 2f\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\approx 2g\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\approx 2 \times \left[1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{8^2}\right]$$

$$\approx 2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} \rightarrow -\frac{1}{128} = \frac{0,5}{64} = \frac{0,25}{32} = \dots = 0,0078125$$

$$\approx 2 + 0,125 - 0,0078125$$

$$\approx 2,117.$$

À la calculatrice, on trouve $\sqrt{4,5} \approx 2,121$. La marge d'erreur est alors d'environ 0,004 avec la valeur trouvée avec g .

Corrigé de l'exercice 2.31 page 76

1 Le taux de présence de ce produit après 1 heure correspond à :

$$f(1) = 1,5 \times 2 \times e^{-1} - 0,5 \approx 0,6036.$$

Le produit injecté est donc présent dans le sang à environ 60,36% après une heure.

2 f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$, avec :

$$\begin{aligned}u(t) &= 1,5(t+1) \\ u'(t) &= 1,5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(t) &= e^{-t} \\ v'(t) &= -e^{-t}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}f'(t) &= 1,5e^{-t} + 1,5(t+1)(-e^{-t}) \\ &= [1,5 + (1,5t + 1,5)(-1)]e^{-t}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t) = -1,5te^{-t}}$$

3 Pour $t \in [0; +\infty[$, $-1,5t \leq 0$ et $e^{-t} > 0$, donc $f'(t) \leq 0$.

f est donc décroissante sur $[0; +\infty[$.

4 Nous avons :

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1,5(t+1) = +\infty$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$.

Ainsi, $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1,5(t+1)e^{-t}$ est une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ »; il nous faut donc exprimer $f(t)$ différemment pour lever cette indétermination.

$$f(t) = 1,5\frac{t}{e^t} + 1,5e^{-t} - 0,5.$$

Or, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ (cours : croissances comparées) et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ donc, par somme :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -0,5}$$

5 Sur $[0; +\infty[$, f est continue et décroissante.

De plus $f(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -0,5$, et $0 \in]-0,5; 1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2,29$.

Cela signifie qu'après 2,29 h, soit après 2 heures 17 min 24 s, le produit aura théoriquement totalement disparu du sang.

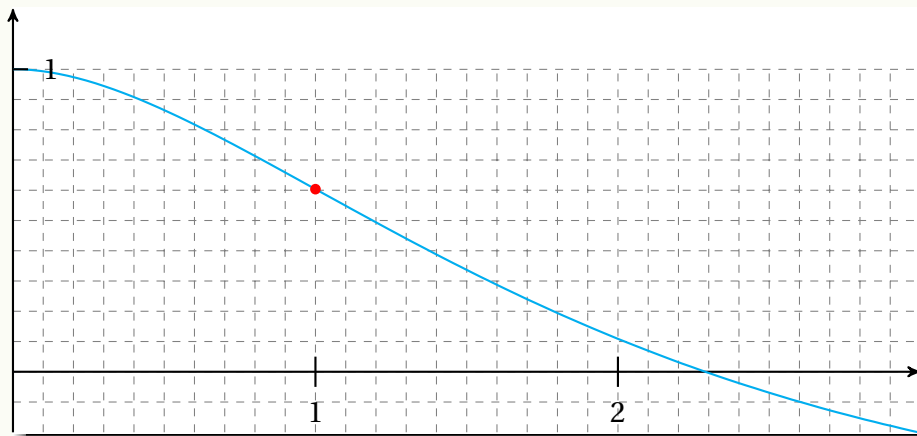
6 $t - 1 \geq 0 \iff t \geq 1$ et $1,5e^{-t} > 0$. Ainsi,

- $f''(t) \leq 0$, donc f est concave, sur $[0; 1]$;
- $f''(t) \geq 0$, donc f est convexe, sur $[1; +\infty[$;

Par conséquent, la courbe représentative de f admet un point d'inflexion de coordonnées $(1; f(1))$.

La vitesse de dilution du produit correspond à la dérivée $f'(t)$, et cette vitesse diminue quand la fonction passe de concave à convexe.

Ainsi, la vitesse de dilution du produit commence à diminuer à partir d'une heure après son injection.



Corrigé de l'exercice 2.32 page 77

1 $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$g'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{\frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$(x^2+1) > 0$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur \mathbb{R} .

Ainsi, g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2 Notons que la fonction g est impaire car $g(-x) = -g(x)$ et que son domaine de définition est centré en 0. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} \quad \text{pour } x \neq 0 \\ &= \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad \text{pour } x > 0. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$.

$$\begin{aligned} 3 \quad f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 2 \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = g'(x) - 2$$

Nous avons dit que g était strictement croissante sur \mathbb{R} et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Donc $g(x) < 1$ sur \mathbb{R} .

Par conséquent, $g(x) - 2 < 0$ sur \mathbb{R} , donc $f'(x) < 0$ sur \mathbb{R} .

f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R} .

$$4 \quad f(0) = 1 \text{ et } f(1) = \sqrt{2} - 2 < 0.$$

Or, f est strictement décroissante et continue sur $[0; 1]$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 1]$. On trouve $\alpha \approx 0,58$.

Corrigé de l'exercice 2.33 page 77

$$\begin{aligned} 1 \quad f(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{-x} \\ &= -\frac{e^x + e^{-x}}{x} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Remarque 18

Cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui justifie que l'on étudie f uniquement sur $]0; +\infty[$ par la suite.

$$2 \quad f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x}.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3 On peut écrire pour tout réel x non nul :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 + e^{-x}}{x}.$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty.$$

Ainsi, par somme, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

4 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$$u(x) = e^x + e^{-x}$$

$$v(x) = x$$

$$u'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$v'(x) = 1$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2}(x) \\ &= \frac{x(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})}{x^2} \\ &= \frac{xe^x - xe^{-x} - e^x - e^{-x}}{x^2} \times \frac{e^x}{e^x} \\ &= \frac{xe^{2x} - x - e^{2x} - 1}{x^2 e^x} \\ &= \frac{(x-1)e^{2x} - x - 1}{x^2 e^x}. \end{aligned}$$

5 a. $u'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} - 1 = (2x-1)e^{2x} - 1$.

Par suite, on trouve $u''(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$.

b. Sur $[0; +\infty[$, $u''(x) \geq 0$ donc u' est strictement croissante.

De plus, $u'(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = +\infty$.

u' étant continue, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$u'(x)$	-2	0	$+\infty$

À la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 0,639$.

c. On déduit de la question précédente le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	-2	$u(\alpha)$	$+\infty$

- $u(\alpha) \approx -2,9$.

- $u(x) = x \left[\frac{x-1}{x} e^{2x} - 1 - \frac{1}{x} \right]$.

De plus,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{2x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^{2x} = +\infty \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{1}{x}\right) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty.$$

u étant continue sur $] \alpha; +\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution β à l'équation $u(x) = 0$ sur cet intervalle.

À la calculatrice, on trouve $\beta \approx 1,2$.

6 $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ donc :

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$			+

Corrigé de l'exercice 2.34 page 78

Partie A

1 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

b. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$.

d. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-e^{\frac{1}{x}}\right) = -\infty$.

Ainsi, par somme, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

2 $f'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} > 0$ pour tout x non nul.

Par conséquent, f est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

3 f est continue et strictement croissante sur $] 0; +\infty[$.

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique valeur α sur $] 0; +\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

À la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 1,76$.

Partie B

Notons ℓ la limite de (u_n) . Alors, $\ell > 0$ car u_n est une exponentielle.

De plus, l'égalité $u_{n+1} = e^{\frac{1}{u_n}}$ prise à la limite donne :

$$\begin{aligned}\ell &= e^{\frac{1}{\ell}} \iff \ell - e^{\frac{1}{\ell}} = 0 \\ &\iff f(\ell) = 0.\end{aligned}$$

Or, l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ est α .

Donc $\ell = \alpha$.

Corrigé de l'exercice 2.35 page 78

1 $e^x = \frac{1}{x} \iff e^{-x} = x$

$$\iff x - e^{-x} = 0$$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2 a. $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive.

Ainsi, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- b.**
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x}) = -\infty$;
par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < 0$;
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$;
 - f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), il existe une unique valeur α sur \mathbb{R} telle que $f(\alpha) = 0$.

c. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,12$ et $f(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,63 > 0$ donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

d. La fonction f est strictement croissante sur $[0; \alpha]$ et $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ donc $f(x) < 0$ sur $[0; \alpha]$.

3 $g(x) = x \iff \frac{1+x}{1+e^x} = x$

$$\begin{aligned}\iff 1+x &= x(1+e^x) \\ \iff 1+x &= x+xe^x \\ \iff 1 &= xe^x \\ \iff \frac{1}{e^x} &= x \\ \iff x - \frac{1}{e^x} &= 0 \\ \iff x - e^{-x} &= 0 \\ \iff f(x) &= 0\end{aligned}$$

4 α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$, donc l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ car les deux équations sont équivalentes.

$$\begin{aligned}
 \text{5 } g'(x) &= \frac{1 \times (1 + e^x) - (1 + x) \times e^x}{(1 + e^x)^2} \\
 &= \frac{1 + e^x - e^x - xe^x}{(1 + e^x)^2} \\
 &= \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $g'(x) > 0 \iff 1 - xe^x > 0$ car $(1 + e^x)^2 > 0$ pour tout réel x .

$$\begin{aligned}
 \text{Or, } 1 - xe^x > 0 &\iff 1 > xe^x \iff \frac{1}{e^x} > x \\
 &\iff x - e^{-x} < 0 \iff f(x) < 0 \\
 &\iff x \in [0; \alpha[
 \end{aligned}$$

Ainsi, g est croissante sur $[0; \alpha]$.

- 6
- $u_0 = 0$ et $u_1 = g(u_0) = g(0) = \frac{1}{2}$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.
L'initialisation est faite.
 - Supposons que pour un entier n donné, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
Comme g est croissante sur $[0; \alpha]$, alors,

$$g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha),$$

soit :

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$

car $g(\alpha) = \alpha$ d'après la question 4.

Comme $0 < \frac{1}{2}$, on a bien :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha.$$

L'hérédité est alors vérifiée; par conséquent, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

- 7 De la question précédente, on déduit que (u_n) est croissante et majorée.

Or, toute suite croissante et majorée converge.

Donc, (u_n) converge.

- 8 De l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$, on déduit :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) \\
 \ell &= g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) \quad \text{car } g \text{ est continue} \\
 \ell &= g(\ell)
 \end{aligned}$$

Ainsi, ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$. Or, α est l'unique solution de cette équation.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

9 On a :

n	u_n
0	0
1	0,5
2	0,566 311 003 2
3	0,567 143 165
4	0,567 143 290 4

Ainsi, $u_4 \approx 0,567 143$.

Corrigé de l'exercice 2.36 page 79

- 1
- **Initialisation** : $0 < u_0 < 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
 - **Hérédité** : supposons que pour un entier k fixé, $0 < u_k < 1$.

$$\begin{aligned}0 < u_k < 1 &\Rightarrow -1 < -u_k < 0 \\&\Rightarrow 2 < 3 - u_k < 3 \\&\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3 - u_k} < \frac{1}{2} \\&\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{3 - u_k} < 1 \\&\Rightarrow 0 < u_{k+1} < 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

2

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3 - u_n} - u_n = \frac{2 - u_n(3 - u_n)}{3 - u_n} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3 - u_n} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{3 - u_n}.$$

Or, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$ donc :

- $u_n - 1 < 0$
- $u_n - 2 < 0$
- $3 - u_n > 0$

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi, (u_n) est strictement croissante.

- 3
- (u_n) est bornée, donc majorée, et strictement croissante donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge.

On pose ℓ sa limite. Alors,

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{2}{3 - \ell} \iff \ell(3 - \ell) = 2 \\&\iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \\&\iff \ell = 1 \text{ ou } \ell = 2.\end{aligned}$$

Or, $0 < u_n < 1$ donc $0 < \ell < 1$.

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

On en déduit alors que :

$$\frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{\ddots}}}} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 2.37 page 80

Partie A : étude d'une fonction

- 1 • Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \right) = -\infty$ donc, pas somme :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

- Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Commençons par transformer l'expression de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \\ &= e^x \left(1 - \frac{x^2}{2e^x} + \frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e^x} \right) \end{aligned}$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ donc, par somme et produit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$



- 2 • La dérivée de f est :

$$f'(x) = e^x - x + 2.$$

- La dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = e^x - 1.$$

- 3 On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$				
$f'(x)$	$+$			
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

- 4
- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$ donc f est concave sur cet intervalle.
 - $f''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ donc f est convexe sur cet intervalle.
 - $f''(x) = 0$ en changeant de signe en $x = 0$ donc \mathcal{C} admet un unique point d'inflexion en $x = 0$.

5 Sur $]0; 1[$,

- f est continue et strictement croissante;
- $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = e - \frac{1}{2} > 0$, donc $f(0) < 0 < f(1)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), il existe un unique réel α dans $]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

6 Par définition,

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff e^\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0 \\ &\iff e^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 2. \end{aligned}$$

Partie B : étude d'une suite

1 On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > \alpha$; par conséquent, comme f est strictement croissante sur \mathbb{R} , $f(u_n) > f(\alpha)$.

Or, $f(\alpha) = 0$ donc $f(u_n) > 0$.

2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Or, $f'(x) > 0$ donc $f'(u_n) > 0$. De plus, $f(u_n) > 0$ d'après la question précédente.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui signifie que (u_n) est décroissante.

De plus, $u_n > \alpha$ donc (u_n) est minorée.

Or, toute suite décroissante et minorée converge.

Par conséquent, (u_n) converge.

3 Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$.

Alors, de l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)},$$

on déduit :

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \quad (\text{car } f \text{ et } f' \text{ sont continues})$$

soit :

$$0 = -\frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

et donc :

$$f'(\ell) = 0.$$

Ainsi, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Or, nous avons vu que cette équation admettait une unique solution : α .

Ainsi, (u_n) converge vers α .

Corrigé de l'exercice 2.38 page 80

- 1 f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de deux fonctions dérivables sur cet ensemble.
On a :

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Or, $e^{-x} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive, donc $-e^{-x} < 0$ et $-\frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$, donc $f'(x) < 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi, f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

- 2 f est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; 1[$.
- 3 La formule qui donne l'équation réduite de la tangente en un point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

ce qui donne ici :

$$\begin{aligned} y &= \left(-e^{-1} - \frac{1}{2}\right)(x - 1) + e^{-1} - 1 \\ &= \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right)(x - 1) + \frac{1}{e} - \frac{e}{e} \\ &= -\left(\frac{2+e}{2e}\right)(x - 1) + \frac{1-e}{e} \\ &= -\left(\frac{2+e}{2e}\right)x + \frac{2+e}{2e} + \frac{2-2e}{2e} \\ &\boxed{y = -\left(\frac{2+e}{2e}\right)x + \frac{4-e}{2e}} \end{aligned}$$

- 4 L'abscisse du point d'intersection de (T_0) et de l'axe des abscisse se trouve en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{2+e}{2e}\right)x_1 + \frac{4-e}{2e} = 0 \\ \Leftrightarrow &-\left(\frac{2+e}{2e}\right)x_1 = -\frac{4-e}{2e} \\ \Leftrightarrow &x_1 = \frac{4-e}{\cancel{2e}} \times \frac{\cancel{2e}}{2+e} \\ \Leftrightarrow &\boxed{x_1 = \frac{4-e}{2+e}} \end{aligned}$$

- 5 a. Sur \mathbb{R}_+^* , $-e^{-x} < 0$ et $-\frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ donc $f'(x) < 0$ soit, en particulier, $f'(x) \neq 0$.
- b. Par définition, on a :

$$(T_n) : y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

et en remplaçant x par x_{n+1} , par définition toujours, on doit obtenir 0 :

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) &= -f(x_n) \\ \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n &= -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{car } f'(x_n) \neq 0) \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

- 6** a. Les valeurs affichées par le programme sont :

```
0.27164934570251265
0.41160233281162323
0.4261836392185189
0.4263027432505926
```

- b. Ces valeurs correspondent à celles de x_1, x_2, x_3 et x_4 .
c. Dans la mesure où les différentes valeurs de x calculées dans la boucle du programme correspondent aux termes successifs de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, on peut conjecturer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \approx 0,426303$.

- 7** \mathcal{C} est au-dessus de (T_0) donc $x_1 < \alpha$.

Dans un cas général, le point d'intersection de la tangente à une courbe \mathcal{C}_f (toujours située au-dessus de ses tangentes) et de l'axe des abscisses sera toujours avant la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Donc, $x_n \leq \alpha$ pour tout entier naturel n .

- 8** Par définition, $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Or, $f(x) \geq 0$ sur $]0; \alpha]$ (d'après les variations de f) et $f'(x) < 0$ sur ce même intervalle. Par conséquent, $x_{n+1} - x_n \geq 0$, soit $(x_n)_{n \geq 0}$ croissante sur $]0; \alpha]$.

Or, la suite est majorée par α , donc elle converge. Notons ℓ sa limite. Alors, la relation :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

devient (car f et f' sont continues sur $]0; \alpha]$) :

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

soit :

$$f(\ell) = 0.$$

Or, l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; \alpha]$ est α .

Donc la limite de $(x_n)_{n \geq 0}$ est α .

Remarque 19

La méthode de Newton est aussi abordée dans le chapitre concernant Python, en fin de ce livre.

Corrigé de l'exercice 2.39 page 82

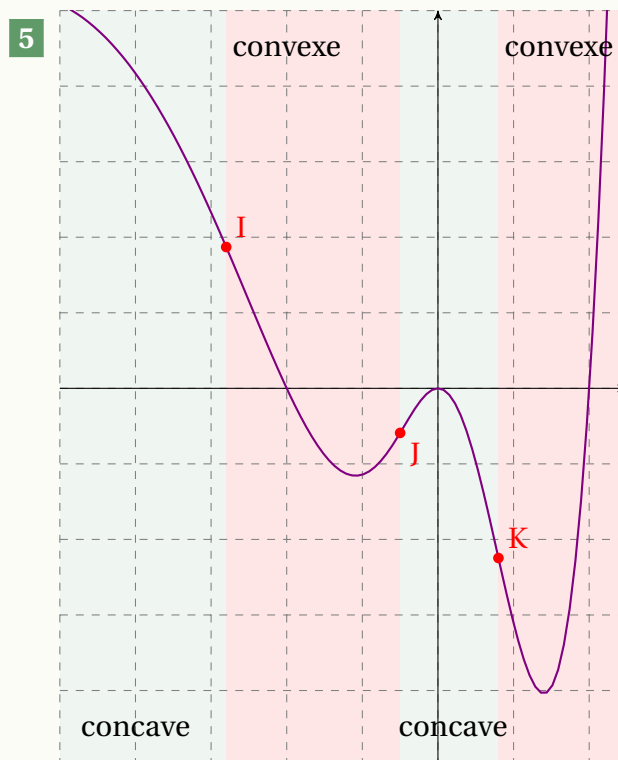
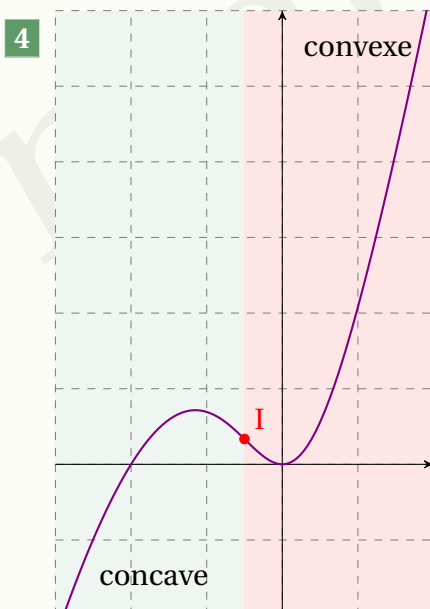
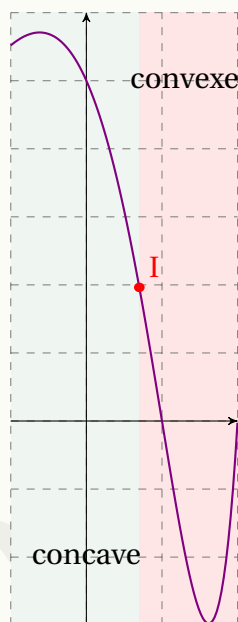
1 Quel que soit le point de la courbe, la tangente en ce point est toujours sous la courbe ; on dit ici que la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes.

Ainsi, la fonction est toujours convexe sur l'intervalle où est tracée la courbe.

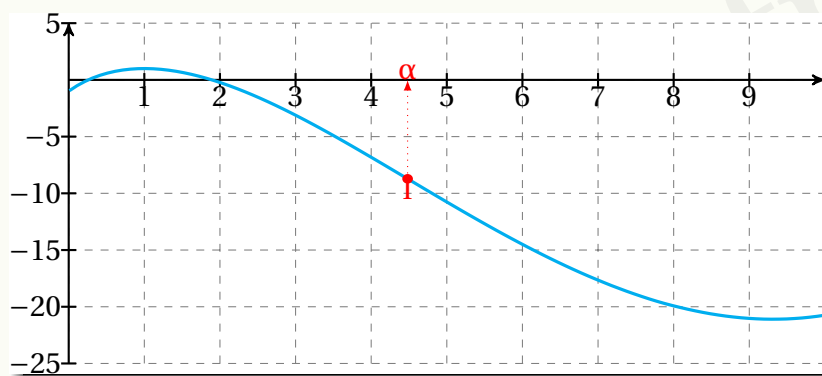
2 Ici, la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes, donc la fonction est convexe sur l'intervalle où est tracée la courbe.

3 Au début de l'intervalle, la courbe est sous ses tangentes jusqu'à un point I au-delà duquel la courbe est sous ses tangentes.

On peut alors dire que I est un point d'inflexion et que l'on a :



Corrigé de l'exercice 2.40 page 83



Sur $] -\infty; \alpha]$, f est concave car la courbe est en dessous de ses tangentes.

Sur $[\alpha; +\infty[$, f est convexe car la courbe est au-dessus de ses tangentes.

Corrigé de l'exercice 2.41 page 83

« Déterminer la convexité d'une fonction » signifie regarder sur quels intervalles cette fonction est concave, et sur quels autres intervalles elle est convexe.

Quand il s'agit de regarder la convexité d'une fonction en ayant son expression, nous devons calculer sa dérivée et étudier le signe de cette dernière.

f est de la forme uv donc $f' = u'v + v'u$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x \\ v'(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) \\ &= 1e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1 - x)e^{-x}. \end{aligned}$$

f' est aussi de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 - x \\ v(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'(x) &= -1 \\ v'(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) \\ &= -1e^{-x} - (1 - x)e^{-x} \\ &= [-1 - (1 - x)]e^{-x} \\ &= (-1 - 1 + x)e^{-x} \\ &= (x - 2)e^{-x}. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x ,

$$e^{-x} > 0$$

donc $f''(x)$ est du signe de $x - 2$, d'où le tableau de la page suivante.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	concave	P.I.	convexe

Il y a ici un point d'inflexion car $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

Corrigé de l'exercice 2.42 page 83

- 1 Le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement correspond à $f(0)$.

$$f(0) = 100 + 0^4 \times e^{-0,1 \times 0} = 100.$$

Il y a donc initialement 100 personnes qui propagent initialement cette rumeur.

- 2 a. La dérivée de $f(x)$ est la dérivée de $x^4 e^{-0,1x}$ car la dérivée de 100 vaut 0.
 $x^4 e^{-0,1x}$ est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^4 & u'(x) &= 4x^3 \\ v(x) &= e^{-0,1x} & v'(x) &= -0,1e^{-0,1x} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= 4x^3 e^{-0,1x} + x^4 (-0,1e^{-0,1x}) \\ &= 4x^3 e^{-0,1x} - 0,1x \times x^3 e^{-0,1x} \\ &= (4 - 0,1x) \times x^3 e^{-0,1x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = x^3(4 - 0,1x)e^{-0,1x}$$

- b. $f'(x)$ est du signe de $4 - 0,1x$ car une exponentielle est toujours strictement positive et $x^3 \geq 0$ pour $x \geq 0$.

De plus,

$$\begin{aligned} 4 - 0,1x \geq 0 &\iff 4 \geq 0,1x \\ &\iff \frac{4}{0,1} \geq x \\ &\iff 40 \geq x \end{aligned}$$

d'où le tableau suivant :

x	0	40	50	
$f'(x)$	0	+	0	-
f	100			42 212

- 3 f est convexe si $f''(x) \geq 0$.

On voit que $f''(x)$ est du signe de $0,01x^2 - 0,8x + 12$, donc le discriminant est :

$$\Delta = (-0,8)^2 - 4 \times 0,01 \times 12 = 0,16$$

donc les deux racines sont :

$$x_1 = \frac{0,8 - \sqrt{0,16}}{0,02} = 20 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{0,8 + \sqrt{0,16}}{0,02} = 60 > 50.$$

Ainsi,

- $f''(x) \leq 0$, donc f est concave, sur $[20; 50]$;
- $f''(x) \geq 0$, donc f est convexe, sur $[0; 20]$.

- 4** a. f est croissante jusqu'à $x = 40$, donc il faut attendre 40 jours avant que la rumeur diminue.
- b. Le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur est $f(40) \approx 46988$.
- c. La notion de « diminution de croissance » est assez difficile à comprendre pour des élèves de Terminale ES; il faut juste retenir que *la croissante diminue (ou augmente) quand il y a un changement de convexité*.
- Ainsi, cela correspond à la présence d'un point d'inflexion. Ici, c'est au bout de 20 jours que cela se produit (d'après la question **3**).

Corrigé de l'exercice 2.43 page 84

Une courbe admet un point d'inflexion uniquement lorsque la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Or, pour tout réel x ,

- $(x - 1)^2 \geq 0$, en s'annulant pour $x = 1$,
- $e^x > 0$.

La condition $f''(x) = 0$ est bien satisfaite en $x = 1$, mais $f''(x)$ ne change pas de signe en cette valeur.

Ainsi, la courbe représentative de f n'admet pas de point d'inflexion.

Corrigé de l'exercice 2.44 page 84

- 1** La fonction f est définie pour $u(x) \geq 0$.

$u'(x) = x^2 + 4x = x(x + 4)$ d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	α	-4	0	$+\infty$	
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$u(x)$		$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$	$\frac{163}{3}$		1	$+\infty$
	$-\infty$					

La fonction u est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -4[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $f(-4) > 0$ donc 0 est dans $f] -\infty; -4[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $]-\infty; -4[$ telle que $u(x) = 0$.

De plus, d'après les variations de u , $\forall x \geq \alpha$, $u(x) \geq 0$.

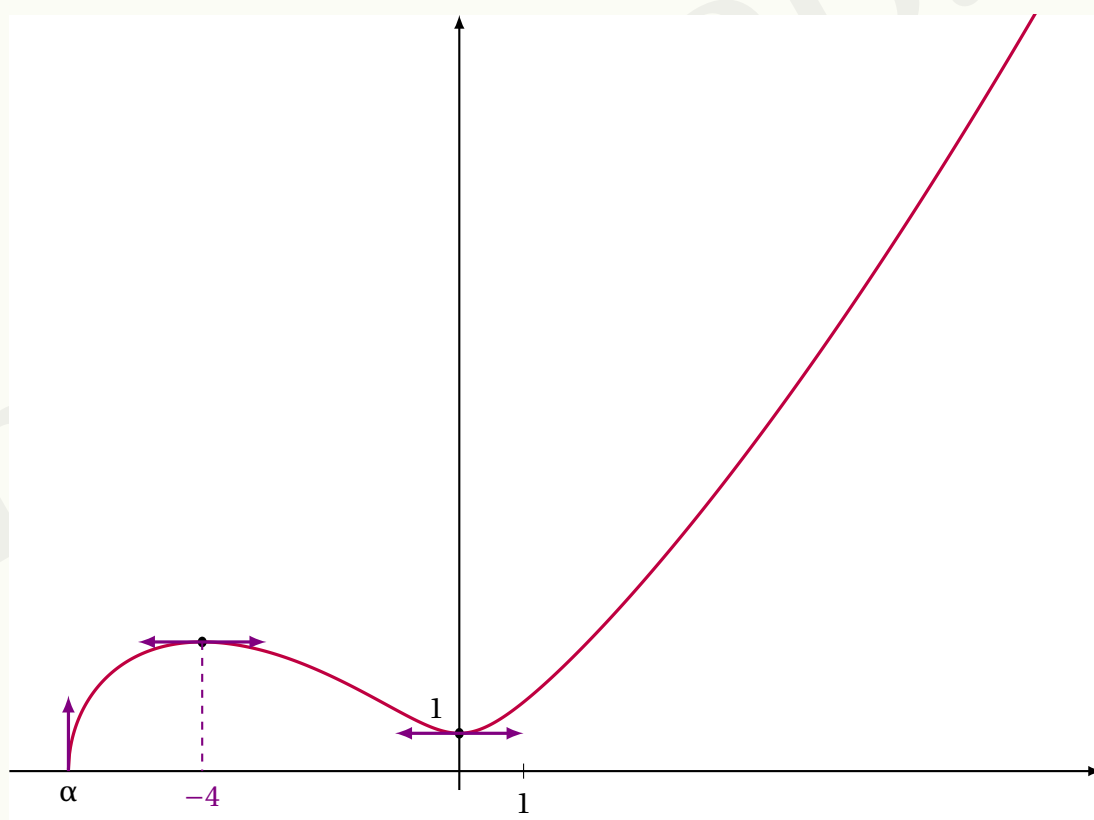
Par conséquent, f est définie sur $[\alpha; +\infty[$.

2 f est de la forme \sqrt{u} donc $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ soit :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{2\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}}.$$

$\alpha \approx -6,08$ (il ne faut pas hésiter à prendre des initiatives!) donc le numérateur de $f'(\alpha)$ est à peu près égal à $12,66 > 0$. De plus, $u(\alpha) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \alpha} f'(x) = +\infty$, ce qui signifie que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse α a un coefficient directeur infini, donc qu'elle est verticale.

Ce la se traduit graphiquement par un « début » de courbe abrupt vers le haut (la croissante initiale est extrêmement grande), voir schéma page suivante.



Corrigé de l'exercice 2.45 page 84

1 On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)} \quad \text{pour } x \neq 0 \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} \end{aligned}$$

Or,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x} - 1) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right) = 1$

Ainsi, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2 a. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 2x - \sqrt{x}$$

$$v(x) = 2 + \sqrt{x}$$

$$u'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2 + \sqrt{x}) - (2x - \sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2 + \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(4\sqrt{x} - 1)(2 + \sqrt{x}) - (2x - \sqrt{x})}{2\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{8\sqrt{x} + 4x - 2 - \sqrt{x} - 2x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{2x + 8\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2}} \quad \text{en simplifiant par 2}$$

b. Le discriminant du polynôme $X^2 + 4X - 1$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ \Delta &= 20. \end{aligned}$$

Les deux racines du polynôme sont donc :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} \\ &= -2 - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{-4 + \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} \\ &= -2 + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

D'où le tableau de signe suivant :

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$
$X^2 + 4X - 1$		0	0	
	+	-	+	

$f'(x)$ est du signe de $x + 4\sqrt{x} - 1$, c'est-à-dire de $X^2 + 4X - 1$ en posant $X = \sqrt{x}$.
Ainsi, $X > 0$ et $x = X^2$; de plus, d'après le tableau de signes précédent,

$$x + 4\sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > -2 + \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x > (-2 + \sqrt{5})^2$$

$$\Leftrightarrow x > 9 - 4\sqrt{5}$$

x	0	$9 - 4\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	0	$-9 + 4\sqrt{5}$	$+\infty$

$$\begin{aligned} f(9 - 4\sqrt{5}) &= \frac{2(9 - 4\sqrt{5}) - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}{2 + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}} \\ &= \frac{18 - 8\sqrt{5} - (-2 + \sqrt{5})}{2 - (-2 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{20 - 9\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{-45 + 20\sqrt{5}}{5} \\ &= -9 + 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Je précise que $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = -2 + \sqrt{5}$ d'après les calculs faits précédemment.

Corrigé de l'exercice 2.46 page 85

1 Considérons le polynôme $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Son discriminant est :

$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9.$$

Il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 3}{4} = 1.$$

D'où le tableau de signes page suivante.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
P(x)	+	0	-

Ainsi, sur $]0; 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-x} \times \sqrt{1+x}} \\ &= \frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+x}} \times \frac{-(1-x)}{\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. La fonction f est donc continue en 1.

2 $\lim_{x \rightarrow -1} |2x^2 - x - 1| = 4$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} = 0^+$.

Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

La fonction f n'est donc pas continue en -1 .

3 Le taux d'accroissement de la fonction f en 1 est :

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \frac{\frac{-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}}{x - 1} \\ &= \frac{-2x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} (-2x - 1) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1} \tau(x) = -\infty$.

Ainsi, f n'est pas dérivable en 1.

4 f n'étant pas continue en -1 , elle n'est pas dérivable en -1 .

5 • Si $x < -\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi, le taux d'accroissement de f en $-\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures est :

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{f(x) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{x - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} \tau(x) = \frac{-3}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{6}{\sqrt{3}}$$

- Si $x > -\frac{1}{2}$, alors $f(x) = \frac{1+x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1-x^2}}$.

Donc, le taux d'accroissement de f en $-\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures est :

$$\tau(x) = \frac{-2(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} \tau(x) = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} \tau(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} \tau(x)$.

Par conséquent, f n'est pas dérivable en $-\frac{1}{2}$.

- 6 a.** Sur $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$, $P(x) > 0$ donc $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi, f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec :

$$u(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$u'(x) = 4x - 1$$

$$v(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$v'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{(4x-1)\sqrt{1-x^2} - \frac{-x(2x^2-x-1)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{(4x-1)(1-x^2) + x(2x^2-x-1)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x^3 + 3x - 1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}$$

- b.** « 1 » est une racine évidente du polynôme $-2x^3 + 3x - 1$. Ainsi, ce dernier peut se factoriser sous la forme $(x-1)(ax^2 + bx + c)$.

Il faut donc que :

$$-2x^3 + 3x - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

$$-2x^3 + 3x - 1 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$-2x^3 + 3x - 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

D'où $a = -2$, $c = 1$ et donc $b = -2$.

$$\text{Ainsi, } f'(x) = \frac{(x-1)(-2x^2 - 2x + 1)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Le dénominateur de $f'(x)$ étant toujours strictement positif sur $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)$ est du signe de son numérateur.

Le discriminant de $-2x^2 - 2x + 1$ est $\Delta = 12$, donc ce dernier a deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

$x_2 < -1$ et $x_1 > -\frac{1}{2}$.

D'où le tableau suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$
$x - 1$	$-$	$-$
$-2x^2 - 2x + 1$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$
f	$+\infty$	0

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left|2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right|}{\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

7 a. Sur $\left]-\frac{1}{2}; 1\right]$, $P(x) < 0$ donc $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Ainsi, f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= -2x^2 + x + 1 \\ u'(x) &= -4x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ v'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{(-4x + 1)\sqrt{1 - x^2} - \frac{-x(-2x^2 + x + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} \\ &= \frac{(-4x + 1)(1 - x^2) + x(-2x^2 + x + 1)}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

b. « 1 » est une racine évidente du polynôme $2x^3 - 3x + 1$. Ainsi, ce dernier peut se factoriser sous la forme $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Il faut donc que :

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x + 1 &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

D'où $a = 2$, $c = -1$ et donc $b = 2$.

$$\text{Ainsi, } f'(x) = \frac{(x - 1)(2x^2 + 2x - 1)}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

Le dénominateur de $f'(x)$ étant toujours strictement positif sur $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)$ est du signe de son numérateur.

Le discriminant de $2x^2 + 2x - 1$ est $\Delta = 12$, donc ce dernier a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$x_1 < -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 \in \left]-\frac{1}{2}; 1\right[.$$

D'où le tableau suivant :

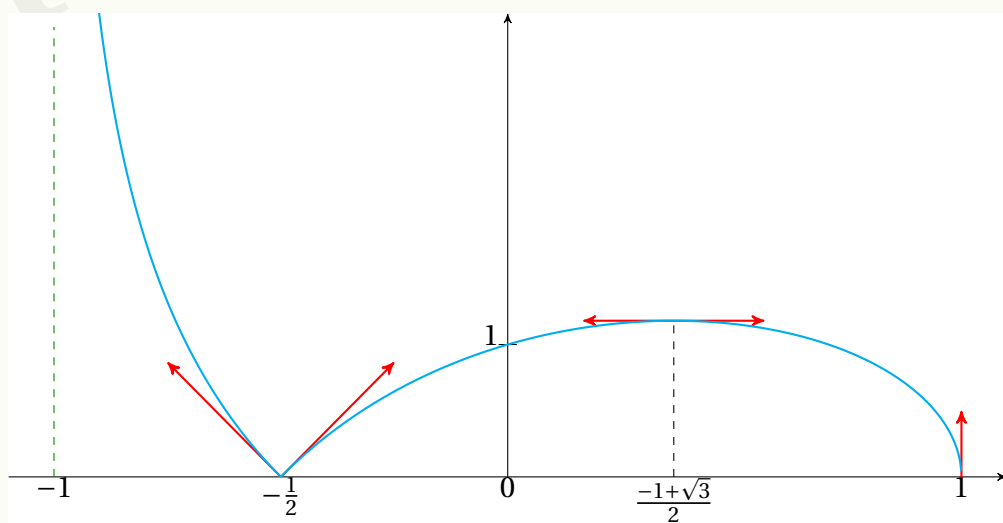
x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$	1
$x - 1$		-	-
$2x^2 + 2x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-
f	0		0

$$f(x_2) = \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

8 Le tableau de variations complet de f est :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$	1
f	$+\infty$	0		0

On a alors la courbe suivante :



Corrigé de l'exercice 2.47 page 85

- 1 Par construction, $OM = ON = 60$ mm, donc OMN est isocèle en O.
- 2 MON est isocèle en O donc le pied de la hauteur issue de O est le milieu de [MN]. Dans le triangle OIM rectangle en I, on a :

$$\sin \widehat{MOI} = \frac{IM}{OM},$$

soit :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{MN}{2}}{60},$$

ou encore :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{MN}{120}.$$

- 3 a. $f'(x) = 1 - \cos x$. Or, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq \cos x \leq 1$, donc $0 \leq f'(x) \leq 1$. $f'(x)$ est donc positive, ce qui implique que f est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f(0) = 0 - \sin 0 = 0 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\text{Ainsi, sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2} - 1\right].$$

- b. De la question précédente, on peut déduire que pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, la différence entre x et $\sin x$ est inférieure à $\frac{\pi}{2} - 1$, soit approximativement 0,57, ce qui est relativement peu. On peut donc remplacer $\sin x$ par x en ne commettant qu'une erreur faible si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 4 De la question précédente, on peut écrire :

$$\sin\left(\frac{\pi}{360}\alpha\right) \approx \frac{\pi}{360}\alpha$$

et donc, d'après la question 2 :

$$\frac{\pi}{360}\alpha \approx \frac{MN}{120}.$$

Or,

$$\pi \approx 3$$

d'où :

$$\alpha \approx MN.$$

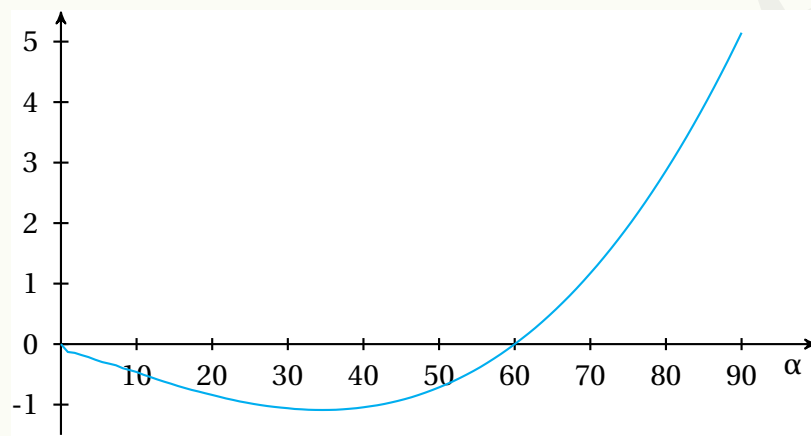
- 5 La formule d'Al-Kashi nous donne :

$$MN^2 = 60^2 + 60^2 - 2 \times 60 \times 60 \times \cos \alpha,$$

soit :

$$g(\alpha) = 60\sqrt{2 - 2\cos \alpha}.$$

6 La courbe représentative de la fonction d est :



On constate que pour $\alpha \in [0; 70]$, $|d(\alpha)| \leq 1$, ce qui signifie que la différence entre α et $g(\alpha)$ ne diffère pas plus de 1° . De plus, pour $\alpha \in [70; 90]$, cette différence n'excède pas 5° , ce qui n'est pas énorme. L'approximation peut donc être considérée comme satisfaisante.

Logarithme népérien

Plan du chapitre

I	Introduction	138
1	Définition et résolution d'équations	138
2	Variation de la fonction \ln	138
3	Conservation de l'ordre	139
4	Relations fonctionnelles	139
II	Limites	140
1	Limites du logarithme népérien	140
2	Croissances comparées	140
III	Représentation graphique	140
IV	Dérivée de $\ln(u)$	141
	Enoncés	142
	Corrigés des exercices	154

I - Introduction

I . 1 - Définition et résolution d'équations

Définition 14

On définit la fonction logarithme népérien comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, c'est-à-dire l'unique fonction :

$$\begin{aligned}\ln : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln x\end{aligned}$$

pour laquelle :

$$\forall x > 0, e^{\ln x} = \ln e^x = x.$$

Propriété 14

Soient $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

On en déduit notamment que :

$$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ln e = 1.$$

Exemple 20

$$e^x = 7 \iff x = \ln 7.$$

I . 2 - Variation de la fonction \ln

Propriété 15

La fonction \ln est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

De la dérivée du logarithme népérien, on peut en déduire la propriété suivante.

Propriété 16

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante et concave \mathbb{R}_+^* .

I . 3 - Conservation de l'ordre

Propriété 17

Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln x = \ln y \iff x = y \quad \text{et} \quad \ln x < \ln y \iff x < y.$$

Exemple 21

1 $\ln(x^2 + 7) = \ln(2x^2 + 3) \iff x^2 + 7 = 2x^2 + 3$

$$\iff x^2 = 4$$

$$\iff x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

2 $\ln(x^2 + 10) > \ln(2x^2 + 1) \iff x^2 + 10 > 2x^2 + 1$

$$\iff x^2 < 9$$

$$\iff x \in [-3 ; 3].$$

Remarque 20

Dans la résolution d'équations ou d'inéquations avec des logarithmes, il faut toujours s'assurer que les opérandes soient strictement positives. Dans notre premier exemple, $x^2 + 7 > 0$ et $2x^2 + 3 > 0$ pour tout réel x ; on peut ainsi résoudre l'équation sur \mathbb{R} . Il en est de même pour l'inéquation.

I . 4 - Relations fonctionnelles

Propriété 18

Pour tous réels x et y strictement positifs, pour tout entier relatif n :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln(x^n) = n \ln x.$

Attention 11



Faire preuve de rigueur lors de l'utilisation de la relation fonctionnelle : ne pas scinder $\ln(xy)$ en somme de deux logarithmes sans avoir vérifié et mentionné la stricte positivité de x et y .

II - Limites

II . 1 - Limites du logarithme népérien

Propriété 19

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de la fonction logarithme.

II . 2 - Croissances comparées

Propriété 20

Pour tout entier naturel n ,

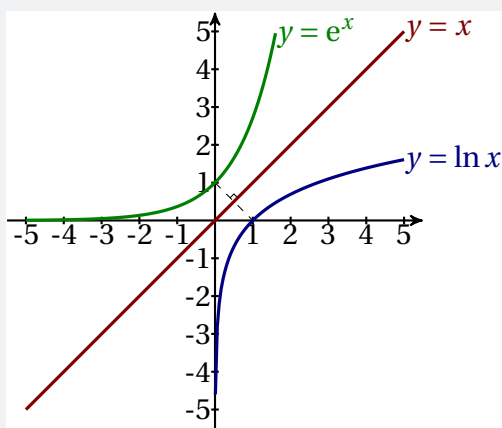
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0.$

Remarque 21

On dit qu'en cas d'indétermination, les puissances de x « l'emportent » sur $\ln x$.

III - Représentation graphique

De la stricte croissante de la fonction \ln , de sa concavité, de ses limites et des valeurs remarquables du logarithme népérien, on déduit sa représentation graphique dans un repère orthonormé :



Du fait que les fonctions \exp et \ln sont réciproques, on déduit que, dans un repère orthonormé, leur courbe représentative sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

IV - Dérivée de $\ln(u)$

Propriété 21

Soit u une fonction définie et dérivable à valeurs strictement positives sur un intervalle I .
Alors, sur I :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

Exemple 22

Soit $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

Alors, $f(x) = \ln[u(x)]$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$.

D'où :

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Opérations algébriques

Exercice 3.1 (simplifications d'écritures)



Simplifiez au maximum les expressions suivantes :

1 $\ln 8 - \ln 2$

4 $\ln 50 + \ln 2 - \ln 10$

7 $\ln e^{2x}$

2 $\ln 6 + \ln 3$

5 $3 \ln 4 - \ln 256$

8 $\ln e^{2x-4} - \ln e^{2x+4}$

3 $\ln 25 - \ln 30 + \ln 10$

6 $2 \ln 2 - \ln 16 + \ln 128$

9 $\frac{3 \ln e^{x+1}}{2 \ln e^{1-x}}$

Solution page 154

Exercice 3.2 (équations)



Résoudre les équations suivantes :

1 $\ln(3x - 4) = \ln(2x + 1)$

5 $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$

2 $\ln(4 - 2x) = \ln(x - 1)$

6 $2(\ln x)^2 - 5 \ln x - 3 = 0$

3 $\ln(x^2 + x + 1) = \ln(x^2 - 2x + 1)$

7 $\ln \sqrt{x} = \sqrt{\ln x}$

4 $\ln(2x^2 - 10x + 8) = \ln(3x^2 - 3x - 18)$

Solution page 154

Exercice 3.3 (équations & inéquations avec exponentielle)



Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1 $\ln(5x - 1) = 2$

3 $\ln(3x - 1) < 0$

2 $e^{-x} = 5$

4 $e^{5-x} \leq 2$

Solution page 156

Exercice 3.4 (inéquations)



Résoudre les inéquations suivantes :

1 $\ln(5x + 20) > \ln(3x - 9)$

4 $\ln(2x^2 - 3x + 1) > \ln(-5x^2 + 8x - 3)$

2 $\ln(8 - 2x) \leq \ln(5x - 25)$

5 $\ln(x^2 - 5x - 14) \leq \ln(2x^2 - 10x + 8)$

3 $\ln(x^2 + 1) < \ln(2x^2 + x + 2)$

6 $\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16)$

Solution page 157

Calcul de limites

Exercice 3.5 (démonstration de cours)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln x - x.$$

- 1 Étudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.
- 2 En déduire que pour $x \geq 1$, $0 \leq \ln x < x$.
- 3 Déduire alors que pour $x \geq 1$, $0 \leq \frac{\ln x}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- 4 Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$.

Solution page 159

Exercice 3.6 (une limite hors programme)

En considérant la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ et son taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Solution page 159

Exercice 3.7 (limites diverses)

On admettra dans cet exercice que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Calculer les limites suivantes :

- 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1} \right)$.
- 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} \right)$.
- 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \right)$.
- 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{1 - \sqrt{x+1}} \right)$.

Solution page 160

Exercice 3.8 (prise d'initiative)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \ln(x^2 + 1).$$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. On admettra pour cela que $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
Indice : on pourra démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$ en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$. Cela pourra nous servir dans notre raisonnement.
- 3 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Solution page 161

Dérivation et étude de fonctions

Exercice 3.9

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1 $f_1(x) = x \ln x - x$

3 $f_3(x) = \ln(x^2)$

5 $f_5(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$

2 $f_2(x) = \frac{\ln x}{x}$

4 $f_4(x) = \ln \sqrt{x+1}$

6 $f_6(x) = \ln(\ln x)$

Solution page 163

Exercice 3.10

Étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

Solution page 165

Exercice 3.11

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

- 1 Déterminer son domaine de définition.
- 2 Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variations de f sur son domaine de définition.
- 3 Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.
Dresser un tableau de variations complet de la fonction f .

Solution page 166

Exercice 3.12

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 1).$$

- 1 Donner le domaine de définition de f . On le notera \mathcal{D} .
- 2 Calculer les limites de f aux bornes de \mathcal{D} .
- 3 Calculer $f'(x)$.
- 4 Trouver le signe de $f'(x)$ sur \mathcal{D} , puis en déduire les variations de f sur \mathcal{D} .
Dresser un tableau de variations complet de f .

Solution page 166

Exercice 3.13 (comparer deux nombres)



Dans cet exercice, on acceptera la propriété suivante :

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b, \quad a \ln b = \ln(b^a).$$

(Dans le cours, nous avons vu qu'elle était vraie pour a entier)

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = e \ln x - x.$$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 3 Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f . Dresser un tableau de variations de f .
- 4 Comparer alors les nombres π^e et e^π .

Solution page 167

Exercice 3.14 (prise d'antibiotiques)



Lorsque l'on prend des antibiotiques, la concentration de bactéries présentes dans le corps d'une personne malade diminue avec le temps en suivant le modèle d'une fonction f définie, pour $0 \leq t \leq 6$, par :

$$f(t) = ae^{kt} + b, \quad a, b, k \text{ étant trois réels, avec } a \neq 0,$$

où t désigne le temps (exprimé en jour) et où $f(t)$ représente le taux de bactéries restantes. Ainsi, $f(0) = 1$. On suppose que la totalité des bactéries sont éliminées après 6 jours. Donc $f(6) = 0$.

- 1 Montrer que $f(t) = ae^{\frac{1}{6} \ln(1-\frac{1}{a})t} + 1 - a$.
- 2 On sait que 50 % des bactéries disparaissent au bout de deux jours.

$$\text{En déduire que } ae^{\frac{1}{3} \ln(1-\frac{1}{a})} + \frac{1}{2} - a = 0.$$

Pour tout nombre réel $x > 1$, on pose :

$$g(x) = xe^{\frac{1}{3} \ln(1-\frac{1}{x})} - x + \frac{1}{2}.$$

- 3 Montrer que $g'(x) = \left(1 + \frac{1}{3x-3}\right) e^{\frac{1}{3} \ln(1-\frac{1}{x})} - 1$.

- 4 a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$.

b. On admet que $g''(x) = \frac{-2}{9x(x-1)} e^{\frac{1}{3} \ln(1-\frac{1}{x})}$.

En déduire les variations de la fonction g' puis celles de la fonction g sur $]1; +\infty[$.

- 5 Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur $]1,3; 1,4[$.

On admet que $\alpha \approx 1,309$.

Solution page 168

Exercice 3.15



Soit f la fonction définie pour tout réel $x > -1$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 6x - 1.$$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2 Montrer que $f'(x) = \ln(x+1) - 5$.
- 3 En déduire les variations de f .
- 4 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ et une autre sur $[395; 400]$.
En donner une valeur approchée au millièm.

Solution page 169

Exercice 3.16 (étude avec fonction auxiliaire)



Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}.$$

- 1 Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{2x^3}$.
- 2 étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 3 Dresser un tableau de variations de h sur $]0; +\infty[$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2 + 1)\ln x - x.$$

- 1 Calculer sa dérivée puis montrer l'équivalence suivante :
$$f'(x) > 0 \iff h(x) > 0.$$
- 2 En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
- 3
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 - b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - c. Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- 4
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α , sur $]0; +\infty[$.
 - b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]1; 2[$.
 - c. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution page 171

Exercice 3.17



On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - \ln x$$

et sa courbe représentative \mathcal{C} dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = xe^x - 1.$$

- b.** En déduire qu'il existe un réel positif unique α tel que : $\alpha e^\alpha = 1$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .

- c.** Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

- 2 a.** Déterminer les limites de f aux bornes de $]0; +\infty[$.

- b.** Calculer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe sur $]0; +\infty[$ en utilisant la question 1. Dresser le tableau de variations de f .

- c.** Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \frac{1}{\alpha}$. Justifier que : $2,32 \leq m \leq 2,34$.

- 3** Donner une équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} en son point d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de \mathcal{T} et de l'axe des abscisses.

- 4** Tracer \mathcal{C} et \mathcal{T} .

Solution page 173

Exercice 3.18



Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = k \ln(ax + b)$$

où a , b et k sont trois nombres réels non nuls.

- 1** On sait que $f(1) = 1$. Montrer alors que $a + b = e^{\frac{1}{k}}$.

- 2** On sait de plus que $f'(1) = 1$. Montrer alors que $a = \frac{b}{k-1}$.

- 3** En déduire que $b = \left(\frac{k-1}{k}\right)e^{\frac{1}{k}}$ puis que $a = \frac{1}{k}e^{\frac{1}{k}}$.

- 4 a.** Montrer que $f(0) = 1 + k \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

- b.** On souhaite que $f(0) \approx \frac{1}{2}$. Est-ce possible? Si oui, donner une valeur approchée de k au dixième près.

Aide : on pensera à appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur une fonction appropriée et sur l'intervalle $[-1; -0,2]$ par exemple.

Solution page 175

Exercice 3.19 (étude avec fonction auxiliaire)



L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}.$$

Pour cela, on considère les fonctions g et h définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = (1 - x^2) \ln x + x^2 + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = x^2(1 - 2 \ln x).$$

- 1**
 - a. Calculer $h'(x)$ puis en déduire les variations de la fonction h sur $]0; +\infty[$.
 - b. Montrer qu'il existe une unique valeur $\alpha > 1$ telle que $h(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à 0,001 près.
 - c. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 2**
 - a. En vous aidant de la question précédente, trouver les variations de g sur $]0; +\infty[$.
 - b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions β et γ telles que $0 < \beta < 1$ et $\gamma > \alpha$, avec $\gamma = \frac{1}{\beta}$.
- 3** Déduire de la question précédente les variations de f sur $]0; +\infty[$.
- 4** Montrer que $f(\beta) = -f(\gamma)$.

Solution page 176

Exercice 3.20 (avec une fonction auxiliaire)



Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - xe - 2 \ln x.$$

- 1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2** Déterminer les variations de g sur $]0; +\infty[$.
- 3** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
On notera α cette solution et on en donnera une valeur approchée à 0,01 près.
- 4** Donner alors le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}.$$

- 1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2** Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ et en déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
- 3** Montrer que $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$.

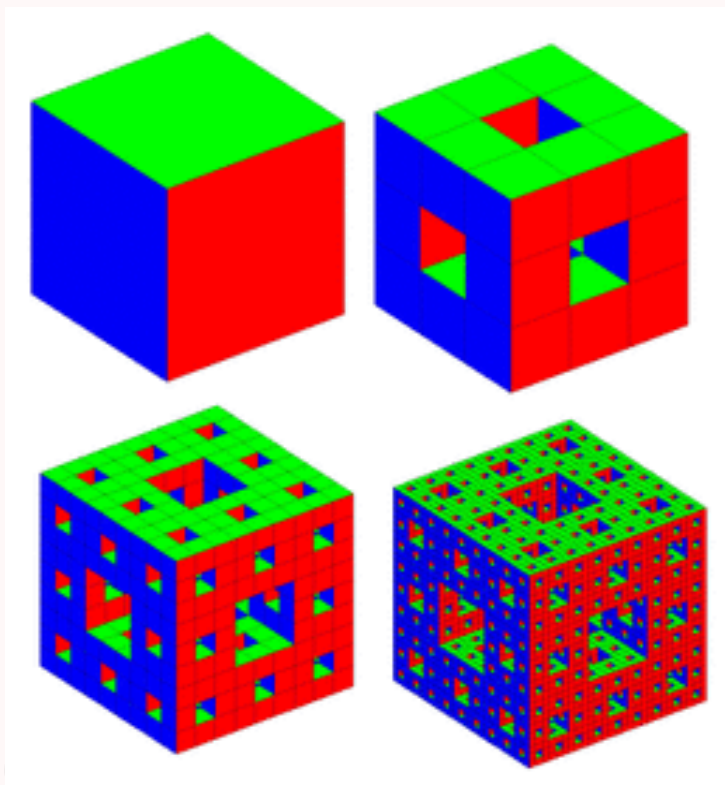
Solution page 179

Logarithme népérien et suites numériques

Exercice 3.21 (l'éponge de Menger)



L'*éponge de Menger* est un objet fractal, c'est-à-dire un objet dit *auto-similaire* (quand on fait un zoom sur une partie de cet objet, on retrouve la structure de l'objet lui-même). Cet objet est construit à partir d'un cube rempli, en lui ôtant deux prismes perpendiculaires à base carrée, puis en répétant ceci une infinité de fois (voir illustration ci-dessous).



On note :

- N_p le nombre de cubes pleins à l'étape p ;
- L_p la longueur du côté de la base du p -ième cylindre enlevé (à l'étape p).

On appelle *dimension de l'objet fractal* le nombre d défini par :

$$d = - \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln N_p}{\ln L_p} \right).$$

1 Justifier que $N_p = 20^p$ et $L_p = 3^{-p}$ pour $p > 0$.

2 En déduire que $d = \frac{\ln 20}{\ln 3}$.

Solution page 180

Exercice 3.22 (suites avec logarithme népérien)



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1). \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) - x.$$

- 1 Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à -1 , $f(x) \leq 0$.
- 2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- 3 Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
- 4 Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution page 181

Exercice 3.23 (suite se ramenant à une suite géométrique)



On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5e \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n} \end{cases}$$

- 1 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 5$.
- 2 Étudier les variations de $(u_n)_{n \geq 0}$.
- 3 En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.
- 4 Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n) - \ln(5)$.
 - a. Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique. Préciser alors sa raison et son premier terme.
 - b. En déduire une expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n .
 - c. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 5 Pour tout entier naturel n , on pose $P_n = \frac{u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}{5^n}$.
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Solution page 182

Exercice 3.24 (suite de fonctions)



- 1** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$.
- 2** Soit n un entier naturel non nul, n étant fixé pour cette question. On définit la fonction f_n sur $[0; +\infty[$ par :
- $$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}.$$
- a.** Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
b. Calculer la dérivée de f_n sur $[0; +\infty[$.
c. Dresser le tableau de variations de f_n .
d. En déduire que l'équation, d'inconnue x , $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0; +\infty[$.
e. Justifier que $0 < \alpha_n < 1$.
- 3** Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $\ln(\alpha_n^2 + 1) = 2n(1 - \alpha_n)$.
En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
- 4** étude de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- a.** à l'aide de la calculatrice, proposer sans justification, des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de α_1 , α_4 et α_{10} .
b. Démontrer que la suite (α_n) est croissante.
c. En déduire que la suite (α_n) est convergente.
d. Déterminer la limite de la suite (α_n) .

Solution page 184

Logarithme népérien et Python

Exercice 3.25 (limite d'une suite)



On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{cases}$$

- 1** Écrire un programme en Python permettant d'afficher les termes de u_1 à u_{50} .
2 À l'aide de ce programme, conjecturer la limite de (u_n) .

On se propose de démontrer cette conjecture.

Pour cela, on pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

- 3** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n \leq 1$.
On démontre de façon analogue que $w_n \leq 1$.
4 Montrer que la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.

- 5 En déduire que (v_n) est décroissante.
On démontre de même que (w_n) est croissante.
- 6 Démontrer que $w_n \leq v_n$ pour tout entier naturel n .
- 7 Montrer que (v_n) , (w_n) et (u_n) convergent vers une même limite.

Solution page 186

Exercice 3.26 (suite définie par une fonction)

Remarque 23

Cet exercice traite de la même suite que celle vue dans l'exercice précédent, mais abordée d'une autre manière.

Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

- 1 Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.
- 2 Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variations de f sur \mathbb{R}_+^* .
- 3 Dresser un tableau de variations complet de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

- 1 Montrer que g est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
- 2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\frac{1}{2}; 1]$.
En déduire que l'équation α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On définit alors la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n}.$$

- 1 Calculer v_0 , v_1 puis v_2 . On donnera des valeurs approchées au millièm.
- 2 Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(f(u_{2n}))$.
- 3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1.$$

- 4 En déduire que (v_n) converge.
- 5 En déduire que (u_n) et (v_n) ont la même limite α , où α est la valeur introduite dans la partie B.

Partie D

On considère l'algorithme suivant :

	Entrées
1	a nombre réel
2	n nombre entier
3	d nombre réel
	Traitement
4	a prend la valeur 1
5	n prend la valeur 0
6	d prend la valeur 1
7	Tant que $d > 10^{-6}$
8	d prend la valeur a
9	a prend la valeur $\ln(1+1/a)$
10	a prend la valeur $\ln(1+1/a)$
11	n prend la valeur $n+1$
12	d prend la valeur $d-a$
13	Fin du Tant que
	Sortie
14	Afficher a

- 1 Un élève affirme qu'il y a une erreur car les lignes 9 et 10 sont identiques. Expliquer en quoi cet élève se trompe.
- 2 Que doit-on écrire pour ne pas répéter ces deux lignes?
- 3 Implanter cet algorithme en Python puis donner une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Solution page 189

Corrigé de l'exercice 3.1 page 142

$$1 \quad \ln 8 - \ln 2 = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \ln 4 \text{ (que l'on peut aussi mettre sous la forme } 2\ln 2\text{).}$$

$$2 \quad \ln 6 + \ln 3 = \ln(6 \times 3) = \ln 18.$$

$$3 \quad \ln 25 - \ln 30 + \ln 10 = \ln\left(\frac{25}{30} \times 10\right) = \ln \frac{25}{3}.$$

$$4 \quad \ln 50 + \ln 2 - \ln 10 = \ln\left(\frac{50 \times 2}{10}\right) = \ln 10.$$

$$5 \quad 3\ln 4 - \ln 256 = 3\ln(2^2) - \ln(2^8) = 6\ln 2 - 8\ln 2 = -2\ln 2.$$

$$6 \quad 2\ln 2 - \ln 16 + \ln 128 = 2\ln 2 - \ln 2^4 + \ln 2^7 = 2\ln 2 - 4\ln 2 + 7\ln 2 = 5\ln 2.$$

$$7 \quad \ln e^{2x} = 2x.$$

$$8 \quad \ln e^{2x-4} - \ln e^{2x+4} = 2x - 4 - (2x + 4) = -8.$$

$$9 \quad \frac{3\ln e^{x+1}}{2\ln e^{1-x}} = \frac{3(x+1)}{2(1-x)} = \frac{3x+3}{2-2x}.$$

Corrigé de l'exercice 3.2 page 142

$$1 \quad \ln(3x-4) = \ln(2x+1).$$

- **Domaine de définition** : il faut que $\begin{cases} 3x-4 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$, donc que

$$x > \frac{4}{3}.$$

- **Résolution** : $\ln(3x-4) = \ln(2x+1) \iff 3x-4 = 2x+1 \iff x = 5$.
 $5 > \frac{4}{3}$ donc l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{5\}$

$$2 \quad \ln(4-2x) = \ln(x-1).$$

- **Domaine de définition** : il faut que $\begin{cases} 4-2x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$, donc que
 $1 < x < 2$.

- **Résolution** : $\ln(4-2x) = \ln(x-1) \iff 4-2x = x-1 \iff 5 = 3x \iff x = \frac{5}{3}$.

$$1 < \frac{5}{3} < 2 \text{ donc l'ensemble solution de l'équation est } \mathcal{S} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

$$3 \quad \ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1).$$

- **Domaine de définition** : il faut que $\begin{cases} x^2+x+1 > 0 \\ x^2-2x+1 > 0 \end{cases}$.

Or, le discriminant de x^2+x+1 est égal à -3 donc ce polynôme est toujours strictement positif.

De plus, $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ donc seul $x = 1$ ne convient pas.

Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- **Résolution :** $\ln(x^2 + x + 1) = \ln(x^2 - 2x + 1)$
 $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1$
 $\Leftrightarrow 3x = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0.$

$0 \in \mathcal{D}$ donc l'ensemble solution de l'équation est $\mathcal{S} = \{0\}$

4 $\ln(2x^2 - 10x + 8) = \ln(3x^2 - 3x - 18).$

- **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} 2x^2 - 10x + 8 > 0 \\ 3x^2 - 3x - 18 > 0 \end{cases}.$

Le discriminant de $2x^2 - 10x + 8$ est $\Delta_1 = 100 - 64 = 36$ et donc ses racines sont $\frac{10-6}{4} = 1$ et $\frac{10+6}{4} = 4.$

Le polynôme est donc strictement positif sur $]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[.$

Le discriminant de $3x^2 - 3x - 18$ est $\Delta_2 = 9 + 216 = 225$ et donc ses racines sont $\frac{3-15}{6} = -2$ et $\frac{3+15}{6} = 3.$

Le polynôme est donc strictement positif sur $]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[.$

Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} =]-\infty; -2[\cup]4; +\infty[.$

- **Résolution :** $\ln(2x^2 - 10x + 8) = \ln(3x^2 - 3x - 18)$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 3x^2 - 3x - 18$
 $\Leftrightarrow x^2 + 7x - 26 = 0.$

Le discriminant de $x^2 + 7x - 26$ est $\Delta = 49 + 104 = 153$ donc il admet deux racines : $\frac{-7 - \sqrt{153}}{2} \in \mathcal{D}$ et $\frac{-7 + \sqrt{153}}{2} \notin \mathcal{D}.$

L'ensemble solution de l'équation est donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-7 - \sqrt{153}}{2} \right\}$

5 $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0.$ Posons $X = \ln x.$

L'équation devient : $X^2 - 3X + 2 = 0$ et admet pour solutions $X = 1$ et $X = 2.$

Ainsi, $\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$, soit $x = e$ ou $x = e^2.$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{e; e^2\}$

6 $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0.$ Posons $X = \ln x.$

L'équation devient $2X^2 - 5X - 3 = 0$ et admet pour solutions $X = 3$ et $X = -\frac{1}{2}.$

Ainsi, $\ln x = 3$ ou $\ln x = -\frac{1}{2}$, soit $x = e^3$ ou $x = e^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{e^3; e^{-0,5}\}$

7 $\ln \sqrt{x} = \sqrt{\ln x}.$

- **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases}$ soit $x > 0$ et $x \geq 1.$

Le domaine de définition est donc : $\mathcal{D} = [1; +\infty[.$

- **Résolution :** $\ln \sqrt{x} = \sqrt{\ln x} \iff (\ln \sqrt{x})^2 = \ln x$ (on a élevé au carré)

$$\iff \left(\frac{1}{2} \ln x\right)^2 = \ln x$$

$$\iff \frac{1}{4} (\ln x)^2 - \ln x = 0$$

$$\iff \ln x \left(\frac{1}{4} \ln x - 1\right) = 0$$

$$\iff \ln x = 0 \text{ ou } \frac{1}{4} \ln x - 1 = 0$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } \ln x = 4$$

$$\iff x = 1 \in \mathcal{D} \text{ ou } x = e^4 \in \mathcal{D}.$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{1; e^4\}$

Corrigé de l'exercice 3.3 page 142

- 1** • Pour résoudre l'équation $\ln(5x - 1) = 2$, il faut avant tout trouver son domaine de définition.

$\ln(5x - 1)$ est défini pour tout réel x tel que $5x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{5}$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$.

- $\ln(5x - 1) = 2 \iff e^{\ln(5x-1)} = e^2$

$$\iff 5x - 1 = e^2$$

$$\iff 5x = e^2 + 1$$

$$\iff x = \frac{e^2 + 1}{5}$$
- On vérifie que la valeur trouvée est bien dans le domaine de définition en trouvant une valeur approchée.

Par conséquent, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{e^2 + 1}{5} \right\}$.

- 2** $e^{-x} = 5 \iff \ln(e^{-x}) = \ln(5)$

$$\iff -x = \ln(5)$$

$$\iff x = -\ln(5) = \ln \frac{1}{5}$$

Par conséquent, $\mathcal{S} = \{-\ln 5\}$.

- 3** • Pour résoudre l'inéquation $\ln(3x - 1) < 0$, il faut avant tout trouver son domaine de définition.

$\ln(3x - 1)$ est défini pour tout réel x tel que $3x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{3}$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$.

- $\ln(3x-1) < 0 \iff e^{\ln(3x-1)} < e^0$

$$\iff 3x-1 < 1$$

$$\iff 3x < 2$$

$$\iff x < \frac{2}{3}$$

- On trouve l'intersection de l'intervalle $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ et du domaine de définition

$$\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[. \text{ Par conséquent, } S = \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right].$$

4 $e^{5-x} \leq 2 \ln(e^{5-x}) \leq \ln(2)$

$$\iff 5-x \leq \ln(2)$$

$$\iff -x \leq \ln(2) - 5$$

$$\iff x \geq 5 - \ln(2)$$

Par conséquent, $S = [5 - \ln(2); +\infty[$

Corrigé de l'exercice 3.4 page 142

1 $\ln(5x+20) > \ln(3x-9)$.

- **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} 5x+20 > 0 \\ 3x-9 > 0 \end{cases}$, soit $x > 3$.

Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} =]3; +\infty[$.

- **Résolution :** $\ln(5x+20) > \ln(3x-9)$

$$\iff 5x+20 > 3x-9$$

$$\iff 2x > -29$$

$$\iff x > -\frac{29}{2}.$$

Notons $\mathcal{U} = \left]-\frac{29}{2}; +\infty\right[$; alors, l'ensemble solution de l'inéquation est $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, soit $\mathcal{S} =]3; +\infty[$.

2 $\ln(8-2x) \leq \ln(5x-25)$.

- **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} 8-2x > 0 \\ 5x-25 > 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x < 4 \\ x > 5 \end{cases}$, donc le domaine de définition est $]-\infty; 4[\cup]5; +\infty[$.

- **Résolution :** $\ln(8-2x) \leq \ln(5x-25)$

$$\iff 8-2x \leq 5x-25$$

$$\iff 8+25 \leq 5x+2x$$

$$\iff 7x \geq 33$$

$$\iff x \geq \frac{33}{7}.$$

Notons $\mathcal{U} = \left[\frac{33}{7}; +\infty\right[$; l'ensemble solution de l'inéquation est alors $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, soit

$$\mathcal{S} =]5; +\infty[$$

3 $\ln(x^2 + 1) < \ln(2x^2 + x + 2)$.

- **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ 2x^2 + x + 2 > 0 \end{cases}$, ce qui est toujours le cas car le discriminant des polynômes $x^2 + 1$ et $2x^2 + x + 2$ sont strictement négatifs. Le domaine de définition est donc \mathbb{R} .

• **Résolution :** $\ln(x^2 + 1) < \ln(2x^2 + x + 2)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 < 2x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0.$$

Le discriminant de $x^2 + x + 1$ étant strictement négatif, tout réel x convient.

L'ensemble solution de cette inéquation est donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

4 $\ln(2x^2 - 3x + 1) > \ln(-5x^2 + 8x - 3)$.

- **Domaine de définition :** les racines de $2x^2 - 3x + 1$ sont 1 et $\frac{1}{2}$;

ainsi, $2x^2 - 3x + 1 > 0$ sur $I =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$.

Les racines de $-5x^2 + 8x - 3$ sont 1 et $\frac{3}{5}$ donc $-5x^2 + 8x - 3 > 0$ sur $J =]\frac{3}{5}; 1[$.

Le domaine de définition est donc $I \cap J = \emptyset$.

- **Résolution :** le domaine de définition étant l'ensemble vide, il ne peut y avoir de solutions à cette inéquation. Donc $\mathcal{S} = \emptyset$

5 $\ln(x^2 - 5x - 14) \leq \ln(2x^2 - 10x + 8)$.

- **Domaine de définition :** le polynôme $x^2 - 5x - 14$ admet pour racines -2 et 7 donc il est strictement positif sur $I =]-\infty; -2[\cup]7; +\infty[$.

Le polynôme $2x^2 - 10x + 8$ admet pour racines 4 et 1 donc il est strictement positif sur $J =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$.

Le domaine de définition est donc $I \cap J$, soit $\mathcal{D} =]-\infty; -2[\cup]7; +\infty[$.

• **Résolution :** $\ln(x^2 - 5x - 14) \leq \ln(2x^2 - 10x + 8)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 \leq 2x^2 - 10x + 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 22 \geq 0.$$

Le discriminant de $x^2 - 5x + 22$ est $\Delta = 25 - 108 < 0$ donc le polynôme est toujours strictement positif.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]7; +\infty[$

6 $\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16)$.

- **Domaine de définition :** le polynôme $x^2 + x - 6$ admet pour racines 2 et -3 donc il est strictement positif sur $I =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$.

Le polynôme $-2x^2 + 14x + 16$ admet pour racines -1 et 8 donc il est strictement positif sur $J =]-1; 8[$.

Le domaine de définition est donc $I \cap J$, soit $\mathcal{D} =]2; 8[$.

• **Résolution :** $\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16)$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 > -2x^2 + 14x + 16$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 13x - 22 > 0.$$

Le discriminant du polynôme $3x^2 - 13x - 22$ est $\Delta = 169 + 12 \times 22 = 433$ donc il admet deux racines : $x_1 = \frac{13 - \sqrt{433}}{6} \notin \mathcal{D}$ et $x_2 = \frac{13 + \sqrt{433}}{6} \in \mathcal{D}$.
Ainsi, $3x^2 - 13x - 22 > 0$ sur $\mathcal{U} =]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, soit

$$\mathcal{S} = \left] \frac{13 + \sqrt{433}}{6}; 8 \right[$$

Corrigé de l'exercice 3.5 page 143

1 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.

Or, pour $x \geq 1$, $0 < \frac{1}{x} \leq 1$, et donc $f'(x) \leq 0$.

La fonction f est donc décroissante sur $[1; +\infty[$.

2 $f(1) = -1$, donc $f(x) < 0$ sur $[1; +\infty[$. Donc $\ln x < x$ sur cet intervalle.

De plus, on sait que pour $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$.

On en déduit alors que sur $[1; +\infty[$, $0 \leq \ln x < x$.

3 Posons $x = \sqrt{u}$, $u \geq 1$.

Alors, de ce qui précède, on déduit que

$$0 \leq \ln \sqrt{u} < \sqrt{u}.$$

Ainsi, en divisant par u , on a :

$$0 \leq \frac{\ln \sqrt{u}}{u} < \frac{\sqrt{u}}{u},$$

on encore :

$$0 \leq \frac{\frac{1}{2} \ln u}{u} < \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Que l'on mette u ou x importe peu. Ainsi,

$$\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq \frac{\ln x}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x} = 0$.

Multiplier l'expression par $\frac{1}{2}$ ne change pas la limite, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Corrigé de l'exercice 3.6 page 143

Le taux d'accroissement de f entre 0 et x est $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Ainsi, par définition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(0)$.

Or, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$.

Corrigé de l'exercice 3.7 page 143

1 Nous savons que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

Posons $X = \sqrt{x^2 - 1}$. Alors, $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$.

$$\text{De plus, } \frac{\ln \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1} = \frac{\ln X}{X^2} = \frac{\ln X}{X} \times \frac{1}{X}.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln X}{X} \times \frac{1}{X} \right)$. Or, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1} \right) = 0.$$

2 $\frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{\ln[(x - 1)^2 + 1]}{(x - 1)^2} = \frac{\ln(X + 1)}{X}$, avec $X = (x - 1)^2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} \right) = 1.$$

3 Posons $f(X) = \ln(1 - X^2)$ et $g(x) = \ln(1 + X)$, avec $X = \frac{1}{x}$.

Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$, et $f(0) = g(0) = \ln 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{f(X)}{g(X)} &= \frac{f(X) - f(0)}{g(X) - g(0)} \\ &= \frac{f(X) - f(0)}{X - 0} \times \frac{X - 0}{g(X) - g(0)} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X \rightarrow 0} \left[\frac{f(X) - f(0)}{X - 0} \times \frac{X - 0}{g(X) - g(0)} \right]$$

$$\text{Or, } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{f(X) - f(0)}{X - 0} = f'(0) \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X - 0}{g(X) - g(0)} = \frac{1}{g'(0)}.$$

$$f'(X) = \frac{-2X}{1 - X^2} \text{ et } g'(X) = \frac{1}{1 + X}.$$

Ainsi,

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right) = 0.$$

4 On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x+1}} &= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}} \times \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} \\
 &= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}(1+\sqrt{x+1})}{1-(x+1)} \\
 &= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}(1+\sqrt{x+1})}{-x} \\
 &= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{\cancel{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x+1})}{-\cancel{\sqrt{x}} \times \cancel{\sqrt{x}}} \\
 &= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \left(-\frac{(1+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \\
 &\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \\
 &\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{X} \right) = -\infty \\
 &\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sqrt{x+1}) = 2
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{(1+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}} \right) = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x+1}} \right) = -\infty.}$$

Corrigé de l'exercice 3.8 page 143

1 Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$. Ainsi, en posant $X = x^2$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 1.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left((x-1) \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \right) = -1$.

Ainsi, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1.}$

2 Nous pouvons écrire, sur \mathbb{R}^* :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{x^2}$$

• $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$, donc en posant $X = x^2+1$, nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = 0.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$.

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{x^2} \right) = 0. \quad (3.3)$$

- $\ln(x^2 + 1) = \ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] = 2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$

Ainsi, $\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$

Posons $g(x) = \ln(1 + x) - x$, pour $x \geq 0$.

Alors, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$ pour $x \geq 0$ donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$.

De plus, $g(0) = 0$ donc cela signifie que $g(x) \leq 0$ sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, pour $x \geq 0$, $\ln(1 + x) \leq x$ et donc $\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \leq \frac{1}{x^2}$, soit $\frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \leq \frac{1}{x^3}$.

$\frac{1}{x} > 0$ donc $1 + \frac{1}{x^2} > 1$, d'où $\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) > 0$ et finalement $\frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) > 0$.

Ainsi, $0 < \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \leq \frac{1}{x^3}$.

On en déduit alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] = 0$ (théorème des gendarmes).

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0. \quad (3.4)$$

• Finalement, des égalités (3.3) et (3.4), on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

3 D'après la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 0.$$

De plus, en écrivant pour $x < 0$:

$$\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 2 \frac{\ln |x|}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right),$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln |x|}{x} = 0$.

De plus, on a toujours $0 < \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \leq \frac{1}{x^2}$ et donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) < 0$ pour $x < 0$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0$ (théorème des gendarmes).

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0.$$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Corrigé de l'exercice 3.9 page 144

1 $f_1(x) = x \ln x - x$.

La fonction $x \mapsto x \ln x$ est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & ; & & u'(x) &= 1 \\ v(x) &= \ln x & ; & & v'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

donc sa dérivée est :

$$(u'v + uv')(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Ainsi,

$$f_1'(x) = \ln x + 1 - 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{f_1'(x) = \ln x}$$

$$f_1'(x) = \ln x.$$

2 $f_2(x) = \frac{\ln x}{x}$ donc f_2 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & ; & & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= x & ; & & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_2'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

3 $f_3(x) = \ln(x^2)$ donc f_3 est de la forme $\ln u$, avec

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad u'(x) = 2x.$$

Donc

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\ &= \frac{2x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_3'(x) = \frac{2}{x}}$$

4 $f_4(x) = \ln \sqrt{x+1}$ donc f_4 est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = \sqrt{x+1}$.

u est de la forme \sqrt{g} , avec $g(x) = x+1$ donc $u'(x) = \frac{g'}{2\sqrt{g}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}f_4'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\end{aligned}$$

$$\boxed{f_4'(x) = \frac{1}{2(x+1)}}$$

5 $f_5(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$ donc f_5 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 + 1.$$

u est de la forme $\ln g$, avec $g(x) = x^2 + 1$ donc :

$$u'(x) = \frac{u'}{u}(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}f_5'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2}(x) \\&= \frac{\frac{2x}{x^2+1} \times (x^2 + 1) - 2x \times \ln(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\&= \frac{2x - 2x \ln(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{f_5'(x) = \frac{2x[1 - \ln(x^2 + 1)]}{(x^2 + 1)^2}}$$

6 $f_6(x) = \ln(\ln x)$ donc f_6 est de la forme $\ln u$ avec :

$$u(x) = \ln x \quad \text{et} \quad u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}f_6'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\&= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\end{aligned}$$

$$\boxed{f_6'(x) = \frac{1}{x \ln x}}$$

Corrigé de l'exercice 3.10 page 144

- $f(-x) = f(x)$ et le domaine de définition de f est centré en 0.

La fonction f est donc paire. On peut donc l'étudier sur $[0; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

De plus, $f(0) = \frac{\ln 1}{1} = 0$.

- D'après l'exercice précédent, $f'(x) = \frac{2x[1 - \ln(x^2 + 1)]}{(x^2 + 1)^2}$.

Sur $[0; +\infty[$, $2x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x^2 + 1)$.

$$1 - \ln(x^2 + 1) > 0 \iff \ln(x^2 + 1) < 1$$

$$\iff x^2 + 1 < e^1$$

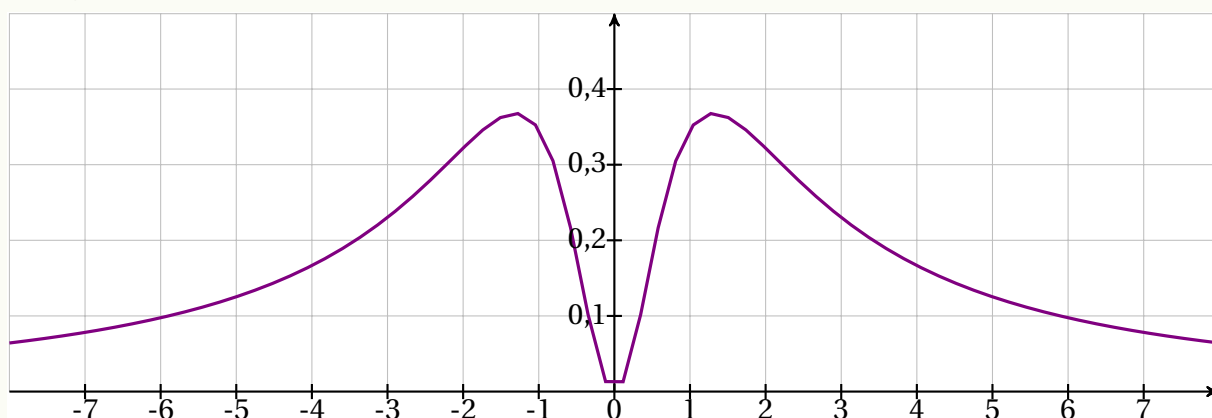
$$\iff x^2 < e - 1$$

$$\iff 0 < x < \sqrt{e - 1}$$

On obtient alors le tableau de variations page suivante.

x	$-\infty$	$-\sqrt{e-1}$	0	$\sqrt{e-1}$	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$			e^{-1}				e^{-1}		
	0			0			0		0

$$\begin{aligned} f(\sqrt{e-1}) &= \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} \\ &= \frac{1}{e} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$



Corrigé de l'exercice 3.11 page 144

- 1 Il faut que $1 + \frac{1}{x} > 0$, ou encore $\frac{x+1}{x} > 0$. En étudiant le signe de ce quotient, on trouve :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

2 $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2(1 + \frac{1}{x})}.$

On sait que sur \mathcal{D}_f , $1 + \frac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$.

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1}{x} = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0^+$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \longrightarrow -\infty$		$+\infty \longrightarrow 0$	

Corrigé de l'exercice 3.12 page 144

- 1 f est définie pour tout x tel que $x^2 - 2x + 1 > 0$, c'est-à-dire lorsque $(x-1)^2 > 0$.

Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

• Par un raisonnement analogue, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• $f(x) = (x-1) \ln[(x-1)^2]$.

→ Si $x > 1$, $f(x) = 2(x-1) \ln(x-1)$. En posant $X = x-1$, on a $f(X) = 2X \ln X$ avec $X \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1$. Or, $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$. Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 0$.

→ Si $x < 1$, $f(x) = -2(1-x) \ln(1-x)$. Par un raisonnement analogue à ce qui précède, en posant $X = 1-x$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$.

3 $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 1) + (x-1) \times \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 1}$

$$= \ln[(x-1)^2] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \ln[(x-1)^2] + 2$$

$$\begin{aligned}
4 \quad f'(x) > 0 &\iff \ln[(x-1)^2] + 2 > 0 \\
&\iff \ln[(x-1)^2] > -2 \\
&\iff (x-1)^2 > e^{-2} \\
&\iff (x-1)^2 - (e^{-1})^2 > 0 \\
&\iff (x-1-e^{-1})(x-1+e^{-1}) > 0
\end{aligned}$$

x	$-\infty$	$1-e^{-1}$	1	$1+e^{-1}$	$+\infty$	
$x-1-e^{-1}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x-1+e^{-1}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

$$\begin{aligned}
f(1-e^{-1}) &= (1-e^{-1}-1) \ln[(1-e^{-1}-1)^2] \\
&= -e^{-1} \ln(e^{-2}) \\
&= -e^{-1} \times (-2) \\
&= 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

De même, $f(1+e^{-1}) = -2e^{-1}$.

On en déduit alors :

x	$-\infty$	$1-e^{-1}$	1	$1+e^{-1}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$2e^{-1}$	0	$-2e^{-1}$	$+\infty$

Corrigé de l'exercice 3.13 page 145

1 On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (e \ln x - x) = -\infty$.

2 On peut écrire :

$$f(x) = x \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \right).$$

On sait que (croissance comparée) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \right) = -1$.

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3 $f'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e-x}{x}$. Ainsi, sur $]0; e[$, $f'(x) > 0$ et sur $]e; +\infty[$, $f'(x) < 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
f		$-\infty$	0	$-\infty$

- 4 On remarque sur le tableau de variations que pour tout réel x strictement positif et différent de e , $f(x) < 0$. Ainsi :

$$f(\pi) < 0,$$

c'est-à-dire :

$$e \ln \pi < \pi$$

soit :

$$\ln \pi^e < \pi.$$

En composant par la fonction exponentielle, qui est strictement croissante, on a alors :

$$e^{\ln \pi^e} < e^\pi,$$

Soit :

$$\pi^e < e^\pi$$

Corrigé de l'exercice 3.14 page 145

- 1 • On sait que $f(0) = 1$ donc $ae^{k \times 0} + b = 1$, soit $a + b = 1$, ou encore $b = 1 - a$.
 • De plus, $f(6) = 0$ donc $ae^{6k} + b = 0$, soit $ae^{6k} = -b = a - 1$. Ainsi, $e^{6k} = 1 - \frac{1}{a}$ et donc $6k = \ln\left(1 - \frac{1}{a}\right)$.
 Finalement, $k = \frac{1}{6} \ln\left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

On obtient alors :

$$f(t) = ae^{\frac{1}{6} \ln(1 - \frac{1}{a})t} + 1 - a$$

- 2 50 % des bactéries disparaissent au bout de deux jours, donc $f(2) = \frac{1}{2}$, soit :

$$ae^{\frac{1}{6} \ln(1 - \frac{1}{a}) \times 2} + 1 - a = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$e^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{a})} + \frac{1}{2} - a = 0$$

- 3 Si on pose $h(x) = xe^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{x})}$, alors h est de la forme uv avec :

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = e^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{x})}$$

avec $u'(x) = 1$ et :

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} e^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{x})} \\ &= \frac{1}{3x^2} \times \frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{x})} \\ &= \frac{1}{3x} \times \frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{x})} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}h'(x) &= (u'v - uv')(x) \\&= 1 \times e^{\frac{1}{3}\ln(1-\frac{1}{x})} + x \times \frac{1}{3x} \times \frac{1}{x-1} \times e^{\frac{1}{3}\ln(1-\frac{1}{x})} \\&= e^{\frac{1}{3}\ln(1-\frac{1}{x})} \left(1 + \frac{1}{3x-3}\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$g'(x) = h'(x) - 1 \quad \text{soit} \quad g'(x) = e^{\frac{1}{3}\ln(1-\frac{1}{x})} \left(1 + \frac{1}{3x-3}\right) - 1$$

- 4 a.**
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x-3}\right) = 1$;
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$.
- De plus, $\lim_{Y \rightarrow 0} e^Y = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3}\ln(1-\frac{1}{x})} = 1$.

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3}\ln(1-\frac{1}{x})} \left(1 + \frac{1}{3x-3}\right) = 1$, et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$$

- b.** Si $x > 1$, alors $9x(x-1) > 0$ et donc $\frac{-2}{9x(x-1)} < 0$.

De plus, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $g''(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

Par conséquent, g' est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ et donc, d'après la question précédente, $g'(x) > 0$ sur cet intervalle.

On en déduit que g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

- 5** $g(1,3) \approx -0,00261269 > 0$ et $g(1,4) \approx 0,022087258 < 0$ donc 0 est une valeur intermédiaire de $g(1,3)$ et $g(1,4)$.

De plus, g est continue et strictement monotone sur $[1,3; 1,4]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1,3; 1,4]$.

Corrigé de l'exercice 3.15 page 146

- 1** • Calcul de $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

On sait (d'après le cours) que $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$; par conséquent, en posant $X = x+1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln(x+1) = 0.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow -1} (-6x - 1) = 5.$$

$$\text{Ainsi, par somme, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 5.$$

- Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On commence par factoriser $f(x)$ par x :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{x+1}{x} \ln(x+1) - 6 - \frac{1}{x} \right) \\ &= x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(x+1) - 6 - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(x+1) = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-6 - \frac{1}{x} \right) = -6$.

Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(x+1) - 6 - \frac{1}{x} \right] = +\infty$.

On en déduit par produit, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2 Calculons $f'(x)$.

- On commence par dériver $g : x \mapsto (x+1) \ln(x+1)$, qui est de la forme $u \times v$, où :

$$\begin{aligned} u(x) &= x+1 & v(x) &= \ln(x+1) \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} \\ &= \ln(x+1) + 1. \end{aligned}$$

- On en déduit la dérivée de $f(x)$ par somme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) + (-6x-1)' \\ &= \ln(x+1) + 1 - 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \ln(x+1) - 5}$$

- ## 3
- Déterminons le signe de $f'(x)$. Pour cela, résolvons par exemple l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \ln(x+1) - 5 \\ &\iff \ln(x+1) > 5 \\ &\iff e^{\ln(x+1)} > e^5 \\ &\iff x+1 > e^5 \\ &\iff x > e^5 - 1. \end{aligned}$$

- On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de f .

x	-1	$e^5 - 1$	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
f	5		$+\infty$

- 4** • Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$. Sur cet intervalle,
- $\rightarrow f$ est continue et strictement décroissante;
 - \rightarrow de plus, $f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 1,65$ et $f(0) = -1$ donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(0)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$. Notons-la α .

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0,196$.

- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[395; 400]$. Sur cet intervalle,
- $\rightarrow f$ est continue et strictement croissante;
- \rightarrow de plus, $f(395) \approx -2,36$ et $f(400) = 2,58$ donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f(395)$ et $f(400)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[395; 400]$. Notons-la β .

À la calculatrice, on trouve $\beta \approx 397,397$.

Corrigé de l'exercice 3.16 page 146

Partie A

- 1** h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{(2x-1)(2x^2) - 4x(x^2 - x + 1)}{4x^4} \\
 &= \frac{1}{x} + \frac{4x^3 - 2x^2 - 4x^3 + 4x^2 - 4x}{4x^4} \\
 &= \frac{1}{x} + \frac{2x^2 - 4x}{4x^4} \\
 &= \frac{1}{x} + \frac{x-2}{2x^3} = \boxed{\frac{2x^2 + x - 2}{2x^3}}
 \end{aligned}$$

2 Le discriminant du polynôme $P(x) = 2x^2 + x - 2$ est :

$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-2) = 17.$$

Il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

$P(x)$ est du signe de « 2 » à l'extérieur des racines ; or, $x_1 < 0$.

Ainsi, $h'(x) < 0$ sur $]0; x_2[$ et $h'(x) > 0$ sur $]x_2; +\infty[$.

3 On a le tableau suivant :

x	0	x_2	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
$h(x)$			

$$h(x_2) = \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 1\right)}{2\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)^2} \approx 0,43 > 0.$$

Ainsi, $h(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

1 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme d'une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ ($x \mapsto -x$) et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ ($x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto \ln x$).

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln x + (x^2 + 1) \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= 2x \ln x + \frac{x^2 + 1}{x} - 1 \\ &= 2x \ln x + \frac{x^2 - x + 1}{x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2x \left(\ln x + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2} \right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, f'(x) > 0 &\iff 2x \left(\ln x + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2} \right) > 0 \\ &\iff 2x h(x) > 0 \\ &\iff h(x) > 0. \end{aligned}$$

- 2** Dans la partie précédente, nous avons vu que sur $]0; +\infty[$, $h(x) > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

- 3** a. $f(x) = x \times x \ln x + \ln x - x$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

- b. $f(x) = x \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x - 1 \right]$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x - 1 \right] = +\infty$.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- c. On a le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- 4** a. f est dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $]0; +\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

- b. $f(1) = 2 \ln 1 - 1 = -1 < 0$ et $f(2) = 5 \ln 2 - 2 > 0$ donc $1 < \alpha < 2$.

- c. à l'aide de la calculatrice, on a $\alpha \approx 1,6$.

Corrigé de l'exercice 3.17 page 147

- 1** a. $g'(x) = e^x(1+x)$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- b. g est continue et strictement monotone (croissante ici) sur $[0; +\infty[$.

De plus, $g(0) = -1$ et $g(1) = e - 1 > 0$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $[0; +\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0$, soit $\alpha e^\alpha = 1$. On trouve $\alpha \approx 0,567$.

- c. g est croissante et $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$ sur $[0; \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

- 2** a. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

On peut écrire :

$$f(x) = e^x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x} \right)$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Par produit, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$. Ainsi, d'après la question 1, on a :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

c. $f(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha$
 $= \frac{1}{\alpha} - \ln \frac{1}{e^\alpha}$ d'après la question 1.b.
 $= \frac{1}{\alpha} - \ln 1 + \ln e^\alpha$

$$m = \frac{1}{\alpha} + \alpha$$

De plus, avec $\alpha \approx 0,567$, on a $m \approx 2,33$. D'où le résultat demandé.

3 Une équation de la tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad , \quad a = 0.$$

Ainsi,

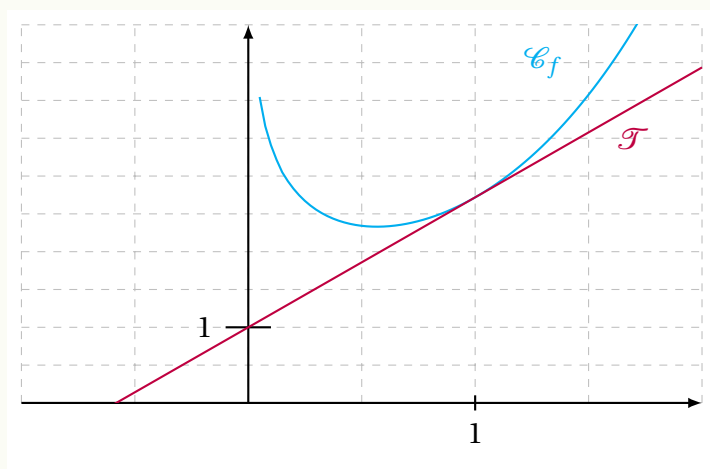
$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= (e - 1)(x - 1) + e - \ln 1 \\ &= (e - 1)x - e + 1 + e \end{aligned}$$

$$y = (e - 1)x + 1$$

Notons $A(x; 0)$ le point d'intersection de \mathcal{T} avec l'axe des abscisses. Alors,

$$(e - 1)x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1 - e}$$

4



Corrigé de l'exercice 3.18 page 147

$$1 \quad f(1) = 1 \iff k \ln(a+b) = 1$$

$$\iff \ln(a+b) = \frac{1}{k}$$

$$\iff \boxed{a+b = e^{\frac{1}{k}}}$$

$$2 \quad f'(x) = \frac{ka}{ax+b} \text{ donc } f'(1) = 1 \iff \frac{ka}{a+b} = 1$$

$$\iff ka = a+b$$

$$\iff ka - a = b$$

$$\iff (k-1)a = b$$

$$\iff \boxed{a = \frac{b}{k-1}}$$

3 En remplaçant a par $\frac{b}{k-1}$ dans l'égalité obtenue à la question 1, on obtient :

$$\frac{b}{k-1} + b = e^{\frac{1}{k}} \iff \frac{b}{k-1} + \frac{b(k-1)}{k-1} = \frac{(k-1)e^{\frac{1}{k}}}{k-1}$$

$$\iff b + b(k-1) = (k-1)e^{\frac{1}{k}}$$

$$\iff bk = (k-1)e^{\frac{1}{k}}$$

$$\iff \boxed{b = \frac{k-1}{k} e^{\frac{1}{k}}}$$

Comme $a = \frac{b}{k-1} = \frac{1}{k-1} \times b$, on en déduit que $a = \frac{1}{k-1} \times \frac{k-1}{k} e^{\frac{1}{k}}$, soit après simplification par $k-1$:

$$\boxed{a = \frac{1}{k} e^{\frac{1}{k}}}$$

$$4 \quad \text{a. } f(0) = k \ln b \quad \text{avec } b = \frac{k-1}{k} e^{\frac{1}{k}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{\frac{1}{k}}$$

$$= k \ln \left[\left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{\frac{1}{k}} \right]$$

$$= k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + k \ln e^{\frac{1}{k}}$$

$$= k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + k \times \frac{1}{k}$$

$$\boxed{f(0) = k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1}$$

b. On souhaite voir si l'équation $k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1 = 0,5$ admet une solution.

$$k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1 = 0,5 \iff k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + 0,5 = 0.$$

Posons alors :

$$g(k) = k \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) + 0,5.$$

Alors,

$$\begin{aligned} g'(k) &= \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) + k \times \frac{\frac{1}{k^2}}{1 - \frac{1}{k}} \\ &= \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

et donc :

$$g''(x) = \frac{\frac{1}{k^2}}{1 - \frac{1}{k}} - \frac{1}{(k-1)^2} = -\frac{1}{k(k-1)^2}.$$

Ainsi, $g''(k)$ est du signe opposé à k . Notons au passage que g n'est pas définie sur $]0; 1[$.

Par conséquent, si $k < 0$, $g''(k) > 0$ donc g' croissante. Or, si k est très proche de $-\infty$, $\frac{1}{k}$ est proche de 0 et donc $\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right)$ est proche de $\ln 1 = 0$.

Ainsi, $g'(k) > 0$ donc g est strictement croissante.

De plus, $g(-1) = -\ln 2 + 0,5 < 0$ et $g(-0,2) = -0,2 \ln(6) + 0,5 \approx 0,14 > 0$. g étant continue et strictement croissante sur $[-1; -0,2]$, d'après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique k sur $[-1; -0,2]$ tel que $g(k) = 0$.

Remarque 24

Inutile de regarder sur $]1; +\infty[$ car une valeur de k nous suffit. Mais si l'on regarde sur cet intervalle, on voit qu'il n'y a pas de valeur possible car $1 - \frac{1}{k} < 1$ donc $\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) < 0$ et donc $g(k) < 0,5$.

La calculatrice nous donne : $k \approx -0,4$.

Corrigé de l'exercice 3.19 page 148

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{1} \quad \mathbf{a.} \quad h'(x) = 2x(1 - 2\ln x) + x^2 \times \left(-2 \times \frac{1}{x} \right) & h'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x \ln x > 0 \\ & \Leftrightarrow \ln x < 0 \text{ car } x > 0 \\ & \Leftrightarrow 0 < x < e \\ & \\ \boxed{h'(x) = -4x \ln x} & \end{array}$$

De plus,

- $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x^2 \ln x + 1) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$.
- $h(1) = 1^2(1 - 2\ln 1) + 1 = 1 + 1 = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2\ln x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

D'où le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	0
h	1	2	$-\infty$

- b. h est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

De plus, $h(1) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha > 1$ telle que $h(\alpha) = 0$. À la calculatrice, on trouve :

$$\alpha \approx 1,895$$

- c. De ce qui précède, on déduit le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$h(x)$		+	0
			-

2 a.
$$g'(x) = -2x \ln x + (1 - x^2) \times \frac{1}{x} + 2x$$

$$= \frac{-2x^2 \ln x + 1 - x^2 + 2x^2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 \ln x + x^2 + 1}{x}$$

$$= \frac{(1 - 2 \ln x)x^2 + 1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x}$$

Ainsi, $g'(x)$ est du signe de $h(x)$ (car $x > 0$).

De plus,

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) \ln x = -\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$ donc par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

- $g(\alpha) \approx 2,9 > 0$

- $g(x) = x^2 \left[\left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \ln x + 1 + \frac{1}{x^2} \right]$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ donc par produit,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \ln x = -\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$ donc par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \ln x + 1 + \frac{1}{x^2} \right] = -\infty.$$

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

D'où le tableau page suivante.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(\alpha) > 0$	$-\infty$

- b. Sur $]0; \alpha[$, g est continue et strictement décroissante. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $g(\alpha) > 0$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution β sur $]0; \alpha[$ à l'équation $g(x) = 0$.
Il en est de même sur $]\alpha; +\infty[$. La solution est alors notée γ .

$$\beta \approx 0,301 \quad \text{et} \quad \gamma \approx 3,319$$

Nous savons donc que :

$$g(\beta) = 0 \quad \text{donc :} \quad (1 - \beta^2) \ln \beta + \beta^2 + 1 = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{\beta}\right) &= \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \ln \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + 1 \\ &= \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \times (-\ln \beta) + \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{\beta}\right) &= \frac{(1 - \beta^2) \ln \beta + \beta^2 + 1}{\beta^2} \\ &= \frac{g(\beta)}{\beta^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{\beta}$ est solution de l'équation $g(x) = 0$. Or, cette équation n'admet que deux solutions : β et γ . De plus, $\beta \neq \frac{1}{\beta}$ donc $\gamma = \frac{1}{\beta}$.

$$\begin{aligned} \text{3} \quad f'(x) &= \frac{(\ln x + 1)(x^2 + 1) - 2x^2 \ln x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\ln x - x^2 \ln x + x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x^2) \ln x + x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ d'où :

x	0	β	$\frac{1}{\beta}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	0	$f(\beta)$	$f\left(\frac{1}{\beta}\right)$	0

$$\begin{aligned}
 4 \quad f(\gamma) &= f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta^2} + 1} = \frac{-\ln \beta}{\frac{1+\beta^2}{\beta^2}} \\
 &= -\frac{\ln \beta}{\beta} \times \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \\
 &= -\frac{\beta \ln \beta}{\beta^2 + 1} \\
 &= -f(\beta).
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.20 page 148

Partie A

$$1 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - xe) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-2 \ln x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \ln x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$$

- 2 $g(x) = u(x) + v(x)$, où $u(x) = 1 - xe$ et $v(x) = -2 \ln x$. u et v étant deux fonctions strictement décroissantes sur $]0; +\infty[$, g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ (comme somme de deux fonctions strictement décroissantes sur le même intervalle).

3 Sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$,

- g est continue et strictement monotone (décroissante ici);
- $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{e}{2} + 2 \ln 2 \approx 1,03 > 0$ et $g(1) = 1 - e < 0$

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 0,67$.

- 4 On déduit de ce qui a été dit précédemment le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Partie B

$$1 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x + xe) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc, par quotient, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty}$$

$$f(x) = \frac{x\left(\frac{\ln x}{x} + e\right)}{x^2} = \frac{\frac{\ln x}{x} + e}{x}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + e\right) = e \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc, par quotient, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad f'(x) &= \frac{x^2\left(\frac{1}{x} + e\right) - 2x(\ln x + xe)}{x^4} \\
 &= \frac{x + x^2e - 2x\ln x - 2x^2e}{x^4} \\
 &= \frac{x - x^2e - 2x\ln x}{x^4} \\
 &= \frac{x(1 - xe - 2\ln x)}{x^4} \\
 &= \frac{1 - xe - 2\ln x}{x^3}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

On déduit alors de la partie A le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

3 α est la valeur pour laquelle $g(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) = 0 &\iff 1 - \alpha e - 2\ln \alpha = 0 \\
 &\iff -2\ln \alpha = -1 + \alpha e \\
 &\iff \ln \alpha = \frac{1 - \alpha e}{2} \tag{E}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \frac{\ln \alpha + \alpha e}{\alpha^2} \\
 &= \frac{\frac{1 - \alpha e}{2} + \alpha e}{\alpha^2}, \text{ d'après l'égalité (E)} \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1 - \alpha e + 2\alpha e}{2}
 \end{aligned}$$

$$f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$$

Corrigé de l'exercice 3.21 page 149

1 Démontrons par récurrence les résultats.

- À l'étape $p = 1$, il y a 20 cubes remplis (il suffit de compter). Donc $N_1 = 20$.
De plus, la longueur du côté du carré de base des cylindres représente le tiers du côté du cube donc $L_1 = \frac{1}{3} = 3^{-1}$.

- Supposons qu'à l'étape $p-1$, $N_{p-1} = 20^{p-1}$ et $L_{p-1} = 3^{-(p-1)}$.

La fractale étant auto-similaire, à chaque cube de l'étape $p-1$, on fait ce que l'on a fait au premier cube donc :

$$N_p = 20 \times N_{p-1} = 20 \times 20^{p-1} = 20^p.$$

De plus,

$$L_p = \frac{1}{3} L_{p-1} = 3^{-1} \times 3^{-(p-1)} = 3^{-p}.$$

L'hérédité est vérifiée.

La propriété est donc vraie pour tout entier $p > 0$.

2 Par définition, on a :

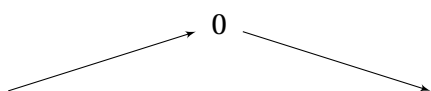
$$\begin{aligned} d &= - \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln N_p}{\ln L_p} \right) \\ &= - \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(20^p)}{\ln(3^{-p})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= - \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{p \ln(20)}{-p \ln(3)} \right) \quad \text{car } \ln(a^p) = p \ln(a) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(20)}{\ln(3)} \right) \end{aligned}$$

$$d = \frac{\ln 20}{\ln 3}$$

Corrigé de l'exercice 3.22 page 150

1 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$ d'où le tableau suivant :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f			

$$f(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln 1 = 0.$$

Ainsi, pour $x > -1$, $f(x) \leq 0$.

2 Notons $\mathcal{P}_n : u_n > 0$.

- **Initialisation** : au $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang initial.
- **Hérédité** : supposons que pour un entier k fixé, \mathcal{P}_k soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}u_k > 0 &\iff u_k + 1 > 1 \\&\iff \ln(u_k + 1) > \ln 1 \\&\iff u_{k+1} > 0.\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

3 Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n = f(u_n).$$

Or, d'après la question précédente, $u_n > 0$ donc $f(u_n) \leq$ d'après les variations de f sur $[0; +\infty[$.

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$; la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

La suite est donc décroissante et minorée par 0. Toute suite décroissante et minorée converge donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, elle converge.

4 On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n + 1) = \ell.$$

La fonction $x \mapsto \ln x$ étant continue sur $]0; +\infty]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n + 1) = \ln\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 1)\right) = \ln(\ell + 1)$$

donc :

$$\ln(\ell + 1) = \ell \quad \text{soit} \quad \ln(\ell + 1) - \ell = 0$$

ou encore : $f(\ell) = 0$.

D'après les variations de f , il n'existe qu'une valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$: c'est $x = 0$.

Par conséquent, $\ell = 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers 0.

Corrigé de l'exercice 3.23 page 150

1 Pour $n = 0$, $u_0 = 5e \approx 13,59 \geq 5$ donc l'initialisation est faite.

Supposons que pour un entier k fixé, $u_k \geq 5$.

Alors, $5u_k \geq 25$ et $\sqrt{5u_k} \geq 5$, soit $u_{k+1} \geq 5$.

L'hérédité est alors vérifiée; ainsi, pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \geq 5$.

2 Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \sqrt{5u_n} - u_n \\&= \frac{(\sqrt{5u_n} - u_n)(\sqrt{5u_n} + u_n)}{\sqrt{5u_n} + u_n} \\&= \frac{5u_n - u_n^2}{\sqrt{5u_n} + u_n} \\&= \frac{u_n(5 - u_n)}{\sqrt{5u_n} + u_n} \\&\leq 0 \text{ car } u_n \geq 5 \text{ d'après la question précédente.}\end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée (par 5) et décroissante, donc elle converge.

4 a. $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln 5$

$$\begin{aligned}&= \ln \sqrt{5u_n} - \ln 5 \\&= \frac{1}{2} \ln(5u_n) - \ln 5 \\&= \frac{1}{2} (\ln 5 + \ln(u_n)) - \ln 5 \\&= \frac{1}{2} \ln(u_n) - \frac{1}{2} \ln 5 \\&= \frac{1}{2} (\ln(u_n) - \ln 5) \\&= \frac{1}{2} v_n.\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme :

$$v_0 = \ln(u_0) - \ln 5 = \ln(5e) - \ln 5 = \ln 5 + \ln e - \ln 5 = \ln e = 1.$$

b. $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2^n}$ car $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

De plus,

$$\begin{aligned}v_n &= \ln(u_n) - \ln 5 \iff \ln(u_n) = v_n + \ln 5 \\&\iff u_n = e^{v_n + \ln 5} \\&\iff u_n = e^{v_n} \times e^{\ln 5} \\&\iff \boxed{u_n = 5e^{\frac{1}{2^n}}}\end{aligned}$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5e^0 = 5$.

5 D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{\overbrace{u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}^{(n+1) \text{ facteurs}}}{5^n} \\
 &= \frac{5e^{v_0} \times 5e^{v_1} \times 5e^{v_2} \times \cdots \times 5e^{v_n}}{5^n} \\
 &= \frac{5^{n+1} e^{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n}}{5^n} \\
 &= 5e^{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n}.
 \end{aligned}$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant géométrique,

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

Ainsi,

$$P_n = 5e^{2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 5e^2$$

Corrigé de l'exercice 3.24 page 151

1 On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \frac{\ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{x} = \frac{\ln(x^2) + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} \\
 &= 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)
 \end{aligned}$$

Or,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (cours)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln 1 = 0$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$.

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

2 a. Nous avons, pour n fixé :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{n} = +\infty$ (car $n > 0$).

Ainsi, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

- b. La dérivée de $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ (fonction de la forme $\ln u$) est la fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$ ($\frac{u'}{u}$).

Ainsi,

$$f'_n(x) = 2 + \frac{2x}{n(x^2 + 1)}.$$

- c. De la question précédente, on peut déduire que pour tout entier naturel n ,

$$f'_n(x) > 0.$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	-2	$+\infty$

$$\bullet f_n(0) = 2 \times 0 - 2 + \frac{\ln(0^2 + 1)}{n} = -2.$$

- d. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
De plus, « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f_n(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α_n (pour renforcer le fait que cette valeur dépend du nombre n), sur $[0; +\infty[$.
- e. $f_n(1) = 2 \times 1 - 2 + \frac{\ln(1^2 + 1)}{n} = \frac{\ln 2}{n} > 0$. Donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f_n(0)$ et $f_n(1)$.
Ainsi, $\alpha_n \in]0; 1[$.

3 D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f_n(\alpha_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\alpha_n - 2 + \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{n} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{n} &= 2 - 2\alpha_n \\ \Leftrightarrow \ln(\alpha_n^2 + 1) &= 2n(1 - \alpha_n). \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_n) &= 2\alpha_n - 2 + \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{n+1} \\ &= 2\alpha_n - 2 + \frac{2n(1 - \alpha_n)}{n+1} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= -2(1 - \alpha_n) + \frac{2n(1 - \alpha_n)}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(\alpha_n) &= (1 - \alpha_n) \left[-2 + \frac{2n}{n+1} \right] \\
 &= (1 - \alpha_n) \left(\frac{-2n - 2 + 2n}{n+1} \right) \\
 &= \frac{-2(1 - \alpha_n)}{n+1}
 \end{aligned}$$

Or, $0 < \alpha_n < 1$ donc $1 - \alpha_n > 0$. De plus, $n > 0$ donc $\frac{-2(1 - \alpha_n)}{n+1} < 0$.

Ainsi, $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

4 a. à l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$\alpha_1 \approx 0,77 \quad ; \quad \alpha_4 \approx 0,92 \quad ; \quad \alpha_{10} \approx 0,97.$$

b. La fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]0; 1[$.

De plus, $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ donc l'image de α_n par f_{n+1} est négative, ce qui signifie que la solution à l'équation $f_{n+1}(x) = 0$ est supérieure à α_n .

Ainsi, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. La suite (α_n) est donc croissante.

c. On sait que $0 < \alpha_n < 1$ donc la suite (α_n) est majorée. De plus, elle est croissante.

Or, toute suite croissante et majorée converge.

Donc (α_n) converge.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 2x - 2$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{n} = 0$.

Or, α_n représente la solution unique à l'équation $f_n(x) = 0$. Donc, si on pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow x = \ell.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 2x - 2$ donc $2\ell - 2 = 0$, soit $\ell = 1$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.

Corrigé de l'exercice 3.25 page 151

1 Un programme possible est le suivant :

Code Python 3-8

```

1 from math import log
2 u = 1
3 for n in range(49):
4     u = log(1 + 1/u)
5     print(u)

```

2 Les derniers termes affichés sont :

```
0.8064660055835747
0.8064659864474527
0.8064659995826947
0.8064659905665218
0.8064659967553208
0.8064659925072619
0.8064659954231757
```

On peut ainsi conjecturer que la suite converge vers une limite dont une valeur approchée est 0,806.

3 Montrons que $v_n \leq 1$ pour tout entier naturel n .

- Initialisation : $v_0 = u_0 = 1 \leq 1$.
- Hérédité : supposons que pour un entier k fixé, $v_k \leq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} v_k \leq 1 &\iff u_{2k} \leq 1 \\ &\iff \frac{1}{u_{2k}} \geq 1 \\ &\iff 1 + \frac{1}{u_{2k}} \geq 2 \\ &\iff \ln\left(1 + \frac{1}{u_{2k}}\right) \geq \ln 2 \\ &\iff u_{2k+1} \geq \ln 2 \\ &\iff \frac{1}{u_{2k+1}} \leq \frac{1}{\ln 2} \\ &\iff 1 + \frac{1}{u_{2k+1}} \leq 1 + \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_k \leq 1 &\iff \ln\left(1 + \frac{1}{u_{2k+1}}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{\ln 2}\right) \\ &\iff u_{2k+2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{\ln 2}\right) < 1 \\ &\iff v_{k+1} \leq 1. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_n \leq 1$.

4 Posons $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Alors, $f(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ainsi,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Inutile ici d'aller plus loin car $x > 0$ donc $-\frac{1}{x^2} < 0$ et $1 + \frac{1}{x} > 0$. Donc $f'(x) < 0$.
Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

5 Montrons que (v_n) est décroissante par récurrence.

- $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 \approx 0,89$ donc $v_1 < v_0$.
- Supposons que pour un entier k fixé, $v_{k+1} < v_k$.

Alors, $u_{2(k+1)} < u_{2k}$ et donc $f(u_{2(k+1)}) > f(u_{2k})$ (car f est décroissante), soit :

$$u_{2k+3} > u_{2k+1}.$$

Donc $f(u_{2k+3}) < f(u_{2k+1})$, soit $u_{2k+4} < u_{2k+2}$, ou encore : $v_{k+2} < v_{k+1}$.

L'hérédité est donc vérifiée.

Ainsi, (v_n) est décroissante.

6 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $w_n \leq v_n$.

- Initialisation : $v_0 = 1$ et $w_0 \approx 0,69 \leq v_0$.
- Hérédité : supposons que pour un entier k fixé, $w_k \leq v_k$.

$$\begin{aligned} w_k \leq v_k &\iff u_{2k+1} \leq u_{2k} \\ &\iff f(u_{2k+1}) \geq f(u_{2k}) \quad \text{car } f \text{ est décroissante} \\ &\iff u_{2k+2} \geq u_{2k+1} \\ &\iff f(u_{2k+2}) \leq f(u_{2k+1}) \\ &\iff u_{2k+3} \leq u_{2k+2} \\ &\iff u_{2(k+1)+1} \leq u_{2(k+1)} \\ &\iff w_{k+1} \leq v_{k+1}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $w_n \leq v_n$.

7 On démontre facilement (par récurrence encore) que $u_n > 0$; en effet, $u_0 > 0$ et si $u_k > 0$ alors $1 + \frac{1}{u_k} > 1$ et donc $\ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right) > 0$, soit $u_{k+1} > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$0 < w_n \leq v_n < 1. \quad (1)$$

(w_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

(v_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_{2n}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$ donc (u_n) , (v_n) et (w_n) ont la même limite. Notons-là ℓ .

La fonction \ln étant continue sur $]0; +\infty[$,

$$\ell = \ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right).$$

Corrigé de l'exercice 3.26 page 152

Partie A

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

2 $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2(1 + \frac{1}{x})}$.

On sait que sur \mathbb{R}_+^* , $1 + \frac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$.

3 On a le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0

Partie B

1 $g'(x) = f'(x) - 1$
 $= \frac{-1}{x^2 + x} - 1$
 $= \frac{-1 - x^2 - x}{x(x+1)} = -\frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}$.

Or, le discriminant de $x^2 + x + 1$ étant $\Delta = -3 < 0$, ce polynôme est toujours strictement positif.

De plus, $x(x+1) > 0$ sur \mathbb{R}_+^* ; donc $g'(x) < 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

g est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

2 g est strictement décroissante et continue sur $[\frac{1}{2}; 1]$.

De plus, $g(\frac{1}{2}) = \ln 3 - \frac{1}{2} \approx 0,6$ et $g(1) = \ln 2 - 1 \approx -0,3$. Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(\frac{1}{2})$ et $g(1)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors une unique valeur α sur $[\frac{1}{2}; 1]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

$g(x) = 0 \iff f(x) - x = 0 \iff f(x) = x$.

Ainsi, α est aussi l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[\frac{1}{2}; 1]$.

Partie C

1 $v_0 = u_0 = 1$.

$v_1 = u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) = f(f(1)) = f(\ln 2) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln 2}\right) \approx 0,893$.

$v_2 = u_4 = f(u_3) = f(f(u_2)) \approx f(f(0,893)) \approx f(0,751) \approx 0,846$.

$$\begin{aligned}
2 \quad v_{n+1} &= u_{2(n+1)} \\
&= u_{2n+2} \\
&= u_{N+2}, \quad N = 2n \\
&= f(u_{N+1}) \\
&= f(f(u_N)) \\
v_{n+1} &= f(f(u_{2n}))
\end{aligned}$$

3 On pose (\mathcal{P}_n) la propriété : « $\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$ ».

• **Initialisation.**

D'après la question 1, $\frac{1}{2} \leq v_1 \leq v_0 \leq 1$.

Par conséquent, (\mathcal{P}_n) est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité.**

On suppose que (\mathcal{P}_n) est vraie pour un n fixé. Montrons que (\mathcal{P}_{n+1}) l'est aussi.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1 \\
\iff &\frac{1}{2} \leq u_{2n+2} \leq u_{2n} \leq 1 \\
\iff &f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(u_{2n+2}) \geq f(u_{2n}) \leq f(1) \quad \text{car } f \text{ est décroissante} \\
\iff &f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leq f(f(u_{2n+2})) \leq f(f(u_{2n})) \leq f(f(1))
\end{aligned}$$

Or, $v_{n+1} = f(f(u_{2n}))$ et donc $v_{n+1+1} = f(f(u_{2(n+1)}))$, soit $v_{n+2} = f(f(u_{2n+2}))$.

$$\iff f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq f(f(1))$$

Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 3$ donc $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln 3}\right) \approx 0,65 > \frac{1}{2}$.

De plus, $f(1) = \ln 2$ donc $f(f(1)) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln 2}\right) \approx 0,89 < 1$.

$$\iff \frac{1}{2} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 1$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, (\mathcal{P}_n) est vraie pour tout entier naturel n .

4 De la question précédente, on déduit que (v_n) est décroissante ($v_{n+1} \leq v_n$) et minorée.

Or, toute suite décroissante et minorée converge.

Donc, (v_n) converge.

5 $v_n = u_{2n}$ ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Notons ℓ cette limite. Alors, $\ell > 0$ d'après la question 3 de cette partie.

Or, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \\
\iff &\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) \quad \text{car } f \text{ est continue} \\
\iff &\ell = f(\ell)
\end{aligned}$$

Or, nous avons montré que l'équation $f(x) = x$ admettait une unique solution sur \mathbb{R}_+^* : α .

Ainsi, $\ell = \alpha$.

La suite (v_n) converge donc vers α .

Partie D

- 1** La boucle « Tant que » a pour but de calculer les termes de la suite (v_n) ; en prenant 1 terme sur 2 de la suite (u_n) , on obtient ceux de (v_n) .

En ayant un terme $v_n = u_{2n}$, pour obtenir v_{n+1} , on doit calculer $f(v_n)$ (ligne 9) puis $f(f(v_n))$ (ligne 10), d'où les lignes 9 et 10 identiques.

- 2** On peut remplacer ces deux lignes par :

$$a \leftarrow \ln(1 + 1/\ln(1 + 1/a))$$

- 3** En Python, cet algorithme donne :

Code Python 3-9

```
1 from math import log
2 a, n, d = 1, 0, 1 # a = 1, n = 0 et d = 1
3 while d > 10**(-6):
4     d = a
5     a = log(1 + 1/a)
6     a = log(1 + 1/a)
7     n = n + 1
8     d = d - a
9 print(a)
```

Ce programme renvoie la valeur : 0.8064664829440021, ce qui nous permet de conclure que la valeur approchée de α à 10^{-6} près est :

$$\alpha \approx 0,806466$$

4

Fonctions trigonométriques

Plan du chapitre

I	Fonctions sinus et cosinus	193
1	Parité	193
2	Périodicité	194
3	Courbes représentatives	194
4	Dérivées	195
II	Équations et inéquations	195
1	Équations du type $\cos(x) = a$	195
2	Inéquations du type $\cos(x) \leq a$	197
	Enoncés	198
	Corrigés des exercices	203

I - Fonctions sinus et cosinus

I . 1 - Parité

Définition 15

- On dit qu'une fonction est **paire** si son domaine de définition \mathcal{D} est centré en 0 et si, pour tout x dans \mathcal{D} , $f(-x) = f(x)$.
- On dit qu'une fonction est **impaire** si son domaine de définition \mathcal{D} est centré en 0 et si, pour tout x dans \mathcal{D} , $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 22

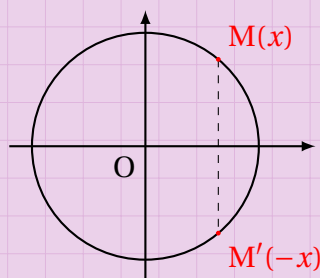
- La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire.
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire.

Démonstration 1

- Fonction $x \mapsto \cos x$.

Son domaine de définition est \mathbb{R} , donc centré en 0.

De plus, nous avons :

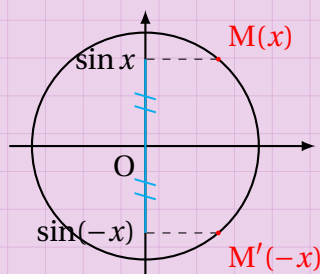


Ainsi, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction $x \mapsto \cos x$ est donc paire.

- Fonction $x \mapsto \sin x$.

Son domaine de définition est \mathbb{R} , donc centré en 0.

De plus, nous avons :



Ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (car M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses).

I . 2 - Périodicité

Définition 16

On dit qu'une fonction f est **T-périodique** si son domaine de définition \mathcal{D} est centré en 0 et si, pour tout réel de \mathcal{D} ,

$$f(x + T) = f(x).$$

Propriété 23

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques.

Démonstration 2

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π . Ainsi, les nombres x et $x + 2\pi$ auront la même image sur le cercle trigonométrique, ce qui signifie que :

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(x + 2\pi).$$

De plus, les deux fonctions sont définies sur \mathbb{R} (qui est centré en 0).

Donc $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques.

Remarque 25

On peut aussi dire que les fonctions sont périodiques de période 2π .

I . 3 - Courbes représentatives

- Le fait de dire que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques signifie que si on prend n'importe quel intervalle d'amplitude 2π , le motif de la courbe représentative trouvé sur cet intervalle pourra se répéter.

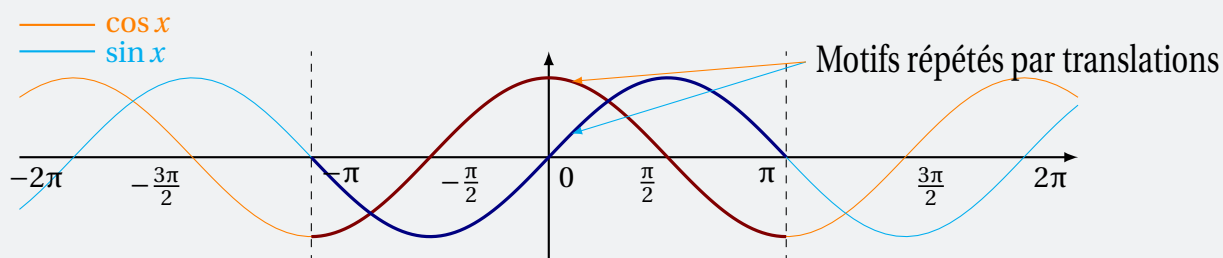
On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, et déduire la totalité des courbes par translations de vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

- Le fait de dire que $x \mapsto \cos x$ est paire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (car $f(-x) = f(x)$).

De plus, le fait de dire que $x \mapsto \sin x$ est impaire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère (car $f(-x) = -f(x)$).

On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[0; \pi]$, et déduire les courbes par symétries (axiale ou centrale).

Au final, les courbes représentatives sont les suivantes :



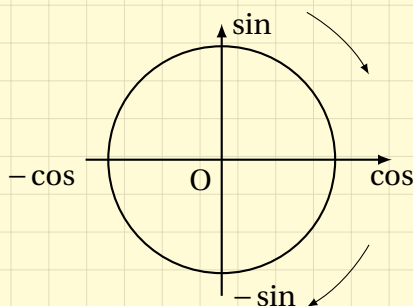
I . 4 - Dérivées

Propriété 24

- La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos x$ est la fonction $x \mapsto -\sin x$.
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin x$ est la fonction $x \mapsto \cos x$.

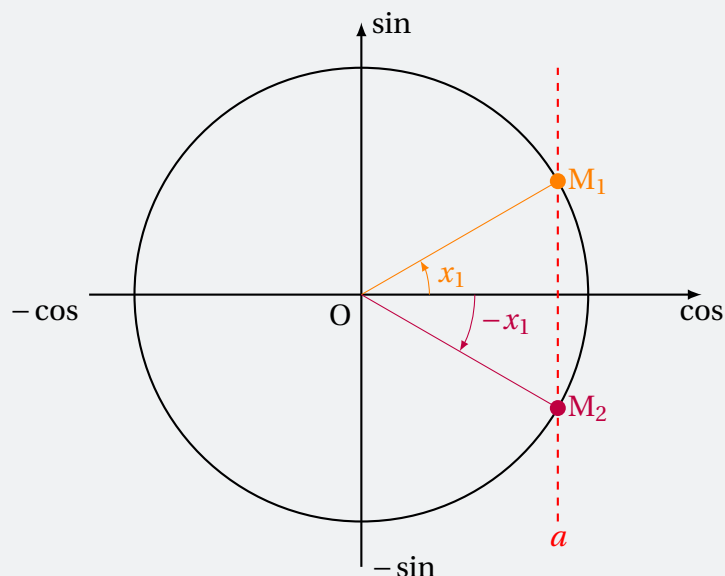
Remarque 26

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de cette formule est de dire que dériver revient à tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre :



II - Équations et inéquations

II . 1 - Équations du type $\cos(x) = a$



L'équation $\cos x = a$, où $-1 \leq a \leq 1$, admet au maximum deux solutions sur $] -\pi; \pi]$: x_1 et $-x_1$ (représentés ci-dessus sur le schéma).

Dans le cas où a est une valeur remarquable ($0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou ± 1), l'équation peut être résolue facilement.

Exemple 23

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6}.$$

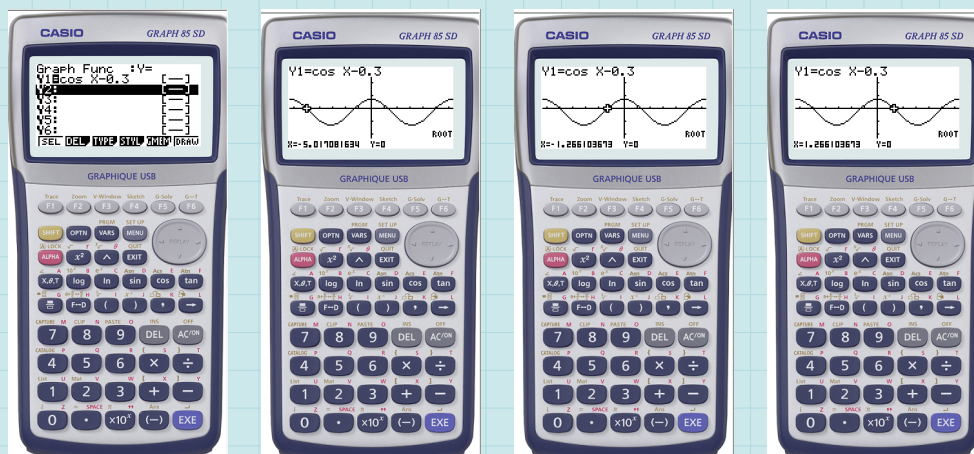
Si a n'est pas une valeur remarquable, on ne peut résoudre l'équation qu'en donnant des valeurs approchées, sauf dans certains cas où l'énoncé nous guide pour trouver des valeurs exactes.

Exemple 24

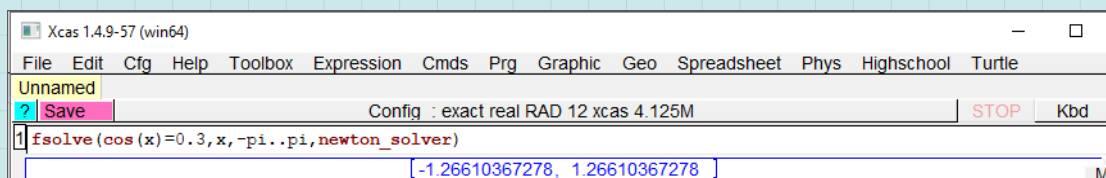
On souhaite résoudre l'équation $\cos x = 0,3$ sur $]-\pi; \pi]$.

On peut utiliser :

- *la calculatrice* : on entre la fonction $f(x) = \cos x - 0,3$, on trace la courbe puis on demande les racines (« ROOT ») [on adapte en fonction du type de la calculatrice].



- *le logiciel Xcas :*



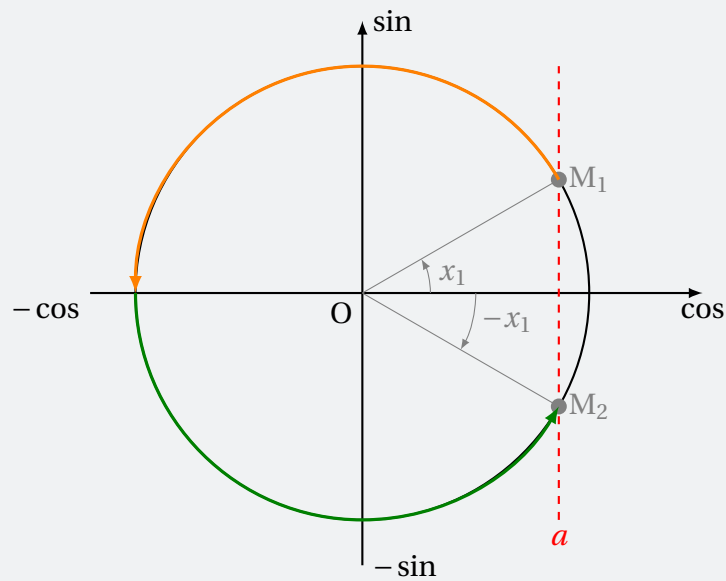
- *Python :*

Code Python 4-10

```
1 from math import cos, pi
2 from scipy.optimize import bisect
3
4 f = lambda x : cos(x) - 0.3
5 a = bisect(f, -pi, 0)
6
7 print(a)
```

On sait (par lecture graphique) qu'il y a 2 solutions opposées, donc trouver la solution négative (par exemple) suffit. On utilise alors la fonction `bisect(fonction, x0, x1)` du module `scipy.optimize`, où `x0` et `x1` sont les bornes de l'intervalle dans lequel se trouve la solution de l'équation $f(x) = 0$.

II . 2 - Inéquations du type $\cos(x) \leq a$



Si x_1 et $-x_1$ sont les solutions de l'équation $\cos x = a$ sur $]-\pi; \pi]$ alors l'inéquation $\cos x \leq a$ a pour ensemble solution :

$$]-\pi; -x_1] \cup [x_1; \pi].$$

Exemple 25

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left] -\pi; -\frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \pi \right].$$

Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 4.1 (équations trigonométriques)



Résoudre sur $[0; 2\pi[$ les équations suivantes.

1 $\cos x = \frac{1}{2}$

2 $\sin x = \frac{1}{2}$

Solution page 203

Exercice 4.2 (équations trigonométriques)



Résoudre les équations suivantes sur $] -\pi; \pi]$:

1 $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution page 203

Exercice 4.3 (équation se ramenant au second degré)



1 Montrer que $\sqrt{16 + 8\sqrt{3}} = 2 + 2\sqrt{3}$.

2 Résoudre sur $[0; 2\pi]$ l'équation :

$$4\cos^2(x) + 2(\sqrt{3} - 1)\cos(x) - \sqrt{3} = 0.$$

Solution page 203

Exercice 4.4 (équation se ramenant au second degré)



On considère l'équation d'inconnue x suivante :

$$81^{\sin^2(x)} + 81^{\cos^2(x)} = 30. \quad (E)$$

1 Résoudre l'équation :

$$v^2 - 30v + 81 = 0.$$

2 En déduire les solutions de (E).

Solution page 204

Limites

Exercice 4.5 (avec le cosinus)

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{3x}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x}$

Solution page 205

Exercice 4.6 (avec le sinus)

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)}$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(7x)}$

Solution page 205

Étude de fonctions

Exercice 4.7 (calcul trigonométrique)

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2.$$

Montrer que f est une fonction constante.

Solution page 206

Exercice 4.8 (étude d'une fonction)

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1 Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .

2 Montrer que f est périodique.

3 Déterminer $f'(x)$, puis en déduire le sens de variations de f sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$.

Solution page 206

Exercice 4.9 (parité et périodicité)

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sin^3 x \cos(3x)$.
Montrer que f est π -périodique et impaire.

Solution page 207

Exercice 4.10 (parité et périodicité)



On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos^3 x \cos(3x).$$

Montrer que f est π -périodique et paire.

Solution page 207

Exercice 4.11 (en sciences physiques)



En sciences physiques, notamment en électricité ou en acoustique, on rencontre souvent des fonctions f de la forme :

$$f(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

où φ est appelé la *phase* et ω , la *pulsation*.

Montrer que pour tout réel t :

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0.$$

Solution page 208

Exercice 4.12 (étude d'une fonction)



On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

- 1 Calculer $f'(x)$.
- 2 En déduire alors le sens de variations de f .

Solution page 208

Exercice 4.13 (étude d'une fonction)



On considère la fonction $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ définie sur \mathbb{R} .

- 1 Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
- 2 Montrer que $f''(x) \geq 0$ pour tout réel x et en déduire les variations de la fonction f' .
- 3 Calculer $f'(0)$ et en déduire les variations de f sur \mathbb{R} .
- 4 Montrer alors que pour tout réel x , $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$.
- 5 En considérant une autre fonction $g(x)$, montrer de la même façon que pour tout réel x , $\cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.
- 6 Donner un encadrement de $\cos \frac{\pi}{50}$. Sachant que $\frac{\pi^4}{150000000} < 10^{-6}$, que cela vous inspire-t-il pour la valeur approchée de $\cos \frac{\pi}{50}$ à 10^{-6} près?

Solution page 209

Exercice 4.14 (avec une suite numérique et un soupçon de Python)



On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \cos u_n.$$

- 1 Écrire un programme Python permettant de calculer tous les termes jusqu'à u_{30} .
On peut ainsi conjecturer que la suite converge.
- 2 Écrire un programme Python permettant de calculer tous les termes jusqu'à ce que la différence entre deux termes consécutifs devienne inférieure ou égale à 10^{-5} , en affichant l'indice de chaque terme.
- 3 La suite semble-t-elle monotone?

On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{2n}.$$

- 4 Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
- 5 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(\cos x)$ est croissante sur $]0; 1]$.
- 6 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < v_{n+1} < v_n \leq 1$.
- 7 Dédire alors que la suite converge. Donner alors une valeur approchée de sa limite à 10^{-6} près.

Solution page 210

Exercice 4.15 (pour aller plus loin)



On considère le programme Python suivant :

Code Python 4-13

```
1 def factorielle(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     return n * factorielle(n-1)
5
6 def sin(x,n):
7     s = 0
8     for k in range((n+1)//2):
9         s += (-1)**k * x**(2*k+1) / factorielle(2*k+1)
10    return s
```

On admet que la fonction `factorielle(n)` renvoie la valeur $n!$, c'est-à-dire le résultat de l'opération : $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$.

- 1 Implémentez ce programme et testez-le en appelant :
 - `sin(0.5236,5)`
 - `sin(0.7854,5)`
 - `sin(0.7854,100)`
- 2 Calculez avec votre calculatrice $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$, puis $\sin \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$. Comparez les résultats obtenus avec ceux de la question précédente. Qu'est-ce que cela vous inspire?

3 Testez le programme avec $\sin(2.0944, 100) \left(\frac{2\pi}{3} \approx 2,0944 \right)$.

Quelle conclusion peut-on faire?

4 Testez le programme avec $\sin(40, 100)$. Que cela vous inspire-t-il?

Solution page 211

Corrigé de l'exercice 4.1 page 198

$$\begin{aligned} 1 \quad \cos x = \frac{1}{2} &\iff \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \\ &\iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{sur } [0; 2\pi[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \sin x = \frac{1}{2} &\iff \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\ &\iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{sur } [0; 2\pi[. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.2 page 198

$$\begin{aligned} 1 \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \cos(x) = -\cos \frac{\pi}{6} \\ &\iff \cos(x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &\iff x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} \quad \text{sur }]-\pi; \pi]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\iff x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{sur }]-\pi; \pi]. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.3 page 198

$$\begin{aligned} 1 \quad (2 + 2\sqrt{3})^2 &= 4 + 8\sqrt{3} + 4 \times 3 \\ &= 16 + 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Comme $2 + 2\sqrt{3} > 0$,

$$(2 + 2\sqrt{3})^2 = 16 + 8\sqrt{3} \iff 2 + 2\sqrt{3} = \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}.$$

2 Pour résoudre sur $[0; 2\pi]$ l'équation :

$$4\cos^2(x) + 2(\sqrt{3} - 1)\cos(x) - \sqrt{3} = 0,$$

on pose :

$$X = \cos(x).$$

Ainsi, l'équation est équivalente à :

$$4X^2 + 2(\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3} = 0.$$

C'est une équation du second degré, dont le discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[2(\sqrt{3}-1)\right]^2 - 4 \times (-\sqrt{3}) \times 4 \\ &= 4(3-2\sqrt{3}+1) + 16\sqrt{3} \\ &= 12-8\sqrt{3}+4+16\sqrt{3} \\ &= 16+8\sqrt{3} \\ &= (2+2\sqrt{3})^2.\end{aligned}$$

Ainsi, il y a deux solutions distinctes à notre équation :

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{-2(\sqrt{3}-1) - (2+2\sqrt{3})}{8} = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ X_2 &= \frac{-2(\sqrt{3}-1) + (2+2\sqrt{3})}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Si on se ramène à présent à x , l'inconnue de départ, on a :

$$\begin{cases} \cos(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x_2) = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x_1 = \frac{11\pi}{6} \\ x_2 = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x_2 = \frac{5\pi}{3} \end{cases}.$$

L'ensemble solution de l'équation est alors :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{11\pi}{6} \right\}$$

Corrigé de l'exercice 4.4 page 198

1 Le discriminant de $v^2 - 30v + 81$ est :

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \times 1 \times 81 = 576 = 24^2.$$

Donc l'équation $v^2 - 30v + 81 = 0$ admet deux solutions :

$$v_1 = \frac{30-24}{2} = 3 \quad \text{et} \quad v_2 = 27.$$

2 En posant $v = 81^{\sin^2(x)}$, et en tenant compte du fait que pour tout réel x , $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$,

$$\begin{aligned}(\text{E}) &\iff v + \frac{81}{v} = 30 \\ &\iff v^2 + 81 = 30v \\ &\iff v^2 - 30v + 81 = 0 \\ &\iff v = 3 \text{ ou } v = 27 \\ &\iff (3^4)^{\sin^2(x)} = 3 \text{ ou } (3^4)^{\sin^2(x)} = 3^3 \\ &\iff 3^{4\sin^2(x)} = 3^1 \text{ ou } 3^{4\sin^2(x)} = 3^3\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2(x) = 1 \text{ ou } 4 \sin^2(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{4} \text{ ou } \sin^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'ensemble solution de l'équation $81^{\sin^2(x)} + 81^{\cos^2(x)} = 30$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Corrigé de l'exercice 4.5 page 199

Nous allons nous appuyer sur le résultat du cours suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y) - 1}{y} = 0 \text{ (en ayant posé } y = 3x).$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{\cos(3x) - 1}{3x} = 3 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y) - 1}{y} = 0 \text{ (en ayant posé } y = 3x).$$

Corrigé de l'exercice 4.6 page 199

Pour cet exercice, nous allons nous appuyer sur le résultat du cours suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1 En posant $y = 5x$, on voit que $\lim_{x \rightarrow 0} (y) = 0$, d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

2 D'après le même raisonnement que celui adopté à la question précédente, on peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3 On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(7x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{7} \times \frac{7x}{\sin(7x)} = \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin(7x)}.$$

D'après un raisonnement analogue à celui de la réponse à la question précédente, on peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin(7x)} = 1$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(7x)} = \frac{1}{7}.$$

Corrigé de l'exercice 4.7 page 199

Développons $f(x)$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \\
 &= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x \\
 &= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\
 &= 2 \times 1 \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.8 page 199

- 1** $f(x)$ est défini quand $1 + \sin x \neq 0$.

$$\text{Or, } 1 + \sin x = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- 2** On sait que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Par conséquent, $f(x + 2\pi) = f(x)$.
Ainsi, f est 2π -périodique.

- 3** f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = 1 + \sin x$.

Ainsi, f' est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u'(x) = -\sin x$ et $v'(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\
 &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\
 &= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = -\frac{\sin x + 1}{(1 + \sin x)^2} \quad \text{car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ pour tout réel } x.$$

Or, pour tout réel $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $0 \leq \sin x + 1 \leq 2$.

De plus, $(1 + \sin x)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$.

Corrigé de l'exercice 4.9 page 199

- Montrons d'abord que f est π -périodique.

$$\begin{aligned}f(x + \pi) &= [\sin(x + \pi)]^3 \cos[3(x + \pi)] \\&= [-\sin x]^3 \cos(3x + 3\pi) \\&= -\sin^3 x \cos(3x + \pi) \\&= -\sin^3 x [-\cos(3x)] \\&= \sin^3 x \cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x + \pi) = f(x)}$$

La fonction f est donc π -périodique; on peut donc restreindre l'intervalle d'étude de f à un intervalle d'amplitude π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Montrons que f est impaire. Le domaine de définition de f est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned}f(-x) &= [\sin(-x)]^3 \cos(-3x) \\&= [-\sin x]^3 \cos(3x) \\&= -\sin^3 x \cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

La fonction f est donc impaire; on peut donc réduire l'intervalle d'étude précédent à sa moitié, donc à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Corrigé de l'exercice 4.10 page 200

- Montrons d'abord que f est π -périodique.

$$\begin{aligned}f(x + \pi) &= [\cos(x + \pi)]^3 \cos(3(x + \pi)) \\&= [-\cos x]^3 \cos(3x + 3\pi) \\&= -\cos^3 x \cos(3x + \pi) \\&= -\cos^3 x (-\cos(3x)) \\&= \cos^3 x \cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x + \pi) = f(x)}$$

Donc f est π -périodique.

On peut donc réduire l'intervalle d'étude à un intervalle d'amplitude π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Montrons que f est paire. D'abord, le domaine de définition de f est centré en 0.

$$\begin{aligned}\text{De plus, } f(-x) &= [\cos(-x)]^3 \cos(-3x) \\&= [\cos x]^3 \cos(3x) \\&= \cos^3 x \cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

Donc f est paire.

Corrigé de l'exercice 4.11 page 200

$f(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ donc :

$$f'(t) = a \times \omega \cos(\omega t + \varphi).$$

En effet, on sait que la dérivée de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto \cos x$.

De plus, on sait que la dérivée de $f(at + b)$ est $a f'(at + b)$.

Sur le même principe, on a alors :

$$f''(t) = a\omega \times (-\omega \sin(\omega t + \varphi)) = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t).$$

Ainsi,

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = -\omega^2 f(t) + \omega^2 f(t) = 0.$$

Remarque 28

On dit alors que f est solution de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, équation dont l'inconnue est une fonction y .

Quand une équation de ce type admet comme inconnue une fonction, mais aussi sa dérivée et/ou sa dérivée seconde, on parle d'**équation différentielle**. On parlera de ce type d'équations dans le chapitre 5.

Corrigé de l'exercice 4.12 page 200

1 f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = \sin x + \cos x$$

$$u'(x) = \cos x - \sin x$$

$$v(x) = \sin x - \cos x$$

$$v'(x) = \cos x + \sin x$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \text{ car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

2 On en déduit que $f'(x) < 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ (car $-2 < 0$ et $(\sin x - \cos x)^2 > 0$).

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$.

Corrigé de l'exercice 4.13 page 200

1 $f'(x) = -\sin x + x$ et $f''(x) = -\cos x + 1$.

2 On sait que pour tout réel x ,


$$-1 \leq -\cos x \leq 1$$

donc, en ajoutant 1 à chaque membre de cet encadrement, on a :

$$0 \leq f''(x) \leq 2.$$

Donc $f''(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} , ce qui signifie que f' est croissante sur \mathbb{R} .

3 $f'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$. Or, f' est croissante sur \mathbb{R} donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$f(0) = \cos 0 - 1 + \frac{1}{2} \times 0^2 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

4 Des variations de f , on déduit que $f(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} , dont :

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0$$

soit :

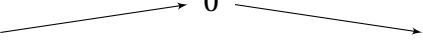
$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$$

5 Considérons la fonction $g(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$.

Alors, $g'(x) = -\sin x + x - \frac{1}{6}x^3$ et $g''(x) = -\cos x + 1 - \frac{1}{2}x^2 = -f(x)$.

Ainsi, pour tout réel x , $g''(x) \leq 0$, ce qui signifie que g' est décroissante sur \mathbb{R} .

$g'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$ d'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Par conséquent, $g(x) \leq 0$ sur \mathbb{R} , ce qui signifie que :

$$\cos x \leq 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

6 De ce qui vient d'être fait, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

En prenant $x = \frac{\pi}{50}$, cela donne :

$$1 - \frac{\pi^2}{5000} \leq \cos \frac{\pi}{50} \leq 1 - \frac{\pi^2}{5000} + \frac{\pi^4}{150000000}.$$

Puisque $\frac{\pi^4}{150000000} < 10^{-6}$, on peut alors considérer qu'une valeur approchée de $\cos \frac{\pi}{50}$ à 10^{-6} près est $1 - \frac{\pi^2}{5000}$

Corrigé de l'exercice 4.14 page 201

1 Un programme Python possible est le suivant :

Code Python 4-15

```
1 from math import cos
2 u = 1
3 for n in range(31):
4     u = cos(u)
5     print('n = {} et u = {}'.format(n,u))
```

```
n = 0 et u = 0.5403023058681398
n = 1 et u = 0.8575532158463933
n = 2 et u = 0.6542897904977792
[...]
n = 29 et u = 0.7390870426953322
n = 30 et u = 0.7390838469650002
```

2 Un programme Python possible est le suivant :

Code Python 4-16

```
1 from math import cos
2 u,n = 1,0
3 while abs(u-cos(u)) > 10**(-8):
4     u = cos(u)
5     print('n = {} et u = {}'.format(n,u))
6     n += 1
```

```
n = 0 et u = 0.5403023058681398
n = 1 et u = 0.8575532158463933
n = 2 et u = 0.6542897904977792
[...]
n = 42 et u = 0.7390851219886894
n = 43 et u = 0.7390851407774467
n = 44 et u = 0.7390851281211138
```

3 À la vue des termes calculés, la suite ne semble pas monotone.

En effet, $u_0 < u_1$, $u_1 > u_2$, $u_2 < u_3$, etc.

4 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{2(n+1)} \\&= u_{2n+2} \\&= u_{2n+1+1} \\&= \cos(u_{2n+1}) \\&= \cos(\cos(u_{2n}))\end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \cos(\cos(v_n))$$

5 $f(x) = \cos(\cos x)$ donc $f'(x) = -\sin(x) \times [-\sin(\cos x)] = \sin(x) \times \sin(\cos x)$.

Sur $]0; 1]$, $\sin x \geq 0$; de plus, $\cos x > 0$ donc $\sin(\cos x) > 0$. Ainsi, $f'(x) \geq 0$.

La fonction f est donc croissante sur $]0; 1]$.

6 • **Initialisation** : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ et $v_1 \approx 0,86$ donc $0 < v_1 < v_0 \leq 1$.

• **Hérédité** : supposons que pour un entier k fixé, $0 < v_{k+1} < v_k \leq 1$.

Alors, $f(0) < f(v_{k+1}) < f(v_k) \leq f(1)$ car f est croissante sur $]0; 1]$.

Or, $f(0) = \cos(\cos 0) \approx 0,54 > 0$ et $f(1) = \cos(\cos 1) \approx 0,86 < 1$.

Donc $0 < f(v_{k+1}) < f(v_k) \leq 1$, soit $0 < v_{k+2} < v_{k+1} \leq 1$.

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $0 < v_{n+1} < v_n \leq 1$.

• D'après ce qui vient d'être démontré, (v_n) est décroissante et minorée (par 0). Donc elle converge. Sa limite est donc le nombre ℓ tel que $\ell = f(\ell)$. Or, $v_n = u_{2n}$ donc la limite de (v_n) est celle de (u_n) . D'après les valeurs données par les algorithmes précédents, on en déduit que $\ell \approx 0,739085$.

Corrigé de l'exercice 4.15 page 201

1 En testant le programme, nous avons successivement :

```
>>> sin(0.5236,5)
0.500003192986266

>>> sin(0.7854,5)
0.707144345044458

>>> sin(0.7854,100)
0.7071080798594735
```

2 Avec la calculatrice, on trouve que $\frac{\pi}{6} \approx 0,5236$, $\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$. De plus, $\sin \frac{\pi}{6} = 0,5$ et

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071067811865476.$$

On constate alors que l'on retrouve à peu près les mêmes valeurs que celles obtenues à la question 1.

On peut alors supposer que la fonction `sin(x,n)` renvoie la valeur de $\sin(x)$, l'argument « *n* » pouvant éventuellement servir pour affiner la précision de la valeur renvoyée.

3 On a :

```
>>> sin(2.0944,100)
0.8660229549706501
```

Or, $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660254037844386$. Cela nous conforte dans l'idée que nous avons émise précédemment : la fonction renvoie le sinus de la valeur *x*.

4 On a :

```
>>> sin(40,100)
-62.42184391235605
```

Un sinus étant toujours compris entre -1 et 1, ce dernier résultat ne doit pas nous inspirer quelque chose de positif... La fonction semble avoir ses limites.

Par curiosité, j'ai souhaité savoir à partir de quelle valeur entière de *x* la différence entre $\sin(x)$ et le résultat renvoyé par la fonction était supérieur à 1. J'ai dû pour cela renommer ma fonction en « *f(x,n)* » car j'ai importé la fonction `sin` du module `math` :

Code Python 4-17

```
1 from math import sin
2
3 def factorielle(n):
4     if n == 0:
5         return 1
6     return n * factorielle(n-1)
7
8 def f(x,n):
9     s = 0
10    for k in range((n+1)//2):
11        s += (-1)**k * x**(2*k+1) / factorielle(2*k+1)
12    return s
13
14 x = 0
15 while abs( f(x,100) - sin(x) ) < 1:
16     x += 1
17
18 print("Pour x = {}, la fonction renvoie {}; or, sin({})={}. \nLa
      différence est : {}".format(x, f(x,100), x, sin(x),
      abs(sin(x)-f(x,100))))
```

Il affiche $x = 39$, avec une différence de 5,26 entre $\sin(39)$ et $f(39, 100)$. En modifiant légèrement ce dernier programme, on constate que pour $x < 30$, la différence est inférieure à 2×10^{-5} ; ceci nous pousse à constater que la fonction $f(x, 100)$ donne une très bonne approximation de $\sin(x)$ pour des valeurs inférieures à 30.

Équations différentielles, primitives et intégration

Plan du chapitre

I	Équations différentielles	215
1	$y' = ay$	215
2	$y' = ay + b$	216
3	$y' = ay + f$	216
II	Primitives	218
1	Introduction	218
2	Primitives usuelles	218
3	Primitives et fonctions composées	219
III	Intégration	219
1	Intégrale et aire	219
2	Propriétés de l'intégrale	220
3	Calcul d'une intégrale	222
a	Lien entre intégrale et primitive	222
b	Intégration par parties	223
4	Valeur moyenne d'une fonction	224
	Enoncés	225
	Corrigés des exercices	242

I - Équations différentielles

I . 1 - $y' = ay$

Définition 17

Soit a un nombre réel. Résoudre l'équation $y' = ay$ d'inconnue y signifie trouver toutes les fonctions y dont la dérivée est égale à ay .

Remarque 29

Une *différentielle* est, dans le vocabulaire scientifique, une dérivée. C'est la raison pour laquelle une équation où l'inconnue est une fonction qui est dérivée au moins une fois est qualifiée d'*équation différentielle*.

Exemple 26

1 $y' + y = 0$ est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -1$ car :

$$y' + y = 0 \iff y' = -y.$$

2 $y' = \frac{1}{2}y$ est aussi une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{2}$.

Propriété 25

L'équation :

$$y' = ay$$

admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque 30

Il existe donc une infinité de solutions, définie à une constante C près.

Exemple 27

L'équation différentielle $y' = -y$ admet pour solutions :

$$y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On peut facilement vérifier en calculant sa dérivée :

$$y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x).$$

I . 2 - $y' = ay + b$

Propriété 26

Soient a et b deux réels. L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions y telles que :

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 28

L'équation différentielle $y' = 3y + 7$ admet pour solutions :

$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{7}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier en calculant sa dérivée :

$$y'(x) = 3Ce^{3x}$$

puis en calculant :

$$y'(x) - 3y(x) = 3Ce^{3x} - 3\left(Ce^{3x} - \frac{7}{3}\right)$$

$$y'(x) - 3y(x) = 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} + 3 \times \frac{7}{3}$$

$$y'(x) - 3y(x) = 7.$$

On a bien : $y' - 3y = 7$, soit $y' = 3y + 7$.

I . 3 - $y' = ay + f$

Définition 18

Soit f une fonction. On appelle *équation homogène associée* à l'équation $y' = ay + f$ l'équation différentielle $y' = ay$.

Remarque 31

Si on note (E) l'équation $y' = ay + f$, on note (E₀) son équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation $y' = ay + f$, on utilise la méthode suivante :

- **On résout d'abord (E₀).**

On trouve les solutions de l'équation homogène associée à (E) :

$$y_0(x) = Ce^{ax}.$$

- **On trouve une solution particulière de (E).**

On la note par exemple u ; dans ce cas, on a :

$$u'(x) - au(x) = f(x).$$

- **On ajoute les solutions.**

Les solutions de (E) sont alors :

$$y(x) = y_0(x) + u(x).$$

Remarque 32

En Terminale, une solution particulière vous sera proposée la plupart du temps.

Exemple 29

On considère l'équation différentielle :

$$y' = -2y + x^2. \quad (E)$$

- **On résout l'équation homogène associée à (E).**

$$y' = -2y \quad (E_0)$$

admet pour solutions :

$$y_0(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- **Solution particulière de (E).**

On pose $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. On souhaite montrer que y_1 est une solution particulière de (E). On calcule pour cela sa dérivée :

$$y_1'(x) = x - \frac{1}{2}.$$

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned} -2y_1(x) + x^2 &= -2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + x^2 \\ &= -x^2 + x - \frac{1}{2} + x^2 \\ &= x - \frac{1}{2} \\ &= y_1'(x). \end{aligned}$$

y_1 est donc bien solution de (E).

- **On conclut en ajoutant les deux résultats.**

Les solutions de (E) sont donc :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

II - Primitives

II . 1 - Introduction

Définition 19

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sur I sont appelées les *primitives* de f .

Exemple 30

- 1 Les primitives de $f(x) = e^x$ sur \mathbb{R} sont les fonctions $F : x \mapsto e^x + k, k \in \mathbb{R}$. En effet, si on dérive $F(x)$, on obtient : $F'(x) = e^x = f(x)$.
- 2 Les primitives de $g(x) = \cos x$ sur \mathbb{R} sont les fonctions $G : \sin x + k, k \in \mathbb{R}$ car $G'(x) = g(x)$.

Remarque 33

Il y a une infinité de primitives; on dit qu'elles sont définies *à une constante près* (que nous avons noté k dans les exemples précédents). Mais dès que l'on impose une condition sur une de leurs valeurs, il n'en existe plus qu'une. Cette condition est parfois appelée *condition initiale*. Par exemple, la primitive G de la fonction g définie par $g(x) = \cos x$ telle que $G(\pi) = 0$ est $G(x) = \sin x$.

Théorème 7

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

II . 2 - Primitives usuelles

Un tableau de dérivées usuelles donne, par lecture inverse, un tableau de primitives à connaître.

La fonction usuelle	Ses primitives
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$ si $-n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$x \mapsto \ln x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

II . 3 - Primitives et fonctions composées

Il est souvent possible de mettre en évidence la dérivée d'une fonction composée. Le tableau suivant regroupe les cas les plus courants (u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I).

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I .
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$ sur I .
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto f(ax+b) \quad a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$	F primitive de u sur I .

Dans les exemples suivants, nous prenons $u(x) = x^2 + x + 1$.

Exemple 31

- 1 Une primitive de $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^5$ est : $F(x) = \frac{1}{6}(x^2+x+1)^6$.
- 2 Une primitive de $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ se trouve en mettant $f(x)$ sous la forme $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^{-2}$.
On trouve alors : $F(x) = \frac{1}{-2+1}(x^2+x+1)^{-2+1}$, soit $F(x) = -\frac{1}{x^2+x+1}$.
- 3 Une primitive de $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ est : $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$.
- 4 Une primitive de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ est : $F(x) = \ln(x^2+x+1)$.
- 5 Une primitive de $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$ est : $F(x) = e^{x^2+x+1}$.
- 6 Une primitive de $f(x) = \sin(4x-5)$ est : $F(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x-5)$.

III - Intégration

III . 1 - Intégrale et aire

Définition 20

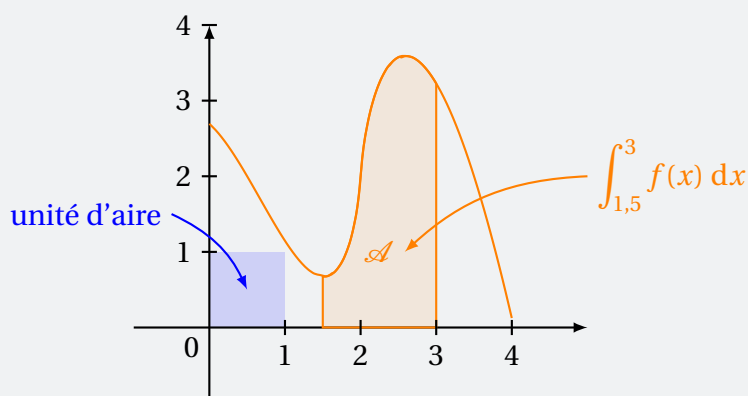
Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle *unité d'aire* l'aire du rectangle défini par les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .

Définition 21 (intégrale)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$, et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[a ; b]$; elle est exprimée en unité d'aire (en abrégé : ua). On la note :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \, dx.$$



Définition 22

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a ; b]$, et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Le nombre $\int_a^b f(x) \, dx$ est égal à l'opposé de l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} sur $[a ; b]$.

On étend la définition du symbole $\int_a^b f(x) \, dx$ au cas $a > b$ en posant alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$$

C'est l'intégrale de a à b de f (attention à ne pas évoquer l'intervalle $[a ; b]$ si $a > b$).

III . 2 - Propriétés de l'intégrale

Propriété 27 (relation de Chasles sur les intégrales)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels appartenant à I . Alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

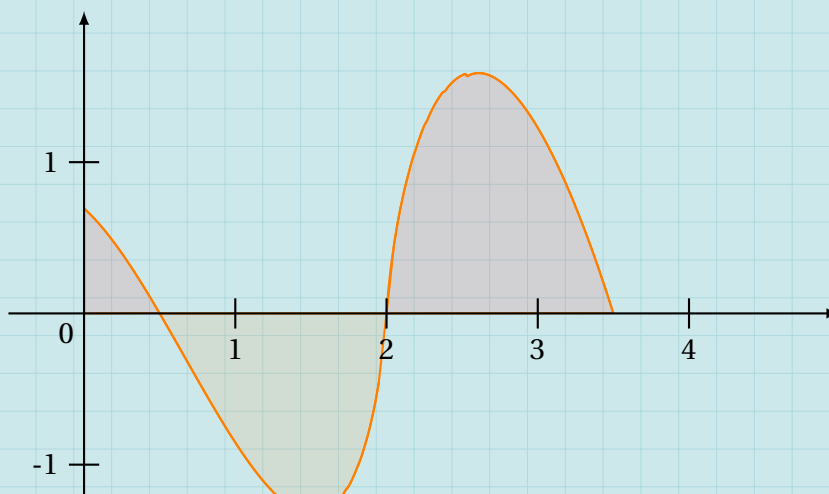
Attention 12



Il n'existe aucune condition d'ordre entre les réels a, b et c . La relation de Chasles n'impose pas d'avoir $a < b < c$.

Exemple 32

Quand la fonction f n'est pas de signe constant sur $[a ; b]$, on utilise la relation de Chasles pour déterminer son intégrale de a à b .



$$\int_0^{3,5} f(x) \, dx = \underbrace{\int_0^{0,5} f(x) \, dx}_{>0} + \underbrace{\int_{0,5}^2 f(x) \, dx}_{<0} + \underbrace{\int_2^{3,5} f(x) \, dx}_{>0}.$$

L'intégrale désigne alors une *aire algébrique*, c'est-à-dire une aire avec un signe (positif ou négatif).

Sur cet exemple, il semble que $\int_a^b f(x) \, dx > 0$ car la somme de l'aire des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses semble supérieure à celle du domaine situé en dessous.

Propriété 28 (parité et périodicité)

- Si f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

- Si f est paire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

- Si f est périodique de période T , alors pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx.$$

Exemple 33

La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire et 2π -périodique donc :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_{-a}^a \sin x \, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^{a+2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx.$$

Propriété 29 (linéarité de l'intégrale)

Quelles que soient les fonctions f et g continues sur $[a; b]$, pour tous réels λ et μ :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx.$$

Exemple 34

$$\int_0^1 (3x^2 - 5x + 1) \, dx = 3 \int_0^1 x^2 \, dx - 5 \int_0^1 x \, dx + \int_0^1 1 \, dx.$$

Propriété 30 (positivité de l'intégrale)

- Si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors : $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.
- Si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leq 0$, alors : $\int_a^b f(x) \, dx \leq 0$.

Exemple 35

Sur $[0; 1]$, $x^2 \geq 0$ donc $\int_0^1 x^2 \, dx \geq 0$.

Propriété 31 (intégration des inégalités)

Si pour tout nombre réel x de $[a; b]$, $g(x) \leq f(x)$, alors :

$$\int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx.$$

Exemple 36

On sait que pour $x > 0$, $\ln x < x$ donc $\int_1^2 \ln x \, dx < \int_1^2 x \, dx$.

III . 3 - Calcul d'une intégrale

III . 3 . a - Lien entre intégrale et primitive

Théorème 8

Si f est une fonction continue positive sur $[a; b]$ alors la fonction F_a définie sur $[a; b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

est la primitive de $f(x)$ qui s'annule en a .

Propriété 32

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, et soit F une primitive de f sur $[a ; b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Remarque 34

$F(b) - F(a)$ est aussi noté $[F(x)]_a^b$. On a alors : $\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b$.

Exemple 37

On sait qu'une primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ donc :

$$\int_0^1 x^2 \, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}.$$

III . 3 . b - Intégration par parties

Théorème 9

Soient u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a ; b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(x) \times v(x) \, dx = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x) \, dx.$$

Exemple 38

En posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$ sur $[1 ; e]$, on obtient $u(x) = x$ (à une constante près) et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Le théorème donne alors :

$$\begin{aligned} \int_1^e 1 \times \ln x \, dx &= [x \times \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= [e \ln e - 1 \ln 1] - \int_1^e 1 \, dx \\ &= e - [x]_1^e \\ &= e - (e - 1) \\ \int_1^e \ln x \, dx &= 1. \end{aligned}$$

Remarque 35

L'intégration par parties est un outil très puissant. Si on s'inspire de l'exemple précédent, on peut écrire pour $a > 0$ et $x > 0$:

$$\int_a^x \ln(t) \, dt = x \ln x - x - (a \ln a - a).$$

On peut alors conclure qu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.

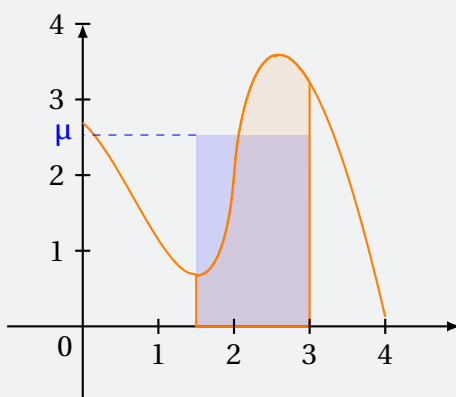
III . 4 - Valeur moyenne d'une fonction

Définition 23

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$. On appelle *valeur moyenne de f* le nombre μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Graphiquement, cette valeur correspond à la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que le domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur $[a ; b]$:



L'aire du rectangle bleu est égale à $\int_a^b f(x) \, dx$.

Propriété 33

Si f est une fonction T -périodique alors :

$$\mu = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx.$$

Remarque 36

En sciences physiques, la *valeur efficace* est définie comme étant la racine carrée de la valeur

moyenne du carré de la fonction : $e = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) \, dx}$.

Équations différentielles

Exercice 5.1



Résoudre les équations différentielles suivantes.

1 $y' + \pi y = 1$

2 $y' - 5y = x$

Solution page 242

Exercice 5.2



1 Résoudre l'équation différentielle : $y' = 3y - 9$.

2 On pose (E) : $y' = 2y - x^3$.

a. Montrer que $y_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$ est une solution particulière de (E).

b. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution page 242

Exercice 5.3



On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + 5y = 12 \cos x \quad (\text{E})$$

1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y' + 5y = 0$.

2 a. On pose $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

Trouver la valeur de a et b pour que f soit solution de (E).

b. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution page 243

Exercice 5.4



On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = 7 \sin x \quad (\text{E})$$

1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y' - 2y = 0$.

2 a. On pose $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

Trouver la valeur de a et b pour que f soit solution de (E).

b. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution page 244

Exercice 5.5



On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 7y = x^2 \quad (E)$$

- 1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) suivante :

$$y' - 2y = 0 \quad (E_0)$$

- 2 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une solution particulière de (E).
Trouver a , b et c .

- 3 Résoudre (E).

Solution page 244

Exercice 5.6



On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = xe^x \quad (E)$$

- 1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) suivante :

$$y' - 2y = 0 \quad (E_0)$$

- 2 Soient a et b deux réels, et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$u(x) = (ax + b)e^x.$$

- a. Déterminer a et b pour que u soit solution de (E).
- b. Montrer que v est solution de (E_0) si et seulement si $u + v$ est solution de (E).
- c. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

- 3 Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Solution page 245

Exercice 5.7 (changement de variable)



On considère l'équation différentielle :

$$u' = 3u - 0,005u^2 \quad (E)$$

On considère les solutions u de (E) ne s'annulant pas. On pose alors $y = \frac{1}{u}$.

- 1 Montrer l'équivalence suivante :

$$u \text{ solution de (E)} \iff y' = -3y + 0,005.$$

- 2 En déduire les solutions de (E).

Solution page 246

Primitives

Exercice 5.8

Donner une primitive de chacune des fonctions f suivantes :

1 $f(x) = 5$

2 $f(x) = 3x + 2$

3 $f(x) = -8x - 3$

4 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

5 $f(x) = -\frac{1}{3}x^5 + 8x^3 - 7x + 1$

6 $f(x) = e^x$

7 $f(x) = e^{2x}$

8 $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

9 $f(x) = \frac{-5x}{x^2+1}$

10 $f(x) = \frac{3}{x^2}$

Solution page 246

Exercice 5.9

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1 $f(x) = 5(3x+1)^3$

2 $f(x) = \frac{5}{7\sqrt{2x+1}}$

3 $f(x) = \frac{-5}{4(3x+1)^3}$

4 $f(x) = \frac{7}{3x+1}$ pour $x > -\frac{1}{3}$

Solution page 247

Intégrales & primitives

Exercice 5.10 (calculs d'intégrales)

Calculer chacune des intégrales suivantes :

1 $\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1} dx$

2 $\int_0^1 e^{2x+1} dx$

3 $\int_3^5 (e^x + x - 3) dx$

4 $\int_{-1}^1 (3x^3 - 2x) dx$

Solution page 248

Exercice 5.11 (une intégrale avec le logarithme népérien)

1 Montrer que $F(x) = x \ln -x$ est une primitive de $f(x) = \ln x$.

2 En déduire $\int_1^e \ln x dx$

Solution page 249

Exercice 5.12 (décomposition en éléments simples)



Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

- 1 Montrer que $\alpha = 1$ est une racine du polynôme $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
- 2 En déduire ses deux autres racines, que l'on note β et γ , $\beta < \gamma$.
- 3 Déterminer les réels A , B et C tels que $f(x) = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}$.

Aide : on pourra s'aider de $(x - \alpha)f(x)$, $(x - \beta)f(x)$ et $(x - \gamma)f(x)$.

- 4 En déduire la valeur de $\int_4^5 f(x) dx$.

Solution page 249

Intégrales & aires

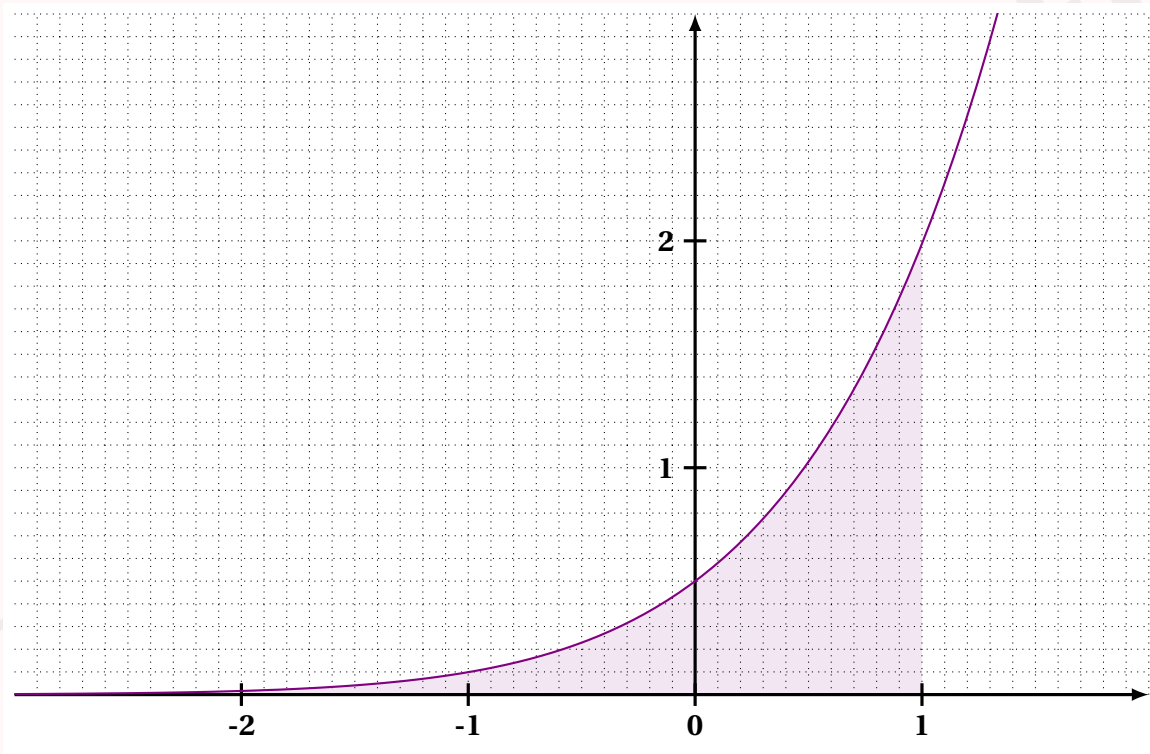
Exercice 5.13 (lecture graphique et calcul)



Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}.$$

Sa courbe représentative sur $[-3; 2]$ est donnée ci-dessous :



- 1 À l'aide du quadrillage, donner une valeur approchée de $\int_{-2}^1 f(x) dx$ au dixième.

2 Montrer que $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

3 En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_{-2}^1 f(x) dx$.

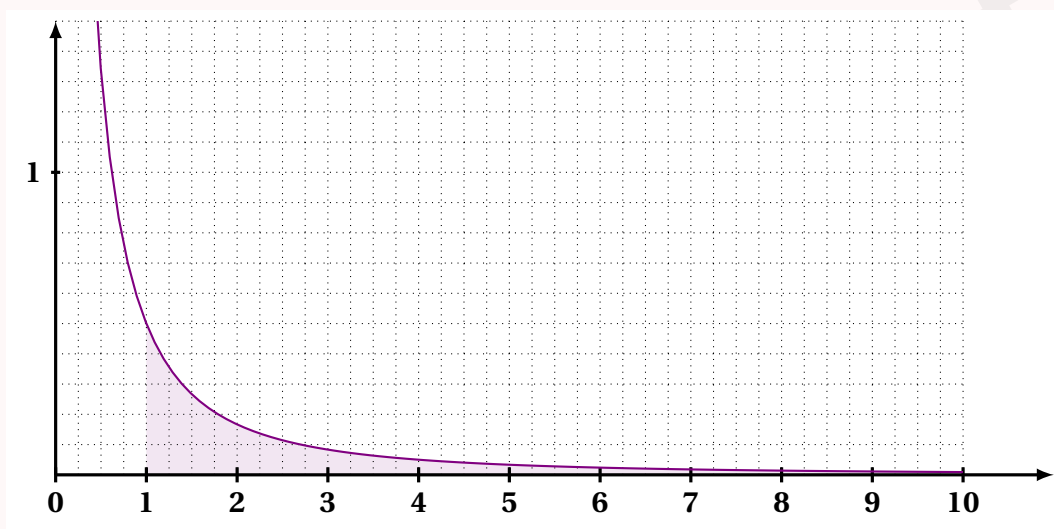
Solution page 251

Exercice 5.14 (lecture graphique et calcul)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Sa courbe représentative sur $[0; 10]$ est donnée ci-dessous :



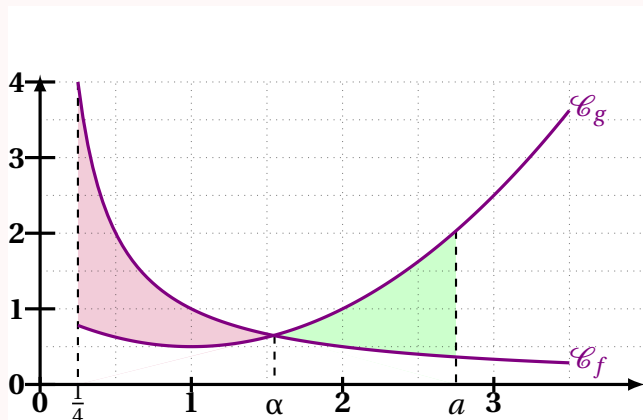
1 À l'aide du quadrillage, montrer que $\int_1^{10} f(x) dx \geq 0,5$.

2 Montrer que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

3 En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_1^{10} f(x) dx$.

Solution page 251

Exercice 5.15 (aire entre deux courbes)



On a représenté ci-contre les courbes représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 0,5x^2 - x + 1.$$

On a noté α l'abscisse de leur point d'intersection.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de a telle que les deux aires colorées soient égales.

- 1 En vous aidant de la fonction $x \mapsto 0,5x^3 - x^2 + x - 1$, prouver algébriquement l'existence de α , puis déterminer une valeur approchée de α au centième.
- 2 Déterminer alors une valeur approchée de a .

Solution page 252

Exercice 5.16 (approximation d'une aire)



L'objectif de cet exercice est de déterminer une approximation de l'aire du domaine \mathcal{D} défini par :

$$\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (\ln(1+x))^2.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec pour unité graphique : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 10 \text{ cm}$.

Partie A : étude des variations de la fonction

- 1 Déterminer la dérivée de f sur $[0; +\infty[$.
- 2 En déduire les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- 3 Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; 1]$.
- 4 Calculer $f'(0)$. En déduire l'équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
- 5 Tracer dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ \mathcal{C} en faisant apparaître la tangente \mathcal{T} .

Partie B : calcul de l'approximation de l'aire

On considère :

- Les points $A_k \left(\frac{k}{10}; 0 \right)$ pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq 10$;
- Les rectangles R_k de base $[A_k A_{k+1}]$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{10}\right)$ pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq 9$.

- 1 Sur le graphique précédent, dessiner les rectangles R_k , $0 \leq k \leq 9$.
- 2 Calculer la somme des aires des rectangles R_k pour k compris entre 0 et 9. On donnera le résultat en unité d'aire et en cm^2 à 10^{-3} près.
- 3 On suppose que la fonction F définie par :

$$F(x) = (x+1) [(\ln(x+1))^2 - 2\ln(x+1) + 2]$$

est une primitive de f sur $[0; 1]$.

En déduire la valeur exacte, puis approchée à 10^{-3} près, de l'aire de \mathcal{D} .

Calculez l'erreur entre cette valeur et celle obtenue à la question précédente.

Solution page 253

Exercice 5.17 (aire d'un demi-disque)



On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^4 \sqrt{4x - x^2} \, dx.$$

Montrer que I représente l'aire d'un demi-disque, dont on donnera les caractéristiques, et calculer I .

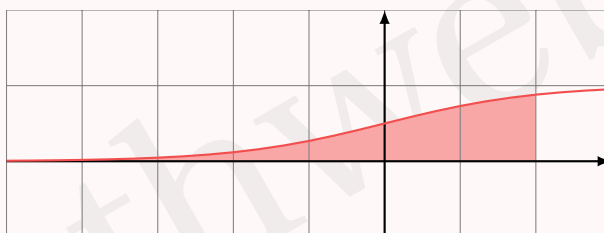
Solution page 254

Exercice 5.18 (prise d'initiative)



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

On considère le domaine $\mathcal{D} = \{M(x; y) \mid -5 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq f(x)\}$, représenté en bleu sur le schéma.



- 1 Montrer que l'aire \mathcal{A} de \mathcal{D} est égale à $\mathcal{A} = 5 + \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e^5}\right)$.
- 2 On note $\mathcal{D}_t = \{M(x; y) \mid t \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq f(x)\}$, pour $t < 0$. Soit alors $\mathcal{A}(t)$ l'aire de \mathcal{D}_t . Déterminer $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(t)$.

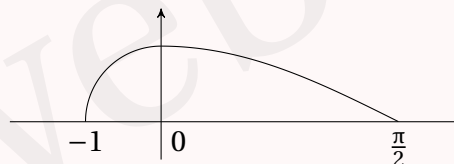
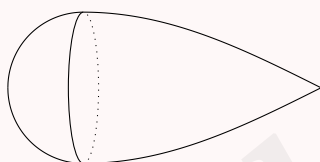
Solution page 255

Exercice 5.19 (volume d'un bouchon de pêche)

Remarque 38

Le calcul de volumes n'est pas explicitement au programme et ne constitue donc pas une compétence exigible.

Un bouchon de pêche est obtenu à partir d'une courbe que l'on a fait tourner autour de l'axe des abscisses.



L'équation de la courbe est :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x^2} & , x \in [-1; 0] \\ f(x) = \cos(x) & , x \in [0; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Calculer la valeur du volume V du bouchon.

Aide : on pourra considérer que le volume engendré par une courbe définie par une fonction f sur $[a; b]$ par rotation autour de l'axe des abscisses est égal à $\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$.

Solution page 256

Intégrations par parties

Exercice 5.20 (pour s'entraîner)

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

1 $I = \int_1^2 x\sqrt{x} dx$

3 $K = \int_1^e x \ln(x) dx$

2 $J = \int_0^1 x e^x dx$

4 $L = \int_1^e x (\ln x)^2 dx$

Solution page 257

Exercice 5.21 (avec un sinus)

À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) e^x dx$.

Solution page 258

Exercice 5.22 (linéarité de l'intégrale)



1 En intégrant deux fois par parties, calculer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \, dx$.

2 On note :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx.$$

On donne : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.

- a.** Calculer $I + J$.
- b.** Calculer $I - J$.
- c.** En déduire I et J .

Solution page 259

Exercice 5.23 (trois IPP pour une intégrale)



Remarque 39

Dans cet exercice, on considèrera connue l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) e^x \, dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) e^x \, dx.$$

1 Calculer $I + J$.

2 **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) e^x \, dx.$$

b. On pose $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) e^x \, dx$.

À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que :

$$K = 2e^{\frac{\pi}{2}} - 4I - 2.$$

c. En déduire la valeur de I .

3 En déduire la valeur de J .

Solution page 260

Valeur moyenne

Exercice 5.24 (prix moyen d'une machine-outil)

Une machine-outil achetée neuve 10 000 € admet un prix de revente modélisé par la fonction f définie par :

$$f(x) = 10e^{-0,2x}$$

où $f(x)$ est exprimé en millier d'euros et x en années.

Déterminer le prix de revente moyen de cette machine sur 8 ans depuis sa date d'achat.

Solution page 262

Exercice 5.25 (population moyenne)

En prenant comme année de référence l'an 2000, le nombre d'habitants en fin d'année $2000 + x$ d'une ville nouvelle est approchée par la fonction :

$$f(x) = 18e^{0,034x}, \quad \text{où } f(x) \text{ est exprimé en millier d'habitants.}$$

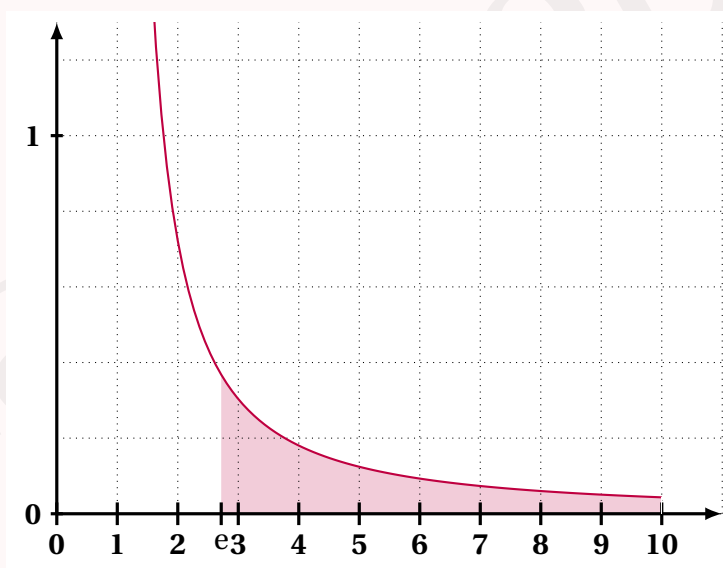
Déterminer la population moyenne de cette ville entre 2050 et 2080.

Solution page 262

Exercice 5.26

Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

- 1 Montrer que $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$.
- 2 En déduire les variations de f sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 3 En remarquant que $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, calculer la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[e; 10]$.
- 4 Dessiner ci-dessous un rectangle dont l'aire est la même que celle représentée colorée.



Solution page 262

Suites et intégrales

Exercice 5.27

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_1^e x^n \ln(x) \, dx.$$

- 1 Donner le sens de variations de (u_n) .
- 2
 - a. Montrer que la fonction F_n définie par $F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{n+1} \right)$ est une primitive de la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n \ln(x)$.
 - b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Solution page 264

Exercice 5.28

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1} \, dx.$$

- 1
 - a. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0 .
 - b. Exprimer $I_n + I_{n+1}$ pour tout entier naturel non nul n .
- 2
 - a. Montrer que (I_n) est croissante.
 - b. Montrer que pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2} e^{nx}.$$

En déduire un encadrement de I_n .

- 3 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n}$.

Solution page 264

Exercice 5.29

On considère les intégrales suivantes, définies pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \quad ; \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$$

- 1 Calculer I_0 et J_0 .
- 2 Soit n un entier naturel non nul.
 - a. On pose $F_n(x) = -e^{-nx} \sin x$. Calculer $F'_n(x)$ et en déduire que :

$$nI_n - J_n = -e^{-n\frac{\pi}{2}}.$$

- b.** On pose $G_n(x) = -e^{-nx} \cos x$.
Calculer $G'_n(x)$ et en déduire que :

$$I_n + nJ_n = 1.$$

- c.** En déduire la valeur de I_n et J_n en fonction de n .

- 3** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

Solution page 266

Exercice 5.30

- 1** Montrer que pour tout entier naturel n supérieur à 1, on a :

$$\int_1^n \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln t \, dt.$$

- 2** Montrer que la fonction L définie par $L(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$.

- 3** On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}.$$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ converge et donner sa limite.

Solution page 267

Exercice 5.31

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx.$$

- 1** Pour tout entier naturel n , quel est le signe de I_n ?
2 Montrer que (I_n) est décroissante. Que peut-on alors en déduire ?
3 En écrivant $(\ln x)^n$ sous la forme $x \times \frac{1}{x} (\ln x)^n$ et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} + (n+1)I_n = e.$$

- 4** **a.** En considérant cette dernière relation de récurrence pour $n = 0$ et $n = 1$, montrer que $I_2 = I_0 - I_1$.
b. Calculer I_0 .
c. Montrer que la fonction L définie par $L(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction \ln .
 En déduire la valeur de I_1 , puis celle de I_2 .

Solution page 268

Exercice 5.32



On considère sur $[0; +\infty[$ la fonction f_n telle que :

$$f_n(x) = x^n e^x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On pose alors, pour tout réel x positif,

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

- 1** Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $F_n(x) = x^n e^x - n F_{n-1}(x)$.

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $I_n = F_n(1)$. D'après le résultat précédent, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

- 2** Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 3** Montrer alors que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 4** Calculer I_0, I_1, I_2, I_3 et I_4 .
- 5** Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n , $I_n = a_n e + b_n$, avec pour tout entier naturel n ,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n \\ b_{n+1} = -(n+1)b_n \end{cases}.$$
- 6** On rappelle la notation : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ pour tout entier naturel n . À l'aide de cette notation, conjecturer une expression de b_n en fonction de n , puis démontrer cette conjecture.
- 7** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,
$$a_n = n! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!}.$$
- 8** Écrire un programme Python permettant de calculer les coefficients a_n et b_n du terme I_n .

Solution page 270

Exercice 5.33



On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$$

- 1** On considère la fonction $F_n(x) = \frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$.
Montrer que $F'_n(x) = (n+1) \frac{(\ln x)^n}{x^2} - \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}$.
- 2** En déduire que $u_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)u_n$.

- 3** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$u_n = n!u_0 - \frac{n!}{e^2} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!}$$

- 4** En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n!} \right) = 0$. On admettra pour cela que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2$.

Solution page 273

Exercice 5.34 (recherche)



On considère la parabole d'équation $y = x^2$ sur laquelle se trouve le point $A(-1; 1)$ et le point M d'abscisse $x > -1$.

Déterminer une valeur approchée au millièm de x pour laquelle l'aire du domaine compris entre la parabole et $[AM]$ est égale à 1.

Solution page 275

Exercice 5.35



On considère la fonction ϕ définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt.$$

- 1** Justifier l'existence de ϕ .

- 2** Montrer que $\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(t+1)^2}$, où a , b et c sont trois réels que l'on précisera.

- 3** Soit $x \geq 1$.

- a.** Exprimer en fonction de x la valeur de $\int_1^x \frac{dt}{t(t+1)^2}$.

- b.** On pose $\Phi(t) = -\frac{\ln t}{2(t+1)^2}$.

Calculer $\Phi'(t)$ et en déduire une expression de $\phi(x)$ en fonction de x .

- c.** Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} = 0$.

En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

Solution page 276

Exercice 5.36 (fonction logarithme)



Partie A

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

- 1 Déterminer $P'(x)$, puis en déduire les variations de P sur \mathbb{R} .
- 2 Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.
- 3 En déduire le signe de $P(x)$ sur \mathbb{R} .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x[(\ln x)^2 + 1]}.$$

- 1 Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = -2 \frac{(\ln x)^3 + (\ln x)^2 + \ln x - 1}{x^2[(\ln x)^2 + 1]^2}$.
- 2 À l'aide de la partie A, montrer que $f'(x)$ est négatif sur $]e^\alpha; +\infty[$.
- 3 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 4 Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$ (on ne calculera pas $f(\alpha)$).
- 5 En remarquant que $f(x) = \frac{2 \frac{\ln x}{x}}{(\ln x)^2 + 1}$, déterminer une expression en fonction du réel t supérieur ou égal à 1 de l'intégrale : $I(t) = \int_1^t f(x) dx$.
- 6 Déterminer la valeur exacte puis approchée à 0,01 près de t tel que $I(t) = 1$.

Solution page 277

Exercice 5.37



On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin(x)}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

- 1 Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

2 a. Montrer qu'une primitive de $g(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ est $G(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

b. En déduire une primitive F de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3 On pose $I(t) = \int_0^t f(x) dx$.

Montrer que $I(t) = \frac{\sin(t) - 1}{\cos(t)} + 1$.

4 En déduire la valeur de $I = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} I(t)$.

Solution page 279

Exercice 5.38 (pour aller plus loin...)



On cherche à exprimer pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx.$$

Nous avons trouvé I_1 et I_2 dans l'exercice précédent.

1 Montrer que $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$.

2 Donner les valeurs exactes de I_n pour $1 \leq n \leq 5$.

3 D'après ces derniers résultats, on peut aisément supposer que $I_n = a_n e^2 + b_n$.
Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - (n+1)a_n) \\ b_{n+1} = -\frac{n+1}{2}b_n \end{cases}$$

4 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^{n+1}}$.

On admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{2} + n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}(n-k)!}.$$

5 Écrire un programme Python permettant d'afficher la valeur exacte de I_n , pour un entier $n \geq 1$. Pour cela, on pourra faire appel au module `fractions` et à sa classe `Fraction` (voir <https://docs.python.org/fr/3.6/library/fractions.html>).

Solution page 280

Exercice 5.39



Soit f une fonction dérivable et continue telle que $f(x) \neq 0$ sur $[4;8]$.

On sait que $f(4) = \frac{1}{4}$, $f(8) = \frac{1}{2}$ et $\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1$.

Le but de cet exercice est de trouver l'expression de $f(x)$ sur $[4;8]$.

- 1** Donner une primitive de $\frac{f(x)}{[f(x)]^2}$.

En déduire la valeur de $\int_4^8 \frac{f(x)}{[f(x)]^2} dx$.

- 2** Pour tout réel k , exprimer $\int_4^8 \left(\frac{f(x)}{[f(x)]^2} + k \right)^2 dx$ en fonction de k .

- 3** En prenant $k = -\frac{1}{2}$, montrer que $\frac{f(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}$.

- 4** En déduire alors l'expression de $f(x)$.

Solution page 283

Corrigé de l'exercice 5.1 page 225

- 1 On souhaite résoudre l'équation différentielle : $y' + \pi y = 1$.
On applique le résultat du cours ; les solutions sont alors :

$$y'(x) = Ce^{-\pi x} - \frac{1}{\pi}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- 2 On souhaite résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 5y = x$.

- L'équation homogène associée (E₀) : $y' - 5y = 0$ admet pour solutions :

$$y_0(x) = Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- On cherche une solution particulière de (E) de la forme $u(x) = ax + b$ (car le second membre de (E) est une fonction affine). Ainsi,

$$\begin{aligned} u'(x) - 5u(x) = x &\iff (ax + b) - 5(ax + b) = x \\ &\iff ax + (b - 5a) = x \\ &\iff \begin{cases} a &= 1 \\ b - 5a &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u(x) = x + 5$$

est une solution particulière de (E).

- On en déduit alors que les solutions de (E) sont :

$$y(x) = x + 5 + Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 5.2 page 225

- 1 L'équation $y' = 3y - 9$ est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ donc d'après le cours, les solutions de cette équation sont les fonctions :

$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{-9}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

soit, après simplification :

$$y(x) = Ce^{3x} + 3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On vérifie en calculant :

$$\begin{aligned} y'(x) - 3y(x) &= 3Ce^{3x} - 3(Ce^{3x} + 3) \\ &= 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} - 9 = -9. \end{aligned}$$

On a bien $y' - 3y = -9$, soit $y' = 3y - 9$.

2 On pose (E) : $y' = 2y - x^3$.

a. $y_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$ donc : $y_1'(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}y_1'(x) - 2y_1(x) &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} - 2\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right) \\&= -x^3.\end{aligned}$$

Ainsi, $y_1'(x) = 2y_1(x) - x^3$. La fonction y_1 est donc une solution de (E).

b. De la solution particulière $y_1(x)$, on déduit que l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x) = y_1(x) + y_0(x)$$

où $y_0(x)$ sont les solutions de l'équation homogène associée à (E), donc de la forme :

$$y_0(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 5.3 page 225

1 D'après le cours, (E₀) a pour solutions : $y_0(x) = Ce^{-5x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

2 a. $f(x) = a \cos x + b \sin x \Rightarrow f'(x) = -a \sin x + b \cos x$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de (E)} &\iff f'(x) + 5f(x) = 12 \cos x \\&\iff -a \sin x + b \cos x + 5(a \cos x + b \sin x) = 12 \cos x \\&\iff (5a + b - 12) \cos x + (-a + 5b) \sin x = 0 \\&\iff \begin{cases} 5a + b = 12 \\ a = 5b \end{cases} \\&\iff \begin{cases} 6b = 12 \\ a = 5b \end{cases} \\&\iff \begin{cases} b = 2 \\ a = 10 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi,

$f(x) = 10 \cos x + 2 \sin x$ est une solution particulière de (E).

b. On déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions :

$y(x) = 10 \cos x + 2 \sin x + Ce^{-5x}, \quad C \in \mathbb{R}$

Corrigé de l'exercice 5.4 page 225

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions : $y_0(x) = Ce^{2x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

2 a. $f(x) = a \cos x + b \sin x \Rightarrow f'(x) = -a \sin x + b \cos x$.

$$\begin{aligned}
 f \text{ solution de (E)} &\iff f'(x) - 2f(x) = 7 \sin x \\
 &\iff -a \sin x + b \cos x - 2(a \cos x + b \sin x) = 7 \sin x \\
 &\iff (-2a + b) \cos x + (-a - 2b - 7) \sin x = 0 \\
 &\iff \begin{cases} -2a + b = 0 \\ -a - 2b = 7 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} b = 2a \\ -a - 2(2a) = 7 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} b = 2a \\ a = -\frac{7}{5} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} b = -\frac{14}{5} \\ a = -\frac{7}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = -\frac{14}{5} \cos x - \frac{7}{5} \sin x \text{ est une solution particulière de (E).}$$

b. On déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions :

$$y(x) = -\frac{14}{5} \cos x - \frac{7}{5} \sin x + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 5.5 page 226

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions les fonctions :

$$y_0(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une solution particulière de (E)

$$\begin{aligned}
 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2f(x) = x^2 \\
 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 \\
 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = x^2 \\
 &\iff \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \iff a = -\frac{1}{2}, \quad b = a = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}b = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E)

3 D'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x) = f(x) + y_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 5.6 page 226

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions les fonctions :

$$y_0(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2 a. $u'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.

$$u \text{ solution de (E)} \iff \forall x \in \mathbb{R}, u' - 2u = xe^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (ax - 2ax + a + b - 2b)e^x = xe^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (-ax + a - b)e^x = xe^x$$

$$\iff \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = -1 \text{ et } b = a = -1.$$

Finalement, on obtient :

$$u(x) = (-x - 1)e^x.$$

b. $(u + v)$ solution de (E) $\iff (u + v)' - 2(u + v) = xe^x$

$$\iff \underbrace{(u' - 2u)}_{=xe^x} + (v' - 2v) = xe^x$$

$$\iff v' - 2v = 0$$

$$\iff v \text{ solution de } (E_0).$$

c. D'après la question précédente, y est solution de (E) si et seulement si :

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

$$= (-x - 1)e^x + Ce^{2x}.$$

3 On souhaite que $y(0) = 0 \iff (-0 - 1)e^0 + Ce^{2 \times 0} = 0$

$$\iff -1 + C = 0$$

$$\iff C = 1$$

Ainsi, la solution de (E) qui s'annule en 0 est la fonction $f(x) = (-x - 1)e^x + e^{2x}$.

Corrigé de l'exercice 5.7 page 226

1 Si $y = \frac{1}{u}$ alors $y' = -\frac{u'}{u^2}$ et alors $u' = -y'u^2$. Donc :

$$\begin{aligned} u \text{ solution de (E)} &\iff u' = 3u - 0,005u^2 \\ &\iff -y'u^2 = 3 \times \frac{1}{y} - 0,005 \times \frac{1}{y^2} \\ &\iff -y' \times \frac{1}{y^2} = 3 \times \frac{1}{y} - 0,005 \times \frac{1}{y^2} \\ &\iff -y' = 3y - 0,005 \quad (\text{en multipliant par } y^2) \\ &\iff y' = -3y + 0,005. \end{aligned}$$

2 L'équation différentielle $y' = -3y + 0,005$ est de la forme $y' = ay + b$, dont les solutions sont $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $-\frac{b}{a} = \frac{0,005}{3} = \frac{1}{600}$; ainsi, ses solutions sont :

$$y(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{600}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On en déduit alors que l'équation différentielle (E) admet pour solutions les fonctions :

$$u(x) = \frac{1}{y(x)} = \frac{600}{600Ce^{-3x} + 1}.$$

Corrigé de l'exercice 5.8 page 227

1 $F(x) = 5x$.

2 $F(x) = 3 \times \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

3 $F(x) = -8 \times \frac{1}{2}x^2 - 3x = -4x^2 - 3x$.

4 $F(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$.

5 $F(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}x^6 + 8 \times \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x = -\frac{1}{18}x^6 + 2x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x$.

6 $F(x) = e^x$.

7 $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

8 $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ car si $u(x) = x^2 + x + 1$, alors $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

9 $f(x) = -\frac{5}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1} = -\frac{5}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ donc $F(x) = -\frac{5}{2} \ln(x^2 + 1)$.

10 $f(x) = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ donc $F(x) = -3 \times \frac{1}{x} = -\frac{3}{x}$.

Corrigé de l'exercice 5.9 page 227

1 $f(x) = 5(3x+1)^3.$

On pose $u = 3x + 1$. Alors, $u' = 3$. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$f(x) = 5 \times \frac{1}{3} u' \times u^3 = \frac{5}{3} u' \times u^3.$$

Une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ donc une primitive de f est :

$$F(x) = \frac{5}{3} \times \frac{(3x+1)4}{4} = \boxed{\frac{5}{12}(3x+1)^4}.$$

2 $f(x) = \frac{5}{7\sqrt{2x+1}}.$

Posons $u = 2x + 1$. Alors, $u' = 2$ et :

$$f(x) = \frac{5 \times \frac{1}{2} u'}{7\sqrt{u}} = \frac{7}{5} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Une primitive de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ est \sqrt{u} . Une primitive de f est donc :

$$F(x) = \boxed{\frac{5}{7}\sqrt{u}}.$$

3 $f(x) = \frac{-5}{4(3x+1)^3}.$

Posons $u = 3x + 1$. Alors, $u' = 3$ et :

$$f(x) = \frac{-5 \times \frac{1}{3} u'}{4u^3} = -\frac{5}{12} \times \frac{u'}{u^3}.$$

Une primitive de $\frac{u'}{u^3} = u' \times u^{-3}$ est $\frac{u^{-2}}{-2}$ donc une primitive de f est :

$$F(x) = -\frac{5}{12} \times \frac{(3x+1)^{-2}}{-2} = \frac{5}{24} \times \frac{1}{(3x+1)^2} = \boxed{\frac{5}{12(3x+1)^2}}.$$

4 $f(x) = \frac{7}{3x+1}.$

Posons $u = 3x + 1$. Alors, $u' = 3$ et :

$$f(x) = \frac{7 \times \frac{1}{3} u'}{u} = \frac{7}{3} \times \frac{u'}{u}.$$

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(u)$ (pour $u > 0$) donc une primitive de f est :

$$F(x) = \boxed{\frac{7}{3} \ln(3x+1)}$$

Corrigé de l'exercice 5.10 page 227

- 1 Cherchons avant tout une primitive de $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1}$.

Si on pose $u(x) = e^x + x + 1$, alors $u'(x) = e^x + 1$ donc $f = \frac{u'}{u}$.

Par conséquent, une primitive de f est $F = \ln(u)$, soit :

$$F(x) = \ln(e^x + x + 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1} dx &= F(1) - F(0) \\ &= \ln(e + 2) - \ln(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1} dx = \ln\left(\frac{e + 2}{2}\right)}$$

- 2 Une primitive de e^{ax+b} est :

$$f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b}.$$

Ainsi, une primitive de $f(x) = e^{2x+1}$ est $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1}$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2x+1} dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1}{2} e^3 - \frac{1}{2} e \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e(e^2 - 1)}$$

- 3 $\int_3^5 (e^x + x - 3) dx = F(5) - F(3)$, avec $F(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - 3x$

$$= \left(e^5 + \frac{25}{2} - 15\right) - \left(e^3 + \frac{9}{2} - 9\right)$$

$$\boxed{\int_3^5 (e^x + x - 3) dx = e^5 - e^3 + 2}$$

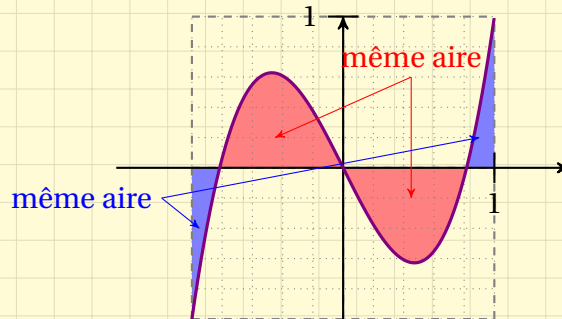
- 4 $\int_{-1}^1 (3x^3 - 2x) dx = F(1) - F(-1)$, avec $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^2$

$$= \frac{3}{4} - 1 - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 (3x^3 - 2x) dx = 0}$$

Remarque 41

Il n'est pas incohérent de trouver une intégrale égale à 0. Cela signifie que sur l'intervalle considéré, la courbe représentative de la fonction est tantôt positive, tantôt négative, et que l'aire des parties sous l'axe des abscisses est égale à celle des parties au-dessus :



Corrigé de l'exercice 5.11 page 227

1 $F(x) = x \ln x - x.$

F est une primitive de f si $F' = f$.

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x).$$

Ainsi, F est bien une primitive de f.

2
$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= F(e) - F(1) \\ &= (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) \\ &= (e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1) \\ &= 0 - (-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^e \ln x \, dx = 1}$$

Corrigé de l'exercice 5.12 page 228

1 Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Alors, $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 0$.

Ainsi, $\alpha = 1$ est une racine de P.

2 De la question précédente, on peut conclure que $P(x) = (x - 1)(x^2 + bx + c)$.
En développant, on a :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c \\ &= x^3 + (b - 1)x^2 + (c - b)x - c. \end{aligned}$$

Par identification, on a alors :

$$\begin{cases} b - 1 = -2 \\ c - b = -5 \\ -c = 6 \end{cases}$$

Soit $b = -1$ et $c = -6$. Ainsi, $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$.

Le discriminant du second facteur est $\Delta = 25$, d'où les racines suivantes :

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2} = -2 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} = 3.$$

Les trois racines de P sont donc $\alpha = 1$, $\beta = -2$ et $\gamma = 3$.

3 Déterminons les réels A , B et C tels que :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}.$$

$$\bullet (x-1)f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x+2} + \frac{C(x-1)}{x-3}.$$

Si $x = 1$, cela nous donne : $\boxed{\frac{1}{-6} = A}.$

$$\bullet (x+2)f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A(x+2)}{x-1} + \frac{C(x+2)}{x-3}.$$

Si $x = -2$, cela nous donne : $\boxed{\frac{1}{15} = B}.$

$$\bullet (x-3)f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x-3)}{x-1} + \frac{B(x-3)}{x+2} + C.$$

Si $x = 3$, cela nous donne : $\boxed{\frac{1}{10} = C}.$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{-1}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{10(x-3)}$$

$$\begin{aligned} \textbf{4} \quad \int_4^5 f(x) \, dx &= -\frac{1}{6} \int_4^5 \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{15} \int_4^5 \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{10} \int_4^5 \frac{dx}{x-3} \\ &= -\frac{1}{6} [\ln(x-1)]_4^5 + \frac{1}{15} [\ln(x+2)]_4^5 + \frac{1}{10} [\ln(x-3)]_4^5 \\ &= -\frac{1}{6} (\ln 4 - \ln 3) + \frac{1}{15} (\ln 7 - \ln 6) + \frac{1}{10} (\ln 2 - \ln 1) \\ \int_4^5 f(x) \, dx &= \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{15} \ln 7 - \frac{1}{15} \ln 2 - \frac{1}{15} \ln 3 + \frac{1}{10} \ln 2 \\ &= \frac{1}{30} \ln 3 - \frac{3}{10} \ln 2 + \frac{1}{15} \ln 7 \\ &= \boxed{\frac{1}{30} \ln \left(\frac{147}{512} \right)} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.13 page 228

- 1 On peut compter entre 138 et 140 petits carreaux dans le domaine colorié.
Or, 1 petit carreau correspond à $0,1 \times 0,1 = 0,01$ unité d'aire.

$$140 \times 0,01 = 1,4 \text{ donc on peut écrire que } \boxed{\int_{-2}^1 f(x) \, dx \approx 1,4}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad e^x - \frac{e^x}{1+e^x} &= \frac{e^x(1+e^x)}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^x + e^{2x} - e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^{2x}}{1+e^x} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \int_{-2}^1 f(x) \, dx &= F(1) - F(-2), \text{ avec } F(x) = e^x - \ln(1+e^x) \\ &= e^1 - \ln(1+e^1) - [e^{-2} - \ln(1+e^{-2})] \\ &= e - \ln(1+e) - e^{-2} + \ln(1+e^{-2}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-2}^1 f(x) \, dx = e - e^{-2} + \ln\left(\frac{1+e^{-2}}{1+e}\right)}$$

à la calculatrice, on trouve $\boxed{\int_{-2}^1 f(x) \, dx \approx 1,3966}$.

Corrigé de l'exercice 5.14 page 229

- 1 Un petit rectangle de la grille représente $0,25 \times 0,1 = 0,025$ unité d'aire.
Nous pouvons compter un peu plus de 20 de ces rectangles dans le domaine colorié, ce qui nous laisse à penser que celui-ci a une aire supérieure à $20 \times 0,025 = 0,5$ unité d'aire.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\int_1^{10} f(x) \, dx \geq 0,5}.$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} &= \frac{1+x}{x(x+1)} - \frac{x}{x(1+x)} \\ &= \frac{1+x-x}{x(x+1)} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \int_1^{10} f(x) \, dx &= F(10) - F(1), \text{ avec } F(x) = \ln x - \ln(x+1) \\ &= \ln 10 - \ln 11 - (\ln 1 - \ln 2) \\ &= \ln 10 - \ln 11 + \ln 2 \\ &\approx 0,5978. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.15 page 230

1 α est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{1}{x} = 0,5x^2 - x + 1 \\ &\iff 1 = 0,5x^3 - x^2 + x \quad (\text{en multipliant par } x \neq 0) \\ &\iff 0,5x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Posons :

$$h(x) = 0,5x^3 - x^2 + x - 1.$$

Alors,

$$h'(x) = 1,5x^2 - 2x + 1.$$

Le discriminant de $h'(x)$ est :

$$\Delta = 4 - 6 = -2 < 0$$

donc $h'(x)$ est toujours du signe de « 1,5 », soit toujours positif.

Ainsi, h est strictement croissante sur \mathbb{R} .

h est continue et croissante sur $[1; 2]$; de plus, $h(1) = -0,5 < 0$ et $h(2) = 1 > 0$ donc $0 \in]h(1); h(2)[$.

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; 2]$. C'est cette valeur que l'on note α .

On trouve à la calculatrice $\alpha \approx 1,54$.

2 Sur $[0, 25; \alpha]$, $f(x) \geq g(x)$ donc l'aire à gauche correspond à $\int_{0,25}^{\alpha} [f(x) - g(x)] dx$. Posons :

$$u(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - (0,5x^2 - x + 1) = \frac{1}{x} - 0,5x^2 + x - 1.$$

Une primitive de $u(x)$ est :

$$U(x) = \ln(x) - 0,5 \times \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x = \ln(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{0,25}^{\alpha} [f(x) - g(x)] dx &= U(\alpha) - U(0,25) \\ &\approx -0,53 - (-1,6) \\ &\approx 1,07. \end{aligned}$$

Sur $[\alpha; a]$, $g(x) \geq f(x)$ donc l'aire à droite correspond à $\int_{\alpha}^a [g(x) - f(x)] dx$.

Une primitive de $g(x) - f(x)$ est $-U(x)$ ($U(x)$ ayant été calculée précédemment) donc :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^a [g(x) - f(x)] dx &= -U(a) - (-U(\alpha)) \\ &= -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 0,53 \end{aligned}$$

On cherche à déterminer a telle que $\int_{0,25}^{\alpha} [g(x) - f(x)] \, dx = \int_{\alpha}^a [g(x) - f(x)] \, dx$, c'est-à-dire telle que :

$$\int_{0,25}^{\alpha} [g(x) - f(x)] \, dx = \int_{\alpha}^a [g(x) - f(x)] \, dx \iff -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 0,53 = 1,07$$

$$\iff -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 1,6 = 0.$$

Bien sûr, il est hors de question de résoudre cette équation algébriquement. On prend donc la calculatrice et on lui demande d'afficher les valeurs (par pas de 0,01) de la fonction $x \mapsto -\ln(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1,6$ à partir de $x = 2$ (par exemple) car on peut imaginer que $a > 2$ d'après la représentation graphique.

On trouve alors que $a \approx 2,85$.

Corrigé de l'exercice 5.16 page 230

Partie A : étude des variations de la fonction

1 f est de la forme u^2 , avec $u(x) = \ln(x+1)$.

Donc $f' = 2u'u$, avec $u'(x) = \frac{1}{x+1}$.

D'où :

$$f'(x) = \frac{2\ln(x+1)}{x+1}.$$

2 Si $x \geq 0$, alors $x+1 \geq 1$ et donc $\ln(x+1) \geq 0$.

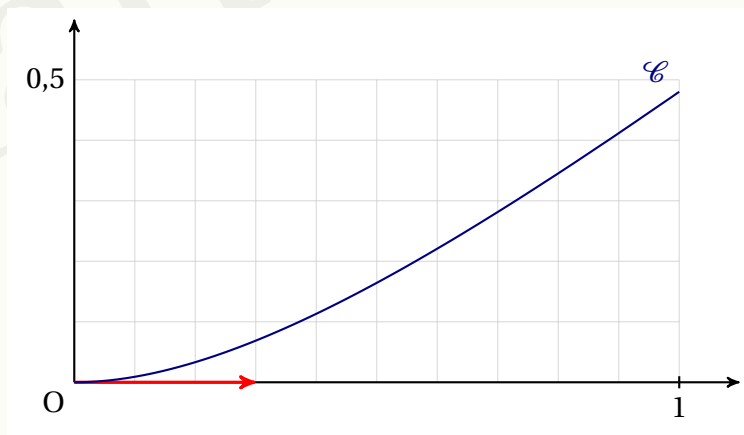
Ainsi, $f'(x)$ est strictement positive donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3 $f(0) = (\ln(0+1))^2 = 0$ et $f(1) = (\ln(1+1))^2 = \ln 2$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	1
f	0 \longrightarrow	$\ln 2$

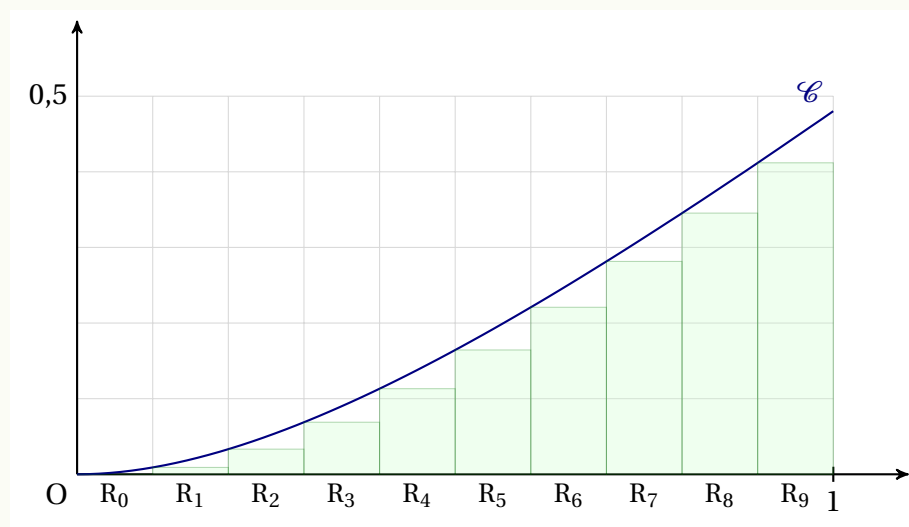
4 $f'(0) = \frac{2\ln(0+1)}{0+1} = 0$ donc la tangente à \mathcal{C} en 0 est horizontale. Or, $f(0) = 0$ donc \mathcal{T} est l'axe des abscisses.

5



Partie B : Calcul de l'approximation de l'aire

1



2 L'aire du rectangle R_k est :

$$A_k = \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right),$$

où $\frac{1}{10}$ représente la mesure de la largeur et $f\left(\frac{k}{10}\right)$ sa longueur.

La somme des aires des rectangles est :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^9 \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right) \\ &= \frac{1}{10} (f(0) + f(1) + \dots + f(9)) \end{aligned}$$

$$A \approx 0,165 \text{ u.a.}$$

$$\approx 0,165 \times 100 \text{ cm}^2$$

$$A \approx 16,487 \text{ cm}^2$$

3 $\int_0^1 f(x) \, dx = F(1) - F(0)$

$$= 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 4$$

$$\approx 0,188$$

L'aire de \mathcal{D} est donc égale à $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 4$ u.a., soit environ 0,188 u.a.

Corrigé de l'exercice 5.17 page 231

Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ définie sur $[0; 4]$.

Sa représentation graphique est un demi-cercle de centre $A(2; 0)$ situé au-dessus de l'axe des abscisses.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{4x - x^2}, y \geq 0 \\y^2 &= 4x - x^2, y \geq 0 \\0 &= x^2 - 4x + y^2, y \geq 0 \\0 &= (x - 2)^2 - 4 + y^2, y \geq 0 \\4 &= (x - 2)^2 + y^2, y \geq 0\end{aligned}$$

Cette dernière équation cartésienne est celle du demi-cercle de centre A(2;0) et de rayon $r = 2$.

Ainsi, I représente l'aire de ce demi-cercle. Donc $I = \frac{\pi r^2}{2}$ soit $I = 2\pi$.

Corrigé de l'exercice 5.18 page 231

1 On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1 + e^{-x} - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1 - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1 + \frac{u'(x)}{u(x)}, \text{ avec } u(x) = 1 + e^{-x}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-5}^2 \left(1 + \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) dx \\&= [x + \ln(1 + e^{-x})]_{-5}^2 \\&= 2 + \ln(1 + e^{-2}) - (-5) - \ln(1 + e^5) \\&= 7 + \ln\left(\frac{1 + e^{-2}}{1 + e^5}\right) \\&= 7 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{e^2}}{1 + e^5}\right) \\&= 7 + \ln\left(\frac{\frac{e^2 + 1}{e^2}}{1 + e^5}\right) \\&= 7 + \ln\left(\frac{e^2 + 1}{e^2(1 + e^5)}\right) \\&= 7 + \underbrace{\ln \frac{1}{e^2}}_{=-2} + \ln\left(\frac{e^2 + 1}{1 + e^5}\right) \\&= 5 + \ln\left(\frac{1 + e^2}{1 + e^5}\right).\end{aligned}$$

2 On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t) &= \int_t^2 f(x) \, dx \\&= [x + \ln(1 + e^{-x})]_t^2 \\&= 2 + \ln(1 + e^{-2}) - t - \ln(1 + e^{-t}) \\&= (2 - t) + \ln\left(\frac{1 + e^{-2}}{1 + e^{-t}}\right) \\&= (2 - t) + \ln\left(\frac{\frac{e^2 + 1}{e^2}}{\frac{e^t + 1}{e^t}}\right) \\&= (2 - t) + \ln\left(\frac{e^t}{e^2} \times \frac{1 + e^2}{1 + e^t}\right) \\&= (2 - t) + \ln \frac{e^t}{e^2} + \ln\left(\frac{1 + e^2}{1 + e^t}\right) \\&= (2 - t) + t - 2 + \ln\left(\frac{1 + e^2}{1 + e^t}\right) \\&= \ln\left(\frac{1 + e^2}{1 + e^t}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(t) = \ln(1 + e^2).$$

Corrigé de l'exercice 5.19 page 232

D'après l'aide donnée dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \pi \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2 \, dx \\&= \underbrace{\pi \int_{-1}^0 (f(x))^2 \, dx}_{\text{volume de la demie-sphère de rayon 1}} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2 \, dx \\&= \frac{2\pi}{3} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \\&= \frac{2\pi}{3} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}\right) \, dx \\&= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\&= \boxed{\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi^2}{4}}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.20 page 232

$$\begin{aligned} \text{1 } I &= \int_1^2 x\sqrt{x} \, dx. \text{ Posons : } u(x) = \sqrt{x} & u'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) &= x & v(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} I &= [(uv)(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4} \frac{x^2}{\sqrt{x}} \, dx \\ &= \left(\frac{1}{2}(2)^2\sqrt{2} - \frac{1}{2}(1)^2\sqrt{1} \right) - \frac{1}{4} \int_1^2 x\sqrt{x} \, dx \\ I2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}I \\ \frac{5}{4}I &= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ I &= \frac{4}{5} \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \\ \boxed{I} &= \frac{8\sqrt{2} - 2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{2 } J = \int_0^1 xe^x \, dx. \text{ Posons :}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} J &= [(uv)(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e - 1) \\ \boxed{J} &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{3 } K = \int_1^e x \ln(x) \, dx. \text{ Posons :}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x & v(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} K &= [(uv)(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x) \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) \end{aligned}$$

$$K = \frac{e^2 + 1}{4}$$

4 $L = \int_1^e x(\ln x)^2 \, dx$. Posons :

$$u(x) = (\ln x)^2$$

$$u'(x) = 2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x$$

$$v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Alors,

$$\begin{aligned} L &= [(uv)(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln^2(x) \right]_1^e - \underbrace{\int_1^e x \ln(x) \, dx}_{=K} \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

$$L = \frac{e^2 - 1}{4}$$

Corrigé de l'exercice 5.21 page 232

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x \, dx. \text{ Posons : } \begin{array}{ll} u(x) = \sin(x) & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = e^x & v(x) = e^x \end{array}$$

Alors,

$$S = \left[\sin(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)e^x \, dx}_{=I}$$

Calculons alors I en posant : $u(x) = \cos(x)$ $u'(x) = -\sin(x)$
 $v'(x) = e^x$ $v(x) = e^x$

$$\begin{aligned} I &= \left[\cos(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin(x)e^x \, dx \\ &= \left[\cos(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x \, dx \\ &= \left[\cos(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + S. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S &= \left[\sin(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\left[\cos(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + S \right) \\ S &= \left[\sin(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\cos(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - S \\ 2S &= \left[\sin(x)e^x - \cos(x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ S &= \frac{1}{2} \left[(\sin(x) - \cos(x))e^x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ S &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left(\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{\pi}{4}}}_{=0} - \underbrace{(\sin 0 - \cos 0) e^0}_{=-1} \right) \\ \boxed{S} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.22 page 233

1 Posons pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad v'(x) = \cos 2x.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur ce même intervalle. Donc, par le théorème d'intégration par parties, on a :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \, dx = \underbrace{\left[x^2 \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx$, il est nécessaire de procéder à une seconde intégration par parties. Posons :

$$s(x) = x \quad \text{et} \quad t(x) = \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Alors :

$$s'(x) = 1 \quad \text{et} \quad t'(x) = -\sin 2x.$$

Les fonctions s et t étant dérivables, à dérivée continue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a, par le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} K &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx \\ &= \left[x \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 2x \, dx \\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \left[\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2 a. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}.$$

On sait que pour tout x ,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Donc, d'après **1**, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

b. On en déduit que :

$$I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}.$$

Corrigé de l'exercice 5.23 page 233

1 Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) e^x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \, dx = \boxed{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}.$$

2 a. Posons : $u(x) = \cos^2(x)$ $u'(x) = -2 \sin(x) \cos(x) = -\sin(2x)$
 $v'(x) = e^x$ $v(x) = e^x$

Alors,

$$I = \left[\cos^2(x) e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(2x) e^x \, dx$$

$$I = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) e^x \, dx$$

Remarque 42

De cette égalité, on peut déduire :

$$I + 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x dx.$$

b. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x dx$. On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin(2x) & u'(x) &= 2\cos(2x) \\ v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

À l'aide d'une IPP, on a :

$$\begin{aligned} K &= \left[\sin(2x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)e^x dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)e^x dx. \end{aligned}$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos(2x) & u'(x) &= -2\sin(2x) \\ v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

Alors, on obtient à l'aide d'une seconde IPP :

$$\begin{aligned} K &= -2 \left(\left[\cos(2x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x dx \right) \\ &= -2 \left(-e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2(I + 1) \right). \end{aligned}$$

En effet, d'après la question **2 a.**, on peut remplacer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x dx$ par $I + 1$ (voir remarque).

On obtient finalement :

$$K = 2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 - 4I - 4 \iff K = 2e^{\frac{\pi}{2}} - 4I - 2$$

c. On en déduit que :

$$I = -1 + 2e^{\frac{\pi}{2}} - 4I - 2$$

soit :

$$5I = 2e^{\frac{\pi}{2}} - 3$$

et donc :

$$I = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}} - 3}{5}$$

3 De l'égalité $I + J = 1$, on déduit :

$$J = 1 - \frac{2e^{\frac{\pi}{2}} - 3}{5} \quad \text{soit} \quad J = \frac{3e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{5}$$

Corrigé de l'exercice 5.24 page 234

Le prix de revente moyen est donné par la valeur moyenne de f sur $[0;8]$:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{8-0} \int_0^8 f(x) \, dx \\&= \frac{1}{8} \int_0^8 10e^{-0,2x} \, dx \\&= \frac{1}{8} [F(8) - F(0)], \text{ avec } F(x) = 10 \times \left(\frac{1}{-0,2} \right) e^{-0,2x} = -50e^{-0,2x} \\&= \frac{1}{8} [-50e^{-0,2 \times 8} - (-50e^{-0,2 \times 0})] \\&= -\frac{50}{8} e^{-1,6} + \frac{50}{8} \\&\approx 4,988.\end{aligned}$$

On peut donc estimer à 4 988 € le prix moyen de revente de cette machine-outil sur 8 ans.

Corrigé de l'exercice 5.25 page 234

La population moyenne de la ville entre 2050 et 2080 est la valeur moyenne de f sur $[50;80]$:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{80-50} \int_{50}^{80} 10e^{0,034x} \, dx \\&= \frac{1}{30} [F(80) - F(50)], \text{ avec } F(x) = 10 \times \frac{1}{0,034} e^{0,034x} = \frac{5000}{17} e^{0,034x} \\&= \frac{1}{30} \times \frac{5000}{17} [e^{0,034 \times 80} - e^{0,034 \times 50}] \\&\approx 95,161.\end{aligned}$$

On peut donc estimer à 95 161 le nombre moyen d'habitants de cette ville entre 2050 et 2080.

Corrigé de l'exercice 5.26 page 234

1 f est de la forme $f = \frac{1}{g}$, avec $g(x) = x \ln x$. Donc f' est de la forme $-\frac{g'}{g^2}$.

g est de la forme uv avec :

$$\begin{array}{ll}u(x) = x & u'(x) = 1 \\v(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x}\end{array}$$

Donc g' est de la forme $u'v + uv'$

Ainsi,

$$\begin{aligned}g'(x) &= (u'v + uv')(x) \\&= \ln x + x \times \frac{1}{x} \\&= \ln x + 1.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

2 $x > 1$ donc $\ln x > \ln 1$, soit $\ln x > 0$.

De plus, $(x \ln x)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

On a alors le tableau suivant :

x	1	$+\infty$
f'		-
f		

3 $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} = f(x)$ donc f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$.

Par conséquent, une primitive de $f(x)$ est $F(x) = \ln[u(x)]$, soit :

$$F(x) = \ln[\ln(x)].$$

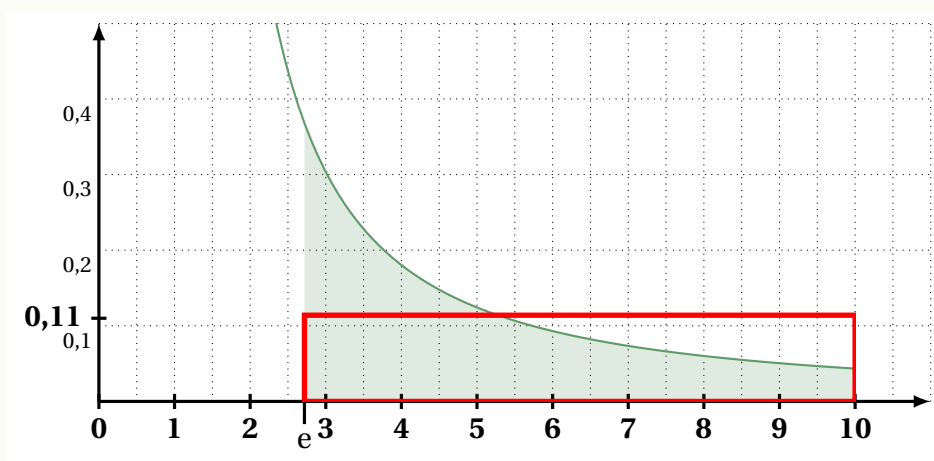
Ainsi, la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[e; 10]$ est :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{10 - e} \int_e^{10} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{10 - e} [F(10) - F(e)] \\ &= \frac{1}{10 - e} [\ln(\ln 10) - \underbrace{\ln(\ln e)}_{=1}] \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\ln(\ln 10)}{10 - e}$$

4 La valeur moyenne correspond à la hauteur du rectangle dont l'aire est égale à celle du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur $[e; 10]$.

Ici, $\mu \approx 0,11$, d'où le rectangle suivant :



Corrigé de l'exercice 5.27 page 235

$$\begin{aligned}
 1 \quad u_{n+1} - u_n &= \int_1^e x^{n+1} \ln(x) \, dx - \int_1^e x^n \ln(x) \, dx \\
 &= \int_1^e (x^{n+1} \ln(x) - x^n \ln(x)) \, dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= \int_1^e (x-1)x^n \ln(x) \, dx.
 \end{aligned}$$

Sur $[1; e]$, $x-1 \geq 0$, $x^n > 0$ et $\ln(x) \geq 0$ donc $(x-1)x^n \ln(x) \geq 0$.

Par conséquent, $\int_1^e (x-1)x^n \ln(x) \, dx \geq 0$ (par propriété du cours) et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi, (u_n) est croissante.

2 a. F_n est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} & ; & & u'(x) &= x^n \\
 v(x) &= \ln(x) - \frac{1}{n+1} & ; & & v'(x) &= \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 F'_n(x) &= (u'v + v'u)(x) \\
 &= x^n \ln(x) - \frac{1}{n+1} x^n + \frac{1}{n+1} x^n \\
 &= x^n \ln(x) \\
 &= f_n(x).
 \end{aligned}$$

F_n est donc bien une primitive de f_n .

b. On déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned}
 u_n &= F_n(e) - F_n(1) \\
 &= \frac{e^{n+1}}{n+1} \left(\ln e - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n+1} \left(\ln 1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
 \boxed{u_n} &= \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.28 page 235

$$1 \quad a. \quad \bullet \quad I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx = [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2.$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}.$$

$$\bullet \quad I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 1} \, dx = [x]_0^1.$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{I_0 + I_1 = 1}.$$

On en déduit alors : $I_0 = 1 - I_1$, soit $I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b. } I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{e^x + 1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nx}(e^x + 1)}{e^x + 1} dx \\ &= \int_0^1 e^{nx} dx \\ &= \frac{1}{n} [e^{nx}]_0^1 \end{aligned}$$

Ainsi, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n} (e^n - 1)$.

2 a. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}(e^x - 1)}{e^x + 1} dx$.
Or, sur $[0; 1]$, on a :

$$\begin{cases} e^{nx} \geq 0 \\ e^x - 1 \geq 0 \\ e^x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi, $I_{n+1} - I_n \geq 0$ donc (I_n) est croissante.

b. $0 \leq x \leq 1 \iff e^0 \leq e^x \leq e^1$ car $t \mapsto e^t$ est croissante

$$\iff 1 + 1 \leq e^x + 1 \leq e + 1$$

$$\iff \frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2} e^{nx} \text{ car } e^{nx} > 0$$

$$\iff \frac{1}{e+1} \int_0^1 e^{nx} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{nx} dx$$

$$\iff \frac{e^n - 1}{n(e+1)} \leq I_n \leq \frac{e^n - 1}{2n}$$

3 On sait (croissance comparée) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{n(e+1)} = +\infty$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{2(e+1)} = +\infty$.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

De plus, $\frac{1 - e^{-n}}{n(e+1)} \leq I_n e^{-n} \leq \frac{1 - e^{-n}}{2n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n(e+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{2n} = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$.

Corrigé de l'exercice 5.29 page 235

$$1 \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos 0 - \left(-\cos \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin 0 - \sin \frac{\pi}{2} = -1.$$

$$2 \quad a. \quad F'_n(x) = ne^{-nx} \sin x - e^{-nx} \cos x.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F'_n(x) \, dx = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$$

$$\boxed{-e^{-n\frac{\pi}{2}} = nI_n - J_n}$$

$$b. \quad G'_n(x) = ne^{-nx} \cos x + e^{-nx} \sin x.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G'_n(x) \, dx = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$$

$$\boxed{1 = nJ_n + I_n}$$

c. On a :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 & (E_1) \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} & (E_2) \end{cases}$$

En faisant $(E_1) - n(E_2)$, on a :

$$(1 + n^2)I_n = 1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}$$

D'où :

$$\boxed{I_n = \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2}}$$

De plus, en faisant $(E_2) + n(E_1)$, on a :

$$(1 + n^2)J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} + n,$$

d'où :

$$\boxed{J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2}}$$

$$3 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-n\frac{\pi}{2}e^{-n\frac{\pi}{2}}\right) = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+n^2} = 0.$$

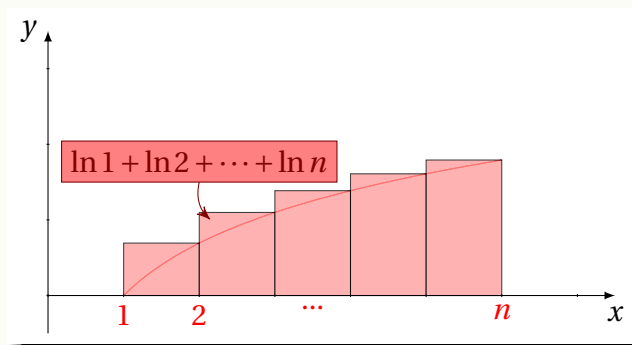
$$\text{De même, } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^2} = 0.$$

Corrigé de l'exercice 5.30 page 236

1 Dans un premier temps, remarquons que :

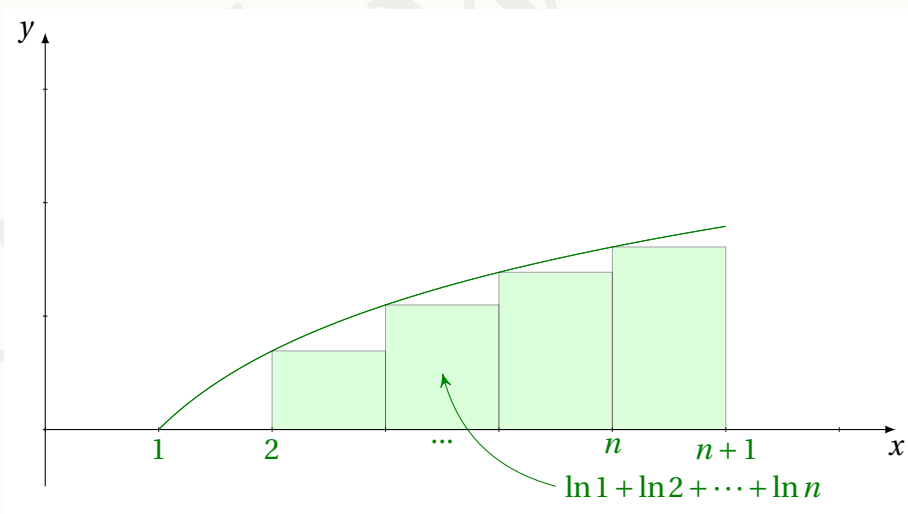
$$\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n-1) + \ln n$$

Traçons la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \ln t$ sur $[1; +\infty[$ et traçons les rectangles de largeur 1 et de hauteur respective $\ln k$ et $\ln(k+1)$ pour k allant de 1 à n :



On voit ici que la somme des aires des rectangles est supérieure à l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, le point de coordonnées (1;0) et la droite d'équation $x = n$, ce qui se traduit par l'inégalité suivante :

$$\ln(n!) \geq \int_1^n \ln t dt$$



On voit ici que la somme des aires des rectangles est inférieure à l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, le point de coordonnées (1;0) et la droite d'équation $x = n$, ce qui se traduit par l'inégalité suivante :

$$\ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln t dt$$

Ainsi :

$$\int_1^n \ln t dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln t dt$$

$$2 \quad L'(x) = (x \ln x)' - 1$$

$$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

Ainsi, $x \mapsto x \ln x - x$ est bien une primitive de $x \mapsto \ln x$.

3 De l'encadrement de la question 1 et du résultat obtenu à la question 2, on déduit :

$$\frac{1}{\ln(n^n)} \int_1^n \ln t \, dt \leq u_n \leq \frac{1}{\ln(n^n)} \int_1^{n+1} \ln t \, dt.$$

Or,

$$\int_1^n \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1$$

$$\int_1^{n+1} \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^{n+1} = (n+1) \ln(n+1) - n$$

Donc :

$$\frac{n \ln n - n + 1}{n \ln n} \leq u_n \leq \frac{n \ln(n+1) + \ln(n+1) - n}{n \ln n}$$

$$1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \leq u_n \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\ln n}$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln \left[n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}.$$

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

Corrigé de l'exercice 5.31 page 236

1 Sur $[1; e]$, $\ln x \geq 0$ donc $(\ln x)^n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

$$\text{Ainsi, } I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx \geq 0.$$

$$\begin{aligned} 2 \quad I_{n+1} - I_n &= \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, dx - \int_1^e (\ln x)^n \, dx \\ &= \int_1^e [(\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n] \, dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_1^e (\ln x)^n (\ln x - 1) \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Or, } 1 \leq x \leq e \iff \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$$

$$\iff 0 \leq \ln x \leq 1$$

$$\iff -1 \leq \ln x - 1 \leq 0$$

Ainsi, sur $[1; e]$, $(\ln x)^n (\ln x - 1) \leq 0$ (car $(\ln x)^n \geq 0$ sur cet intervalle), et donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

La suite (I_n) est donc décroissante.

3 Posons $u'(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^n$ et $v(x) = x$. Alors, $I_n = \int_1^e u'(x)v(x) dx$ et par intégration par parties :

$$I_n = f(e) - f(1) - \int_1^e u(x)v'(x) dx,$$

$$\text{avec } u(x) = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}, v'(x) = 1 \text{ et } f(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{n+1}x(\ln x)^{n+1}.$$

Donc :

$$I_n = \frac{1}{n+1} \times e \times (\ln e)^{n+1} - \frac{1}{n+1} \times 1 \times (\ln 1)^{n+1} - \int_1^e \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} \times 1 dx$$

$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$

Ainsi, en multipliant par $(n+1)$ chaque membre de cette dernière égalité, on obtient :

$$(n+1)I_n + I_{n+1} = e$$

4 a. La relation de récurrence de la question précédente donne :

- pour $n = 0$: $I_0 + I_1 = e$;
- pour $n = 1$: $2I_1 + I_2 = e$.

Ainsi, $I_0 + I_1 = 2I_1 + I_2$, soit $I_0 - I_1 = I_2$.

b. $I_0 = \int_1^e (\ln x)^0 dx = \int_1^e 1 dx = [x]_1^e = e - 1$.

c. $L'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

Donc L est bien une primitive de la fonction \ln . On en déduit alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \ln x dx \\ &= L(e) - L(1) \\ &= e \ln e - e - 1 \ln 1 + 1 \\ &= \underline{1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_2 = I_0 - I_1 = e - 1 - 1 = \underline{e - 2}.$$

Corrigé de l'exercice 5.32 page 237

- 1 On sait, par propriété, que $\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$ donc ici, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}(x^n e^x - nF_{n-1}(x))' &= nx^{n-1}e^x + x^n e^x - nF'_{n-1}(x) \\ &= nx^{n-1}e^x + x^n e^x - nf_{n-1}(x) \\ &= nx^{n-1}e^x + x^n e^x - nx^{n-1}e^x = x^n e^x = f_n(x).\end{aligned}$$

On a donc bien $F_n(x) = x^n e^x - nF_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$.

- 2 Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} e^x dx - \int_0^1 x^n e^x dx \\ &= \int_0^1 (x^{n+1} e^x - x^n e^x) dx \\ &= \int_0^1 x^n e^x (x - 1) dx.\end{aligned}$$

Sur $[0; 1]$, $x^n e^x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$ donc $x^n e^x (x - 1) \leq 0$. Ainsi,

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

et donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- 3 Sur $[0; 1]$, $x^n e^x \geq 0$ donc $\int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$. Ainsi, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0; de plus, d'après la question précédente, elle décroît donc elle converge.

4 $I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$

$$I_1 = e - 1I_0 = e - (e - 1) = 1.$$

$$I_2 = e - 2I_1 = e - 2.$$

$$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 2) = -2e + 6.$$

$$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(-2e + 6) = 9e - 24.$$

- 5 Pour $n = 0$, on a bien $I_0 = a_0 e + b_0$ avec $a_0 = 1$ et $b_0 = -1$.

Supposons que pour un entier n fixé, I_n s'écrit sous la forme $I_n = a_n e + b_n$.

Alors,

$$\begin{aligned}I_{n+1} &= e - (n+1)I_n \\ &= e - (n+1)(a_n e + b_n) \\ &= e - (n+1)a_n e - (n+1)b_n \\ &= [1 - (n+1)a_n]e - (n+1)b_n\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n \\ b_{n+1} = -(n+1)b_n \end{cases}$, on a :

$$I_{n+1} = a_{n+1}e + b_{n+1}.$$

L'hérédité est alors vérifiée.

On peut ainsi conclure que pour tout entier naturel n , I_n s'écrit sous la forme $a_n e + b_n$,

avec
$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n \\ b_{n+1} = -(n+1)b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = -1.$$

- 6** $b_0 = -1 = -0!$, $b_1 = 1 = 1!$, $b_2 = -2 = -2!$, $b_3 = 6 = 3!$, $b_4 = -24 = -4!$ d'après la question **4**.

On peut alors conjecturer que pour $n \geq 2$, $b_n = (-1)^{n+1} n!$ (je prends $n \geq 2$ car $b_1 = 0$).

On peut le démontrer par récurrence (l'initialisation étant déjà faite).

Supposons que pour un entier n fixé, $b_n = (-1)^{n+1} n!$. Alors,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= -(n+1)b_n \\ &= (-1) \times (n+1) \times (-1)^{n+1} \times n! \\ &= (-1)^{n+2} \times \underbrace{(n+1) \times n!}_{=(n+1)!} \\ &= (-1)^{n+2} (n+1)! \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée, ce qui montre l'égalité conjecturée.

- 7** Pour $n = 2$, $2! \sum_{k=2}^2 \frac{(-1)^{n-k}}{k!} = 2 \times \frac{(-1)^{2-2}}{2!} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 = a_2$.

L'initialisation est alors réalisée.

Supposons que pour un entier $n \geq 2$ fixé, $a_n = n! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!}$. Alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 - (n+1)a_n \\ &= 1 - (n+1) \times n! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \\ &= 1 - (n+1)! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1)!} - (n+1)! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \\ &= (n+1)! \left[\frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right] \\ a_{n+1} &= (n+1)! \left[\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!} \right] \end{aligned}$$

(ici, j'ai considéré le signe « $-$ » comme étant (-1) et je l'ai inséré dans la somme)

$$= (n+1)! \left[\frac{(-1)^{n+1-(n+1)}}{(n+1)!} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!} \right]$$

(j'écris le terme avant la somme de la même manière que les termes de la somme elle-même afin de l'incorporer à l'intérieur du sigma)

$$= (n+1)! \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^{(n+1)-k}}{k!}$$

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$a_n = n! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!}.$$

8 Un programme Python possible est le suivant :

Code Python 5-21

```
1 from math import factorial as fac, exp
2
3 def a(n):
4     if n > 1:
5         s = 0
6         for k in range(2,n+1):
7             s+=fac(n)*(-1)**(n-k)/fac(k)
8         return s
9     else:
10        if n == 0:
11            return 1
12        else:
13            return 0
14
15 def b(n):
16     return (-1)**(n+1)*fac(n)
17
18 def I(n):
19     return a(n)*exp(1)+b(n)
```

La ligne :

Code Python 5-22

```
1 from math import factorial as fac, exp
```

signifie que j'importe la fonction `factorial` du module `math` en lui attribuant un alias (car comme je suis une grosse feignasse, je n'aime pas taper « `factorial` » en entier alors je préfère taper « `fac` » à la place...).

On obtient par exemple :

```
>>> I(4)
0.4645364561314054
```

Corrigé de l'exercice 5.33 page 237

1 $F_n(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \times (\ln x)^{n+1} \\ &= (n+1) \frac{(\ln x)^n}{x^2} - \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}. \end{aligned}$$

2 De la question précédente, on déduit :

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} F'_n(x) dx &= \int_1^{e^2} \left((n+1) \frac{(\ln x)^n}{x^2} - \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} \right) dx \\ &= (n+1) \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx - \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx = (n+1) \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx - \int_1^{e^2} F'_n(x) dx$$

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - [F_n(e^2) - F_n(0)]$$

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{2^{n+1}}{e^2}$$

3 Posons \mathcal{P}_n la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n!u_0 - \frac{n!}{e^2} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!}$.

• **Initialisation.**

Pour $n = 1$, la question 2 nous dit que : $u_1 = u_0 - \frac{2}{e^2}$.

De plus, $\mathcal{P}_1 : u_1 = 1!u_0 - \frac{1!}{e^2} \times \frac{2}{1!} = u_0 - \frac{2}{e^2}$.

L'initialisation est donc faite.

• **Hérédité.**

Supposons que \mathcal{P}_n soit vraie pour un n donné non nul.

Alors, $u_n = n!u_0 - \frac{n!}{e^2} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!}$.

D'après la question 2, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)u_n - \frac{2^{n+1}}{e^2} \\ &= (n+1) \left(n!u_0 - \frac{n!}{e^2} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!} \right) - \frac{2^{n+1}}{e^2} \\ &= (n+1)!u_0 - \frac{(n+1)!}{e^2} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!} - \frac{2^{n+1}}{e^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1)!u_0 - \frac{(n+1)!}{e^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right) \\
&= (n+1)!u_0 - \frac{(n+1)!}{e^2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k!}.
\end{aligned}$$

On a alors $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. L'hérédité est alors montrée.

Ainsi, \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel non nul n .

- 4** De la question précédente, on peut déduire que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\frac{u_n}{n!} = u_0 - \frac{1}{e^2} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!}$$

soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n!} \right) = u_0 - \frac{1}{e^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

Or, on sait que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2 - 1,$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n!} \right) = u_0 - \frac{1}{e^2} (e^2 - 1),$$

soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n!} \right) = u_0 - 1 + \frac{1}{e^2}.$$

Or :

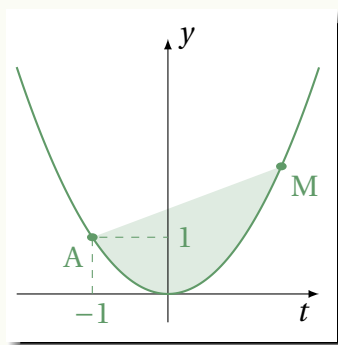
$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_1^{e^2} \frac{dx}{x^2} \\
&= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{e^2} \\
&= -\frac{1}{e^2} + 1
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n!} \right) = 0}$$

Corrigé de l'exercice 5.34 page 238

Avant tout, représentons le domaine en question :



$M(x; x^2)$ et $A(-1; 1)$. La droite (AM) a pour équation $y = mt + p$ où :

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

et donc :

$$p = y_A - mx_A = 1 + \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{x^2 + x}{x + 1}.$$

Ainsi,

$$(AM) : y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}t + \frac{x^2 + x}{x + 1}.$$

L'aire du domaine coloré est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \int_{-1}^x \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1}t + \frac{x^2 + x}{x + 1} - t^2 \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{x^2 - 1}{2(x + 1)}t^2 + \frac{x^2 + x}{x + 1}t \right]_{-1}^x \\ &= \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{A}(x) = 1 \iff x^3 + 3x^2 + 3x - 5 = 0.$$

Posons :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 5.$$

Alors,

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2 \geq 0.$$

f est donc croissante sur \mathbb{R} ; comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution sur \mathbb{R} à l'équation $f(x) = 0$.

À l'aide de la calculatrice (par exemple), on trouve : $x \approx 0,817$.

Ainsi, le domaine a une aire égale à 1 lorsque M a une abscisse d'à peu près 0,817.

Corrigé de l'exercice 5.35 page 238

1 La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^3}$ est continue sur $[1; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur ce même intervalle, donc continue sur $[1; x]$, pour tout réel $x \geq 1$. Ainsi, ϕ est définie.

$$\begin{aligned} 2 \quad \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2} &= \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t) + ct}{t(1+t)^2} \\ &= \frac{a(t^2 + 2t + 1) + bt + bt^2 + ct}{t(1+t)^2} \\ &= \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{t(1+t)^2}. \end{aligned}$$

Si l'on veut que cette dernière expression soit égale à $\frac{4}{t(1+t)^2}$, alors, on doit avoir :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Soit $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$ d'où :

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}$$

3 a. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2} &= \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{dt}{1+t} - \int_1^x \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= [\ln t]_1^x - [\ln(1+t)]_1^x - \left[-\frac{1}{1+t} \right]_1^x \\ &= \ln x - \ln(x+1) + \ln 2 + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \\ &= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$b. \quad \Phi'(t) = \frac{-\frac{1}{t} \times 2(t+1)^2 + \ln t \times 4(t+1)}{4(t+1)^4}$$

$$= \frac{-2(t+1)^2 + 4(t+1)\ln t}{4t(t+1)^4}$$

$$\Phi'(t) = \frac{\ln t}{(t+1)^3} - \frac{1}{2t(t+1)^2}$$

On déduit alors :

$$\int_1^x \Phi'(t) dt = \int_1^x \frac{\ln t}{(t+1)^3} dt - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{t(t+1)^2} dt$$

$$\Phi(x) - \Phi(1) = \phi(x) - \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1} + \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \Phi(x)$$

$$\boxed{\phi(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{\ln x}{2(x+1)^2}}$$

c. On sait, par croissance comparée, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{(x+1)^2} = 0.$$

$$\text{D'où, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2} = 0}.$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{2(x+1)^2} \right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x+2} \right)}_{=0} + \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.36 page 239

Partie A

1 P est dérivable sur \mathbb{R} car c'est un polynôme. Sa dérivée est :

$$P'(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

Le discriminant de $P'(x)$ est :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 24 = -20 < 0.$$

Donc $P'(x) > 0$ sur \mathbb{R} , ce qui signifie que P est strictement croissant sur \mathbb{R} .

2 $P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{8} < 0$.

De plus, $P(1) = 2 > 0$.

Or, P est dérivable (donc continue) et strictement croissant sur $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

3 D'après les questions précédentes, on peut dire :

- $P(X) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[$.
- $P(X) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B

1 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times [x((\ln x)^2 + 1)] - 2 \ln x [(\ln x)^2 + 1 + x(2 \frac{\ln x}{x})]}{x^2 ((\ln x)^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2(\ln x)^2 + 2 - 2(\ln x)^3 - 2 \ln x - 4(\ln x)^2}{x^2 ((\ln x)^2 + 1)^2} \\ f'(x) &= -2 \frac{(\ln x)^3 + (\ln x)^2 + \ln x - 1}{x^2 ((\ln x)^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

2 D'après la question précédente, nous pouvons dire que :

$$f'(x) = -2 \frac{P(\ln x)}{x^2 ((\ln x)^2 + 1)^2},$$

où P est le polynôme défini dans la partie A. Donc $f'(x)$ est du signe contraire de $P(\ln x)$.

Or, nous avons dit que $P(x) > 0$ pour $x > \alpha$. Ainsi, $P(\ln x) > 0$ pour $\ln x > \alpha$, soit $x > e^\alpha$.

Ainsi, $f'(x) < 0$ pour $x > e^\alpha$.

3 $f(x) = \frac{2 \ln x}{x((\ln x)^2 + 1)} = \frac{2}{x \ln x + \frac{x}{\ln x}}$ pour $x \neq 1$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0^-$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

4 Nous avons le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

5 On remarque que $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = (\ln x)^2 + 1 > 0$ et donc $u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$.

Ainsi, une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est $F(x) = \ln((\ln x)^2 + 1)$. Donc :

$$I(t) = \int_1^t f(x) dx = F(t) - F(1) = \ln((\ln t)^2 + 1)$$

6 $I(t) = 1 \iff \ln((\ln t)^2 + 1) = 1$

$$\iff (\ln t)^2 + 1 = e$$

$$\iff (\ln t)^2 = e - 1.$$

On a alors :

$$\ln t = \sqrt{e-1} \quad \text{ou} \quad \ln t = -\sqrt{e-1},$$

soit :

$$t = e^{\sqrt{e-1}} \quad \text{ou} \quad t = e^{-\sqrt{e-1}}.$$

Or, par hypothèse, $t \geq 1$ donc $t \neq e^{-\sqrt{e-1}}$.

Ainsi, $t = e^{\sqrt{e-1}} \approx 3,7$.

Corrigé de l'exercice 5.37 page 239

1 Pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 + \sin(x)} \\ &= \frac{1}{1 + \sin(x)} \times \frac{1 - \sin(x)}{1 - \sin(x)} \\ &= \frac{1 - \sin(x)}{1 - \sin^2(x)} \\ &= \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

2 a. Soit $U(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Alors,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = g(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $U(x)$ est bien une primitive de $u(x)$.

b. Une primitive de $h : x \mapsto \frac{-\sin(x)}{\cos^2(x)}$ est $H : x \mapsto -\frac{1}{\cos(x)}$ car :

$$h = \frac{u'}{u^2} \quad \text{avec} \quad u : x \mapsto \cos(x) \text{ et } u' : x \mapsto -\sin(x).$$

Ainsi, une primitive de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ est :

$$F(x) = U(x) - \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos(x)}$$

soit :

$$F(x) = \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}$$

3 D'après ce qui a été écrit précédemment,

$$I(t) = F(t) - F(0) = \frac{\sin(t) - 1}{\cos(t)} - \frac{\sin(0) - 1}{\cos(0)} = \frac{\sin(t) - 1}{\cos(t)} + 1.$$

4 Écrivons :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(t) - 1}{\cos(t)} &= \frac{\sin(t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin(t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t - \frac{\pi}{2}} \times \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Par définition du nombre dérivé,

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t - \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t - \frac{\pi}{2}} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1.$$

Ainsi, par produit,

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t) - 1}{\cos(t)} = 0 \times (-1) = 0.$$

On en déduit alors que :

$$I = 1.$$

Corrigé de l'exercice 5.38 page 240

1 Posons :

$$u(x) = (\ln x)^n$$

$$u'(x) = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$$

$$v'(x) = x$$

$$v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Alors,

$$\begin{aligned} I_n &= [(uv)(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x)^n \right]_1^e - \frac{n}{2} \int_1^e x (\ln x)^{n-1} \, dx \end{aligned}$$

$$I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$$

2 Nous avons trouvé dans l'exercice précédent :

- $I_1 = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$;
- $I_2 = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$.

À l'aide de la relation de récurrence trouvée à la question précédente, on déduit :

- $I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \times I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{8} + \frac{3}{8}$;
- $I_4 = \frac{e^2}{2} - \frac{4}{2} \left(\frac{e^2}{8} + \frac{3}{8} \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$;
- $I_5 = \frac{e^2}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \right) = -\frac{e^2}{8} + \frac{15}{8}$.

3 De la relation de récurrence $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$ et de la supposition que $I_n = a_n e^2 + b_n$, nous pouvons déduire :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} (a_n e^2 + b_n) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{(n+1)a_n}{2} e^2 - \frac{n+1}{2} b_n \\ &= \frac{1 - (n+1)a_n}{2} e^2 - \frac{n+1}{2} b_n. \end{aligned}$$

Or,

$$I_{n+1} = a_{n+1} e^2 + b_{n+1}.$$

Ainsi, par identification, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1 - (n+1)a_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -\frac{n+1}{2} b_n$$

4 $b_1 = \frac{1}{4}$ et $(-1)^{1+1} \frac{1!}{2^{1+1}} = \frac{1}{4}$ donc la propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit pour un entier $k \geq 1$ fixé, c'est-à-dire que :

$$b_k = (-1)^{k+1} \frac{k!}{2^{k+1}}. \quad (\text{HR})$$

Alors,

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= -\frac{1}{2}(k+1)b_{k+1} \text{ d'après la relation de récurrence sur } (b_n) \\ &= -\frac{1}{2}(k+1) \times (-1)^{k+1} \frac{k!}{2^{k+1}} \\ &= (-1)^{k+2} \frac{k! \times (k+1)}{2 \times 2^{k+1}} \\ &= (-1)^{k+2} \frac{(k+1)!}{2^{k+2}}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

- 5** Cette question est très difficile. Il est donc normal d'avoir des difficultés à écrire un tel programme. J'ai décidé d'utiliser les formules explicites de a_n et b_n pour trouver la valeur exacte de I_n , pour un entier $n \geq 1$ donné. Cela donne par exemple :

Code Python 5-23

```
1 from fractions import Fraction
2
3 def factorielle(n):
4     if n == 0:
5         return 1
6     return n * factorielle(n-1)
7
8 def a(n):
9     a = Fraction(0,1)
10    for k in range(1,n-1):
11        a += Fraction((-1)**k , 2**(k+1) * factorielle(n-k) )
12    a = Fraction(1,2) + factorielle(n) * a +
    Fraction(factorielle(n) * (-1)**(n+1) , 2**(n+1))
13    return a
14
15 def b(n):
16    return Fraction( (-1)**(n+1) * factorielle(n) , 2**(n+1) )
17
18 n = int(input("Entrez un entier n supérieur ou égal à 1 : "))
19 print("I({}) = {}exp(2)/{} + {}/{}".format(n, a(n).numerator,
    a(n).denominator, b(n).numerator, b(n).denominator))
```

```
Entrez un entier n supérieur ou égal à 1 : 7
I(7) = -41exp(2)/16 + 315/16
```

```
Entrez un entier n supérieur ou égal à 1 : 11
I(11) = -21101exp(2)/16 + 155925/16
```

Corrigé de l'exercice 5.39 page 241

- 1 On sait qu'une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_4^8 \frac{f(x)}{[f(x)]^2} dx &= \left[-\frac{1}{f(x)} \right]_4^8 \\ &= -\frac{1}{f(8)} - \left(-\frac{1}{f(4)} \right) \\ &= -2 + 4\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_4^8 \frac{f(x)}{[f(x)]^2} dx = 2}$$

- 2 Pour tout réel k ,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{[f(x)]^2} + k \right)^2 &= \left(\frac{f(x)}{[f(x)]^2} \right)^2 + 2k \frac{f(x)}{[f(x)]^2} + k^2 \\ &= \frac{[f(x)]^2}{[f(x)]^4} + 2k \frac{f(x)}{[f(x)]^2} + k^2.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_4^8 \left(\frac{f(x)}{[f(x)]^2} + k \right)^2 dx &= \int_4^8 \frac{[f(x)]^2}{[f(x)]^4} dx + 2k \int_4^8 \frac{f(x)}{[f(x)]^2} dx + k^2 \int_4^8 dx \\ &= 1 + 2k \times 2 + k^2(8-4) \\ &= 4k^2 + 4k + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_4^8 \left(\frac{f(x)}{[f(x)]^2} + k \right)^2 dx = (2k+1)^2}$$

- 3 Pour $k = -\frac{1}{2}$, on a :

$$\int_4^8 \left(\frac{f(x)}{[f(x)]^2} - \frac{1}{2} \right)^2 dx = 0.$$

$$\text{Or, } \left(\frac{f(x)}{[f(x)]^2} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Si l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est nulle sur un intervalle, alors cette fonction est nécessairement nulle sur cet intervalle.

Ainsi, sur $[4;8]$,

$$\frac{f(x)}{[f(x)]^2} - \frac{1}{2} = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{f(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}}$$

- 4 Si deux fonctions sont égales sur un intervalle, alors leurs primitives aussi.
Ainsi, de la question précédente, on déduit que sur $[4; 8]$:

$$-\frac{1}{f(x)} + C = \frac{1}{2}x + C' \quad , \quad C, C' \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi écrire :

$$-\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}x + \underbrace{C' - C}_{=K}.$$

En prenant $x = 4$, on obtient :

$$-\frac{1}{f(4)} = 2 + K \iff K = -4 - 2 = -6.$$

Finalement,

$$-\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}x - 6 \iff f(x) = -\frac{1}{\frac{x}{2} - 6} = \frac{2}{12 - x}.$$

Conclusion : sur $[4; 8]$, $f(x) = \frac{2}{12 - x}$.

6

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Plan du chapitre

I	Droites dans l'espace	286
1	Caractérisation	286
2	Droites parallèles	286
II	Plans dans l'espace	287
1	Combinaison linéaire de deux vecteurs	287
2	Caractérisation d'un plan dans l'espace	287
3	Plans parallèles	287
III	Vecteurs coplanaires et repère de l'espace	288
1	Vecteurs coplanaires	288
2	Repère de l'espace	288
IV	Représentations paramétriques de droites	289
	Enoncés	291
	Corrigés des exercices	295

I - Droites dans l'espace

I . 1 - Caractérisation

Propriété 34

Toute droite \mathcal{D} de l'espace est définie par un point A et un vecteur \vec{u} .
On dit que \vec{u} est un *vecteur directeur* de la droite.
 \mathcal{D} est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

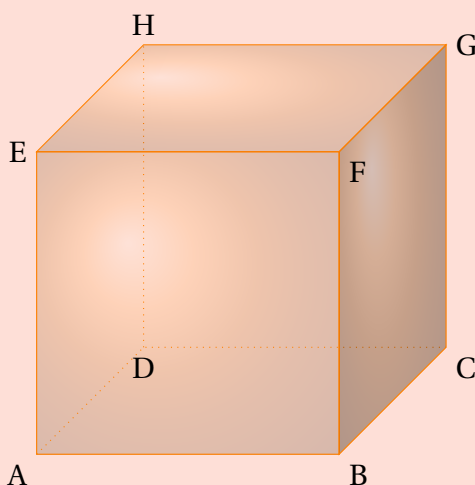
I . 2 - Droites parallèles

Définition 24

- Deux vecteurs de l'espace sont dits *colinéaires* s'ils ont la même direction.
- Deux droites de l'espace sont dites *parallèles* si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Attention 13

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas nécessairement parallèles.



Dans le cube ci-dessus par exemple, les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles bien qu'elles ne se coupent pas.

Propriété 35

Dans l'espace, deux droites parallèles sont nécessairement dans un même plan; on dit qu'elles sont *coplanaires*.

II - Plans dans l'espace

II . 1 - Combinaison linéaire de deux vecteurs

Définition 25 (combinaison linéaire de vecteurs)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace.

On dit que \vec{w} est une *combinaison linéaire* de \vec{u} et \vec{v} s'il existent deux réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

II . 2 - Caractérisation d'un plan dans l'espace

Propriété 36

Tout plan de l'espace est défini par un point A et un couple de vecteurs non colinéaires (\vec{u}, \vec{v}) .

On dit que le plan est dirigé par le couple (\vec{u}, \vec{v}) .

Remarque 43

Pour tout point M du plan défini par un point A et un couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) , \overrightarrow{AM} est une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .

Définition 26

Soit un plan défini par un point A et un couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) .

- (\vec{u}, \vec{v}) est appelé une *base* du plan.
- $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé un *repère* du plan.

II . 3 - Plans parallèles

Propriété 37

Soient deux plans de l'espace \mathcal{P}_1 , dirigé par (\vec{u}_1, \vec{v}_1) , et \mathcal{P}_2 , dirigé par (\vec{u}_2, \vec{v}_2) .

\mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles $\iff \vec{u}_2$ et \vec{v}_2 sont deux combinaisons linéaires de \vec{u}_1 et \vec{v}_1 .

III - Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

III . 1 - Vecteurs coplanaires

Définition 27

Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace non deux à deux colinéaires sont dits *coplanaires* si l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

Remarque 44

Si deux des trois vecteurs sont colinéaires alors les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires.

III . 2 - Repère de l'espace

Propriété 38

Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, pour tout vecteur \vec{t} de l'espace il existe un triplet unique de réels $(a ; b ; c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Définition 28

Un repère de l'espace est défini par un point A et un triplet de 3 vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Propriété 39

Dans le repère $(A ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels $(x ; y ; z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Définition 29 (coordonnées d'un point et d'un vecteur de l'espace)

Dans le repère $(A ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ alors $(x ; y ; z)$ constitue les coordonnées du point M, mais aussi du vecteur \overrightarrow{AM} dans ce repère.

Les calculs sur les coordonnées dans l'espace se font comme les calculs sur les coordonnées dans le plan.

IV - Représentations paramétriques de droites

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit \mathcal{D} la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur \vec{u} de coordonnées $(a; b; c)$.

Théorème 10

$$M(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est une représentation paramétrique de \mathcal{D} .

Attention 14



Cette représentation paramétrique n'est pas unique et dépend du vecteur directeur et du point choisi sur la droite!

Exemple 39

La droite caractérisée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 7t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

passé par le point A(-1; 2; 5) et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Remarque 45 (point d'intersection de deux droites)

Deux droites (d) et (d') ont pour représentations paramétriques respectives :

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -2 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad ; \quad (d'): \begin{cases} x = 4 - 3t' \\ y = 16 - 5t' \\ z = -22 + t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$$

Sont-elles sécantes?

Notons I l'éventuel point d'intersection de ces droites. Alors,

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_I = -1 + t \\ y_I = 6 + 2t \\ z_I = -2 - 4t \end{cases} \quad \text{et} \quad \exists t' \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_I = 4 - 3t' \\ y_I = 16 - 5t' \\ z_I = -22 + t' \end{cases}.$$

Il faut donc voir si le système :

$$\begin{cases} -1 + t = 4 - 3t' \\ 6 + 2t = 16 - 5t' \\ -2 - 4t = -22 + t' \end{cases}$$

admet une solution.

Pour le savoir, il faut prendre uniquement deux équations sur les trois :

$$\begin{cases} -1 + t = 4 - 3t' \\ 6 + 2t = 16 - 5t' \end{cases} \iff \begin{cases} t + 3t' = 5 \\ 2t + 5t' = 10 \end{cases}$$

et résoudre le système; on trouve ici : $t = 5$ et $t' = 0$.

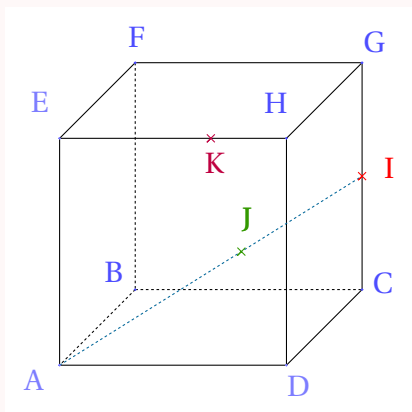
On doit ensuite vérifier que la troisième équation est vérifiée pour ces valeurs :

$$-2 - 4t = -22 + t' \iff -2 - 4 \times 5 = -22 + 0 \iff -22 = -22.$$

C'est donc ici le cas. Par conséquent, les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est obtenu par exemple en prenant $t' = 0$ dans la représentation paramétrique de (d') : il s'agit du point de coordonnées $(4; 16; -22)$.

Vecteurs, droites et plans

Exercice 6.1 (combinaison linéaire de vecteurs)



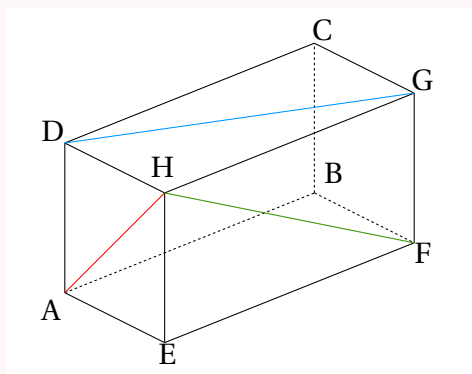
On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

Soit I le milieu de [GC], soit J le point défini par : $\vec{AJ} = x\vec{AI}$, où $0 \leq x \leq 1$, et soit K le point défini par $\vec{EK} = \frac{2}{3}\vec{EH}$.

- 1 Exprimer \vec{AI} en fonction de \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AE} .
- 2 Exprimer \vec{CJ} en fonction de \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AE} .
- 3 Exprimer \vec{KJ} en fonction de \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AE} .
- 4 Exprimer \vec{IK} en fonction de \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AE} .

Solution page 295

Exercice 6.2 (parallélisme)



ABCDEFGH est un pavé droit.

Démontrer que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.

Solution page 295

Exercice 6.3 (vecteurs coplanaires)

Soit ABCD un tétraèdre. On définit le point E par la relation vectorielle :

$$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{DC}.$$

Montrer que \vec{AE} , \vec{EC} et \vec{AD} sont coplanaires.

Solution page 296

Représentations paramétriques de droites

Exercice 6.4 (représentations paramétriques de droites)

Dans chacune des questions suivantes, déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} , passant par le point A et de vecteur directeur \vec{u} .

1 A(0;2;-1) et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2** A(-3;1;5) et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **3** A(2;-3;4) et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Solution page 296

Exercice 6.5 (droites confondues)

Soient (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}t' \\ y = t' \\ z = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) sont confondues.

Solution page 296

Exercice 6.6 (droites sécantes)

Soient (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 7 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = -8 - 3t' \\ y = 5 + t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) sont sécantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection.

Solution page 297

Exercice 6.7 (position relative de deux droites)

Soient (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -4 - 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

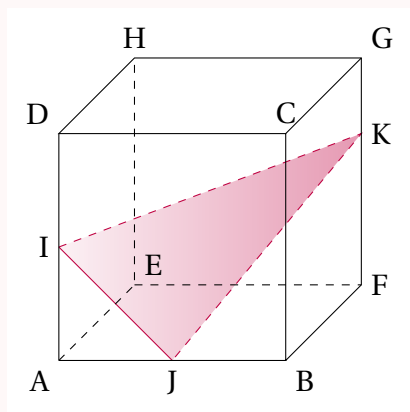
Sont-elles parallèles? Sont-elles sécantes?

Solution page 297

Exercice 6.8 (base)



On considère le cube ABCDEFGH suivant :



I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AB].

On définit les points K et L par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF} \quad ; \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$$

- 1 Justifier que \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} forment une base du plan (IJK).
- 2 Montrer que \overrightarrow{IL} est une combinaison linéaire de \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} .
Interpréter ce résultat.
- 3 Le milieu de [AG] appartient-il au plan (IJK) ? Justifier.

Solution page 298

Exercice 6.9 (notion de barycentre)



Soient A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace.

- 1 Montrer que pour tous réels α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Ce point est alors appelé *barycentre* du système $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$, et on note :

$$G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}.$$

Cette définition se généralise à n points, $n \geq 1$.

- 2 Justifier que G appartient au plan (ABC).
- 3 Montrer que :

$$\begin{cases} H = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\} \\ G = \{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\} \end{cases} \iff G = \text{bar}\{(H; \alpha + \beta), (C; \gamma)\}.$$

Solution page 299

Exercice 6.10 (alignement, rep. param. d'un plan et d'une droite)



Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0) \quad ; \quad B(-1; 1; 1) \quad C(3; -2; -1)$$

- 1** Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
- 2** Déterminer alors une représentation paramétrique du plan (ABC).
- 3** Soit $E(0; -1; 1)$.
 - a.** Vérifier que E n'appartient pas au plan (ABC).
 - b.** On considère la droite passant par E et orthogonale au plan (ABC). On pose $H(a; b; c)$ son point d'intersection avec le plan (ABC).
Déterminer les valeurs de a , b et c .
 - c.** Déterminer alors une équation paramétrique de la droite (EH).

Solution page 300

Exercice 6.11 (dans un tétraèdre)



ABCD est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des segments [BD] et [CD].
E et F sont deux points définis par les égalités :

$$-2\vec{EA} + 3\vec{EB} = \vec{0} \quad ; \quad -2\vec{FA} + 3\vec{FC} = \vec{0}.$$

- 1** Démontrer que les points E, F, I, J sont coplanaires.
- 2** La droite (AD) coupe le plan (EFI) en K.
 - a.** Démontrer que les points E, I, K sont alignés et que les points F, J, K le sont aussi.
 - b.** Démontrer que $\vec{AK} = \frac{3}{5}\vec{AD}$.

Solution page 302

Corrigé de l'exercice 6.1 page 291

$$1 \quad \vec{AI} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CI} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \vec{AD} + \vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{CG}$$

$$\boxed{\vec{AI} = \vec{AD} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}}$$

$$2 \quad \vec{CJ} = \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AJ} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= -\vec{AB} - \vec{AD} + x\vec{AI}$$

$$= -\vec{AB} - \vec{AD} + x\left(\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}\right)$$

$$\boxed{\vec{CJ} = (x-1)\vec{AB} + (x-1)\vec{AD} + \frac{x}{2}\vec{AE}}$$

$$3 \quad \vec{KJ} = \vec{KE} + \vec{EA} + \vec{AJ} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= -\frac{2}{3}\vec{AD} - \vec{AE} + x\vec{AI}$$

$$= -\frac{2}{3}\vec{AD} - \vec{AE} + x\left(\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}\right)$$

$$\boxed{\vec{KJ} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\vec{AD} + x\vec{AB} + \left(\frac{x}{2} - 1\right)\vec{AE}}$$

$$4 \quad \vec{IK} = \vec{IG} + \vec{GH} + \vec{HK}$$

$$\boxed{\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{AE} - \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD}}$$

Remarque 48

il n'y a pas qu'une seule façon d'utiliser la relation de Chasles pour décomposer un vecteur. Selon le « chemin » que l'on emprunte, le raisonnement peut être plus ou moins long.

Corrigé de l'exercice 6.2 page 291

Montrons que les deux plans sont dirigés par le même couple de vecteurs :

D'après la relation de Chasles : $\vec{AH} = \vec{AE} + \vec{EH}$.

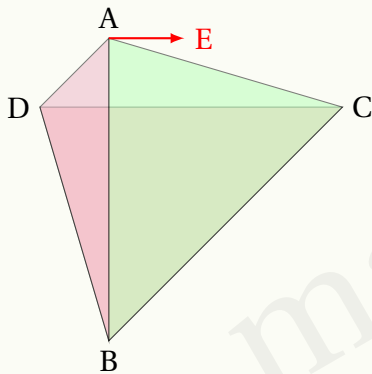
ABCDEFGH est un pavé droit donc $\vec{AH} = \vec{BF} + \vec{FG}$, et finalement :

$$\vec{AH} = \vec{BG}.$$

On montre de même que $\vec{FH} = \vec{BD}$.

Par leur position sur le pavé, les points A, H et F ne sont pas alignés, donc les vecteurs \vec{AH} et \vec{FH} ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (AHF). De même, les vecteurs \vec{BG} et \vec{BD} dirigent le plan (BDG). Les deux plans étant dirigés par le même couple de vecteurs, ces plans sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 6.3 page 291



\vec{AE} , \vec{EC} et \vec{AD} sont coplanaires si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AE} + \vec{EC} + \vec{CD} \\ &= \vec{AE} + \vec{EC} - 4\vec{AE} \\ &= \vec{EC} - 3\vec{AE}.\end{aligned}$$

\vec{AD} est donc une combinaison linéaire de \vec{EC} et \vec{AE} , qui ne sont pas colinéaires, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

Corrigé de l'exercice 6.4 page 292

Nous savons qu'une représentation paramétrique de droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On a alors :

$$1 \quad (\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$2 \quad (\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - 2t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$3 \quad (\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 6.5 page 292

D'après leurs représentations paramétriques, (\mathcal{D}_1) a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (\mathcal{D}_2)

a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 6/5 \\ 1 \\ 4/5 \end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{u}$ donc les vecteurs sont colinéaires, ce qui signifie que (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) sont parallèles.

De plus, le point $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}; 0\right) \in (\mathcal{D}_1)$; vérifions que $A \in (\mathcal{D}_2)$. Pour cela, vérifions que ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de (\mathcal{D}_2) :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}t' \\ -\frac{1}{4} = t' \\ 0 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t' \end{cases} \Rightarrow t' = -\frac{1}{4}.$$

On trouve une valeur de t' et une seule; par conséquent, $A \in (\mathcal{D}_2)$, ce qui signifie alors que (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) sont confondues.

Corrigé de l'exercice 6.6 page 292

Utilisons la méthode du cours pour montrer que les droites sont sécantes. Montrons que le système :

$$\begin{cases} -2 + 3t = -8 - 3t' \\ 1 - 2t = 5 + t' \\ 7 + 4t = -1 + 2t' \end{cases}$$

admet une unique solution. Pour cela, considérons le système formé uniquement deux deux premières équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2 + 3t = -8 - 3t' \\ 1 - 2t = 5 + t' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 3t' = -6 \\ -2t - t' = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = -2 \\ t' = -2t - 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t - 2t - 4 = -2 \\ t' = -2t - 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La troisième équation donne alors :

$$7 + 4t = -1 + 2t' \Leftrightarrow 7 + 4 \times (-2) = -1 + 2 \times 0 \Leftrightarrow -1 = -1.$$

Cette dernière égalité étant vraie, $t = -2$ et $t' = 0$ sont les solutions du système. Les deux droites sont alors sécantes et leur point d'intersection est obtenu en remplaçant par exemple t' par 0 dans la représentation paramétrique de (\mathcal{D}_2) : $I(-8; 5; -1)$.

Corrigé de l'exercice 6.7 page 292

- Les droites sont-elles parallèles?

Pour le savoir, il faut regarder si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Le vecteur directeur de (\mathcal{D}_1) est $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et celui de (\mathcal{D}_2) est $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\frac{-5}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

- Les droites sont-elles sécantes ?

Pour le savoir, nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} 2-5t=5+t' \\ -1+t=-4-2t' \\ 4-3t=1+t' \end{cases}$$

Si on ne considère que les deux premières équations, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2-5t=5+t' \\ -1+t=-4-2t' \end{cases} &\iff \begin{cases} 5t+t'=-3 \\ t+2t'=-3 \end{cases} \\ &\iff t=-\frac{1}{3}, \quad t'=-\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

La troisième équation donne alors :

$$4-3t=1+t' \iff 4+1=1-\frac{4}{3} \iff 5=-\frac{1}{3}.$$

Cette dernière égalité étant fausse, le système n'admet aucune solution et donc les droites ne sont pas sécantes.

Corrigé de l'exercice 6.8 page 293

- 1 I et J sont sur le plan (ABC) alors que K n'y est pas. Ainsi, \vec{IJ} et \vec{IK} ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une base du plan passant par ces trois points, le plan (IJK).
- 2 Une façon de faire est d'exprimer les vecteurs \vec{IJ} , \vec{IK} et \vec{IL} en fonction de \vec{AB} , \vec{AE} et \vec{AD} (par exemple).

- $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD}$
- $\vec{IK} = \vec{AB} + \vec{AE} + \frac{1}{4}\vec{AD}$
- $\vec{IL} = \vec{IA} + \vec{AL} = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AE} + \frac{5}{4}\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AE} + \frac{3}{4}\vec{AD}.$

Si \vec{IL} est une combinaison linéaire de \vec{IJ} et \vec{IK} alors :

$$\begin{aligned} \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}, \quad \vec{IL} &= \lambda \vec{IJ} + \mu \vec{IK} \\ \iff \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AE} + \frac{3}{4}\vec{AD} &= \lambda \left(\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} \right) + \mu \left(\vec{AB} + \vec{AE} + \frac{1}{4}\vec{AD} \right) \\ \iff \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AE} + \frac{3}{4}\vec{AD} &= \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu \right) \vec{AB} + \mu \vec{AE} + \left(-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\mu \right) \vec{AD} \\ \iff \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lambda + \mu \\ 1 = \mu \\ \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\mu \end{cases} \end{aligned}$$

(les coefficients des vecteurs doivent être égaux un à un)

On trouve alors $\mu = 1$ et par suite, $\lambda = -1$. Ainsi,

$$\boxed{\vec{IL} = -\vec{IJ} + \vec{IK}}$$

\vec{IL} est donc bien une combinaison linéaire de \vec{IJ} et \vec{IK} .

On peut alors conclure que le point L est sur le plan (IJK).

3 Notons M le milieu de [AG]. Alors,

$$\begin{aligned}\vec{IM} &= \vec{IA} + \vec{AM} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}.\end{aligned}$$

\vec{IM} est une combinaison linéaire de \vec{AB} et \vec{AE} alors que d'une part, \vec{IJ} s'exprime en fonction de \vec{AB} et \vec{AD} et d'autre part, \vec{IK} s'exprime en fonction de \vec{AB} , \vec{AE} et \vec{AD} .

\vec{IM} ne peut donc pas être une combinaison linéaire de \vec{IJ} et \vec{IK} .

M n'appartient donc pas au plan (IJK).

Corrigé de l'exercice 6.9 page 293

1 • Démontrons l'existence d'au moins un point tel que $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0} &\iff \alpha\vec{GA} + \beta(\vec{GA} + \vec{AB}) + \gamma(\vec{GA} + \vec{AC}) = \vec{0} \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma)\vec{GA} = -\beta\vec{AB} - \gamma\vec{AC} \\ &\iff \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\vec{AC} \text{ (car } \alpha + \beta + \gamma \neq 0\text{)}.\end{aligned}$$

Le point G est alors bien défini et on sait le placer à l'aide de cette dernière égalité.

• Montrons maintenant l'unicité.

Supposons qu'il existe deux points G et G' vérifiant la même égalité :

$$\begin{aligned}\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} &= \vec{0} \\ \alpha\vec{G'A} + \beta\vec{G'B} + \gamma\vec{G'C} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Ainsi, par soustraction,

$$\alpha(\vec{GA} - \vec{G'A}) + \beta(\vec{GB} - \vec{G'B}) + \gamma(\vec{GC} - \vec{G'C}) = \vec{0}$$

soit :

$$\alpha\vec{GG'} + \beta\vec{GG'} + \gamma\vec{GG'} = \vec{0}$$

ou encore :

$$(\alpha + \beta + \gamma)\vec{GG'} = \vec{0}.$$

Or, G est différent de G' donc $\vec{GG'} \neq \vec{0}$. Cela suppose donc que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, ce qui est impossible par hypothèse de départ.

Ainsi, l'hypothèse selon laquelle il existerait deux points distincts G et G' satisfaisant la même égalité est fausse, ce qui montre l'unicité du barycentre.

- 2 Pour justifier que G appartient au plan (ABC), il suffit de reprendre l'égalité démontrée au premier point de la réponse à la question 1 :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}.$$

Ainsi, \overrightarrow{AG} est une combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , ce qui prouve que G appartient à (ABC).

$$\begin{aligned} 3 \quad & \begin{cases} H = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\} \\ G = \{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \overrightarrow{HA} + \beta \overrightarrow{HB} = \vec{0} \\ \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases} \\ & \text{(soustraction)} \iff \begin{cases} \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \alpha (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{HA}) + \beta (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{HB}) + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \alpha \overrightarrow{GH} + \beta \overrightarrow{GH} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ (\alpha + \beta) \overrightarrow{GH} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases} \\ & \iff G = \text{bar}\{(H; \alpha + \beta), (C; \gamma)\} \end{aligned}$$

Remarque 49

Cette dernière égalité montre que G est sur la droite (HC).

Corrigé de l'exercice 6.10 page 294

$$1 \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -(-1) \\ 1 & -0 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{2}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

- 2 \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc ce sont deux vecteurs directeurs de ce plan. De plus, $A \in (ABC)$ donc une représentation paramétrique du plan (ABC) est :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t + t' \\ y = -1 + 2t - t' \\ z = t - t' \end{cases}, \quad (t; t') \in \mathbb{R}^2$$

3 $E(0; -1; 1)$.

a. Si $E \in (ABC)$ alors il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} 0 = 2 - 3t + t' \\ -1 = -1 + 2t - t' \\ 1 = t - t' \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} t' = 3t - 2 \\ 2t = t' \\ 1 = t - t' \end{cases}$$

Des 1^{re} et 2^e équations, on déduit que :

$$3t - 2 = 2t \quad \text{soit} \quad t = 2$$

et donc

$$t' = 2 \times 2 = 4.$$

La 3^e équation donne alors :

$$1 = 2 - 4,$$

ce qui n'est pas vrai, donc il n'existe pas de réels t et t' tels que les coordonnées de E satisfont la représentation paramétrique de (ABC) que nous avons donnée à la question précédente.

Ainsi, E n'appartient pas au plan (ABC) .

b. Par définition, (EH) est orthogonale au plan (ABC) donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EH} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3a + 2b + c + 1 = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases}$$

Or, $H \in (ABC)$ donc il existe deux réels t et t' pour lesquels :

$$\begin{cases} a = 2 - 3t + t' \\ b = -1 + 2t - t' \\ c = t - t' \end{cases}$$

Le système précédent devient alors :

$$\begin{cases} -3(2 - 3t + t') + 2(-1 + 2t - t') + (t - t') + 1 = 0 \\ (2 - 3t + t') - (-1 + 2t - t') - (t - t') = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 14t - 6t' = 7 \\ -2t + t' = -1 \end{cases}$$

On trouve alors $t = \frac{1}{2}$ et $t' = 0$, d'où :

$$\begin{cases} a = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ b = -1 + 1 = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{D'où } H\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)}$$

c. $\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de (EH) est (en prenant les coordonnées de E) :

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2}k \\ y = -1 + k \\ z = 1 - \frac{1}{2}k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

Corrigé de l'exercice 6.11 page 294

Avant tout, un schéma peut aider. Pour cela, il faudra savoir comment construire les points E et F : $-2\vec{EA} + 3\vec{EB} = \vec{0} \iff -2(\vec{EB} + \vec{BA}) + 3\vec{EB} = \vec{0}$

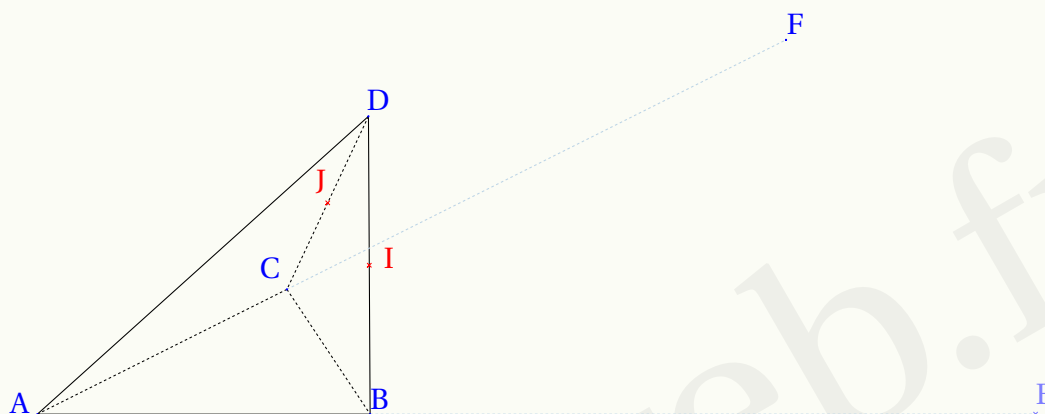
$$\iff \vec{EB} - 2\vec{BA} = \vec{0}$$

$$\iff \vec{BE} = 2\vec{AB}$$

$$-2\vec{FA} + 3\vec{FC} = \vec{0} \iff -2(\vec{FC} + \vec{CA}) + 3\vec{FC} = \vec{0}$$

$$\iff \vec{FC} - 2\vec{CA} = \vec{0}$$

$$\iff \vec{CF} = 2\vec{AC}.$$

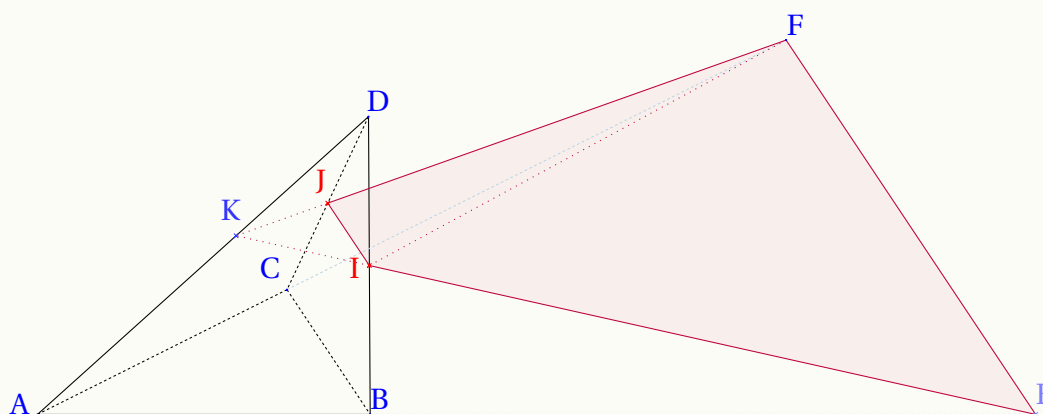


1 Des égalités vectorielles précédentes, on peut conclure :

$$\begin{aligned} \vec{EF} &= \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CF} \\ &= 2\vec{BA} + \vec{BC} + 2\vec{AC} \\ &= 2(\vec{BA} + \vec{AC}) + \vec{BC} \\ &= 2\vec{BC} + \vec{BC} \\ &= 3\vec{BC}. \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs \vec{EF} et \vec{BC} sont colinéaires ; les quatre points E, F, B et C sont donc coplanaires.

2 a. Complétons la figure :



K est défini comme le point d'intersection de la droite (AD) et du plan (EFI) ; par conséquent, toutes droites du plan (EFI) coupant (AD) passe par K.

(AD) appartient au plan (ADC) et la droite (FJ) aussi ; n'étant pas parallèles, elles sont sécantes : en K. Les points F, J et K sont donc alignés.

(AD) appartient au plan (ABD) et la droite (EI) aussi ; n'étant pas parallèles, elles sont aussi sécantes : en K.

b. Plaçons-nous dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, où :

$$B(1;0;0) \quad ; \quad D(0;0;1) \quad ; \quad C(0;1;0) \quad ; \quad E(3;0;0) \quad ; \quad F(0;3;0)$$

$$I\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}; \frac{z_B + z_D}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad J\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

• **La droite (JF).**

Un coefficient directeur est $\overrightarrow{JF} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-1/2 \\ 0-1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique est donc :

$$(JF) : \begin{cases} x = 0 + t \times 0 \\ y = 3 + \frac{5}{2}t \\ z = 0 - \frac{1}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

soit :

$$(JF) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + \frac{5}{2}t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

• **La droite (EI).**

Un coefficient directeur est $\overrightarrow{IE} \begin{pmatrix} 3-1/2 \\ 0-0 \\ 0-1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique est donc :

$$(EI) : \begin{cases} x = 3 + \frac{5}{2}t' \\ y = 0 + t' \times 0 \\ z = 0 - \frac{1}{2}t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$$

soit :

$$(EI) : \begin{cases} x = 3 + \frac{5}{2}t' \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$$

$K \in (EI)$ et $K \in (JF)$ donc :

$$\begin{cases} x_K = 0 = 3 + \frac{5}{2}t' \\ y_K = 3 + \frac{5}{2}t = 0 \\ z_K = -\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}t' \end{cases} \iff t' = -\frac{6}{5} = t$$

On en déduit alors les coordonnées de K en utilisant par exemple la représentation paramétrique de (EI) :

$$K\left(0; 0; \frac{3}{5}\right).$$

Ce qui signifie que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.

Orthogonalité et distances dans l'espace

Plan du chapitre

I	Orthogonalité	306
1	Produit scalaire	306
2	Orthogonalité de deux vecteurs	307
3	Orthogonalité d'un vecteur et d'un plan	307
4	Orthogonalité de deux plans	307
5	Équations cartésiennes d'un plan	308
6	Détermination d'une représentation paramétrique de l'intersection de 2 plans	308
7	Intersection d'une droite et d'un plan	309
II	Distances	310
1	Distance entre deux points	310
2	Distance d'un point à un plan	310
	Enoncés	312
	Corrigés des exercices	319

I - Orthogonalité

I . 1 - Produit scalaire

Le produit scalaire a été défini en classe de 1^{re} dans le plan.
Sa définition reste inchangée dans l'espace.

Définition 30

Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} deux vecteurs de l'espace.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, est défini par :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

Les propriétés sur le produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

Propriété 40 (rappels)

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (propriété de symétrie) ;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda \vec{u}) \cdot (\mu \vec{v}) = \lambda \mu (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Celle faisant intervenir les coordonnées change afin d'intégrer la troisième composante :

Propriété 41

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, c'est-à-dire où $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$, on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Exemple 40 (produit scalaire)

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 3 + 2 \times 5 + 1 \times (-7) = -3 + 10 - 7 = 0.$$

I . 2 - Orthogonalité de deux vecteurs

Définition 31

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace.
On dit que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Dans l'exemple 40 précédent, les vecteurs sont orthogonaux.

I . 3 - Orthogonalité d'un vecteur et d'un plan

Définition 32 (vecteur normal)

Soit \mathcal{P} un plan de l'espace et soit \vec{n} un vecteur de l'espace.
On dit que \vec{n} est un vecteur normal à \mathcal{P} si, pour tout vecteur \vec{p} de \mathcal{P} , $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$.

I . 4 - Orthogonalité de deux plans

Définition 33

Soient deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de l'espace.
On dit que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont orthogonaux si tout vecteur \vec{u}_1 de \mathcal{P}_1 est orthogonal à tout vecteur \vec{u}_2 de \mathcal{P}_2 .

Propriété 42

Soient deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de l'espace, de vecteurs normaux respectifs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .

$$\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

Remarque 50

Cette dernière propriété sera très utilisée pour démontrer l'orthogonalité de deux plans.

I . 5 - Équations cartésiennes d'un plan

Propriété 43

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit \mathcal{P} un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout point $M(x; y; z)$ l'espace,

$$M \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0, \quad \text{où } d \in \mathbb{R}.$$

Définition 34

« $ax + by + cz + d = 0$ » est appelée une équation cartésienne du plan \mathcal{P} .

Remarque 51

Pour un triplet donné $(a; b; c)$, il existe une infinité d'équations cartésiennes car $d \in \mathbb{R}$.

I . 6 - Détermination d'une représentation paramétrique de l'intersection de 2 plans

Remarque 52

Ce paragraphe est hors-programme. Il est destiné aux élèves souhaitant approfondir leurs connaissances.

On considère les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} : 2x + 3y - z + 5 &= 0 \\ \mathcal{P}' : x + y + 1 &= 0\end{aligned}$$

Nous souhaitons déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de ces deux plans si elle existe.

Pour cela, on « résout » le système suivant, en conservant une inconnue et en la considérant comme un paramètre (ici, z) :

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ x + y = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + 3y = z - 5 & L_1 \\ 2x + 2y = -2 & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = z - 3 & L_1 - L_2 \\ x = -(z - 1 - 3) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = z - 3 \\ x = -z + 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

L'intersection des deux plans existe et est la droite passant par le point $A(2; -3; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I . 7 - Intersection d'une droite et d'un plan

On considère le plan \mathcal{P} d'équation $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite \mathcal{D} passant par $A(0; 1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1 On vérifie d'abord que \mathcal{P} et \mathcal{D} se coupent en un point.

Un vecteur normal à \mathcal{P} est $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; donc, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 5 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 3 = 2 \neq 0$ donc \mathcal{D} n'est pas parallèle à \mathcal{P} : il y a donc un point unique d'intersection. Appelons-le I.

2 Déterminons les coordonnées de I.

La représentation paramétrique de \mathcal{D} est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Étant donné que I appartient à \mathcal{D} , il existe un réel k tel que $I(k; 1; 3k + 3)$.

En substituant les valeurs de x , y et z en fonction de k dans l'équation cartésienne de \mathcal{P} , on a :

$$\begin{aligned} 5k + 1 - (3 + 3k) + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement, on a : $I\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$.

II - Distances

II . 1 - Distance entre deux points

Propriété 44

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. La distance entre A et B est donnée par l'égalité :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

II . 2 - Distance d'un point à un plan

Définition 35

Soit \mathcal{P} un plan de l'espace, et soit A un point quelconque de l'espace.
Soit (d) la droite passant par A et orthogonale à \mathcal{P} ; elle coupe \mathcal{P} en un point H.
H est appelé le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} .

Propriété 45

Soit \mathcal{P} un plan de l'espace, et soit A un point quelconque de l'espace. On note H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} .
Alors, H est le point de \mathcal{P} le plus proche de A.

Démonstration 3

Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} .
Supposons qu'il existe un point K du plan \mathcal{P} plus proche de A que l'est le point H.
 $KA \leq HA$ car K est le point de la droite le plus proche de A. Donc $KA^2 \leq HA^2$.
Or, (AH) est orthogonale à \mathcal{P} , donc (AH) est orthogonale à toute droite de \mathcal{P} . En particulier, (AH) est perpendiculaire à (HK).
Le triangle AHK est donc rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$HA^2 + HK^2 = AK^2.$$

Donc :

$$HA^2 + HK^2 \leq HA^2.$$

Donc $HK \leq 0$, ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point A.

Propriété 46

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit \mathcal{P} un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point quelconque de l'espace. La distance du point A au plan \mathcal{P} est :

$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Démonstration 4

Notons H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} . Alors, (AH) est orthogonale à \mathcal{P} , donc admet pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan, soit $\vec{u}(a; b; c)$ et donc (AH) a pour re-

présentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

H étant le point d'intersection de cette droite et de \mathcal{P} , on a :

$$a(x_A + at) + b(y_A + bt) + c(z_A + ct) + d = 0, \text{ soit : } t = -\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a alors :

$$AH^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2$$

$$AH^2 = \left(-a \frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(-b \frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(-c \frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2$$

$$AH^2 = (a^2 + b^2 + c^2) \frac{(ax_A + by_A + cz_A + d)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

$$AH^2 = \frac{(ax_A + by_A + cz_A + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercice 7.1 (plans orthogonaux ?)



On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) .
Pour chaque question, dire si (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) sont orthogonaux

1 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

3 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$

Solution page 319

Exercice 7.2 (distance d'un point à une droite)



Pour chacune des questions suivantes, calculer la distance entre le point A et le plan (\mathcal{P}) .

1 $(\mathcal{P}) : -3x + 5y + z = 1$; $A(-3; 2; 1)$.

2 $(\mathcal{P}) : 5x - y + 3z - 2 = 0$; $A(2; 2; -2)$.

Solution page 319

Exercice 7.3 (plans orthogonaux)



On considère deux plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations cartésiennes respectives :

$$(\mathcal{P}_1) : 3x + t^2y + (1-t)z - 5 = 0 \quad ; \quad (\mathcal{P}_2) : t^2x + (1+t)y - 3z + 1 = 0,$$

où t est un réel.

Déterminer les valeurs éventuelles de t pour lesquelles les deux plans sont orthogonaux.

Solution page 320

Exercice 7.4 (intersection d'une droite et d'un plan)



Donner les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

et du plan (\mathcal{P}) d'équation cartésienne $2x - 3y + z = 2$.

Solution page 321

Exercice 7.5 (équation cartésienne de plans)



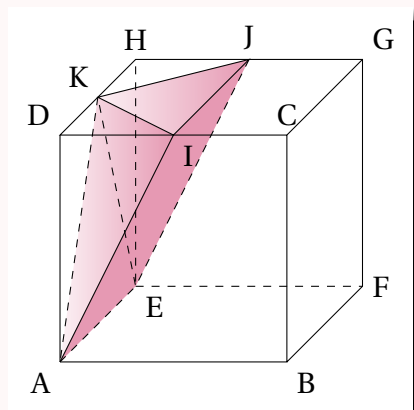
- 1 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(1; -2; 3)$ et parallèle au plan (\mathcal{P}) d'équation : $2x + 5y - 3z = 7$.
- 2 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1; -1; 1)$ et orthogonal au plan (\mathcal{P}) d'équation : $x + y - z = 1$.

Solution page 322

Exercice 7.6 (pyramide dans un cube)



Soit ABCDEFGH un cube comme représenté ci-dessous.



On place les points I, J et K respectivement au milieu des côtés $[DC]$, $[GH]$ et $[DH]$. On fixe le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- 1 Montrer que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (AEJI).
- 2 En déduire une équation cartésienne du plan (AEJI).
- 3 On admet que la distance du point K au plan (AEJI) est égale à $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
En déduire le volume de la pyramide AEJIK.
- 4 Donner une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} , perpendiculaire au plan (AEJI) et passant par K.
En déduire les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D} avec le plan (AEJI).

Solution page 323

Exercice 7.7 (plan médiateur)



On appelle *plan médiateur* d'un segment $[AB]$ le plan passant par son milieu de vecteur normal \overrightarrow{AB} .

On considère les deux points $A(-1; 3; 1)$ et $B(3; 5; -3)$.

- 1 Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
- 2 En déduire une équation cartésienne du plan médiateur.
- 3
 - a. On considère un point M sur ce plan. Montrer que $AM = BM$.
 - b. Réciproquement, montrer que si M est un point de l'espace tel que $AM = BM$ alors M est sur le plan médiateur de $[AB]$.

Solution page 324

Exercice 7.8 (extrait du bac 2022, sujet 1)

Dans l'espace rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1; 1; 3)$,
- la droite \mathcal{D} dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite \mathcal{D} .

- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur \vec{u} de la droite \mathcal{D} .
 - Montrer que le point B $(-1; 3; 0)$ appartient à la droite \mathcal{D} .
 - Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.
- On note \mathcal{P} le plan passant par le point A et orthogonal à la droite \mathcal{D} , et on appelle H le point d'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite \mathcal{D} . Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite \mathcal{D} .
 - Montrer que le plan \mathcal{P} admet pour équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.
 - En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.
 - Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.
- Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite \mathcal{D} , par une autre méthode.

On rappelle que le point B $(-1; 3; 0)$ appartient à la droite \mathcal{D} et que le vecteur \vec{u} est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .

 - Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.
 - Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
 - Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.
- On considère un point C appartenant au plan \mathcal{P} tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

Calculer l'aire du triangle ACH.

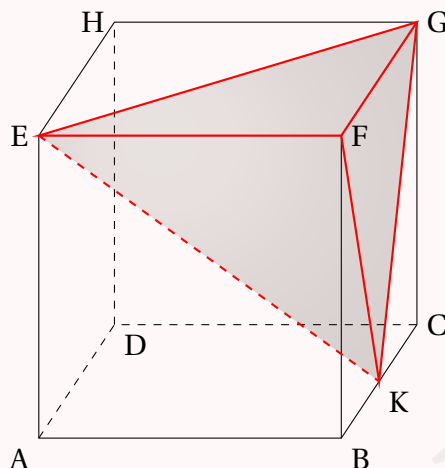
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où \mathcal{B} désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Solution page 325

Exercice 7.9 (extrait du bac 2022, sujet 2)



On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC]. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on considère le tétraèdre EFGK.



On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où \mathcal{B} désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

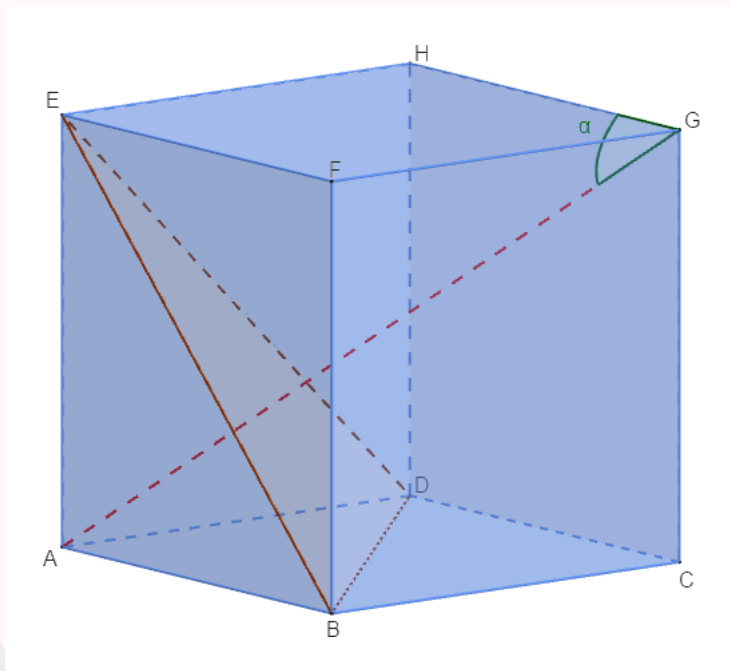
- 1 Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
- 2 Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
- 3 Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
- 4 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
- 5 Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.
- 6 Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.
- 7 Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\frac{1}{6}$.
- 8 Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
- 9 On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment [GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

Solution page 327

Exercice 7.10 (prendre des initiatives)



On considère le cube ABCDEFGH suivant, dont la mesure d'une arête est considérée comme unité. On note $\alpha = \widehat{AGH}$.



- 1 (AG) est-elle orthogonale au plan (BDE)?
- 2 Déterminer une mesure de α au degré près.

Solution page 330

Exercices d'approfondissement

Exercice 7.11 (sphère tangente à un plan)



Remarque 54

Les équations cartésiennes de sphères sont des compétences non exigibles en Terminale, d'où le « 2 étoiles », mais cet exercice n'est pas très compliqué...

On considère le plan (\mathcal{P}) d'équation cartésienne :

$$-2x + 7y + 3z - 1 = 0.$$

Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $A(-1; 2; -3)$ tangente à (\mathcal{P}) .

On rappelle qu'une sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Solution page 330

Exercice 7.12 (intersection de deux plans)



Trouver la représentation paramétrique de l'intersection des plans d'équations cartésiennes respectives :

$$(\mathcal{P}) : 2x - y - z = 1 \quad ; \quad (\mathcal{Q}) : -x + 3y + z = 2.$$

Solution page 331

Exercice 7.13 (intersection de plans)



On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) .
Pour chaque question, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) .

1 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

3 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$

Solution page 332

Exercice 7.14 (intersection de deux plans)



En vous inspirant par exemple de la méthode utilisée dans la correction de l'exercice précédent, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection des plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) .

1 $(\mathcal{P}) : -x + y + z = 2$ et $(\mathcal{Q}) : 4x - 3y + 5z = 1$.

2 $(\mathcal{P}) : 2x - y + 3z = 1$ et $(\mathcal{Q}) : -3x + 2y - 7z = 1$.

Solution page 333

Exercice 7.15 (avec une sphère)



Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points $A(1; 1; 1)$ et $B(3; 2; 0)$;
- le plan (\mathcal{P}) passant par le point B et admettant le vecteur \overrightarrow{AB} pour vecteur normal;
- le plan (\mathcal{Q}) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère (\mathcal{S}) de centre A et de rayon AB.

1 Montrer qu'une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) est : $2x + y - z - 8 = 0$

2 Déterminer une équation de la sphère (\mathcal{S}) .

3 a. On admet que la distance du point A aux plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) est égale à $\sqrt{6}$.
En déduire que le plan (\mathcal{Q}) est tangent à la sphère (\mathcal{S}) .

b. Le plan (\mathcal{P}) est-il tangent à la sphère (\mathcal{S}) ?

4 On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (\mathcal{Q}) , noté C, a pour coordonnées $(0; 2; -1)$.

- a.** Prouver que les plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) sont sécants.
- b.** Soit (\mathcal{D}) la droite d'intersection des plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) .
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (\mathcal{D}) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- c.** Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (\mathcal{D}) .
- d.** On appelle (\mathcal{R}) le plan défini par le point A et la droite (\mathcal{D}) .
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse?
« Tout point du plan (\mathcal{R}) est équidistant des points B et C ».
Justifier votre réponse.

Solution page 334

Corrigé de l'exercice 7.1 page 312

$$1 \quad \begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Un vecteur normal à (\mathcal{P}_1) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et un vecteur normal à (\mathcal{P}_2) est $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + (-1) \times 3 + 1 \times 2 = -4 \neq 0.$$

\vec{u} et \vec{v} ne sont donc pas orthogonaux; les plans ne le sont donc pas non plus.

$$2 \quad \begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

Un vecteur normal à (\mathcal{P}_1) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et un vecteur normal à (\mathcal{P}_2) est $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 1 \times (-3) + 1 \times 1 = 0.$$

\vec{u} et \vec{v} sont donc orthogonaux; les plans le sont donc aussi.

$$3 \quad \begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

Un vecteur normal à (\mathcal{P}_1) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et un vecteur normal à (\mathcal{P}_2) est $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 2 + (-2) \times (-3) + 3 \times (-3) = 1 \neq 0.$$

\vec{u} et \vec{v} ne sont donc pas orthogonaux; les plans ne le sont donc pas non plus.

Corrigé de l'exercice 7.2 page 312

$$1 \quad (\mathcal{P}) : -3x + 5y + z = 1; A(-3; 2; 1).$$

$$\begin{aligned} d(A; \mathcal{P}) &= \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|-3 \times (-3) + 5 \times 2 + 1 - 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 1^2}} \\ &= \frac{19}{\sqrt{35}}. \end{aligned}$$

$$2 \quad (\mathcal{P}) : 5x - y + 3z - 2 = 0; A(2; 2; -2).$$

$$\begin{aligned} d(A; \mathcal{P}) &= \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|5 \times 2 - 2 + 3 \times (-2) - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela signifie donc que $A \in (\mathcal{P})$, ce qui n'est pas difficile à vérifier en injectant directement les coordonnées de A dans l'équation cartésienne de (\mathcal{P}) (c'est le numérateur), et en trouvant 0.

Corrigé de l'exercice 7.3 page 312

On sait que deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Un vecteur normal à (\mathcal{P}_1) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ t^2 \\ 1-t \end{pmatrix}$;

Un vecteur normal à (\mathcal{P}_2) est $\vec{v} \begin{pmatrix} t^2 \\ 1+t \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 3t^2 + t^2(1+t) - 3(1-t) \\ &= t^3 + 4t^2 + 3t - 3.\end{aligned}$$

Posons alors :

$$f(t) = t^3 + 4t^2 + 3t - 3.$$

f est continue, $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une valeur de t_0 pour laquelle $f(t_0) = 0$. Étudions les variations de f :

$$f'(t) = 3t^2 + 8t + 3.$$

$f'(t)$ est donc un trinôme de degré 2, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times 3 = 64 - 36 = 28.$$

$f'(t)$ admet donc deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{28}}{6} = \frac{-4 - \sqrt{7}}{3}$$

et

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{28}}{6} = \frac{-4 + \sqrt{7}}{3}.$$

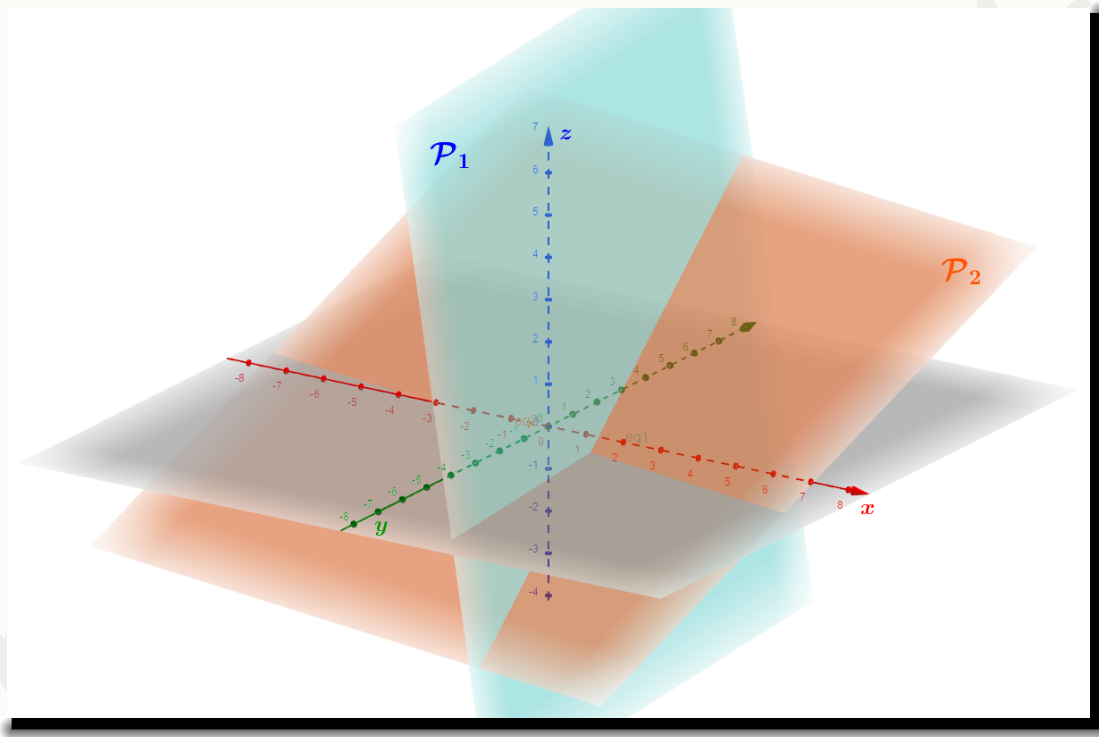
On en déduit alors le tableau suivant :

t	$-\infty$	$\frac{-4-\sqrt{7}}{3}$	$\frac{-4+\sqrt{7}}{3}$	$+\infty$	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$-0,9$	$-3,6$	$+\infty$	

Des valeurs de ce tableau, on déduit qu'il existe une unique solution à l'équation $f(t) = 0$, supérieure à $\frac{-4 + \sqrt{7}}{3}$.

À l'aide de la calculatrice (par exemple), on arrive à une valeur approchée : $t_0 \approx 0,547$.

Avec cette valeur, les plans sont ainsi :



Corrigé de l'exercice 7.4 page 312

Notons $I(x_I; y_I; z_I)$ l'éventuel point d'intersection de la droite et du plan.

Alors,

$$I \in (d) \iff \begin{cases} x_I = 1 + 2t \\ y_I = -2 + t \\ z_I = -2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

et :

$$\begin{aligned} I \in (\mathcal{P}) &\iff 2x_I - 3y_I + z_I = 2 \\ &\iff 2(1 + 2t) - 3(-2 + t) + (-2 + 3t) = 2 \\ &\iff 2 + 4t + 6 - 3t - 2 + 3t = 2 \\ &\iff 4t = -4 \\ &\iff t = -1. \end{aligned}$$

En remplaçant t par -1 dans le système (1), on a :

$$I \in (d) \iff \begin{cases} x_I = -1 \\ y_I = -3 \\ z_I = -5 \end{cases}$$

Ainsi, $I(-1; -3; -5)$.

Corrigé de l'exercice 7.5 page 313

- 1 Notons (\mathcal{Q}) le plan passant par le point $A(1; -2; 3)$ et parallèle au plan (\mathcal{P}) d'équation : $2x + 5y - 3z = 7$.

Son équation cartésienne vérifie :

$$ax_A + by_B + cz_B + d = 0$$

soit :

$$a - 2b + 3c + d = 0. \quad (1)$$

On sait de plus que (\mathcal{Q}) est parallèle à (\mathcal{P}) donc leurs vecteurs normaux sont colinéaires :

$$\exists k \in \mathbb{R}^*, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 2k \\ b = 5k \\ c = -3k \end{cases}.$$

En remplaçant a , b et c dans l'équation (1), on a :

$$2k - 2(5k) + 3(-3k) + d = 0$$

soit $d = 17k$.

En prenant par exemple $k = 1$, on a alors :

$$(\mathcal{Q}) : 2x + 5y - 3z + 17 = 0.$$

- 2 Notons (\mathcal{Q}) le plan passant par le point $A(-1; -1; 1)$ et orthogonal au plan (\mathcal{P}) d'équation : $x + y - z = 1$.

Son équation cartésienne vérifie :

$$ax_A + by_B + cz_B + d = 0$$

soit :

$$-a - b + c + d = 0. \quad (1)$$

Les deux plans sont orthogonaux donc leurs vecteurs normaux le sont aussi :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a + b - c = 0 \iff c = a + b.$$

L'équation (1) devient alors $d = 0$.

Une équation cartésienne de (\mathcal{Q}) est donc, par exemple en prenant $a = b = 1$ et $c = a + b = 2$:

$$(\mathcal{Q}) : x + y + 2z = 0$$

Corrigé de l'exercice 7.6 page 313

- 1 Les vecteurs $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et appartiennent au plan (AEJI).

De plus, $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \times 1 + 0 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times 0 = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-\frac{1}{2}) + 0 \times 0 = 0$.

Ainsi, \vec{u} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AI} ; donc \vec{u} est normal au plan (AEJI).

- 2 L'équation cartésienne du plan (AEJI) est de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. Ainsi :

$$(AEJI) : x - \frac{1}{2}y + d = 0$$

De plus, $A \in (AEJI)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation d'où : $d = 0$. On a alors :

$$(AEJI) : x - \frac{1}{2}y = 0$$

- 3 Le volume de la pyramide AEJIK est :

$$V = \mathcal{B} \times h$$

où \mathcal{B} est l'aire de la base (ici AEJI) et h la hauteur (celle que nous avons calculé dans la question précédente). Donc :

$$V = AE \times AI \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ainsi :

$$V = \frac{1}{2}$$

- 4 Nous savons qu'une représentation paramétrique de \mathcal{D} est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_K + at \\ y = y_K + bt \\ z = z_K + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

où $K(x_K, y_K, z_K) \in \mathcal{D}$ et où $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D} . Ainsi :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Nommons H le pied de la hauteur de la pyramide AEJIK issue du sommet K. Alors, $H \in \mathcal{D}$ et $H \in (AEJI)$, ce qui se traduit de façon analytique de la façon suivante (on remplace x par t et y par $1 - \frac{1}{2}t$ dans l'équation cartésienne de (AEJI)) :

$$t - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}t \right) = 0$$

On trouve alors :

$$t = \frac{2}{5}$$

D'où :

$$\begin{cases} x_H = \frac{2}{5} \\ y_H = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \\ z_H = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$H\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{2}\right)$$

Corrigé de l'exercice 7.7 page 313

- 1** A(-1;3;1) et B(3;5;-3). Le milieu I de [AB] a donc pour coordonnées :

$$I\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{3+5}{2}; \frac{1+(-3)}{2}\right), \text{ soit } I(1;4;-1)$$

- 2** Une équation cartésienne du plan médiateur (\mathcal{P}) est de la forme :

$$(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$$

où $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. Or, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est normal au plan médiateur, donc :

$$(\mathcal{P}) : 4x + 2y - 4z + d = 0.$$

De plus, $I \in (\mathcal{P})$ donc :

$$4x_I + 2y_I - 4z_I + d = 0 \iff d = -16.$$

Finalement,

$$(\mathcal{P}) : 4x + 2y - 4z - 16 = 0$$

que l'on peut aussi écrire (en divisant tous les coefficients par 2) :

$$(\mathcal{P}) : 2x + y - 2z - 8 = 0$$

- 3 a.** Soit $M(x; y; z) \in (\mathcal{P})$. Alors, d'après l'équation cartésienne donnée précédemment :

$$y = 2z - 2x + 8.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad AM^2 &= (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 \\ &= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 \\ &= (x + 1)^2 + (2z - 2x + 8 - 3)^2 + (z - 1)^2 \\ &= (x + 1)^2 + (2z - 2x + 5)^2 + (z - 1)^2 \\ &= 5x^2 + 5z^2 - 18x + 18z - 8xz + 27. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad BM^2 &= (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 \\
 &= (x-3)^2 + (2z-2x+8-5)^2 + (z+3)^2 \\
 &= (x-3)^2 + (2z-2x+3)^2 + (z+3)^2 \\
 &= 5x^2 + 5z^2 - 18x + 18z - 8xz + 27.
 \end{aligned}$$

On a alors $AM^2 = BM^2$, donc $AM = BM$.

b. Supposons que $MA = MB$. Alors,

$$\begin{aligned}
 MA^2 = MB^2 &\iff MA^2 - MB^2 = 0 \\
 &\iff \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0 \\
 &\iff (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \\
 &\iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) = 0 \\
 &\iff 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{MI} et \overrightarrow{BA} sont orthogonaux. Or, (\mathcal{P}) est le plan passant par I est orthogonal à \overrightarrow{AB} donc (MI) est incluse dans (\mathcal{P}) . M appartient donc à (\mathcal{P}) .

Remarque 55

Des deux dernières questions, on peut conclure l'équivalence :

$$M \in (\mathcal{P}) \text{ plan médiateur de } [AB] \iff MA = MB.$$

Autrement dit, le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

Corrigé de l'exercice 7.8 page 314

1 **a.** D'après sa représentation paramétrique, un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} est :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b. Remplaçons x , y et z par les coordonnées de B dans la représentation paramétrique de \mathcal{D} :

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 3 = 2 - t \\ 0 = 2 + 2t \end{cases}$$

On trouve avec $t = -1$. Il existe donc bien un paramètre t qui donne les coordonnées de B, donc $B \in \mathcal{D}$.

c. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 3 - 1 \\ 0 - 3 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 = -2 - 6 = -8.$$

- 2 a. Par construction, $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de \mathcal{D} , est un vecteur normal au plan \mathcal{P} . Donc, d'après le cours, une équation cartésienne de \mathcal{P} est :

$$2x - y + 2z + d = 0 \quad , \quad d \in \mathbb{R}.$$

De plus, $A \in \mathcal{P}$ donc ses coordonnées vérifient cette équation :

$$2x_A - y_A + 2z_A + d = 0 \iff -2 - 1 + 6 + d = 0 \iff d = -3.$$

Finalement, une équation cartésienne de \mathcal{P} est bien :

$$2x - y + 2z - 3 = 0.$$

- b. $H \in \mathcal{D}$ donc $H(1 + 2t; 2 - t; 2 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

De plus, $H \in \mathcal{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne précédente :

$$2x_H - y_H + 2z_H - 3 = 0 \iff 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0 \iff t = -\frac{1}{9}.$$

Par conséquent, $H(1 - \frac{2}{9}; 2 + \frac{1}{9}; 2 - \frac{2}{9})$, soit $H(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9})$.

c. $AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{9} + 1\right)^2 + \left(\frac{19}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 3\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{53}{9}}$$

$$\boxed{AH = \frac{\sqrt{53}}{3}}$$

- 3 a. H et B sont deux points de la droite \mathcal{D} ; par conséquent, \overrightarrow{HB} est colinéaire à tout vecteur directeur de \mathcal{D} , donc à \vec{u} .

Ainsi, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. $\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \iff \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k\vec{u} \cdot \vec{u}$

$$\iff \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k\vec{u}^2$$

$$\iff \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k\|\vec{u}\|^2$$

$$\iff k = \frac{\overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

c. À la question 1.c, nous avons trouvé : $\overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = -8$. Ainsi,

$$k = \frac{-8}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{-8}{9}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HB} = k\vec{u} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ 0 - z_H \end{pmatrix} = -\frac{8}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_H &= -\frac{16}{9} \\ 3 - y_H &= \frac{8}{9} \\ -z_H &= -\frac{16}{9} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_H &= \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} \\ y_H &= 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9} \\ z_H &= \frac{16}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

- 4 Dans le tétraèdre ABCH, on peut considérer que ACH est une base et que la hauteur relative est (BH) car B et H sont sur \mathcal{D} et que \mathcal{D} est orthogonale à \mathcal{P} , donc au plan (AHC).

Ainsi, si \mathcal{B} représente l'aire du triangle ACH et \mathcal{V} le volume du tétraèdre ABCH,

$$\mathcal{B} = \frac{3\mathcal{V}}{BH}.$$

Or, $\overrightarrow{BH} \left(\frac{7}{9} + 1, \frac{19}{9} - 3, \frac{16}{9} \right)$, soit $\overrightarrow{BH} \left(\frac{16}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{16}{9} \right)$.

Ainsi, $BH = \sqrt{2 \times \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{8}{3}$.

D'où :

$$\mathcal{B} = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = 1.$$

L'aire de ACH est donc égale à 1 unité d'aire.

Corrigé de l'exercice 7.9 page 315

- 1 Par lectures graphiques, on a :

- $\overrightarrow{AE} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$ donc E(0;0;1);
- $\overrightarrow{AF} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$ donc F(1;0;1);
- $\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$ donc G(1;1;1);
- $\overrightarrow{AK} = 1\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ donc K(1; $\frac{1}{2}$;0).

- 2 \vec{n} est orthogonal au plan (EGK) si et seulement si il l'est à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

- $\vec{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 1 \times (-2) + 0 \times 1 = 2 - 2 = 0;$
- $\vec{KG} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times 2 + \frac{1}{2} \times (-2) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0.$

Ainsi, \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \vec{EG} et \vec{KG} , non colinéaires donc formant une base du plan (EKG). Il est donc normal à ce dernier plan.

3 D'après la question précédente, et d'après le cours, une équation du plan (EKG) est :

$$2x - 2y + 1z + d = 0 \quad , \quad d \in \mathbb{R}$$

car $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à ce plan.

De plus, $E \in (EKG)$ ses coordonnées doivent vérifier l'équation :

$$2x_E - 2y_E + z_E + d = 0 \iff d = -1.$$

Finalement, une équation cartésienne du plan (EKG) est donc bien :

$$2x - 2y + z - 1 = 0.$$

4 Une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EKG) passant par F est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_F + at \\ y = y_F + bt \\ z = z_F + ct \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

où $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) .

Comme (d) est orthogonale au plan (EKG), un vecteur directeur est aussi un vecteur normal au plan. On peut donc prendre $\vec{u} = \vec{n}$.

Finalement, on trouve :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

5 Le point L est l'intersection de (d) et du plan (EKG).

- $L \in (d) \iff L(1 + 2t; -2t; 1 + t), t \in \mathbb{R}.$
- $L \in (EKG) \iff 2(1 + 2t) - 2(-2t) + (1 + t) - 1 = 0 \iff t = -\frac{2}{9}.$

Par conséquent, $L\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right).$

6 $\vec{LF} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{LF} \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$LF = \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{2}{3}.$$

7 L'aire du triangle EFG est égale à :

$$\mathcal{B} = \frac{EF \times FG}{2} = \frac{1}{2}.$$

La distance qui sépare le point K du plan (EFG) est égale à BF, donc à 1.

Ainsi, le volume du tétraèdre EFGK est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

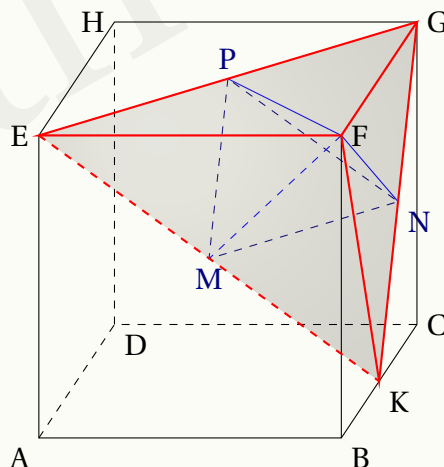
8 Le volume du tétraèdre EFGK est aussi égal à :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B}_{\text{EGK}} \times FL.$$

Donc,

$$\mathcal{B}_{\text{EGK}} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

9 Plaçons les nouveaux points pour mieux y voir :



Ainsi, PMN est une réduction de EGK de facteur $\frac{1}{2}$ donc :

$$\mathcal{B}_{\text{PMN}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \mathcal{B}_{\text{EGK}}$$

et donc le volume du tétraèdre PMNF est :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}.$$

Corrigé de l'exercice 7.10 page 316

Pour cet exercice, nous allons nous placer dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1 $\vec{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus, $\vec{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan (BDE).

$$\vec{GA} \cdot \vec{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0;$$

$$\vec{AG} \cdot \vec{BF} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 0.$$

Ainsi, \vec{AG} est orthogonal aux vecteurs d'une base du plan (BDE); il est donc orthogonal à tous vecteurs de ce plan.

(AG) est donc orthogonale au plan (BDE).

2 $\vec{AG} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{GH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc :

$$\vec{GA} \cdot \vec{GH} = (-1) \times (-1) + (-1) \times 0 + (-1) \times 0 = 1.$$

De plus,

$$\underbrace{\vec{GA} \cdot \vec{GH}}_{=1} = GA \times GH \times \cos(\alpha) = \sqrt{3} \times 1 \times \cos(\alpha).$$

Ainsi,

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 55^\circ.$$

Corrigé de l'exercice 7.11 page 316

Une sphère est tangente à un plan si son rayon est égal à la distance qui sépare son centre et le plan.

La distance du point A au plan (\mathcal{P}) est :

$$\begin{aligned} d(A; \mathcal{P}) &= \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|-2 \times (-1) + 7 \times 2 + 3 \times (-3) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 3^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{62}}. \end{aligned}$$

Le rayon de la sphère doit donc être égal à $R = \frac{6}{\sqrt{62}}$, donc une équation cartésienne de la sphère est :

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{18}{31}$$

Corrigé de l'exercice 7.12 page 317

Il faut ici résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

La méthode consiste alors à exprimer deux inconnues en fonction de la troisième. Nous allons par exemple exprimer x et y en fonction de z . On écrit alors le système comme suit :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 + z \\ -x + 3y = 2 - z \end{cases} \quad (1)$$

et on le résout comme si z était un paramètre, et non une inconnue.

On multiplie la deuxième équation par 2 :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 + z \\ -2x + 6y = 4 - 2z \end{cases}$$

et on ajoute les deux équations :

$$5y = 5 - z \iff y = 1 - \frac{1}{5}z.$$

On reprend le système (1) et cette fois-ci, on multiplie la première équation par 3 (pour éliminer les y en additionnant les équations) :

$$\begin{cases} 6x - 3y = 3 + 3z \\ -x + 3y = 2 - z \end{cases}$$

ce qui donne, en ajoutant les équations :

$$5x = 5 + 2z \iff x = 1 + \frac{2}{5}z.$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{5}z \\ y = 1 - \frac{1}{5}z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En posant par exemple $z = 5t$, on a :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

C'est une représentation paramétrique de la droite d'intersection des deux plans.

Corrigé de l'exercice 7.13 page 317

Nous savons que si deux plans se coupent, alors leur intersection est une droite. Il nous faut donc trouver une représentation paramétrique de cette droite pour chacune des questions.

$$\begin{aligned} 1 \quad \begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ 8y + 7z = 10 \quad (\text{L}_2) \leftarrow (\text{L}_1) + 3(\text{L}_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{11}{4} - \frac{5}{8}z \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) est :

$$\begin{cases} x = \frac{11}{4} - \frac{5}{8}t \\ y = \frac{5}{4} - \frac{7}{8}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 5y + z = -2 \quad (\text{L}_2) \leftarrow 2(\text{L}_1) - (\text{L}_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = -2 - 5y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3 + 4y \\ z = -2 - 5y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) est :

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = -2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 4 \\ y + 6z = 2 \quad (\text{L}_2) \leftarrow (\text{L}_1) - (\text{L}_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 4 - \frac{15}{2}z \\ y = 2 - 6z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de l'intersection de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) est :

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{15}{2}t \\ y = 2 - 6t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 7.14 page 317

1 (\mathcal{P}) : $-x + y + z = 2$ et (\mathcal{Q}) : $4x - 3y + 5z = 1$.

On considère le système :

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 2 - z \\ 4x - 3y = 1 - 5z \end{cases} \quad (1)$$

On multiplie par 4 la première équation :

$$\begin{cases} -4x + 4y = 8 - 4z \\ 4x - 3y = 1 - 5z \end{cases}$$

et on ajoute les deux équations : $y = 9 - 9z$.

On multiplie par 3 la première équation dans le système (1) :

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 - 3z \\ 4x - 3y = 1 - 5z \end{cases}$$

et on ajoute les deux équations : $x = 7 - 8z$.

On arrive finalement à :

$$\begin{cases} x = 7 - 8z \\ y = 9 - 9z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

soit, en posant $z = t$:

$$\begin{cases} x = 7 - 8t \\ y = 9 - 9t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2 (\mathcal{P}) : $2x - y + 3z = 1$ et (\mathcal{Q}) : $-3x + 2y - 7z = 1$.

On considère le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -3x + 2y - 7z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 1 - 3z \\ -3x + 2y = 1 + 7z \end{cases} \quad (1)$$

On multiplie par 2 la première équation :

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 - 6z \\ -3x + 2y = 1 + 7z \end{cases}$$

et on ajoute les deux équations : $x = 3 + z$.

On multiplie par 3 la première équation et par 2 la seconde équation dans le système (1) :

$$\begin{cases} 6x - 3y = 3 - 9z \\ -6x + 4y = 2 + 14z \end{cases}$$

et on ajoute les deux équations : $y = 5 + 5z$.

On arrive finalement à :

$$\begin{cases} x = 3 + z \\ y = 5 + 5z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

soit, en posant $z = t$:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 5t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Corrigé de l'exercice 7.15 page 317

- 1** Nous savons que si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (\mathcal{P}) , alors une équation cartésienne du plan sera :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Nous savons ici que $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à (\mathcal{P}) donc une équation de ce plan est :

$$2x + y - z + d = 0$$

Or, $B \in (\mathcal{P})$ donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2x_B + y_B - z_B + d = 0$$

Soit :

$$6 + 2 + d = 0$$

Donc :

$$d = -8$$

Ainsi :

$$(\mathcal{P}) : 2x + y - z - 8 = 0$$

- 2** Ici, la question est large ... En effet, l'énoncé ne nous dit pas quel type d'équation il faut établir : une équation cartésienne, paramétrique ou polaire ? On suppose qu'il s'agit ici d'une équation cartésienne.

Or, une équation cartésienne d'une sphère de centre $(x_A; y_A; z_A)$ et de rayon r est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$$

On a :

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Ainsi :

$$(\mathcal{S}) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{6})^2$$

Soit :

$$(\mathcal{S}) : x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 6$$

Ou encore :

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) = 3$$

- 3** a. La distance du point A au plan (\mathcal{Q}) étant égale au rayon de la sphère (\mathcal{S}) , on peut affirmer que le plan (\mathcal{Q}) est tangent à (\mathcal{S}) .
- b. La distance du point A au plan (\mathcal{P}) étant égale au rayon de la sphère (\mathcal{S}) , on peut affirmer que le plan (\mathcal{P}) est tangent à (\mathcal{S}) .
- 4** a. Nous venons de montrer que les plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) étaient tous les deux tangents à la sphère (\mathcal{S}) . Ainsi, s'ils sont parallèles, les points en lesquels ils sont tangents à (\mathcal{S}) , c'est-à-dire C et un autre point, que nous nommerons $C'(a; b; c)$, devraient être diamétralement opposés.

Ainsi :

$$\begin{cases} x_A = \frac{x_C + a}{2} \\ y_A = \frac{y_C + b}{2} \\ z_A = \frac{z_C + c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{a}{2} \\ 1 = \frac{2+b}{2} \\ 1 = \frac{-1+c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

Si $C' \in (\mathcal{P})$ alors ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (\mathcal{P}) ; or :

$$2 \times 2 + 0 - 3 - 8 = -7 \neq 0$$

Ce qui signifie que $C' \notin (\mathcal{P})$. Ainsi, (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) ne sont pas parallèles; ils sont donc sécants.

- b. (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) sont sécants donc, si $M(x; y; z) \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{Q})$, alors :

$$\begin{cases} 2x + y - z - 8 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Donc, en ajoutant les deux lignes pour obtenir la nouvelle seconde ligne :

$$\begin{cases} 2x + y - z - 8 = 0 \\ 3x + z - 4 = 0 \end{cases} ,$$

soit :

$$\begin{cases} 2x + y - z - 8 = 0 \\ z = 4 - 3x \end{cases} .$$

Ainsi :

$$\begin{cases} 2x + y - (4 - 3x) - 8 = 0 \\ z = 4 - 3x \end{cases} ,$$

d'où :

$$\begin{cases} 5x + y - 12 = 0 \\ z = 4 - 3x \end{cases} .$$

Finalement, on a :

$$\begin{cases} y = 12 - 5x \\ z = 4 - 3x \end{cases} .$$

En posant $t = x$, on a alors :

$$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

c. Injectons les coordonnées du point A dans l'équation paramétrique de (\mathcal{D}) :

$$\begin{cases} 1 = t \\ 1 = 12 - 5t \\ 1 = 4 - 3t \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution; en effet, la première ligne nous dit que $t = 1$. Or, si nous remplaçons t par 1 dans la seconde ligne, cela nous donne l'égalité : « $1=7$ », ce qui est faux.

Par conséquent, A n'appartient pas à (\mathcal{D}) .

d. Montrons que le plan (\mathcal{R}) est le plan médiateur de $[BC]$.

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; posons $I \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}; \frac{z_B + z_C}{2} \right) = \left(\frac{3+0}{2}; \frac{2+2}{2}; \frac{0-1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}; 2; -\frac{1}{2} \right)$ le milieu de $[BC]$.

Soit $M(x; y; z)$ un point du plan médiateur de $[BC]$. Alors :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Soit :

$$-3 \left(x - \frac{3}{2} \right) + 0 \times (y - 2) - 1 \times \left(z + \frac{1}{2} \right) = 0$$

Soit :

$$-3x - z + 4 = 0$$

Les coordonnées du point A vérifient cette dernière équation; en effet, $-3 \times 1 - 1 + 4 = 0$. Donc A appartient au plan médiateur de $[BC]$.

De plus, n'importe quel point de (\mathcal{D}) , de coordonnées $(t; 12 - 5t; 4 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, appartient aussi à ce plan; en effet, $-3t - (4 - 3t) + 4 = 0$.

Ainsi, le plan défini par le point A et par la droite (\mathcal{D}) , c'est-à-dire (\mathcal{R}) , est le plan médiateur de $[BC]$. Donc tout point de (\mathcal{R}) est équidistant des points B et C.

Combinatoire et dénombrements

Plan du chapitre

I	Principes de base	338
1	Cardinal d'un ensemble	338
2	Principe additif	338
3	Principe multiplicatif	338
II	Dénombrement	339
1	Factorielle	339
2	Permutation	339
3	p-liste	340
4	Arrangement	340
5	Combinaison	341
	Enoncés	343
	Corrigés des exercices	351

La *combinatoire* est la partie des mathématiques qui permet d'étudier les diverses configurations de sous-ensembles d'éléments d'un ensemble fini.

Les *dénombrements* permettent d'énumérer le nombre de configurations possibles de ces sous-ensembles.

I - Principes de base

I . 1 - Cardinal d'un ensemble

Définition 36

Le *cardinal* d'un ensemble A est le nombre d'éléments contenus dans A .
On le note :

$$\text{Card } A.$$

Exemple 41

Si A désigne l'ensemble des cartes qui constituent un jeu de 32 cartes alors $\text{Card } A = 32$.

Définition 37

On dit qu'un ensemble A est *fini* si $\text{Card } A$ n'est pas infini.

I . 2 - Principe additif

Propriété 47

Soient A et B deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire n'ayant aucun élément commun, tels que $\text{Card } A = n$ et $\text{Card } B = m$. Alors, le nombre de façons de prendre un élément dans A ou un élément dans B est égal à $n + m$.

Exemple 42

Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.
Je peux donc y choisir un livre de $20 + 10 = 30$ façons différentes.

I . 3 - Principe multiplicatif

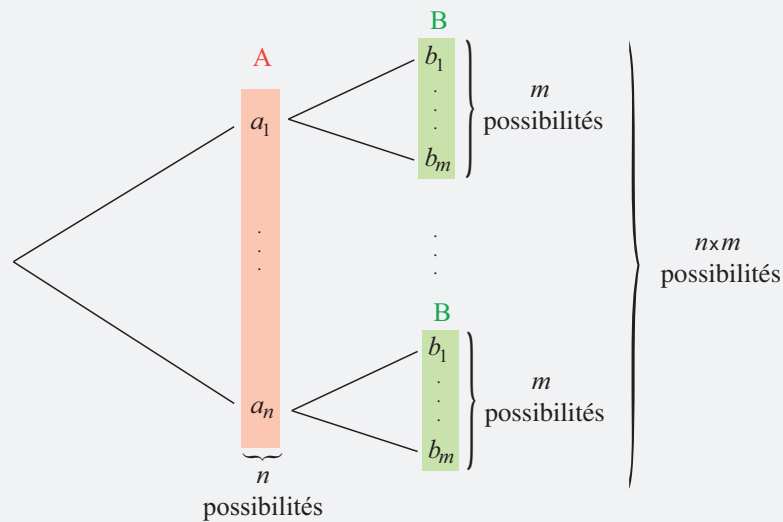
Propriété 48

Soient A et B deux ensembles finis tels que $\text{Card } A = n$ et $\text{Card } B = m$.
Le nombre de façons de prendre un élément dans A et un élément dans B est égal à $n \times m$.

Exemple 43

Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.
Je souhaite prendre un livre de chaque sorte. Il y a donc $20 \times 10 = 200$ possibilités.

Le principe multiplicatif peut se représenter sous la forme d'un *arbre des possibilités* :



On peut aussi considérer un tableau à n colonnes et m lignes : il comporte $n \times m$ cellules.

II - Dénombrement

II . 1 - Factorielle

Définition 38

La factorielle d'un nombre entier n est le nombre :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Exemple 44

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

II . 2 - Permutation

Définition 39

Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.

Une *permutation* de E est un ensemble composé des n éléments de E .

Exemple 45

Si $E = \{1; 2; 3\}$ alors $F = \{2; 3; 1\}$ est une permutation de E .

Remarque 56

E est une permutation de E .

Propriété 49

Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

II . 3 - p-liste

Définition 40

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$, et soit E un ensemble à n éléments.

Une *p-liste* de E est une liste ordonnée de p éléments pris parmi les n éléments de E .

Exemple 46

Un digicode à 4 chiffres est une 4-liste de l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. La 4-liste $\{1; 1; 1; 0\}$ est différente de la 4-liste $\{0; 1; 1; 1\}$.

Propriété 50

Le nombre de p -listes prises dans un ensemble à n éléments est égal à n^p .

Exemple 47

Il y a $10^4 = 10\,000$ possibilités pour un digicode composé de 4 chiffres.

II . 4 - Arrangement

Définition 41

Soit n un entier naturel non nul, et soit E un ensemble à n éléments.

Un *arrangement* de p éléments de E est une p -liste d'éléments distincts.

Exemple 48

Le podium d'une course à 20 participants est un arrangement constitué du premier arrivé, puis du deuxième et enfin du troisième.

Propriété 51

Le nombre d'arrangements de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1).$$

Exemple 49

$$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840.$$

Il y a donc 6 840 podiums possibles pour une course à 20 participants.

II . 5 - Combinaison

Définition 42

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$, et soit E un ensemble à n éléments.

Une *combinaison* de p éléments de E est un ensemble non ordonné à p éléments distincts pris parmi les n éléments de E .

Exemple 50

Sur un jeu de 32 cartes, une main de 5 cartes est une combinaison.

Propriété 52

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p!}.$$

Exemple 51

$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times \cdots \times (32-5+1)}{5!} = 201\,376$ donc il y a 201 376 mains de 5 cartes possibles sur un jeu de 32 cartes.

Propriété 53

Pour tous entiers naturel n et p tels que $p \leq n$ et $n \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Propriété 54 (relation de Pascal)

Pour tous entiers naturel n et p tels que $p \leq n$ et $n \neq 0$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

De la propriété 54, on déduit un tableau regroupant les différentes valeurs de $\binom{n}{p}$ suivant les valeurs de n et p : c'est le *triangle de Pascal*.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	$\overset{+}{\rightarrow} 3$	1			
4	1	4	$\downarrow 6$	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Début du triangle de Pascal

Pour construire et afficher un triangle de Pascal, on peut utiliser le programme Python suivant :

Code Python 8-24

```

1 def trianglePascal(n):
2     T = [[0] * (n+1) for p in range(n+1)]
3     for n in range(n+1):
4         if n == 0:
5             T[n][0] = 1
6         else:
7             for k in range(n+1):
8                 if k == 0:
9                     T[n][0] = 1
10                else:
11                    T[n][k] = T[n-1][k-1] + T[n-1][k]
12     return T
13
14
15 T = trianglePascal(15)
16
17 for i in range(len(T)):
18     print(T[i][:i+1])

```

Pour résumer, on retiendra le tableau suivant :

	Ordre	Modèle	Exemples	Formules
Permutation	oui	tirage sans remise	anagramme	$n!$
p -liste	oui	tirage avec remise	digicode	n^p
Arrangement A_n^p	oui	tirage sans remise	podium d'une course	$\frac{n!}{(n-p)!}$
Combinaison $\binom{n}{p}$	non	tirage sans remise	main dans un jeu de cartes	$\frac{n!}{p!(n-p)!}$

Principes additif et multiplicatif

Exercice 8.1 (l'imprimeur)



Un imprimeur doit imprimer des calendriers pour une même société tous les ans. Afin de réduire ses coûts, il décide de créer tous les modèles possibles la même année.

- 1 Combien de pages différentes doit-il confectionner pour le mois de janvier?
- 2 Combien de pages différentes doit-il confectionner pour le mois de février?

Solution page 351

Exercice 8.2 (au restaurant)



Un restaurant propose à sa carte un menu où il faut choisir une entrée, un plat et un dessert. Sont proposées trois entrées, six plats et 2 desserts. Combien de repas différents peut-on constituer?

Solution page 351

Exercice 8.3 (dans la bibliothèque)



Dans la bibliothèque de Gaspard, il y a 20 polars, 7 livres sur l'art et 5 livres sur les routards. Il souhaite ne prendre que deux livres de catégories différentes. Combien de possibilités a-t-il?

Solution page 351

Exercice 8.4 (coordonnées aléatoires)



Voici un programme Python qui permet de choisir au hasard les coordonnées d'un point dans le plan muni d'un repère :

Code Python 8-25

```
1 from random import randint
2
3 x = randint(-10,10)
4 y = randint(-10,10)
```

Combien de coordonnées peut-on obtenir?

Remarque 57

La fonction `randint(a,b)` permet d'obtenir un nombre entier aléatoire compris entre a et b inclus.

Solution page 351

Exercice 8.5 (nombres à 6 chiffres)



- 1 Combien y a-t-il de nombres entiers à 6 chiffres?
- 2 Combien de nombres entiers à 6 chiffres comportent des chiffres tous distincts?
- 3 Combien existe-t-il de nombres entiers à 6 chiffres dont les chiffres consécutifs sont de parité différente?

Solution page 351

Arrangements, permutations, combinaisons et p-listes

Exercice 8.6 (QCM)



Dans chacune des questions suivantes, quatre propositions de réponses sont faites, dont une seule est exacte. Laquelle?

- 1 Ludwig a pris quarante-cinq photos de son voyage en Allemagne et veut en imprimer cinq pour les mettre dans un cadre. Le nombre de possibilités de cadres pouvant être obtenu est :

a. 5^{45} b. 45^5 c. $\binom{45}{5}$ d. A_{45}^5
- 2 D'une urne contenant cinquante boules numérotées de 1 et 50, on en extrait dix sans les remettre. On note les numéros ainsi obtenus sur un papier de sorte à avoir une suite. Le nombre de suites possibles est :

a. 10^{50} b. 50^{10} c. $\binom{50}{10}$ d. A_{50}^{10}
- 3 Dans le jeu télévisé « Des chiffres et des lettres », on demande huit fois aux candidats de choisir au hasard s'il veulent une voyelle ou une consonne. Le nombre de « mots » possibles à l'issue de ces huit choix est :

a. $26!$ b. 26^8 c. $\binom{26}{8}$ d. A_{26}^8
- 4 Le nombre d'anagrammes du mot « STYLO » est :

a. $5!$ b. 5^5 c. $\binom{26}{5}$ d. A_{26}^5

Solution page 352

Exercice 8.7 (nombres de nombres binaires)



Un *octet* est une suite de huit chiffres (appelés *bits*), chacun pris dans l'ensemble $\{0;1\}$, comme par exemple : 01101001.
Combien y a-t-il d'octets différents?

Solution page 353

Exercice 8.8 (mots de passe)



Sur une plateforme numérique interne d'une société, on impose aux salariés la composition de leur mot de passe : il faut que ce dernier comporte :

- une lettre non accentuée prise dans l'alphabet latin (comportant 26 lettres), en majuscules ou minuscules;
- un symbole parmi : « \$ », « # », « & », « ? » et « ! »;
- un chiffre compris entre 0 et 9 (inclus).

Le mot de passe est donc composé de trois caractères (comme : « Z#0 »).
Combien de mots de passe peuvent ainsi être créés?

Solution page 353

Exercice 8.9 (tournoi sportif)



Lors d'un tournoi sportif, 12 équipes doivent affronter une fois les 11 autres.
Combien de matches doit-on organiser?

Solution page 353

Exercice 8.10 (mains d'un jeu de cartes)



Un joueur dispose de cinq cartes prises parmi 52. On dit que c'est une *main* de cinq cartes.

- 1 Combien de mains existent-il?
- 2 Combien de mains ayant exactement un Roi existent-t-il?
- 3 Combien de mains ayant exactement 2 Piques existent-il?
- 4 Combien de mains ayant exactement 2 Piques et 1 Cœur existent-il?

Solution page 353

Exercice 8.11 (s'asseoir sur les chaises)



Quatre garçons et trois filles doivent s'asseoir en ligne sur sept chaises.

- 1 De combien de façons peuvent-ils s'asseoir?
- 2 Même question si les garçons et les filles doivent rester groupés.
- 3 Même question si les garçons et les filles doivent être disposés de façon alternée.

Solution page 354

Exercice 8.12 (le congrès des gens polis)



Chaque année, l'association des gens polis de Paris organise un congrès et comme chaque année, tous les participants doivent se serrer la main qu'une seule fois.
Cette année, il y a 50 participants.
Combien de poignées de mains vont être données?

Solution page 354

Exercice 8.13 (le clavier à neuf touches)



Un clavier comporte neuf touches : 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B et C.
Un *code* obtenu à l'aide de ce clavier est une suite d'une lettre et de trois chiffres.

- 1 Combien de codes différents peut-on former?
- 2 Combien y a-t-il de codes sans le chiffre « 1 »?
- 3 Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre « 1 »?
- 4 Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts?
- 5 Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques?

Solution page 355

Exercice 8.14 (nombre de mots)



Un programme permet de générer un mot de 1 à 10 lettres en choisissant aléatoirement chacune des lettres dans un alphabet en comportant 26.

Déterminer un ordre de grandeur du nombre de mots possibles.

Solution page 355

Exercice 8.15 (réponses possibles à un QCM)



Un QCM est composé de 20 questions. Chacune d'elles propose 4 réponses possibles, dont une seule est correcte.

Un-e élève répond au hasard à toutes les questions.

- 1 Combien y a-t-il de façons de répondre à ce QCM?
- 2 Combien y a-t-il de possibilités où exactement 5 réponses sont correctes?
- 3 Combien y a-t-il de possibilités où au moins 10 réponses sont correctes?
- 4 Quelle est alors la probabilité d'avoir au moins 10 bonnes réponses en répondant au hasard à chacune des questions de ce QCM?

Solution page 356

Exercice 8.16 (les groupes d'échecs)



Roméo et Juliette sont dans une équipe d'échecs composée de 15 personnes (dont elles).
Pour participer à un grand concours, un groupe de 6 personnes doit être formé.

- 1 Combien de groupes différents peut-on former?
- 2 Combien de groupes contenant Roméo et Juliette peut-on former?
- 3 Combien de groupes ne contenant que Roméo ou que Juliette peut-on former?

Solution page 356

Exercice 8.17 (le jeu du Tarot)



Un jeu de tarot contient 78 cartes :

- 21 atouts,
- la carte que l'on appelle l'*excuse*,
- 14 cartes de chacune des 4 couleurs (cœur, pique, trèfle et carreau).

- 1 Combien de tirages simultanés de six cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant deux atouts et quatre trèfles?
- 2 Combien de tirages simultanés de six cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant exactement un atout et au moins trois as?

Solution page 357

Exercice 8.18 (anagrammes)



- 1 Combien d'anagrammes y a-t-il au mot « ABYME »?
- 2 Combien d'anagrammes différentes y a-t-il au mot « NAPPE »?
- 3 Combien d'anagrammes différentes y a-t-il au mot « KAYAK »?
- 4 Combien d'anagrammes différentes y a-t-il au mot « UBUESQUE »?

Solution page 357

Exercice 8.19 (nombre d'atomes)



On estime à 10^{79} le nombre d'atomes dans l'Univers visible.

Combien de cartes différentes devrait avoir un jeu pour que le nombre de permutations possibles dépasse cette valeur? *Conseil* : n'ayez pas peur de prendre des initiatives!

Solution page 358

Exercice 8.20 (constituer des groupes)



- 1 De combien de façons peut-on partager 12 personnes en trois groupes, un groupe de 2 et deux groupes de 5?
- 2 Même question avec trois groupes de 4 personnes.

Solution page 359

Type baccalauréat

Cette partie s'enrichira au fil des années en fonction des sujets qui seront proposés au bac.

Exercice 8.21 (événement d'une entreprise)



Une entreprise organise un événement où 8 personnes sont invitées, dont 4 hommes et 4 femmes. On cherche à former des groupes et des équipes pour différentes activités.

Partie A : formation d'un groupe

- 1 Combien de manières différentes peut-on former un groupe de 5 personnes parmi les 8 personnes invitées, sans distinction de sexe?
- 2 Combien de manières différentes peut-on former un groupe de 5 personnes qui contient exactement 3 hommes et 2 femmes?

Partie B : ordre et sélection

Lors d'un jeu, 3 personnes sont sélectionnées parmi les 8 invitées et elles doivent être classées en fonction de leur performance.

- 1 Combien de façons différentes peut-on choisir et classer ces 3 personnes?
- 2 Dans combien de cas le classement est composé de 2 femmes et 1 homme?

Partie C : organisation d'une activité

Pour une autre activité, 3 personnes sont tirées au sort parmi les 8 invités, mais cette fois l'ordre dans lequel elles sont choisies importe.

- 1 Combien de listes ordonnées (ou p-listes) de 3 personnes peut-on former parmi les 8 invités?
- 2 Quelle est la probabilité que les 3 personnes choisies soient toutes des femmes?

Partie D : cas pratique

L'organisateur veut constituer une équipe de 4 personnes, mais avec certaines contraintes :

- L'équipe doit comporter au moins une femme.
- L'ordre n'a pas d'importance dans la composition de cette équipe.

Combien de façons différentes peut-il former une telle équipe?

Solution page 361

Exercice 8.22 (regroupement de personnes)



Les habitants d'un village sont classés en trois catégories différentes, notées A, B et C. On constitue un groupe de 12 personnes prises au hasard sur un total de 30 personnes qui ont bien voulu se réunir. Dans le groupe de 30 personnes,

- 7 sont de la catégorie A,
- 15 sont de la catégorie B,
- 8 sont de la catégorie C.

- 1 Combien de groupes de 12 personnes peut-on constituer parmi les 30 personnes qui se sont réunies?
- 2 Combien de groupes de 12 personnes peut-on former avec une seule personne de la catégorie A et cinq personnes de la catégorie C?

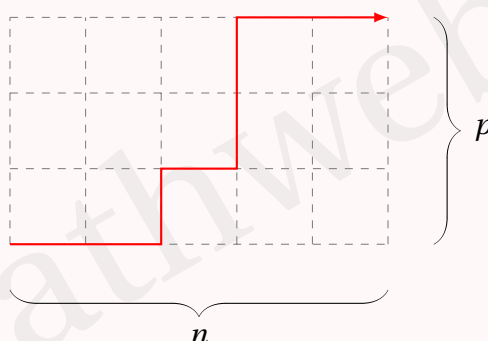
Solution page 362

Pour aller plus loin

Exercice 8.23 (une puce sur une grille)



Une puce se trouve sur une grille $n \times p$ en bas à gauche et compte rejoindre le point le plus à droite en haut en utilisant un chemin de distance minimale (donc de longueur $n + p$).



Combien y a-t-il de chemins possibles?

Solution page 363

Exercice 8.24 (alternance entre pairs et impairs)



Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire *successivement sans remise*. Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair?

Solution page 363

Exercice 8.25 (n urnes)



On dispose de n urnes numérotées de 1 à n dont chacune peut accueillir autant de boules que l'on veut.

De combien de manières peut-on y ranger p boules indiscernables?

Solution page 363

Exercice 8.26 (formule de Vandermonde)



Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

On pourra pour cela considérer $(x+1)^{2n}$ et son développement.

Solution page 364

Corrigé de l'exercice 8.1 page 343

1 Le mois de janvier peut commencer par « Lundi », « Mardi », ... ou « Dimanche », soit 7 possibilités.

L'imprimeur doit donc imprimer 7 pages différentes pour le mois de janvier.

2 Le mois de février comporte 28 ou 29 jours ; il y a donc deux types de pages à créer :

- pour les mois à 28 jours, il doit créer 7 pages différentes (car le mois peut commencer par 7 jours différents) ;
- pour les mois à 29 jours, il doit aussi créer 7 pages différentes.

Finalement, il doit créer $7 + 7 = 14$ pages différentes.

Corrigé de l'exercice 8.2 page 343

Il y a 3 entrées possibles, 6 plats possibles et 2 desserts possibles, donc il y a $3 \times 6 \times 2 = 36$ repas différents.

Corrigé de l'exercice 8.3 page 343

On utilise le principe multiplicatif pour chaque couple possible (où l'ordre ne compte pas).

- il y a $20 \times 7 = 140$ possibilités pour les couples polars/art ;
- il y a $20 \times 5 = 100$ possibilités pour les couples polars/routards ;
- il y a $7 \times 5 = 35$ possibilités pour les couples art/routards.

Ensuite, on applique le principe additif : on a le choix entre les couples polars/art *ou* polars/routards *ou* art/routards, ce qui fait : $140 + 100 + 35$ possibilités.

À retenir : le mot « OU » correspond à une addition ;
le mot « ET » correspond à une multiplication.

Corrigé de l'exercice 8.4 page 343

Ce programme choisit au hasard un nombre entier entre -10 et 10 (inclus). Il y a donc 21 possibilités pour x et pour y .

Le nombre total de possibilités est donc $21 \times 21 = 441$.

Corrigé de l'exercice 8.5 page 344

1 De 100 000 à 999 999, il y a $9 \times 10^5 = 900\,000$ nombres.

Il y a en effet 9 possibilités (de 1 à 9) pour le premier chiffre, puis 10 possibilités (de 0 à 9) pour les 5 autres chiffres.

2 On souhaite que les 6 chiffres soient tous distincts.

Il y a 9 choix possibles pour le premier chiffre (de 1 à 9), puis 9 choix possibles pour le deuxième chiffre (de 0 à 9 sans le chiffre choisi en premier), puis 8 choix possibles pour le 3^e chiffre, etc.

D'après le principe multiplicatif, il y a donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$ nombres possibles.

- 3**
- Si le premier chiffre est pair : on a le choix entre 2, 4, 6 ou 8, donc 4 possibilités.
Pour le deuxième chiffre, on a le choix entre 1, 3, 5, 7 ou 9, donc 5 possibilités.
Pour le troisième chiffre, on a le choix entre 0, 2, 4, 6 ou 8, soit 5 possibilités.
etc.
Il y a donc $4 \times 5^5 = 12500$ nombres possibles.
 - Si le premier chiffre est impair : on a le choix en 1, 3, 5, 7 et 9, donc 5 possibilités.
Pour les 5 autres chiffres, on a aussi le choix entre 5 chiffres.
Il y a donc $5^6 = 15625$ nombres possibles.
- Ainsi, en tout, il y a $12500 + 15625 = 28125$ nombres possibles.

Corrigé de l'exercice 8.6 page 344

- 1 Réponse (c).** En effet, on choisit 5 éléments d'un ensemble de 45 éléments et l'ordre ne compte pas. Le nombre de sous-groupes de 5 éléments possibles est donc $\binom{45}{5}$.
- 2 Réponse (d).** En effet, on choisit 10 éléments d'un ensemble de 50 éléments et l'ordre compte. Il s'agit donc d'une arrangement. Le nombre de sous-groupe de 10 éléments possibles est donc A_{50}^{10} .
- 3 Réponse (b).** En effet, il y a 26 possibilités pour la première lettre, puis 26 pour la deuxième, etc. jusqu'à 26 possibilités pour la huitième. Il y a donc 26^8 possibilités d'issues. Les issues sont des 8-listes.

Autre solution plus intuitive : on peut énumérer les cas suivants :

- **0 voyelle et 8 consonnes :** il y a 20^8 possibilités.
- **1 voyelle et 7 consonnes :** $6^1 \times 20^7 \times \binom{8}{1}$ (le coefficient binomial est là pour dire que l'on peut mettre la voyelle en 8 positions différentes) ;
- **2 voyelles et 6 consonnes :** $6^2 \times 20^6 \times \binom{8}{2}$;
- \vdots
- **8 voyelles et 0 consonne :** $6^8 \times 20^0 \times \binom{8}{8}$.

Le nombre total de possibilités est donc la somme :

$$\sum_{k=0}^8 6^k \times 20^{8-k} \times \binom{8}{k} = (6+20)^8$$

d'après la formule du binôme de Newton. On arrive au même résultat que précédemment, à savoir 26^8 .

- 4 Réponse (a).** Il s'agit de compter le nombre d'anagrammes d'un mot où chaque lettre n'apparaît qu'une seule fois, donc il y en a $n!$, où n est le nombre de lettres (donc ici : 5!).

Corrigé de l'exercice 8.7 page 344

Un octet est composé de huit bits et il y a deux possibilités pour un bit : 0 ou 1. Il y a donc $2^8 = 256$ octets possibles.

Corrigé de l'exercice 8.8 page 345

Il y a $2 \times 26 = 52$ lettres possibles (si on compte les majuscules et les minuscules).

Ensuite, il y a 5 possibilités pour le symbole et enfin, 10 possibilités pour le chiffre pris parmi les dix disponibles.

Il y a donc $52 \times 5 \times 10 = 2600$ possibilités pour un « mot » de trois caractères.

Il faut ensuite dénombrer les permutations du mot : il y en a $3! = 6$.

Ainsi, il y a $6 \times 2600 = 15600$ mots de passe possibles.

Corrigé de l'exercice 8.9 page 345

L'équipe 1 doit affronter 11 équipes ; il y a donc 11 matches à prévoir pour cette équipe.

L'équipe 2 doit affronter 10 équipes en plus de l'équipe 1 déjà comptée précédemment ; il y a donc 10 matches à prévoir.

L'équipe 3 doit affronter 9 équipes en plus des équipes 1 et 2 déjà comptées. Il y a donc 9 matches à prévoir en plus pour cette équipe.

Etc.

On voit alors que l'on doit prévoir $11 + 10 + 9 + \dots + 1 = \frac{11 \times 12}{2} = 66$ matches.

Autre façon de voir : il faut constituer des sous-ensembles de 2 équipes prises parmi les 12 :

il y a $\binom{12}{2} = 66$ façons de procéder.

Corrigé de l'exercice 8.10 page 345

- 1** On choisit 5 cartes parmi 52 et l'ordre ne compte pas. Il s'agit donc ici d'une combinaison.

Il y a donc $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960$ mains possibles.

- 2** On impose dans cette question le fait qu'il y ait un Roi. Comme l'ordre ne compte pas, on peut considérer que la première est un Roi (il y a 4 choix possibles car il y a 4 Rois dans un jeu de cartes). Nous voulons exactement un Roi ; par conséquent, il ne faut pas qu'il y en ait parmi les autres cartes : on choisit donc 4 cartes parmi les $52 - 4 = 48$ cartes qui ne sont pas des Rois.

Ainsi, il y a $4 \times \binom{48}{4} = 778320$ mains comportant exactement un Roi.

- 3** Nous souhaitons ici exactement deux Piques. Comme l'ordre ne compte pas, on peut considérer que ce sont les deux premières cartes. Il y a $52 \div 4 = 13$ Piques donc il y a $\binom{13}{2}$ possibilités pour ces deux cartes. Pour les 3 autres cartes, il faut les choisir parmi les $52 - 13 = 39$ cartes restantes qui ne sont pas des Piques.

Ainsi, il y a $\binom{13}{2} \times \binom{39}{3} = 712\,842$ mains possibles contenant exactement 2 Piques.

- 4 Nous souhaitons ici 2 Piques et 1 Cœur. Selon le même principe que celui utilisé dans la question précédente, on peut dire que le nombre de mains comportant exactement 2 Piques et 1 Cœur est égal à :

$$\underbrace{\binom{13}{2}}_{2 \text{ Piques}} \times \underbrace{\binom{13}{1}}_{1 \text{ Cœur}} \times \underbrace{\binom{26}{2}}_{2 \text{ autres}} = 329\,550.$$

Corrigé de l'exercice 8.11 page 345

- 1 Il y a 7 personnes à permuter donc il y a $7! = 5\,040$ façons de s'asseoir.
- 2 Il y a deux groupes (filles et garçons), donc 2 façons de les disposer. Dans le groupe des filles, il y a $3!$ façons de les disposer et dans le groupe des garçons, il y en a $4!$.
Il y a donc $2 \times 3! \times 4! = 288$ façons de s'asseoir.
- 3 Dans cette question, deux garçons ne peuvent pas être à côté, et deux filles non plus. Imaginons que les chaises soient numérotées de 1 à 7. Supposons que les garçons s'assoient sur les chaises avec un numéro impair : il y a $4!$ façons de les disposer. De même, il y a $3!$ façons de disposer les filles sur les chaises dont le numéro est pair. Au final, il y a $4! \times 3! = 144$ façons de les assoir.

Corrigé de l'exercice 8.12 page 345

Il y a deux façons de raisonner pour cet exercice.

- *Raisonnement combinatoire.*

Le nombre de poignées de mains est égal au nombre de sous-ensembles à deux éléments que l'on peut former dans un ensemble à 50 d'éléments, à savoir $\binom{50}{2} = 1\,225$.

Il y a donc 1 225 poignées de mains.

- *Analyse numérique.*

Le premier participant peut serrer la main à 49 personnes. Ensuite, le deuxième peut serrer la main aux 48 personnes restantes. Le troisième peut serrer la main aux 47 autres, etc. jusqu'aux deux dernières personnes qui ne peuvent donner qu'une poignée de mains.

Il y a donc $49 + 48 + 47 + \dots + 2 + 1$ poignées de mains possibles. Or,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il y a donc $\frac{49 \times 50}{2} = 1\,225$ poignées de mains.

Corrigé de l'exercice 8.13 page 346

- 1 Il y a 3 lettres possibles pour la première entrée (le premier caractère du code) et on a le choix entre 6 chiffres pour chacun des 3 chiffres suivants.
Il y a donc $3 \times 6^3 = 648$ codes possibles.
- 2 Il y a toujours 3 lettres possibles pour la première entrée, puis 5 choix possibles pour chacun des 3 autres entrées.
Il y a donc $3 \times 5^3 = 375$ codes sans « 1 ».
- 3 Il y a encore 3 lettres possibles pour la première entrée. Ensuite, on peut raisonner par contradiction : nous avons vu aux questions précédentes qu'il existe 375 codes sans le chiffre « 1 » et qu'il y a 648 codes possibles.
Il y a donc $648 - 375 = 273$ codes ayant au moins un chiffre « 1 ».
- 4 Il y a 3 lettres possibles pour la première entrée, et il faut compter le nombre d'arrangements de 3 éléments pris parmi 6 pour avoir un code où tous les chiffres sont distincts (l'ordre compte et on peut assimiler ceci à un tirage sans remise, ce qui justifie que c'est bien un arrangement).
Il y a donc $3 \times A_6^3 = 3 \times \frac{6!}{3!} = 360$ codes possibles où tous les chiffres sont distincts.
- 5 Ici encore, on raisonne par contradiction : le contraire de l'événement « le code comporte au moins deux chiffres identiques » et l'événement : « le code comporte des chiffres distincts ».
Il y a donc $648 - 360 = 288$ codes comportant au moins deux chiffres identiques.

Corrigé de l'exercice 8.14 page 346

- Si le mot généré ne contient qu'une lettre alors il y a 26 possibilités.
- Si le mot contient deux lettres alors il y a 26^2 possibilités.
- Si le mot contient trois lettres alors il y a 26^3 possibilités.
- \vdots
- Si le mot contient dix lettres alors il y a 26^{10} possibilités.

Ainsi, le nombre total de mots possibles est :

$$26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{10}.$$

Pour rappel, si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

La somme que nous souhaitons calculer est la somme des premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 26$ et de raison $q = 26$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{10} &= 26 \times \frac{26^{10} - 1}{26 - 1} \\ &\approx 1,5 \times 10^{14}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 8.15 page 346

1 Il y a 4 façons de répondre pour chacune des 20 questions. C'est une 20-liste sur un ensemble à 4 éléments (les 4 propositions).

Donc il y a $4^{20} = 1\,099\,511\,627\,776$ façons de répondre à ce QCM.

2 Dans cette question, il ne doit y avoir que 5 bonnes réponses ; celles-ci peuvent être en n'importe quelles positions parmi les 20 questions. Il y a donc $\binom{20}{5}$ possibilités pour ces 5 réponses correctes.

Les 15 autres questions doivent être fausses ; il y a donc 3 choix possibles pour chacune des 15 questions restantes, soit 3^{15} possibilités.

D'après le principe multiplicatif, il y a alors $\binom{20}{5} \times 3^{15}$ façons de répondre pour avoir 5 bonnes réponses.

3 D'après ce que nous avons dit à la question précédente, il y a $\binom{20}{k} \times 3^{20-k}$ façons de répondre pour avoir k bonnes réponses.

D'après le principe additif, le nombre de façons de répondre afin d'avoir au moins 10 bonnes réponses est égal à :

$$\sum_{k=10}^{20} \binom{20}{k} \times 3^{20-k} = 15\,244\,087\,642.$$

4 La probabilité d'avoir au moins 10 bonnes réponses en répondant au hasard à chacune des questions de ce QCM est donc égale à :

$$\frac{15\,244\,087\,642}{1\,099\,511\,627\,776} \approx 0,014.$$

Corrigé de l'exercice 8.16 page 346

1 On doit ici constituer un groupe de 6 personnes prises parmi les 15 ; c'est donc une combinaison. Il y a donc $\binom{15}{6} = 5\,005$ groupes possibles.

2 Roméo et Juliette doivent nécessairement être dans le groupe, donc cela revient à constituer un groupe de 4 élèves (en plus de Roméo et Juliette) parmi les $15 - 2 = 13$ élèves restant.

Il y a donc $\binom{13}{4} = 715$ groupes possibles.

3 On ne souhaite ici dénombrer que les groupes ne contenant que Roméo et les groupes ne contenant que Juliette.

Pour les groupes ne contenant que Roméo ou Juliette, il y en a $\binom{2}{1} = 2$. Il y a ensuite

$\binom{13}{5}$ façons de placer les 13 autres personnes. Il y a donc $\binom{2}{1} \times \binom{13}{5} = 2574$ groupes ne contenant que Roméo ou que Juliette.

Corrigé de l'exercice 8.17 page 347

1 Deux atouts et quatre trèfles.

Ici, nous sommes dans un schéma classique : il y a $\binom{21}{2}$ possibilités de choisir deux atouts et $\binom{14}{4}$ possibilités de choisir quatre trèfles.
il y a donc :

$$\binom{21}{2} \times \binom{14}{4} = 210210$$

tirages possibles.

2 Exactement un atout et au moins trois as.

- Nombre de tirages contenant exactement un atout et exactement 3 as :

$$\binom{21}{1} \times \binom{4}{3} \binom{78-21-4}{2} = 115752.$$

- Nombre de tirages contenant exactement un atout et exactement 4 as :

$$\binom{21}{1} \times \binom{4}{4} \binom{78-21-4}{1} = 1113.$$

Il y a donc $115752 + 1113 = 116865$ tirages correspondant à ce que l'on veut.

Corrigé de l'exercice 8.18 page 347

- 1 Le mot « ABYME » contient cinq lettres distinctes. Le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de permutations de ces cinq lettres.

Il y a donc $5! = 120$ anagrammes au mot « ABYME ».

- 2 Le mot « NAPPE » contient cinq lettres, mais elles ne sont pas toutes distinctes : il y a quatre lettres distinctes.

Ainsi, parmi les 120 permutations, il y en a qui sont identiques. Comme il y a deux lettres identiques, il y aura deux fois les mêmes permutations (par exemple « P_1P_2NAE » et « P_2P_1NAE » donnent l'anagramme « PPNAE »). Il faut donc diviser par 2 le nombre de permutations.

Il y a donc $\frac{5!}{2} = 60$ anagrammes différentes au mot « NAPPE ».

- 3 Le mot « KAYAK » comporte cinq lettres dont trois sont distinctes. Selon le même principe expliqué à la question précédente, il faut diviser les 120 permutations par 2 (car il y a deux « K ») et encore par 2 (car il y a deux « A »).

Il y a donc $\frac{5!}{2 \times 2} = 30$ anagrammes différentes au mot « KAYAK ».

- 4 Le mot « UBUESQUE » comporte huit lettres dont deux sont répétées : le « U » est présent trois fois et le « E » l'est deux fois. S'il faut diviser le nombre de permutations par 2 (car il y a deux « E »), il ne suffit pas de diviser encore par 3 car il y a trois « U ». En effet, il faut diviser par $3! = 6$.

Pour mieux comprendre ceci, on peut prendre l'exemple du mot « AAAB » qui admet théoriquement $4! = 4 \times 3 \times 2$ permutations et qui admet pour anagrammes : « AAAB », « AABA », « ABAA » et « BAAA ». Il y en a donc $4 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4!}{3!}$.

Ainsi, il y a $\frac{8!}{2 \times 3!} = 3360$ anagrammes différentes au mot « UBUESQUE ».

À retenir : si un mot de n lettres comporte k lettres identiques, il y a $\frac{n!}{k!}$ anagrammes différentes de ce mot. S'il comporte k lettres identiques et p autres lettres identiques différentes des premières alors il y a $\frac{n!}{k! \times p!}$ anagrammes différentes.

Remarque 61

On peut raisonner différemment en disant que trouver une anagramme du mot revient à :

- placer 3 lettres « U » parmi les 8 positions possibles : il y a $\binom{8}{3}$ possibilités ;
- placer 2 lettres « E » parmi les $8 - 3 = 5$ positions restantes : il y a $\binom{5}{2}$ possibilités ;
- trouver le nombre d'anagrammes sur les $5 - 2 = 3$ lettres restantes : il y a $3!$ possibilités.

On arrive alors à $\binom{8}{3} \times \binom{5}{2} \times 3! = 3360$ anagrammes différentes.

Corrigé de l'exercice 8.19 page 347

Notons n le nombre de cartes différentes. Le nombre de permutations est alors égal à $n!$. Il faut donc résoudre l'inéquation :

$$n! \geq 10^{79}.$$

Pour résoudre cette inéquation, on peut faire appel au logarithme népérien :

$$\begin{aligned} n! \geq 10^{79} &\iff \ln(n!) \geq \ln(10^{79}) \\ &\iff \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n) \geq 79 \ln 10 \end{aligned}$$

On peut alors faire appel à un programme Python pour déterminer la première valeur de n pour laquelle l'inégalité est vraie.

```

1 from math import log
2 n = 1
3 s = 0
4 while s < 79*log(10):
5     n += 1
6     s += log(n)
7 print(n)

```

Ce programme affiche la valeur « 59 ».

Il faut donc que le jeu comporte 59 cartes différentes pour que le nombre de permutations dépasse le nombre d'atomes dans l'Univers visible.

Si vous n'avez pas encore vu la notion de logarithme népérien, le programme suivant affiche aussi « 59 » :

```

1 f,n = 1,1
2 while f < 10**79:
3     n += 1
4     f *= n
5 print(n)

```

Remarque 62

Remplacez « 79 » par « 1 000 » dans les deux programmes et vous verrez pourquoi le premier est plus intéressant...

Spoiler alert : le second risque de prendre pas mal de temps, même avec un bon processeur!

Corrigé de l'exercice 8.20 page 347

- 1 Avant de traiter l'exercice, on peut prendre l'exemple d'un groupe de 4 personnes, notées a , b , c et d . Si on veut constituer deux groupes de deux personnes, on a les possibilités page suivante.

Groupe 1	Groupe 2
a avec b	c avec d
a avec c	b avec d
a avec d	b avec c

Il y a seulement 3 possibilités alors que nos calculs nous pousseraient peut-être à dire qu'il y en a $\binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 6$ (on choisit 2 personnes parmi les 4 pour constituer le premier groupe et pour le second, on en choisit 2 parmi les deux restantes). Avec cette dernière méthode, il faut comprendre que l'on considère que les cas « Groupe 1 : a avec b , Groupe 2 : c avec d » et « Groupe 1 : c avec d , Groupe 2 : a avec b » sont distincts

alors que non. Il faut donc diviser par deux le nombre de possibilités trouvés par cette méthode.

Revenons maintenant à notre exercice : il y a $\binom{12}{2}$ façons de constituer un groupe de 2 personnes prises parmi les 12, puis $\binom{10}{5}$ façons de constituer un autre groupe de 5 personnes prises parmi les 10 restantes, et enfin une seule façon de constituer le dernier groupe de 5 personnes.

Le nombre total de groupes possibles est donc : $\frac{\binom{12}{2} \times \binom{10}{5}}{2} = 8316$.

- 2 Pour cette question encore, prenons un cas simple. Considérons un groupe de 6 personnes, notées a, b, c, d, e et f , que l'on souhaite partager en groupes de 2. Les différents groupes possibles sont donnés dans le tableau suivant :

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
<i>a avec b</i>	<i>c avec d</i>	<i>e avec f</i>
	<i>c avec e</i>	<i>d avec f</i>
	<i>c avec f</i>	<i>d avec e</i>
<i>a avec c</i>	<i>b avec d</i>	<i>e avec f</i>
	<i>b avec e</i>	<i>d avec f</i>
	<i>b avec f</i>	<i>d avec e</i>
⋮ ↓		
Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
<i>a avec d</i>	<i>b avec c</i>	<i>e avec f</i>
	<i>b avec e</i>	<i>c avec f</i>
	<i>b avec f</i>	<i>c avec e</i>
<i>a avec e</i>	<i>b avec c</i>	<i>d avec f</i>
	<i>b avec d</i>	<i>c avec f</i>
	<i>b avec f</i>	<i>c avec d</i>
<i>a avec f</i>	<i>b avec c</i>	<i>d avec e</i>
	<i>b avec d</i>	<i>c avec e</i>
	<i>b avec e</i>	<i>c avec d</i>

Nous avons mis en rouge les groupes distincts : il y en a 15. Or, avec une méthode de dénombrement « classique », on obtiendrait :

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 90 \text{ groupes possibles.}$$

Le nombre de groupes possibles est donc égal à :

$$\frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{6} = \frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{3!}.$$

Revenons maintenant à notre exercice : nous voulons constituer 3 groupes de 4 personnes, ce qui nous amène au calcul suivant :

$$\frac{\binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4}}{3!} = 5\,775.$$

Il y a donc 5 775 groupes possibles.

Corrigé de l'exercice 8.21 page 348

Partie A

- 1** On cherche à former un groupe de 5 personnes parmi 8, sans distinction de sexe. Le nombre de combinaisons possibles est donné par : $\binom{8}{5} = 56$.

Il y a donc 56 façons de former ce groupe.

- 2** Pour former un groupe de 5 personnes comprenant exactement 3 hommes et 2 femmes, on doit d'abord choisir 3 hommes parmi les 4, puis 2 femmes parmi les 4 :

$$\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24.$$

Il y a donc 24 façons de former ce groupe.

Partie B

- 1** Si l'on doit choisir et classer 3 personnes parmi les 8 invités, le nombre d'arrangements est donné par :

$$8 \times 7 \times 6 = 336.$$

Il y a donc 336 façons de choisir et de classer ces 3 personnes.

- 2** Pour classer 2 femmes et 1 homme, on doit d'abord choisir 2 femmes parmi les 4, puis 1 homme parmi les 4, et enfin les classer. Le nombre total de possibilités est donc :

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times 3! = 6 \times 4 \times 6 = 144.$$

Il y a donc 144 façons de former et classer ce groupe.

Partie C

- 1** Le nombre de listes ordonnées de 3 personnes parmi les 8 invités est donné par :

$$8^3 = 512.$$

Il y a donc 512 possibilités.

- 2 Le nombre de 3-listes où les 3 personnes sont des femmes est donné par :

$$4^3 = 64.$$

La probabilité que les 3 personnes choisies soient des femmes est donc :

$$\frac{64}{512} = \frac{1}{8}.$$

Partie D

On doit former une équipe de 4 personnes parmi les 8, avec au moins une femme. Le nombre total de combinaisons pour former une équipe de 4 personnes parmi 8 est :

$$\binom{8}{4} = 70.$$

Le nombre de combinaisons ne contenant que des hommes (choisir 4 hommes parmi 4) est : 1.

Le nombre de façons de former une équipe avec au moins une femme est donc :

$$70 - 1 = 69.$$

Corrigé de l'exercice 8.22 page 349

- 1 Combien de groupes de 12 personnes peut-on constituer parmi les 30 personnes qui se sont réunies ?

On doit constituer des groupes de 12 personnes *parmi* les 30 présentes. L'ordre de ces personnes se compte pas et il n'y a pas de répétitions possibles. Il s'agit donc ici d'une combinaison (sur le même modèle que les mains d'une carte).

Il y a donc $\binom{30}{12} = 86\,493\,225$ groupes possibles.

- 2 Combien de groupes de 12 personnes peut-on former avec une seule personne de la catégorie A et cinq personnes de la catégorie C ?

Nous devons choisir 1 personne (parmi les 7 de la catégorie A), puis 5 personnes (parmi les 8 de la catégorie C), puis 6 personnes (parmi les 15 de la catégorie B).

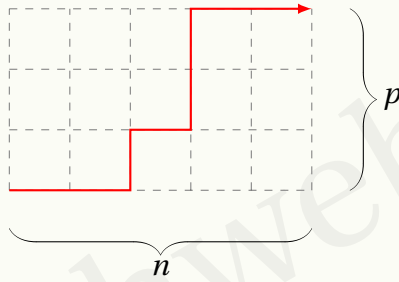
Il y a donc :

$$\binom{7}{1} \times \binom{8}{5} \times \binom{15}{6} = 1\,961\,960 \text{ possibilités.}$$

Corrigé de l'exercice 8.23 page 349

Symbolisons par « D » le mouvement de la puce qui consiste à se déplacer vers la droite d'une unité, et par « H » le déplacement d'une unité vers le haut.

Le mouvement final est donc représenté par une succession de $n + p$ « D » et « H », comme par exemple : « DDHDHHDD » pour représenter le déplacement donné en exemple :



La question revient donc à trouver le nombre d'anagrammes de ce « mot » de $n + p$ lettres. D'après la méthode donnée dans le corrigé de l'exercice 8.13, il y en a :

$$\frac{(n+p)!}{n!p!}.$$

Corrigé de l'exercice 8.24 page 349

- **Tirages dont la première boule porte un numéro pair.**

Il y a n nombres pairs donc il y a n tirages commençant par un nombre pair.

Il y a ensuite n nombres impairs possibles pour le deuxième numéro.

Pour le troisième numéro, on a le choix entre $(n-1)$ nombres pairs; idem pour le quatrième.

etc.

Il y a donc $n! \times n!$ tirages dont le premier numéro est pair.

- **Tirages dont la première boule porte un numéro impair.**

Le raisonnement est le même que précédemment : il y a $n! \times n!$ tirages dont le premier numéro est impair.

- Par conséquent, il y a $2(n!)^2$ tirages possibles.

Corrigé de l'exercice 8.25 page 349

Notons u_k le nombre de boules dans l'urne k , $1 \leq k \leq n$.

Décidons alors de représenter les situations possibles par le mot :

$$\underbrace{B \dots B}_{u_1 \text{ lettres B}} \quad S \quad \underbrace{B \dots B}_{u_2 \text{ lettres B}} \quad S \dots S \quad \underbrace{B \dots B}_{u_n \text{ lettres B}}$$

La lettre « B » désigne une boule et « S » désigne une séparation entre les urnes pour bien les distinguer.

Répondre à la question posée revient à trouver toutes les anagrammes du mot contenant n « B » (car il y a n boules) et $(p-1)$ « S ».

La réponse est donc :

$$\frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}.$$

Corrigé de l'exercice 8.26 page 350

D'après la formule du binôme de Newton :

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

Ainsi, le coefficient de degré n du développement de $(x+1)^{2n}$ est égal à $\binom{2n}{n}$.

Nous pouvons aussi écrire :

$$(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2 = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right)^2.$$

Ainsi, le coefficient de degré n du développement de $(x+1)^{2n}$ est égal à $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.

$$\text{Or, } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Donc ce coefficient vaut finalement $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

D'où l'égalité demandée.

Remarque 63

Par un raisonnement analogue; on peut aussi montrer l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n}{k} = \binom{3n}{n}.$$

Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Plan du chapitre

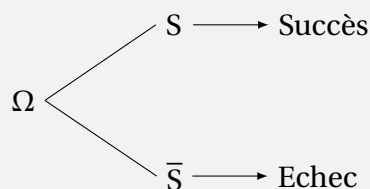
I	Succession d'épreuves indépendantes	366
1	Épreuve de Bernoulli	366
2	Schéma de Bernoulli	366
II	Loi Binomiale	367
1	Loi de Bernoulli	367
2	Loi binomiale	367
3	Simulation de la planche de Galton en Python	370
	Enoncés	371
	Corrigés des exercices	380

I - Succession d'épreuves indépendantes

I . 1 - Épreuve de Bernoulli

Définition 43

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire où seules 2 issues sont possibles : le succès (S) et l'échec (\bar{S}).



Exemple 52

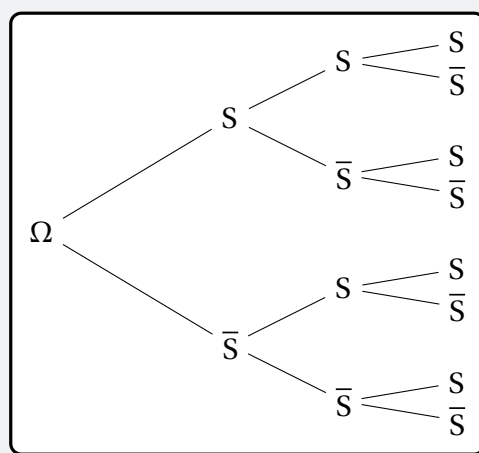
- 1 Sur une chaîne de production de smartphones, on en choisit un au hasard. L'épreuve consistant à regarder s'il est défectueux est une épreuve de Bernoulli : il est défectueux (S) ou non défectueux (\bar{S}).
- 2 Dans un trousse, on choisit au hasard un stylo. L'épreuve consistant à regarder s'il est rouge est une épreuve de Bernoulli : soit il l'est (S), soit il ne l'est pas (\bar{S}).

I . 2 - Schéma de Bernoulli

Définition 44

On répète n fois une même épreuve de Bernoulli dans les mêmes conditions (on dit : *de façon indépendante*). Cette succession d'épreuves est appelée un **schéma de Bernoulli**.

On représente un schéma de Bernoulli de la manière suivante :



Exemple de 3 successions d'épreuves de Bernoulli

II - Loi Binomiale

II . 1 - Loi de Bernoulli

Définition 45

On considère une épreuve de Bernoulli dont le succès est de probabilité p .

On note X la variable aléatoire représentant l'issue de cette épreuve : $X(\Omega) = \{S; \bar{S}\}$.

La loi de probabilité de X est appelée *loi de Bernoulli* et est donnée par le tableau suivant :

$X = k$	S	\bar{S}
$P(X = k)$	p	$1 - p$

Remarque 64

L'épreuve de Bernoulli et la loi de Bernoulli tirent leur nom du mathématicien Jacques Bernoulli (1654 – 1705).

II . 2 - Loi binomiale

Définition 46

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p . On répète n fois de façon indépendante cette épreuve, et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de succès à l'issue de cette succession d'épreuves.

On dit que la loi de probabilité de X est la **loi binomiale** de paramètres n et p , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

À l'issue de ces n épreuves, X peut valoir $0, 1, 2, \dots$ jusqu'à n :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n - 1; n\}$$

Propriété 55 (nombre de chemins à k succès)

Si on répète n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli alors il y a $\binom{n}{k}$ chemins comportant exactement k succès.

En effet, on regarde combien de « mots » de n lettres (prises dans l'alphabet $\{S; \bar{S}\}$) comportent exactement k lettres « S » : l'ordre compte et les lettres peuvent se répéter. Il s'agit donc d'une combinaison, d'où un nombre égal à $\binom{n}{k}$.

Propriété 56

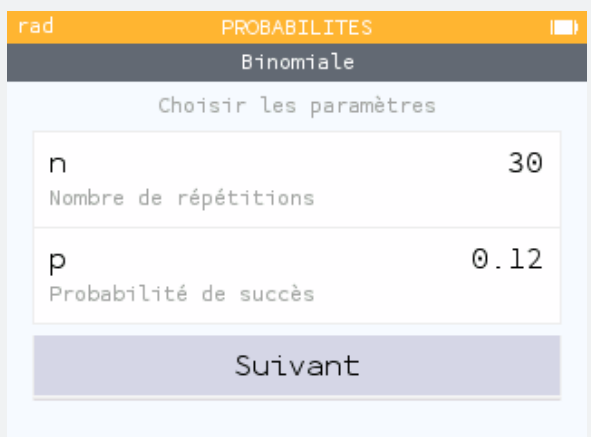
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n ,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

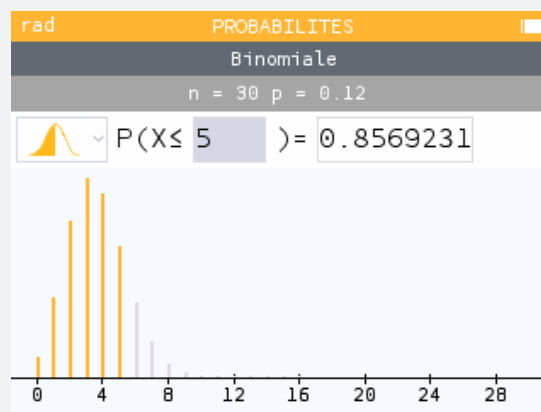
Dans la pratique, les calculatrices permettent de donner une valeur approchée de $P(X = k)$ très facilement

Par exemple, sur la Numworks, pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,12)$:

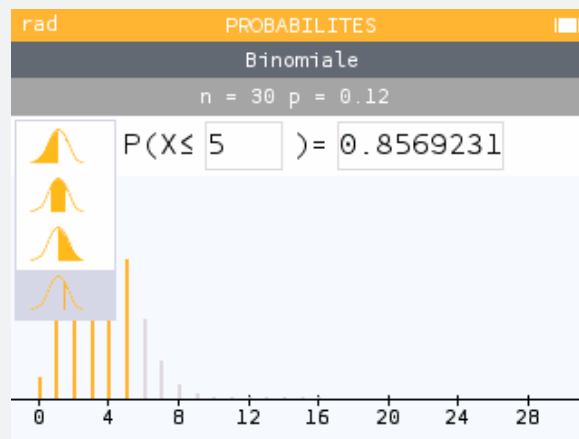


En cliquant sur « Suivant », on peut calculer par exemple :

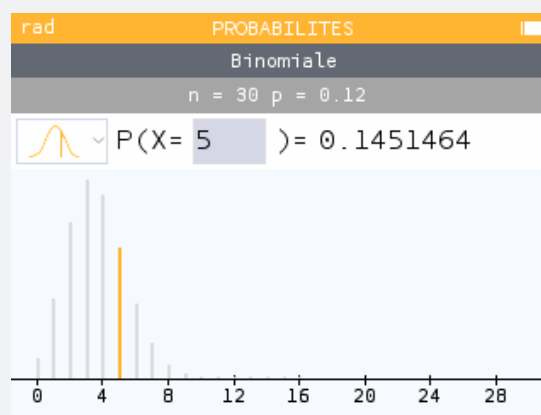
- $P(X \leq 5)$:



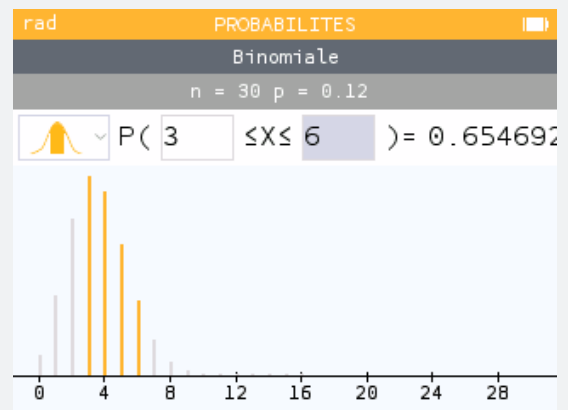
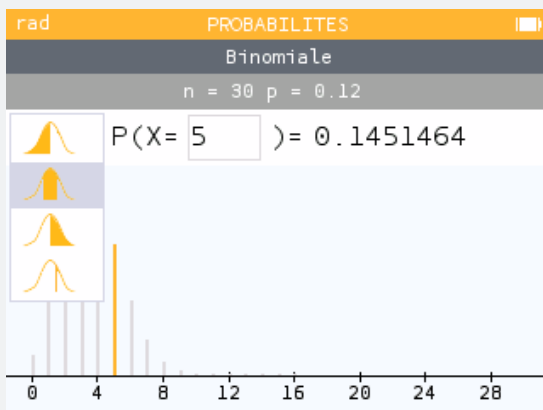
Mais en bougeant le curseur vers la gauche et en cliquant sur l'icône, puis en descendant tout en bas :



- on peut calculer par exemple $P(X = 5)$:



- En sélectionnant, parmi les choix proposés en cliquant sur l'icône à gauche, le deuxième en partant du haut, on peut calculer par exemple $P(3 \leq X \leq 6)$:



Propriété 57 (espérance, variance et écart-type)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors,

- son espérance mathématique est : $\mathbb{E}(X) = n \times p$;
- sa variance mathématique est : $\mathbb{V}(X) = n \times p \times (1 - p)$;
- son écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$.

Exemple 53

Dans un urne, il y a 7 boules bleues et 3 rouges.

On choisit au hasard une boule de cette urne puis on la remet, et on répète cette expérience 10 fois de façon indépendante.

La probabilité de choisir une boule bleue lors d'un tirage est $p = 0,7$.

Si X représente le nombre de boules bleues obtenues à l'issue de ces 10 tirages au sort, alors X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$ et son espérance est :

$$E(X) = 10 \times 0,7 = 7.$$

II . 3 - Simulation de la planche de Galton en Python

Je vous encourage à regarder la page de mon site :

<https://www.mathweb.fr/euclide/simulation-de-la-planche-de-galton-en-python/>

Exercice 9.1 (QCM)



Pour chaque question, donner la bonne réponse parmi les propositions faites.

- 1 L'espérance mathématique de la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$ est :
 - a. 0,02
 - b. 0,2
 - c. 2
 - d. 20
- 2 La variance de la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,15$ est :
 - a. 3
 - b. 2,55
 - c. 17
 - d. 0,1275
- 3 Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(15; 0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(20; 0,3)$ deux variables aléatoires. Que vaut $E(X+Y) = ?$
 - a. 7,5
 - b. 35
 - c. 0,4
 - d. 3,5
- 4 Soit X une variable aléatoire de variance 5. Si on multiplie par 2 toutes les valeurs prises par X alors la variance devient :
 - a. 10
 - b. 15
 - c. 20
 - d. 25

Solution page 380

Exercice 9.2 (tirage dans une urne)



Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules vertes. On tire successivement au hasard et de façon indépendante 5 boules de cette urne en les remettant dans l'urne après avoir regardé leur couleur.

On note X le variable aléatoire représentant le nombre de boules bleues tirées à la fin de cette expérience.

- 1 Décrire X (donner la valeurs possibles de X).
- 2 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 3 Calculer alors :
 - a. $P(X = 0)$
 - b. $P(X = 3)$
 - c. $P(X \geq 1)$

Solution page 380

Exercice 9.3 (au tennis)



Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6. Ils décident de jouer trois matches dans l'année (les résultats des matches sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.

Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matches gagnés par Benjamin et D la variable aléatoire correspondant à la dépense de Benjamin.

- 1 Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer D en fonction de X et en déduire les valeurs possibles de D .
- 2 Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 € est 0,432.
- 3 Calculer l'espérance de dépense en fin d'année de Benjamin.

Solution page 380

Exercice 9.4 (jeu radiodiffusé)



Lors d'un jeu radiodiffusé, on estime que le candidat, quelle que soit la question posée, a deux chances sur trois de donner la bonne réponse. Il gagne 50 euros par réponse exacte. L'animateur du jeu lui pose successivement cinq questions.

- 1 Calculer la probabilité que le candidat ait cinq bonnes réponses.
- 2 Quelle est la probabilité que le candidat gagne 250 euros?
- 3 Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses exactes au bout des cinq questions. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier la réponse.
- 4 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y qui compte le gain total du joueur.
- 5 Calculer l'espérance de gain du joueur.

Solution page 381

Exercice 9.5 (lancers d'une pièce)



Un joueur lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Chaque fois que le joueur obtient Face, il gagne 2 points, sinon il perd 1 point.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.

Solution page 381

Exercice 9.6 (dans une urne)



Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules vertes. On tire successivement au hasard et de façon indépendante 5 boules de cette urne en les remettant dans l'urne après avoir regardé leur couleur.

On note X le variable aléatoire représentant le nombre de boules bleues tirées à la fin de cette expérience.

- 1 Décrire X (donner la valeurs possibles de X).
- 2 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 3 Calculer alors :

a. $P(X = 0)$

b. $P(X = 3)$

c. $P(X \geq 1)$

Solution page 382

Exercice 9.7 (au tennis)



Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6. Ils décident de jouer trois matches dans l'année (les résultats des matches sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.

Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matches gagnés par Benjamin et D la variable aléatoire correspondant à la dépense de Benjamin.

- 1 Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer D en fonction de X et en déduire les valeurs possibles de D .
- 2 Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 € est 0,432.
- 3 Calculer l'espérance de dépense en fin d'année de Benjamin.

Solution page 382

Exercice 9.8 (chaîne de fabrication)



Le responsable de fabrication de l'usine ELECTOP est chargé de contrôler une chaîne de production fabriquant un composant électronique. Sur 10 000 composants pris au hasard, il constate que 7 sont défectueux. Il suppose donc que la probabilité d'avoir un composant défectueux fabriqué par cette chaîne de production est égale à 0,0007.

Le mois suivant, il choisit au hasard sur cette chaîne de production 20 composants.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de composants défectueux.

- 1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2 Calculer $P(X \geq 2)$.

Solution page 383

Exercice 9.9 (trajet à vélo)



Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h.

Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.

Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps (en minute) mis par l'élève pour aller au lycée.

- 1 Déterminer la loi de probabilités de X .
- 2 Exprimer T en fonction de X .
- 3 Déterminer l'espérance mathématique $E(T)$ de T et interpréter ce résultat.
- 4 L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
Calculer la probabilité que l'élève soit en retard au lycée.

Solution page 383

Exercice 9.10 (au basket-ball)



Un joueur de basket-ball effectue une succession de n tirs en direction du panier. Les statistiques de ce joueur nous informent que :

- le 1^{er} lancer est réussi avec une probabilité de 0,95;
- si un tir est réussi, le tir suivant est réussi avec une probabilité de 0,85;
- si un tir a échoué, le tir suivant est réussi avec une probabilité de 0,75.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le n -ième tir est réussi » et p_n la probabilité que le n -ième tir soit réussi. On a donc $p_1 = 0,95$.

1 Représenter la situation à l'aide d'un arbre pour $n = 2$, et vérifier que $p_2 = 0,845$.

2 Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,1p_n + 0,75$.

3 On pose $u_n = p_n - \frac{5}{6}$.

Montrer que (u_n) est géométrique et en déduire une expression de u_n , puis de p_n , en fonction de n .

4 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Solution page 384

Exercice 9.11 (dans un hôpital)



Dans un hôpital, lors d'une pandémie d'une maladie appelée « STAS-3 », 63 % des patients qui arrivent aux urgences présentent les symptômes de cette maladie, dont 78 % sont réellement atteints par la STAS-3.

Parmi les autres patients, 7 % s'avèrent atteints de cette maladie.

On choisit au hasard parmi tous les patients du service des urgences une personne.

On note :

- S l'événement : « la personne choisie présente des symptômes de la STAS-3 »,
- M l'événement : « la personne est réellement atteinte de la STAS-3 ».

1 Construire un arbre de probabilités représentant cette situation.

2 Quelle est la probabilité que la personne choisie présente des symptômes de la STAS-3 et soit réellement atteinte de cette maladie ?

3 Montrer que la probabilité que la personne choisie soit réellement atteinte de la STAS-3 est égale à 0,5173.

4 La personne choisie n'est pas atteinte de la STAS-3. Quelle est la probabilité qu'elle ait présenté des symptômes lors de son arrivée aux urgences.

L'hôpital reçoit 100 € de prime pour chaque patient atteint de la STAS-3 en plus de 100 000 € de forfait pour faire face à cette pandémie. On choisit au hasard 20 personnes aux urgences. Il y a tellement de personnes que l'on peut assimiler ceci à un tirage aléatoire avec remise.

On note :

- X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes réellement atteintes par la STAS-3,
- G la variable aléatoire qui représente la prime gagnée par l'hôpital.

- 5 Quelle est la loi de probabilité de X ?
- 6 Exprimer G en fonction de X . Calculer alors la prime moyenne que pourrait recevoir l'hôpital sur ces 20 patients.
- 7 Calculer $P(X = 5)$, $P(X \leq 5)$ et $P(X \geq 10)$. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.
- 8 Déterminer le premier entier k pour lequel $P(X \leq k) \geq 0,95$.

Solution page 385

Exercice 9.12 (dé tétraédrique)



On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les chiffres 1, 2, 3 et 4. On lit le résultat d'un lancer sur la face cachée du dé.

On note p_i la probabilité d'obtenir le chiffre i suite à un lancer de ce dé.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que ces probabilités sont :

$$p_1 = 0,1 ; p_2 = 0,2 ; p_3 = 0,3 ; p_4 = 0,4 .$$

On lance deux fois successivement ce dé. On suppose que les lancers sont indépendants entre eux.

- 1 Dresser un arbre pondéré décrivant l'expérience.
- 2 Quelle est la probabilité d'obtenir les chiffres 1 et 3 dans cet ordre?
- 3 Quelle est la probabilité d'obtenir deux chiffres distincts rangés par ordre croissant?
- 4 On instaure la règle suivante : si un joueur lançant deux fois successivement ce dé obtient deux chiffres distincts rangés par ordre croissant il gagne 2 euros, si il obtient deux fois le chiffre 1 il gagne 5 euros, tandis que, dans tous les autres cas, il perd 3 euros.

On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- a. Déterminer la loi de probabilité de X .
- b. Déterminer l'espérance et l'écart type de X .

Ce jeu est-il équitable?

- c. On modifie la valeur des gains de la manière suivante : si on obtient deux chiffres distincts rangés par ordre croissant on gagne 5 euros, si on obtient deux fois le chiffre 1 on gagne 11 euros, et sinon, dans tous les autres cas, on perd 5 euros.

On note Y la variable aléatoire égale au gain du joueur avec cette nouvelle règle.

Déterminer l'espérance et l'écart type de Y .

Solution page 386

Exercice 9.13 (jeu de grattage)



L'oncle de Tatiana est accroc au jeu de grattage. Chaque semaine, il achète jusqu'à 20 euros de cartes à gratter à deux euros. Il achète une première carte, la gratte. Si elle est gagnante, il s'arrête, sinon il en achète une seconde, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait une carte gagnante ou bien qu'il ait dépensé 20 euros. La probabilité d'avoir une carte gagnante est 0,12.

- 1 Représenter cette expérience par un arbre pondéré.

- 2 Quelle est la probabilité que l'oncle achète 4 cartes?
- 3 Quelle est la probabilité que l'oncle achète 10 cartes?
- 4 Quelle est la probabilité que l'oncle ne gagne rien?
- 5 Soit X la variable aléatoire qui à chaque série d'achats de la semaine, associe la somme dépensée.
 - a. Établir la loi de probabilité de X .
 - b. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce résultat.

Solution page 388

Exercice 9.14 (jeu télévisé)



Un jeu télévisé se déroule en deux manches :

- *Première manche.*

Une personne tire au hasard et simultanément deux boules d'une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20. Si une boule portant un numéro multiple de 5 est choisie, 20 points sont gagnés; dans le cas contraire, aucun point n'est gagné.

- *Seconde manche.*

La personne doit ouvrir une porte parmi trois portes fermées. Seule l'une d'elles peut multiplier par 2 les gains gagnés lors de la première manche. L'une des deux autres permet d'ajouter 5 points; quant à l'autre, elle retire 5 points si les gains de la première manche sont supérieurs ou égaux à 5. Sinon, rien n'est retiré.

À l'issue de ces deux manches, chaque point vaut 100 €.

On appelle G le gain de la personne participant au jeu.

- 1 On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de points à l'issue de la première manche. Déterminer la loi de probabilité de X , puis calculer $E(X)$.
- 2 On note Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique des points à l'issue de la seconde manche.
Déterminer la loi de probabilité de Y ainsi que $E(Y)$.
- 3 Calculer $E(G)$.
- 4 À l'issue de ces deux manches, la personne doit participer à la manche finale qui consiste à répondre à cinq questions de culture générale. À chaque mauvaise réponse, il ou elle perd 200 € sur les gains obtenus précédemment.
On note Z la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses d'une personne lors de cette manche finale.
La société productrice du jeu estime que Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,2$.
Déterminer le gain que peut espérer avoir la personne à l'issue de cette finale.

Solution page 389

Approfondissements

Exercice 9.15 (avec une suite et une dérivée)



Le jeu des petits chevaux nécessite un dé. Dans ce jeu, un joueur doit faire un « 6 » pour sortir de son enclos et commencer la partie. Tant qu'il n'a pas fait de « 6 », il continue de lancer le dé (à tour de rôle avec les autres joueurs) jusqu'à ce qu'il en obtienne un.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers de dé jusqu'à obtention d'un « 6 ».

- 1 Déterminer la probabilité pour que le joueur obtienne un « 6 » au premier lancer. En déduire $P(X = 1)$.
- 2 Déterminer la probabilité pour que le joueur obtienne un « 6 » au second lancer. En déduire $P(X = 2)$.
- 3 Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel k , $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$.
- 4 On pose $u_n = P(X = n)$, et $S_n = \sum_{k=1}^n P(X = k)$.
 - a. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
 - b. En déduire une expression simplifiée de S_n .
 - c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.
- 5 On admet que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$.

On pose alors $f_k(x) = x^k$, où $k \in \mathbb{N}^*$, et $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

- a. Calculer $f'_k(x)$, la dérivée de $f_k(x)$, en fonction de k .
- b. En déduire que $F'_n(x) = \frac{1 - x - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ pour tout $x \neq 1$.
On admettra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.
- c. En déduire $E(X)$.

Solution page 391

Exercice 9.16 (simulation d'une variable aléatoire)



Lors d'un jeu, le gain d'un joueur quelconque est modélisé par la variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité ci-dessous :

$X = k$	-20	0	5	100
$P(X = k)$	0,78	0,09	0,07	0,06

- 1 Vérifier que l'espérance mathématique de X est $E(X) = -9,25$ et que son écart-type est $\sigma(X) \approx 28,78$.

2 On considère la fonction Python suivante :

Code Python 9-30

```
1 from random import random
2 # random() retourne un nombre pseudo-aléatoire dans [0;1[
3
4 def simul():
5     x = random()
6     if x <= 0.78:
7         return -20
8     elif x > 0.78 and x <= 0.87:
9         return 0
10    elif x > 0.87 and x <= 0.94:
11        return 5
12    else:
13        return 100
```

Expliquer en quoi cette fonction simule la variable aléatoire X .

3 On considère fonction Python suivante :

Code Python 9-31

```
1 def echantillon(n):
2     L = [ ]
3     for _ in range(n):
4         L.append( simul() )
5
6     return sum(L)/n
```

Expliquer à quoi correspond `echantillon(n)` pour un n assez grand dans le cadre de cet exercice.

Solution page 393

Exercice 9.17 (problème de surréservation)



On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Soit a un réel strictement positif.

1 Écrire une fonction Python `seuil(n, p, a)` retournant le premier entier k tel que $P(X > k) \leq a$.

Pour cela, on dispose d'un module Python nommé « probastat », que l'on pourra télécharger sur la page :

<https://www.mathweb.fr/euclide/2021/04/09/probabilites-et-python-au-lycee-loi-binomiale-et-variables-aleatoires/>
et de son objet « binom », grâce auquel on peut définir une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n; p)$, et de sa méthode « `proba_cdf(k)` » qui permet de calculer $P(X \leq k)$.

```
>>> from probavar import binom
>>> X = binom(50,0.42)
>>> X.proba_cdf(10)
0.0008877309619108356
```

Cela signifie que $P(X \leq 10) \approx 8,877 \times 10^{-4}$.

- 2** Une compagnie aérienne, dont on taira le nom pour ne pas ternir sa réputation, a l'habitude de vendre plus de billets que de places dans un avion.

L'avion X555 comporte 300 places. On note n le nombre de billets d'avion vendus, nombre pouvant être supérieur à 300.

On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de clients ayant acheté un billet et se présentant au guichet lors de l'embarquement. On suppose que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,9)$.

À l'aide de la fonction Python précédente, déterminer le plus petit entier n tel que $P(X > 300) \leq 0,05$.

Solution page 394

Exercice 9.18 (loi géométrique)



On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

On considère alors la variable aléatoire X représentant le nombre d'épreuves de Bernoulli de paramètre p nécessaires pour obtenir le premier succès.

On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p .

- 1** Montrer que $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$, pour tout entier k compris entre 1 et n .

- 2** On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Déterminer alors l'espérance mathématique de X .

- 3** Dans un urne sont mises 15 boules rouges et 5 boules noires, indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de cette urne en la remettant tant que la boule choisie n'est pas noire.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules tirées à l'issue de cette expérience.

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et en donner une interprétation.

Solution page 395

Corrigé de l'exercice 9.1 page 371

- 1 Réponse (c). D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ alors $E(X) = np$.
Donc ici, $E(X) = 10 \times 0,2 = 2$.
- 2 Réponse (b). D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ alors $V(X) = np(1 - p)$.
Donc ici, $V(X) = 20 \times 0,15 \times (1 - 0,15) = 2,55$.
- 3 Réponse (a). En effet, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité de l'espérance.
Or, $E(X) = 15 \times 0,1 = 1,5$ et $E(Y) = 20 \times 0,3 = 6$. Donc $E(X + Y) = 1,5 + 6 = 7,5$.
- 4 Réponse (c). En effet, d'après le cours, $V(aX) = a^2 V(X)$ donc $V(2X) = 2^2 V(X) = 4 \times 5 = 20$.

Corrigé de l'exercice 9.2 page 371

- 1 $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. En effet, sur 5 tirages successifs avec remise de la boule tirée, on peut n'avoir aucune boule bleue comme en avoir 1, 2, 3, 4 ou 5.
- 2 L'expérience consistant à choisir au hasard une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est S : « avoir une boule bleue », dont la probabilité est $p = \frac{3}{10} = 0,3$.
Ainsi, si l'on répète de façon indépendante 5 fois cette expérience, cela constitue un schéma de Bernoulli; ainsi, la variable aléatoire représentant le nombre de succès obtenus à l'issue de ce schéma suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,3)$.
- 3 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,3)$ donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, avec $p = 0,3$. Ainsi :
 - a. $P(X = 0) = \binom{5}{0} \times 0,3^0 \times (1 - 0,3)^{5-0} = 1 \times 1 \times 0,7^5 = 0,16807$.
 - b. $P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^2 = 0,1323$.
 - c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,16807 = 0,83193$.

Corrigé de l'exercice 9.3 page 371

- 1 $X = \{0; 1; 2; 3\}$.
 $D = 20(3 - X)$ donc $D = \{0; 20; 40; 60\}$.
- 2 $P(D = 40) = P(60 - 20X = 40)$
 $= P(-20X = -20)$
 $= P(X = 1)$
 $= \binom{3}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^2$
 $= 0,432$.

$$\begin{aligned}
 3 \quad \mathbb{E}(D) &= \mathbb{E}(60 - 20X) \\
 &= 60 - 20\mathbb{E}(X) \\
 &= 60 - 20 \times (3 \times 0,4) \\
 &= 36.
 \end{aligned}$$

Benjamin peut donc s'attendre à dépenser en moyenne 36 € par an.

Corrigé de l'exercice 9.4 page 372

- 1 Le jeu est une succession de 5 expériences identiques et indépendantes.
« Donner cinq bonnes réponses » correspond à la liste de cinq résultats « Donner la bonne réponse », et a donc pour probabilité $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$.
- 2 Le candidat gagne 250 euros lorsqu'il a cinq bonnes réponses, donc la probabilité qu'il gagne 250 euros est $\frac{32}{243}$.
- 3 Chaque question correspond à une épreuve de Bernoulli dont le succès est « Donner la bonne réponse », et a pour probabilité $\frac{2}{3}$. Comme il y a 5 répétitions indépendantes, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5; \frac{2}{3}\right)$.
- 4 Comme chaque réponse exacte fait gagner 50 euros, si on note y_i les valeurs prises par Y , on a $y_i = 50x_i$. Connaissant la loi de X , on en déduit la loi de Y dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	0	50	100	150	200	250
$P(X = x_i)$ $P(Y = y_i)$	$\binom{5}{0} \frac{1}{3^5}$	$\binom{5}{1} \frac{2}{3^5}$	$\binom{5}{2} \frac{2^2}{3^5}$	$\binom{5}{3} \frac{2^3}{3^5}$	$\binom{5}{4} \frac{2^4}{3^5}$	$\binom{5}{5} \frac{2^5}{3^5}$
Valeurs approchées	0,004	0,041	0,165	0,329	0,329	0,132

- 5 Pour calculer l'espérance de Y , on peut prendre les valeurs numériques du tableau et appliquer la formule, mais il est plus rapide de constater que comme $y_i = 50x_i$, alors :

$$p_1 y_1 + \dots + p_5 y_5 = 50(p_1 x_1 + \dots + p_5 x_5) = 50\mathbb{E}(X).$$

Or, on sait que si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , son espérance vaut np .
Par conséquent $\mathbb{E}(Y) = 50 \times 5 \times \frac{2}{3} = \frac{500}{3}$.

Corrigé de l'exercice 9.5 page 372

Le lancer d'une pièce équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,5 dont le succès est « Obtenir Face ». Si on répète le lancer trois fois, de façons indépendantes, la variable Y qui donne le nombre de fois y_i où Face est obtenu suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0,5)$.

En notant x_i les valeurs de la variable aléatoire X , on peut dresser le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$\binom{3}{0} 0,5^3$	$\binom{3}{1} 0,5^3$	$\binom{3}{2} 0,5^3$	$\binom{3}{3} 0,5^3$
x_i	-3	0	3	6
$P(X = x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

L'espérance de X est donc : $E(X) = -3 \times 0,125 + 3 \times 0,375 + 6 \times 0,125 = 1,5$.

Corrigé de l'exercice 9.6 page 372

- 1 $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. En effet, sur 5 tirages successifs avec remise de la boule tirée, on peut n'avoir aucune boule bleue comme en avoir 1, 2, 3, 4 ou 5.
- 2 L'expérience consistant à choisir au hasard une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est S : « avoir une boule bleue », dont la probabilité est $p = \frac{3}{10} = 0,3$. Ainsi, si l'on répète de façon indépendante 5 fois cette expérience, cela constitue un schéma de Bernoulli; ainsi, la variable aléatoire représentant le nombre de succès obtenus à l'issue de ce schéma suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,3)$.
- 3 $X \mapsto \mathcal{B}(5; 0,3)$ donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $p = 0,3$. Ainsi :
 - a. $P(X = 0) = \binom{5}{0} \times 0,3^0 \times (1-0,3)^{5-0} = 1 \times 1 \times 0,7^5 = 0,16807$.
 - b. $P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^2 = 0,1323$.
 - c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,16807 = 0,83193$.

Corrigé de l'exercice 9.7 page 373

- 1 $X = \{0; 1; 2; 3\}$.
 $D = 20(3 - X)$ donc $D = \{0; 20; 40; 60\}$.
- 2 $P(D = 40) = P(60 - 20X = 40)$
 $= P(-20X = -20)$
 $= P(X = 1)$
 $= \binom{3}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^2$
 $= 0,432$.
- 3 $E(D) = E(60 - 20X)$
 $= 60 - 20E(X)$
 $= 60 - 20 \times (3 \times 0,4)$
 $= 36$.

Benjamin peut donc s'attendre à dépenser en moyenne 36 € par an.

Corrigé de l'exercice 9.8 page 373

- 1 L'expérience consistant à choisir au hasard un composant électronique est une épreuve de Bernoulli dont le succès est : « le composant est défectueux » et donc la probabilité est $p = 0,0007$.

Ainsi, répéter 20 fois de façon indépendante cette expérience constitue un schéma de Bernoulli et le nombre de succès obtenus est représenté par une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,0007)$.

2
$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \times 0,0007^0 \times (1 - 0,0007)^{20} + \binom{20}{1} \times 0,0007^1 \times (1 - 0,0007)^{19} \right] \\ &\approx 1 - (0,986092710141 + 0,0138149684199) \\ &\approx 0,00009. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9.9 page 373

- 1 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6; \frac{2}{3}\right)$. En effet, l'expérience consistant à arriver à un feu tricolore et à regarder sa couleur est une épreuve de Bernoulli dont le succès est ici S : « le feu est vert » et dont la probabilité est égale à $\frac{2}{3}$ d'après l'énoncé.

- 2 Sans feu tricolore, le temps nécessaire pour parcourir 3 km avec une vitesse de 15 km/h est $60 \div 5 = 12$ minutes (en effet, si on fait 15 km en 60 minutes, 3 km seront faits en $\frac{1}{5}$ de 60 minutes).

À ces 12 minutes, il faut ajouter 1,5 minute par feu rouge ou orange. La variable aléatoire représentant le nombre de feux rouges ou oranges est $(6 - X)$ donc :

$$T = 12 + 1,5(6 - X) \quad \text{soit :} \quad T = 21 - 1,5X.$$

- 3 D'après une propriété du cours, $\exp T = \mathbb{E}(21 - 1,5X) = 21 - 1,5\mathbb{E}(X)$.

Or, $\mathbb{E}(X) = 6 \times \frac{2}{3} = 4$. Ainsi, $\mathbb{E}(T) = 21 - 1,5 \times 4$, soit $\mathbb{E}(T) = 15$.

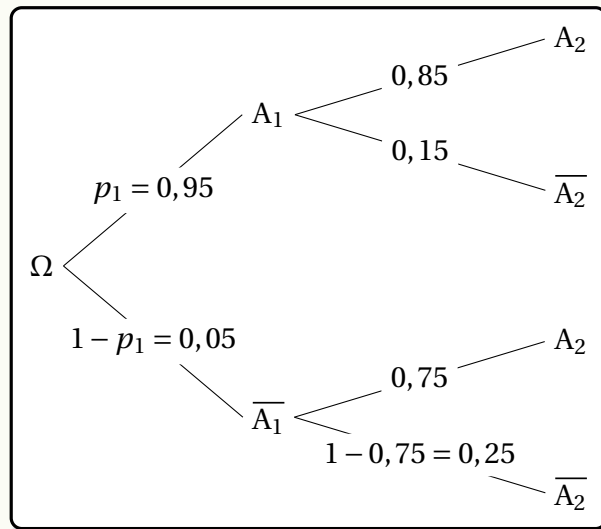
L'élève peut donc s'attendre arriver au lycée 15 minutes en moyenne après son départ.

- 4 On cherche $P(T > 17)$.

$$\begin{aligned} P(T > 17) &= P(21 - 1,5X > 17) \\ &= P(-1,5X > 17 - 21) \\ &= P(-1,5X > -4) \\ &= P\left(X < \frac{4}{1,5}\right) \\ &= P\left(X < \frac{8}{3}\right) \\ &= P(X \leq 2) \quad \text{car } X \text{ est un nombre entier} \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{73}{729} \approx 0,1. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9.10 page 374

1 On peut représenter la situation pour $n = 2$ avec l'arbre suivant :



Ainsi, $p_2 = 0,95 \times 0,85 + 0,05 \times 0,75 = 0,845$.

2 Sur le même modèle, quel que soit l'entier naturel n non nul,

$$p_{n+1} = 0,85p_n + 0,75(1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = 0,1p_n + 0,75$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{5}{6} = \frac{1}{10}p_n + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} \\
 &= \frac{1}{10}p_n - \frac{1}{12} = \frac{1}{10} \left(p_n - \frac{1}{12} \times \frac{10}{1} \right) \\
 &= \frac{1}{10} \underbrace{\left(p_n - \frac{5}{6} \right)}_{=u_n} = 0,1u_n.
 \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme :

$$u_1 = p_1 - \frac{5}{6} = \frac{95}{100} - \frac{5}{6} = \frac{7}{60}.$$

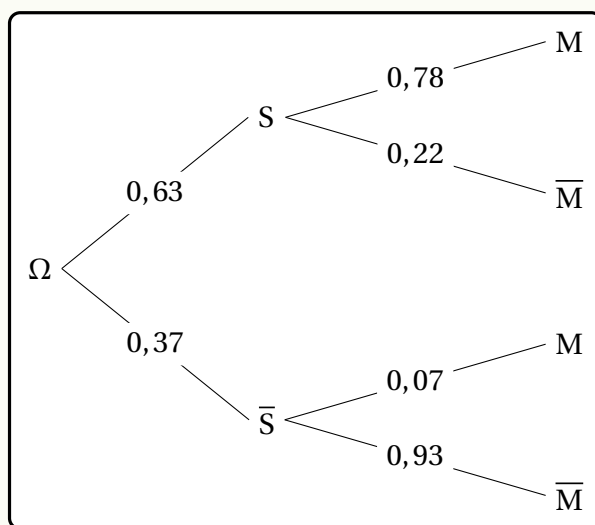
On en déduit alors que $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{7}{60} \times 0,1^{n-1}$ et donc :

$$\begin{aligned}
 u_n = p_n - \frac{5}{6} &\iff p_n = u_n + \frac{5}{6} \\
 &\iff p_n = \frac{7}{60} \times 0,1^{n-1} + \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

4 On déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{6}$. Ainsi, à longs termes, le joueur réussira 5 tirs sur 6.

Corrigé de l'exercice 9.11 page 374

1 L'arbre représentant la situation est le suivant :



2 On nous demande ici de calculer $P(S \cap M)$:

$$\begin{aligned} P(S \cap M) &= P(S) \times P_S(M) \\ &= 0,63 \times 0,78 \end{aligned}$$

$$P(S \cap M) = 0,4914$$

3 On a :

$$\begin{aligned} P(M) &= P(S \cap M) + P(\bar{S} \cap M) \\ &= 0,4914 + 0,37 \times 0,07 \end{aligned}$$

$$P(M) = 0,5173$$

La probabilité pour que la personne choisie au hasard soit réellement atteinte de la STAS-3 est donc de 0,5173.

$$\begin{aligned} 4 \quad P_{\bar{M}}(S) &= \frac{P(S \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} \\ &= \frac{0,63 \times 0,22}{1 - 0,5173} \end{aligned}$$

$$P_{\bar{M}}(S) \approx 0,2871$$

5 L'épreuve consistant à regarder si une personne est réellement atteinte de la STAS-3 est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est 0,5173 (calculée à la question précédente).

On répète ici de manière indépendante 20 fois cette épreuve donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5173$.

- 6 D'après l'énoncé, $G = 100\,000 + 100X$. En effet, l'hôpital reçoit $100\,000\text{ €}$ quel que soit le nombre de personnes atteintes de la STAS-3, auxquels s'ajoutent 100 € par personnes atteintes, soit $100X\text{ €}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(G) &= E(100\,000 + 100X) \\ &= 100\,000 + 100E(X) \text{ (par linéarité de l'espérance mathématique)} \\ &= 100\,000 + 100 \times (20 \times 0,5173) \\ &= 101\,034,6 \end{aligned}$$

L'hôpital peut alors espérer recevoir $101\,034,60\text{ €}$ sur ces 20 personnes.

- 7 À la calculatrice, on a :

- $P(X = 5) \approx 0,0103$.
- $P(X \leq 5) \approx 0,0141$.
- $P(X \geq 10) \approx 0,6478$.

- 8 Pour déterminer le premier entier k pour lequel $P(X \leq k) \geq 0,95$, on peut calculer pour commencer :

$$P(X \leq 10) \approx 0,5263.$$

On prend $k = 10$ car il y a en tout 20 patients. On voit que la probabilité n'est pas supérieure à $0,95$; on peut alors prendre $k = 15$ (à mi-chemin entre 10 et 20) :

$$P(X \leq 15) \approx 0,9970 \geq 0,95.$$

On prend alors $k = 14$:

$$P(X \leq 14) \approx 0,9703 \geq 0,95.$$

On prend alors $k = 13$:

$$P(X \leq 13) \approx 0,9222 < 0,95.$$

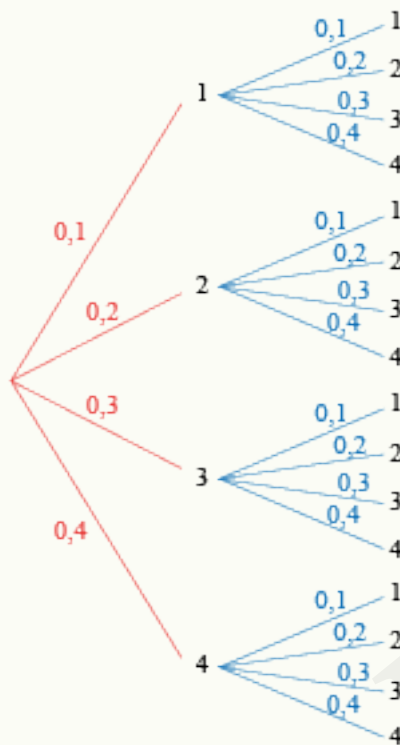
Le premier entier k pour lequel $P(X \leq k) \geq 0,95$ est donc $k = 14$.

Corrigé de l'exercice 9.12 page 375

- 1 On est en présence de la répétition de deux expériences identiques et indépendantes. On peut construire l'arbre pondéré suivant, en indiquant les probabilités d'obtention de chaque chiffre pour le premier et le deuxième lancer : voir page suivante.

Remarque 68

La probabilité de l'issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités présentes sur le chemin.



- 2 Il n'y a qu'une seule façon d'obtenir les chiffres 1 et 3 dans cet ordre. La probabilité de cet événement est :

$$p = 0,1 \times 0,3 = 0,03.$$

- 3 Les différentes façons d'obtenir deux chiffres distincts rangés par ordre croissant sont les suivantes :

$$(1;2); (1;3); (1;4); (2;3); (2;4); (3;4)$$

La probabilité de l'événement correspondant est donc :

$$\begin{aligned} p &= 0,1 \times 0,2 + 0,1 \times 0,3 + 0,1 \times 0,4 \\ &\quad + 0,2 \times 0,3 + 0,2 \times 0,4 + 0,3 \times 0,4 \\ &= 0,35. \end{aligned}$$

- 4 a. Avec cette règle, le gain algébrique à ce jeu peut-être de -3 euros, 2 € ou 5 €. Déterminer la loi de probabilité de X , c'est donner les probabilités de chacun des événements :

$$P(X = -3), P(X = 2) \text{ et } P(X = 5).$$

D'après la question précédente, on a déjà calculé $P(X = 2) = 0,35$.

On gagne de plus 5 euros uniquement lorsqu'on obtient deux fois le chiffre 1. Cet événement se produit avec une probabilité de :

$$P(X = 5) = 0,1 \times 0,1 = 0,01.$$

Dans tous les autres cas, on perd 3 euros, et ainsi :

$$\begin{aligned} P(X = -3) &= 1 - (P(X = 2) + P(X = 5)) \\ &= 1 - 0,35 - 0,01 = 0,64. \end{aligned}$$

On peut résumer ces résultats par le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

Gain x_i	-3	2	5
$P(X = x_i)$	0,64	0,35	0,01

b. L'espérance de X est :

$$E(X) = -3 \times 0,64 + 2 \times 0,35 + 5 \times 0,01 = -1,17.$$

On en déduit que ce jeu n'est pas équitable : en moyenne, le joueur peut s'attendre à perdre 1,17 euros par partie.

La variance de X est :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-3 + 1,17)^2 \times 0,64 + (2 + 1,17)^2 \times 0,35 \\ &\quad + (5 + 1,17)^2 \times 0,01 \\ &\approx 6,04. \end{aligned}$$

D'où son écart type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,46.$$

c. On remarque que l'on passe de la variable aléatoire X à la variable aléatoire Y par la relation affine :

$$Y = 2X + 1.$$

La loi de probabilité de Y est alors :

Gain y_i	-5	5	11
$P(X = y_i)$	0,64	0,35	0,01

La formule du cours sur l'espérance donne :

$$E(Y) = E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = -1,34.$$

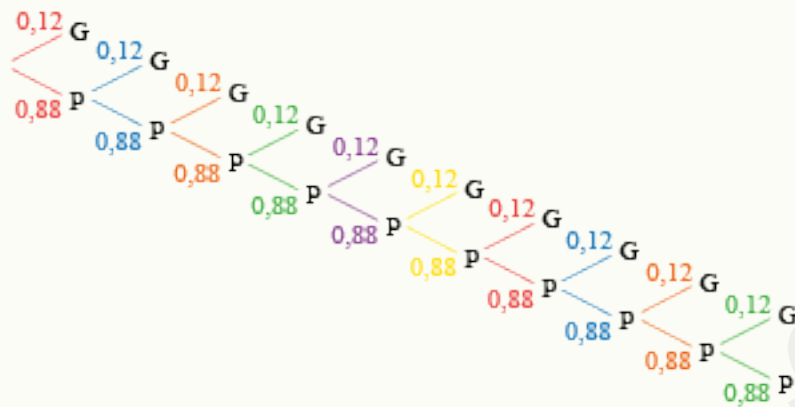
Pour la variance et l'écart-type, on fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned} V(Y) &= 0,64(-5 + 1,34)^2 + 0,35(5 + 1,34)^2 + 0,01(11 + 1,34)^2 \\ &= 24,1644. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 4,92$.

Corrigé de l'exercice 9.13 page 375

- 1 L'arbre est celui d'un schéma de Bernoulli de 10 répétitions, dont on ne garde pas les branches issues d'un succès. C'est ce que l'on appelle une « loi géométrique tronquée », c'est-à-dire une répétition d'une épreuve de Bernoulli (donc à deux issues) lorsque l'une d'elle est obtenue (en l'occurrence, « P », c'est-à-dire l'événement : « la carte est perdante »).



- 2 On note G, l'issue de l'épreuve de Bernoulli : « la carte achetée est gagnante » et P : « la carte est perdante ». L'oncle achète 4 cartes exactement si les 3 premières ne sont pas gagnantes, et si la dernière est gagnante. Il faut donc calculer $P(P, P, P, G) = 0,88^3 \times 0,12 \approx 0,082$.
- 3 L'oncle achète 10 cartes si les 9 premières sont perdantes. La dernière carte n'a pas d'importance puisqu'il s'arrêtera de toute façon car il aura dépensé 20 euros. La probabilité est donc $0,88^9 \approx 0,316$.
- 4 L'oncle ne gagne rien si les 10 cartes achetées sont perdantes. La probabilité de cet événement est $0,88^{10} \approx 0,279$.
- 5 a. L'oncle dépense $2n$ euros lorsqu'il achète n cartes. Pour tout entier n tel que $1 \leq n < 10$, il achète n cartes si les $n - 1$ premières sont perdantes, donc on a $P(X = 2n) = 0,88^{n-1} \times 0,12$.
Par contre $P(X = 20) = 0,88^9$.
On peut résumer la loi de probabilité de X dans le tableau suivant contenant les valeurs approchées au millième :

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$P(X = x_i)$	0,12	0,106	0,093	0,082	0,72	0,063	0,056	0,049	0,043	0,316

- b. On calcule l'espérance de X grâce à la formule du cours et on obtient $E(X) \approx 12,02$.
Cela signifie que sur un grand nombre de semaines, l'oncle peut envisager dépenser en moyenne 12,02 euros par semaine.

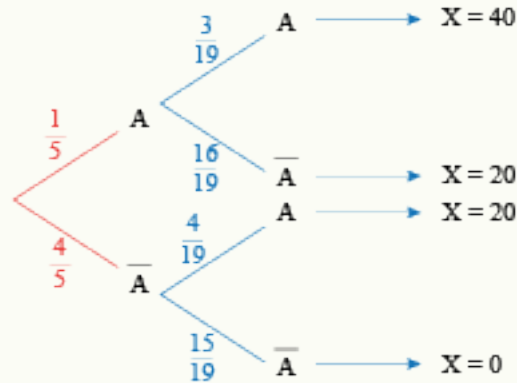
Corrigé de l'exercice 9.14 page 376

- 1 X est la variable aléatoire représentant le nombre de points à l'issue de la première manche.
Il y a 4 boules portant un numéro multiple de 5 : 5, 10, 15 et 20.
Notons A l'événement : « la boule porte le numéro 5, 10, 15 ou 20 ».
Pour la première boule, il y a 4 chances sur 20 de choisir une boule dont le numéro est un multiple de 5, donc $P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.
En revanche, pour la seconde boule, il ne reste plus que 19 boules.

Donc si l'événement A est réalisé pour la première boule, il reste 3 boules adéquates pour la seconde, d'où une probabilité de $\frac{3}{19}$.

Un raisonnement analogue nous donne les autres probabilités.

On peut alors représenter la situation avec l'arbre suivant :



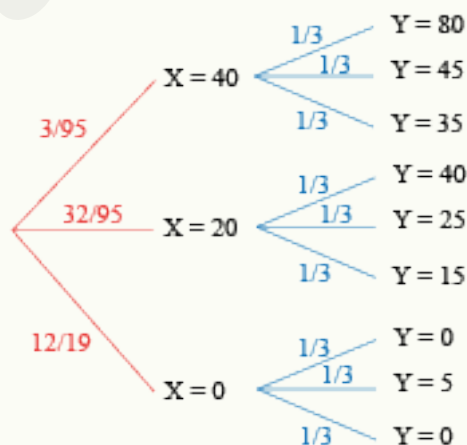
On peut alors donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau :

$X = k$	0	20	40
$P(X = k)$	$\frac{4}{5} \times \frac{15}{19} = \frac{12}{19}$	$1 - \frac{12}{19} - \frac{3}{95} = \frac{32}{95}$	$\frac{1}{5} \times \frac{3}{19} = \frac{3}{95}$

Ainsi,

$$E(X) = 20 \times \frac{32}{95} + 40 \times \frac{3}{95} = 8.$$

2 On peut illustrer la situation à l'aide d'un arbre :



À l'aide du principe multiplicatif, on obtient alors la loi de probabilité de Y suivante :

$Y = k$	0	5	15	25	35	40	45	80
$P(Y = k)$	$\frac{8}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{32}{285}$	$\frac{32}{285}$	$\frac{1}{95}$	$\frac{32}{285}$	$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{95}$

On a ainsi :

$$E(Y) = 5 \times \frac{4}{19} + \dots + 80 \times \frac{1}{95} = \frac{668}{57}.$$

3 Par définition,

$$G = 100Y$$

donc :

$$\begin{aligned} E(G) &= E(100Y) \\ &= 100E(Y) \\ &= \frac{66800}{57} \\ &\approx 1172. \end{aligned}$$

L'organisateur ou l'organisatrice de ce jeu peut donc espérer perdre en moyenne 1 172 €... s'il programme un grand nombre de fois le jeu.

4 $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,2)$ donc $E(Z) = 5 \times 0,2 = 1$, ce qui signifie qu'en moyenne, la personne répond correctement à une seule question, et donc qu'il ou elle perd en moyenne 800 €.

Ainsi, le gain moyen final est :

$$E(G) - 800 \approx 1172 - 800 \approx 372 \text{ €}.$$

Remarque 69

On peut aussi s'intéresser à l'écart-type. Si on note F la variable aléatoire représentant le gain final,

$$F = E(G) - 200Z.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma(F) &= \sigma(E(G) - 200Z) \\ &= 200\sigma(Z) \\ &= 200\sqrt{5 \times 0,2 \times (1 - 0,2)} \\ &\approx 178,88. \end{aligned}$$

Cette valeur est assez conséquente par rapport à $E(F) \approx 372$.

Corrigé de l'exercice 9.15 page 377

- 1 La probabilité d'obtenir un « 6 » au premier lancer est $\frac{1}{6}$ (en supposant que le dé est équilibré). Donc $P(X = 1) = \frac{1}{6}$.
- 2 Obtenir un « 6 » au second lancer sous-entend que l'on a obtenu une autre face que « 6 » au premier lancer, de probabilité $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

La probabilité d'obtenir un « 6 » au second lancer est donc égale à $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

Ainsi, $P(X=2) = \frac{5}{36}$.

- 3** Obtenir un « 6 » au k -ième lancer signifie avoir obtenu $(k-1)$ autres faces que « 6 » avant, dont la probabilité est égale à $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$.

Ainsi, $P(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$.

- 4** a. $u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{1}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}} \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{6}$ et de premier terme $u_1 = \frac{1}{6}$.

- b. D'après le cours, la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est égale à : 1^{er} terme $\times \frac{1 - \text{raison}}{1 - \text{raison}}$ nombre de termes dans la somme. S_n représente la somme des n premiers termes de $(u_n)_{n \geq 1}$ donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$S_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

- c. $0 < \frac{5}{6} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

- 5** a. $f_k(x) = x^k$ donc $f'_k(x) = kx^{k-1}$.

- b. $F_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$
 $= x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$
 $= x(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$
 $= x \times \frac{1 - x^n}{1 - x}$
 $= \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$

Donc $F'_n(x) = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \right)'$.

$F_n(x)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $F'_n = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = x - x^{n+1}$ donc $u'(x) = 1 - (n+1)x^n$;

$v(x) = 1 - x$ donc $v'(x) = -1$.

On a alors :

$$F'_n(x) = \frac{[1 - (n+1)x^n](1-x) - (-1)(x - x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - (n+1)x^n - x + (n+1)x^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$F'_n(x) = \frac{1 - x - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

c. $F'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

Donc : $F'_n\left(\frac{5}{6}\right) = \sum_{k=1}^n k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

$$= \frac{1 - \frac{5}{6} - (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} \quad (\text{d'après la question précédente})$$

$$= \frac{\frac{1}{6} - (n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{\frac{1}{36}}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F'_n\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{36}} = 6$.

Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times 6 = 1$.

Corrigé de l'exercice 9.16 page 377

- 1 À l'aide de la calculatrice, en entrant les données de la loi de probabilité de X dans le menu « Statistiques », on trouve bien les valeurs données dans l'énoncé. Sur la Numworks, par exemple, cela donne :

rad STATISTIQUES		
Données	Histogramme	Boîte Stats
Valeurs V1	Effectifs N1	Valeurs V2
-20	0.78	
0	0.09	
5	0.07	
100	0.06	

rad STATISTIQUES		
Données	Histogramme	Boîte Stats
		V1/N1
Effectif total	$\sum n$	1
Minimum	Min	-20
Maximum	Max	100
Etendue	E	120
Moyenne	\bar{x}	-9.25
Ecart type	σ	28.77825
Variance	var	828.1875
Premier quartile	Q1	-20

- 2 Dans la fonction proposée, la variable x contient un nombre pseudo-aléatoire compris entre 0 et 1, qui peut donc représenter une probabilité.

Dans cette fonction Python, on effectue un test sur la valeur contenue dans x :

- si $x \in [0; 0,78]$, la fonction retourne « -20 », c'est-à-dire la valeur de X pour laquelle $P(X = -20) = 0,78$;
- si $x \in]0,78; 0,78 + 0,09]$, la fonction retourne « 0 », c'est-à-dire la valeur de X pour laquelle $P(X = 0) = 0,09$;
- si $x \in]0,78 + 0,09; 0,78 + 0,09 + 0,07]$, la fonction retourne « 5 », c'est-à-dire la valeur de X pour laquelle $P(X = 5) = 0,07$;
- si $x \in]0,78 + 0,09 + 0,07; 0,78 + 0,09 + 0,07 + 0,06]$, la fonction retourne « 100 », c'est-à-dire la valeur de X pour laquelle $P(X = 100) = 0,06$.

C'est pourquoi cette fonction Python simule bien notre variable aléatoire X .

C'est comme si on devait choisir un point sur le segment $[0; 1]$ partagé ainsi :



- 3 La fonction Python `echantillon(n)` prend un nombre entier n comme argument et appelle n fois la fonction `simul()` définie précédemment. Elle met tous les résultats dans une liste L .

La boucle étant finie, elle retourne « `sum(L)/n` », c'est-à-dire la moyenne de toutes les valeurs contenues dans L .

Pour un n assez grand, cette fonction retourne donc une valeur se rapprochant de l'espérance mathématique de X .

Par exemple, on obtient :

```
>>> echantillon(10**7)
-9.2495405
```

Corrigé de l'exercice 9.17 page 378

- 1 Avant toute chose, notons que : $P(X > k) \leq a \iff P(X \leq k) \geq 1 - a$.

Cela va m'être utile pour ma fonction Python.

En effet, à l'aide du super module *probastat*, on peut définir notre fonction ainsi :

Code Python 9-34

```
1 from probastat import binom
2 def seuil(n,p,a):
3     X = binom(n,p)
4     k = 0
5     while X.proba_cdf(k) < 1-a:
6         k = k + 1
7     return k
```

Par exemple,

```
>>> seuil(50,0.42,0.95)
15
```

- 2 Il faut ici déterminer le plus petit entier n tel que $\text{seuil}(n, 0.9, 0.05) \geq 300$.

Code Python 9-35

```
1 n = 300
2 while seuil(n,0.9,0.05) < 300:
3     n = n + 1
4
5 print(n)
```

On trouve alors $n = 324$. C'est-à-dire que pour 324 billets vendus, la probabilité pour que le nombre de clients se présentant à l'embarquement soit strictement supérieur à 300 est inférieure à 0,05, soit 5%.

Corrigé de l'exercice 9.18 page 379

- 1 Soit k un entier naturel compris entre 1 et n .

L'événement « $X = k$ » est obtenu si $k - 1$ épreuves se sont terminées par un échec, de probabilité $1 - p$, et que la k -ième épreuve s'est terminée par un succès.

D'après le principe multiplicatif, on a alors :

$$P(X = k) = \underbrace{(1 - p) \times (1 - p) \times \cdots \times (1 - p)}_{(k-1) \text{ facteurs}} \times p = p(1 - p)^{k-1}.$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k p (1 - p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{+\infty} k (1 - p)^{k-1} \\ &= p \times \frac{1}{[1 - (1 - p)]^2} \quad \text{car} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2} \\ &= p \times \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}}$$

Remarque 70

Nous manipulons ici une somme infinie car il se peut que le succès n'arrive jamais, et donc que le nombre d'épreuves soit infini.

3 X suit clairement une loi géométrique de paramètre $p = \frac{5}{20} = 0,25$.

Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 4$. Cela signifie qu'il faudra choisir en moyenne 4 boules pour obtenir finalement une noire.

10

Somme de variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

Plan du chapitre

I	Somme de variables aléatoires	398
1	Linéarité de l'espérance	398
2	Variance de deux variables aléatoires indépendantes	399
3	Somme et moyenne de variables indépendantes	400
II	Inégalité de concentration	401
1	Inégalité de Markov	401
2	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	401
III	Loi des grands nombres	402
1	Cas général	402
2	Loi des grands nombres	402
	Enoncés	403
	Corrigés des exercices	409

I - Somme de variables aléatoires

I . 1 - Linéarité de l'espérance

Définition 47 (rappels sur l'espérance mathématique)

Soit $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ une variable aléatoire discrète telle que $P(X = x_i) = p_i$ pour $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

L'espérance mathématique de X est le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_i \times p_i.$$

Exemple 54

X est une variable aléatoire de loi de probabilité :

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\text{Alors, } E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \dots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$$E(X) = 7$$

Définition 48 (somme de deux variables aléatoires)

Soient $X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = \{y_j\}_{1 \leq j \leq p}$ deux variables aléatoires.

On définit la somme de ces deux variables aléatoires comme étant la variable aléatoire :

$$X + Y = \{x_i + y_j\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 55

Si $X = \{1; 2\}$ et $Y = \{-1; 0; 1\}$ alors les différentes sommes possibles des valeurs sont : $1 + (-1) = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 2$, $2 + (-1) = 1$, $2 + 0 = 2$, $2 + 1 = 3$ donc :

$$X + Y = \{0; 1; 2; 3\}.$$

Propriété 58 (linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires. L'espérance de la variable aléatoire $X + Y$ est :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

De plus, pour tout réel a , l'espérance de la variable aléatoire aX est :

$$E(aX) = aE(X).$$

Exemple 56

Xavier et Yvonne vont au restaurant. Xavier hésite de façon équiprobable entre les menus à 18 €, 24 € et 36 €. Yvonne hésite, quant à elle, de façon équiprobable entre les menus à 24 € et 36 €.

On note X et Y les variables aléatoires représentant le prix du menu choisi respectivement par Xavier et Yvonne. Alors, $X = \{18; 24; 36\}$ et $Y = \{24; 36\}$. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3} \times 18 + \frac{1}{3} \times 24 + \frac{1}{3} \times 36 \\ &= 6 + 8 + 12 \\ &= 26 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2} \times 24 + \frac{1}{2} \times 36 \\ &= 12 + 18 \\ &= 30. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 26 + 30 = 56.$$

On peut ainsi dire que le prix moyen de la facture de ce repas est 56 €.

Si Xavier va seul au restaurant 5 fois, et s'il choisit à chaque fois au hasard un menu parmi les 3 cités précédemment, la facture moyenne totale correspondra à $E(5X)$, soit à $5E(X)$, et donc à $5 \times 26 = 130$ €.

I . 2 - Variance de deux variables aléatoires indépendantes

Définition 49 (variables aléatoires indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires.

X et Y sont indépendantes si :

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Propriété 59

Soit X une variable aléatoire. Pour tout réel a , la variance de la variable aléatoire aX est :

$$V(aX) = a^2 V(X).$$

Son écart-type est donc :

$$\sigma(aX) = |a| \sigma(X).$$

Exemple 57

Reprenons le cas de Xavier de l'exemple précédent.

$$V(X) = \frac{1}{3}[(18-26)^2 + (24-26)^2 + (36-30)^2] \\ = 56.$$

Ainsi,

$$V(5X) = 5^2 V(X) = 25 \times 56 = 1\,400.$$

De plus,

$$\sigma(5X) = 5\sigma(X) = 5\sqrt{V(X)} = 10\sqrt{14} \approx 37,42.$$

Remarque 71

Ce dernier résultat peut-être interprété comme une marge d'erreur par rapport à l'espérance : on peut alors dire que pour 5 repas, Xavier paiera 130 € avec une marge d'erreur de 37,42 €.

Cependant, gardons à l'esprit que ce ne sont que des probabilités... et que l'intervalle $[130 - 37,42 ; 130 + 37,42]$ est très approximatif!

Propriété 60

Soient X et Y deux variables aléatoires *indépendantes*.

La variance de la variable aléatoire $X + Y$ est :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

I . 3 - Somme et moyenne de variables indépendantes

Propriété 61 (somme de variables aléatoires indépendantes)

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes. On pose alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Alors,

- $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k)$ et $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$.
- $E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)$ et $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k)$.

II - Inégalité de concentration

II . 1 - Inégalité de Markov

Considérons deux variables aléatoires X et Y telles que $X \leq Y$.
Nous pouvons dans un premier temps écrire que si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.
De plus,

$$E(Y) - E(X) = E(Y - X)$$

et comme $Y - X \geq 0$, on en déduit :

$$E(Y - X) \geq 0 \quad \text{soit :} \quad E(X) \leq E(Y).$$

De ces résultats, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 11 (inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie, et à valeurs positives. Alors :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Une démonstration de ce théorème est à faire dans l'exercice 10.5 page 404.

II . 2 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

À l'aide de l'inégalité de Markov, on déduit le théorème suivant :

Théorème 12 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(X)$.
Quel que soit le réel $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Une démonstration de ce théorème est à faire dans l'exercice 10.6 page 404.

De ce théorème (fondamental), on peut notamment conclure que pour une variable aléatoire quelconque X d'écart-type σ et d'espérance μ :

$$P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2}$$

soit :

$$P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}.$$

Cela signifie alors que la probabilité que les valeurs prises par X diffèrent de 2σ de sa moyenne est inférieure à 0,25.

Remarque 72

Par simulation (manuelle ou informatique), on s'aperçoit en fait que cette probabilité est très souvent majorée par 0,05.

III - Loi des grands nombres

III . 1 - Cas général

Propriété 62

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes ayant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2 . Alors,

$$\forall \delta > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

Une démonstration de ce théorème est à faire dans l'exercice 10.16 page 407.

III . 2 - Loi des grands nombres

Théorème 13 (théorème de Khintchine)

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ . Alors, pour tout réel $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) = 0.$$

Remarque 73

Ce dernier théorème, souvent appelé « loi faible des grands nombres », bien qu'au premier abord simpliste puisque résultant de l'inégalité de concentration prise lorsque n tend vers $+\infty$, est très important.

Il permet notamment de justifier le principe des sondages. En effet, il permet d'interpréter la probabilité (valeur théorique) comme une fréquence (valeur observée) et présente l'espérance comme une moyenne. Ce théorème signifie que la *moyenne empirique*, c'est-à-dire moyenne calculée sur les valeurs observées sur un échantillon de population, converge vers l'espérance quand la taille de cet échantillon devient très grand.

Somme de variables aléatoires

Exercice 10.1 (la base)



On considère 5 variables aléatoires $(X_k)_{1 \leq k \leq 5}$ suivant toutes la loi binomiale $\mathcal{B}(1\,000; 0,75)$. Soit la variable aléatoire $S_5 = X_1 + X_2 + \dots + X_5$. Calculer l'espérance de S_5 .

Solution page 409

Exercice 10.2 (en boulangerie)



Dans les boulangeries de la chaîne « Obonpin », les baguettes sont de temps en temps un peu trop cuites... À vrai dire, elles le sont avec une probabilité de 0,07.

Un contrôleur de la marque « Obonpin » rend visite à 20 boulangeries d'un même département et vérifie 30 baguettes dans chacune d'elles. On suppose que dans chaque boulangerie, le nombre de baguettes réalisées est suffisamment grand pour assimiler ceci à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de baguettes un peu trop cuites à l'issue de ce contrôle.

Déterminer l'espérance mathématique de X , ainsi que sa variance et son écart-type.

Solution page 409

Exercice 10.3 (le jeu télévisé)



Un jeu télévisé est composé de deux manches :

- **Première manche :** le ou la candidat·e choisit d'ouvrir une des trois portes identiques qui se trouvent devant lui ou elle. Derrière chaque porte se trouve un panneau indiquant le montant gagné : « 0 € », « 100 € » ou « 500 € ».

On notera X la variable aléatoire représentant le gain de cette première manche.

- **Seconde manche :** le ou la candidat·e fait tourner une roue partagée en plusieurs secteurs angulaires. Chacun des secteurs correspond à une somme : « 0 € », « 100 € », « 200 € », « 500 € » et « 1 000 € ».

Ici, les secteurs ont une surface telle que la probabilité de gagner x € est égale à $\frac{10}{x}$, pour $x \neq 0$, la probabilité de gagner 0 € étant ce qui reste.

On notera Y la variable aléatoire représentant le gain de cette seconde manche.

On note $Z = X + Y$ le gain à l'issue de ces deux manches, X et Y étant indépendantes.

Calculer le gain moyen d'un·e candidat·e à ce jeu.

Solution page 409

Exercice 10.4 (trajet pour aller travailler)



Chaque jour de la semaine, Hubert prend le train pour aller travailler. Selon les statistiques réalisées sur sa ligne,

- la probabilité que le train ait 5 minutes de retard est égale à la moitié de celle qu'il ait aucun retard;
- la probabilité que le train ait 2 minutes de retard est égale au triple de celle qu'il ait 7 minutes de retard;
- la probabilité qu'il ait 7 minutes de retard est égale au cinquième de celle qu'il n'ait aucun retard.

On suppose qu'il n'y a pas d'autres cas possibles.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de minutes de retard du train d'Hubert un jour pris au hasard.

- 1 Déterminer la loi de probabilité X .
- 2 Calculer l'espérance de X .
- 3 Calculer le retard moyen du train d'Hubert sur un échantillon de 20 jours ouvrés (donc sur un mois).

Solution page 409

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 10.5 (démonstration de l'inégalité de Markov)



On souhaite démontrer l'inégalité de Markov stipulant que pour une variable aléatoire discrète d'espérance finie X à n valeurs positives,

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

On note :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k).$$

- 1 Compléter l'égalité suivante : $E(X) = \sum_{x_k \geq a} \dots + \sum_{x_k < a} \dots$
- 2 Par quel nombre est minorée la deuxième somme?
- 3 Montrer alors que $E(X) \geq aP(X \geq a)$, puis conclure.

Solution page 410

Exercice 10.6 (démonstration de l'inégalité de Bien.-Tchebychev)



On se propose dans cet exercice de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, stipulant que si X est une variable aléatoire discrète d'espérance μ et de variance $V(X)$ alors, quel

que soit le réel $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Pour cela, on considère la variable $Y = [X - E(X)]^2$.

Appliquer l'inégalité de Markov à Y en prenant une valeur de a convenablement choisie afin de démontrer l'inégalité souhaitée.

Solution page 411

Exercice 10.7 (vrai ou faux ?)



Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = 9$ à valeurs positives. Alors, selon l'inégalité de Markov, $P(X \geq 10) \leq \frac{1}{10}$.
- 2 Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = 7$ et de variance $\sigma^2 = 9$. Alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - 7| \geq 18) < 0,028$.

Solution page 411

Exercice 10.8 (dé équilibré)



On jette 3 600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Solution page 412

Exercice 10.9 (pièces d'une usine)



On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

- 1 À l'aide de l'inégalité de Markov, majorer la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces.
- 2 On sait, de plus, que la variance de la production hebdomadaire est de 25. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité que la production de la semaine suivante soit comprise entre 41 et 59.

Solution page 412

Exercice 10.10 (particules émises par une substance radioactive)



Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps Δt . Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps Δt est de 10^3 . On suppose que X suit une loi d'espérance et de variance égales à 10^2 .

Donner une majoration de la probabilité que X dépasse 10^3 .

Solution page 413

Exercice 10.11 (entreprise de télécommunication)



Une entreprise de télécommunications souhaite estimer la proportion de clients satisfaits de leur service. Elle sait que la probabilité qu'un client soit satisfait est de 70 %. L'entreprise interroge un échantillon de 100 clients.

Déterminez une borne supérieure de la probabilité que le nombre de clients satisfaits dans l'échantillon s'écarte de plus de 10 unités de la moyenne.

Solution page 413

Exercice 10.12 (composants électroniques)



Une entreprise de fabrication de composants électroniques sait que la probabilité qu'un composant soit défectueux est de 5 %. L'entreprise teste un lot de 200 composants.

Déterminer une minoration de la probabilité que le nombre de composants défectueux dans le lot soit compris entre 5 et 15.

Solution page 413

Exercice 10.13 (trouver un nombre de lancers de dé)



On lance de manière indépendante n fois un dé équilibré à six faces.

Déterminer une valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir entre 0 et $\frac{n}{3}$ fois le nombre « 1 » soit supérieure à 0,99.

Solution page 414

Exercice 10.14 (extrait du bac Métropole 2024)



Lorsque une personne commande un article sur internet, on considère que le temps de livraison est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 où :

- T_1 représente le nombre entier de jours pour l'acheminement de l'article de l'entrepôt de stockage vers la plateforme de distribution ;
- T_2 représente le nombre de jours pour l'acheminement de l'article de la plateforme vers le domicile du client.

On estime que T_1 et T_2 sont indépendantes et que :

- $\mathbb{E}(T_1) = 4$ et $\mathbb{V}(T_1) = 2$;
- $\mathbb{E}(T_2) = 3$ et $\mathbb{V}(T_2) = 1$.

1 Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T)$ ainsi que sa variance $\mathbb{V}(T)$.

2 Un client passe une commande sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son article entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

Solution page 415

Exercice 10.15



Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $E(X) = \mu$ et une variance $V(X) = \sigma^2$. Soit $a > 0$.

- 1 Soit $\lambda \geq 0$. Démontrer que $P(X - \mu \geq a) = P(X - \mu + \lambda \geq a + \lambda)$.
- 2 Vérifier que $E((X - \mu + \lambda)^2) = \sigma^2 + \lambda^2$.
- 3 Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}$. Aide : on pourra utiliser le fait que $P(Z \geq \alpha) \leq P(Z^2 \geq \alpha^2)$ pour toute variable aléatoire Z .
- 4 En déduire que $P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$.
- 5 Pour quelles valeurs de a obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev?

Solution page 416

Loi des grands nombres

Exercice 10.16 (démonstration de la loi des grands nombres)



On se propose dans cet exercice de démontrer l'inégalité de concentration qui stipule que si X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes ayant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2 alors,

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

- 1 Exprimer $E(M_n)$ et $V(M_n)$ en fonction de μ , n et σ^2 .
- 2 Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable M_n , puis conclure.

Solution page 417

Exercice 10.17 (dans une urne)



On dispose d'une urne dans laquelle sont mises 7 boules rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule de cette urne et on la remet dans l'urne; si la boule choisie est noire, on gagne 1 point. Sinon, on ne gagne pas de point.

On note M_n le gain moyen de points après n répétitions indépendantes de cette expérience. Déterminer une valeur de n pour laquelle la probabilité que la différence entre M_n et 0,3 soit supérieure à 0,1 est inférieure ou égale à 0,5.

Solution page 418

Exercice 10.18 (marche aléatoire sur \mathbb{Z})



On considère une marche aléatoire sur \mathbb{Z} définie de la façon suivante : on part de 0 et, à chaque étape,

- on a une probabilité p de faire un pas vers la droite;
- on a une probabilité $1 - p$ de faire un pas vers la gauche.

Autrement dit, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = 1 - p.$$

On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- 1 Que représente S_n dans le contexte de cet exercice?
- 2 Exprimer, en fonction de p , $E(X_k)$.
- 3 Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Solution page 418

Exercice 10.19 (dans un urne)



Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement avec remise des boules de cette urne. À partir de combien de tirages est-on sûr à 95% que la proportion de boules rouges tirées est dans l'intervalle $]0,35; 0,45[$?

Solution page 419

Exercice 10.20 (usine et pièces mécaniques)



Une usine produit des pièces mécaniques. Le poids moyen d'une pièce est de 100 grammes, et la variance du poids est de 16 grammes² (l'écart-type est donc de 4 grammes). On prélève un échantillon de 50 pièces.

Déterminer une majoration de la probabilité que la moyenne des poids des pièces dans l'échantillon s'écarte de plus de 0.6 grammes de la moyenne théorique (100 grammes).

Solution page 419

Exercice 10.21 (dé à 6 faces)



On lance n fois un dé à 6 faces et on regarde la fréquence d'obtention de la face « 6 ». Que peut-on dire de cette fréquence quand n devient grand?

Solution page 420

Corrigé de l'exercice 10.1 page 403

D'après la propriété 3 sur la somme des variables aléatoires indépendantes,

$$E(S_5) = \sum_{k=1}^5 E(X_k).$$

Or, pour tout entier k compris entre 1 et 5,

$$E(X_k) = 1\,000 \times 0,75 = 750.$$

Par conséquent, $E(S_5) = 5 \times 750 = 3\,750$.

Corrigé de l'exercice 10.2 page 403

Notons Y_k la variable aléatoire représentant le nombre de baguettes un peu trop cuites dans la boulangerie k , pour k entier compris entre 1 et 20.

Alors Y_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,07)$ car le contrôleur vérifie dans chaque boulangerie 30 baguettes (on suppose ici que l'on peut assimiler cette vérification à un tirage aléatoire avec remise car le nombre de baguettes est supposé assez grand).

$$E(Y) = 30 \times 0,07 = 2,1, \quad V(Y) = 30 \times 0,07 \times (1 - 0,07) = 1,953 \text{ et } \sigma(Y) = \sqrt{1,953} \approx 1,397.$$

Ainsi, $X = \sum_{k=1}^{20} Y_k$ et donc, d'après la propriété sur la somme de variables aléatoires indépendantes :

- $E(X) = 20 \times E(Y_1) = 20 \times 2,1 = 42$;
- $V(X) = 20 \times V(Y_1) = 20 \times 1,953 = 39,06$;
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 6,25$.

Corrigé de l'exercice 10.3 page 403

- $E(X) = \frac{0 + 100 + 500}{3} = 200$.
- $E(Y) = 100 \times \frac{10}{100} + 200 \times \frac{10}{200} + 500 \times \frac{10}{500} + 1\,000 \times \frac{10}{1\,000} = 40$.

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 240.$$

Ainsi, le gain moyen d'un.e candidat.e est 240 €.

Corrigé de l'exercice 10.4 page 404

1 Notons $x = P(X = 0)$. La loi de probabilité de X est :

$X = k$	0	2	5	7
$P(X = k)$	x	$\frac{3}{5}x$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{5}x$

La somme des probabilités est égale à 1 donc :

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}x = 1 \iff \frac{23}{10}x = 1$$

$$\iff x = \frac{10}{23}.$$

D'où :

$X = k$	0	2	5	7
$P(X = k)$	$\frac{10}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{2}{23}$

2 $\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{6}{23} + 5 \times \frac{5}{23} + 7 \times \frac{2}{23} = \frac{51}{23}.$

3 Notons X_k la variable aléatoire représentant le nombre de minutes de retard du train d'Hubert le jour k , $1 \leq k \leq 20$.

Posons alors : $M_{20} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{20}}{20}$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{20}) &= \frac{\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_{20})}{20} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \dots + \mathbb{E}(X_{20})}{20} \\ &= \frac{20 \times \frac{51}{23}}{20} \\ &= \frac{51}{23} \\ &\approx 2,22. \end{aligned}$$

Ainsi, le retard moyen du train d'Hubert sur les 20 jours est d'environ 2 min 13 s.

Corrigé de l'exercice 10.5 page 404

1 On peut « couper » la somme désignant l'espérance de X en deux sommes : la première comportant toutes les valeurs de X inférieures strictement à a et la seconde comportant les valeurs de X supérieures ou égales à a , ce qui donne :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_k \geq a} x_k P(X = x_k) + \sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k).$$

2 On sait que $X \geq 0$ donc, pour tout entier k compris entre 1 et n , $x_k \geq 0$. De plus, une probabilité est toujours supérieure ou égale à 0.

Ainsi, pour tout entier $k \in [1; n]$, $x_k P(X = x_k) \geq 0$, ce qui implique que :

$$\sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k) \geq 0.$$

3 De la question précédente, on déduit que :

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{x_k \geq a} x_k P(X = x_k).$$

Or, dans cette somme, $x_k \geq a$, ce qui implique :

$$E(X) \geq \sum_{x_k \geq a} aP(X = x_k)$$

soit :

$$E(X) \geq a \sum_{x_k \geq a} P(X = x_k).$$

De plus, par définition :

$$\sum_{x_k \geq a} P(X = x_k) = P(X \geq a)$$

ce qui implique alors :

$$E(X) \geq aP(X \geq a).$$

On en déduit alors, en divisant par $a \neq 0$:

$$\frac{E(X)}{a} \geq P(X \geq a).$$

Corrigé de l'exercice 10.6 page 404

Par définition, Y est une variable aléatoire à valeurs positives et :

$$E(Y) = E[(X - E(X))^2] = V(X).$$

L'inégalité de Markov appliquée à Y donne alors :

$$\begin{aligned} \forall a > 0, \quad P(Y \geq a) &\leq \frac{E(Y)}{a} \\ \iff \forall a > 0, \quad P\left((X - E(X))^2 \geq a\right) &\leq \frac{V(X)}{a}. \end{aligned}$$

Posons alors $a = \delta^2$ avec $\delta > 0$. On obtient alors :

$$\forall \delta > 0, \quad P\left((X - E(X))^2 \geq \delta^2\right) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Or,

$$(X - E(X))^2 \geq \delta^2 \iff |X - E(X)| \geq \delta$$

car $\delta > 0$. Cela donne alors :

$$\forall \delta > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Corrigé de l'exercice 10.7 page 405

1 Faux. Selon l'inégalité de Markov, $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$, ce qui donne dans notre cas :

$$P(X \geq 10) \leq \frac{9}{10}.$$

2 *Vrai.* En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

ce qui donne dans notre cas :

$$P(|X - 7| \geq 18) \leq \frac{9}{18^2}$$

soit :

$$P(|X - 7| \geq 18) \leq \frac{1}{36} < 0,028.$$

Corrigé de l'exercice 10.8 page 405

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit une loi binomiale de paramètres 3 600 et $\frac{1}{6}$. On sait donc que :

$$E(S) = 600 \quad \text{et} \quad V(S) = 500.$$

De plus,

$$480 < S < 720 \iff -120 < S - 600 < 120 \iff |S - 600| < 120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$P(|S - 600| \geq 120) \leq \frac{500}{120^2} \leq 0,035.$$

On en déduit que :

$$P(480 < S < 720) \geq 1 - 0,03415067$$

soit :

$$P(480 < S < 720) \geq 0,965849.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3 600 lancers est supérieure à 0,96.

Corrigé de l'exercice 10.9 page 405

1 Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces sortant de l'usine en l'espace d'une semaine.

D'après l'inégalité de Markov,

$$P(X > 75) \leq \frac{50}{75}$$

soit :

$$P(X > 75) \leq 0,67.$$

2 On souhaite une minoration de :

$$P(41 \leq X \leq 59) = P(50 - 9 \leq X \leq 50 + 9) = P(|X - 50| \leq 9).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2}$$

soit :

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq 0,25.$$

On en déduit alors que :

$$1 - P(|X - 50| < 10) \leq 0,25$$

et donc :

$$P(|X - 50| \leq 9) \geq 0,75.$$

La probabilité pour que la production de la semaine suivante soit comprise entre 41 et 59 est donc au moins de 75%.

Corrigé de l'exercice 10.10 page 405

Pour que X soit supérieure à 10^3 , il faut que $|X - 100| > 900$. On utilise donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 900$:

$$P(|X - 100| \geq 900) \leq \frac{100}{900^2} \leq 0,000124.$$

Ainsi, $P(X \geq 10^3) \leq 0,000124$.

Corrigé de l'exercice 10.11 page 406

Posons X la variable aléatoire représentant le nombre de clients satisfaits sur les 100 clients contactés.

Alors, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,7$.

Son espérance est alors $E(X) = np = 70$ et sa variance est $V(X) = np(1 - p) = 21$.

Le théorème de Bienaymé-Tchebychev nous donne alors :

$$\forall \delta > 0, \quad P(|X - 70| \geq \delta) \leq \frac{21}{\delta^2}.$$

On souhaite déterminer une borne supérieure de la probabilité que le nombre de clients satisfaits dans l'échantillon s'écarte de plus de 10 unités de la moyenne, donc prenons $\delta = 11$:

$$P(|X - 70| \geq 11) \leq \frac{21}{121} \leq 0,173.$$

Corrigé de l'exercice 10.12 page 406

Posons X la variable aléatoire représentant le nombre de composants défectueux sur les 200 testés.

Alors, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,05$.

Ainsi, $E(X) = np = 10$ et $V(X) = np(1 - p) = 9,5$.

Le théorème de Bienaymé-Tchebychev nous dit alors :

$$\forall \delta > 0, \quad P(|X - 10| \geq \delta) \leq \frac{9,5}{\delta^2}.$$

On veut déterminer une minoration de la probabilité que le nombre de composants défectueux dans le lot soit compris entre 5 et 15 (soit $10 - 5$ et $10 + 5$).

On va donc prendre $\delta = 6$:

$$\begin{aligned} P(|X - 10| \geq 6) &\leq \frac{9,5}{6^2} \iff 1 - P(|X - 10| < 6) \leq \frac{9,5}{36} \\ &\iff P(|X - 10| \leq 5) \geq 1 - \frac{9,5}{36} \geq 0,736. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10.13 page 406

Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de « 1 » obtenus.

X suit alors la loi $\mathcal{B}(n; \frac{1}{6})$ et a donc une espérance égale à $\frac{n}{6}$ et une variance égale à

$$np(1-p) = \frac{5n}{36}.$$

On nous demande ici de trouver un entier n tel que :

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{n}{3}\right) \geq 0,99.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, \quad P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geq \delta\right) &\leq \frac{5n}{36\delta^2} \\ \iff P\left[\left(X - \frac{n}{6} \leq -\delta\right) \cup \left(X - \frac{n}{6} \geq \delta\right)\right] &\leq \frac{5n}{36\delta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, \quad \iff 1 - P\left(-\delta \leq X - \frac{n}{6} \leq \delta\right) &\leq \frac{5n}{36\delta^2} \\ \iff P\left(-\delta \leq X - \frac{n}{6} \leq \delta\right) &\geq 1 - \frac{5n}{36\delta^2}. \end{aligned}$$

On aimerait arriver à une inégalité avec $P\left(0 \leq X \leq \frac{n}{3}\right)$; cela nous pousse à prendre $\delta = \frac{n}{6}$ pour obtenir :

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{n}{3}\right) \geq 1 - \frac{5}{n}.$$

Ainsi, il suffit de choisir un n tel que :

$$1 - \frac{5}{n} \geq 0,99 \iff n \geq 500.$$

Nous sommes donc assurés que pour $n \geq 500$, notre probabilité est supérieure à 0,99.

Remarque 76

Ce raisonnement nous assure que la probabilité est supérieure à 0,99 pour $n \geq 500$ sans affirmer que 500 est la valeur minimale. Pour avoir une valeur minimale, on peut écrire un programme Python (par exemple) qui calcule cette probabilité en partant de $n = 500$ et en baissant cette valeur jusqu'à obtenir une probabilité inférieure à 0,99.

Code Python 10-37

```
1 from scipy.stats import binom
2 n = 500
3 while binom.cdf(n//3, n, 1/6) >= 0.99:
4     print('n = {} ; proba = {}'.format(n, binom.cdf(n//3, n, 1/6)))
5     n -= 1
```

Ce programme nous donne comme dernière valeur de n , donc comme valeur minimale de n : $n = 33$. Autant dire que nous en sommes loin avec l'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff...

Corrigé de l'exercice 10.14 page 406

- 1
 - Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1 + T_2) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2) = 4 + 3 = 7$;
 - De plus, T_1 et T_2 sont indépendantes donc $\mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(T_1) + \mathbb{V}(T_2) = 2 + 1 = 3$.
- 2 Nous cherchons ici à démontrer que :

$$\begin{aligned} P(5 \leq T \leq 9) &\geq \frac{2}{3} \iff P(7 - 2 \leq T \leq 7 + 2) \geq \frac{2}{3} \\ &\iff P(|T - 7| \leq 2) \geq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, \quad P(|T - \mathbb{E}(T)| \geq \delta) &\leq \frac{\mathbb{V}(T)}{\delta^2} \\ \iff \forall \delta > 0, \quad P(|T - 7| \geq \delta) &\leq \frac{3}{\delta^2} \end{aligned}$$

En prenant alors $\delta = 3$, on a :

$$\begin{aligned} P(|T - 7| \geq 3) &\leq \frac{3}{3^2} \\ \iff 1 - P(|T - 7| < 3) &\leq \frac{1}{3} \\ \iff 1 - P(|T - 7| \leq 2) &\leq \frac{1}{3} \quad \text{car } |T - 7| \text{ est entier} \\ \iff P(|T - 7| \leq 2) &\geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10.15 page 407

1 On a :

$$X - \mu \geq a \iff X - \mu + \lambda \geq a + \lambda$$

donc la probabilité des deux événements $(X - \mu \geq a)$ et $(X - \mu + \lambda \geq a + \lambda)$ sont égales.

2 Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E((X - \mu + \lambda)^2) &= E((X - \mu)^2 + 2(X - \mu)\lambda + \lambda^2) \\ &= E((X - \mu)^2) + 2\lambda E(X - \mu) + \lambda^2 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=V(X)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} \\ &= \sigma^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

3 Dans un premier temps, on a :

$$P(X - \mu \geq a) = P(X - \mu + \lambda \geq a + \lambda).$$

Or,

$$P(X - \mu + \lambda \geq a + \lambda) \leq P((X - \mu + \lambda)^2 \geq (a + \lambda)^2).$$

Ainsi,

$$P(X - \mu \geq a) \leq P((X - \mu + \lambda)^2 \geq (a + \lambda)^2).$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mu + \lambda)^2$, on obtient :

$$P((X - \mu + \lambda)^2 \geq (a + \lambda)^2) \leq \frac{E[(X - \mu + \lambda)^2]}{(a + \lambda)^2}.$$

Ainsi,

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{E[(X - \mu + \lambda)^2]}{(a + \lambda)^2}$$

d'où :

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}.$$

4 Posons $f(\lambda) = \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}$, avec $\lambda \geq 0$.

Sa dérivée vaut :

$$f'(\lambda) = 2 \frac{a\lambda - \sigma^2}{(a + \lambda)^3}.$$

On en déduit que $f'(\lambda) > 0 \iff \lambda > \frac{\sigma^2}{a}$.

Notamment, f admet un minimum en $\lambda = \frac{\sigma^2}{a}$, et ce minimum vaut $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

Ainsi,

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

On peut écrire :

$$(|X - \mu| \geq a) = (X - \mu \geq a) \cup (\mu - X \geq a).$$

Les deux événements $(X - \mu \geq a)$ et $(\mu - X \geq a)$ étant disjoints,

$$P(|X - \mu| \geq a) = P(X - \mu \geq a) + P(\mu - X \geq a).$$

À l'aide de la question précédente, appliquée à $X - \mu$ et à $\mu - X$, on obtient :

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

soit :

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

5 Cette dernière inégalité est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si :

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} &< \frac{\sigma^2}{a^2} &\iff \frac{2}{\sigma^2 + a^2} &< \frac{1}{a^2} \\ &&\iff \frac{\sigma^2 + a^2}{2} &> a^2 \\ &&\iff \frac{\sigma^2 + a^2}{2} &> \frac{2a^2}{2} \\ &&\iff \sigma^2 &> a^2 \\ &&\iff a < \sigma &\text{ car } a \text{ et } \sigma \text{ sont positifs.} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10.16 page 407

1 Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n}[E(X_1) + \dots + E(X_n)] = \frac{1}{n}(\mu + \dots + \mu) = \frac{1}{n} \times n\mu \\ E(M_n) &= \mu. \end{aligned}$$

De plus, comme les X_k sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} V(M_n) &= V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}[V(X_1) + \dots + V(X_n)] = \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \dots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

2 D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n , pour tout $\delta > 0$, on a :

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

Corrigé de l'exercice 10.17 page 407

On cherche un entier n tel que :

$$P(|M_n - 0,3| \geq 0,1) \leq 0,5.$$

Notons X_k le nombre de points gagnés au k -ième tirage, $1 \leq k \leq n$.

X_k suit la loi de Bernoulli de probabilité $p = \frac{3}{10} = 0,3$ et de variance $\sigma^2 = 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,21$.

De plus, par définition, les X_k sont indépendantes donc on peut utiliser la propriété du cours sur l'inégalité de concentration sur la moyenne :

$$P(|M_n - 0,3| \geq 0,1) \leq \frac{0,21}{0,1^2 n}.$$

On souhaite que $P(|M_n - 0,3| \geq 0,1) \leq 0,5$ donc il suffit de choisir n tel que :

$$\begin{aligned} \frac{0,21}{0,1^2 n} \leq 0,5 &\iff \frac{0,1^2 n}{0,21} \geq \frac{1}{0,5} \\ &\iff 0,1^2 n \geq \frac{1}{0,5} \times 0,21 \\ &\iff n \geq \frac{1}{0,5} \times \frac{0,21}{0,1^2} \\ &\iff n \geq 42. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10.18 page 408

1 Regardons les premières valeurs de S_n :

- $S_1 \in \{-1; 1\}$ car X_1 ne peut prendre pour valeurs que -1 ou 1 ;
- $S_2 \in \{-1-1; -1+1; 1-1; 1+1\}$ soit $S_2 \in \{-2; 0; 2\}$;
- $S_3 \in \{-3; -1; 1; 3\}$.

On s'aperçoit que S_n est la position à laquelle nous nous trouvons dans \mathbb{Z} à la fin de l'étape n .

2 $\mu = E(X_k) = 1 \times P(X_k = 1) + (-1) \times P(X_k = -1) = 1 \times p + (-1) \times (1 - p) = 2p - 1$.

3 $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et d'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres),

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) = 0.$$

Cela signifie donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 2p - 1$.

Corrigé de l'exercice 10.19 page 408

Pour $1 \leq k \leq n$, considérons l'événement :

« une boule rouge est tirée lors du k -ième tirage ».

Notons alors X_k la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges obtenues lors du k -ième tirage. X_k soit la loi de Bernoulli de probabilité $\frac{2}{5}$, a pour espérance $\mu = \frac{2}{5} = 0,4$ et pour variance $\sigma^2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 0,24$.

La proportion de boules rouges obtenues après n tirages est $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

On cherche donc la première valeur de n à partir de laquelle :

$$P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq 0,95.$$

La propriété du cours sur l'inégalité de concentration sur la moyenne nous dit que, pour $\delta = 0,05$:

$$P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq \frac{0,24}{0,0025n}.$$

Une valeur de n satisfaisante est donc la plus petite valeur de n telle que :

$$\begin{aligned} \frac{0,24}{0,0025n} \leq 0,05 &\Leftrightarrow \frac{0,0025n}{0,24} \geq \frac{1}{0,05} \\ &\Leftrightarrow 0,0025n \geq \frac{0,24}{0,05} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{0,24}{0,05 \times 0,0025} \\ &\Leftrightarrow n \geq 1920. \end{aligned}$$

Ce dernier résultat nous assure à 95% que la proportion de boules rouges tirées se trouve dans l'intervalle $]0,35; 0,45[$.

Remarque 77

Si l'on effectue des simulations de cette expérience, on peut se rendre compte que l'on obtient une proportion dans l'intervalle pour des valeurs de n plus petites. Il est donc important de se souvenir que l'inégalité de concentration nous assure une valeur de n adéquate mais qu'elle n'est pas toujours minimale.

Corrigé de l'exercice 10.20 page 408

Notons X_k la masse de la pièce contrôlée numéro k , où $1 \leq k \leq 50$ puisque l'on prélève 50 pièces. On a d'après l'énoncé $E(X_k) = 100$ et $V(X_k) = 16$.

La propriété du cours sur l'inégalité de concentration sur la moyenne donne :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_{50}}{50} - 100\right| \geq \delta\right) \leq \frac{16}{50 \times \delta^2}.$$

On prend ici $\delta = 0,6$ car on nous demande de déterminer une majoration de la probabilité que la moyenne des poids des pièces dans l'échantillon s'écarte de plus de 0.6 grammes de la moyenne théorique. Cela donne :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_{50}}{50} - 100\right| \geq 0,6\right) \leq \frac{16}{50 \times 0,6^2} \leq 0,89.$$

Corrigé de l'exercice 10.21 page 408

D'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres), si on note pour $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{cases} X_k = 1 & \text{si on obtient un « 6 »} \\ X_k = 0 & \text{Si on n'obtient pas un « 6 »} \end{cases}$$

où les X_k sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{6}$ et donc d'espérance $\mu = \frac{1}{6}$, on peut écrire pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) = 0$$

ce qui signifie que la fréquence $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ se rapprochera de $\mu = \frac{1}{6}$ quand n deviendra de plus en plus grand.