

Première

Edition 2026 - 2027

Mathématiques

Enseignement de spécialité

Stéphane Pasquet


Uniquement sur mathweb.fr





Table des matières

AVANT–PROPOS	iii
1 Dérivation et ses applications	1

 23 exercices entièrement corrigés



AVANT – PROPOS

Ce livre s'adresse aux élèves de Terminale qui suivent l'enseignement de spécialité « Mathématiques ». Les parents et les enseignants y trouveront également matière à accompagner ou approfondir les notions abordées.


Il est conforme au programme officiel de l'Éducation Nationale française en vigueur.

Cette édition est une version revue, corrigée et enrichie de la précédente. Pour chaque chapitre, vous trouverez :

- un cours complet réunissant les outils mathématiques nécessaires à la compréhension de la notion abordée ;
- des exercices types, destinés à illustrer les notions fondamentales à maîtriser ;
- les énoncés des exercices ;
- leurs corrigés détaillés.

Chaque exercice est accompagné d'une indication de difficulté :

- ★ exercice accessible ;
- ★★ exercice de niveau intermédiaire ;
- ★★★ exercice nécessitant un raisonnement plus approfondi.

Un pictogramme  cliquable accompagne chaque énoncé : il vous redirige vers une page de mon site internet où vous pouvez signaler une erreur ou laisser un commentaire.

À la fin de chaque énoncé figure le numéro de la page du corrigé correspondant, sur lequel vous pouvez cliquer pour y accéder directement.

Chaque chapitre se clôt par une section « **Objectif bac** » composée d'extraits de sujets d'examens des années précédentes. Ces exercices permettront aux élèves de s'évaluer sur les notions du chapitre, à un niveau représentatif de celui attendu lors de l'épreuve finale.

En fin de volume, vous trouverez un sujet de bac entièrement inédit, de ma composition. Son niveau est volontairement légèrement supérieur à celui de l'examen, à l'image d'un bac blanc tel qu'on peut en proposer en cours d'année.

Je vous remercie de la confiance que vous accordez à ce livre. Il est le fruit d'un travail long et minutieux ; aussi je vous serais reconnaissant de le partager avec respect : ce livre est à usage strictement personnel et sa reproduction ou sa revente, sous quelque forme que ce soit, est formellement interdite.

L'auteur,
Stéphane Pasquet

1

Dérivation et ses applications

1	Première approche historique	2
2	Nombre dérivé	3
1	Approche géométrique	3
2	Définition et exemples fondamentaux	4
3	Interprétations du nombre dérivé	7
a	En physique	7
b	En économie	7
3	Équation de la tangente	7
1	Définition	7
2	Équation	8
4	Fonction dérivée	9
1	Définition	9
2	Dérivées de référence	9
3	Dérivée d'une fonction composée	9
5	Fonction valeur absolue	10
1	Définition (rappel de Seconde)	10
2	Courbe représentative	10
3	Dérivée	11
6	Opérations sur les dérivées	11
7	Applications de la dérivation	13
1	Variation d'une fonction	13
2	Extremum local	14
3	Méthode de Newton	14
a	Formalisation	16
b	Algorithme	16
	Exercices types	17
	Exercices	19
	Nombre dérivé et tangente	19
	Calculs de dérivées	21
	Optimisation	23
	Corrigés des exercices	27

Dans ce chapitre

1 Première approche historique

0 Archimède

Archimède de Syracuse (–287 – –212) était un savant grec. Il semblerait qu’il fût le premier à se pencher sur la notion de *tangente* à une courbe, une droite qui « frôle » une courbe et la touche en un seul point.

0 Torricelli

Plusieurs siècles plus tard, l’italien Torricelli (1608 – 1646) et le français Roberval (1602 – 1675) continuèrent les travaux d’Archimède et apportèrent ainsi les premières notions sérieuses du calcul dit *infinitésimal*.

0 Pierre de Fermat

Le mathématicien français Pierre de Fermat (vers 1601 – 1665), surnommé le « prince des amateurs » car les mathématiques étaient pour lui plus un passe-temps qu’un métier, décrit ensuite la tangente comme la position limite d’une sécante à une courbe. C’est la définition qu’on utilise aujourd’hui (voir paragraphe II).

0 René Descartes

René Descartes (1596 – 1650), souvent très dur envers Fermat, critiquera le manque de rigueur de ce dernier ce qui pousse Fermat à clarifier et à étendre sa méthode.

0 En Angleterre : Wallis, Gregory, Barrow et Newton

Les méthodes analytiques de Descartes et de Fermat ont beaucoup de succès en Angleterre et sont donc reprises par John Wallis (1616 – 1707) et James Gregory (1638 – 1675). Ceci pousse le mathématicien Isaac Barrow (1630 – 1677), le prédécesseur d’Isaac Newton (1643 – 1727) à la chaire de mathématiques de l’université de Cambridge à développer une méthode des tangentes par le calcul, très proche de celle actuellement utilisée. Il expose cette méthode dans ses cours. Puis les mathématiciens anglais Newton (1643 – 1727) et allemand Leibniz (1646 – 1716), indépendamment l’un de l’autre, inventent des procédés algorithmiques, ce qui tend à faire de l’analyse dite *infinitésimale* une branche autonome des mathématiques. Newton publie en 1736 sa méthode la plus célèbre, la *méthode des fluxions et des suites infinies*.

0 Blaise Pascal

C’est cependant Blaise Pascal qui, dans la seconde moitié du XVII^e siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Le marquis de l’Hospital contribuera à diffuser le calcul différentiel de Leibniz à la fin du XVII^e siècle grâce à son livre sur l’analyse des infiniment petits. Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d’intégrales qui porte son nom) contribua également à l’essor de l’analyse différentielle. Néanmoins cette théorie tout juste éclosée n’est pas encore, à l’époque, pourvue de toute la rigueur mathématique qu’elle aurait exigée, et notamment la notion d’infiniment petit introduite par Newton, qui tient plus de l’intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l’on ne s’entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable.

0 Jean le Rond d'Alembert

C'est au XVIII^e siècle que Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

0 Joseph-Louis Lagrange

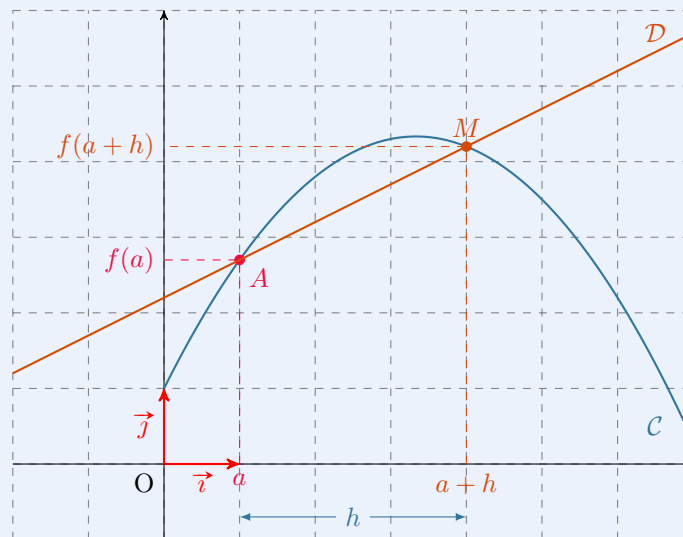
C'est au mathématicien français Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x . C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

Source : math93.com.

2 Nombre dérivé

1 Approche géométrique

Considérons la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f , et un point $A(a; f(a))$.
Considérons ensuite un point $M(a+h; f(a+h))$ où $h \in \mathbb{R}$, et la droite \mathcal{D} passant par A et M

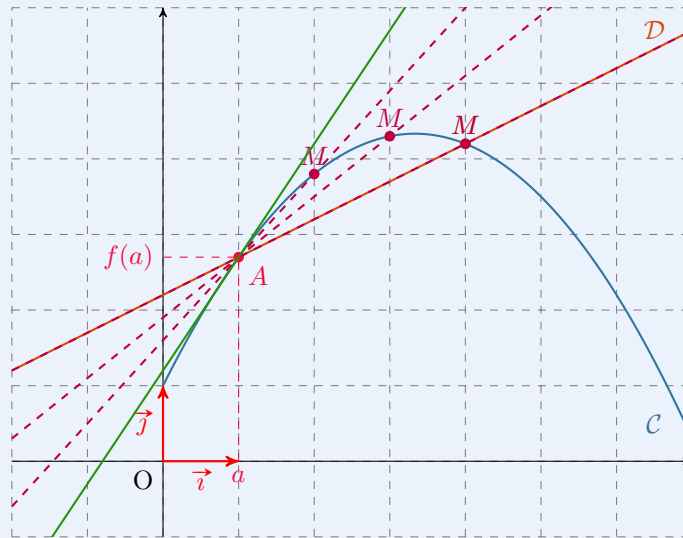


\mathcal{D} est appelée la **sécante** à \mathcal{C} passant par A et M .

Le coefficient directeur de cette sécante est appelé le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$; d'après la formule vue en classe de Seconde, il est égal à :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si M se rapproche de A , c'est-à-dire si h se rapproche de 0, alors la droite \mathcal{D} se rapproche d'une droite \mathcal{T} (en vert ci-dessous) qui « frôle » \mathcal{C} et qui la touche au point A .



Ainsi, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ se rapproche du coefficient directeur de \mathcal{T} . On dit que la *limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0* est égal au coefficient directeur de \mathcal{T} , et on note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{coefficient directeur de } \mathcal{T}.$$

En prenant $f(x) = -0,3x^2 + 2x + 1$, on peut alors écrire un programme (en Python par exemple) qui écrit les coefficients directeurs successifs de \mathcal{D} quand h se rapproche de 0 :

```
Code Python 1-1
1 def f(x):
2     return -0.3*x*x+2*x+1
3
4 def coef(a):
5     h = a
6     while (h > 0):
7         m = ( f(a+h) - f(a) ) / h
8         print('h =', h, ', ', 'm =', m)
9         h = h - 0.01
10
11 coef(1)
```

```
...
h = 0.03999999999999925, m = 1.387999999999993
h = 0.02999999999999925, m = 1.390999999999993
h = 0.019999999999999248, m = 1.3939999999999921
h = 0.009999999999999247, m = 1.3969999999999758
```

2 Définition et exemples fondamentaux

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

On définit le **nombre dérivé de f en a** comme étant le nombre noté $f'(a)$ tel que :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 1 (la fonction carré)

Posons $f(x) = x^2$, et calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$, où a est un nombre quelconque et $h > 0$:

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} \\ &= 2a + h.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a + 0 = 2a.$$

Quelle que soit la valeur de a , le nombre dérivé de x^2 en a est $f'(a) = 2a$.

Exemple 2 (la fonction cube)

Posons $f(x) = x^3$, et calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$, où a est un nombre quelconque et $h > 0$:

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{\cancel{a^3} + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - \cancel{a^3}}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(3a^2 + 3ah + h^2)}{\cancel{h}} \\ &= 3a^2 + 3ah + h^2.\end{aligned}$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2.$$

Quelle que soit la valeur de a , le nombre dérivé de x^3 en a est $f'(a) = 3a^2$.

Exemple 3 (la fonction racine carrée)

Posons $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{(\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Quelle que soit la valeur de a , le nombre dérivé de \sqrt{x} en a est $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Exemple 4 (la fonction inverse)

Posons $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= -\frac{h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} \\ &= -\frac{1}{a(a+h)}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a(a+h)} \right) = -\frac{1}{a^2}.$$

Quelle que soit la valeur de a , le nombre dérivé de $\frac{1}{x}$ en a est $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

3 Interprétations du nombre dérivé

a En physique

Imaginons un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale.
La distance qu'il parcourt en t secondes est égale à $x(t) = 5t^2$.
Sa vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est :

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

car $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$. On peut aussi noter :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

« Δ » désignant ici la variation (et non le discriminant).

La **vitesse instantanée** est la vitesse à un instant donné. Ainsi, la vitesse instantanée à l'instant t peut être vue comme étant égale à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$, donc égale à $x'(t)$.

Le nombre dérivé peut donc être perçu comme une vitesse instantanée. En liaison avec la notation $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (pour le taux d'accroissement), on peut aussi noter :

$$v'(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

b En économie

On définit le **coût marginal de production** comme le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite. Si C représente le coût total, on note C_m le coût marginal associé.
Le coût marginal sert à évaluer s'il est rentable d'accepter une commande supplémentaire.

On peut alors exprimer le coût marginal par :

$$C_m(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}.$$

On s'aperçoit que le coût marginal n'est rien d'autre que le nombre dérivé du coût total.

3 Équation de la tangente

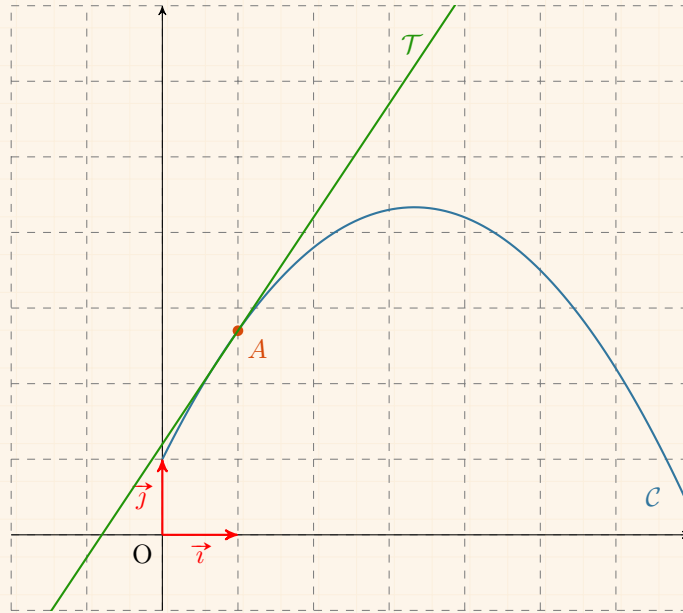
1 Définition

Définition 2

Soit C la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

On appelle **tangente à C au point d'abscisse a** la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a; f(a))$.

Exemple 5



T est ici la tangente à C au point d'abscisse 1.

2 Équation

Propriété 1

Soit C la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.
L'équation réduite de la tangente à C au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Démonstration 1

Par définition, le coefficient de la tangente est $f'(a)$ donc l'équation réduite de la tangente est de la forme :

$$y = f'(a)x + p.$$

On sait de plus que le point de coordonnées $(a; f(a))$ est sur C donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

donc :

$$p = f(a) - af'(a).$$

Ainsi, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

soit, en factorisant une partie du second membre par $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

4 Fonction dérivée

1 Définition

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
On définit la **fonction dérivée de f** comme étant la fonction :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x .

Si $f'(x)$ est définie sur un intervalle J inclus dans I alors on dit que f est **dérivable sur J** .

2 Dérivées de référence

Propriété 2

D'après les exemples 1, 2, 3 et 4, on peut écrire :

- 1 Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$ sur \mathbb{R} .
- 2 Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ sur \mathbb{R} .
- 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$ (la fonction n'est pas dérivable en 0).
- 4 Si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

De plus,

- 5 Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$ (avec $x \neq 0$ si $n < 0$).

3 Dérivée d'une fonction composée

Propriété 3

Soit la fonction $x \mapsto g(ax + b)$, où a et b sont deux nombres réels.
Alors, sa fonction dérivée est :

$$x \mapsto ag'(ax + b).$$

Exemple 6

- 1 $f(x) = \sqrt{-5x + 20}$, définie sur $]-\infty; 4]$.

Ici, $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = g(-5x + 20)$.

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ donc } f'(x) = -5g'(-5x + 20) \text{ soit :}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{-5x + 20}}, \text{ définie sur }]-\infty; 4[.$$

2 $f(x) = \frac{1}{4x+12}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Ici, $g(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = g(4x+12)$.

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'(x) = 4g'(4x+12)$ soit :

$$f'(x) = -\frac{4}{(4x+12)^2}, \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

5 Fonction valeur absolue

1 Définition (rappel de Seconde)

Définition 4

Pour tout réel x , on définit la **valeur absolue de x** , et on note $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 7

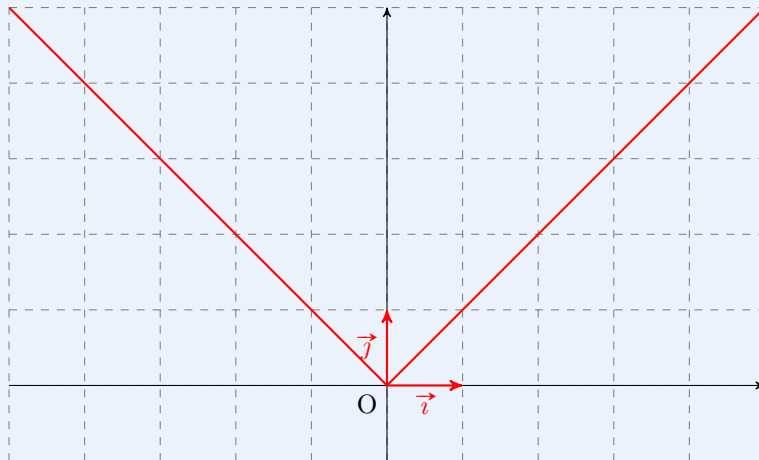
1 $|-5| = 5$ car $-5 < 0$.

3 $|0| = 0$.

2 $|3| = 3$ car $3 \geq 0$.

4 $|\pi| = \pi$ car $\pi \geq 0$.

2 Courbe représentative



3 Dérivée

Propriété 4

Soit $f(x) = |x|$. Alors,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et $f'(0)$ n'existe pas.

Remarque 1

On dit que la fonction n'est pas dérivable en 0.

Démonstration 2

D'après la relation $(x^n)' = nx^{n-1}$, on sait que la dérivée de $x \mapsto x$ est $x \mapsto 1$, et celle de $x \mapsto -x$ est $x \mapsto -1$.

Or, si $x < 0$, $|x| = -x$ donc sur $]-\infty; 0[$, la dérivée de $x \mapsto |x|$ est celle de $x \mapsto -x$, c'est-à-dire $x \mapsto -1$.

De plus, si $x > 0$, $|x| = x$ donc sur $]0; +\infty[$, la dérivée de $x \mapsto |x|$ est celle de $x \mapsto x$, c'est-à-dire $x \mapsto 1$.

Le nombre dérivé de $x \mapsto |x|$ à gauche de 0 est donc égal à -1 alors que celui à droite de 0 vaut 1. Ainsi, en 0, il n'y a pas le même nombre dérivé à gauche et à droite : $f'(0)$ n'existe donc pas.

6 Opérations sur les dérivées

Propriété 5 (formules usuelles)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

1 $(ku)' = ku'$

2 $(u + v)' = u' + v'$

3 $(u - v)' = u' - v'$

4 $(uv)' = u'v + uv'$

5 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 8 (produit d'un nombre et d'une fonction)

$f(x) = 3x^2$. On pose alors $u(x) = x^2$ et $k = 3$. Comme $u'(x) = 2x$, on a :

$$f'(x) = 3 \times 2x = 6x.$$

Exemple 9 (somme)

$f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 1$. Pour calculer $f'(x)$, on calcule la dérivée de chaque terme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3)' + (5x^2)' + (3x)' + (1)' \\ &= 4 \times 3x^2 + 5 \times 2x + 3 \times 1 + 0 \\ &= 12x^2 + 10x + 3. \end{aligned}$$

Exemple 10 (différence)

$f(x) = 8x^5 - 5x^2$. Pour calculer $f'(x)$, on calcule la dérivée de chaque terme :

$$\begin{aligned}f'(x) &= (8x^5)' - (5x^2)' \\ &= 8 \times 5x^4 - 5 \times 2x \\ &= 40x^4 - 10x.\end{aligned}$$

Exemple 11 (produit de deux fonctions)

$f(x) = (3x + 1)\sqrt{2x + 5}$. On pose :

$$\begin{aligned}u(x) &= 3x + 1 \\ u'(x) &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x) &= \sqrt{2x + 5} \\ v'(x) &= \frac{2}{2\sqrt{2x + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 5}}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3 \times \sqrt{2x + 5} + (3x + 1) \times \frac{1}{\sqrt{2x + 5}} \\ &= 3\sqrt{2x + 5} + \frac{3x + 1}{\sqrt{2x + 5}} \\ &= \frac{3\sqrt{2x + 5} \times \sqrt{2x + 5} + (3x + 1)}{\sqrt{2x + 5}} \\ &= \frac{3(2x + 5) + 3x + 1}{\sqrt{2x + 5}} \\ &= \frac{9x + 16}{\sqrt{2x + 5}}.\end{aligned}$$

Exemple 12 (quotient de deux fonctions)

$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x + 3}$. On pose :

$$\begin{aligned}u(x) &= 3x^2 - 5x + 2 \\ u'(x) &= 6x - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x) &= x + 3 \\ v'(x) &= 1\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(6x - 5) \times (x + 3) - (3x^2 - 5x + 2) \times 1}{(x + 3)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 18x - 5x - 15 - 3x^2 + 5x - 2}{(x + 3)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 18x - 17}{(x + 3)^2}.\end{aligned}$$

Remarque 2

On ne développe pratiquement jamais le carré au dénominateur ; nous verrons que cela a une utilité dans le paragraphe « Applications de la dérivation ».

Démonstration 3 (du point 4 de la propriété 5)

Calculons le taux d'accroissement de la fonction uv en a :

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a) - u(a+h)v(a) + u(a+h)v(a+h)}{h}\end{aligned}$$

(On a ici fait apparaître $u(a+h)v(a)$)

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{[u(a+h) - u(a)]v(a) + u(a+h)[v(a+h) - v(a)]}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h}v(a) + u(a+h)\frac{v(a+h) - v(a)}{h}.\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) = u(a).$$

Ainsi,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$

Donc $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

7 Applications de la dérivation

1 Variation d'une fonction

Propriété 6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout x de I .
- f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0$ pour tout x de I .

De plus,

- Si $f'(x) > 0$ sur I , on dit que f est *strictement* croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur I , on dit que f est *strictement* décroissante sur I .

Conséquence : pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.

Exemple 13

Soit $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

Sa dérivée est : $f'(x) = 9x^2 - 10x + 4$. C'est un polynôme de degré 2, dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 9 \times 4 = -44 < 0.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe du coefficient de x^2 , c'est-à-dire ici positif.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

2 Extremum local

Définition 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

On dit que f admet un **extremum local** en a si $f'(a) = 0$ et si $f'(x)$ change de signe en a .

Cet extremum local peut être :

- un **minimum** si $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{pour } x < a ; \\ f'(x) > 0 & \text{pour } x > a ; \end{cases}$
- un **maximum** si $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{pour } x < a \\ f'(x) < 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$.

Exemple 14

Considérons la fonction $f(x) = -2x^3 - 20x^2 + x + 2$.

Sa dérivée est : $f'(x) = -6x^2 - 40x + 1$, dont le discriminant est :

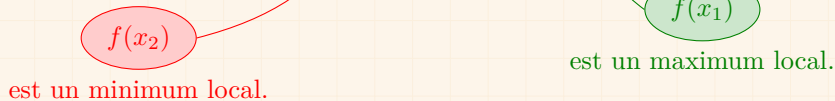
$$\Delta = (-40)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 1\,624 > 0.$$

$f'(x)$ admet donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-20 + \sqrt{406}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-20 - \sqrt{406}}{6}.$$

On déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-20 - \sqrt{406}}{6}$	$\frac{-20 + \sqrt{406}}{6}$	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$						



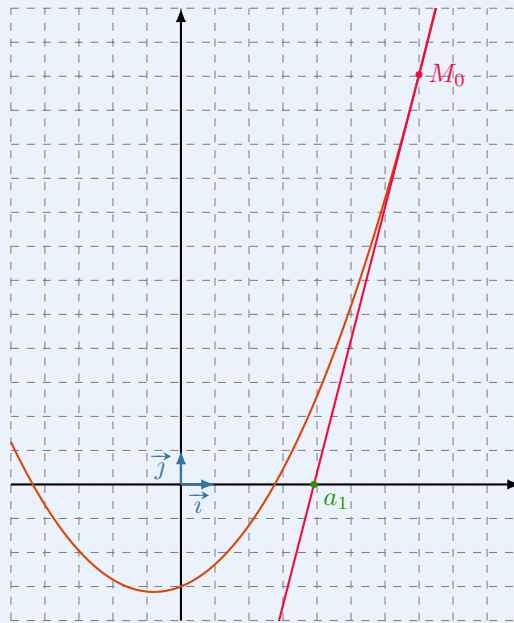
3 Méthode de Newton

La méthode de Newton est un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée d'une solution à une équation du type $f(x) = 0$.

Voyons à travers un exemple son principe. Considérons la fonction f définie par :

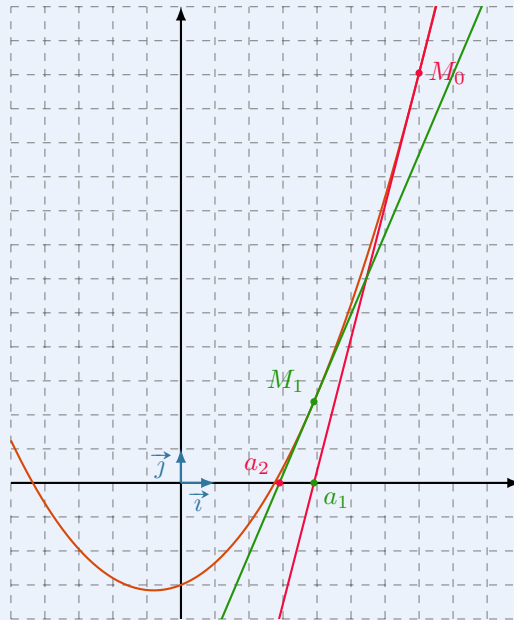
$$f(x) = 0,25x^2 + 0,4x - 3$$

dont la courbe représentative est donnée page suivante.



Prenons un point M_0 sur cette courbe dont l'abscisse x_0 est supérieure à 3, et traçons la tangente à la courbe en ce point : elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_1 .

Maintenant, prenons le point M_1 de coordonnées $(a_1; f(a_1))$, puis traçons la tangente à la courbe en M_1 : elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_2 , comme l'illustre le schéma suivant.



On continue ainsi de façon analogue, et on peut remarquer que les nombres a_1, a_2, a_3, \dots ainsi obtenus se rapprochent de l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

De plus, cela semble se rapprocher très vite ; cela laisse à supposer que cette méthode est plutôt bonne pour trouver une valeur approchée de la solution positive à l'équation $f(x) = 0$...

Cette méthode, qui consiste à faire plusieurs fois la même chose mais avec des valeurs qui changent, nous pousse à écrire un algorithme calculant les valeurs successives a_0, a_1, \dots

Mais avant cela, nous avons besoin de *formaliser* le problème.

a Formalisation

Supposons connue la valeur de a_n ; alors $M_n(a_n; f(a_n))$.

L'équation de la tangente à la courbe au point M_n sera alors :

$$y = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n).$$

a_{n+1} est donc la solution de l'équation :

$$0 = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n).$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} 0 = f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) + f(a_n) &\iff -f(a_n) = f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) \\ &\iff -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_{n+1} - a_n \\ &\iff \boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}} \end{aligned}$$

b Algorithme

Nous avons désormais une égalité qui permet de calculer a_{n+1} à partir de a_n ; nous pouvons donc écrire un algorithme qui calcule une série de valeurs à partir de la simple valeur de a_0 correspondant à l'abscisse du point M_0 :

```
a prend la valeur 7 (abscisse de  $M_0$ )
Pour i allant de 1 à 10:
    a prend la valeur  $a - f(a)/f'(a)$ 
Fin du Pour
Afficher a
```

```
a = 2.7552777669262354
```

Code Python 1-2

```
1 def f(x):
2     return 0.25*x*x+0.4*x-3
3
4 def g(x):
5     return 0.5*x+0.4
6
7 a = 7
8 for i in range(10):
9     a = a - f(a)/g(a)
10 print('a = ',a)
```

Une autre manière d'implémenter ceci avec le module *sympy* est :

Code Python 1-3

```
1 import sympy as sp
2
3 x = sp.symbols('x')
4
5 def newton(f,x0,eps=0.0001):
6     f_prime = sp.diff(f, x)
7     xn= x0+1
8     while abs(xn-x0) > eps:
9         x0, xn = xn, xn - f.subs(x,xn)/f_prime.subs(x,xn)
10
11     return xn
12
13 # Définir la fonction
14 f = 0.25*x**2 + 0.4*x - 3
15
16 # On affiche la solution
17 print(newton(f,0))
```

L'avantage de ce dernier code est de ne pas être obligé de déterminer l'expression de la dérivée.

1

Exercices types

Exercice type 1 ► Nombre dérivé et tangente

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + x + 1$.

- 1 Calculer $f'(1)$ à l'aide de la définition du nombre dérivé.
- 2 Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

- 1 Par définition, le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$ est :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{[(1+h)^2 + (1+h) + 1] - [1^2 + 1 + 1]}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 + 1 + h + 1 - 3}{h} \\ &= \frac{h^2 + 3h}{h} \\ &= \frac{h(h+3)}{h} \\ \tau(h) &= h + 3.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 1 est :

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow h} (h + 3) \\ \boxed{f'(1) = 3}\end{aligned}$$

- 2 L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ \Leftrightarrow y &= 3(x - 1) + 3 \\ \Leftrightarrow y &= 3x - 3 + 3 \\ \Leftrightarrow \boxed{y = 3x}\end{aligned}$$

Exercice type 2 ► Dériver une somme

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 3x + 2$.
Donner l'expression de $f'(x)$.

On a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -5 \times (3x^2) + 7 \times (2x) - 3 \times 1 + 2 \\ \boxed{f'(x) = -15x^2 + 14x - 3}\end{aligned}$$

Exercice type 3 ► Dériver et étudier les variations d'un quotient

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par : $f(x) = \frac{5x - 3}{x - 4}$.

- 1 Trouver l'expression de $f'(x)$.
- 2 En déduire les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

1 $f = \frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{array}{lcl} u = 5x - 3 & ; & v = x - 4 \\ u' = 5 & ; & v' = 1 \end{array}$$

Sa fonction dérivée est alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{5(x - 4) - 1(5x - 3)}{(x - 4)^2} \\ &= \frac{5x - 20 - 5x + 3}{(x - 4)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-17}{(x - 4)^2}$$

- 2 $(x - 4)^2 > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ et $-17 < 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	↘		↘

1

Exercices

Nombre dérivé et tangente

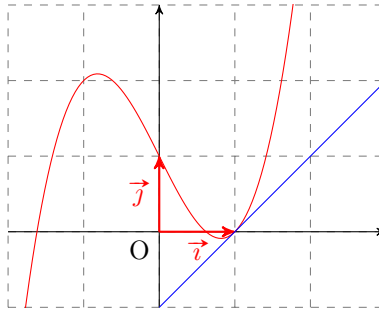
Exercice 1.1 (lectures graphiques)



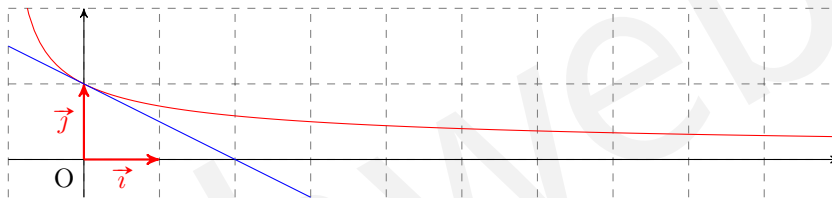
Pour chacune des questions suivantes, on donne la représentation graphique d'une fonction f (en rouge) et la tangente à cette représentation au point d'abscisse a .

Déterminer graphiquement $f'(a)$, puis écrire l'équation réduite de la tangente tracée.

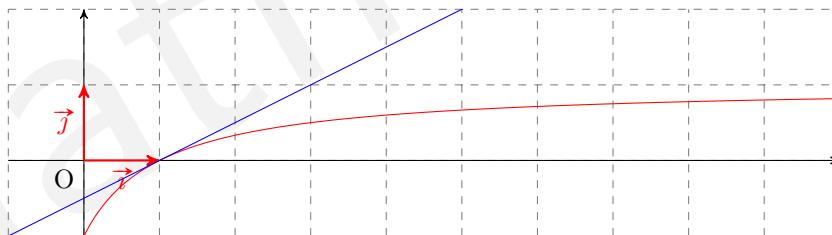
1 $a = 1$.



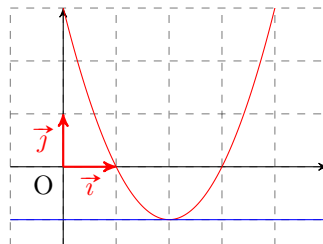
2 $a = 0$.



3 $a = 1$.



4 $a = 2$.

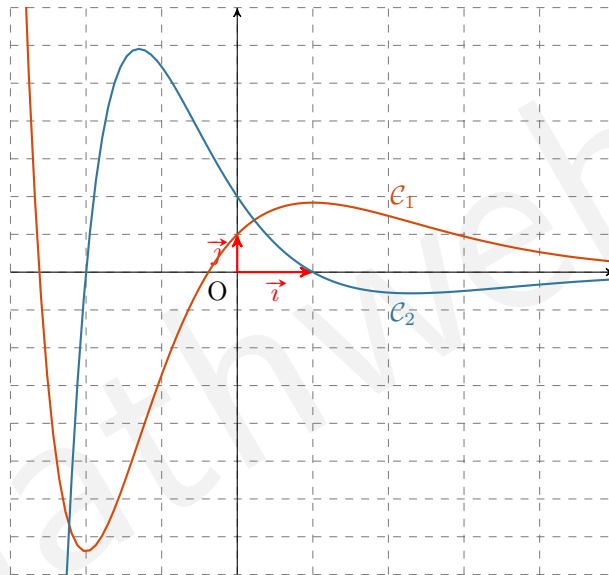


Solution page 27

Exercice 1.2 (trouver la courbe)



On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que celle de sa dérivée f' .



Retrouver la courbe qui représente f et celle qui représente f' .

Solution page 27

Exercice 1.3 (calcul avec taux d'accroissement)



Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(a)$ à l'aide du taux d'accroissement, puis trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

1 $f(x) = x^2, a = 2$

3 $f(x) = x^2 - 2x + 3, a = -1$

2 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$

4 $f(x) = \sqrt{x}, a = 4$

Solution page 28

Exercice 1.4 (trouver des coefficients)



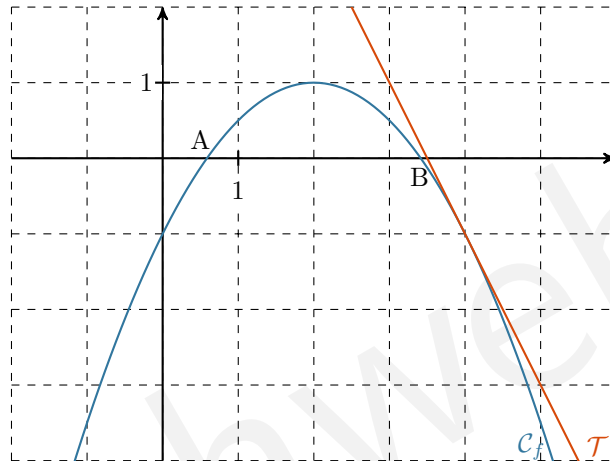
On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont quatre nombres réels. On sait que :

- le point $A(1; -1)$ appartient à \mathcal{C}_f ;
- la tangente à \mathcal{C}_f au point A a pour équation : $y = -2x + 1$;
- \mathcal{C}_f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 ;
- $f'(0) = -5$

Déterminer les valeurs de a, b, c et d à l'aide de ces informations.

Solution page 30

Exercice 1.5 (lectures graphiques et raisonnement)



La courbe ci-dessus représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- 1 Lire graphiquement les valeurs : $f(0)$; $f(2)$; $f'(2)$; $f(4)$; $f'(4)$.
- 2 Déterminer les valeurs de a , b et c à l'aide des valeurs trouvées précédemment.
- 3 Calculer l'abscisse des points A et B.

Solution page 30

Calculs de dérivées

Exercice 1.6 (sommes et différences)



Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer $f'(x)$.

1 $f(x) = 3x - 1$

4 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

2 $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$

5 $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$

3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

6 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$

Solution page 31

Exercice 1.7 (produits et quotients)



Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer $f'(x)$.

1 $f(x) = 2x\sqrt{x}$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}$

2 $f(x) = \frac{3x - 1}{4x + 5}$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

Solution page 31

Exercice 1.8 (sens de variations)



Pour chacune des fonctions f et g ,

- trouver son domaine de définition ;
- trouver sa dérivée ;
- trouver son sens de variations sur son domaine de définition ;
- donner le signe de la fonction sur son domaine de définition.

1 $f(x) = (3x + 2)\sqrt{x}$

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

Solution page 34

Exercice 1.9 (sens de variations)



Pour chacune des fonctions suivantes,

- donner son domaine de définition ;
- trouver sa dérivée ;
- en déduire ses variations sur son domaine de définition.

1 $f(x) = \frac{3x - 4}{5x - 2}$

2 $g(x) = \frac{5x - 3}{x^2 - x - 2}$

3 $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

Solution page 35

Exercice 1.10 (en économie)



L'entreprise KIHARNAK fabrique de la poudre de fée dont tout le monde pourrait se passer et qui pourtant a un succès fou.

Son coût de production est donné par la fonction $C(q) = q^3 - 2q^2 + 10q + 150$, où q représente la quantité (en tonne) de poudre.

On définit le *coût unitaire*, ou *coût moyen*, par la fonction $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$.

On rappelle que le coût marginal est la fonction définie par : $C_m(q) = C'(q)$.

Dans cet exercice, il ne faudra pas hésiter à prendre des initiatives en s'aidant éventuellement de la calculatrice ou d'un quelconque autre instrument informatique.

- 1** Donner l'expression de $CM(q)$, puis celle de $C_m(q)$.
- 2** Étudier les variations de CM , puis donner la quantité q pour laquelle le coût moyen est minimal. Quel est alors ce coût ?
- 3** Résoudre l'équation $CM(q) = C_m(q)$. Que peut-on constater ?

Solution page 37

Exercice 1.11 (étude d'une fonction)



On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 1}$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1** Montrer que la dérivée de la fonction f est donnée par : $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3 - x^2)}{2(x^2 + 1)^2}$.
- 2** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$, puis en déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
- 3** Déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

Solution page 38

Exercice 1.12 (polynôme de degré 3)



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.
On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1 On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} . Déterminer l'expression de $f'(x)$.
- 2 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.
- 3 En déduire le tableau de variations de la fonction f .
- 4 Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
- 5 Justifier que 1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.
- 6 Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = (x - 1)(x^2 + 8x + 19)$.
- 7 Étudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur \mathbb{R} .

Solution page 39

Exercice 1.13 (polynôme de degré 3)



Soit f la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$.
On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1 On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
Donner l'expression de $f'(x)$, pour tout nombre réel x .
- 2 On note (T) la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 . Donner l'équation réduite de la tangente (T) .
- 3 Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x^3 - 4x + 1$.
On note \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans le même repère que la courbe \mathcal{C}_f .
 - a. Montrer que pour tout nombre réel x ,
$$f(x) - g(x) = -5x^2 + 4x + 1.$$
 - b. Étudier sur \mathbb{R} le signe de $f(x) - g(x)$.
 - c. En déduire pour quelles valeurs de x la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de la courbe \mathcal{C}_g .

Solution page 40

Optimisation

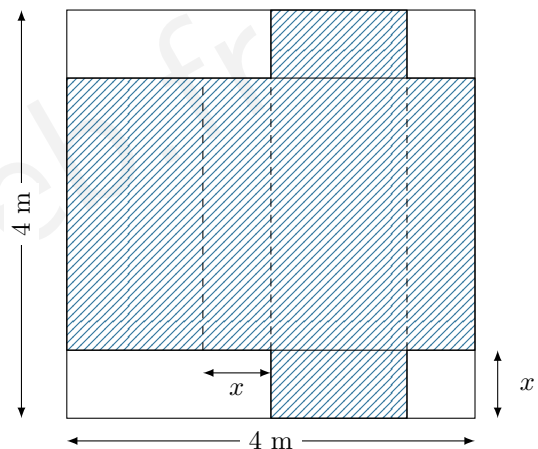
Exercice 1.14 (volume optimal d'une boîte)



On souhaite construire une boîte parallélépipédique à partir d'un carton carré de 4 mètres de côté, comme l'illustre le schéma ci-contre.

La partie hachurée correspond à la partie du carton qui va être pliée (aux pointillés) pour obtenir la boîte.

- 1 Montrer que le volume de la boîte est égal à $f(x) = 2x(2-x)^2$.
- 2 Étudier les variations de f , puis en déduire la valeur de x (arrondie au centimètre près) pour laquelle le volume de la boîte est optimal.



Solution page 41

Exercice 1.15 (volume d'une casserole)



Une casserole peut être assimilée à un cylindre avec une seule base (le fond). On note R le rayon du disque constituant la base et h la hauteur du cylindre.



- 1 Montrer que la surface de la casserole est donnée par la fonction $f(R) = \pi R^2 + \frac{2V}{R}$, où V est le volume de la casserole.
- 2 Montrer alors que la surface est minimale quand la hauteur de la casserole est égale au rayon de la base.

Solution page 42

Exercice 1.16 (bénéfice maximal)



Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, ...) et d'autre part, les coûts variables (salaires, ingrédients, ...) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.



On estime que la fonction de coût total de cette entreprise (exprimé en dizaine d'euros) pour une journée est donnée par la fonction :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20.$$

On suppose que cette entreprise ne peut pas fabriquer plus de 800 pizzas par jour.

Cette entreprise vend une pizza 7,50 €. On note B la fonction qui donne le bénéfice quotidien de l'entreprise en fonction de q lots fabriqués et vendus.

- 1 Étudier les variations de C sur l'intervalle $[1; 20]$.
- 2 Exprimer en fonction de q le bénéfice $B(q)$ de cette entreprise (en dizaine d'euros).
- 3 Étudier les variations de B sur $[0; 20]$.
En déduire le nombre de lots de pizzas qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice ?

Solution page 43

Exercice 1.17 (coût de production)



Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour. Le coût moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros, pour x milliers de pièces produites, est donné par la fonction f définie pour tout réel $x \in [1; 5]$ par :



$$f(x) = \frac{0,5x^3 - 3x^2 + x + 16}{x}.$$

- 1 Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.
- 2 On admet que f est dérivable sur $[1; 5]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel $x \in [1; 5]$,

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}.$$



3 Vérifier que, pour tout réel x ,

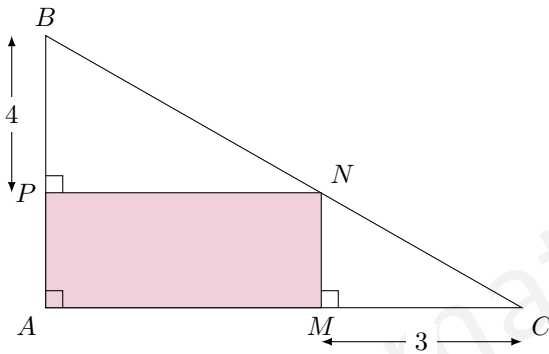
$$x^3 - 3x^2 - 16 = (x - 4)(x^2 + x + 4).$$

4 En déduire le tableau de variation de f sur $[1; 5]$.

5 Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

Solution page 43

Exercice 1.18 (minimisation d'une aire)



On considère la figure ci-contre, où N est un point du segment $[BC]$, P un point de $[AB]$ et M un point de $[AC]$.

1 Montrer que l'aire du rectangle $AMNP$ est égale à 12.

2 Pour quelles valeurs de AM et AP l'aire du triangle ABC est-elle minimale ?

Solution page 44

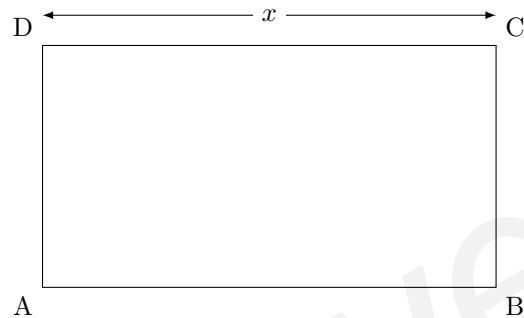
Exercice 1.19



Dans cet exercice, les distances sont exprimées en mètres.

On considère un rectangle $ABCD$ d'aire 49 m^2 tel que $DC = x$ et $BC = y$.

On admet que les nombres x et y sont strictement positifs.



On souhaite déterminer les dimensions x et y pour que le périmètre de ce rectangle soit minimal.

- 1 a. Montrer que le périmètre, en mètres, du rectangle $ABCD$ est égal à $2x + \frac{98}{x}$.
- b. Calculer ce périmètre pour $x = 10$.

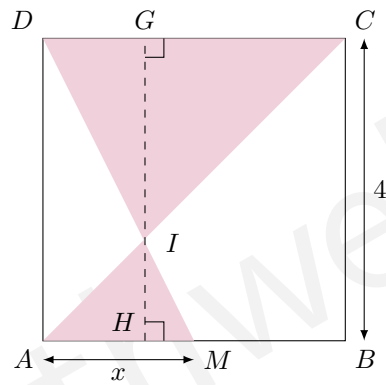
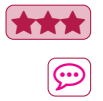
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{98}{x}$.

On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

- 2 Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2x^2 - 98}{x^2}$.
- 3 Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- 4 En déduire les dimensions du rectangle d'aire 49 m^2 dont le périmètre est minimal.

Solution page 45

Exercice 1.20 (optimisation d'une aire)



$ABCD$ est un carré de côté 4, et M est un point de $[AB]$.
Déterminer la position de M pour que l'aire coloriée soit minimale.

Pour cela, on pourra s'aider des indications et des points portés sur le schéma ci-dessus.

Solution page 46

1

Corrigés

Corrigé de l'exercice 1.1 page 19

Dans cet exercice, il faut avoir en tête que le nombre dérivé d'une fonction en un point a est le coefficient directeur de la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

Il faut donc, pour chaque question, regarder la tangente à la courbe tracée en rouge au point d'abscisse a donné.

- 1 Ici, la tangente a pour coefficient directeur 1. Donc $f'(1) = 1$.

Ainsi, la tangente tracée a pour équation réduite :

$$y = x - 1$$

(N'oublions pas que dans l'équation d'une droite $y = mx + p$, p désigne l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).

- 2 Ici, le coefficient directeur de la tangente tracée est $-\frac{1}{2}$. En effet, les points A(0; 1) et B(2; 0) sont sur la tangente donc :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

- 3 Ici, le coefficient directeur de la tangente est $\frac{1}{2}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

- 4 Ici, la tangente est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0.

L'équation de la tangente est alors :

$$y = -1$$

Corrigé de l'exercice 1.2 page 20

On constate que la courbe \mathcal{C}_2 est *au-dessus* de l'axe des abscisses sur $[-2; 1]$ et que sur cet intervalle, \mathcal{C}_1 monte. Ailleurs, \mathcal{C}_1 est *en-dessous* de l'axe des abscisses et \mathcal{C}_2 descend.

Ainsi, \mathcal{C}_2 représente f' et \mathcal{C}_1 représente f .

Corrigé de l'exercice 1.3 page 20

1 $f(x) = x^2, a = 2.$

- Calcul de $f'(2)$.

Le taux d'accroissement de f en 2 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} \\ &= 4+h.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 2 est :

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est alors :

$$\begin{aligned}y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ y &= 4(x-2) + 4 \\ y &= 4x - 8 + 4 \\ \boxed{y} &= \boxed{4x - 4}\end{aligned}$$

2 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1.$

- Calcul de $f'(1)$.

Le taux d'accroissement de f en 1 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} \\ &= -\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)} \\ &= -\frac{1}{1+h}.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 1 est :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1+h} \right) = -1.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est alors :

$$\begin{aligned}y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= -1(x-1) + 1 \\ y &= -x + 1 + 1 \\ \boxed{y} &= \boxed{-x + 2}\end{aligned}$$

3 $f(x) = x^2 - 2x + 3, a = -1.$

- Calcul de $f'(-1).$

Le taux d'accroissement de f en -1 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - ((-1)^2 - 2 \times (-1) + 3)}{h} \\ &= \frac{h^2 - 2h + 1 + 2 - 2h + 3 - 6}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h} \\ &= \cancel{h}(h-4) \\ &= h-4.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en -1 est :

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) = -4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est alors :

$$\begin{aligned}y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ y &= f'(-1)(x+1) + f(-1) \\ y &= -4(x+1) + 6 \\ y &= -4x - 4 + 6 \\ \boxed{y} &= \boxed{-4x + 2}\end{aligned}$$

4 $f(x) = \sqrt{x}, a = 4.$

- Calcul de $f'(4).$

Le taux d'accroissement de f en 4 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h} \\ &= \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 4 est :

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} \right) = \frac{1}{4}.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1 + 2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x + 1}$$

Corrigé de l'exercice 1.4 page 20

- 1** • $A(1; -1) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = -1$, soit :

$$a + b + c + d = -1 \tag{1.3}$$

- la tangente à \mathcal{C}_f au point A a pour équation : $y = -2x + 1$ donc $f'(1) = -2$, soit :

$$3a + 2b + c = -2 \tag{1.4}$$

- \mathcal{C}_f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 donc $f(0) = 2$, d'où :

$$d = 2.$$

- $f'(0) = -5$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ donc :

$$c = -5.$$

Les équations 1.3 et 1.4 donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = -1 - (-5) - 2 = 2 \\ 3a + 2b = -2 - (-5) = 3 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a = 2 - b \\ 3(2 - b) + 2b = 3 \end{cases}$$

La seconde équation donne alors :

$$6 - b = 3 \quad \text{soit :} \quad b = 3.$$

La première équation donne alors :

$$a = 2 - 3 = -1.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2.}$$

Corrigé de l'exercice 1.5 page 21

- 1**
- $f(0) = -1$;
 - $f(2) = 1$;
 - $f'(2) = 0$ car la fonction atteint un maximum pour $x = 2$;
 - $f(4) = -1$;
 - $f'(4) = -2$ (coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4).
- 2**
- $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$; donc $c = -1$ d'après la question précédente (1^{er} point).
 - $f'(x) = 2ax + b$ et $f'(2) = 4a + b$; donc $4a + b = 0$, soit $b = -4a$.
 - $f(2) = 1$ donc $4a + 2b - 1 = 1$, soit $-b + 2b = 2$ d'après le point précédent. Ainsi, $b = 2$.

- $f'(4) = 8a + b = -2$ donc $8a = -4$, soit $a = -\frac{1}{2}$.

Finalement, on a : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

- 3** L'abscisse des points A et B sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = 4 - 2 = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_A &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_B &= \frac{-2 - \sqrt{2}}{-1} & x_A &= \frac{-2 + \sqrt{2}}{-1} \\ x_B &= 2 + \sqrt{2} & x_A &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.6 page 21

- 1** $f(x) = 3x - 1$ donc $f'(x) = 3$.
- 2** $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = 10x + 3$.
- 3** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = x^2 - 10x + 3$.
- 4** $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- 5** $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$.
- 6** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$ donc $f'(x) = -x + 3 - \frac{1}{6\sqrt{x}}$.

Corrigé de l'exercice 1.7 page 21

- 1** $f(x) = 2x\sqrt{x}$. On pose :

$$u(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 3\sqrt{x}}$$

2 $f(x) = \frac{3x-1}{4x+5}$. On pose :

$$u(x) = 3x - 1$$

$$u'(x) = 3$$

$$v(x) = 4x + 5$$

$$v'(x) = 4$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{3(4x+5) - 4(3x-1)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{12x+15-12x+4}{(4x+5)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{19}{(4x+5)^2}$$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x^2+1}$. On pose :

$$u(x) = \sqrt{x} - x$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$v'(x) = 2x$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \times (x^2+1) - (\sqrt{x}-x) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} - x^2 - 1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + x^2 - 2x\sqrt{x} - 1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$. On pose :

$$u(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$u'(x) = 2x - 3$$

$$v(x) = x - 3$$

$$v'(x) = 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2x - 3)(x - 3) - (x^2 - 3x + 1) \times 1}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 1}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}$.

On commence par simplifier l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\frac{x^2 + 1}{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$u(x) = x\sqrt{x}$$

$$u'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$v'(x) = 2x$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2 + 1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Corrigé de l'exercice 1.8 page 22

1 $f(x) = (3x + 2)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.
- f est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 3x + 2 \\ u'(x) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{x} \\ v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 3\sqrt{x} + (3x + 2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3\sqrt{x} + \frac{3x + 2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 3x + 2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x + 3x + 2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{9x + 2}{2\sqrt{x}}$$

- $f'(x) > 0 \iff 9x + 2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\frac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	\nearrow

- D'après le tableau de variation de f , on peut dire que $f(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$.

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.
- g est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + \frac{1}{x} \\ u'(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{x} \\ v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
 &= -\frac{1}{x^2}\sqrt{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{x \times \sqrt{x} \times \cancel{\sqrt{x}}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

- $g'(x) > 0 \iff x-1 > 0 \iff x > 1$ car $2x\sqrt{x} > 0$ sur \mathcal{D}_g .

On a alors le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		\swarrow 2 \searrow	

- D'après le tableau de variations de g , on peut dire que $g(x) \geq 2$ sur $]0; +\infty[$, donc $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 1.9 page 22

1 $f(x) = \frac{3x-4}{5x-2}$.

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$.
- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= 3x - 4 \\
 u'(x) &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x) &= 5x - 2 \\
 v'(x) &= 5
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{3(5x-2) - 5(3x-4)}{(5x-2)^2} \\
 &= \frac{15x-6-15x+20}{(5x-2)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{14}{(5x-2)^2}$$

- $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ donc :

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

2 $g(x) = \frac{5x - 3}{x^2 - x - 2}$.

- Une racine évidente de $x^2 - x - 2$ est $x_1 = 2$. De plus, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ donc $2x_2 = -2$, soit $x_2 = -1$. Ainsi, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}$.
- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 5x - 3 \\ u'(x) &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= x^2 - x - 2 \\ v'(x) &= 2x - 1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{5(x^2 - x - 2) - (5x - 3)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} \\ &= \frac{5x^2 - 5x - 10 - 10x^2 + 5x + 6x - 3}{(x^2 - x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{-5x^2 + 6x - 13}{(x^2 - x - 2)^2}$$

- $g'(x)$ est du signe de $-5x^2 + 6x - 13$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 36 - 260 < 0.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-		-	-
$g(x)$	↘		↘	↘

3 $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

- $x^2 - 3x + 2$ possède $\alpha = 1$ comme racine évidente, donc la seconde racine est $\beta = 2$. Ainsi, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$.
- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec : $u(x) = x^2 + x + 1$ $u'(x) = 2x + 1$
 $v(x) = x^2 - 3x + 2$ $v'(x) = 2x - 3$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{(2x+1)(x^2-3x+2) - (x^2+x+1)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + x^2 - 3x + 2 - (2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + 2x - 3)}{(x^2-3x+2)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2 - 2x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2-3x+2)^2}
 \end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{-4x^2 + 2x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

- $h'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 2x + 5$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 4 + 80 = 84.$$

Ses deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{84}}{-8} = \frac{-2 + 2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1 - \sqrt{21}}{4} \approx -0,9 < \alpha$$

et

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{84}}{-8} = \frac{-2 - 2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \approx 1,4 \in]\alpha; \beta[=]1; 2[.$$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	$\alpha = 1$	x_2	$\beta = 2$	$+\infty$		
$h'(x)$		-	0	+	+	0	-	-
$h(x)$		↘ ↗		↗ ↘		↘		

Corrigé de l'exercice 1.10 page 22

$$\mathbf{1} \quad CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^3 - 2q^2 + 10q + 150}{q} = q^2 - 2q + 10 + \frac{150}{q}.$$

$$C_m(q) = C'(q) = 3q^2 - 4q + 10.$$

$$\mathbf{2} \quad CM'(q) = 2q - 2 - \frac{150}{q^2} = \frac{2q^3 - 2q^2 - 150}{q^2} = \frac{2}{q^2}(q^3 - q^2 - 75).$$

$\frac{2}{q^2} > 0$ donc $CM'(q)$ est du signe du polynôme $P(q) = q^3 - q^2 - 75$.

$P'(q) = 3q^2 - 2q = q(3q - 2)$ donc $q = 0$ et $q = \frac{2}{3}$ sont les deux racines de P .

On en déduit le tableau suivant :

q	0	$\frac{2}{3}$	5	$+\infty$
$P'(q)$		-	0	+
$P(q)$	-75	↘ ↗		↗
		$\approx -75,1$		25

Intuitivement, comme il n'y a pas de valeurs interdites entre $\frac{2}{3}$ et 5, on peut supposer qu'il existe une valeur de q , notée α , comprise entre $\frac{2}{3}$ et 5, telle que $P(\alpha) = 0$.

Remarque 5

Vous verrez l'année prochaine une formulation plus adéquate de ce qui vient d'être dit sur l'existence de α ; ce sera un théorème du cours.

On peut alors dresser le tableau suivant :

q	0	α	$+\infty$
$CM'(q)$		-	+
$CM(q)$			

À la calculatrice, on trouve une valeur approché de α :

$$\alpha \approx 4,578.$$

Le coût moyen de production est donc minimal pour 4 578 kg de poudre fabriquée.

Le coût minimal est alors $CM(\alpha) \approx 54,57 \text{ €}$, ce qui signifie qu'une tonne de poudre (de fée) coûte en moyenne 54,57 € à fabriquer si on en fabrique 4,578 tonnes.

- 3** Résolvons l'équation $CM(q) = C_m(q)$ à la calculatrice : on trouve $q \approx 4,578$.
On constate que l'on obtient la valeur de q pour laquelle le coût moyen est minimal.

Corrigé de l'exercice 1.11 page 22

- 1** f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x\sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 1$.
 u est une fonction produit gh avec $g(x) = x$ et $h(x) = \sqrt{x}$, donc $u = g'h + h'g$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2 + 1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(x^2 + 1) - 4x^2\sqrt{x}}{2(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3 - x^2)}{2(x^2 + 1)^2}$$

- 2** $2(x^2 + 1)^2 > 0$ et $\sqrt{x} \geq 0$ sur $[0; +\infty[$. Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $3 - x^2$, polynôme de degré 2 admettant pour racines $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ et dont le coefficient de x^2 est négatif, d'où le tableau page suivante.

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0		0

- 3 L'équation réduite d'une tangente est donnée par la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec ici $a = 1$.
 $f(a) = \frac{1}{2}$ et $f'(a) = \frac{1}{4}$ donc l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 est :

$$y = \frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}$$

soit $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

Corrigé de l'exercice 1.12 page 23

- 1 $f'(x) = 3 \times x^2 + 7 \times 2x + 11 \times 1 - 0$, donc $f'(x) = 3x^2 + 14x + 11$.

- 2 $3x^2 + 14x + 11$ est un polynôme de degré 2, dont le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 3 \times 11 = 64.$$

Ses deux racines sont alors :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{64}}{2 \times 3} = -\frac{11}{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{64}}{2 \times 3} = -1.$$

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines donc $3x^2 + 14x + 11 > 0$ si $x \in]-\infty; -\frac{11}{3}[\cup]-1; +\infty[$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{11}{3}$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				

- 3 L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $a = 1$ est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Or,

$$f'(1) = 3 \times 1^2 + 14 \times 1 + 11 = 28$$

et

$$f(1) = 1^3 + 7 \times 1^2 + 11 \times 1 - 19 = 0$$

Donc l'équation réduite de la tangente est :

$$y = 28(x - 1) + 0$$

soit :

$$y = 28x - 28$$

- 4 $f(1) = 0$ donc 1 est bien solution de l'équation $f(x) = 0$.
De plus,

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2 + 8x + 19) &= x^3 + 8x^2 + 19x - x^2 - 8x - 19 \\ &= x^3 + 7x^2 + 11x - 19 \\ &= f(x).\end{aligned}$$

- 5 Le discriminant de $x^2 + 8x + 19$ est :

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 19 = -12.$$

Le discriminant étant strictement négatif, $x^2 + 8x + 19 > 0$ (signe du coefficient de x^2). Par conséquent, $f(x)$ est du signe de $x - 1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Corrigé de l'exercice 1.13 page 23

- 1 La dérivée de f est : $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 0$, soit :

$$f'(x) = 9x^2 - 10x$$

- 2 L'équation de (T) , tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 est :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1).$$

Or,

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2 = -3 - 5 + 2 = -6$$

et

$$f'(-1) = 9(-1)^2 - 10(-1) = 9 + 10 = 19.$$

Ainsi,

$$(T) : y = 19(x + 1) - 6$$

soit :

$$(T) : y = 19x + 13$$

- 3 a. Calculons, pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned}f(x) - g(x) &= 3x^3 - 5x^2 + 2 - (3x^3 - 4x + 1) \\ &= 3x^3 - 5x^2 + 2 - 3x^3 + 4x - 1\end{aligned}$$

$$f(x) - g(x) = -5x^2 + 4x + 1.$$

- b. $f(x) - g(x)$ est un trinôme du second degré, dont le discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \times (-5) \times 1 \\ &= 16 + 20 \\ \Delta &= 36.\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc $f(x) - g(x)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times (-5)} \\ &= \frac{-4 - 6}{-10} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times (-5)} \\ &= \frac{-4 + 6}{-10} \\ &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Remarque 6

On aurait aussi pu remarquer que la somme des coefficients est nulle, et donc que $x_1 = 1$ est une racine évidente ; avec la formule $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, on déduit $x_2 = -\frac{1}{5}$.

On en déduit alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	1	$+\infty$		
$f(x) - g(x)$		-	0	+	0	-

c. Du tableau de signes précédent, on peut conclure que :

- sur $]-\frac{1}{5}; 1[$, $f(x) - g(x) > 0$ et donc $f(x) > g(x)$ ce qui signifie que \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g ;
- sur $]-\infty; -\frac{1}{5}[$ et sur $]1; +\infty[$, $f(x) - g(x) < 0$ et donc $f(x) < g(x)$ ce qui signifie que \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g .

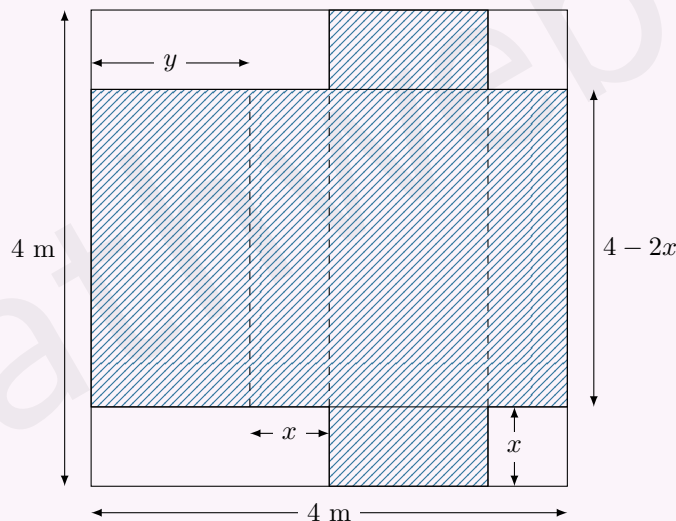
Corrigé de l'exercice 1.14 page 23

1 Notons y la largeur d'une face de la boîte (voir illustration suivante). Alors,

$$y + x + y + x = 4,$$

soit :

$$y = 2 - x.$$



Le volume de la boîte est alors :

$$f(x) = x \times (4 - 2x) \times y$$

$$f(x) = 2x(2 - x)^2$$

2 $f(x) = 2x(4 - 4x + x^2) = 2x^3 - 8x^2 + 8x.$

Ainsi, $f'(x) = 6x^2 - 16x + 8$, dont le discriminant est $\Delta = 16^2 - 4 \times 6 \times 8 = 64$. $f'(x)$ admet donc deux racines : $\alpha = \frac{16 - \sqrt{64}}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{16 + 8}{12} = 2$. On a alors :

x	0	$\frac{2}{3}$	2
$f'(x)$		+	-
f		↗	↘

Notons que x ne peut pas dépasser la valeur 2 car il faut que $4 - 2x \geq 0$, soit $2x \leq 4$, d'où $x \leq 2$.

Le maximum de f est atteint en $x = \frac{2}{3}$ (exprimé en mètre).

Le volume de la boîte est optimal pour $x = 67$ cm.

Corrigé de l'exercice 1.15 page 24

1 L'aire du disque de fond est : πR^2 ;

l'aire de la surface latérale est : $2\pi R h$ (c'est un rectangle de largeur h et de longueur égale au périmètre du disque de base, soit $2\pi R$).

Donc $f(R) = \pi R^2 + 2\pi R h$.

Or, le volume d'un cylindre est :

$$V = \pi R^2 h$$

donc :

$$h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Alors,

$$f(R) = \pi R^2 + 2\pi R \times \frac{V}{\pi R^2} = \pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

2 $f'(R) = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}$
 $= 2 \times \frac{\pi R^3 - V}{R^2}.$

Ainsi,

$$f'(R) > 0 \iff R^3 > \frac{V}{\pi} = \frac{\pi R^2 h}{\pi} = R^2 h.$$

Donc, en simplifiant par R^2 :

$$R > h.$$

Ainsi, le minimum de la fonction f est atteint pour $R = h$.

Nous avons bien vérifié que la surface de la casserole est minimale quand la hauteur de la casserole est égale à son rayon. Prenez une casserole chez vous et essayez !

Corrigé de l'exercice 1.16 page 24

1 $C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$. donc $C'(q) = \frac{3}{2}q^2 - 4q + 5$.

Le discriminant de $C'(q)$ est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 5 = 16 - 30 = -14 < 0.$$

Par conséquent, $C'(q) > 0$ sur \mathbb{R} et donc sur $[0; 20]$. Ainsi, C est strictement croissante sur $[0; 20]$.

2 Une pizza est vendue 7,50 € et il y a 4 dizaines de pizzas dans un lot donc la recette (exprimée en dizaine d'euros) est :

$$R(q) = 4 \times 7,5q = 30q.$$

Ainsi, le bénéfice est :

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 30q - \frac{1}{2}q^3 + 2q^2 - 5q - 20 \end{aligned}$$

$$B(q) = -\frac{1}{2}q^3 + 2q^2 + 25q - 20$$

3 $B'(q) = -\frac{3}{2}q^2 + 4q + 25$. Le discriminant de $B'(q)$ est :

$$\Delta = 16 + 150 = 166.$$

Les racines sont donc :

$$q_1 = \frac{-4 - \sqrt{166}}{-3} \approx 5,63$$

et

$$q_2 = \frac{-4 + \sqrt{166}}{-3} < 0.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	q_1	20
$B'(q)$		+	-
$B(q)$			

Le bénéfice maximal est donc atteint pour $q = 5$ ou $q = 6$ lots de 40 pizzas. Le bénéfice (en dizaine d'euros) est alors :

$$B(5) = -\frac{1}{2} \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 25 \times 5 - 20 = 92,5.$$

$$B(6) = -\frac{1}{2} \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 25 \times 6 - 20 = 94.$$

Le bénéfice maximum est donc atteint pour 6 lots de 40 pizzas fabriqués, et est égal à 940 € (bénéfice exprimé en dizaines d'euros).

Corrigé de l'exercice 1.17 page 24

1 Le coût moyen de production, en milliers d'euros, d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces est :

$$f(2) = \frac{0,5 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 16}{2} = \frac{4 - 12 + 18}{2} = 5.$$

Ainsi, le coût moyen de production est égal à 5 000 €.

2 On peut écrire $f(x)$ sous la forme suivante si l'on divise tous les termes par x :

$$f(x) = 0,5x^2 - 3x + 1 + \frac{16}{x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,5 \times 2x - 3 \times 1 + 0 - 16 \times \frac{1}{x^2} \\ &= x^2 - 3 - \frac{16}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}$$

3 Développons :

$$\begin{aligned} (x-4)(x^2+x+4) &= x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16 \\ &= x^3 - 3x^2 - 16. \end{aligned}$$

4 $f'(x)$ est du signe de $x^3 - 3x^2 - 16$ car $x^2 > 0$, donc du signe de $(x-4)(x^2+x+4)$.
Or, le discriminant de x^2+x+4 est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = 1 - 16 = -15 < 0.$$

Donc x^2+x+4 est du signe du coefficient de x^2 , c'est-à-dire positif.

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $x-4$, d'où le tableau de signes et de variations suivant :

x	1	4	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	14,5	1	1,7

5 D'après le tableau de variations de f , le coût moyen de production est minimal pour $x = 4$, soit pour 4 000 pièces produites par jour, auquel cas le coût de production moyen est égal à 1 000 €.

Corrigé de l'exercice 1.18 page 25

1 Posons $x = AM$ et $y = AP$.

(AB) et (MN) sont parallèles et coupent donc la droite (BC) suivant deux angles de même mesure; donc $\widehat{PBN} = \widehat{MNC}$.

De même, $\widehat{PNB} = \widehat{MCN}$.

On peut alors conclure que les triangles PNB et MCN sont semblables; par conséquent,

$$\frac{PN}{MC} = \frac{PB}{MN}$$

soit :

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{y}$$

d'où :

$$xy = 12.$$

Or, xy représente l'aire du rectangle $AMNP$; donc cette aire est égale à 12.

2 Notons $f(x)$ l'aire du triangle ABC . Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times (y + 4) \times (x + 3) \\ &= \frac{1}{2}(xy + 3y + 4x + 12) \\ &= \frac{1}{2}(12 + 3y + 4x + 12) \\ &= \frac{1}{2}(24 + 3y + 4x). \end{aligned}$$

Or, $xy = 12$ donc $y = \frac{12}{x}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(24 + 3 \times \frac{12}{x} + 4x \right) \\ &= 12 + \frac{18}{x} + 2x. \end{aligned}$$

La dérivée de $f(x)$ est donc :

$$f'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = \frac{2x^2 - 18}{x^2}.$$

$x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3)$.

D'où le tableau suivant :

x	0	3	4	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

Ainsi, l'aire du triangle ABC est minimale lorsque $AM = 3$ et donc $AN = \frac{18}{3} = 6$.

Corrigé de l'exercice 1.19 page 25

1 a. L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à xy , mais aussi égale à 49. Donc :

$$y = \frac{49}{x}.$$

Le périmètre de $ABCD$ est $2(x + y)$ soit :

$$\begin{aligned} 2 \left(x + \frac{49}{x} \right) &= 2x + \frac{98}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 98}{x} \end{aligned}$$

b. Si $x = 10$, ce périmètre vaut :

$$\frac{2 \times 10^2 + 98}{10} = \frac{200 + 98}{10} = 29,8.$$

Le périmètre du rectangle est donc égal à 29,8 m.

2 Pour $x > 0$, la dérivée de $f(x)$ est :

$$f'(x) = 2 \times 1 + 98 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2 - \frac{98}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 98}{x^2}$$

3 $f'(x) = 0 \iff 2x^2 - 98 = 0 \iff x^2 = \frac{98}{2} \iff x^2 = 49 \iff x = 7$ ou $x = -7$. D'où le tableau suivant sur $]0; +\infty[$:

x	0	7	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘ ↗		
		28		

4 D'après le tableau de variations de f , le périmètre est minimal pour $x = 7$, et vaut 28 m. Dans ce cas précis, $ABCD$ est un carré.

Corrigé de l'exercice 1.20 page 26

Pour connaître l'aire coloriée, il nous faut au moins connaître IH .

D'après le théorème de Thalès, dans la configuration croisée où $[DM]$ et $[GH]$ se coupent en I ,

$$\frac{IM}{ID} = \frac{IH}{IG} = \frac{IH}{4 - IH}.$$

De plus, dans la configuration croisée où $[DM]$ et $[AC]$ se coupent en I ,

$$\frac{IM}{ID} = \frac{AM}{DC} = \frac{x}{4}.$$

Ainsi,

$$\frac{IH}{4 - IH} = \frac{x}{4} \quad \text{soit} \quad 4IH = x(4 - IH).$$

Ainsi,

$$4IH + xIH = 4x$$

et donc :

$$IH = \frac{4x}{4 + x}.$$

Ainsi l'aire du triangle IAM est :

$$\frac{IH \times AM}{2} = \frac{2x^2}{4 + x}.$$

De plus, l'aire du triangle CID est :

$$\frac{IG \times DC}{2} = 2(4 - IH) = 8 - \frac{8x}{4 + x}.$$

L'aire coloriée est donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2}{4+x} + 8 - \frac{8x}{4+x} \\ &= \frac{2x^2 - 8x + 8(4+x)}{4+x} \\ &= \frac{2x^2 + 32}{4+x}. \end{aligned}$$

La dérivée de $f(x)$ est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x(4+x) - (2x^2 + 32) \times 1}{(4+x)^2} \\ &= \frac{16x + 4x^2 - 2x^2 - 32}{(4+x)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 16x - 32}{(x+4)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 + 16x - 32$, polynôme du second degré dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 16^2 - 4 \times 2 \times (-32) = 512.$$

Donc les racines de ce dernier sont :

$$x_1 = \frac{-16 - \sqrt{512}}{4} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-16 + \sqrt{512}}{4} = -4 + 4\sqrt{2} \approx 1,66.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	x_2	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Ainsi, l'aire coloriée est donc minimale pour $x = 4\sqrt{2} - 4$.