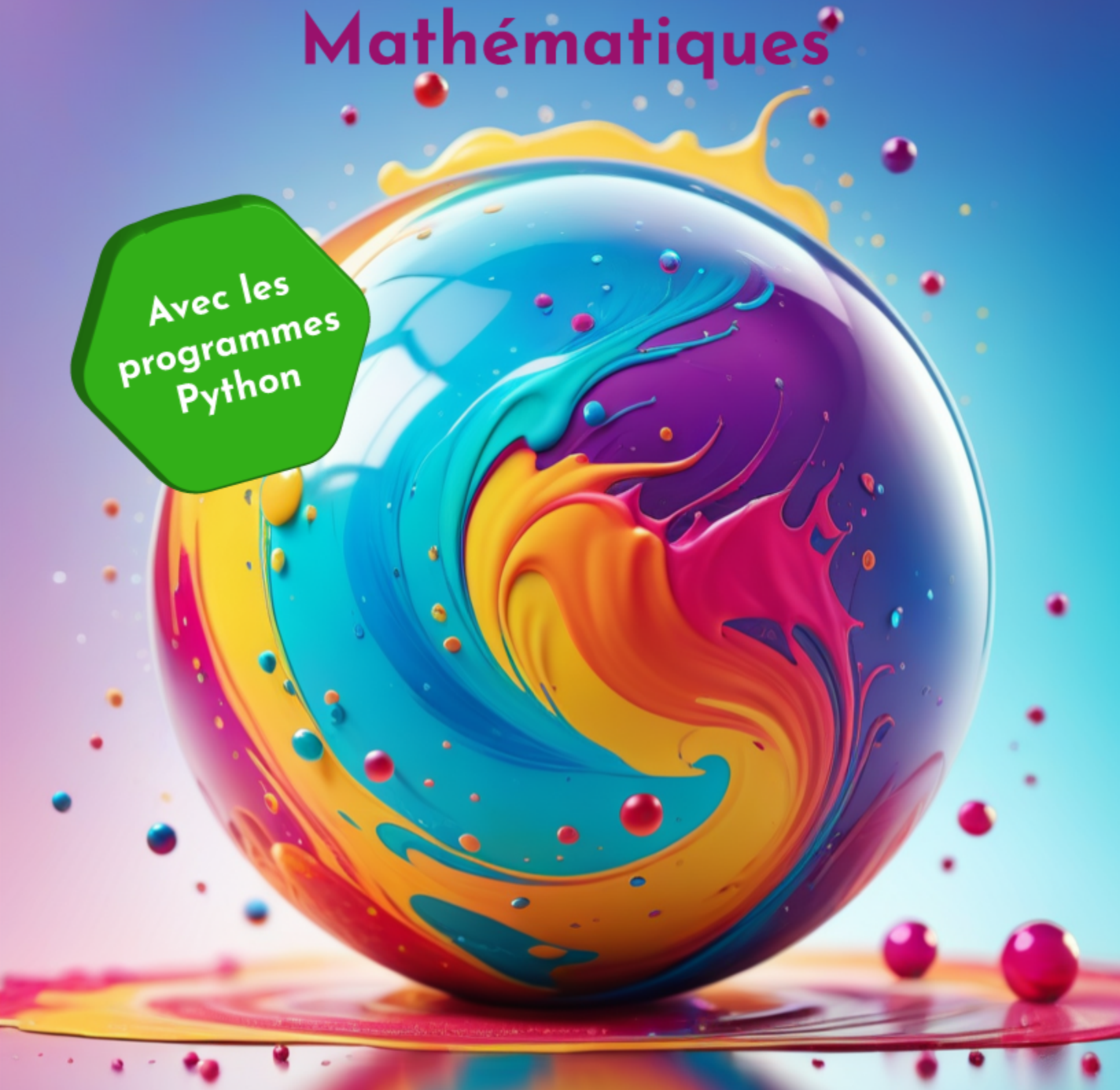
Seconde générale

Edition 2026 - 2027

Mathématiques



Avec les programmes Python

Stéphane Pasquet

Uniquement sur mathweb.fr

Table des matières

AVANT–PROPOS iii
1 Arithmétique 1
2 Les nombres réels 12
3 Calcul littéral, équations et inéquations 43
4 Repérage dans le plan 80
5 Vecteurs 97
6 Équations de droites 141
7 Généralités sur les fonctions 159
8 Fonctions affines et linéaires. Tableaux de signes. 193
9 Fonctions de référence 220
10 Pourcentages et statistiques 263
11 Probabilités 299
12 Échantillonnage 332

289 exercices entièrement corrigés

Dernière mise à jour le 22 septembre 2026.

AVANT–PROPOS

Ce livre s'adresse aux élèves de Seconde générale. Les parents et les enseignants y trouveront également matière à accompagner ou approfondir les notions abordées.
Il est conforme au programme officiel de l'Éducation Nationale française en vigueur à la rentrée 2026.

Cette édition est une version revue, corrigée et enrichie de la précédente.
Pour chaque chapitre, vous trouverez :

- un cours complet réunissant les outils mathématiques nécessaires à la compréhension de la notion abordée ;
- des exercices de base pour prendre un bon départ, destinés à illustrer les notions fondamentales à maîtriser ;
- les énoncés des exercices ;
- leurs corrigés détaillés.

Chaque exercice est accompagné d'une indication de difficulté :

★ exercice accessible ;

★★ exercice de niveau intermédiaire que l'on peut voir en devoir surveillé par exemple ;

★★★ exercice nécessitant un raisonnement plus approfondi.

Un pictogramme 💬 cliquable accompagne chaque énoncé : il vous redirige vers une page de mon site internet où vous pouvez signaler une erreur ou laisser un commentaire sur l'exercice en question.
À la fin de chaque énoncé figure le numéro de la page du corrigé correspondant, sur lequel vous pouvez cliquer pour y accéder directement.

Je vous remercie de la confiance que vous accordez à ce livre. Il est le fruit d'un travail long et minutieux ; aussi je vous serais reconnaissant de ne pas le partager : ce livre est à usage strictement personnel et sa reproduction ou sa revente, sous quelque forme que ce soit, est formellement interdite.

L'auteur,
Stéphane Pasquet

Merci

de ne pas partager ou revendre ce document.

Les ventes réalisées sur **mathweb.fr** financent les corrections, les mises à jour et la création de nouveaux contenus.

La diffusion non autorisée **met en péril la poursuite de ce travail.**

Merci de soutenir un travail indépendant et passionné.



1 Arithmétique

Dans ce chapitre

1 Ensembles des entiers naturels et relatifs 2
2 Multiples et diviseurs 2
3 Symboles mathématiques 3
4 Python 3
Prendre un bon départ 4
Exercices 5
Corrigés des exercices 8

1 Ensembles des entiers naturels et relatifs

Définition 1 (ensemble des entiers naturels et des entiers relatifs)

L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$. On a alors :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$$

L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble contenant tous les nombres entiers naturels ainsi que leurs opposés. Il est noté $\mathbb{Z}$. On a alors :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

2 Multiples et diviseurs

Définition 2

Soit n un nombre entier (naturel ou relatif).

- On appelle **diviseurs** de n tous les nombres entiers q tels que le quotient de n par q est entier.
- On appelle **multiples** de n tous les nombres de la forme $k \times n$, où k est entier.

Exemple 1

1. 2 est un diviseur de 12 car $\dfrac{12}{2} = 6$ et 6 est un nombre entier.
2. 45 est un multiple de 9 car $45 = 5 \times 9$.

Remarque 1

Si q est un diviseur de n alors on dit que n est *divisible* par q.

Définition 3

Un entier est **pair** s'il est divisible par 2.
Dans le cas contraire, on dit qu'il est **impair**.

Propriété 1 (carré d'un nombre impair)

Soit a un nombre impair.
Alors, a^2 est impair.

Démonstration 1

Si a est impair alors il existe un entier k tel que :

$$a = 2k + 1.$$

Ainsi,

$$a^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Donc a^2 est de la forme $2N + 1$, avec $N = 2k^2 + 2k$. a^2 est donc impair.

3 Symboles mathématiques

Définition 4 (appartenance)

Le symbole « $\in$ » est utilisé pour dire qu'un nombre appartient à un ensemble.
Si le nombre n'appartient pas à un ensemble, on utilise le symbole « $\notin$ ».

Exemple 2

On peut écrire $7 \in \mathbb{N}$ car le nombre 7 est bien un entier naturel.
En revanche, 7 n'est pas un entier relatif, donc on écrit : $7 \notin \mathbb{Z}$.

Définition 5 (inclusion)

L'ensemble des entiers naturels est inclus dans celui des entiers relatifs. On utilise alors le symbole « $\subset$ », et on écrira alors :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Si un ensemble n'est pas inclus dans un autre, on utilisera le symbole « $\not\subset$ ».

Exemple 3

$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ car un entier relatif n'est pas toujours un entier naturel.

4 Python

Pour vérifier si le nombre 1 245 est divisible par 3 (par exemple), on pourra effectuer le test suivant :

Code Python 1-1

```
1    if 1245 % 3 == 0:
2        print("1245 est divisible par 3")
3    else:
4        print("1245 n'est pas divisible par
      3")
```

Résultat :

```
1245 est divisible par 3
```

1 Prendre un bon départ

Exercice type 1 ▶ Appartenance à $\mathbb{N}$ ou à $\mathbb{Z}$

Complétez les pointillés par le symbole $\in$ ou $\notin$.

$$-7 \ldots \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{45}{9} \ldots \mathbb{N} \quad ; \quad -12,6 \ldots \mathbb{Z} \quad ; \quad \frac{1}{5} \ldots \mathbb{Z}$$

- $-7 \notin \mathbb{N}$. En effet, -7 n'est pas un entier naturel, mais un entier relatif.
- $\frac{45}{9} \in \mathbb{N}$ car $\frac{45}{9} = 5$, et 5 est un entier naturel.
- $-12,6 \notin \mathbb{Z}$ car $-12,6$ n'est pas un entier.
- $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ car la fraction n'est pas un entier.

Exercice type 2 ▶ Multiples et divieurs

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1 45 est un diviseur de 5.

2 9 est un diviseur de 45.

3 90 est un multiple de 45.

1 *Faux.* 45 est un *multiple* de 5, pas un diviseur de 5.

2 *Vrai.* 9 est bien un diviseur de 45. On peut aussi dire que 45 est un multiple de 9.

3 *Vrai.* $90 = 2 \times 45$ donc 90 est bien un multiple de 45.

Exercice type 3 ▶ Simplifier une fraction

Simplifier la fraction $\frac{1\,050}{125}$.

On constate que 1050 et 125 sont des multiples de 5. On écrit alors :

$$\frac{1\,050}{125} = \frac{1\,050 \div 5}{125 \div 5} = \frac{210}{25}.$$

210 et 25 sont encore des multiples de 5, donc on peut écrire :

$$\frac{1\,050}{125} = \frac{210 \div 5}{25 \div 5} = \frac{42}{5}.$$

1 Exercices

Exercice 1.1 (multiples et diviseurs)

Compléter les propositions suivantes à l'aide de l'un des mots : « multiple » ou « diviseur ».

1 45 est un ... de 180.

2 3 est un ... de 18.

3 50 est un ... de 5.

4 121 est un ... de 11.

5 2 est un ... de 78.

6 9 est un ... de 3.

Solution page 8

Exercice 1.2 (nombre parfait)

Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de tous ses diviseurs, excepté lui-même.

1 Vérifier que 6 est un nombre parfait.

2 18 est-il parfait ?

Solution page 8

Exercice 1.3 (programme Python mystère)

Qu'affiche le programme Python suivant ?

Code Python 1-2

```
1  for i in range(1,501):
2      if 500%i == 0:
3          print(i)
```

Je rappelle que :

- `range(a,b)` désigne tous les nombres entiers de a et $b-1$;
- `a%b` désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

Solution page 8

Exercice 1.4 (fraction mystère)

Soit la fraction $A = \dfrac{45\boxed{?}}{357}$.
Déterminer toutes les valeurs que peut prendre le chiffre manquant afin que la fraction A soit irréductible.

Solution page 8

Exercice 1.5 (trouver deux multiples de 11)

Déterminer deux nombres x et y multiples de 11, avec $x < y$, tels que $x + y = 132$.

Solution page 8

Exercice 1.6 (programme Python mystère)

Que fait la fonction `mystere` Python suivante ?

Code Python 1-3

```
1    def mystere(n):
2        for i in range(2,n):
3            if n % i == 0:
4                return False
5        return True
```

Je rappelle que :

- `range(a,b)` désigne tous les nombres entiers de a et $b-1$;
- `a%b` désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

Solution page 9

Exercice 1.7 (divisibilité)

Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3.

Solution page 9

Exercice 1.8 (fraction irreductible)

Simplifier les fractions suivantes.

1. $A = \dfrac{231}{273}$.
2. $B = \dfrac{175}{275}$

Solution page 9

Exercice 1.9 (multiple)

Quel est le plus petit multiple de 13 supérieur ou égal à 500 ?

Solution page 9

Exercice 1.10 (multiple)

Quel est le plus grand multiple de 11 inférieur à 7 800 ?

Solution page 10

Exercice 1.11 (vrai ou faux)

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. La différence entre deux nombres entiers naturels est un entier naturel.
2. La somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.
3. La somme de deux diviseurs de 12 est un diviseur de 12.
4. Le quotient de deux entiers relatifs non nuls est un entier relatif.

Solution page 10

Exercice 1.12 (somme de carrés)

Soient a et b deux entiers relatifs *impairs*.
Montrer que la somme de leur carré est paire.

Solution page 10

Exercice 1.13 (démonstration)

Démontrer que la somme de trois entiers relatifs consécutifs est toujours un multiple de 3.

Solution page 10

Exercice 1.14 (divisibilité)

On considère un entier naturel n s'écrivant avec 5 chiffres : $n = abcde$.

1 Vérifier que $10\,000 = 11k + 1$ et $100 = 11k' + 1$, où k et k' sont deux entiers naturels.

2 Vérifier que $1\,000 = 11q - 1$, où q est un entier naturel.

3 En déduire l'équivalence suivante :

$$n \text{ est divisible par } 1 \iff (e + c + a) - (d + b) \text{ est divisible par } 11.$$

4 71 632 est-il divisible par 11 ?

Solution page 10

Exercice 1.15 (divisibilité)

On considère un entier naturel n.

1 Démontrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

2 Démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

Solution page 11

mathweb.fr

1 Corrigés

Corrigé de l'exercice 1.1 page 5

1. 45 est un diviseur de 180.
2. 3 est un diviseur de 18.
3. 50 est un multiple de 5.
4. 121 est un multiple de 11.
5. 2 est un diviseur de 78.
6. 9 est un multiple de 3.

Corrigé de l'exercice 1.2 page 5

1. Les diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3 et 6.
   De plus, $1+2+3=6$ donc 6 est un nombre parfait.
2. Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18.
   Or, $1+2+3+6+9=21$ donc 18 n'est pas parfait.

Corrigé de l'exercice 1.3 page 5

Ce programme parcourt tous les nombres entiers de 1 à 500 et pour chacun d'eux, teste si le reste de la division euclidienne de 500 par le nombre est nul, auquel cas cela signifie que 500 est divisible par le nombre et ce dernier est affiché.
Ainsi, le programme affiche tous les diviseurs de 500.

Corrigé de l'exercice 1.4 page 5

$357 = 3 \times 7 \times 17$; ainsi, le numérateur ne doit pas être divisible par 3, 7 et 17.
Notons x le chiffre manquant.

- pas divisible par 3, donc la somme de ses chiffres ne doit pas être divisible par 3.

  $$4+5+x = 9+x$$

  donc x ne doit pas être égal à 0, 3, 6 ou 9. Donc x peut être égal à :

  $$1,\ 2\,4\,5,\ 7,\ 8.$$

- 451 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=1$ est possible ;
  452 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=2$ est possible ;
  454 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=4$ est possible ;
  455 est divisible par 7 donc $x \neq 0$;
  457 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=7$ est possible ;
  458 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=8$ est possible.

Corrigé de l'exercice 1.5 page 5

Il existe deux entiers k et k' tels que $x=11k$ et $y=11k'$ car x et y sont multiples de 11.

$$x+y=132 \iff 11(k+k')=132 \iff k+k'=\frac{132}{11}=12.$$

De plus, $x<y$ donc $k<k'$. Les différentes valeurs pour k et k' sont :

$$k=0 \text{ et } k'=12\,;$$
$$k=1 \text{ et } k'=11\,;$$
$$k=2 \text{ et } k'=10\,;$$

mathweb.fr

$$k = 3 \text{ et } k' = 9\,;$$
$$k = 4 \text{ et } k' = 8\,;$$
$$k = 5 \text{ et } k' = 7.$$

Corrigé de l'exercice 1.6 page 6

Expliquons pas à pas chaque ligne du programme :

- `def mystere(n):`
  Une fonction est ici définie : elle admet pour « variable » `n` (on dit que c'est un *argument* de la fonction Python).
- `for i in range(2,n):`
  « `for` » désigne une *boucle itérative* (« Pour »). Ici, la variable `i` va prendre ses valeurs dans `range(2,n)`, c'est-à-dire dans la liste `[2,3,4,...,n-1]`. Donc `i` vaudra successivement 2, 3, 4, etc. jusqu'à `n-1`.
- `if a % i == 0:`
  À chaque itération, c'est-à-dire à chaque fois que `i` prendra une nouvelle valeur, on teste si le reste de la division euclidienne de `n` par `i` vaut « 0 », c'est-à-dire si `n` est divisible par `i`. Si c'est le cas, on exécute l'instruction suivante (à savoir : « `return False` ». La fonction renvoie donc ici « `False` » si `n` est divisible par `i`.
- `return True`
  Cette instruction est en dehors de la boucle itérative « `for i in range(2,n)` » : elle s'exécute donc si on sort de la boucle, c'est-à-dire si la fonction n'a pas renvoyé « `False` ».

À la vue de tout ceci, on peut alors dire que la fonction renvoie « `False` » s'il existe un diviseur de l'argument `n`, et renvoie « `True` » dans le cas contraire.
Ce programme teste donc si `n` est un nombre premier : elle renvoie « `True` » si c'est le cas, et « `False` » dans le cas contraire.

Corrigé de l'exercice 1.7 page 6

Notons $n-1$, n et $n+1$ trois entiers consécutifs quelconques. Leur somme est donc :

$$n-1+n+n+1 = 3n.$$

Ainsi, la somme est un multiple de 3 (car n est un entier). Elle est donc toujours divisible par 3.

Corrigé de l'exercice 1.8 page 6

1 $A = \dfrac{231}{273} = \dfrac{231 \div 3}{273 \div 3} = \dfrac{77}{91} = \dfrac{77 \div 7}{91 \div 7} = \boxed{\dfrac{11}{13}}$.

2 $B = \dfrac{175}{275} = \dfrac{175 \div 5}{275 \div 5} = \dfrac{35}{55} = \dfrac{35 \div 5}{55 \div 5} = \boxed{\dfrac{7}{11}}$.

Corrigé de l'exercice 1.9 page 6

Pour répondre à la question, on peut effectuer une division euclidienne de 500 par 13 :

$$\begin{array}{r|l} 500 & 13 \\ \hline 110 & 38 \\ 6 & \end{array}$$

On constate alors que $38 \times 13 + 6 = 500$, ce qui signifie que $38 \times 13 = 500 - 6$.

Le plus petit multiple de 13 supérieur ou égal à 500 est donc $38 \times 13 + 13 = 500 - 6 + 13 = 507$.

Corrigé de l'exercice 1.10 page 6

On peut effectuer la division euclidienne de 7 800 par 11 :

$$\begin{array}{r|l} 7\,8\,0\,0 & 1\,1 \\ \cline{2-2} 1\,0\,0 & 7\,0\,9 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi, $709 \times 11 + 1 = 7\,800$, et donc $709 \times 11 = 7\,800 - 1 = 7\,799$.
Le plus grand multiple de 11 inférieur à 7 800 est donc 7 799.

Corrigé de l'exercice 1.11 page 6

1 *Faux.* En effet, 13 et 20 sont deux entiers naturels, mais $13 - 20 = -7$. Le résultat est ici un entier *relatif*.

Methode 3

Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un *contre-exemple*.

2 *Vrai.* En effet, si p et q sont deux entiers relatifs, $7p$ et $7q$ sont des multiples de 7.
De plus, $7p + 7q = 7(p + q)$. Donc la somme s'écrit comme le produit de 7 par un entier $(p + q)$. La somme est donc bien un multiple de 7.

3 *Faux.* En effet, 4 et 3 sont deux diviseurs de 12. Cependant, $4 + 3 = 7$ n'est pas un diviseur de 12.

4 *Faux.* En effet, 1 et 2 sont deux entiers relatifs non nuls ; cependant $\dfrac{1}{2} = 0,5$ n'est pas entier.

Corrigé de l'exercice 1.12 page 7

D'après le cours, si a et b sont impairs alors a^2 et b^2 sont aussi impairs.
Alors,

$$\exists\,(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ a^2 = 2p + 1 \text{ et } b^2 = 2q + 1.$$

Ainsi, leur somme est :

$$a^2 + b^2 = 2p + 1 + 2q + 1 = 2p + 2q + 2 = 2(p + q + 1).$$

La somme est donc un multiple de 2. Elle est donc paire.

Corrigé de l'exercice 1.13 page 7

Notons n un entier relatif.
Alors, $n - 1$ est l'entier qui le précède, et $n + 1$ est celui qui le succède.
Ainsi, $n - 1$, n et $n+$ sont trois entiers relatifs consécutifs.
Leur somme vaut :

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n - 1 + 1 = 3n.$$

On peut alors dire que cette somme est un multiple de 3, quelle que soit la valeur entière de n.

Corrigé de l'exercice 1.14 page 7

1 $10\,000 = 909 \times 11 + 1$ et $100 = 9 \times 11 + 1$.

2 $1\,000 = 91 \times 11 - 1$.

3 $n = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e$
$= (909 \times 11 + 1)a + (91 \times 11 - 1)b + (9 \times 11 + 1)c + (11 - 1)d + e$
$= 909 \times 11a + a + 91 \times 11b - b + 9 \times 11c + c + 11d - d + e$
$= 11(909a + 91b + 9c + d) + a - b + c - d + e$
$= 11(909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) - (b + d)$
Ainsi, n est divisible par 11 uniquement si $(a + c + e) - (b + d)$ l'est aussi, ce qui justifie l'équivalence.

4 $2+6+7=15$ et $3+1=4$; de plus, $15-4=11$, résultat divisible par 11, donc 71 632 est divisible par 11.

Corrigé de l'exercice 1.15 page 7

1 Nous alors raisonner par implications.

Methode 4

Démontrer que :

si la propriété p est vraie *alors* la propriété q est vraie

revient à démontrer l'implication :

$$p \text{ vraie} \implies q \text{ vraie.}$$

$$\begin{aligned} n \text{ impair} &\implies \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1 \\ &\implies \exists k \in \mathbb{N},\ n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 \\ &\implies \exists k \in \mathbb{N},\ n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\implies \exists k \in \mathbb{N},\ n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1). \end{aligned}$$

Or, le produit $k(k+1)$ est nécessairement pair. En effet,

a. si k est pair, $k(k+1)$ est pair ;

b. si k est impair, $k+1$ est pair et donc $k(k+1)$ est pair.

Ainsi, on peut écrire :

$$k(k+1) = 2K,\ K \in \mathbb{N}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} n \text{ impair} &\implies \exists K \in \mathbb{N},\ n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4 \times 2K = 8K \\ &\implies n^2 - 1 \text{ est divisible par } 8. \end{aligned}$$

Ainsi, si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

2 $2^n + 2^{n+1} = 2^n \times 1 + 2^n \times 2 = 2^n(1+2) = 2^n \times 3$.

Ainsi, $2^n + 2^{n+1} = 3 \times 2^n$, donc est divisible par 3.

2 Les nombres réels

1 Nombres réels . . . 13
1 Des entiers naturels aux nombres réels . . . 13
2 Représentations des ensembles . . . 13
a La droite des réels . . . 13
b Diagramme de Venn . . . 13
2 Intervalles . . . 14
1 Définitions et notations . . . 14
2 Appartenance à un intervalle . . . 16
3 Union et intersection d'intervalles . . . 16
4 Inclusion d'intervalles . . . 17
5 Notations particulières . . . 17
3 Valeur absolue d'un nombre réel . . . 17
1 Définition . . . 17
2 Distance entre deux nombres réels . . . 18
3 Résolution de l'équation $|x-a| \leqslant r$ . . . 18
4 Encadrement décimal . . . 18
4 Racines carrées . . . 19
1 Définition . . . 19
2 Règles de calculs . . . 20
5 Puissances . . . 22
1 Définition . . . 22
2 Règles de calculs . . . 22
3 Écriture scientifique d'un nombre . . . 23
6 Raisonnement par l'absurde . . . 23
1 $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal . . . 23
2 $\sqrt{2}$ est irrationnel . . . 24
Prendre un bon départ . . . 25
Exercices . . . 26
Nombres réels, intervalles . . . 26
Valeur absolue . . . 27
Racines carrées . . . 29
Puissances . . . 30
Corrigés des exercices . . . 32

Dans ce chapitre

1 Nombres réels

1 Des entiers naturels aux nombres réels

Définition 6 (ensembles de nombres)

- L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble des nombres : 0, 1, 2, ...
  On le note $\mathbb{N}$:
  $$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$$
- L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble composé des entiers naturels et de leurs opposés.
  On le note $\mathbb{Z}$:
  $$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$
- L'ensemble des **nombres décimaux** est l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme $a \times 10^n$, où a et n sont deux entiers relatifs.
  On le note $\mathbb{D}$. C'est l'ensemble des nombres à virgule à écriture *finie*.
  $$\mathbb{D} = \{a \times 10^n \ , a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$$
- L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble de tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$.
  On le note $\mathbb{Q}$:
  $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$
- L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble de tous les nombres pouvant représenter une quantité réelle.
  On le note $\mathbb{R}$.

2 Représentations des ensembles

a La droite des réels

L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite graduée sur laquelle on peut mettre n'importe quel nombre réel :



b Diagramme de Venn

Définition 7 (symbole d'inclusion)

Soient E et F deux ensembles quelconques. Si tous les éléments de F sont aussi dans E, on dit que F est **inclus** dans E, et on note :

$$\begin{cases} F \subset E & \text{si } E \text{ est plus grand que } F \\ F \subseteq E & \text{si } F \text{ peut être confondu avec } E \end{cases}$$

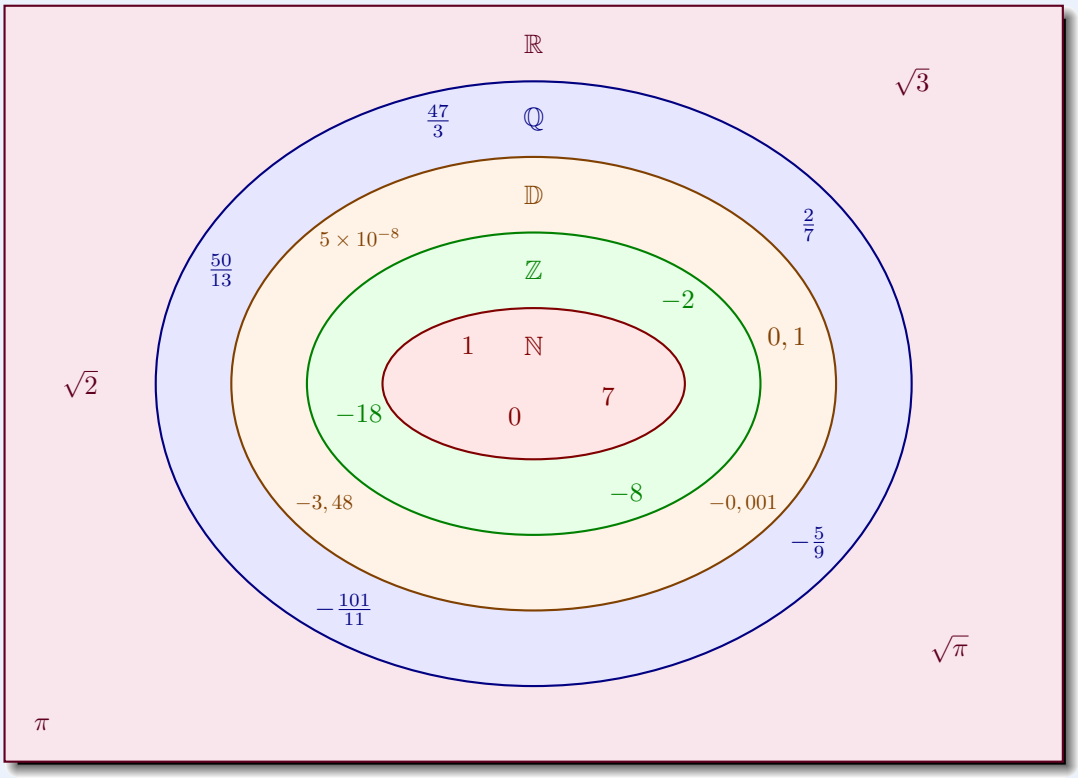
Propriété 2

- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs, donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Tous les entiers relatifs sont aussi des nombres décimaux, donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Tous les nombres décimaux sont aussi des nombres rationnels, donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- Tous les nombres rationnels sont aussi des nombres réels, donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On a donc :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Cette dernière propriété se représente par le diagramme de Venn suivant :



Définition 8

Si un nombre est réel mais n'est pas rationnel, on dit qu'il est **irrationnel**.

2 Intervalles

1 Définitions et notations

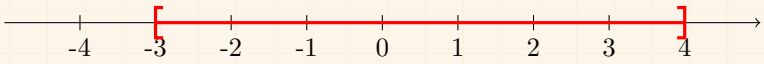
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Définition 9 (intervalle fermé)

On notera $[a\,;b]$ l'ensemble des nombres réels compris entre a et b. Ici, a et b sont *compris* dans l'intervalle car les crochets sont dirigés vers l'intérieur.
On dira que $[a\,;b]$ est un **intervalle fermé**.

Exemple 4

On représentera $[-3\,;4]$ ainsi :



Définition 10 (intervalle ouvert)

On notera $]a\,;b[$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a et b qui ne sont pas compris dans l'intervalle car les crochets sont dirigés vers l'extérieur.
On dira que $]a\,;b[$ est un **intervalle ouvert**

Exemple 5

On représentera $]-3\,;4[$ ainsi :



Définition 11 (intervalle semi-ouvert à gauche)

On notera $]a\,;b]$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a non compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'extérieur du côté de a) et b compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'intérieur du côté de b).

Exemple 6

On représentera $]-3\,;4]$ ainsi :

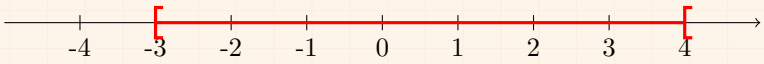


Définition 12 (intervalle semi-ouvert à droite)

On notera $[a\,;b[$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'intérieur du côté de a) et b non compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'extérieur du côté de b).

Exemple 7

On représentera $[-3\,;4[$ ainsi :



Définition 13 (intervalle infini)

- On notera $]-\infty\,;a[$ l'ensemble des nombres strictement plus petits que a.
- On notera $]-\infty\,;a]$ l'ensemble des nombres plus petits que a ou égaux à a.
- On notera $]a\,;+\infty[$ l'ensemble des nombres strictement plus grands que a.
- On notera $[a\,;+\infty[$ l'ensemble des nombres plus grands que a ou égaux à a.

Remarque 2

Le crochet est toujours *ouvert* du côté de l'infini (car on ne peut jamais atteindre l'infini).

2 Appartenance à un intervalle

Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a\,;b]$, on écrira :

$$x \in [a\,;b].$$

Cela signifie que x est compris entre a et b et on pourra donc l'écrire aussi :

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Attention 1

Les signes d'inégalité sont choisis en fonction du sens des crochets de l'intervalle :

$$x \in [a\,;b] \Longrightarrow a \leqslant x \leqslant b$$

$$x \in]a\,;b[\Longrightarrow a < x < b$$

$$x \in]a\,;b] \Longrightarrow a < x \leqslant b$$

$$x \in [a\,;b[\Longrightarrow a \leqslant x < b$$

$$x \in [a\,;+\infty[\Longrightarrow x \geqslant a$$

$$x \in]-\infty\,;a[\Longrightarrow x < a$$

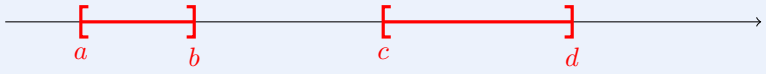
Pour écrire qu'un nombre x n'appartient pas à un intervalle $[a\,;b]$, on écrira : $x \notin [a\,;b]$.

3 Union et intersection d'intervalles

- Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a\,;b]$ **ou** à un intervalle $[c\,;d]$, on écrira :

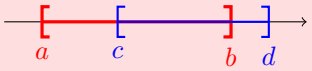
$$x \in [a\,;b] \cup [c\,;d].$$

On représentera l'union ainsi :



Attention 2

Si les deux intervalles se chevauchent,



devient :



Dans ce cas (et uniquement dans ce cas), $[a\,;b] \cup [c\,;d] = [a\,;d]$.

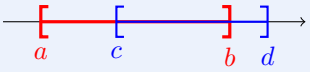
- Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a\,;b]$ **et** à un intervalle $[c\,;d]$, on écrira :

$$x \in [a\,;b] \cap [c\,;d].$$

→ Si les deux intervalles ne se chevauchent pas, l'intersection est *vide* (n'existe pas).
On notera alors :

$$[a\,;b] \cap [c\,;d] = \varnothing.$$

→ Si les deux intervalles se chevauchent, l'intersection est l'ensemble en commun aux deux intervalles :



intersection :

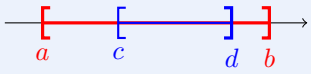


4 Inclusion d'intervalles

Si un intervalle $[c\,;d]$ est *inclus* dans un autre intervalle $[a\,;b]$, on écrira :

$$[c\,;d] \subset [a\,;b].$$

Cela se schématise de la façon suivante :



5 Notations particulières

L'ensemble des nombres réels auquel on enlève le nombre 0 est noté : $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
L'ensemble des nombres réels auquel on enlève le nombre a est noté : $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
De plus, on notera :

$$]-\infty\,;0] = \mathbb{R}_- \quad ; \quad]-\infty\,;0[= \mathbb{R}_-^* \quad ; \quad [0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+ \quad ; \quad]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*.$$

Remarque 3

L'étoile est toujours en haut, tout comme les étoiles sont toujours en haut, dans le ciel... (poétique non ?)

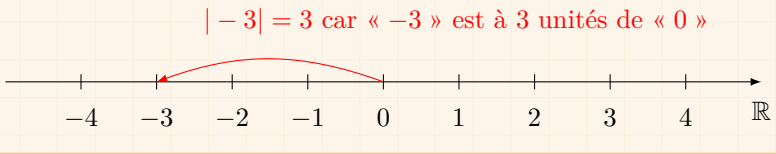
3 Valeur absolue d'un nombre réel

1 Définition

Définition 14

Soit a un nombre réel. On appelle **valeur absolue** de a la distance qui sépare a de 0 sur la droite des réels. On la note $|\,a\,|$.

Exemple 8



Remarque 4

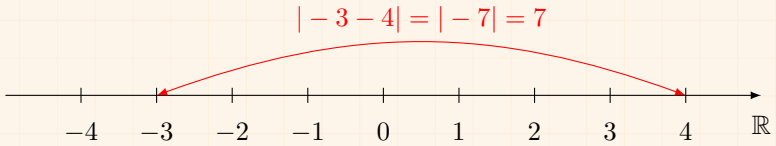
On a donc : $\begin{cases} |\,a\,| = a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |\,a\,| = -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$.

2 Distance entre deux nombres réels

Propriété 3

Soient a et b deux nombres réels.
La distance entre a et b est égale à $|a-b|$ (ou $|b-a|$, ce qui est la même chose).

Exemple 9



-3 et 4 sont distants de 7 unités car $|-3-4| = |-7| = 7$.

3 Résolution de l'équation |x-a| ⩽ r

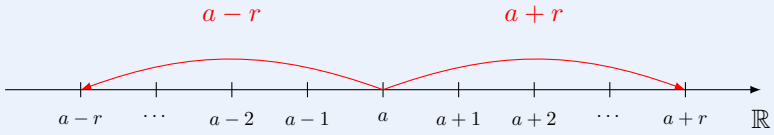
Propriété 4

Soient a et r deux nombres réels, avec $r > 0$.

$$|x-a| \leqslant r \iff x \in [a-r\,;a+r].$$

$$|x-a| < r \iff x \in]a-r\,;a+r[.$$

En effet, dire que $|x-a| \leqslant r$ signifie que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r :



Exemple 10

$$\begin{aligned} |x+5| \leqslant 3 &\iff |x-(-5)| \leqslant 3 \\ &\iff x \in [-5-3\,;-5+3] \\ &\iff x \in [-8\,;-2]. \end{aligned}$$

4 Encadrement décimal

Définition 15

Soient x un nombre réel et n un entier naturel.
Trouver un encadrement décimal de x à 10^{-n} près signifie trouver un intervalle $[a\,;b]$ tel que $|x-a| \leqslant 10^{-n}$ et $|x-b| \leqslant 10^{-n}$.

Exemple 11

1 Un encadrement de π à 10^{-2} près est :

$$3,14 \leqslant \pi \leqslant 3,15$$

car $|\pi - 3,14| \approx 0,0016 \leqslant 10^{-2}$ et $|\pi - 3,15| \approx 0,008 \leqslant 10^{-2}$.

2 Un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près est :

$$1,414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,415$$

car $|\sqrt{2} - 1,414| \approx 0,0002 \leqslant 10^{-3}$ et $|\sqrt{2} - 1,415| \approx 0,0008 \leqslant 10^{-3}$.

Remarque 5

Trouver un encadrement décimal à 10^{-n} près de la forme $[a\,;b]$ revient à écrire a et b sous la forme décimale avec n chiffres après la virgule.

Remarque 6

Quand on connaît une valeur approchée de x, pour obtenir un encadrement décimal à 10^{-n} près,

- a est la troncature de la partie décimale de x avec n chiffres après la virgule ;
- b est obtenu à partir de a en ajoutant « 1 » au dernier chiffre de la partie décimale.

Par exemple, pour $\pi \approx 3,14159\ldots$, pour un encadrement à 10^{-3}, on prend 3 chiffres après la virgule pour obtenir a ($a = 3,141$) et on ajoute 1 au dernier chiffre de la partie décimale de a pour obtenir b ($141 + 1 = 142$ donc $b = 3,142$). On obtient alors :

$$3,141 \leqslant \pi \leqslant 3,142.$$

4 Racines carrées

1 Définition

Définition 16

Soit x un nombre réel positif ou nul.
On dit que y est la **racine carrée** de x, et on écrit $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$, si $y^2 = x$ et $y \geqslant 0$.

Exemple 12

1 3 est la racine carrée de 9 car $3^2 = 9$: $\sqrt{9} = 3$.

2 10 est la racine carrée de 100 car $10^2 = 100$: $\sqrt{100} = 10$.

Remarque 7

$(-3)^2 = 9$ mais -3 n'est pas la racine carrée de 9 car la définition dit bien que la racine carrée d'un nombre est positive ou nulle ($y \geqslant 0$).

Propriété 5

Quel que soit le nombre réel a,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Exemple 13

1 $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

2 $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$.

3 $\sqrt{7^2} = |7| = 7$.

2 Règles de calculs

Propriété 6

Quels que soient les nombres réels a et b positifs ou nuls,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Démonstration 2

Nous avons d'une part :

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab \ ;$$

d'autre part,

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b = ab.$$

Or, $\sqrt{ab} \geqslant 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geqslant 0$ $^{(*)}$, donc :

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 \iff \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Remarque 8

Il fallait ici préciser les conditions (*) car dans un cas général, ce n'est pas parce que l'on a $x^2 = y^2$ que $x = y$. Par exemple, $(-3)^2 = 3^2$. Les conditions de positivité sont donc ici nécessaires car si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors on peut dire que $x^2 = y^2$ implique que $x = y$.
Nous en dirons plus sur cela dans le chapitre qui traitera de la fonction carré.

Exemple 14

1. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Propriété 7

Quels que soient les nombres réels a et b positifs, avec $b \neq 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Démonstration 3

On a d'une part : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$; d'autre part, $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b}$.

Or, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \geqslant 0$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$ donc $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 15

1. $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \dfrac{5}{3}$.
2. $\sqrt{\dfrac{16}{36}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Attention 3

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer par exemple :

$$\begin{cases} \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3. \end{cases}$$

On voit alors que les deux résultats ne sont pas égaux.

Remarque 9

Le symbole du radical (c'est-à-dire le symbole « $\sqrt{\ }$ » est dû au mathématicien allemand Christoff Rudolff (1499 - 1545).
Dans l'écriture $\sqrt{a}$, « a » est appelé le *radicande*.

Methode 5 (simplifier un radical par décomposition en produit de facteurs premiers)

Pour simplifier $\sqrt{17\ 146\ 080}$ (par exemple), on peut avant tout décomposer le radicande en produit de facteurs premiers :

- 17 146 080 est divisible par 2 donc on commence par diviser par 2 :

1 7 1 4 6 0 8 0	2
1 1	8 5 7 3 0 4 0
1 4	
0 6	
0 0 8	
0	

- Le quotient obtenu est encore divisible par 2 donc on continue :

8 5 7 3 0 4 0	2
0 5	4 2 8 6 5 2 0
1 7	
1 3	
1 0	
0 4	
0	

- Le quotient est encore divisible par 2 donc on continue jusqu'à obtenir un quotient impair. On obtient alors :

$$17\ 146\ 080 = 2^5 \times 535\ 815.$$

- 535 815 est divisible par 3 (car la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3) donc on divise par 3 :

5 3 5 8 1 5	3
2 3	1 7 8 6 0 5
2 5	
1 8	
0 1 5	
0	

- Le quotient obtenu est encore divisible par 3 donc on continue jusqu'à obtenir un quotient non multiple de 3. On obtient alors :

$$535\ 815 = 3^7 \times 245.$$

- On passe au nombre premier qui suit 3 : c'est 5. 245 est divisible par 5, et :

$$245 = 5 \times 49 = 5 \times 7^2.$$

- Finalement, le radicande s'écrit :

$$17\ 146\ 080 = 2^5 \times 3^7 \times 5 \times 7^2.$$

Comme nous souhaitons simplifier une racine carrée, seuls les exposants pairs nous intéressent ; on écrit donc :

$$17\ 146\ 080 = 2^4 \times 2 \times 3^6 \times 3 \times 5 \times 7^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sqrt{17\ 146\ 080} &= \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^6} \times \sqrt{7^2} \times \sqrt{2 \times 3 \times 5} \\ &= 2^2 \times 3^3 \times 7^1 \times \sqrt{30} \\ &= \underline{756\sqrt{30}}.\end{aligned}$$

5 Puissances

1 Définition

Définition 17

Soient a un nombre réel et n un entier naturel non nul.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.
- Si $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Exemple 16

- $7^3 = 7 \times 7 \times 7$.
- $7^{-3} = \dfrac{1}{7^3}$.
- $7^0 = 1$.
- $\dfrac{1}{7} = 7^{-1}$.

2 Règles de calculs

Propriété 8

Soient a et b deux nombres réels non nuls, n et m deux entiers relatifs.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$.
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$.
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Exemple 17

- $7^2 \times 7^8 = 7^{2+8} = 7^{10}$.
- $\dfrac{7^8}{7^{-3}} = 7^{8-(-3)} = 7^{8+3} = 7^{11}$.
- $(7^2)^3 = 7^{2 \times 3} = 7^6$.
- $7^2 \times 3^2 = (7 \times 3)^2 = 21^2$.
- $\left(\dfrac{7}{3}\right)^4 = \dfrac{7^4}{3^4}$.

3 Écriture scientifique d'un nombre

Définition 18

Une **écriture scientifique** d'un nombre est une écriture de ce nombre sous la forme :

$$a \times 10^n \quad , \quad \text{avec } 1 \leqslant |a| < 10,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 18

- $1,78 \times 10^2$ est l'écriture scientifique de 178.
- $3,049 \times 10^{-2}$ est l'écriture scientifique de 304,9.
- $4,05 \times 10^{-8}$ est l'écriture scientifique de 0,000 000 040 5.

6 Raisonnement par l'absurde

Définition 19

Un **raisonnement par l'absurde** est un raisonnement dans lequel on part d'une donnée contraire à ce que l'on veut démontrer afin d'arriver à une contradiction mathématique.

1 $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

On considère la propriété :

$$(P) \quad : \quad \text{« } \frac{1}{3} \text{ n'est pas décimal ».}$$

- **Étape 1 : on suppose que le contraire de (P) est vrai.**
  On suppose alors que $\frac{1}{3}$ est décimal.
- **Étape 2 : on exploite cette supposition pour arriver à une absurdité.**
  Si $\frac{1}{3}$ est décimal alors, par définition d'un nombre décimal,

  $$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}, \quad \text{où } a \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$$

  car $0 < \frac{1}{3} < 1$.

  Ainsi, les produits en croix sont égaux :

  $$1 \times 10^n = 3 \times a \qquad \text{soit} \qquad 10^n = 3a.$$

  Ce qui signifie que 10^n est un multiple de 3, ce qui n'est pas le cas car un nombre est multiple de 3 uniquement si la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3.

  Or, $10^n = 1000\ldots$ donc la somme des chiffres de 10^n est égale à 1, qui n'est pas un multiple de 3.
- **Étape 3 : conclusion.**
  Supposer que $\frac{1}{3}$ est un décimal implique que 10^n est un multiple de 3, ce qui est absurde. Par conséquent, $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

2 $\sqrt{2}$ est irrationnel

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, il existe deux nombres p et q premiers entre eux tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Ainsi, en élevant au carré, on a :

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad 2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Donc,

$$p^2 = 2q^2.$$

p^2 est donc un nombre pair, ce qui signifie que p est aussi un nombre pair (en effet, si p était impair, en l'élevant au carré, on obtiendrait encore un nombre impair).
Donc :

$$p = 2k.$$

Alors,

$$(2k)^2 = 2q^2 \qquad \text{soit} \qquad 4k^2 = 2q^2.$$

En divisant par 2 à droite et à gauche du signe « = », on obtient :

$$2k^2 = q^2.$$

Cela signifie que q^2 est pair, et donc que q est aussi pair.

On arrive alors au fait que p et q sont tous les deux pairs, ce qui est impossible car on a supposé que p et q étaient premiers entre eux.

Ainsi, $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$; $\sqrt{2}$ n'est donc pas rationnel.

2 Prendre un bon départ

Exercice type 4 ▶ Appartenance à un ensemble

Indiquer le plus petit ensemble auquel appartiennent les nombres suivants :

$$0,12 \quad ; \quad \sqrt{3} \quad ; \quad \frac{49}{-7} \quad ; \quad \frac{1}{3}$$

- $0,12 \in \mathbb{D}$. En effet, $0,12 = \dfrac{12}{10}$.
- $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$. En effet, il n'existe pas de plus petit ensemble contenant ce nombre car il ne s'écrit pas comme le quotient de deux entiers.
- $\dfrac{49}{-7} = -7 \in \mathbb{Z}$.
- $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.

Exercice type 5 ▶ Intervalles

1 Si $-3 \leqslant x < 2$, à quel intervalle I le nombre x appartient-il ?

2 Si $-7 < x \leqslant 1$, à quel intervalle J le nombre y appartient-il ?

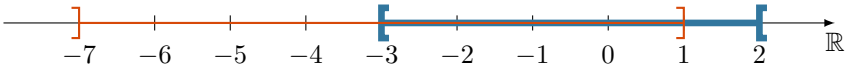
3 À quel intervalle l'ensemble $I \cup J$ correspond-il ?

4 À quel intervalle l'ensemble $I \cap J$ correspond-il ?

1 $-3 \leqslant x < 2 \iff x \in [-3\,;2[$. Donc $I = [-3\,;2[$.

2 $-7 < x \leqslant 1 \iff x \in]-7\,;1]$. Donc $J =]-7\,;1]$.

3 Pour déterminer l'intervalle correspondant à $I \cup J$, on peut s'aider du schéma suivant :



La réunion des intervalles I et J est l'intervalle « global » (car il n'y a pas de trou) :

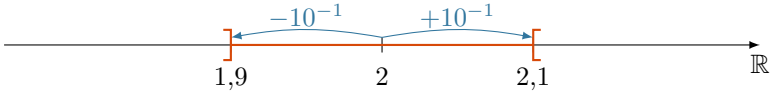
$$I \cup J =]-7\,;2[.$$

4 L'intersection de I et J est l'intervalle où I et J se chevauchent :

$$I \cap J = [-3\,;1].$$

Exercice type 6 ▶ Valeur absolue

Représenter en rouge à l'aide d'un schéma l'ensemble des nombres x tels que $|\,x-2\,| < 10^{-1}$.



2 Exercices

Nombres réels, intervalles

Exercice 2.1 (appartenance à un ensemble)

À quel ensemble les nombres suivants appartiennent-ils ? Donner le plus petit ensemble possible.

1. $\sqrt{\pi}$
2. $\dfrac{7}{4}$
3. $\sqrt{(-5)^2}$
4. $\dfrac{1}{\pi}$
5. $\dfrac{5}{3}$
6. π^2
7. $\sqrt{3^2+4^2}$
8. $-\dfrac{48}{4}$
9. $\dfrac{7}{10^8}$
10. $\dfrac{7}{6}$

Solution page 32

Exercice 2.2 (appartenance à un intervalle)

Compléter les affirmations suivantes avec l'un des symboles : $\in$ ou $\notin$.

1. $\dfrac{1}{3} \dots \left[-1\,;\dfrac{1}{2}\right]$
2. $\dfrac{7}{5} \dots [0\,;1]$
3. $\dfrac{8}{9} \dots [0\,;1]$
4. $-\dfrac{9}{7} \dots [-2\,;-1]$
5. $\dfrac{9}{4} \dots [2\,;3]$
6. $\dfrac{8}{5} \dots]1,6\,;1,7[$
7. $\dfrac{1}{\pi} \dots [\pi\,;\pi+1]$
8. $\dfrac{15}{14} \dots [1,06\,;1,07]$
9. $-\dfrac{20}{21} \dots [-1\,;-0,9]$
10. $-\dfrac{78}{79} \dots]-0,99\,;-0,98[$

Solution page 32

Exercice 2.3 (encadrement)

Donner un encadrement décimal des nombres suivants à 10^{-n}.

1. π^2, $n=4$
2. $\sqrt{3}$, $n=3$
3. $\sqrt{5}$, $n=5$
4. $\dfrac{1}{\pi}$, $n=1$
5. $\sqrt{7}+\sqrt{11}$, $n=0$
6. $\dfrac{2}{3}$, $n=2$
7. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $n=4$
8. $-\dfrac{7}{11}$, $n=5$

Solution page 32

Exercice 2.4 (vrai ou faux)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $-\dfrac{13}{7}$ est un nombre rationnel.
2. $\dfrac{1,7}{3,4} \in \mathbb{Q}$.
3. $0,123$ est un nombre rationnel.
4. $-\dfrac{7}{3} \in \mathbb{D}$.
5. $\dfrac{30}{6}$ est un entier relatif.
6. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}$.

Solution page 33

mathweb.fr

Exercice 2.5 (traduire à l'aide d'un intervalle)

Traduire les inégalités ou les encadrements suivants à l'aide d'un intervalle.

1 $-9 < x \leqslant 12$

2 $x > 2$

3 $-5,5 \leqslant x \leqslant 5,5$

4 $x \leqslant 3$

Solution page 33

Exercice 2.6 (0,999... = 1)

On pose $x = 0,999\ldots$.

1 Justifier que $10x = 9 + x$.

2 En déduire que $x = 1$.

Solution page 33

Exercice 2.7 (trouver l'écriture rationnelle d'un nombre décimal)

On pose $x = 0{,}718\ 718\ 718\ldots$.

1 Justifier que $1\ 000x = 718 + x$.

2 En déduire l'écriture rationnelle de x.

Solution page 34

Exercice 2.8 (réunion et intersection d'intervalles)

Pour chacun des intervalles I et J suivants, décrire $I \cap J$ et $I \cup J$ de la manière la plus simple possible.

1 $I =]-3\,;7]$ et $J = [-1\,;+\infty[$

2 $I =]-\infty\,;4[$ et $J = [4\,;10]$

3 $I = [-10\,;2]$ et $J = [-3\,;7]$

4 $I =]-\infty\,;3]$ et $J = [-6\,;+\infty[$

5 $I = [7\,;+\infty[$ et $J = [-5\,;+\infty[$

6 $I =]3\,;18]$ et $J =]17\,;20]$

7 $I = [-3\,;0]$ et $J = [-1\,;+\infty[$

8 $I = [-2\,;0[$ et $J = [0\,;+\infty[$

9 $I =]7\,;18[$ et $J = [10\,;+\infty[$

10 $I =]-4\,;2[$ et $J = [2\,;5]$

11 $I =]-4\,;2[$ et $J =]2\,;5]$

12 $I = [-3\,;+\infty[$ et $J =]-5\,;+\infty[$

Solution page 34

Valeur absolue

Exercice 2.9 (exprimer sans valeur absolue)

Exprimer sans valeur absolue les nombres suivants :

1 $|\,\pi - 3\,|$

2 $|\,2\pi + 7\,|$

3 $|\,7 - 3\pi\,|$

4 $|\,\pi - 4\,|$

Solution page 35

mathweb.fr

Exercice 2.10 (exprimer sans valeur absolue)

Exprimer sans valeur absolue les nombres suivants :

1 $|\,\pi^2-\pi\,|$ **2** $|\,2\pi-\pi^2\,|$ **3** $\left|7-\frac{1}{7}\right|$ **4** $\left|\pi-\frac{1}{4}\right|$

Solution page 35

Exercice 2.11 (exprimer sans valeur absolue)

Calculer :

1 $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right|$ **2** $\left|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right|$ **3** $\left|\frac{2}{7}-\frac{7}{2}\right|$ **4** $\left|\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right|$

Solution page 35

Exercice 2.12 (exprimer sans valeur absolue)

Calculer :

1 $|\sqrt{2}-4|$ **2** $|2\sqrt{3}-\pi|$ **3** $\left|\frac{2}{7}-\sqrt{7}\right|$ **4** $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$

Solution page 36

Exercice 2.13 (traduire à l'aide d'un intervalle)

Traduire les inégalités suivantes à l'aide d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles dans lequel ou laquelle se trouve x.

1 $|\,x-2\,|\leqslant 10^{-3}$
2 $|\,x+3\,|>2$
3 $|\,x-7\,|\geqslant 11$
4 $|\,x+1\,|<1$

Solution page 36

Exercice 2.14 (exprimer sans valeur absolue)

Exprimer sans valeur absolue les nombres suivants :

1 $|x+4|$, si $x\in[-10\,;-5]$.
2 $|8-x|$, si $x\in[2\,;7]$.
3 $|\,2x-3\,|$, si $x\in\,]2\,;5[$.
4 $|\,7-5x\,|$, si $x\in[5\,;7]$

Solution page 36

mathweb.fr

Racines carrées

Exercice 2.15 (calculs simples)

Compléter les égalités suivantes :

$\sqrt{1} = \ldots$ $\quad \sqrt{4} = \ldots$ $\quad \sqrt{9} = \ldots$ $\quad \sqrt{36} = \ldots$ $\quad \sqrt{25} = \ldots$
$\sqrt{16} = \ldots$ $\quad \sqrt{81} = \ldots$ $\quad \sqrt{100} = \ldots$ $\quad \sqrt{49} = \ldots$ $\quad \sqrt{64} = \ldots$

Solution page 37

Exercice 2.16 (simplifications)

Simplifier au maximum les racines carrées suivantes :

1 $\sqrt{175}$ **2** $\sqrt{117}$ **3** $\sqrt{48}$ **4** $\sqrt{98}$ **5** $\sqrt{44}$ **6** $\sqrt{500}$

Solution page 37

Exercice 2.17 (simplifications)

Simplifier les radicaux suivants de sorte que les résultats finaux soient sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$.

1 $\sqrt{\dfrac{50}{49}}$ **2** $\sqrt{\dfrac{75}{36}}$ **3** $\sqrt{\dfrac{128}{25}}$ **4** $\sqrt{\dfrac{48}{735}}$ **5** $\sqrt{\dfrac{343}{448}}$ **6** $\sqrt{\dfrac{320}{150}}$ **7** $\sqrt{\dfrac{114}{78}}$ **8** $\sqrt{\dfrac{1\,575}{224}}$

Solution page 37

Exercice 2.18 (développements)

Développer les expressions suivantes de sorte à obtenir une expression de la forme $a + b\sqrt{n}$, où a et b sont deux entiers relatifs, et n un entier naturel.

1 $\left(5 + \sqrt{3}\right)^2$ **2** $\left(7 - \sqrt{2}\right)^2$ **3** $\left(-1 + 2\sqrt{7}\right)^2$ **4** $\left(-3 - 4\sqrt{2}\right)^2$

Solution page 38

Exercice 2.19 (expressions conjuguées)

On appelle *expression conjuguée* de $a + b\sqrt{n}$ le nombre $a - b\sqrt{n}$.
En utilisant l'expression conjuguée du dénominateur, écrire les fractions suivantes de sorte qu'il n'y ait plus de racine carrée au dénominateur.

1 $\dfrac{5}{1+\sqrt{2}}$ **2** $\dfrac{8}{3-\sqrt{7}}$ **3** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ **4** $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

Solution page 39

mathweb.fr

Exercice 2.20 (écritures plus simples)

1 **a.** Écrire $\left(7-3\sqrt{2}\right)^2$ sous la forme $a+b\sqrt{2}$, où a et b sont deux entiers.
b. Quel est le signe de $7-3\sqrt{2}$?
c. En déduire une autre écriture du nombre $\sqrt{67-42\sqrt{2}}$.

2 **a.** Écrire $\left(1-5\sqrt{3}\right)^2$ sous la forme $a+b\sqrt{3}$, où a et b sont deux entiers.
b. Quel est le signe de $1-5\sqrt{3}$?
c. En déduire une autre écriture du nombre $\sqrt{76-10\sqrt{3}}$.

Solution page 40

Puissances

Exercice 2.21 (simplifications)

Simplifier les expressions suivantes.

1 $A=\left(2^3\times 3^3\right)^2$ **2** $B=\dfrac{3^2}{3^{-8}}$ **3** $C=\left(\dfrac{5^2\times 5^3}{5^4}\right)^{-1}$

Solution page 41

Exercice 2.22 (simplification)

Simplifier les expressions suivantes.

1 $A=\left(2,1^3\times 3,1^3\right)^2$ **2** $B=\dfrac{3,7^2}{3,7^{-8}}$ **3** $C=\left(\dfrac{5,4^2\times 5,4^3}{5,4^4}\right)^{-1}$

Solution page 41

Exercice 2.23 (écriture scientifique)

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

1 718
2 0,718
3 0,007 18
4 $548,78\times 10^6$
5 $0{,}012\times 10^{-3}$
6 $0{,}000\ 666\times 10^{28}$

Solution page 41

Exercice 2.24 (épaisseur de billets)

La distance de la Terre à la Lune est égale à 384 400 km.
En supposant que l'épaisseur d'un billet de 100 € est 0,1 millimètre, calculer le nombre de billets de 100 € à empiler pour atteindre cette distance.

Solution page 41

mathweb.fr

Exercice 2.25 (interprétation d'un calcul)

Une capture d'écran de calculatrice a été faite :

$1.23*10^{12}-0.85*10^{9}$

$1.22915\text{E}12$

Écrire le résultat à l'aide d'une puissance de 10.

Solution page 42

Exercice 2.26 (calcul littéral)

Soient x un nombre réel et n un entier relatif.
Écrire les expressions suivantes sous la forme x^p où p est un entier relatif.

1 $\dfrac{x^{2n+7}}{\left(x^n\right)^5}$ **2** $\dfrac{x^{3n}\times x^7}{x\times x^{7n}}$ **3** $\dfrac{x^{n+1}}{x^{4n-3}}$

Solution page 42

Exercice 2.27 (planètes du système solaire)

Le tableau ci-dessous donne la masse des planètes de notre système solaire.

Nom de la planète	Masse en kg
Mercure	$3,302\times10^{23}$
Vénus	$4,869\times10^{24}$
Terre	$5,974\times10^{24}$
Mars	$6,419\times10^{23}$
Jupiter	$1,899\times10^{27}$
Saturne	$5,685\times10^{26}$
Uranus	$8,663\times10^{25}$
Neptune	$1,028\times10^{26}$

Classez ces planètes de la plus légère à la plus lourde.

Solution page 42

mathweb.fr

2 Corrigés

Corrigé de l'exercice 2.1 page 26

1 $\sqrt{\pi} \in \mathbb{R}$ car il ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$; il n'est donc pas rationnel.

2 $\frac{7}{4} = 7 \div 4 = 1,75$; sa partie décimale est finie donc $\frac{7}{4} \in \mathbb{D}$.

3 $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$.

4 $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$ (quand on voit π dans un calcul, en général, le nombre est irrationnel, donc réel).

5 $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{5}{3} \notin \mathbb{D}$ (en effet, $5 \div 3 \approx 1,666\ldots$ donc sa partie décimale est infinie ; il n'est donc pas décimal).

6 $\pi^2 \in \mathbb{R}$.

7 $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$.

8 $-\frac{48}{4} = -48 \div 4 = -12 \in \mathbb{Z}$.

9 $\frac{7}{10^8} \in \mathbb{D}$ car il s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$.

10 $\frac{7}{6}$ n'est pas simplifiable (car 7 et 6 n'ont pas de facteurs communs) donc $\frac{7}{6} \in \mathbb{Q}$.

Corrigé de l'exercice 2.2 page 26

1 $\frac{1}{3} \in \left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$ car $\frac{1}{3} \approx 0,333\ldots$

2 $\frac{7}{5} \notin [0\,;1]$ car $\frac{7}{5} = 1,4$.

3 $\frac{8}{9} \in [0\,;1]$ car $0 < 8 < 9$.

4 $-\frac{9}{7} \in [-2\,;-1]$ car $-\frac{9}{7} \approx -1,2857\ldots$

5 $\frac{9}{4} \in [2\,;3]$ car $\frac{9}{4} = 2,25$.

6 $\frac{8}{5} \notin]1,6\,;1,7[$ car $\frac{8}{5} = 1,6$ (attention aux crochets ouverts !)

7 $\frac{1}{\pi} \notin [\pi\,;\pi+1]$ car $0 < \frac{1}{\pi} < 1$ et $\pi > 1$.

8 $\frac{15}{14} \notin [1,06\,;1,07]$ car $\frac{15}{14} \approx 1,0714\ldots$

9 $-\frac{20}{21} \in [-1\,;-0,9]$ car $-\frac{20}{21} \approx -0,95\ldots$

10 $-\frac{78}{79} \in]-0,99\,;-0,98[$ car $-\frac{78}{79} \approx -0,987\ldots$

Corrigé de l'exercice 2.3 page 26

1 $\pi^2 \approx 9,86960440109$ donc $9,8696 < \pi^2 < 9,8697$.

2 $\sqrt{3} \approx 1,73205080757$ donc $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

3 $\sqrt{5} \approx 2,2360679775$ donc $2,23606 < \sqrt{5} < 2,23607$.

mathweb.fr

4 $\dfrac{1}{\pi} \approx 0,318309886184$ donc $0,3 < \dfrac{1}{\pi} < 0,4$.

5 $\sqrt{7} + \sqrt{11} \approx 5,96237610142$ donc $5 < \sqrt{7} + \sqrt{11} < 6$.

6 $\dfrac{2}{3} \approx 0,666\ldots$ donc $0,66 < \dfrac{2}{3} < 0,67$.

7 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0,816496580928$ donc $0,8164 < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 0,8165$.

8 $-\dfrac{7}{11} \approx -0,636363636364$ donc $-0,63637 < -\dfrac{7}{11} < -0,63636$.

Corrigé de l'exercice 2.4 page 26

1 *L'affirmation est vraie.* En effet, toute fraction de deux entiers relatifs représente un nombre rationnel.

2 *L'affirmation est vraie.* En effet, $\dfrac{1,7}{3,4} = \dfrac{17}{34} = \dfrac{1}{2}$, et $\dfrac{1}{2}$ est un nombre rationnel.

3 *L'affirmation est vraie.* En effet, $0,123 = \dfrac{123}{100}$, qui est bien le quotient de deux entiers relatifs.

4 *L'affirmation est fausse.* En effet, 3 n'est pas une puissance de 10.

5 *L'affirmation est vraie.* En effet, $\dfrac{30}{6} = 5$, qui est un entier relatif.

6 *L'affirmation est fausse.* En effet, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel (d'après le cours), donc sa moitié non plus.

Corrigé de l'exercice 2.5 page 27

1 $-9 < x \leqslant 12 \iff x \in]-9\,;12]$.

2 $x > 2 \iff x \in]2\,;+\infty[$.

3 $-5,5 \leqslant x \leqslant 5,5 \iff x \in [-5,5\,;5,5]$.

4 $x \leqslant 3 \iff x \in [3\,;+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 2.6 page 27

1 $x = 0,999\ldots$ donc :
$$\begin{aligned} 10x &= 10 \times 0,999\ldots \\ &= 9,999\ldots \\ &= 9 + 0,999\ldots \\ 10x &= 9 + x \end{aligned}$$

2 De l'égalité $10x = 9 + x$ on déduit : $10x - x = 9$, soit : $9x = 9$. En divisant par 9 de part et d'autre du signe « = » :
$$x = \frac{9}{9} = 1.$$
On déduit donc que :
$$0,999\ldots = 1.$$

Remarque 15

Il n'est pas rare de voir un nombre avec différentes écritures. Par exemple, $1 = \sqrt{1}$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 2.7 page 27

1 $x = 0{,}718\ 718\ 718\ldots$

$\iff 1\ 000x = 1\ 000 \times 0{,}718\ 718\ 718\ldots$

$\iff 1\ 000x = 718{,}718\ 718\ 718\ldots$

$\iff 1\ 000x = 718 + 0{,}718\ 718\ 718\ldots$

$\iff 1\ 000x = 718 + x$

2 $1\ 000x = 718 + x \iff 1\ 000x - x = 718$

$\iff 999x = 718$

$\iff x = \dfrac{718}{999}$.

Corrigé de l'exercice 2.8 page 27

1 $I =]-3\,;7]$ et $J = [-1\,;+\infty[$



Donc $I \cap J = [-1\,;7]$ et $I \cup J =]-3\,;+\infty[$.

2 $I =]-\infty\,;4[$ et $J = [4\,;10]$



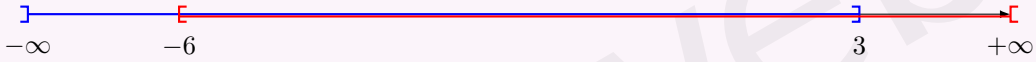
Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J =]-\infty\,;10]$.

3 $I = [-10\,;2]$ et $J = [-3\,;7]$



Donc $I \cap J = [-3\,;2]$ et $I \cup J = [-10\,;7]$.

4 $I =]-\infty\,;3]$ et $J = [-6\,;+\infty[$



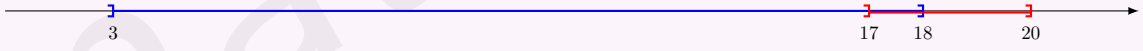
Donc $I \cap J = [-6\,;3]$ et $I \cup J = \mathbb{R}$.

5 $I = [7\,;+\infty[$ et $J = [-5\,;+\infty[$



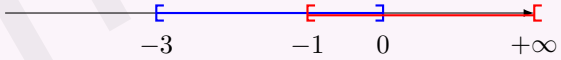
Donc $I \cap J = [7\,;+\infty[$ et $I \cup J = [-5\,;+\infty[$.

6 $I =]3\,;18]$ et $J =]17\,;20]$



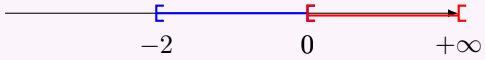
Donc $I \cap J =]17\,;18]$ et $I \cup J =]3\,;20]$.

7 $I = [-3\,;0]$ et $J = [-1\,;+\infty[$



Donc $I \cap J = [-1\,;0]$ et $I \cup J = [-3\,;+\infty[$.

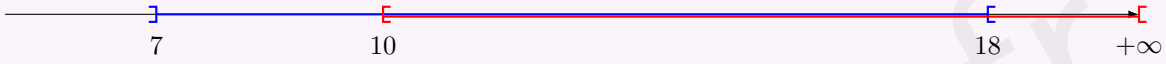
8 $I = [-2\,;0[$ et $J = [0\,;+\infty[$



Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J = [-2\,;+\infty[$.

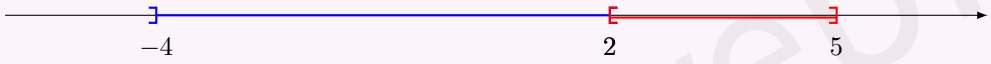
mathweb.fr

9 $I =]7\,;18[$ et $J = [10\,;+\infty[$



Donc $I \cap J = [10\,;18[$ et $I \cup J =]7\,;+\infty[$.

10 $I =]-4\,;2[$ et $J = [2\,;5]$



Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J =]-4\,;5]$.

11 $I =]-4\,;2[$ et $J =]2\,;5]$



Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J =]-4\,;2[\cup]2\,;5]$.

12 $I = [-3\,;+\infty[$ et $J =]-5\,;+\infty[$



Donc $I \cap J = [-3\,;+\infty[$ et $I \cup J =]-5\,;+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 2.9 page 27

1 $\pi \approx 3,14$ donc $\pi > 3$; ainsi, $\pi - 3 > 0$ et donc $|\,\pi - 3\,| = \pi - 3$.

2 $2\pi + 7 > 0$ donc $|\,2\pi + 7\,| = 2\pi + 7$.

3 $3\pi \approx 10$ donc $7 - 3\pi < 0$. Ainsi, $|\,7 - 3\pi\,| = -(7 - 3\pi)$, c'est-à-dire $|\,7 - 3\pi\,| = 3\pi - 7$.

4 $\pi \approx 3,14$ donc $|\,\pi - 4\,| < 0$. Ainsi, $|\,\pi - 4\,| = 4 - \pi$.

Corrigé de l'exercice 2.10 page 28

1 $\pi^2 > \pi$ donc $|\,\pi^2 - \pi\,| = \pi^2 - \pi$.

2 $\pi^2 > 2\pi$ donc $|\,2\pi - \pi^2\,| = -(2\pi - \pi^2)$, c'est-à-dire $|\,2\pi - \pi^2\,| = \pi^2 - 2\pi$.

3 $7 > \dfrac{1}{7}$ donc $7 - \dfrac{1}{7} > 0$. Ainsi, $\left|7 - \dfrac{1}{7}\right| = 7 - \dfrac{1}{7}$. Il n'était pas demandé de *calculer*, mais nous aurions pu aussi écrire : $\left|7 - \dfrac{1}{7}\right| = 7 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{49}{7} - \dfrac{1}{7} = \boxed{\dfrac{48}{7}}$.

4 $\pi > \dfrac{1}{4}$ donc $\pi - \dfrac{1}{4} > 0$. Ainsi, $\left|\pi - \dfrac{1}{4}\right| = \pi - \dfrac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2.11 page 28

1
$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right| = \left|\frac{1}{6}\right|$$
$$\boxed{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6}}$$

2
$$\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3}{15} - \frac{5}{15}\right| = \left|-\frac{2}{15}\right|$$
$$\boxed{\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{15}}$$

mathweb.fr

3 $\left|\dfrac{2}{7}-\dfrac{7}{2}\right| = \left|\dfrac{4}{14}-\dfrac{49}{14}\right|$

$= \left|-\dfrac{45}{14}\right|$

$\boxed{\left|\dfrac{2}{7}-\dfrac{7}{2}\right| = \dfrac{45}{14}}$

4 $\left|\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}\right| = \left|\dfrac{10}{15}-\dfrac{6}{15}\right|$

$= \left|\dfrac{4}{15}\right|$

$\boxed{\left|\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}\right| = \dfrac{4}{15}}$

Corrigé de l'exercice 2.12 page 28

1 $\sqrt{2} < 4$ donc $\sqrt{2}-4 < 0$. Ainsi, $|\sqrt{2}-4| = -(\sqrt{2}-4)$, soit $\underline{|\sqrt{2}-4| = 4-\sqrt{2}}$.

2 $2\sqrt{3} \approx 2 \times 1,732 \approx 3,4$ donc $2\sqrt{3} > \pi$ et donc $2\sqrt{3}-\pi > 0$. Ainsi, $\underline{|2\sqrt{3}-\pi| = 2\sqrt{3}-\pi}$.

3 $\sqrt{7} \approx 2,6$ et $\dfrac{2}{7} < 1$ donc $\dfrac{2}{7} < \sqrt{7}$, d'où $\dfrac{2}{7}-\sqrt{7} < 0$. Ainsi, $\left|\dfrac{2}{7}-\sqrt{7}\right| = -\left(\dfrac{2}{7}-\sqrt{7}\right)$, c'est-à-dire $\underline{\left|\dfrac{2}{7}-\sqrt{7}\right| = \sqrt{7}-\dfrac{2}{7}}$.

4 $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ donc $\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0$. Ainsi, $\underline{|\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Corrigé de l'exercice 2.13 page 28

1 $|\,x-2\,| \leqslant 10^{-3}$: la distance entre x et 2 est inférieure ou égale à 10^{-3}, donc x se trouve entre :

- $2-10^{-3} = 2-0,001 = 1,999$ et
- $2+10^{-3} = 2+0,001 = 2,001$.

$$|\,x-2\,| \leqslant 10^{-3} \iff 1,999 \leqslant x \leqslant 2,001 \iff \boxed{x \in [1,999\,;2,001]}$$

2 $|\,x+3\,| > 2 \iff |\,x-(-3)\,| > 2$ signifie que la distance entre x et -3 est strictement supérieure à 2, donc x se trouve à plus de 2 unités de -3, soit avant $-3-2=-5$ ou après $-3+2=-1$.

$$|\,x+3\,| > 2 \iff x < -5 \text{ ou } x > -1 \iff \boxed{x \in]-\infty\,;-5[\cup]-1\,;+\infty[}$$

3 $|\,x-7\,| \geqslant 11$ signifie que la distance entre x et 7 est supérieure ou égale à 11, soit que x est avant $7-11=-4$ ou après $7+11=18$.

$$|\,x-7\,| \geqslant 11 \iff x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant 18 \iff \boxed{x \in]-\infty\,;-4] \cup [18\,;+\infty[}$$

4 $|\,x+1\,| < 1 \iff |\,x-(-1)\,| < 1$ signifie que la distance entre x et -1 est strictement inférieure à 1, donc que x se trouve entre $-1-1=-2$ et $-1+1=0$.

$$|\,x+1\,| < 1 \iff -2 < x < 0 \iff \boxed{x \in]-2\,;0[}$$

Corrigé de l'exercice 2.14 page 28

1 $x \in [-10\,;-5]$ donc $x < -4$, d'où $x+4 < 0$. Ainsi, $\underline{|\,x+4\,| = -(x+4)}$ ou encore $\underline{|\,x+4\,| = -x-4}$.

2 $x \in [2\,;7]$ donc $x < 8$, d'où $8-x > 0$. Ainsi, $\underline{|\,8-x\,| = 8-x}$.

3 $x \in]2\,;5[$ donc $2 < x < 5$. En multipliant par 2, on obtient : $4 < 2x < 10$ et en soustrayant 3, on arrive à :

$$4-3 < 2x-3 < 10-3$$

c'est-à-dire :

$$1 < 2x-3 < 7.$$

Ainsi, $2x-3 > 0$ et donc $\underline{|\,2x-3\,| = 2x-3}$.

4 $x \in [5\,;7] \iff 5 \leqslant x \leqslant 7$
$\iff -5 \times 7 \leqslant -5x \leqslant -5 \times 5$
$\iff -35 \leqslant -5x \leqslant -25$
$\iff -35 + 7 \leqslant -5x + 7 \leqslant -25 + 7$
$\iff -28 \leqslant 7 - 5x \leqslant -18$
Ainsi, $7 - 5x < 0$ et donc $|\,7 - 5x\,| = -(7 - 5x)$, soit $\underline{|\,7 - 5x\,| = 5x - 7}$.

Corrigé de l'exercice 2.15 page 29

$\sqrt{1} = 1$ $\quad \sqrt{4} = 2$ $\quad \sqrt{9} = 3$ $\quad \sqrt{36} = 6$ $\quad \sqrt{25} = 5$
$\sqrt{16} = 4$ $\quad \sqrt{81} = 9$ $\quad \sqrt{100} = 10$ $\quad \sqrt{49} = 7$ $\quad \sqrt{64} = 8$

Remarque 16

Il est très important de connaître ces valeurs.

Corrigé de l'exercice 2.16 page 29

1 $\sqrt{175} = \sqrt{25 \times 7} = \sqrt{25} \times \sqrt{7} = \underline{5\sqrt{7}}$.

2 $\sqrt{117} = \sqrt{9 \times 13} = \sqrt{9} \times \sqrt{13} = \underline{3\sqrt{13}}$.

3 $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = \underline{4\sqrt{3}}$.

4 $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = \underline{7\sqrt{2}}$.

5 $\sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = \sqrt{4} \times \sqrt{11} = \underline{2\sqrt{11}}$.

6 $\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{100} \times \sqrt{5} = \underline{10\sqrt{5}}$.

Corrigé de l'exercice 2.17 page 29

1 $\sqrt{\dfrac{50}{49}} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{25 \times 2}}{7} = \boxed{\dfrac{5}{7}\sqrt{2}}$.

2 $\sqrt{\dfrac{75}{36}} = \dfrac{\sqrt{25 \times 3}}{\sqrt{36}} = \boxed{\dfrac{5}{6}\sqrt{3}}$.

3 $\sqrt{\dfrac{128}{25}} = \dfrac{\sqrt{64 \times 2}}{\sqrt{25}} = \boxed{\dfrac{8}{5}\sqrt{2}}$.

4 $\sqrt{\dfrac{48}{735}} = \dfrac{\sqrt{16 \times 3}}{\sqrt{49 \times 15}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7\sqrt{15}}$.

On ne peut pas s'arrêter à ce dernier résultat car il n'est pas sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$.

Remarque 17

Quand on a un radical au dénominateur d'une fraction, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par ce radical afin d'avoir un nombre entier au dénominateur.

On a donc :

$$\sqrt{\frac{48}{735}} = \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{15}}{7\sqrt{15} \times \sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{45}}{7 \times 15} = \frac{4\sqrt{9 \times 5}}{7 \times 3 \times 5} = \frac{4 \times 3\sqrt{5}}{7 \times 3 \times 5} = \boxed{\frac{4\sqrt{5}}{35}}$$

mathweb.fr

Remarque 18

On peut aussi simplifier le radicande avant de simplifier le radical :

$$\sqrt{\frac{48}{735}} = \sqrt{\frac{\cancel{3} \times 16}{\cancel{3} \times 245}} = \frac{4}{7\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{35}.$$

5 $\sqrt{\dfrac{343}{448}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{7} \times 49}{\cancel{7} \times 64}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \boxed{\dfrac{7}{8}}$.

6 $\sqrt{\dfrac{320}{150}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{10} \times 32}{\cancel{10} \times 15}} = \dfrac{\sqrt{16 \times 2}}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \boxed{\dfrac{4}{15}\sqrt{30}}$.

7 $\sqrt{\dfrac{114}{78}} = \sqrt{\dfrac{19}{13}} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{13}} \times \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \boxed{\dfrac{1}{13}\sqrt{247}}$.

8 $\sqrt{\dfrac{1\,575}{224}} = \sqrt{\dfrac{9 \times 25 \times \cancel{7}}{16 \times \cancel{7} \times 2}} = \dfrac{3 \times 5}{4\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{15}{8}\sqrt{2}}$.

Corrigé de l'exercice 2.18 page 29

Pour cet exercice, il faut se souvenir des identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{et} \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

1 $\begin{aligned}(5+\sqrt{3})^2 &= 5^2 + 2 \times 5 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 25 + 10\sqrt{3} + 3 \\ &= \underline{28 + 10\sqrt{3}}.\end{aligned}$

2 $\begin{aligned}(7-\sqrt{2})^2 &= 7^2 - 2 \times 7 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 49 - 14\sqrt{2} + 2 \\ &= \underline{51 - 14\sqrt{2}}.\end{aligned}$

3 $\begin{aligned}(-1+2\sqrt{7})^2 &= (-1)^2 + 2 \times (-1) \times 2\sqrt{7} + (2\sqrt{7})^2 \\ &= 1 - 4\sqrt{7} + 2^2(\sqrt{7})^2 \\ &= 1 - 4\sqrt{7} + 4 \times 7 \\ &= 1 - 4\sqrt{7} + 28 \\ &= \underline{29 - 4\sqrt{7}}\end{aligned}$

4 $\begin{aligned}(-3-4\sqrt{2})^2 &= [(-1)(3+4\sqrt{2})]^2 \\ &= (-1)^2(3+4\sqrt{2})^2 \\ &= (3+4\sqrt{2})^2 \\ &= 3^2 + 2 \times 3 \times 4\sqrt{2} + (4\sqrt{2})^2 \\ &= 9 + 24\sqrt{2} + 4^2(\sqrt{2})^2 \\ &= 9 + 24\sqrt{2} + 16 \times 2 \\ &= 9 + 24\sqrt{2} + 32 \\ &= \underline{41 + 24\sqrt{2}}.\end{aligned}$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 2.19 page 29

1 $\dfrac{5}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{5(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$

$= \dfrac{5(1-\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{5(1-\sqrt{2})}{1-2}$

$= \dfrac{5(1-\sqrt{2})}{-1}$

$$\boxed{\frac{5}{1+\sqrt{2}} = -5(1-\sqrt{2})}$$

Remarque 19

L'intérêt de multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction par l'expression conjuguée de son dénominateur est de faire apparaître en bas (au dénominateur) une identité de la forme $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, qui supprime la racine carrée (en élevant au carré), rendant ainsi le dénominateur entier.

2 $\dfrac{8}{3-\sqrt{7}} = \dfrac{8(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}$

$= \dfrac{8(3+\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2}$

$= \dfrac{8(3+\sqrt{7})}{9-7}$

$= \dfrac{8(3+\sqrt{7})}{2}$

$$\boxed{\frac{8}{3-\sqrt{7}} = 4(3+\sqrt{7})}$$

3 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{3})^2}$

$= \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{1-3}$

$= \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{-2}$

$= \dfrac{1^2-2\times 1\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{-2}$

$= \dfrac{1-2\sqrt{3}+3}{-2}$

$= \dfrac{4-2\sqrt{3}}{-2}$

$= \dfrac{-2(-2+\sqrt{3})}{-2}$

$$\boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -2+\sqrt{3}}$$

mathweb.fr

4 $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{(5+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$

$$= \frac{5\times 3+5\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times 3+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{15+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4}{9-2}$$

$$\boxed{\frac{5+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{19+11\sqrt{2}}{7}}$$

Corrigé de l'exercice 2.20 page 30

1 **a.** Pour développer $\left(7-3\sqrt{2}\right)^2$, on utilise l'identité remarquable :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

en prenant $a = 7$ et $b = 3\sqrt{2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left(7-3\sqrt{2}\right)^2 &= 7^2 - 2\times 7\times 3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2\\ &= 49 - 42\sqrt{2} + 3^2\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= 49 - 42\sqrt{2} + 9\times 2\\ &= 49 - 42\sqrt{2} + 18\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(7-3\sqrt{2}\right)^2 = 67 - 42\sqrt{2}}$$

b. On cherche à trouver le signe de $7-3\sqrt{2}$.
On sait que $2<4$ donc $\sqrt{2}<\sqrt{4}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}<2$. En multipliant par -3, on obtient :

$$-3\sqrt{2} > -3\times 2 \qquad \text{soit} \qquad -3\sqrt{2} > -6$$

et en ajoutant 7, on arrive à :

$$7-3\sqrt{2} > 1$$

donc $7-3\sqrt{2} > 0$.

c. Du calcul de la question a., on déduit :

$$\sqrt{\left(7-3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{67-42\sqrt{2}}$$

Or, $7-3\sqrt{2}>0$ donc $\sqrt{\left(7-3\sqrt{2}\right)^2} = 7-3\sqrt{2}$.
Finalement, on obtient :

$$\boxed{\sqrt{67-42\sqrt{2}} = 7-3\sqrt{2}}$$

2 **a.** On a :

$$\begin{aligned}\left(1-5\sqrt{3}\right)^2 &= 1^2 - 2\times 1\times 5\sqrt{3} + \left(5\sqrt{3}\right)^2\\ &= 1 - 10\sqrt{3} + 25\times 3\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(1-5\sqrt{3}\right)^2 = 76 - 10\sqrt{3}}$$

b. Il est assez flagrant que $5\sqrt{3}>1$ donc $1-5\sqrt{3}<0$.

mathweb.fr

c. De la question a., on déduit :

$$\sqrt{\left(1-5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{76-10\sqrt{3}}$$

Or, $1-5\sqrt{3} < 0$ donc $\sqrt{\left(1-5\sqrt{3}\right)^2} = \left|\,1-5\sqrt{3}\,\right| = 5\sqrt{3}-1$. Ainsi,

$$\boxed{5\sqrt{3}-1 = \sqrt{76-10\sqrt{3}}}$$

Corrigé de l'exercice 2.21 page 30

1 $A = \left(2^3\times 3^3\right)^2 = 2^{3\times 2}\times 3^{3\times 2} = 2^6\times 3^6 = (2\times 3)^6 = \boxed{6^6}$.

2 $B = \dfrac{3^2}{3^{-8}} = 3^{2-(-8)} = 3^{2+8} = \boxed{3^{10}}$.

3 $C = \left(\dfrac{5^2\times 5^3}{5^4}\right)^{-1} = \left(\dfrac{5^{2+3}}{5^4}\right)^{-1} = \left(5^{5-4}\right)^{-1} = \boxed{5^{-1} = \dfrac{1}{5}}$.

Corrigé de l'exercice 2.22 page 30

1 $A = \left(2,1^3\times 3,1^3\right)^2 = 2,1^{3\times 2}\times 3,1^{3\times 2} = 2,1^6\times 3,1^6 = (2,1\times 3,1)^6 = \boxed{6,51^6}$.

2 $B = \dfrac{3,7^2}{3,7^{-8}} = 3,7^{2-(-8)} = 3,7^{2+8} = \boxed{3,7^{10}}$.

3 $C = \left(\dfrac{5,4^2\times 5,4^3}{5,4^4}\right)^{-1} = \left(\dfrac{5,4^{2+3}}{5,4^4}\right)^{-1} = \left(5,4^{5-4}\right)^{-1} = \boxed{5,4^{-1}}$.

Corrigé de l'exercice 2.23 page 30

1 $718 = \boxed{7,18\times 10^2}$

2 $0,718 = \boxed{7,18\times 10^{-1}}$

3 $0{,}007\,18 = \boxed{7,18\times 10^{-3}}$

4 $548,78\times 10^6 = \left(5,48\times 10^2\right)\times 10^6 = \boxed{5,48\times 10^8}$

5 $0{,}012\times 10^{-3} = \left(1,2\times 10^{-2}\right)\times 10^{-3} = \boxed{1,2\times 10^{-5}}$

6 $0{,}000\,666\times 10^{28} = \left(6,66\times 10^{-4}\right)\times 10^{28} = \boxed{6,66\times 10^{24}}$

Corrigé de l'exercice 2.24 page 30

La question revient à se demander : combien de fois peut-on mettre 0,1 millimètre dans 384 400 km. L'opération à faire est donc une *division*, mais à condition de mettre les deux nombres dans la même unité.
Exprimons tout en millimètre par exemple.

- 0,1 millimètre $= 10^{-1}$ millimètre.
- 384 400 km $= 384\,400\times 1\,000$ m $= 384\,400\times 1\,000\times 1\,000$ mm $= 3,844\times 10^8$ mm.

Le nombre de billets à empiler afin que l'épaisseur totale soit égale à 384 400 km est donc égale à :

$$\frac{3,844\times 10^8}{10^{-1}} = 3,844\times 10^8\times 10^1 = 3,844\times 10^9.$$

Il en faudrait donc 3 844 000 000 (3 milliards 844 millions).

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 2.25 page 31

L'affichage « `1.22915E12` » signifie que le résultat de l'opération est égal à $1,22915 \times 10^{12}$.

Corrigé de l'exercice 2.26 page 31

1 $\dfrac{x^{2n+7}}{\left(x^n\right)^5} = \dfrac{x^{2n+7}}{x^{5n}} = x^{2n+7-5n} = \boxed{x^{-3n+7}}$

2 $\dfrac{x^{3n} \times x^7}{x \times x^{7n}} = \dfrac{x^{3n+7}}{x^{1+7n}} = x^{3n+7-(1+7n)} = x^{3n+7-1-7n} = \boxed{x^{-4n+6}}$

3 $\dfrac{x^{n+1}}{x^{4n-3}} = x^{n+1-(4n-3)} = x^{n+1-4n+3} = \boxed{x^{-3n+4}}$

Corrigé de l'exercice 2.27 page 31

On regarde d'abord les puissances de 10 :

- Exposant 23 : Mercure $(3,302 \times 10^{23})$, Mars $(6,419 \times 10^{23})$;
- Exposant 24 : Vénus $(4,869 \times 10^{24})$, Terre $(5,974 \times 10^{24})$;
- Exposant 25 : Uranus $(8,663 \times 10^{25})$;
- Exposant 26 : Saturne $(5,685 \times 10^{26})$, Neptune $(1,028 \times 10^{26})$;
- Exposant 27 : Jupiter $(1,899 \times 10^{27})$.

Dans chaque catégorie, on met dans l'ordre croissant les coefficients des puissances de 10.
Par exemple, $3,302 < 6,419$ donc $3,302 \times 10^{23} < 6,419 \times 10^{23}$.

On obtient alors :

$$\text{Mercure} < \text{Mars} < \text{Vénus} < \text{Terre} < \text{Uranus} < \text{Neptune} < \text{Saturne} < \text{Jupiter}$$

mathweb.fr

3 Calcul littéral, équations et inéquations

Dans ce chapitre

1 Identités remarquables 44
2 Expressions fractionnaires 45
3 Propriétés sur les inégalités 45
1 Conservation de l'ordre par addition 45
2 Produit d'une inégalité par un réel 46
3 Somme de deux inégalités 46
4 Inégalité sur racines carrées 46
Prendre un bon départ 48
Exercices 49
4 Manipulation d'expressions algébriques 49
Développements 50
Factorisations 51
Équations 52
Inéquations et inégalités 54
Avec valeurs absolues 55
Algorithmes et programmation 55
Corrigés des exercices 57

1 Identités remarquables

Propriété 9 (identités remarquables)

Pour tous nombres réels a et b,

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Remarque 20

Ces égalités sont à connaître par cœur.

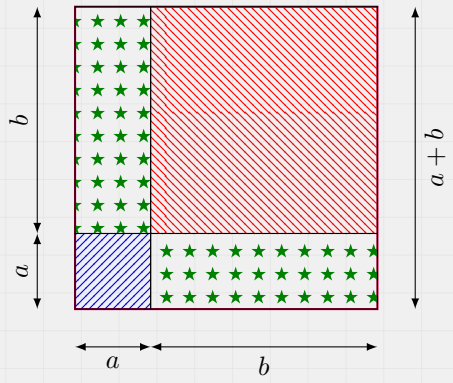
Exemple 19 (développements)

1. $(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \times 4 \times 3x + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$.
2. $(5-3x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$.
3. $(8x-7)(8x+7) = (8x)^2 - 7^2 = 64x^2 - 49$.

Exemple 20 (factorisations)

1. $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times 1 \times 2x + 1^2 = (2x+1)^2$.
2. $100 - 80x + 16x^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 4x + (4x)^2 = (10-4x)^2$.
3. $49x^2 - 25 = (7x)^2 - 5^2 = (7x-5)(7x+5)$.

Démonstration 4 ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)



Le grand carré bleu a pour dimension $a+b$; son aire est donc égale à $(a+b)^2$.

Ce grand carré est constitué de deux carrés de côtés a et b, donc d'aires a^2 et b^2, ainsi que de deux rectangles identiques de dimensions $a \times b$, donc d'aire ab.

L'aire totale est donc égale à : $a^2 + b^2 + 2ab$.
Les deux expressions $(a+b)^2$ et $a^2 + b^2 + 2ab$ représentant la même aire, elles sont nécessairement égales.

2 Expressions fractionnaires

Propriété 10

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs non nuls. Alors,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Exemple 21

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+8}-\frac{3x+1}{2x-7}&=\frac{2(2x-7)-(3x+1)(x+8)}{(x+8)(2x-7)}\\&=\frac{4x-14-(3x^2+24x+x+8)}{(x+8)(2x-7)}\\&=\frac{4x-14-3x^2-24x-x-8}{2x^2-7x+16x-56}\\&=\frac{-3x^2-21x-22}{2x^2+9x-56}.\end{aligned}$$

3 Propriétés sur les inégalités

1 Conservation de l'ordre par addition

Propriété 11

Soient a, b et k trois nombres réels.

$$a<b \iff a+k<b+k.$$

On peut se servir de cette propriété pour résoudre des inéquations.

Exemple 22

$$\begin{aligned}x+3<2x-8 &\iff x+3\text{–}x<2x-8\text{–}x\\&\iff 3<x-8\\&\iff 3\text{+}8<x-8\text{+}8\\&\iff 11<x\end{aligned}$$

L'ensemble solution de toutes les valeurs de x telles que $x+3<2x-8$ est donc l'ensemble des valeurs de x qui sont strictement plus grandes que 11.
On note en général cet ensemble S :

$$S=]11\,;+\infty[.$$

2 Produit d'une inégalité par un réel

Propriété 12

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

- Si $k > 0$ alors $ka < kb$ et $\dfrac{a}{k} < \dfrac{b}{k}$.
- Si $k < 0$ alors $ka > kb$ et $\dfrac{a}{k} > \dfrac{b}{k}$.

Exemple 23

1 $2x > 6 \iff \dfrac{2x}{2} > \dfrac{6}{2}$ (on n'inverse pas le signe car on divise par un positif)
$\iff x > 3$.

2 $-5x > 15 \iff \dfrac{-5x}{-5} < \dfrac{15}{-5}$ (on inverse le signe car on divise par un négatif)
$\iff x < -3$.

Remarque 21

Autrement dit, on change l'inégalité quand on la multiplie ou divise par un nombre négatif.

3 Somme de deux inégalités

Propriété 13

Soient a, b, m et n quatre nombres réels.

$$\text{si } a < b \text{ et } m < n \quad \text{alors} \quad a + m < b + n.$$

Exemple 24

On sait que $a + 5 < 12$ et que $2m - 1 < 4$ donc :

$$(a + 5) + (2m - 1) < 12 + 4$$

et donc :

$$a + 2m + 4 < 12 + 4 \text{ soit } a + 2m < 12.$$

Attention 4

La réciproque n'est pas nécessairement vraie : si $a + m < b + n$ alors on n'a pas toujours $a < b$ et $m < n$.
De plus, la propriété n'est plus vraie si on soustrait.

4 Inégalité sur racines carrées

Propriété 14 (inégalité sur les racines carrées)

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Alors,

$$\sqrt{a + b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Démonstration 5

On a d'une part $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a+b$ et d'autre part $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b > a+b$, donc :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a+b}\right)^2$$

et comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$ sont deux nombres positifs, cela signifie que :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}.$$

3 Prendre un bon départ

Exercice type 7 ▶ développer une identité remarquable

Développer les expressions suivantes :

1 $(x+1)^2$ **2** $(x-1)^2$ **3** $(x-1)(x+1)$

1 $(x+1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$.

2 $(x-1)^2 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1$.

3 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$.

Exercice type 8 ▶ factoriser une expression

Factoriser l'expression :

$$(x-5)(2x+1) - (4x-1)(x-5)$$

On remarque que l'expression est une différence entre deux « blocs » : d'une part $(x-5)(2x+1)$, d'autre part $(4x-1)(x-5)$. Il y a un facteur commun à ces deux produits : $(x-5)$.

$$\boxed{(x-5)}(2x+1) - (4x-1)\boxed{(x-5)} = (x-5)\big[(2x+1) - (4x-1)\big]$$

(on écrit dans les crochets ce qu'il y a à l'extérieur des cadres)

$$= (x-5)\big[2x + 1 - 4x + 1\big]$$

(on enlève les parenthèses dans les crochets)

$$= (x-5)(-2x+2).$$

(on réduit et on transforme les crochets en parenthèses)

Exercice type 9 ▶ résoudre une inéquation

Résoudre l'inéquation :

$$-3x + 5 < 8$$

$$\begin{aligned} -3x + 5 < 8 &\iff -3x < 8 - 5 \\ &\iff -3x < 3 \\ &\iff x > \frac{3}{-3} \end{aligned}$$

(on change le sens de l'inégalité car on divise par un nombre négatif)

$$\iff x > -1.$$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

3 Exercices

4 Manipulation d'expressions algébriques

Exercice 3.1

La distance d, exprimée en mètres, parcourue par un objet est égale au produit de sa vitesse v (exprimée en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, soit en mètres par seconde) et du temps t du trajet (exprimé en secondes).

1. Calculer la distance parcourue par un objet allant à $50\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ en 5 secondes.
2. Calculer le temps nécessaire pour qu'un objet allant à $80\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ parcourt une distance de 10 km.
3. Calculer la vitesse (en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) d'un objet parcourant 10 km en 5 minutes.

Solution page 57

Exercice 3.2 (conversions Celsius-Fahrenheit)

Quand on connaît une température en degrés Celsius C et que l'on souhaite connaître son équivalent en degrés Fahrenheit F, on utilise la formule suivante : $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Déterminer la formule pour passer des degrés Fahrenheit aux degrés Celsius.

Solution page 57

Exercice 3.3 (IMC)

L'Indice de Masse Corporelle (IMC) d'une personne est donné par la formule : $IMC = \frac{m}{T^2}$, où m est la masse (exprimée en kg) et T la taille (en mètres).
Calculer la taille d'une personne dont l'IMC est égal à 32 et dont la masse est égale à 75 kg.

Solution page 57

Exercice 3.4 (volume d'un cylindre)

On sait que le volume d'un cylindre de hauteur h et de base circulaire de rayon r est donné par la formule $\mathcal{V} = \pi r^2 h$.

Donner la formule permettant de calculer le rayon de la base quand on connait le volume et le hauteur du cylindre.

Solution page 58

Exercice 3.5 (équation cartésienne)

Soient a, b, c, x et y cinq nombres réels, avec $b \neq 0$.
Sachant que $ax + by + c = 0$, exprimer y en fonction des quatre autres nombres.

Solution page 58

mathweb.fr

Développements

Exercice 3.6 (double distributivité)

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (x+2)(x+3)$
2. $B = (3x+2)(5x+3)$
3. $C = (3-5x)(2x-7)$
4. $D = (5x-4)(-3x-2)$
5. $E = (4x-1)(2x+4) + (2x-1)(5x+3)$
6. $F = (x-4)(x+3) - 2(x+1)(x-2)$
7. $G = (x+5)(2x-1) - 5(x+7)(x+1)$

Solution page 58

Exercice 3.7 (identités remarquables)

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (x+2)^2$
2. $B = (3x+2)^2$
3. $C = (3-5x)^2$
4. $D = (5x-4)^2$
5. $E = (4x-1)^2$
6. $F = (x-4)(x+4)$
7. $G = (2x+5)(2x-5)$
8. $H = (3x-7)(3x+7)$

Solution page 59

Exercice 3.8 (florilège de développements)

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (2x-5)(x+3) + (x+6)^2$
2. $B = (3x+4)^2 - (x-1)(x+1)$
3. $C = (5x-4)(5x+4) - 2(x+3)(x-3)$
4. $D = (8x+3)(3x-8) - 3(x+9)^2$
5. $E = (7x-1)(7x+1) - 5(3x-2)^2$
6. $F = 3(2x-1)^2 + (5x-3)^2$

Solution page 59

Exercice 3.9

Développer l'expression $(a+b+c)^2$, où a, b et c sont trois nombres réels.

Solution page 60

Exercice 3.10 (vers la formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres réels.
En utilisant l'identité remarquable permettant de développer $(a+b)^2$, donner le développement de $(a+b)^n$, pour $n=3$, $n=4$ puis $n=5$.
Donner alors le développement de $(1+x)^n$ pour $n=2$, $n=3$, $n=4$ et $n=5$.

Solution page 60

Exercice 3.11 (extrait du livre X des Éléments d'Euclide)

Montrer l'égalité suivante, où a et b sont des nombres réels tels que $a^2 \geqslant b$:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

Solution page 61

Factorisations

Exercice 3.12 (avec facteur commun évident)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant que le facteur commun est explicite dans chaque terme.

1. $A=(2x+1)(x+3)-2(x+3)(5x+6)$
2. $B=(x-4)(2x+9)+3(x-4)(7x+3)$
3. $C=(3x-1)(5x+2)-(5x+2)(9x+8)$

Solution page 61

Exercice 3.13 (en faisant apparaître le facteur commun)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître sans l'aide d'une identité remarquable.

1. $D=(9x+6)(4x+1)+(3x+2)(1-4x)$
2. $E=(2x+3)(5x-10)-3(x-2)(5x+9)$
3. $F=(3x-1)(2x+7)-4(1-3x)(7-2x)$

Solution page 62

Exercice 3.14 (à l'aide des identités remarquables)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître à l'aide d'une identité remarquable.

1. $G=9x^2+6x+1-(3x+1)(4x-1)$
2. $H=4x^2-12x+9+(2x-3)(7x+1)$
3. $I=25x^2-4+3(5x-2)(x+3)$

Solution page 62

Exercice 3.15 (à l'aide de la troisième identité remarquable)

Factoriser chacune des expressions suivantes à l'aide de la troisième identité remarquable :

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

1. $A=(x+1)^2-(x-1)^2$
2. $B=(2x+3)^2-(3x-2)^2$
3. $C=(3-4x)^2-(5x+1)^2$
4. $D=(8-4x)^2-(6x+4)^2$
5. $E=36(x-4)^2-64(x+3)^2$
6. $F=25(3-7x)^2-9(2x+5)^2$

Solution page 63

Exercice 3.16 (à l'aide d'une identité remarquable)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant que l'on peut faire apparaître une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ pour factoriser.

1. $J = (9x + 18)(x + 2) - (4x + 20)(x + 5)$
2. $K = 2(2x + 3)(4x + 6) - 3(3x + 2)(9x + 6)$
3. $L = 7(7x + 1)(49x + 7) + (1 - 4x)(16x - 4)$

Solution page 64

Exercice 3.17 (à l'aide des identités remarquables)

Factoriser chacune des expressions suivantes à l'aide d'une des trois identités remarquables.

1. $A = x^2 + 2x + 1$
2. $B = 9x^2 - 12x + 4$
3. $C = x^2 - 9$
4. $D = 4x^2 + 12x + 9$
5. $E = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25$
6. $F = 25 - 4x^2$
7. $G = 81x^2 + 126x + 49$
8. $H = 121x^2 - 64$

Solution page 64

Exercice 3.18 (calculs astucieux)

Sans utiliser la calculatrice, donner le résultat des opérations suivantes :

1. $A = 897\,526^2 - 897\,525 \times 897\,527$
2. $B = 100\,001^2 - 99\,999^2$

Solution page 66

Équations

Exercice 3.19 (équations produit nul et quotient nul)

Résoudre les équations suivantes :

1. $-3x + 7 = 0$
2. $\frac{3}{5}x - 6 = 0$
3. $-\frac{2}{7}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{21}x + 2$
4. $(-3x + 1)(5x - 7) = 0$
5. $\left(-\frac{1}{2}x - 5\right)\left(\frac{3}{4}x + 2\right) = 0$
6. $2x(5x - 1)(2x + 3) = 0$
7. $\frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{2x}{x - 1}$
8. $\frac{1}{x + 2} = \frac{1}{x^2 - 4}$
9. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = 2$
10. $\frac{2}{x - 1} = 1 - \frac{x}{x + 1}$

Solution page 67

mathweb.fr

Exercice 3.20 (équations avec carrés)

Résoudre les équations suivantes :

1 $(3x-5)^2 = 16$

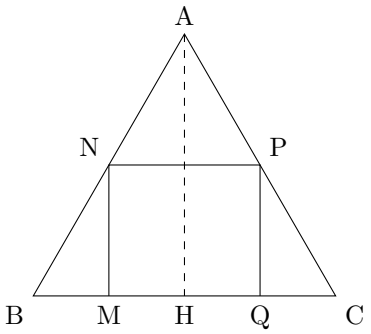
2 $(x^2-4)^2 = 81$

3 $(3x^2-4)^2 = 9$

4 $\left(\dfrac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25$

Solution page 68

Exercice 3.21 (dans un triangle équilatéral)



Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 6 et soit H le milieu de [BC].
M est un point de [BH]. On place les points N et P respectivement sur [AB] et [AC] tels que MNPQ soit un rectangle d'axe de symétrie (AH).
On pose BM = x.

1 **a.** Exprimer MN en fonction de x.
b. Justifier que MQ = $6-2x$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.
a. Montrer alors que $x\sqrt{3} = 6 - 2x$.
b. Calculer x.

Solution page 70

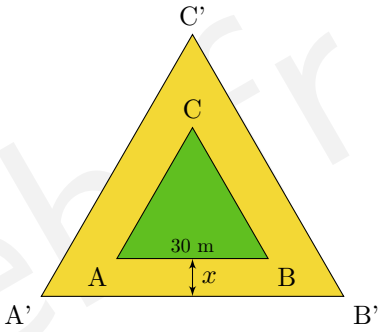
Exercice 3.22 (mise en équation)

Le jardin ABC est un triangle équilatéral de côté 30 mètres, entouré d'une allée de largeur x mètres (représentée en jaune ci-contre). Le triangle A'B'C' est lui aussi équilatéral.

On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de l'allée est égale à celle du jardin.

On admettra les valeurs suivantes :

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



1 **a.** On note h la hauteur de ABC. Montrer que $h = 15\sqrt{3}$ mètres.
b. Montrer alors que l'aire de ABC est : $\mathcal{A} = 225\sqrt{3}$ m^2.

2 **a.** En considérant le point P de [A'B'] de sorte que A'AP soit un triangle rectangle d'hypoténuse AA', montrer que $A'B' = 30 + 2x\sqrt{3}$.
b. En déduire que l'aire de $A'B'C'$ est : $\mathcal{A}' = \left(15 + x\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}$.

3 **a.** Montrer que chercher x pour que l'aire de l'allée soit égale à celle du jardin revient à résoudre l'équation $\mathcal{A}' = 2\mathcal{A}$.
b. Trouver alors la valeur exacte, puis approchée, de x.

Solution page 71

mathweb.fr

Exercice 3.23 (équations avec racines carrées)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{3x-2} = 7$.
2. $\sqrt{\dfrac{5x-4}{3x+1}} = 3$.
3. $\sqrt{x^2+x+1} = x+1$.
4. $x\sqrt{7}+\sqrt{2} = \sqrt{7}-x\sqrt{2}$.
5. $\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4)$.

Solution page 72

Inéquations et inégalités

Exercice 3.24 (nombre minimal de contrats)

Le salaire d'un représentant est calculé de la façon suivante : un salaire fixe de 800 €, et une commission de 152 € sur chaque contrat qu'il vend.

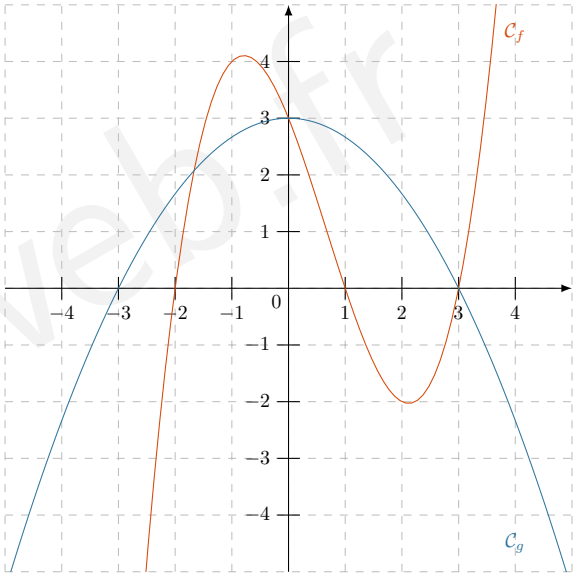
Quel nombre minimal de contrats doit-il vendre pour obtenir un salaire de 2 300 € ?

Solution page 75

Exercice 3.25 (résolutions graphiques)

Résoudre graphiquement sur $[-5\,;5]$ les inéquations suivantes à l'aide du graphique ci-contre :

1. $f(x) > g(x)$
2. $f(x) \geqslant 0$
3. $g(x) \leqslant 0$



Solution page 75

Exercice 3.26 (moyennes arithmétiques et géométriques)

Soient a et b deux nombres positifs tels que $a \neq b$.

On appelle *moyenne arithmétique* de a et b le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$.

On appelle *moyenne géométrique* de a et b le nombre $g = \sqrt{ab}$.

Montrer que $g < m$.

Aide : on pourra regarder la démonstration de la propriété 14 du cours de ce livre pour se donner une idée.

Solution page 76

mathweb.fr

Avec valeurs absolues

Exercice 3.27 (équation et inéquations)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1 $|x-3| = 7$ **2** $|x+4| < 5$ **3** $|x-6| \geqslant 2$

Solution page 76

Exercice 3.28 (équation et inéquations)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1 $|x+8| = -1$ **2** $|x-1| \leqslant 1$ **3** $|x+2| > 2$

Solution page 77

Exercice 3.29 (équation et inéquations)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1 $|x-7| = 3$ **2** $|x-4| \leqslant 8$ **3** $|x+7| \geqslant 3$

Solution page 77

Exercice 3.30 (équations et inéquation)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1 $|x-\pi| = 2\pi$ **2** $|x-4| = \pi$ **3** $|x+1| > 2\pi$

Solution page 78

Exercice 3.31 (inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1 $|x-8| \leqslant 3$ **3** $|x+4| \leqslant 4$ **5** $|3x+9| < 12$

2 $|x-7| < 7$ **4** $|2x-8| \leqslant 10$ **6** $|7x-21| < 14$

Solution page 78

Algorithmes et programmation

Exercice 3.32 (algorithmes de seuil)

On considère le nombre : $U_n = 2^n$, où n est un entier naturel.

1 Écrire un algorithme permettant de calculer et d'afficher la première valeur de n pour laquelle $U_n > 10^6$.

2 Écrire le programme Python qui correspond à cet algorithme.

Solution page 79

mathweb.fr

Exercice 3.33 (algorithmes de seuil)

On considère le nombre : $U_n = 3^{-n}$, où n est un entier naturel.

1 Écrire un algorithme permettant de calculer et d'afficher la première valeur de n pour laquelle $U_n < 10^{-8}$.

2 Écrire le programme Python qui correspond à cet algorithme.

Solution page 79

mathweb.fr

3 Corrigés

Corrigé de l'exercice 3.1 page 49

1 $d = v \times t \iff d = 50 \times 5$

$\iff \boxed{d = 250 \text{ m.}}$

2 $d = v \times t \iff t = \dfrac{d}{v}$

$\iff t = \dfrac{10}{80}$

$\iff t = \dfrac{1}{8} \text{ h}$

$\iff t = \dfrac{1}{8} \times 60 \text{ min}$

$\iff \boxed{t = 7,5 \text{ min}}$

3 $d = v \times t \iff v = \dfrac{d}{t}$

$\iff v = \dfrac{10\,000 \text{ m}}{5 \times 60 \text{ s}}$

$\iff \boxed{v \approx 33,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.}$

Corrigé de l'exercice 3.2 page 49

$F = \dfrac{9}{5}C + 32 \iff F - 32 = \dfrac{9}{5}C$

$\iff \dfrac{5}{9} \times (F - 32) = \dfrac{5}{9} \times \dfrac{9}{5}C$ (on multiplie par l'inverse de $\dfrac{9}{5}$ pour supprimer cette fraction)

$\iff \boxed{C = \dfrac{5}{9}(F - 32)}$

Corrigé de l'exercice 3.3 page 49

$IMC = \dfrac{m}{T^2} \iff 32 = \dfrac{75}{T^2}$

$\iff T^2 \times 32 = 75$ (égalité des produits en croix)

$\iff T^2 = \dfrac{75}{32}$

$\iff T = \sqrt{\dfrac{75}{32}}$

$\iff \boxed{T \approx 1,53}$

La personne mesure donc environ 1,53 mètre.

Remarque 27

Chez les adultes, l'IMC devrait être compris entre 18,5 et 25. Au-delà, la personne est définie comme en *surpoids* (ou en *obésité* si l'IMC dépasse 30). Pour un IMC en-dessous de 18,5, la personne est définie comme en *insuffisance pondérale* (maigreur).

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 3.4 page 49

$$\mathcal{V} = \pi r^2 h \iff \frac{\mathcal{V}}{\pi h} = r^2$$
$$\iff \boxed{r = \sqrt{\frac{\mathcal{V}}{\pi h}}}$$

Corrigé de l'exercice 3.5 page 49

$$ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c$$
$$\iff \boxed{y = \frac{-ax - c}{b}}$$

Corrigé de l'exercice 3.6 page 50

1 $A = (x+2)(x+3)$
$= x^2 + 3x + 2x + 6$
$\boxed{A = x^2 + 5x + 6}$

2 $B = (3x+2)(5x+3)$
$= 15x^2 + 9x + 10x + 6$
$\boxed{B = 15x^2 + 19x + 6}$

3 $C = (3-5x)(2x-7)$
$= 6x - 21 - 10x^2 + 35x$
$\boxed{C = -10x^2 + 41x - 21}$

4 $D = (5x-4)(-3x-2)$
$= -15x^2 - 10x + 12x + 8$
$\boxed{D = -15x^2 + 2x + 8}$

5 $E = (4x-1)(2x+4) + (2x-1)(5x+3)$
$= (8x^2 + 16x - 2x - 4) + (10x^2 + 6x - 5x - 3)$
$\boxed{E = 18x^2 + 15x - 7}$

6 $F = (x-4)(x+3) - 2(x+1)(x-2)$
$= (x^2 + 3x - 4x - 12) - 2(x^2 - 2x + x - 2)$
$= x^2 - x - 12 - 2x^2 + 2x + 4$
$\boxed{F = -x^2 + x - 8}$

7 $G = (x+5)(2x-1) - 5(x+7)(x+1)$
$= (2x^2 - x + 10x - 5) - 5(x^2 + x + 7x + 7)$
$= 2x^2 + 9x - 5 - 5x^2 - 40x - 35$
$\boxed{G = -3x^2 - 31x - 40}$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 3.7 page 50

1 $A = (x+2)^2 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 = \boxed{x^2 + 4x + 4}$

2 $B = (3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 2 \times 3x + 2^2 = \boxed{9x^2 + 12x + 4}$

3 $C = (3-5x)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times 5x + (5x)^2 = \boxed{9 - 30x + 25x^2}$

4 $D = (5x-4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 4 \times 5x + 4^2 = \boxed{25x^2 - 40x + 16}$

5 $E = (4x-1)^2 = (4x)^2 - 2 \times 1 \times 4x + 1^2 = \boxed{16x^2 - 8x + 1}$

6 $F = (x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = \boxed{x^2 - 16}$

7 $G = (2x+5)(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = \boxed{4x^2 - 25}$

8 $H = (3x-7)(3x+7) = (3x)^2 - 7^2 = \boxed{9x^2 - 49}$

Corrigé de l'exercice 3.8 page 50

1
$$\begin{aligned} A &= (2x-5)(x+3) + (x+6)^2 \\ &= (2x^2 + 6x - 5x - 15) + (x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2) \\ &= 2x^2 + x - 15 + x^2 + 12x + 36 \end{aligned}$$

$\boxed{A = 3x^2 + 13x + 21}$

2
$$\begin{aligned} B &= (3x+4)^2 - (x-1)(x+1) \\ &= (3x)^2 + 2 \times 4 \times 3x + 4^2 - (x^2 - 1^2) \\ &= 9x^2 + 24x + 16 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

$\boxed{B = 8x^2 + 24x + 17}$

3
$$\begin{aligned} C &= (5x-4)(5x+4) - 2(x+3)(x-3) \\ &= (5x)^2 - 4^2 - 2(x^2 - 3^2) \\ &= 25x^2 - 16 - 2x^2 + 18 \end{aligned}$$

$\boxed{C = 23x^2 + 2}$

4
$$\begin{aligned} D &= (8x+3)(3x-8) - 3(x+9)^2 \\ &= 24x^2 - 64x + 9x - 24 - 3(x^2 + 2 \times 9 \times x + 9^2) \\ &= 24x^2 - 55x - 24 - 3(x^2 + 18x + 81) \\ &= 24x^2 - 55x - 24 - 3x^2 - 54x - 243 \end{aligned}$$

$\boxed{D = 21x^2 - 109x - 267}$

5
$$\begin{aligned} E &= (7x-1)(7x+1) - 5(3x-2)^2 \\ &= (7x)^2 - 1^2 - 5\left[(3x)^2 - 2 \times 2 \times 3x + 2^2\right] \\ &= 49x^2 - 1 - 5(9x^2 - 12x + 4) \\ &= 49x^2 - 1 - 45x^2 + 60x - 20 \end{aligned}$$

$\boxed{E = 4x^2 + 60x - 21}$

6
$$\begin{aligned} F &= 3(2x-1)^2 + (5x-3)^2 \\ &= 3(4x^2 - 4x + 1) + (25x^2 - 30x + 9) \\ &= 12x^2 - 12x + 3 + 25x^2 - 30x + 9 \end{aligned}$$

$\boxed{F = 37x^2 - 42x + 12}$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 3.9 page 50

Pour développer $(a+b+c)^2$, on peut voir ce calcul sous la forme :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= \big[(a+b)(a+b+c)\big] + c(a+b+c)\\ &= \big[(a+b)(a+b) + c(a+b)\big] + c(a+b+c)\\ &= a^2+2ab+b^2+ac+bc+ac+bc+c^2\end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

Corrigé de l'exercice 3.10 page 50

- $$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= \underbrace{(a^3+2a^2b+ab^2)}_{=a(a^2+2ab+b^2)} + \underbrace{(a^2b+2ab^2+b^3)}_{=b(a^2+2ab+b^2)}\end{aligned}$$

  $$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

- $$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3\\ &= (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\ &= (a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3)+(a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4)\end{aligned}$$

  $$\boxed{(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$$

- $$\begin{aligned}(a+b)^5 &= (a+b)(a+b)^4\\ &= (a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)\\ &= (a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4)+(a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5)\end{aligned}$$

  $$\boxed{(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$$

Si on représente les coefficients des termes du développement de $(a+b)^n$ pour n allant de 0 à 5, on a ceci :

n	Coefficients					
$n=0 : (a+b)^0 = 1$	1					
$n=1 : (a+b)^1 = 1a+1b$	1	1				
$n=2 : (a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

On s'aperçoit qu'un coefficient est la somme de celui qui est juste au-dessus et de son prédécesseur (comme dans l'exemple des cases jaunes : $10 = 4+6$).
Les coefficients forment une sorte de triangle de nombres ; c'est ce que l'on appelle le *triangle de Pascal* (Blaise Pascal était un grand mathématicien français du XVIIe siècle).
Le développement de $(1+x)^n$ pour n variant de 2 à 5 est donc :

- $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$,
- $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$,
- $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$,
- $(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$.

Corrigé de l'exercice 3.11 page 51

Premier constat : les deux membres de l'égalité à démontrer sont positifs. Ainsi, démontrer l'égalité entre leur carré est équivalent. En d'autres termes, démontrer l'égalité :

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}$$

est équivalent à démontrer l'égalité :

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2$$

c'est-à-dire :

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=a+\sqrt{b}.$$

C'est ce que nous allons faire.
Développons le membre de gauche à l'aide de l'identité remarquable :

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2.$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2\\
&=\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\times\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2\\
&=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\times\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\\
&=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\times\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\\
&\quad\text{(on a réorganisé les termes)}\\
&=a+2\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}{4}}\\
&=a+2\frac{\sqrt{a^2-\left(\sqrt{a^2-b}\right)^2}}{\sqrt{4}}\\
&=a+\sqrt{a^2-(a^2-b)}\\
&=a+\sqrt{b}.\ \text{(nous avons démontré l'égalité souhaitée)}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.12 page 51

$$\begin{aligned}
A &= (2x+1)(x+3)-2(x+3)(5x+6)\\
&= (x+3)[(2x+1)-2(5x+6)] && \text{le facteur commun est } (x+3)\\
&= (x+3)(2x+1-10x-12) && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par } -2 \text{ le } 5x \text{ et le } 6\\
&= (x+3)(-8x-11) && \text{on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses}\\
&= -(x+3)(8x+11) && \text{on met en facteur « } -1 \text{ » pour la lisibilité}
\end{aligned}$$

mathweb.fr

B $= (x-4)(2x+9)+3(x-4)(7x+3)$
$= (x-4)[(2x+9)+3(7x+3)]$ le facteur commun est $(x-4)$
$= (x-4)(2x+9+21x+9)$ on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par 3 le $7x$ et le 3
$= \underline{(x-4)(23x+18)}$ on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses

C $= (3x-1)(5x+2)-(5x+2)(9x+8)$
$= (5x+2)[(3x-1)-(9x+8)]$ le facteur commun est $(5x+2)$
$= (5x+2)(3x-1-9x-8)$ on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -1 le $9x$ et le 8
$= (5x+2)(-6x-9)$ on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
$= \underline{-3(5x+2)(2x+3)}$ on factorise par -3 ce qu'il y a dans la deuxième paire de parenthèses

Corrigé de l'exercice 3.13 page 51

D $= (9x+6)(4x+1)+(3x+2)(1-4x)$
$= 3(3x+2)(4x+1)+(3x+2)(1-4x)$ on factorise $(9x+6)$ par 3
$= (3x+2)[3(4x+1)+(1-4x)]$ on factorise par $(3x+2)$
$= (3x+2)(12x+3+1-4x)$ on enlève les parenthèses dans les crochets
$= (3x+2)(8x+4)$ on réduit l'expression
$= \underline{4(3x+2)(2x+1)}$ on factorise par 4 dans le deuxième facteur

E $= (2x+3)(5x-10)-3(x-2)(5x+9)$
$= 5(x-2)(2x+3)-3(x-2)(5x+9)$ on factorise $(5x-10)$ par 5
$= (x-2)[5(2x+3)-3(5x+9)]$ on factorise par $(x-2)$
$= (x-2)(10x+15-15x-27)$ on enlève les parenthèses dans les crochets
$= (x-2)(-5x-12)$ on réduit l'expression dans le second facteur
$= \underline{-(x-2)(5x+12)}$ on factorise par -1 dans le deuxième facteur

F $= (3x-1)(2x+7)-4(1-3x)(7-2x)$
$= (3x-1)(2x+7)+4(3x-1)(7-2x)$ on factorise $(1-3x)$ par (-1)
$= (3x-1)[(2x+7)+4(7-2x)]$ on factorise par $(3x-1)$
$= (3x-1)(2x+7+28-8x)$ on enlève les parenthèses dans les crochets
$= \underline{(3x-1)(-6x+35)}$ on réduit l'expression dans le second facteur

Corrigé de l'exercice 3.14 page 51

G $= 9x^2+6x+1-(3x+1)(4x-1)$
$= (3x+1)^2-(3x+1)(4x-1)$ on veut que $9x^2+6x+1$ soit une identité remarquable de la forme $(a+b)^2$, donc il faut que $9x^2=a^2$ et que $1=b^2$ donc $a=3x$ et $b=1$
$= (3x+1)[(3x+1)-(4x-1)]$ on factorise par $(3x+1)$
$= (3x+1)(3x+1-4x+1)$ on enlève les parenthèses dans les crochets
$= \underline{(3x+1)(-x+2)}$ on réduit l'expression dans le second facteur

H $= 4x^2-12x+9+(2x-3)(7x+1)$
$= (2x-3)^2+(2x-3)(7x+1)$ il faut que $4x^2=a^2$ et $9=b^2$, donc $a=2x$ et $b=3$
$= (2x-3)(2x-3+7x+1)$
$= \underline{(2x-3)(9x+2)}$

mathweb.fr

$$
\begin{aligned}
I &= 25x^2 - 4 + 3(5x-2)(x+3) \\
&= (5x)^2 - 2^2 + 3(5x-2)(x+3) && \text{on fait apparaître une expression de la forme } a^2-b^2 \\
&= (5x-2)(5x+2) + 3(5x-2)(x+3) && \text{on factorise } a^2-b^2 \text{ en } (a-b)(a+b) \\
&= (5x-2)[5x+2+3(x+3)] \\
&= (5x-2)(5x+2+3x+9)] \\
&= \underline{(5x-2)(8x+11)}
\end{aligned}
$$

Corrigé de l'exercice 3.15 page 51

1 $A = (x+1)^2 - (x-1)^2$.
A est de la forme a^2-b^2 avec $a=(x+1)$ et $b=(x-1)$, d'où :

$$
\begin{aligned}
A &= \big[(x+1)-(x-1)\big]\big[(x+1)+(x-1)\big] \\
&= (x+1-x+1)(x+1+x-1) \\
&= 2\times 2x
\end{aligned}
$$

$$\boxed{A = 4x}$$

2 $B = (2x+3)^2 - (3x-2)^2$.
B est de la forme a^2-b^2 avec $a=(2x+3)$ et $b=(3x-2)$, d'où :

$$
\begin{aligned}
B &= \big[(2x+3)-(3x-2)\big]\big[(2x+3)+(3x-2)\big] \\
&= (2x+3-3x+2)(2x+3+3x-2)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{B = (-x+5)(5x+1)}$$

3 $C = (3-4x)^2 - (5x+1)^2$.
C est de la forme a^2-b^2 avec $a=(3-4x)$ et $b=(5x+1)$, d'où :

$$
\begin{aligned}
C &= \big[(3-4x)-(5x+1)\big]\big[(3-4x)+(5x+1)\big] \\
&= (3-4x-5x-1)(3-4x+5x+1)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{C = (2-9x)(x+4)}$$

4 $D = (8-4x)^2 - (6x+4)^2$.
D est de la forme a^2-b^2 avec $a=(8-4x)$ et $b=(6x+4)$, d'où :

$$
\begin{aligned}
D &= \big[(8-4x)-(6x+4)\big]\big[(8-4x)+(6x+4)\big] \\
&= (8-4x-6x-4)(8-4x+6x+4)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{D = (4-10x)(2x+12)}$$

On pourrait continuer à factoriser D en écrivant :

$$D = 2(2-5x)\times 2(x+6)$$

$$\boxed{D = 4(2-5x)(x+6)}$$

Les deux résultats encadrés sont corrects.

5 $E = 36(x-4)^2 - 64(x+3)^2$.
E peut s'écrire :

$$E = \big[6(x-4)\big]^2 - \big[8(x+3)\big]^2.$$

mathweb.fr

Ainsi, E est de la forme a^2-b^2 avec $a=6(x-4)$ et $b=8(x+3)$, d'où :

$$\begin{aligned}E&=\big[6(x-4)-8(x+3)\big]\big[6(x-4)+8(x+3)\big]\\&=(6x-24-8x-24)(6x-24+8x+24)\\&=(-2x-48)(14x)\\\boxed{E&=14x(-2x-48)}\\&=14x\times(-2)(x+24)\\\boxed{E&=-28x(x+24)}\end{aligned}$$ (forme factorisée optimale)

6 $F=25(3-7x)^2-9(2x+5)^2$.
On peut écrire :

$$F=\big[5(3-7x)\big]^2-\big[3(2x+5)\big]^2.$$

Ainsi, F est de la forme a^2-b^2 avec $a=5(3-7x)$ et $b=3(2x+5)$, d'où :

$$\begin{aligned}F&=\big[5(3-7x)-3(2x+5)\big]\big[5(3-7x)+3(2x+5)\big]\\&=(15-35x-6x-15)(15-35x+6x+15)\\\boxed{F&=-41x(30-29x)}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.16 page 52

$$\begin{aligned}J&=(9x+18)(x+2)-(4x+20)(x+5)\\&=9(x+2)(x+2)-4(x+5)(x+5)\\&=[3(x+2)]^2-[2(x+5)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2, \text{ avec } a=3(x+2) \text{ et } b=2(x+5)\\&=[3(x+2)-2(x+5)][3(x+2)+2(x+5)]\\&=(3x+6-2x-10)(3x+6+2x+10) && \text{on développe dans les crochets}\\&=\underline{(x-4)(5x+16)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K&=2(2x+3)(4x+6)-3(3x+2)(9x+6)\\&=2(2x+3)\times 2(2x+3)-3(3x+2)\times 3(3x+2)\\&=[2(2x+3)]^2-[3(3x+2)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2\\&=[2(2x+3)-3(3x+2)][2(2x+3)+3(3x+2)]\\&=(4x+6-9x-6)(4x+6+9x+6) && \text{on développe dans les crochets}\\&=\underline{-5x(13x+12)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L&=7(7x+1)(49x+7)+(1-4x)(16x-4)\\&=7(7x+1)\times 7(7x+1)-(4x-1)\times 4(4x-1)\\&=[7(7x+1)]^2-[2(4x-1)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2\\&=[7(7x+1)-2(4x-1)][7(7x+1)+2(4x-1)]\\&=(49x+7-8x+2)(49x+7+8x-2) && \text{on développe dans les crochets}\\&=\underline{(41x+9)(57x+5)}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.17 page 52

Remarque 28

Rappelons avant tout les trois identités remarquables dans le sens de la factorisation :

Formes développées	=	Formes factorisées
$a^2+2ab+b^2$	$=$	$(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2$	$=$	$(a-b)^2$
a^2-b^2	$=$	$(a-b)(a+b)$

1 $A = x^2 + 2x + 1$.

Nous voyons qu'il y a trois termes dans cette expression ; or, seules les deux premières égalités développées comportent trois termes.

De plus, il n'y a que des signes « + » donc seule la première égalité peut convenir.

Il faut donc que :

$$x^2 + 2x + 1 = a^2 + 2ab + b^2 \ ,$$

ce qui signifie que nous devons avoir :

$$\begin{cases} a^2 = x^2 \\ b^2 = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = x \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{par exemple.}$$

On vérifie que le double produit $(2ab)$ est correct :

$$2 \times x \times 1 = 2x \ ;$$

donc :

$$\boxed{x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2}$$

2 $B = 9x^2 - 12x + 4$.

Nous voyons qu'il y a trois termes dans cette expression ; or, seules les deux premières égalités développées comportent trois termes.

De plus, il y a un signe « − » donc seule la deuxième égalité ne peut convenir.

Il faut donc que :

$$9x^2 - 12x + 4 = a^2 - 2ab + b^2 \ ,$$

ce qui signifie que nous devons avoir :

$$\begin{cases} a^2 = 9x^2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 3x \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{par exemple.}$$

On vérifie que le double produit $(2ab)$ est correct :

$$2 \times 3x \times 2 = 12x \ ;$$

donc :

$$\boxed{9x^2 - 12x + 4 = (3x+2)^2}$$

3 $C = x^2 - 9$.

Il n'y a que deux termes dans cette expression donc seule la troisième identité remarquable ne peut convenir.

On a :

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = a^2 - b^2 \text{ avec } a = x \text{ et } b = 3$$

donc :

$$\boxed{x^2 - 9 = (x-3)(x+3)}$$

4 $D = 4x^2 + 12x + 9$.

On peut écrire :

$$D = (2x)^2 + 2 \times 6x + 3^2.$$

Ainsi, D est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$, d'où :

$$\boxed{D = (2x+3)^2}$$

mathweb.fr

5 $E = \dfrac{1}{4}x^2 - 5x + 25$.

On peut écrire :

$$E = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{5}{2}x + 5^2.$$

Ainsi, E est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \dfrac{1}{2}x$ et $b = 5$, d'où :

$$\boxed{E = \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^2}$$

6 $F = 25 - 4x^2$.

On peut écrire :

$$F = 5^2 - (2x)^2$$

donc F est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 5$ et $b = 2x$, d'où :

$$\boxed{(5 - 2x)(5 + 2x)}$$

7 $G = 81x^2 + 126x + 49$.

On peut écrire :

$$G = (9x)^2 + 2 \times 63x + 7^2 = (9x)^2 + 2 \times 9x \times 7 + 7^2$$

donc G est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 9x$ et $b = 7$, d'où :

$$\boxed{G = (9x + 7)^2}$$

8 $H = 121x^2 - 64$.

On peut écrire :

$$H = (11x)^2 - 8^2$$

donc H est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 11x$ et $b = 8$, d'où :

$$\boxed{H = (11x - 8)(11x + 8)}$$

Corrigé de l'exercice 3.18 page 52

1 $A = 897\,526^2 - 897\,525 \times 897\,527$.

Posons $x = 897\,526$. Alors,

$$\begin{aligned} A &= x^2 - (x - 1)(x + 1) \\ &= x^2 - (x^2 - 1^2) \\ &= x^2 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 1}$$

2 $B = 100\,001^2 - 99\,999^2$.

Posons $x = 100\,000$. Alors,

$$\begin{aligned} B &= (x + 1)^2 - (x - 1)^2 \\ &= \big[(x + 1) - (x - 1)\big]\big[(x + 1) + (x - 1)\big] \\ &= 4x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{B = 4 \times 100\,000 = 400\,000}$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 3.19 page 52

1 $-3x+7=0$

$\Leftrightarrow -3x=-7$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{-3}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{\dfrac{7}{3}\right\}}$

2 $\dfrac{3}{5}x-6=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{5}x=6$

$\Leftrightarrow x=6\times\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\{10\}}$

3 $-\dfrac{2}{7}x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{21}x+2$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2}{7}x-\dfrac{2}{21}x=2-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{8}{21}x=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{21}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{-\dfrac{63}{16}\right\}}$

4 $(-3x+1)(5x-7)=0$

$\Leftrightarrow -3x+1=0$ ou $5x-7=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{7}{5}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{7}{5}\right\}}$

5 $\left(-\dfrac{1}{2}x-5\right)\left(\dfrac{3}{4}x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x-5=0$ ou $\dfrac{3}{4}x+2=0$

$\Leftrightarrow x=-10$ ou $x=-\dfrac{8}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{-10\ ;\ -\dfrac{8}{3}\right\}}$

6 $2x(5x-1)(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x=0$ ou $5x-1=0$ ou $2x+3=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{1}{5}$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{0\ ;\ \dfrac{1}{5}\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right\}}$

7 $\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{2x}{x-1},\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2+1=2x,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x=1,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\varnothing}$

8 $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow x-2=1,\ x\neq 2$ et $x\neq -2$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\{3\}}$

mathweb.fr

9 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=2,\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x(x+1)}+\dfrac{x}{x(x+1)}=\dfrac{2x(x+1)}{x(x+1)},\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x+1+x=2x(x+1),\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow 2x+1=2x^2+2x,\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2},\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff \boxed{S=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}}$

10 $\dfrac{2}{x-1}=1-\dfrac{x}{x+1},\ x\neq 1$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)},\ x\neq 1$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow 2(x+1)=x^2-1-x(x-1),\ x\neq 1$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow 2x+2=x^2-1-x^2+x,\ x\neq 1$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow 2x+2-x^2+1+x^2-x=0,\ x\neq 1$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x+3=0,\ x\neq 1$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x=-3,\ x\neq 1$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\{-3\}}$

Corrigé de l'exercice 3.20 page 53

1 $(3x-5)^2=16 \iff \begin{cases} 3x-5=4 \\ \text{ou} \\ 3x-5=-4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x=9 \\ \text{ou} \\ 3x=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=3 \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

On a alors : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{3\ ;\dfrac{1}{3}\right\}}$.

2 $\left(x^2-4\right)^2=81 \iff \begin{cases} x^2-4=9 \\ \text{ou} \\ x^2-4=-9 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2=13 \\ \text{ou} \\ x^2=-5 \end{cases}$ $\longleftarrow$ impossible car $x^2\geqslant 0$

$\iff \begin{cases} x=\sqrt{13} \\ \text{ou} \\ x=-\sqrt{13} \end{cases}$

On a alors : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\sqrt{13}\ ;\sqrt{13}\right\}}$.

mathweb.fr

3 $\left(3x^2-4\right)^2 = 9 \iff \begin{cases} 3x^2-4=3 \\ \text{ou} \\ 3x^2-4=-3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x^2=7 \\ \text{ou} \\ 3x^2=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2=\dfrac{7}{3} \\ \text{ou} \\ x^2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{7}{3}} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

On a alors : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\sqrt{\dfrac{7}{3}}\,;-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}}$.

4 $\left(\dfrac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25 \iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-7}=5 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}=-5 \end{cases} \\ x-7\neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-7}-5=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+5=0 \end{cases} \\ x\neq 7 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-7}-\dfrac{5(x-7)}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+\dfrac{5(x-7)}{x-7}=0 \end{cases} \\ x\neq 7 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-7}-\dfrac{5x-35}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+\dfrac{5x-35}{x-7}=0 \end{cases} \\ x\neq 7 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1-5x+35}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1+5x-35}{x-7}=0 \end{cases} \\ x\neq 7 \end{cases}$

mathweb.fr

$$\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25 \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x-1-5x+35=0 \\ \text{ou} \\ 2x-1+5x-35=0 \end{pmatrix} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} -3x+34=0 \\ \text{ou} \\ 7x-36=0 \end{pmatrix} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x=\dfrac{34}{3} \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{36}{7} \end{pmatrix} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{36}{7}\,;\frac{34}{3}\right\}}$.

Corrigé de l'exercice 3.21 page 53

1 **a.** Dans le triangle équilatéral ABC, $\widehat{\text{ABC}} = 60°$.
Dans le triangle NBM rectangle en M,

$$\tan\widehat{\text{NBM}} = \frac{NM}{BM}$$

donc :

$$\tan 60° = \frac{NM}{x}.$$

On a donc :

$$\boxed{MN = x\tan 60° = x\sqrt{3}}$$

b. Par symétrie, $BM = QC = x$ et $MH = HQ = 3 - x$.
Donc, $MQ = 2 \times (3-x)$, soit $\boxed{MQ = 6 - 2x}$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. La condition mène à l'égalité :

$$MQ = MN$$

c'est-à-dire, d'après la question 1 :

$$\boxed{x\sqrt{3} = 6 - 2x}$$

b. Si $x\sqrt{3} = 6 - 2x$, alors $x\sqrt{3} + 2x = 6$.
Ainsi, $\left(\sqrt{3}+2\right)x = 6$, soit :

$$\boxed{x = \frac{6}{2+\sqrt{3}}}$$

En mathématiques, on a souvent l'habitude de ne pas laisser les résultats sous cette forme (avec un radical au dénominateur).
On continue donc le calcul ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{6}{2+\sqrt{3}} &= \frac{6\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{12-6\sqrt{3}}{4-3} \\ &= 12-6\sqrt{3} \end{aligned}$$

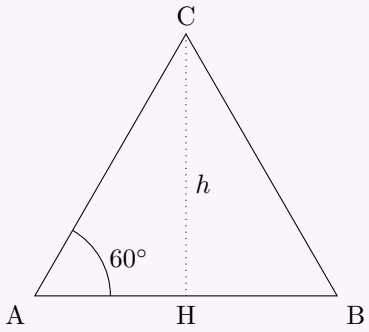
mathweb.fr

de sorte à que le dénominateur soit entier.
On peut s'assurer que $x < 3$ en trouvant une valeur approchée :

$$x \approx 1,6.$$

Corrigé de l'exercice 3.22 page 53

1 **a.** Nous avons le schéma suivant :



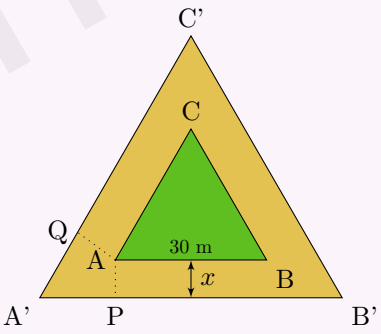
Dans le triangle ACH rectangle en H :

$$\sin 60° = \frac{h}{AC} \qquad \text{donc} \qquad h = AC \sin 60° = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{15\sqrt{3}}.$$

b. L'aire d'un triangle est donnée par la formule : $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ donc l'aire de ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times h}{2} = \frac{30 \times 15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = 225\sqrt{3} \text{ m}^2}$$

2 **a.** Considérons les points P et Q comme indiqués ci-dessous, de sorte que AA'P et AA'Q soient rectangles respectivement en P et Q (voir schéma page suivante).



$\left.\begin{array}{l} AP = AQ \\ (AP) \perp (A'B') \text{ et } (AQ) \perp (A'C') \end{array}\right\} \Rightarrow (A'A)$ est la bissectrice de $\widehat{B'A'C'}$.

Ainsi, $\widehat{B'A'A} = 30°$. Dans le triangle A'AP, rectangle en P, on a donc :

$$\tan \widehat{PA'A} = \frac{AP}{A'P} \Rightarrow A'P = \frac{AP}{\tan 30°} \Rightarrow A'P = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow A'P = x\sqrt{3}\,.$$

Pour des raisons de symétrie de la figure, on a : $A'B' = 2A'P + AB$, soit $\underline{A'B' = 30 + 2x\sqrt{3}}$.

mathweb.fr

b. D'après ce qui a été fait dans la question 1.b, l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= (A'B')^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= \left(30+2x\sqrt{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= \left[2\left(15+x\sqrt{3}\right)\right]^2\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \boxed{\mathcal{A}' &= \left(15+x\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

3 **a.** L'aire de l'allée $(\mathcal{A}'-\mathcal{A})$ est égale à celle du jardin $(\mathcal{A})$ donc $\mathcal{A}'-\mathcal{A}=\mathcal{A}$.
En ajoutant $\mathcal{A}$ à droite et à gauche du signe « = », on arrive à l'équation : $\mathcal{A}'=2\mathcal{A}$.

b.
$$\begin{aligned}\mathcal{A}'=2\mathcal{A} &\iff \left(15+x\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}=450\sqrt{3}\\ &\iff \left(15+x\sqrt{3}\right)^2=450\\ &\iff 15+x\sqrt{3}=\sqrt{450} \qquad (\text{car } 15+x\sqrt{3}>0)\\ &\iff x\sqrt{3}=\sqrt{450}-15\\ &\iff x=\frac{\sqrt{450}-15}{\sqrt{3}}\\ &\iff x=\frac{15\sqrt{2}-15}{\sqrt{3}}\\ &\iff x=\frac{15\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{3}}{3}\\ &\iff \boxed{x=5\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.23 page 54

Remarque 29

Dès lors que l'équation à résoudre est de la forme :

$$\sqrt{f(x)}=a,$$

où f est une fonction et a un nombre réel positif, il faut s'assurer avant tout que ce qu'il y a sous la racine carrée soit positif ou nul ; c'est la première condition.
Ensuite, on élève au carré chaque membre de l'équation pour résoudre l'équation :

$$f(x)=a^2.$$

1 $\sqrt{3x-2}=7 \iff \begin{cases}3x-2\geqslant 0\\ 3x-2=7^2\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}3x\geqslant 2\\ 3x=49+2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x\geqslant \dfrac{2}{3}\\ x=\dfrac{51}{3}=17\end{cases}$$

$17\geqslant\dfrac{2}{3}$ donc l'ensemble solution de l'équation est : $\boxed{\mathcal{S}=\{17\}}$.

2 $\sqrt{\dfrac{5x-4}{3x+1}} = 3 \iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ 3x+1 \neq 0 \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} = 9 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} - 9 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} - \dfrac{9(3x+1)}{3x+1} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4-27x-9}{3x+1} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-22x-13}{3x+1} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ -22x-13 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ x = -\dfrac{13}{22} \end{cases}$

On calcule maintenant $\dfrac{5x-4}{3x+1}$ pour $x = -\dfrac{13}{22}$ afin de voir si cette solution est valable :

$$\frac{5x-4}{3x+1} = 9 > 0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{13}{22}\right\}}$.

mathweb.fr

3 $\sqrt{x^2+x+1} = x+1 \iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ x^2+x+1 = (x+1)^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \\ x^2+x+1 = x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

On vérifie que $x^2+x+1 \geqslant 0$ pour $x=0$ (assez facilement) donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$.

4 $x\sqrt{7}+\sqrt{2} = \sqrt{7}-x\sqrt{2} \iff x\sqrt{7}+x\sqrt{2} = \sqrt{7}-\sqrt{2}$

$$\iff x(\sqrt{7}+\sqrt{2}) = \sqrt{7}-\sqrt{2}$$

$$\iff x = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$$

$$\iff x = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}$$

$$\iff x = \frac{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7}\times\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$\iff x = \frac{9-2\sqrt{14}}{5}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{9-2\sqrt{14}}{5}\right\}}$.

5 $\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) \iff \begin{cases} 2(3x+4) \geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4) = \big[2(3x+4)\big]^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3x+4 \geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4) = 4(3x+4)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x \geqslant -4 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4) - 4(3x+4)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ (3x+4)\big[(x-2) - 4(3x+4)\big] = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ (3x+4)(x-2-12x-16) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ (3x+4)(-11x-18) = 0 \end{cases}$$

mathweb.fr

$$\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) \iff \begin{cases} x \geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ \begin{pmatrix} 3x+4=0 \\ \text{ou} \\ -11x-18=0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) \iff \begin{cases} x \geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ \begin{pmatrix} x=-\dfrac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{18}{11} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$-\dfrac{4}{3} \geqslant -\dfrac{4}{3}$ mais $-\dfrac{18}{11} < -\dfrac{4}{3}$, donc ne convient pas.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}}$.

Corrigé de l'exercice 3.24 page 54

Notons x le nombre de contrats du représentant. Alors, son salaire se calcule en faisant :

$$800 + 152x.$$

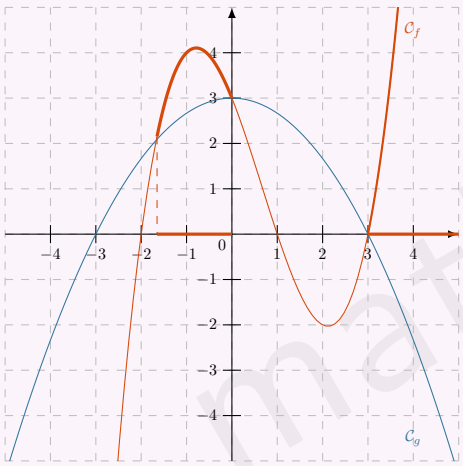
On cherche donc x tel que :

$$\begin{aligned} 800 + 152x &\geqslant 2\ 300 \\ 152x &\geqslant 2\ 300 - 800 \\ 152x &\geqslant 1\ 500 \\ x &\geqslant \frac{1\ 500}{152} \\ x &\geqslant 9,87 \end{aligned}$$

Il faut donc que le représentant vende au moins 10 contrats.

Corrigé de l'exercice 3.25 page 54

1 $f(x) > g(x)$: il faut regarder les portions de courbes de $\mathcal{C}_f$ qui sont au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

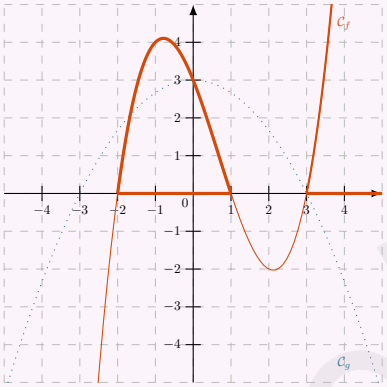


Les intervalles de x qui correspondent à ces « morceaux » de courbes sont $]-1,6\,;0[$ et $]3\,;5]$ (les bornes ne sont pas incluses – sauf 5 – car l'inégalité doit être stricte : $f(x) > g(x)$.
L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{S =]-1,6\,;0[\cup]3\,;5]}$$

mathweb.fr

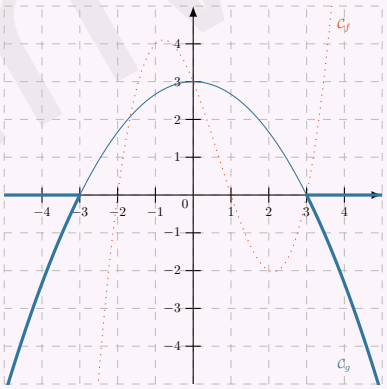
2 $f(x) \geqslant 0$. Il faut regarder les portions de la courbe $\mathcal{C}_f$ qui sont au-dessus de l'axe des abscisses.



L'ensemble solution est :

$$\boxed{S = [-2\,;1] \cup [3\,;5]}$$

3 $g(x) \leqslant 0$. Il faut regarder ici les morceaux de la courbe $\mathcal{C}_g$ sous l'axe des abscisses.



L'ensemble solution est :

$$\boxed{S = [-5\,;-3] \cup [3\,;5]}$$

Corrigé de l'exercice 3.26 page 54

Pour tous nombres a et b positifs tels que $a \neq b$,

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0 \text{ donc } \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 > 0$$

$$\text{donc } a - 2\sqrt{ab} + b > 0$$

$$\text{donc } a + b > 2\sqrt{ab}$$

$$\text{donc } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \text{ (en divisant par 2, nombre positif)}$$

$$\text{donc } m > g.$$

Corrigé de l'exercice 3.27 page 55

1 $|\,x-3\,| = 7 \iff x - 3 = 7$ ou $x - 3 = -7$

$\iff x = 10$ ou $x = -4$

D'où $\boxed{\text{S=\{-4 ;10\}}}$

mathweb.fr

2 $|x+4| < 5 \iff x+4 < 5 \quad \text{et} \quad -(x+4) < 5$
$\iff x < 5-4 \quad \text{et} \quad x+4 > -5$
$\iff x < 1 \quad \text{et} \quad x > -9$

D'où $\boxed{S =]-9\,;1[}$

Remarque 30

On pourrait aussi résoudre cette inéquation en disant que $|x+4| = |x-(-4)|$ représente la distance entre x et -4. Donc $|x+4| < 5$ signifie que la distance entre x et -4 est strictement inférieure à 5, ce qui signifie que x est compris entre $-4-5$ et $-4+5$, c'est-à-dire entre -9 et 1.

3 $|x-6| \geqslant 2 \iff x-6 \geqslant 2 \quad \text{ou} \quad -(x-6) \geqslant 2$
$\iff x \geqslant 2+6 \quad \text{ou} \quad x-6 \leqslant -2$
$\iff x \geqslant 8 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 4$

D'où $\boxed{S =]-\infty\,;4] \cup [8\,;+\infty]}$

Remarque 31

$|x-6| \geqslant 2$ signifie que la distance entre x et 6 doit être supérieure ou égale à 2 et donc que x doit être supérieur ou égal à $6+2$ (donc à 8) ou inférieur ou égal à $6-2$ (donc à 4).

Corrigé de l'exercice 3.28 page 55

1 $|x+8| = -1$ est impossible car une valeur absolue est toujours positives ou nulle.
Ainsi, $\underline{S = \varnothing}$ (ensemble vide).

2 $|x-1| \leqslant 1 \iff x-1 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -(x-1) \leqslant 1$
$\iff x \leqslant 1+1 \quad \text{et} \quad x-1 \geqslant -1$
$\iff x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad x \geqslant 0$

Donc $\boxed{S = [0\,;2]}$

3 $|x+2| > 2 \iff x+2 > 2 \quad \text{ou} \quad -(x+2) > 2$
$\iff x > 2-2 \quad \text{ou} \quad x+2 < -2$
$\iff x > 0 \quad \text{ou} \quad x < -4$

D'où $\boxed{S =]-\infty\,;-4[\cup]0\,;+\infty[}$

Corrigé de l'exercice 3.29 page 55

1 $|x-7| = 3 \iff x-7 = 3 \quad \text{ou} \quad -(x-7) = 3$
$\iff x = 3+7 \quad \text{ou} \quad x-7 = -3$
$\iff x = 10 \quad \text{ou} \quad x = 4$

D'où $\boxed{S = \{4;10\}}$

2 $|x-4| \leqslant 8 \iff x-4 \leqslant 8 \quad \text{ou} \quad -(x-4) \leqslant 8$
$\iff x \leqslant 8+4 \quad \text{ou} \quad x-4 \geqslant -8$
$\iff x \leqslant 12 \quad \text{ou} \quad x \geqslant -4$

Donc $\boxed{S = [-4\,;12]}$

mathweb.fr

3 $|x+7| \geqslant 3 \iff x+7 \geqslant 3 \quad \text{ou} \quad -(x+7) \geqslant 3$
$\iff x \geqslant 3-7 \quad \text{ou} \quad x+7 \leqslant -3$
$\iff x \geqslant -4 \quad \text{ou} \quad x \leqslant -10$

D'où $\boxed{S =]-\infty\,;-10] \cup [-4\,;+\infty[}$

Corrigé de l'exercice 3.30 page 55

1 $|x-\pi| = 2\pi \iff x-\pi = 2\pi \quad \text{ou} \quad -(x-\pi) = 2\pi$
$\iff x = 2\pi+\pi \quad \text{ou} \quad x-\pi = -2\pi$
$\iff x = 3\pi \quad \text{ou} \quad x = -\pi.$

Ainsi, $\boxed{S = \{-\pi\,;3\pi\}}$

2 $|x-4| = \pi \iff x-4 = \pi \quad \text{ou} \quad -(x-4) = \pi$
$\iff x = \pi+4 \quad \text{ou} \quad x-4 = -\pi$
$\iff x = \pi+4 \quad \text{ou} \quad x = -\pi+4$

Donc $\boxed{S = \{4-\pi\,;4+\pi\}}$

3 $|x+1| > 2\pi \iff x+1 > 2\pi \quad \text{ou} \quad -(x+1) > 2\pi$
$\iff x > 2\pi-1 \quad \text{ou} \quad x+1 < -2\pi$
$\iff x > 2\pi-1 \quad \text{ou} \quad x < -2\pi-1$

Ainsi, $\boxed{S =]-\infty\,;-2\pi-1[\cup]2\pi-1\,;+\infty[}$

Corrigé de l'exercice 3.31 page 55

1 $|x-8| \leqslant 3 \iff x \in [8-3\,;8+3] \iff \underline{x \in [5\,;11]}.$

2 $|x-7| < 7 \iff x \in]7-7\,;7+7[\iff \underline{x \in]0\,;14[}.$

3 $|x+4| \leqslant 4 \iff |x-(-4)| \leqslant 4$
$\iff x \in [-4-4\,;-4+4]$
$\iff \underline{x \in [-8\,;0]}.$

4 $|2x-8| \leqslant 10 \iff |2(x-4)| \leqslant 10$
$\iff 2|x-4| \leqslant 10$
$\iff |x-4| \leqslant 5$
$\iff x \in [4-5\,;4+5]$
$\iff \underline{x \in [-1\,;9]}.$

5 $|3x+9| < 12 \iff |3(x+3)| < 12$
$\iff 3|x+3| < 12$
$\iff |x+3| < 4$
$\iff |x-(-3)| < 4$
$\iff x \in]-3-4\,;-3+4[$
$\iff \underline{x \in]-7\,;1[}.$

6 $|7x-21| < 14 \iff 7|x-3| < 14$
$\iff |x-3| < 2$
$\iff x \in]3-2\,;3+2[$
$\iff \underline{x \in]1\,;5[}.$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 3.32 page 55

1 Un algorithme possible est le suivant :

```
Initialisation
  U ← 1
  N ← 0
Traitement
  Tant que U ⩽ 1000000:
     N ← N+1
     U ← 2^N
  Fin du Tant Que
Sortie:
  Afficher N
```

2 Le programme Python correspondant à cet algorithme est :

Code Python 3-6

```
1  u = 1
2  n = 0
3  while u <= 1000000:
4      n = n + 1
5      u = 2**n
6  print(n)
```

Il affiche la valeur « 20 », ce qui signifie que $2^{19} \leqslant 10^6$ et $2^{20} > 10^6$.

Corrigé de l'exercice 3.33 page 56

1 Un algorithme possible est le suivant :

```
Initialisation
  U ← 1
  N ← 0
Traitement
  Tant que U ⩾ 0.00000001:
     N ← N+1
     U ← 3^-N
  Fin du Tant Que
Sortie:
  Afficher N
```

2 Le programme Python correspondant à cet algorithme est :

Code Python 3-7

```
1  u = 1
2  n = 0
3  while u >= 0.00000001:
4      n += 1
5      u = 3**(-n)
6  print(n)
```

Il affiche la valeur « 17 », ce qui signifie que $3^{-16} \geqslant 10^{-8}$ et $3^{-17} < 10^{-8}$.

4 Repérage dans le plan

Dans ce chapitre

1 Repère 81
1 Définition générale 81
2 Coordonnées d'un point 82
2 Distance entre deux points 82
3 Milieu d'un segment 83
Prendre un bon départ 85
Exercices 86
Corrigés des exercices 89

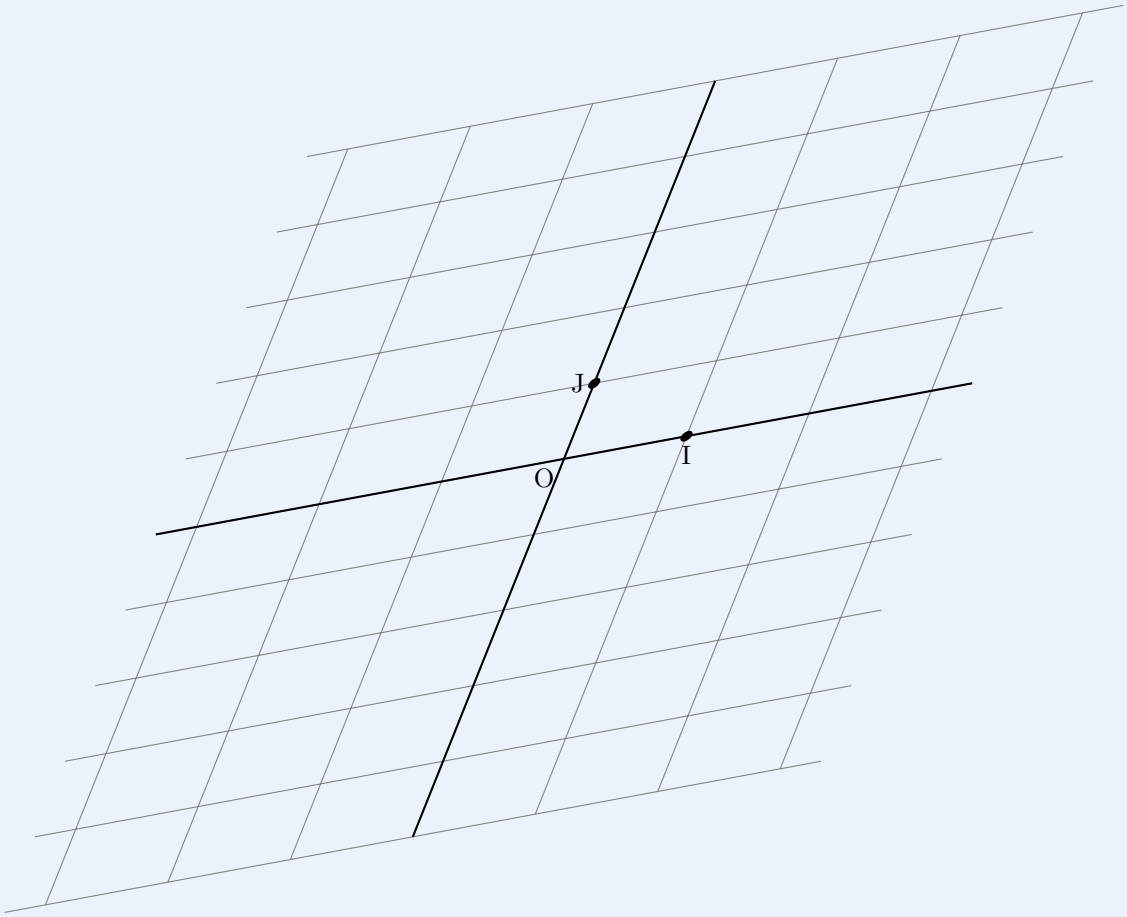
1 Repère

1 Définition générale

Définition 20

Soient O, I et J trois points du plan euclidien tels que $I \notin (OJ)$.
Alors, on dit que $(O\,; I, J)$ est un repère cartésien du plan.

Cela signifie que l'on fait un *maillage* du plan en traçant des droites parallèles à (OI) et parallèles à (OJ) comme ceci :



Afin de faciliter les représentations futures, on fera en sorte que (OI) et (OJ) soient perpendiculaires, ce qui rend le repère **orthogonal**.
Si de plus $OI = OJ$ alors le repère est dit **orthonormé** (*orthos* = « droit » et *normé* signifie que $OI = OJ$).

Les droites (OI) et (OJ) sont orientées (comme la droite graduée représentant les nombres réels). Un repère est donc constitué de deux droites graduées qui se coupent en « 0 ». Ces deux droites sont alors appelées les **axes** du repère.

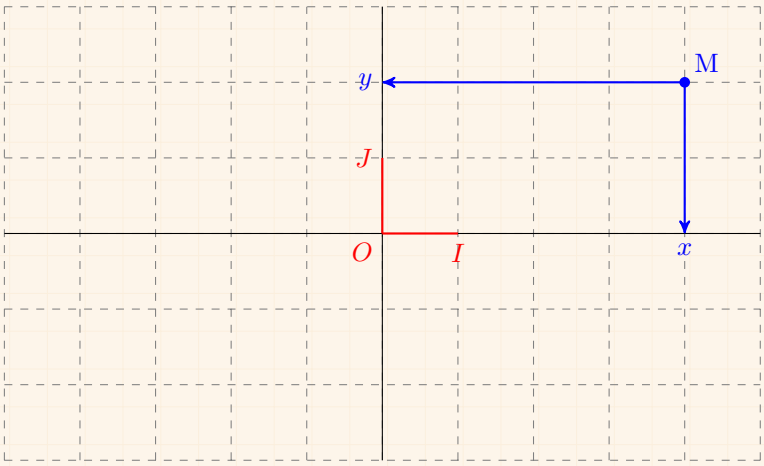
Dans la suite de ce chapitre, on se placera dans un repère orthonormé.

2 Coordonnées d'un point

Définition 21

On considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
Soit M un point quelconque du plan.
Par M, on trace la parallèle à (OJ) ; elle coupe (OI) en x.
Par M, on trace la parallèle à (OI) ; elle coupe (OJ) en y.
Alors, x est appelé l'**abscisse** de M et y, son **ordonnée**.
Le couple $(x\,;y)$ représente les **coordonnées** du point M, et on note : $M\,(x\,;y)$.

Exemple 25



Ici, $M\,(4\,;2)$. Son abscisse est 4, son ordonnée est 2.

2 Distance entre deux points

Propriété 15

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Dans ce repère, soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ deux points quelconques.
Alors, la distance entre A et B est donnée par la formule :

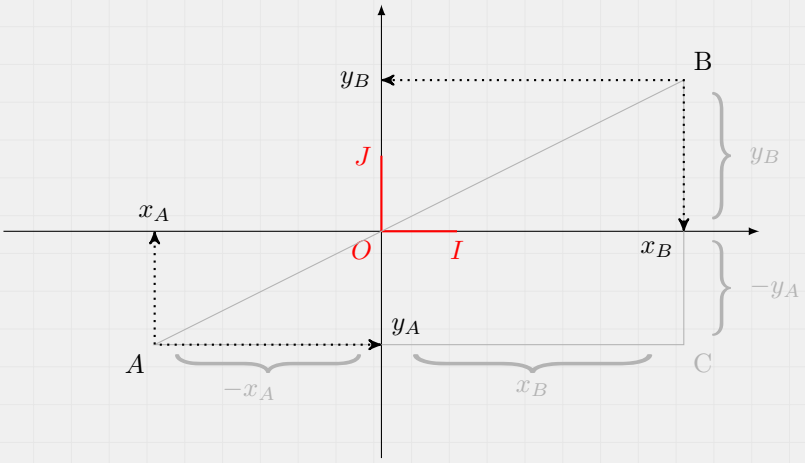
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple 26

Soient $A\,(-3\,;2)$ et $B\,(5\,;-7)$. Alors,

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-(-3))^2 + (-7-2)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-9)^2} \\ \boxed{AB = \sqrt{145}} \end{aligned}$$

Démonstration 6



Le repère est orthonormé donc le triangle ABC tracé en bleu est rectangle en C.
Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Or,

$$AC = |\, x_B - x_A \,|\,, \text{ donc } AC^2 = |\, x_B - x_A \,|^{\,2} = (x_B - x_A)^2$$

et

$$BC = |\, y_B - y_A \,|\,, \text{ donc } BC^2 = |\, y_B - y_A \,|^{\,2} = (y_B - y_A)^2.$$

Donc,

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\,.$$

En prenant la racine carrée de chacun des membres de cette dernière égalité, on a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

3 Milieu d'un segment

Propriété 16

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Dans ce repère, soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ deux points quelconques.
Soit $M\,(x_M\,;y_M)$ le milieu du segment $[AB]$. Alors,

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

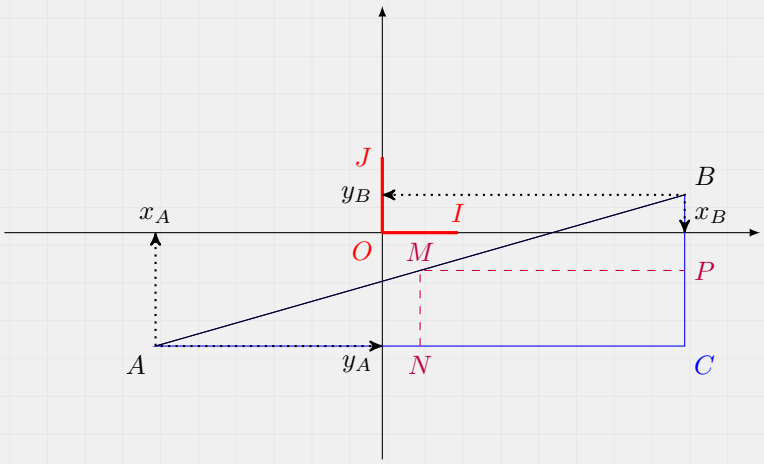
Exemple 27

Soient $A\,(1\,;7)$ et $B\,(3\,;-1)$. Soit M le milieu de $[AB]$; donc :

$$x_M = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{7+(-1)}{2} = 3.$$

Démonstration 7

On construit le triangle ABC rectangle en C comme indiqué ci-dessous :



On trace la parallèle à (BC) passant par M ; elle coupe $[AC]$ en N.
On trace la parallèle à (AC) passant par M ; elle coupe $[BC]$ en P.
D'après le théorème de Thalès, P est le milieu de $[BC]$ et N celui de $[AC]$.
Ainsi,

$$AN = \frac{1}{2}AC$$
$$AN = \frac{1}{2}(x_C - x_A)$$
$$AN = \frac{1}{2}x_C - \frac{1}{2}x_A$$

et donc :

$$x_N = x_A + AN$$
$$x_N = x_A + \frac{1}{2}x_C - \frac{1}{2}x_A$$
$$x_N = \frac{1}{2}x_A + \frac{1}{2}x_C$$
$$x_M = x_N = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ car } x_C = x_B.$$

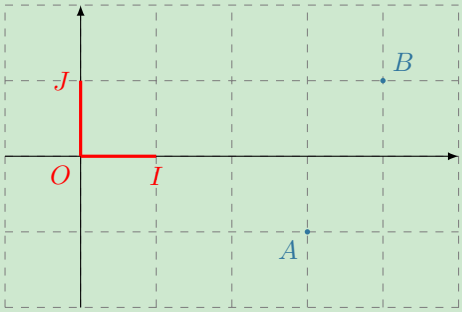
$$PC = \frac{1}{2}BC$$
$$PC = \frac{1}{2}(y_B - y_C) \text{ (il faut que } PC \geqslant 0)$$
$$PC = \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_C$$

et donc :

$$y_P = y_C + PC$$
$$y_P = y_C + \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_C$$
$$y_P = \frac{1}{2}y_B + \frac{1}{2}y_C$$
$$y_M = y_P = \frac{y_A + y_B}{2} \text{ car } y_C = y_A.$$

4 Prendre un bon départ

Exercice type 10 ▶ Lire les coordonnées d'un point



Lire les coordonnées des points A et B.

On peut lire les coordonnées suivantes : $A\,(3\,;-1)$ et $B\,(4\,;1)$.

Exercice type 11 ▶ Calculer une longueur

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(-3\,;7)$ et $B\,(5\,;-2)$.
Calculer AB.

On applique la formule du cours :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(5-(-3))^2 + (-2-7)^2)} \\ &= \sqrt{(5+3)^2 + (-9)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 81} \\ &= \sqrt{64 + 81} \\ &= \sqrt{145}. \end{aligned}$$

Exercice type 12 ▶ Trouver les coordonnées d'un milieu

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(-3\,;7)$ et $B\,(5\,;-2)$.
Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

On applique la formule du cours :

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ &= \frac{-3+5}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

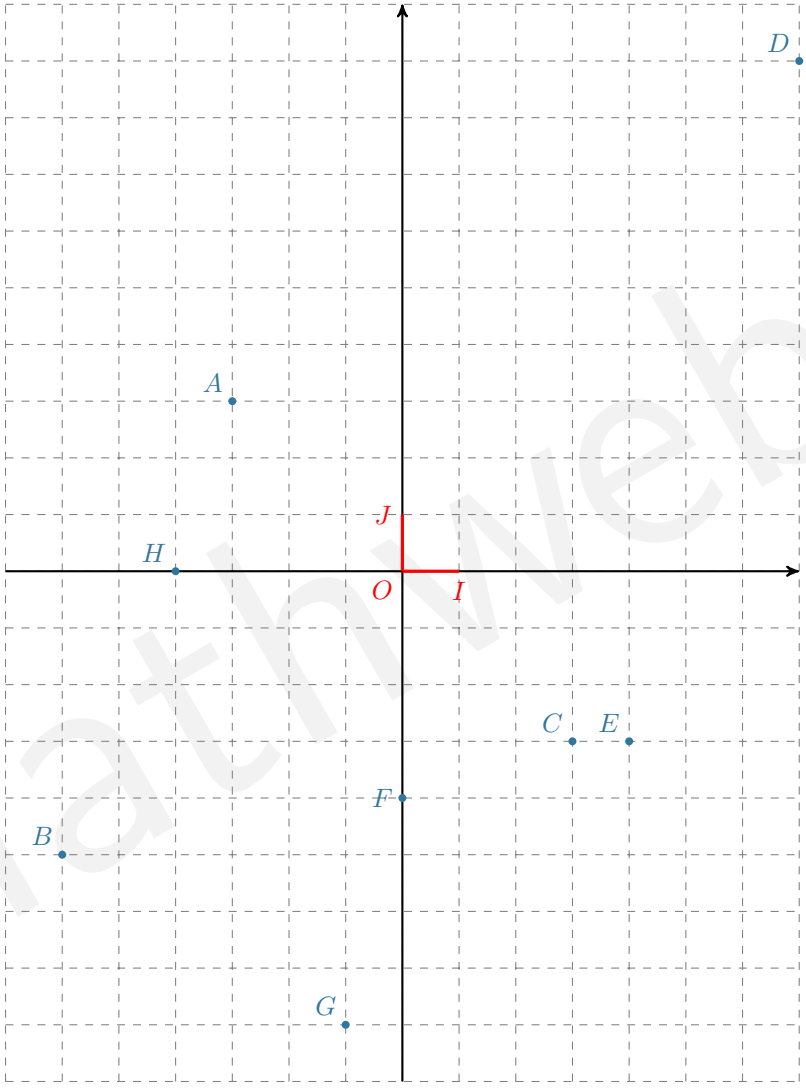
$$\begin{aligned} y_I &= \frac{y_A + y_B}{2} \\ &= \frac{7+(-2)}{2} \\ &= \frac{7-2}{2} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $I\left(1\,;\frac{5}{2}\right)$.

4 Exercices

Exercice 4.1 (lecture de coordonnées de points)

Dans le repère suivant, donner les coordonnées de tous les points.



Solution page 89

Exercice 4.2 (calculs de longueurs)

Pour chaque question, déterminer la longueur AB.

1 $A\,(-2\,;3)$ et $B\,(-3\,;5)$

2 $A\,(3\,;2)$ et $B\,(8\,;1)$

3 $A\,(-1\,;-3)$ et $B\,(-4\,;-6)$

4 $A\,(3\,;-2)$ et $B\,(-2\,;7)$

5 $A\,(1\,;-2)$ et $B\,(7\,;-5)$

6 $A\,(1\,;4)$ et $B\,(-2\,;-1)$

Solution page 89

mathweb.fr

Exercice 4.3 (milieu d'un segment)

Pour chacun des points A et B suivants, calculer les coordonnées du point I, milieu de $[AB]$.

1. $A\,(1\,;2)$ et $B\,(3\,;4)$
2. $A\,(-1\,;2)$ et $B\,(-3\,;4)$
3. $A\,(2\,;-1)$ et $B\,(4\,;-5)$
4. $A\,(-1\,;-1)$ et $B\,(5\,;-7)$

Solution page 90

Exercice 4.4 (milieu d'un segment)

Pour chacune des questions suivantes, on a les coordonnées d'un point A ainsi que celles du point M, milieu de $[AB]$.
Déterminer les coordonnées du point B.

1. $A\,(1\,;2)$ et $M\,(3\,;4)$
2. $A\,(-1\,;2)$ et $M\,(-3\,;4)$
3. $A\,(2\,;-1)$ et $M\,(4\,;-5)$
4. $A\,(-1\,;-1)$ et $M\,(5\,;-7)$

Solution page 91

Exercice 4.5 (exercice récapitulatif de base)

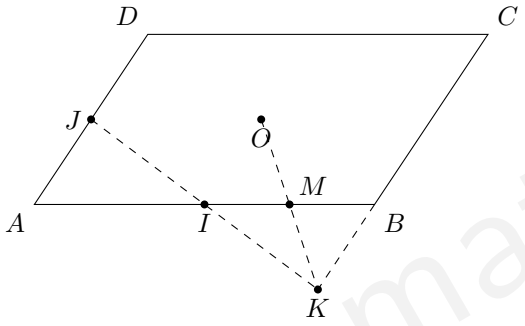
Dans le repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A\,(-1\,;1)$, $B\,(5\,;-3)$ et $C\,(4\,;2)$.

1. Placer les points A, B et C. Vous compléterez au fur et à mesure la figure.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Déterminer les coordonnées du point F, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
4. Calculer les coordonnées du milieu E de $[AC]$.
5. En déduire les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
6. Sans calcul, donner la longueur EF.
7. Déterminer les coordonnées de G, symétrique de C par rapport à F.

Solution page 92

Exercice 4.6 (lire des coordonnées dans un parallélogramme)

$ABCD$ est un parallélogramme. I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$. On note K le point d'intersection des droites (IJ) et (BC).
On note O le centre du parallélogramme $ABCD$ et M le point d'intersection des droites (OK) et (AB).



Dans le repère $(A;\ B, D)$, donner les coordonnées de chacun de ces points.

Solution page 93

mathweb.fr

Exercice 4.7 (exercice de recherche)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3\,;5)$, $B(1\,;-2)$ et $C(3\,;y)$, où y est un nombre réel.

Déterminer la valeur de y afin que ABC soit un triangle rectangle en A.

Solution page 94

Exercice 4.8 (algorithme et programme Python)

Écrire un algorithme permettant de calculer la longueur entre deux points A et B connaissant leurs coordonnées, ainsi que les coordonnées du milieu de [AB].
Écrire deux fonctions Python `milieu(A,B)` et `distance(A,B)`, où les arguments `A` et `B` désignent respectivement les coordonnées des points A et B (par exemple, `A=(-3,2)` si $A(-3\,;2)$), qui renvoient respectivement les coordonnées du milieu de $[AB]$ et la distance entre A et B.

Solution page 95

Exercice 4.9 (trouver un point)

Soient $A(-3\,;5)$ et $B(5\,;2)$ dans un repère orthonormé $(O;I,J)$.
On sait que $M(x\,;y)$ est à 3 unités de A et à 6 unités de B.

1 Montrer que :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 10y-6x-25 & \text{à l'aide du point } A,\\ x^2+y^2 = 4y+10x+7 & \text{à l'aide du point } B. \end{cases}$$

En déduire que $y=\dfrac{8}{3}x+\dfrac{16}{3}$.

2 Montrer alors que $73x^2+70x+1=0$ (on ne demande pas de résoudre cette équation).

3 Tracer la courbe de la fonction $f(x)=73x^2+70x+1$ sur votre calculatrice. Conjecturer alors le nombre de valeurs de x possibles.

Solution page 95

mathweb.fr

4 Corrigés

Corrigé de l'exercice 4.1 page 86

- $A\,(-3\,;3)$
- $B\,(-6\,;-5)$
- $C\,(3\,;-3)$
- $D\,(7\,;9)$
- $E\,(4\,;-3)$
- $F\,(0\,;-4)$
- $G\,(-1\,;-8)$
- $H\,(-4\,;0)$

Corrigé de l'exercice 4.2 page 86

1 $A\,(-2\,;3)$ et $B\,(-3\,;5)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\big(-3-(-2)\big)^2+(5-3)^2} \\ &= \sqrt{(-3+2)^2+2^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2+2^2} \\ &= \sqrt{1+4} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB=\sqrt{5}}$$

2 $A\,(3\,;2)$ et $B\,(8\,;1)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(8-3)^2+(1-2)^2} \\ &= \sqrt{5^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{25+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB=\sqrt{26}}$$

3 $A\,(-1\,;-3)$ et $B\,(-4\,;-6)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\big(-4-(-1)\big)^2+\big(-6-(-3)\big)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{9+9} \\ &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB=3\sqrt{2}}$$

4 $A\,(3\,;-2)$ et $B\,(-2\,;7)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2-3)^2+\big(7-(-2)\big)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2+9^2} \\ &= \sqrt{25+81} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB=\sqrt{106}}$$

mathweb.fr

5 $A(1\,;-2)$ et $B(7\,;-5)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(7-1)^2 + \big(-5-(-2)\big)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{36+9} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{9\times 5} \\ &= \sqrt{9}\times\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB = 3\sqrt{5}}$$

6 $A(1\,;4)$ et $B(-2\,;-1)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-4)^2} \\ &= \sqrt{9+25} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{34}}$$

Corrigé de l'exercice 4.3 page 87

1 $A(1\,;2)$ et $B(3\,;4)$.

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2. \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M(2\,;3)}$

2 $A(-1\,;2)$ et $B(-3\,;4)$.

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+(-3)}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2. \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M(-2\,;3)}$

3 $A(2\,;-1)$ et $B(4\,;-5)$.

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3. \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+(-5)}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M(3\,;-3)}$

4 $A(-1\,;-1)$ et $B(5\,;-7)$.

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2. \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+(-7)}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M(2\,;-4)}$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 4.4 page 87

1 A(1 ; 2) et M(3 ; 4).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 \times 3 - 1 = 5. \\ y_B = 2y_M - y_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \end{cases}$$

Donc $\boxed{\text{B}\,(5\,;6)}$

2 A(−1 ; 2) et M(−3 ; 4).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 \times (-3) - (-1) = -6 + 1 = -5. \\ y_B = 2y_M - y_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \end{cases}$$

Donc $\boxed{\text{B}\,(-5\,;6)}$

3 A(2 ; −1) et M(4 ; −5).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \\ y_B = 2y_M - y_A = 2 \times (-5) - (-1) = -10 + 1 = -9. \end{cases}$$

Donc $\boxed{\text{B}\,(6\,;-9)}$

4 A(−1 ; −1) et M(5 ; −7).

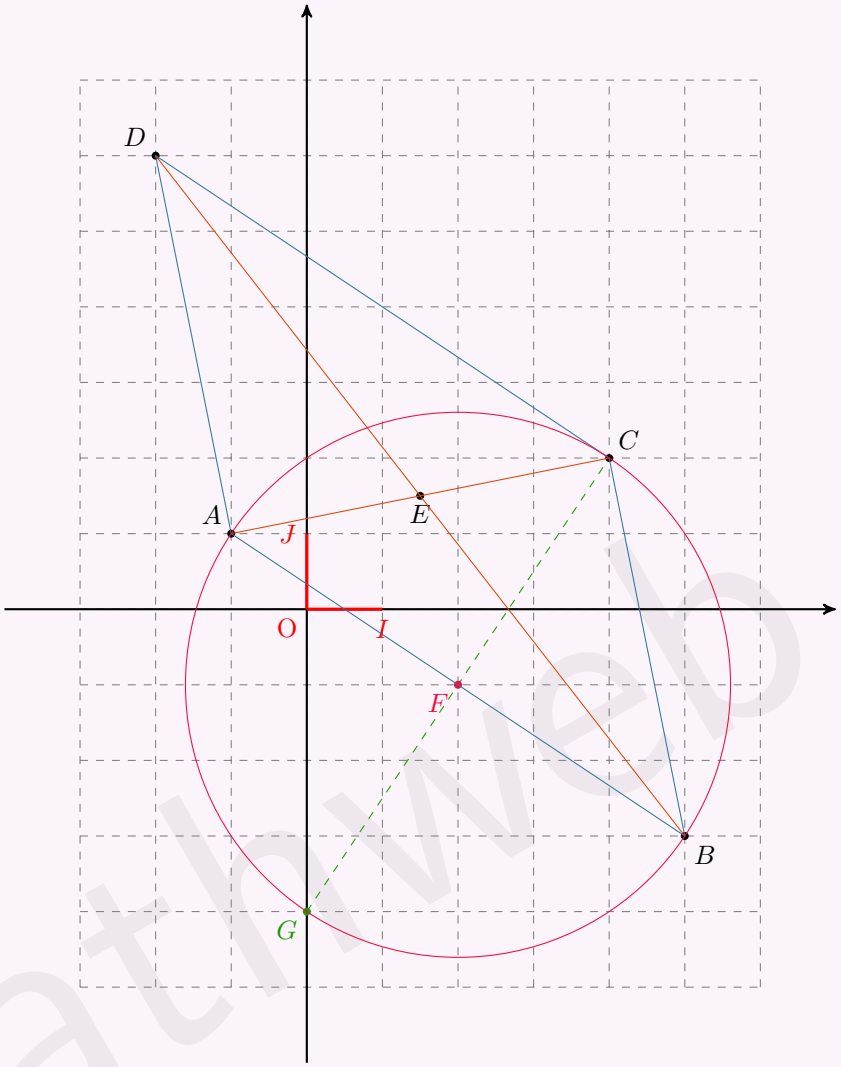
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 \times 5 - (-1) = 11. \\ y_B = 2y_M - y_A = 2 \times (-7) - (-1) = -13. \end{cases}$$

Donc $\boxed{\text{B}\,(11\,;-13)}$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 4.5 page 87

1 La figure complétée est la suivante :



2 Calculons la longueur des côtés du triangle ABC :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (5-(-1))^2 + (-3-1)^2 \\ &= 6^2 + (-4)^2 \\ &= 36 + 16 \\ AB^2 &= 52. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 \\ &= (4-(-1))^2 + (2-1)^2 \\ &= 5^2 + 1^2 \\ &= 25 + 1 \\ AC^2 &= 26. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_Bbig)^2 \\ &= (4-5)^2 + (2-(-3))^2 \\ &= 1^2 + 5^2 \\ &= 1 + 25 \\ BC^2 &= 26. \end{aligned}$$

On remarque ainsi que $AB^2 = AC^2 + BC^2$ et que $AC^2 = BC^2$ (donc que $AC = BC$).
Le triangle ABC est donc rectangle isocèle en C.

3 Le triangle ABC étant rectangle en C, le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse, à savoir $[AB]$.
Ainsi, $F\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, soit $F\left(\frac{-1+5}{2} ; \frac{1-3}{2}\right)$, et donc $F(2;-1)$.

4 E est le milieu de $[AC]$ donc $E\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$, soit $E\left(\frac{-1+4}{2} ; \frac{1+2}{2}\right)$, et donc $E\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

mathweb.fr

5 Si $ABCD$ est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, E (qui est le milieu de $[AC]$) est le milieu de $[BD]$. On en déduit alors les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_E = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$$

D'où, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} = \dfrac{5 + x_D}{2} \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{-3 + y_D}{2} \end{cases} \quad \text{ou encore :} \quad \begin{cases} 3 = 5 + x_D \\ 3 = -3 + y_D \end{cases}$$

On en déduit alors que $x_D = 3 - 5 = -2$ et $y_D = 3 + 3 = 6$.
Ainsi, $D\,(-2\,;6)$.

6 E et F sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.

Ainsi, d'après le théorème des milieux appliqué au triangle ABC, $EF = \dfrac{BC}{2}$, soit $\boxed{EF = \dfrac{\sqrt{26}}{2}}$.

7 G est le symétrique de C par rapport à F donc F est le milieu de $[CG]$. Ainsi :

$$\begin{cases} x_F = \dfrac{x_C + x_G}{2} \\ y_F = \dfrac{y_C + y_G}{2} \end{cases}$$

et donc :

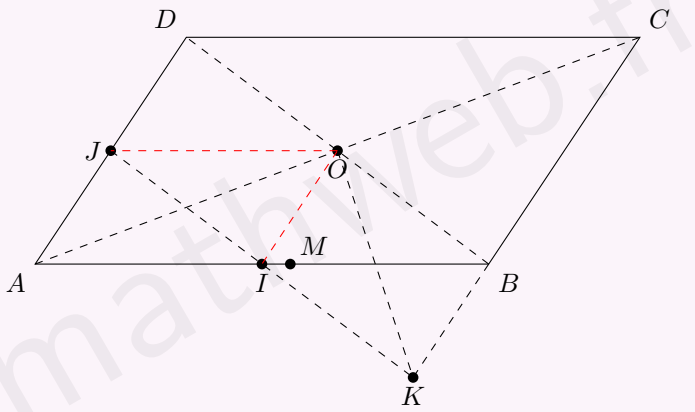
$$\begin{cases} 2 = \dfrac{4 + x_G}{2} \\ -1 = \dfrac{2 + y_G}{2} \end{cases}$$

ou encore, en multipliant par 2 de chaque côté du signe « = » :

$$\begin{cases} 4 = 4 + x_G \\ -2 = 2 + y_G \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $G\,(0\,;-4)$.

Corrigé de l'exercice 4.6 page 87



mathweb.fr

- $A\,(0\,;0)$ car A est l'origine du repère.
- $B\,(1\,;0)$ car B définit l'unité en abscisses.
- $D\,(0\,;1)$ car D définit l'unité en ordonnées.
- $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ car I est le milieu de $[AB]$.
- $J\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ car J est le milieu de $[AD]$.
- $C\,(1\,;1)$ car $(BC)\ //\ (AD)$ (donc l'abscisse de C vaut 1) et $(CD)\ //\ (AB)$ (donc l'ordonnée de C vaut 1).
- Dans le triangle ABC, O est le milieu de $[AC]$ et I celui de $[AB]$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (OI) est parallèle à (BC) ; l'abscisse de O est alors égale à $\dfrac{1}{2}$.

  De même, dans le triangle ABD, on montre que (OJ) et (AB) sont parallèles donc l'ordonnée de O est égale à $\dfrac{1}{2}$.

  Finalement, $O\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.
- I, J, K d'une part, A, I, B d'autre part sont alignés. De plus, (AJ) et (BK) sont parallèles (ce qui signifie que l'abscisse de K vaut 1), donc I est le milieu de $[JK]$ et $AJ = BK$, donc l'ordonnée de K vaut $-\dfrac{1}{2}$.

  Finalement, $K\left(1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.
- Dans le triangle ABD, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$ donc (IJ) et (BD) sont parallèles. Ainsi, $(IK)\ //\ (OB)$.
  De plus, $(OI)\ //\ (AD)$ et $(AD)\ //\ (BC)$ donc $(IO)\ //\ (BK)$.
  Donc $OIKB$ est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent donc en leur milieu ; donc M est le milieu de $[IB]$.
  D'où $M\left(\dfrac{3}{4}\,;0\right)$.

Corrigé de l'exercice 4.7 page 88

$$
\begin{aligned}
ABC \text{ rectangle en } A &\iff BC^2 = AB^2 + AC^2 \\
&\iff (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = \left[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right] \\
&\qquad\qquad + \left[(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2\right] \\
&\iff (3-1)^2 + (y+2)^2 = \left[(1+3)^2 + (-2-5)^2\right] + \left[(3+3)^2 + (y-5)^2\right] \\
&\iff 4 + \cancel{y^2} + 4y + 4 = 16 + 49 + 36 + \cancel{y^2} - 10y + 25 \\
&\iff 4y + 10y = 16 + 49 + 36 + 25 - 4 - 4 \\
&\iff 14y = 118 \\
&\iff \boxed{y = \frac{118}{14} = \frac{59}{7}}
\end{aligned}
$$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 4.8 page 88

Un algorithme possible est le suivant :

```
Entrées:
  Coordonnées de A : x_A et y_A
  Coordonnées de B : x_B et y_B
Traitement:
  d ← √((x_B − x_A)² + (y_B − y_A)²)
  x ← (x_A + x_B)/2
  y ← (y_A + y_B)/2
Sortie:
  Afficher : "AB = ", d
  Afficher : "Les coordonnées du milieu de [AB] sont : ", x , y
```

En Python, cela donne les deux fonctions suivantes :

Code Python 4-9

```
1  def milieu(A,B):
2      # A[0] est l'abscisse de A, A[1] est son ordonnée
3      # B[0] est l'abscisse de B, B[1] est son ordonnée
4      return (A[0]+B[0])/2 , (A[1]+B[1])/2
5
6  def distance(A,B):
7      return ( (B[0]-A[0])**2 + (B[1]-A[1])**2 )**0.5
8      # (...)**0.5 correspond à prendre la racine carrée
```

Corrigé de l'exercice 4.9 page 88

1 $A(-3\,;5)$ et $M(x\,;y)$ donc :

$$MA^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = (-3-x)^2 + (5-y)^2.$$

Or, $MA = 3$ (d'après l'énoncé) donc $MA^2 = 3^2 = 9$ d'où :

$$(-3-x)^2 + (5-y)^2 = 9$$

soit, en développant : $9 + 6x + x^2 + 25 - 10y + y^2 = 9$

ou encore : $\underline{x^2 + y^2 = 10y - 6x - 25.}$ (1)

$B(5\,;2)$ donc, de façon analogue à ce qui vient d'être fait :

$$(5-x)^2 + (2-y)^2 = 6^2 = 36$$

soit : $25 - 10x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 36$

ou encore : $\underline{x^2 + y^2 = 4y + 10x + 7}$ (2)

Des égalités (1) et (2), on déduit :

$$10y - 6x - 25 = 4y + 10x + 7$$

et donc :

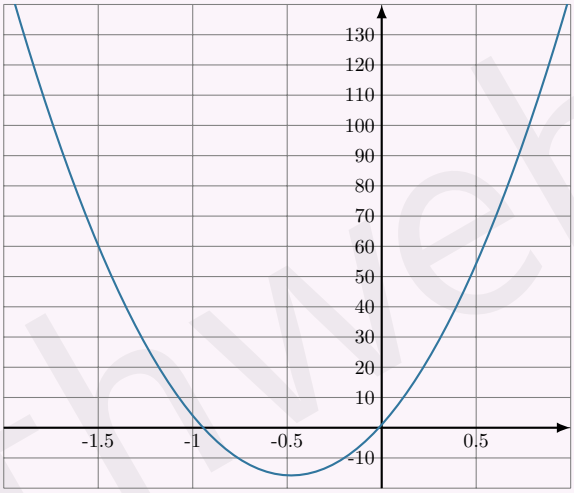
$$6y = 16x + 32 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}}$$

mathweb.fr

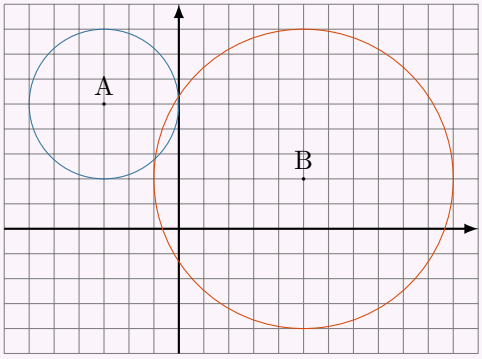
2 À l'aide de l'égalité (2), en remplaçant y par $\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& x^2 + \left(\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}\right)^2 = 4\left(\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}\right) + 10x + 7 \\
\iff\ & x^2 + \frac{64}{9}x^2 + 2 \times \frac{8}{3}x \times \frac{16}{3} + \frac{16^2}{3^2} = \frac{32}{3}x + \frac{64}{3} + 10x + 7 \\
\iff\ & \frac{9}{9}x^2 + \frac{64}{9}x^2 + \frac{256}{9}x + \frac{256}{9} = \frac{96}{9}x + \frac{192}{9} + \frac{90}{9}x + \frac{63}{9} \\
\iff\ & 73x^2 + 256x + 256 = 186x + 255 \\
\iff\ & 73x^2 + 70x + 1 = 0.
\end{aligned}$$

3 Sur la calculatrice, on obtient :



Ici, le repère n'est pas orthonormé, mais orthogonal, pour faciliter l'affichage.
On peut alors conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions car la courbe représentative de f coupe en deux points l'axe des abscisses.
Il semble donc y avoir deux points possibles à notre problème.
Cela semble cohérent : ces deux points sont les intersections des cercles de centres A et B et de rayons respectifs 3 et 6.



mathweb.fr

5 Vecteurs

Dans ce chapitre

1 Introduction 98
1 Définition 98
2 Vocabulaire 99
2 Opérations sur les vecteurs 99
1 Somme de deux vecteurs 99
2 Vecteur opposé 100
3 Produit d'un vecteur par un réel 101
4 Barycentres 102
3 Dans un repère 104
1 Introduction 104
2 Coordonnées d'un vecteur 105
3 Vecteurs colinéaires 106
4 Coordonnées d'un barycentre 107
Prendre un bon départ 108
Exercices 110
Géométrie vectorielle 110
Géométrie repérée 113
Barycentres 117
Corrigés des exercices 118

1 Introduction

1 Définition

Définition 22

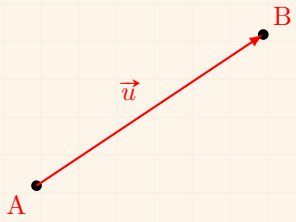
Un **vecteur** est la représentation graphique (à l'aide d'une flèche) d'un déplacement par translation.
Un vecteur est donc défini par :

- une direction (l'inclinaison de la flèche) ;
- un sens (vers la droite, vers la gauche, vers le haut, vers le bas) ;
- une norme (la longueur de la flèche).

Il est noté par une lettre surmontée d'une flèche (toujours de la gauche vers la droite dans la notation).

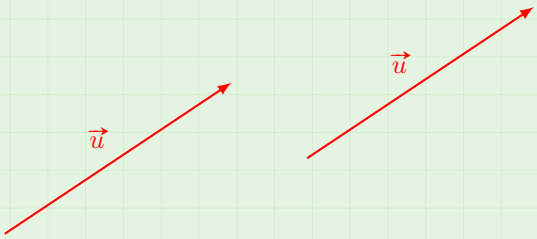
Exemple 28

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ représente la translation qui transforme A en B.



Remarque 32

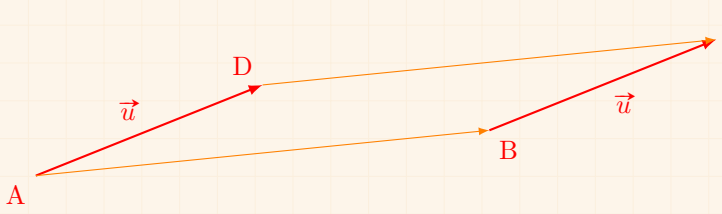
Un même vecteur peut être représenté par plusieurs flèches identiques :



Propriété 17 (règle du parallélogramme)

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Exemple 29



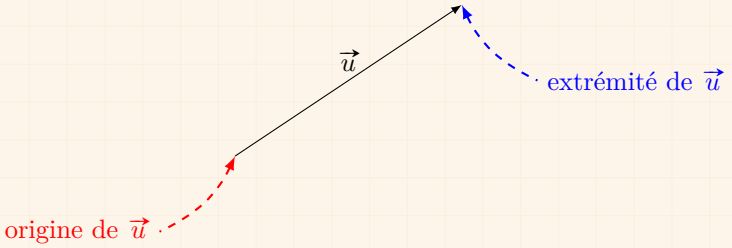
$ABCD$ est un parallélogramme.

2 Vocabulaire

Définition 23

L'**origine** d'un vecteur est le point à partir duquel la flèche part.
L'**extrémité** d'un vecteur est le point où la flèche arrive.

Exemple 30



Remarque 33

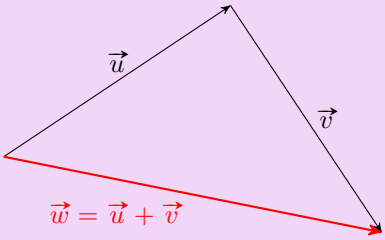
Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, « A » (la première lettre) représente toujours l'origine et « B » (la seconde lettre) désigne toujours l'extrémité.

2 Opérations sur les vecteurs

1 Somme de deux vecteurs

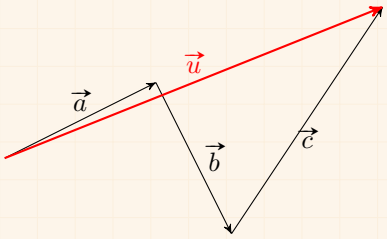
Définition 24

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On définit le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de la façon suivante :



- on met « bout-à-bout » les vecteurs ;
- l'origine du vecteur somme est celle du 1er vecteur ;
- l'extrémité du vecteur somme est celle du dernier vecteur.

Exemple 31 (somme de 3 vecteurs)



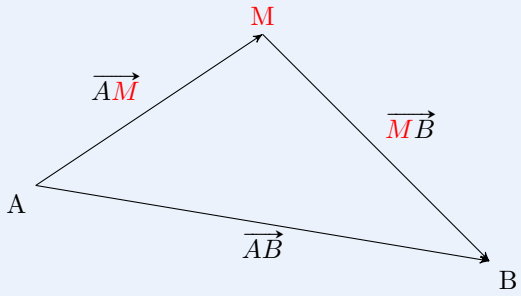
$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Propriété 18 (relation de Chasles)

Soient A, B et M trois points quelconques.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}.$$

Cette relation signifie que pour aller d'un point (A) à un autre (B), on peut partir du premier (A), puis passer par un autre (M) avant d'arriver au point final (B).



2 Vecteur opposé

Définition 25

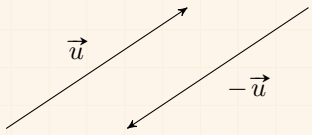
Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque.
On définit le vecteur $-\vec{u}$ comme étant le vecteur ayant :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le sens contraire de $\vec{u}$;
- la même norme que $\vec{u}$.

Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Exemple 32



Définition 26 (vecteur nul)

On définit le **vecteur nul** comme étant le vecteur de norme nulle. On le note $\vec{0}$.
Si un vecteur représente un déplacement, le vecteur nul représente, quant à lui, la stabilité : le « non déplacement ».

Remarque 34

Quel que soit le vecteur $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

3 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 27

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque et k un nombre réel non nul.

- Si $k > 0$, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ comme étant le vecteur somme :

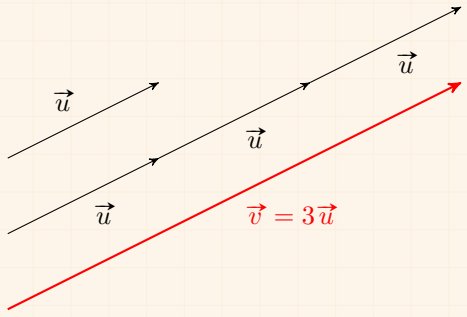
$$\vec{v} = \underbrace{\vec{u} + \vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{k \text{ fois}}.$$

- Si $k < 0$, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ comme étant le vecteur somme :

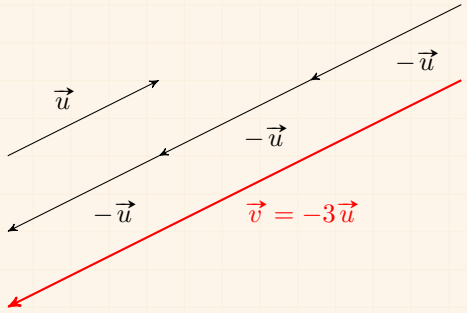
$$\vec{v} = \underbrace{(-\vec{u}) + (-\vec{u}) + \cdots + (-\vec{u})}_{|\,k\,| \text{ fois}}.$$

Exemple 33

1 $k > 0$:



2 $k < 0$:



Définition 28

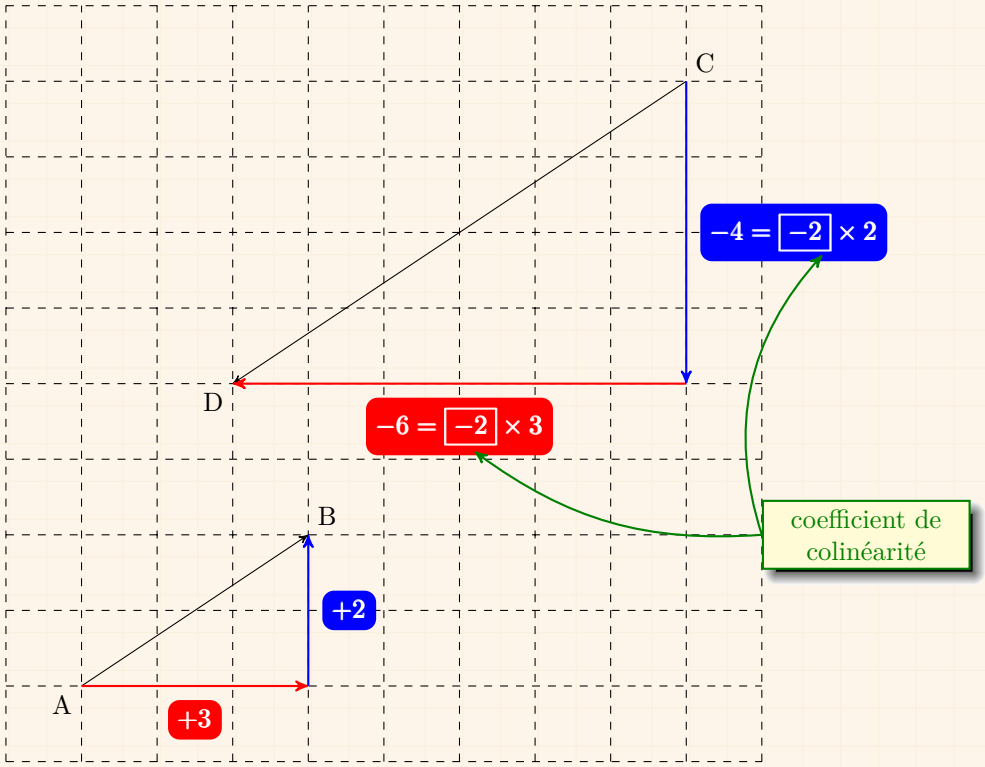
Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.
On peut écrire cette définition de la façon suivante :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \exists\ k \in \mathbb{R}^*,\ \vec{u} = k\vec{v}.$$

Attention 5

On ne dit pas que deux vecteurs sont parallèles.
Le terme « parallèle » est uniquement utilisé pour des droites ou des segments, voire éventuellement des courbes, mais pas pour des vecteurs.
Si deux vecteurs sont colinéaires, on pourra dire que leur *support* (les droites qui les supportent) sont parallèles.

Exemple 34



À l'aide du quadrillage, on peut remarquer ici que $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 19 (alignement de trois points)

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.

4 Barycentres

Définition 29 (barycentre de 2 points)

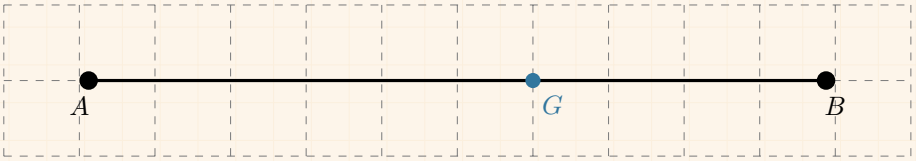
Soient A et B deux points du plan, et soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

G est appelé le **barycentre** du système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$. On note : $G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

Exemple 35



$$\overrightarrow{GA} = -\frac{6}{10}\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GB} = \frac{4}{10}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \iff 2\overrightarrow{GA} = -\frac{6}{5}\overrightarrow{AB} \text{ et } 3\overrightarrow{GB} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$$
$$\iff 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ainsi, $G = \text{bar}\{(A,2);(B,3)\}$.

Propriété 20 (réduction)

Soit $G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$, $\alpha+\beta \neq 0$. Alors, quel que soit le point M du plan, on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}.$$

Démonstration 8

Pour démontrer cette propriété, on utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\iff \alpha\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}\right) = \vec{0} \\ &\iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GM} + \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ &\iff \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = -(\alpha+\beta)\overrightarrow{GM} \\ &\iff \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

Définition 30 (isobarycentre de deux points)

Si $G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\alpha)\}$, avec $\alpha \neq 0$, on dit que G est l'**isobarycentre** du système.
Dans ce cas, G est le milieu de $[AB]$.

Définition 31 (barycentre et isobarycentre de 3 points)

Soient A, B et C trois points du plan, et soient α, β et γ trois nombres réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

G est appelé le **barycentre** du système $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$. On note : $G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.

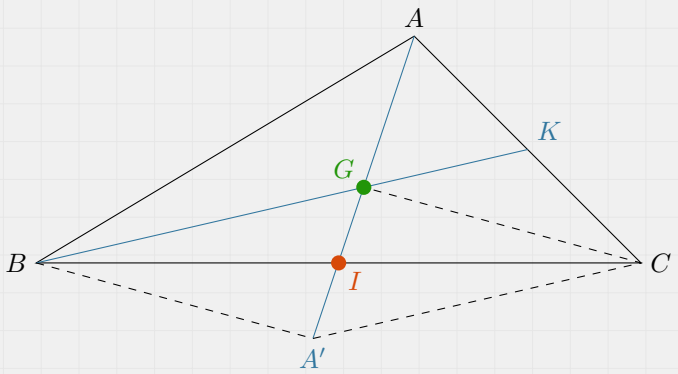
Si $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, on dit que G est l'**isobarycentre** du système.

Propriété 21 (centre de gravité d'un triangle)

Le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre du système formé par les sommets du triangle.

Démonstration 9

Considérons un triangle quelconque ABC. Notons I le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[AC]$, L le milieu de $[AB]$, G le point d'intersection des médianes (le centre de gravité du triangle ABC) et A' le symétrique de A par rapport à G.



Dans le triangle ACA', K et G sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AA']$ donc, d'après l'a réciproque du théorème de Thalès, (GK) // (CA'), donc (BG) // (CA').
De même, (GC) // (BA'). Donc $BGCA'$ est un parallélogramme.

Alors, $[BC]$ et $[GA']$ se coupent en leur milieu.
On a alors :

$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \text{ car } \overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{AG}.$$

On en déduit alors que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \qquad \text{ou encore } \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GI}. \tag{1}$$

Or,

$$\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \iff \overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right). \tag{2}$$

Des égalités (1) et (2), on déduit :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \iff \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Ainsi, G est bien l'isobarycentre du système $\{A; B; C\}$.

3 Dans un repère

1 Introduction

Définition 32

- On considère un repère $(O; I, J)$.
  On appelle **vecteurs unitaires** de ce repère les vecteurs :

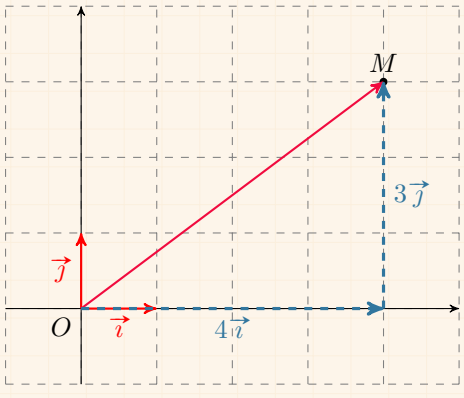
  $$\vec{\imath} = \overrightarrow{OI} \qquad \text{et} \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}.$$

  Le repère est alors noté : $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.
- On considère un point $M\,(x\,;y)$ dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.
  Alors,

  $$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Exemple 36

On considère le point $M\,(4\,;3)$:



Remarque 35

Le repère utilisé dans l'exemple est orthonormé (axes perpendiculaires – *orthos* – et mêmes unités sur les axes – *normé*), mais le résultat est valable quel que soit le repère utilisé.

2 Coordonnées d'un vecteur

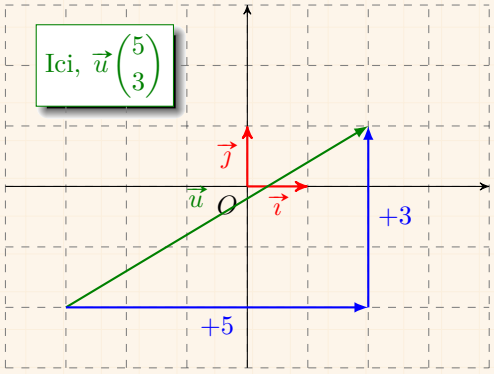
Définition 33

On considère un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont notées ainsi :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

où x représente la dénivellation relative en abscisses et y celle en ordonnées pour passer de A à B.

Exemple 37



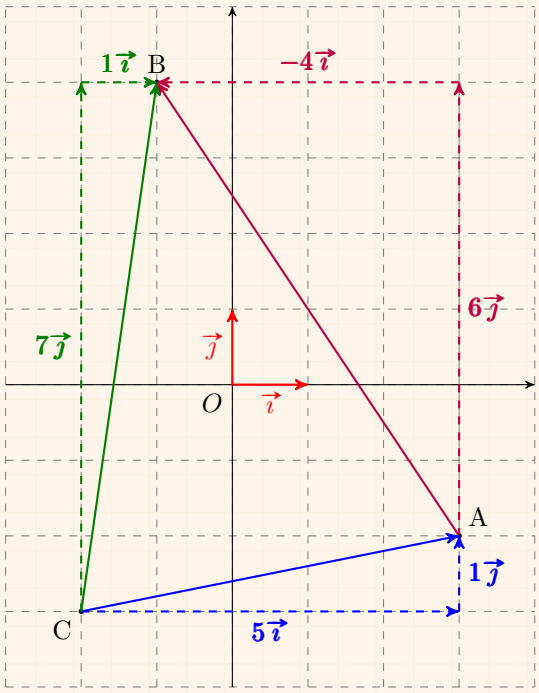
Propriété 22

En posant $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}.$$

Exemple 38

On considère les points $A(3\,;-2)$, $B(-1\,;4)$ et $C(-2\,;-3)$ dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.



- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-3\\4-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3-(-2)\\-2-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\4-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

Propriété 23

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

- Le vecteur-somme $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}.$$

- Soit $k\in\mathbb{R}^*$. Alors, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées :

$$k\vec{u}\begin{pmatrix}k\times x\\k\times y\end{pmatrix}.$$

Exemple 39

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

- $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{w}\begin{pmatrix}-1+3\\2+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
- $-3\vec{u}\begin{pmatrix}-3\times(-1)\\-3\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.

3 Vecteurs colinéaires

Définition 34

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
On appelle *déterminant* le nombre :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'.$$

Propriété 24

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v})=0$.

Exemple 40

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.
On a d'une part :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}\sqrt{2}-1 & 1\\1 & \sqrt{2}+1\end{vmatrix}=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)-1=(2-1)-1=0.$$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration 10

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan rapportés à un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  Alors, il existe un réel non nul k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$, et donc :
  $$\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$$
  Ainsi,
  $$xy'=x\times ky=k(xy) \qquad \text{et} \qquad x'y=kx\times y=k(xy).$$
  Donc $xy'=x'y$, soit $xy'-x'y=0$, ou encore $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$.
- Supposons maintenant que $xy'=x'y$, c'est-à-dire que $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$.
  Alors,
  - → si x' et y' sont tous deux différents de 0,
    $$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}.$$
    Notons $\lambda=\dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}$. On a donc :
    $$x=\lambda x' \qquad \text{et} \qquad y=\lambda y'.$$
    Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x'\\\lambda y'\end{pmatrix}$, soit $\vec{u}=\lambda\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires ;
  - → si $x'=0$ et $y'\neq 0$ alors :
    $$xy'=x'y \iff xy'=0 \iff x=0 \text{ ou } y'=0 \text{ (ce qui est impossible par hypothèse).}$$
    Donc $x=0$ et on a donc $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires car il existe toujours un réel k tel que $y'=ky$.
  - → si $x'\neq 0$ et $y'=0$ alors, avec un raisonnement analogue, on obtient que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, les deux vecteurs sont colinéaires ;
  - → si $x'=y'=0$ alors x et y peuvent être quelconques, l'égalité $xy'=x'y$ est toujours vraie. Dans ce cas, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est le vecteur nul, et il est alors colinéaire à $\vec{u}$ car le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

4 Coordonnées d'un barycentre

Propriété 25

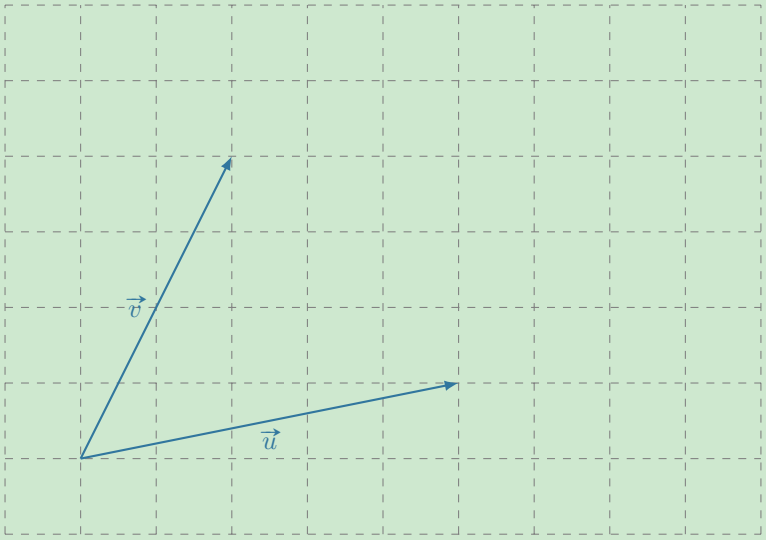
Soient $A\,(x_A\,;y_A)$, $B\,(x_B\,;y_B)$ et $C\,(x_C\,;y_C)$ trois points du plan rapporté à un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Alors :

$$G=\text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\} \iff \begin{cases}x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\\[2mm] y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\end{cases}$$

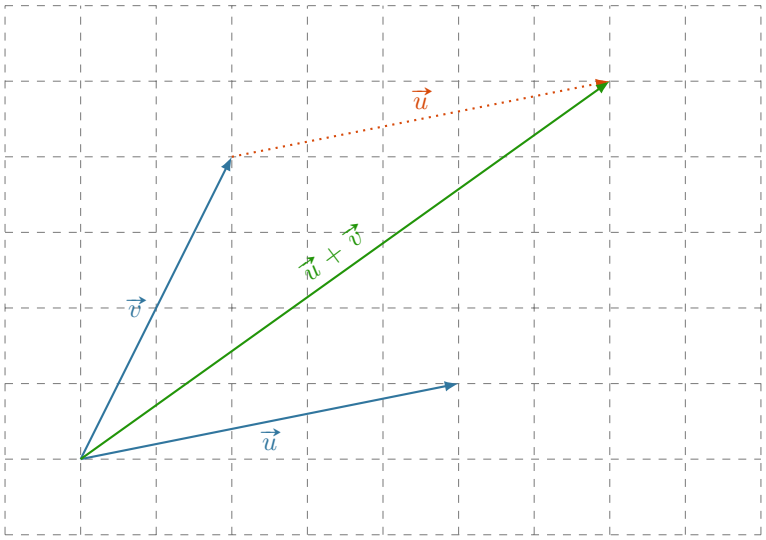
$$G=\text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \iff \begin{cases}x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\\[2mm] y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\end{cases}$$

5 Prendre un bon départ

Exercice type 13 ▶ Somme de deux vecteurs



Construire sur la grille ci-contre le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



On commence par construire le vecteur $\vec{u}$ à partir de l'extrémité du vecteur $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ part de l'origine de $\vec{v}$ et arrive à l'extrémité du vecteur $\vec{u}$ que l'on vient de construire.

Exercice type 14 ▶ Utiliser la relation de Chasles

À l'aide de la relation de Chasles, simplifier le vecteur :

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \text{ (on intervertit les deux premiers vecteurs)} \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \text{ (on utilise la relation de Chasles sur les deux premiers vecteurs)} \\ &= \overrightarrow{BD} \text{ (on utilise la relation de Chasles sur les deux vecteurs).}\end{aligned}$$

Exercice type 15 ▶ Colinéarité et combinaison linéaire

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Soient alors les vecteurs $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$ et $\vec{t} = -\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$.

Exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{t}$.

On regarde les coefficients de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'expression de $\vec{w}$ (respectivement -3 et 2) et dans celle de $\vec{t}$ (-1 et $\frac{2}{3}$).
On constate qu'en multipliant par 3 les deux derniers, on obtient les premiers : $3 \times (-1) = -3$ et $3 \times \frac{2}{3} = 2$.
Par conséquent, $\vec{w} = 3\vec{t}$.

Exercice type 16 ▶ Coordonnées et norme d'un vecteur

Dans un repère, on considère les points $A(-2\,;5)$ et $B(7\,;-1)$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis calculer sa norme.

On utilise la formule du cours :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7-(-2) \\ -1-5 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Sa norme est alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9^2 + (-6)^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117}.$$

Exercice type 17 ▶ Colinéarité et déterminant

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Calculer leur déterminant et montrer qu'ils sont colinéaires.

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -10 & 2,5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -10 \times (-2) - 8 \times 2,5 = 20 - 20 = 0.$$

Le déterminant étant nul, les vecteurs sont colinéaires.

Exercice type 18 ▶ Barycentre

Soient A et B deux points du plan. On considère alors le point G tels que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
Trouver α et β tels que $G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} &\iff \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) \\
&\iff \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} \\
&\iff \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0} \\
&\iff -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0} \\
&\iff \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \\
&\iff G = \text{bar}\{(A,1);(B,2)\}.
\end{aligned}$$

5 Exercices

Géométrie vectorielle

Exercice 5.1 (placement de points)

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que (CE) et (FB) sont parallèles.

Solution page 118

Exercice 5.2 (placement et alignement de points)

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Placer les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$$

2. Placer les points G et H tels que $BAEG$ et $BAFH$ soient des parallélogrammes.
3. Démontrer que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$.
4. En déduire que les points C, G et H sont alignés.

Solution page 118

Exercice 5.3 (relation de Chasles)

Simplifier au maximum les écritures suivantes :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
2. $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
3. $\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

Solution page 119

Exercice 5.4 (exprimer un vecteur en fonction d'un autre)

Soient A et B deux points tels que $AB = 5$ cm.
Soit M le point défini par :

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}\ .$$

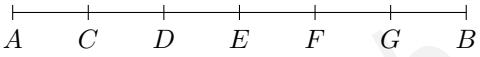
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M.

Solution page 119

mathweb.fr

Exercice 5.5 (égalités de vecteurs)

Le segment suivant est partagé en 6 parties de même longueur.



Compléter les relations suivantes :

1. $\overrightarrow{E\ldots} = -2\overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots G} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\ldots}$
4. $\overrightarrow{CE} = \ldots\overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{AD} = \ldots\overrightarrow{BF}$
6. $\overrightarrow{DE} = \ldots\overrightarrow{BF}$

Solution page 119

Exercice 5.6 (construction de points, égalité vectorielle)

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I.

1. Construire le point M tel que :
$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$$
et le point N tel que :
$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}.$$
2. Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire ?
3. Justifier que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.
En déduire la nature de $ABNI$.

Solution page 119

Exercice 5.7 (alignement de points)

ABC est un triangle quelconque. Soient D, E et F les points tels que :

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB} \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BA}$$

Démontrer que D, E et F sont alignés.

Solution page 120

Exercice 5.8 (alignement de points)

On considère un parallélogramme $ABCD$ puis les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

On souhaite démontrer que les points F, C et E sont alignés.

1. Exprimer $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Conclure.

Solution page 120

mathweb.fr

Exercice 5.9 (milieu)

Soit ABC un triangle quelconque.
On définit le point D par l'égalité : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.
Montrer que D est le milieu de $[BC]$ après avoir construit le point D.

Solution page 121

Exercice 5.10 (alignement de points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On définit les points E et F par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Montrer que A, E et F sont alignés.

Solution page 122

Exercice 5.11 (équations vectorielles)

On considère deux points quelconques A et B du plan.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
2. Construire le point N tel que $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.
3. Construire le point P tel que $-3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} = \vec{0}$.
4. Construire le point R tel que $2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} = \vec{0}$.
5. Construire le point S tel que $3\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$.
6. Construire le point T tel que $5\overrightarrow{TA} - 2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$.

Solution page 122

Exercice 5.12 (égalités vectorielles définissant des points)

On considère un triangle ABC. On définit les points D, E et F par les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BA} \quad ; \quad 3\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{AB} \quad ; \quad 3\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FB}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que $ADFE$ est un parallélogramme.

Solution page 124

Exercice 5.13 (construction de points)

On considère un triangle ABC. On définit les points D, E et F par les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF}.$$

1. Construire une figure avec les points A, B, C, D, E et F.
2. Montrer que $ABCF$ est un parallélogramme.

Solution page 125

mathweb.fr

Exercice 5.14 (droites parallèles)

Soit ABC un triangle. On définit les points M et N par les égalités :

$$4\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \quad ; \quad 9\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

Montrer que (MN) est parallèle à (BC).

Solution page 125

Géométrie repérée

Exercice 5.15 (vecteurs colinéaires)

Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
Pour chaque question, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1 $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

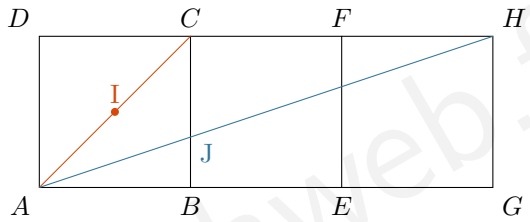
2 $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$.

3 $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\5\end{pmatrix}$.

4 $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

Solution page 126

Exercice 5.16 (alignement de points)



$ABCD$, $CEFD$ et $EGHF$ sont trois carrés de même côtés.
I est le milieu de $[AC]$ et J est le point d'intersection de (BC) et (AH).

En considérant le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AD}\right)$, montrer que E, J et I sont alignés.

Solution page 126

Exercice 5.17 (alignement de points et nature d'un triangle)

On considère les points $A\,(2\,;-1)$, $B\,(1\,;1)$, $C\left(-\frac{1}{2}\,;2\right)$ et $D\,(3\,;0)$ dans un repère orthonormé.

1 Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2 Quelle est la nature du triangle ABD ?

Solution page 126

Exercice 5.18 (trouver des coordonnées)

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère les points $A\,(-2\,;-3)$, $B\,(4\,;-1)$ et $C\,(-7\,;2)$.

1 **a.** Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
b. En déduire les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

2 Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AD]$.

Solution page 127

Exercice 5.19 (à la recherche d'un nombre)

On considère le repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$dans lequel on place les points $A\,(-2\,;-1)$, $B\,(1\,;2)$ et $C\,(5\,;-2)$.

1. Quelles sont les coordonnées du milieu I de $[AC]$?
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. On considère un point $M\,(5\,;y)$, où $y \in \mathbb{R}$.
   Déterminer la valeur de y telle que A, B et M soient alignés.

Solution page 127

Exercice 5.20 (alignement de points avec un triangle isocèle)

On considère un triangle ABC isocèle en B.
Soient D et E deux points définis par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

On souhaite montrer que les points B, E et D sont alignés. Pour cela, on se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$.

1. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$?
2. Quelles sont les coordonnées des points D et E ?
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$.
4. Conclure.

Solution page 128

Exercice 5.21 (alignement de points)

Soit ABC un triangle. On considère alors les points E, F et H tels que :

$$\overrightarrow{EC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{CH} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{BC}.$$

1. Faire une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire que les points E, F et H sont alignés (on pourra se placer dans le repère $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$).

Solution page 129

Exercice 5.22 (parallélisme de deux droites)

$ABCD$ est un parallélogramme. Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$. On définit alors H par l'égalité $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et K par l'égalité $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En se plaçant dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)$, montrer que les droites (HI) et (KJ) ne sont pas parallèles.

Solution page 130

mathweb.fr

Exercice 5.23 (milieu, centre de gravité, points alignés)

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère les points $A\,(1\,;2)$, $B\,(3\,;-4)$ et $C\,(5\,;0)$.

1 Calculer les coordonnées du point I, milieu de $[AB]$.

2 Montrer que C appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

3 Quelle est la nature du triangle ABC ?

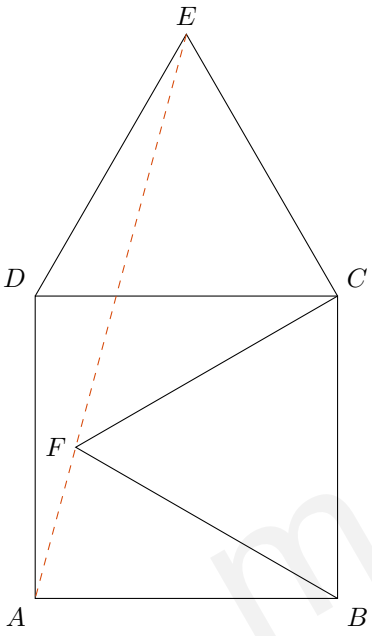
4 On considère le point $D\,(-4\,;-3)$.
Montrer que D, I et C sont alignés.

5 Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle BAD.
Aide : on admet que $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_D}{3}$ et $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_D}{3}$.

6 On considère le point M définit par : $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.
Montrer que D, G, I, M et C sont alignés.
Aide : on admet que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Solution page 130

Exercice 5.24 (triangles équilatéraux et points alignés)



Soit $ABCD$ un carré. Les triangles DEC et BCF sont équilatéraux.
La figure est reportée dans repère $(A\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ où $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$.

1 Déterminer les coordonnées des points E et F.

2 Montrer que E, F et A sont alignés.

Solution page 131

Exercice 5.25 (prendre des initiatives)

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1 Placer le point E tel que $\overrightarrow{EB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

2 Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

3 Démontrer que les points C, E et F sont alignés.

Solution page 132

mathweb.fr

Exercice 5.26 (équations vectorielles)

Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ orthonormé. On pose :

$$A\,(-3\,;2) \qquad , \qquad B\,(5\,;4) \qquad , \qquad C\,(1\,;7)\,.$$

1. Trouver les coordonnées du point M tel que $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.
2. Trouver les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.
3. Le point P tel que $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ existe-t-il ?

Solution page 133

Exercice 5.27 (récapitulatif analytique)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
On considère les points $A\,(-3\,;-2)$, $B\,(3\,;-1)$ et $C\,(6\,;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. La formule suivante nous dit comment calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$:

$$\mathcal{A}_{ABCD}=\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right).$$

   Calculer cette aire.
3. En déduire la hauteur du parallélogramme $ABCD$ issue du sommet D.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AC) et (BD).
5. On considère le point $E\left(-6\,;-\dfrac{5}{2}\right)$. Les points E, A et B sont-ils alignés ?

Solution page 135

Exercice 5.28 (récapitulatif ultime)

On considère trois points quelconques du plan A, B et C.
On définit alors les points E, F et G tels que :

- $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BG}+k\overrightarrow{AC}$ où k est un nombre réel.

1. Déterminer la valeur de k telle que les points A, E et F soient alignés.
2. Construire alors la figure.
3. Exprimer $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   Les points C, F et G sont-il alignés ?
4. Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right)$, déterminer les coordonnées du point M tel que :

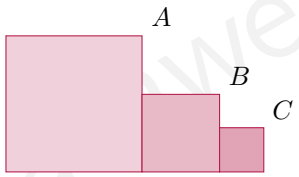
$$\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{ME}=\vec{0}.$$

Solution page 137

mathweb.fr

Exercice 5.29 (Exercice de recherche)

La figure ci-dessous représente trois carrés. Celui de gauche a un côté de mesure 1. Le carré du milieu est une réduction de facteur k du carré de gauche. Le carré de droite est une réduction de facteur k du carré du milieu. Les points A, B et C sont-ils toujours alignés, quelle que soit la valeur de k ?



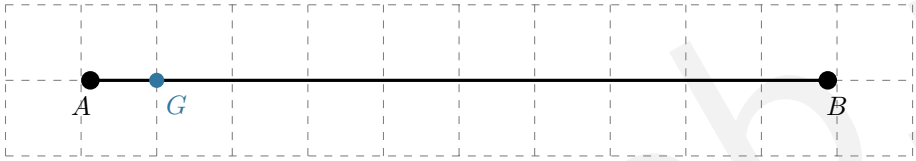
Solution page 138

Barycentres

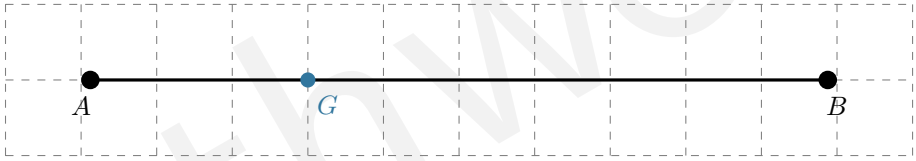
Exercice 5.30 (Trouver les pondérations par lecture graphique)

Dans chacun des cas suivants, trouver les plus petites valeurs de α et β de sorte que G soit le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

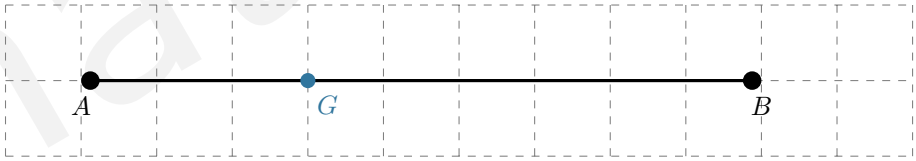
1



2



3



Solution page 139

Exercice 5.31 (Trouver les pondérations de manière vectorielle)

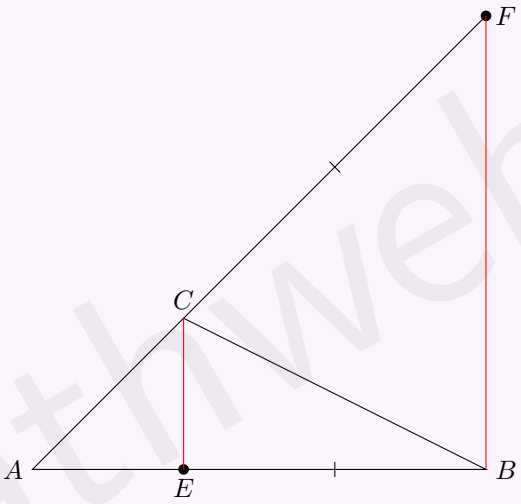
Soient A et B deux points du plan et $G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.
Trouver les valeurs minimales de α et β dans chacun des cas suivants.

1 $\overrightarrow{BG} = \dfrac{-1}{5}\overrightarrow{AB}$ **2** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ **3** $\overrightarrow{BG} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

Solution page 139

5 Corrigés

Corrigé de l'exercice 5.1 page 110

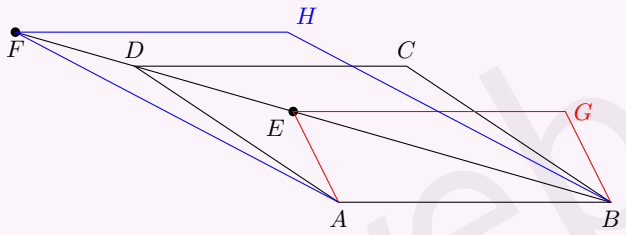


On sait que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ par construction. Ainsi, $\frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (CE) et (BF) sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 5.2 page 110

1 On a la figure suivante :



2 On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FH}$ car $ABCD$ et $BAFH$ sont des parallélogrammes.
Donc $CDFH$ est un parallélogramme.
Ainsi, $\underline{\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CH}}$.

De même, $BAEG$ et $ABCD$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DC}$, ce qui implique que $GEDC$ est un parallélogramme.
Donc $\underline{\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG}}$.

3 On sait que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG}$ (d'après la question précédente).
Donc, $\frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CG}$.
De même, $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CH}$. Donc $-\frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CH}$.
Ainsi, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun donc $\underline{C, H \text{ et } G \text{ sont alignés.}}$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 5.3 page 110

1
$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AA}$
$\underline{\vec{u} = \vec{0}}$

2
$\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
$\vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}$
$\vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE}$
$\vec{v} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE}$
$\underline{\vec{v} = \overrightarrow{DE}}$

3
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}$
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}$
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$
$\underline{\vec{w} = 2\overrightarrow{BA}}$

Corrigé de l'exercice 5.4 page 110

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$



Corrigé de l'exercice 5.5 page 111

1 $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EF}$.

2 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$.

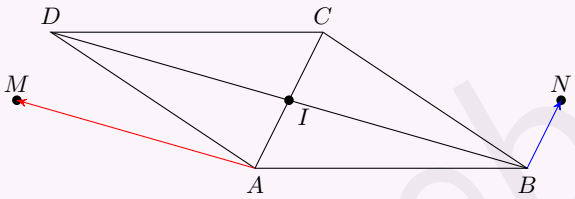
3 $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$.

4 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5 $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BF}$.

6 $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

Corrigé de l'exercice 5.6 page 111



1 $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$.
Or, $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IA}$.
Donc, $\underline{\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}}$.

On en déduit alors que I est le milieu de $[MN]$.

2 On sait que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ (par construction) et que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BN}$ (d'après la relation de Chasles).
Ainsi, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ et donc $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$.

I étant le milieu de $[AC]$, $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.

Ainsi, $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BN}$ donc $\underline{ABNI \text{ est un parallélogramme}}$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 5.7 page 111

D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} \\
2\overrightarrow{EF} &= 3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

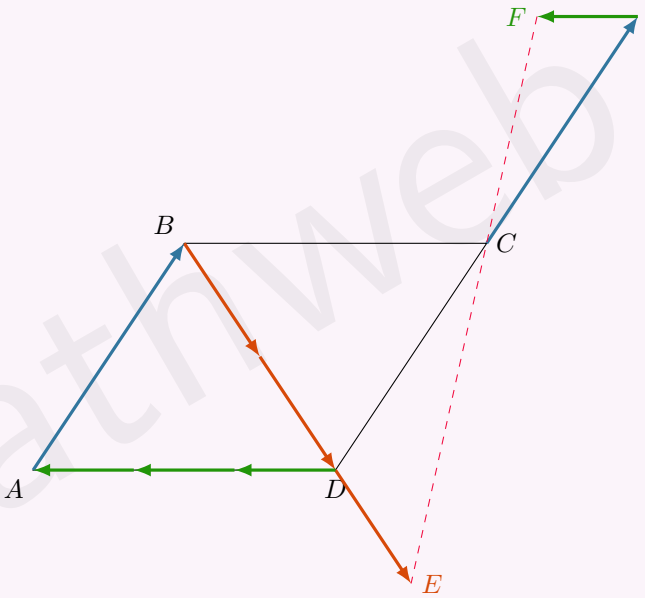
D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} \\
&= 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA} \\
&= 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + 2\overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{2}{3}\left(3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \frac{2}{3} \times 2\overrightarrow{EF} \\
\boxed{\overrightarrow{DF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont donc colinéaires. Ils ont un point en commun, donc D, E et F sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.8 page 111

1 Faisons une figure :



mathweb.fr

2 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}$ car $ABCD$ est un parallélogramme

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$ d'après l'énoncé

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ d'après la relation de Chasles

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$ car $ABCD$ est un parallélogramme

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\overrightarrow{CE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$$

3 On sait désormais que :

$$\overrightarrow{CE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Or,

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

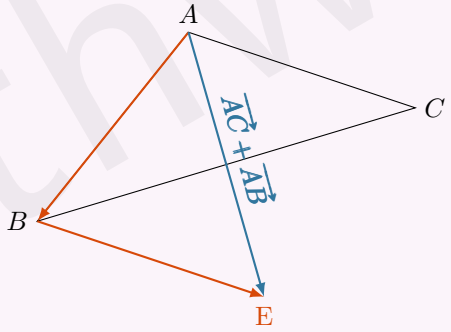
donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun (le point C) donc C, E et F sont alignés

Corrigé de l'exercice 5.9 page 112

Le point D étant défini par une égalité vectorielle où il apparaît deux fois, il est conseillé d'utiliser la relation de Chasles afin de simplifier cette dernière de sorte à ce que le point D n'apparaisse qu'une seule fois. On peut donc, par exemple, écrire $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ (ici, j'ai décomposé en utilisant le point A car il apparaît dans l'autre vecteur qui s'écrit avec le point D).
On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \\
&\iff 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} \\
&\iff 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\
&\iff \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}).
\end{aligned}$$

On a alors :



$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ est le « vecteur diagonal » du parallélogramme $ABEC$. Les diagonales d'un parallélogrammes se coupent en leur milieu, et D est défini comme le milieu du vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$; donc D est le milieu de [BC].

mathweb.fr

On aurait pu aussi raisonner de façon purement vectorielle en continuant la suite des équivalences :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\\
&\iff \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)\\
&\iff \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\
&\iff \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{BC}\right)\\
&\iff \cancel{\overrightarrow{AB}}+\overrightarrow{BD}=\cancel{\overrightarrow{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\
&\iff \boxed{\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre bien que D est le milieu de $[BC]$.

Corrigé de l'exercice 5.10 page 112

On a d'une part :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

et d'autre part :

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

On a donc :

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\cancel{3}}{2}\times\frac{1}{\cancel{3}}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, donc les points A, E et F sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.11 page 112

1 On souhaite construire le point M tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Utilisons la relation de Chasles pour écrire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}&=\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\\
&=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} &\iff 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}\\
&\iff 2\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}\\
&\iff -2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}\\
&\iff \overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\\
&\iff \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$



Ainsi, M est le milieu de $[AB]$.

Remarque 40

Quand on souhaite construire un point inconnu défini par une égalité vectorielle (comme ici), on utilise la relation de Chasles de sorte à faire apparaître un seul vecteur qui dépend du point inconnu (ici, $\overrightarrow{MA}$). Il faut arriver à une égalité vectorielle de la forme $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, où $k\in\mathbb{R}$.

mathweb.fr

2 On souhaite construire le point N tel que $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} &= 2\overrightarrow{NA} - 3\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= 2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$



3 On souhaite construire le point P tel que $-3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} -3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} &= -3\overrightarrow{PA} + 5\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= -3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} -3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} = \vec{0} &\iff 2\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\iff -2\overrightarrow{AP} = -5\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

On divise donc $[AB]$ en deux et on reporte 5 fois cette moitié :



4 On souhaite construire le point R tel que $2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} &= 2\overrightarrow{RA} + 3\left(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \\ &= 2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} + 3\overrightarrow{AB} \\ &= 5\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} = \vec{0} &\iff 5\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\iff 5\overrightarrow{RA} = -3\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{RA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \\ &\iff -\overrightarrow{AR} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{AR} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

mathweb.fr

Il faut donc couper en 5 le segment $[AB]$:



5 On souhaite construire le point S tel que $3\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} &= 3\overrightarrow{SA} - 2\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= 3\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$



6 On souhaite construire le point T tel que $5\overrightarrow{TA} - 2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{TA} - 2\overrightarrow{TB} &= 5\overrightarrow{TA} - 2\left(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= 5\overrightarrow{TA} - 2\overrightarrow{TA} - 2\overrightarrow{AB} \\ &= 3\overrightarrow{TA} - 2\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{TA} - 2\overrightarrow{TB} = \vec{0} &\iff 3\overrightarrow{TA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\iff 3\overrightarrow{TA} = 2\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{TA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

Il faut donc couper $[AB]$ en 3 et reporter les deux tiers de l'autre côté du point A :



Corrigé de l'exercice 5.12 page 112

1 • $3\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{AB} \iff 3\overrightarrow{CE} = 2\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}\right) + 3\overrightarrow{AB}$

$$\iff 3\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CE} + 3\overrightarrow{AB}$$

$$\iff \boxed{\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB}}$$

mathweb.fr

- $3\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FB} \iff 3\overrightarrow{FC} = 2\left(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CB}\right)$
$\iff 3\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FC} + 2\overrightarrow{CB}$
$\iff \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{CB}$
$\iff \boxed{\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{BC}}$

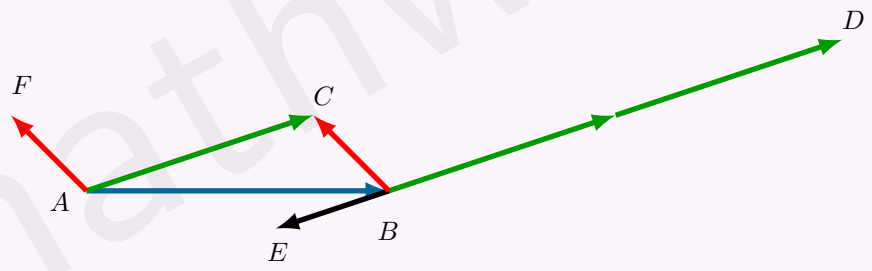
2 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE}$
$= 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$
$= \underbrace{3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AB}}_{=\vec{0}} \underbrace{-2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{DF}$
$= \overrightarrow{DF}.$

Ainsi, $ADFE$ est un parallélogramme.

Corrigé de l'exercice 5.13 page 112

1
- $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AE} + 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\right) - \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}\right) = \vec{0}$
$\iff 2\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$
$\iff \boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}}$
- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} \iff \overrightarrow{BF} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\right) + \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}\right)$
$\iff \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CB}$
$\iff \boxed{\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}$

On a alors la figure suivante :



2 Par construction, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF}$. Ainsi, $ABCF$ est un parallélogramme.

Corrigé de l'exercice 5.14 page 113

- $4\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff 4\overrightarrow{AM} - 5\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$
$\iff 4\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
$\iff 4\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
$\iff 9\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AB}.$
- $9\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC} = \vec{0} \iff 9\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right) + 4\overrightarrow{AB} - 5\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$
$\iff 9\overrightarrow{BA} + 9\overrightarrow{AN} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\iff -9\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AN} + 4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\iff 9\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{AC}.$

mathweb.fr

Donc :

$$\begin{aligned} 9\overrightarrow{MN} &= 9\overrightarrow{MA} + 9\overrightarrow{AN} \\ &= 5\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{AC} \\ &= 5\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent, (MN) et (BC) sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 5.15 page 113

1 $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -1\times 2 - 5\times 3 = -2 - 15 = -17 \neq 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2 $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -3\times 3 - 7\times(-7) = -9 + 49 = 40 \neq 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

3 $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\5\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 2\times 5 - \frac{10}{3}\times 3 = 10 - 10 = 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4 $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2}\times 2 = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Corrigé de l'exercice 5.16 page 113

On considère le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)$.
Dans ce repère, on a : $A\,(0\,;0)$; $B\,(1\,;0)$; $H\,(3\,;1)$; $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$; $E\,(2\,;0)$.

D'après le théorème de Thalès, $J\left(1\,;\frac{1}{3}\right)$ (car AB représente un tiers de AG). Donc, $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EI}\right) = -1\times\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires, ce qui implique que E, I et J sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.17 page 113

1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\1-(-1)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-2\\2-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\3\end{pmatrix}$.

mathweb.fr

$x_{\overrightarrow{AC}} = \frac{5}{2} x_{\overrightarrow{AB}}$ et $y_{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{2} y_{\overrightarrow{AB}}$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 $AB^2 = x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2 = 1 + 4 = 5$.

$AD^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = 1 + 1 = 2$.

$BD^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = 4 + 1 = 5$.

Donc le triangle ABD est isocèle en B sans être rectangle.

Corrigé de l'exercice 5.18 page 113

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère les points $A\,(-2\,;-3)$, $B\,(4\,;-1)$ et $C\,(-7\,;2)$.

1 **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -1-(-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7-(-2) \\ 2-(-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6+(-5) \\ 2+5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}$.

b. $ABDC$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\text{AD}}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - (-2) \\ y_D - (-3) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D + 2 \\ y_D + 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = x_D + 2 \\ 7 = y_D + 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_D = 1 - 2 = -1 \\ y_D = 7 - 3 = 4 \end{cases}$$

Ainsi, $D\,(-1\,;4)$.

2 I milieu de $[AD] \iff \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} \iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I - (-2) \\ y_I - (-3) \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I + 2 \\ y_I + 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_I = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ y_I = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $I\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 5.19 page 114

1 I milieu de $[AC]$ donc :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$$

et

$$y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2},$$

donc $\boxed{I\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)}$.

2 $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x_D \\ -2-y_D \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x_D \\ -2-y_D \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3 &= 5-x_D \\ 3 &= -2-y_D \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_D &= 5-3=2 \\ y_D &= -2-3=-5 \end{cases}$$

Finalement, $D\,(2\,;-5)$.

3 A, B, M sont alignés $\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 7 \\ y+1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff 3(y+1) - 3 \times 7 = 0$$

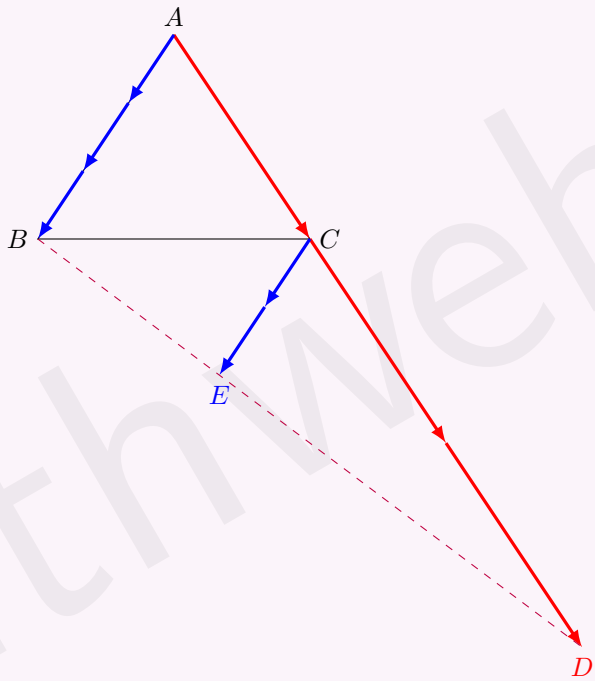
$$\iff 3y + 3 - 21 = 0$$

$$\iff 3y = 18$$

$$\iff y = 6.$$

Corrigé de l'exercice 5.20 page 114

1 Faisons une figure :



$\overrightarrow{AC}$ est le premier vecteur unitaire du repère dans lequel on se place donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ est le second vecteur unitaire du repère dans lequel on se place donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

mathweb.fr

2 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ donc $D(3\,;0)$.

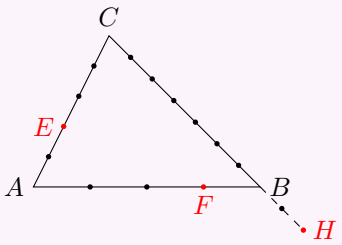
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $E\left(1\,;\dfrac{2}{3}\right)$.

3 $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1-0\\ \frac{2}{3}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3-0\\ 0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$.

4 $1\times(-1) - 3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1+1 = 0$ donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun (le point B) donc B, E et D sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.21 page 114

1 On a la figure suivante :



- $\overrightarrow{EC} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{CE} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{CA}$ (il est plus simple de partir d'un point que l'on connaît (ici, le point C) pour construire le point E.
- $\overrightarrow{CH} = -\dfrac{9}{7}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{CH} = \dfrac{9}{7}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \dfrac{2}{7}\overrightarrow{CB}$.

2 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

$= \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\overrightarrow{EF} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$

3 $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CH}$

$= \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \dfrac{9}{7}\overrightarrow{CB}$

$= \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \dfrac{9}{7}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$

$= \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \dfrac{9}{7}\overrightarrow{AC} + \dfrac{9}{7}\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\overrightarrow{EH} = \dfrac{9}{7}\overrightarrow{AB} - \dfrac{24}{35}\overrightarrow{AC}}$

4 Dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AC}\right)$, on a :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{2}{5}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}\frac{9}{7}\\ -\frac{24}{35}\end{pmatrix}.$$

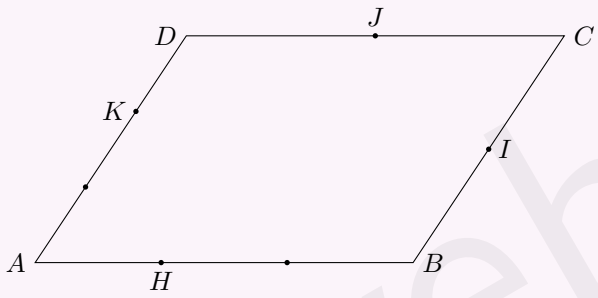
$$\det\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}\right) = \frac{3}{4}\times\left(-\frac{24}{35}\right) - \frac{9}{7}\times\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{18}{35} + \frac{18}{35} = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont colinéaires ; ils ont un point en commun (E), donc les points E, F et H sont alignés.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 5.22 page 114

1 La figure est la suivante :



2 $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BI}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\boxed{\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$

$\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DJ}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\boxed{\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$

3 Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)$, on a :

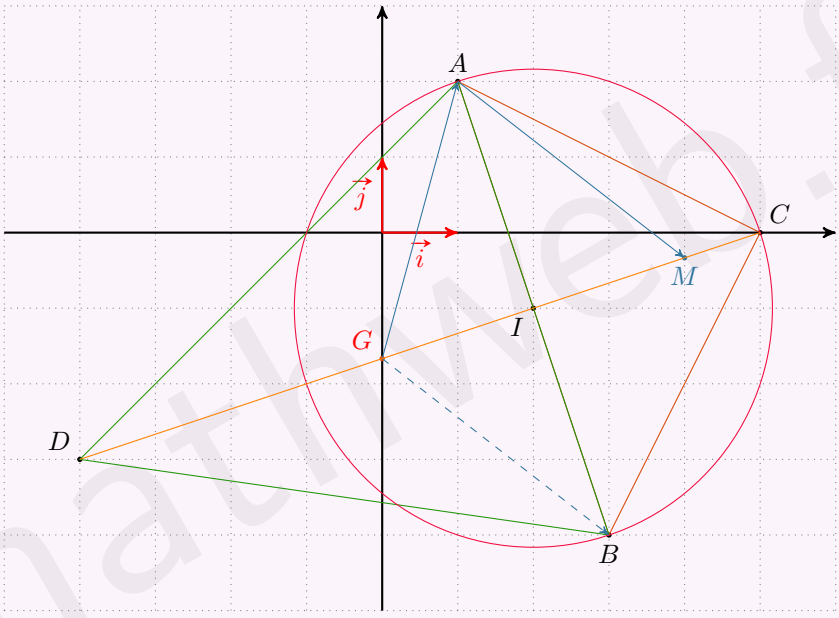
$$\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

$$\det\left(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{KJ}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ ne sont pas colinéaires.

Les droites (HI) et (KJ) ne sont donc pas parallèles.

Corrigé de l'exercice 5.23 page 115



1 I est le milieu de $[AB]$ donc : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1$. Donc $I(2; -1)$.

mathweb.fr

2 $IC = \sqrt{(x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2}$
$IC = \sqrt{(5-2)^2 + (0-(-1))^2}$
$IC = \sqrt{9+1}$
$IC = \sqrt{10}$.

$IB = \sqrt{(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2}$
$IB = \sqrt{(3-2)^2 + (-4-(-1))^2}$
$IB = \sqrt{1+9}$
$IB = \sqrt{10}$.

$IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2}$
$IA = \sqrt{(1-2)^2 + (2-(-1))^2}$
$IA = \sqrt{1+9}$
$IA = \sqrt{10}$

Ainsi, $IA = IB = IC$ donc A, B et C sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{10}$.

3 ABC est inscrit dans $\mathcal{C}$, qui a pour diamètre $[AB]$. Donc ABC est rectangle en C.
De plus :

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$BC = \sqrt{(5-3)^2 + (0-(-4))^2}$
$BC = \sqrt{4+16}$
$BC = 2\sqrt{5}$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2}$
$AC = \sqrt{16+4}$
$AC = 2\sqrt{5}$.

Donc $AC = BC$. Ainsi, ABC est un triangle rectangle isocèle en C.

4 $\overrightarrow{DI}(x_I - x_D; y_I - y_D)$ donc $\overrightarrow{DI}(6;2)$. De plus, $\overrightarrow{IC}(x_C - x_I; y_C - y_I)$ donc $\overrightarrow{IC}(3;1)$.

Ainsi, $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DI}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires.
Ils ont un point en commun (I), donc D, I et C sont alignés.

5 G est le centre de gravité du triangle BAD donc :

$$x_G = \frac{x_B + x_A + x_D}{3} = \frac{3+1+(-4)}{3} = 0$$
$$y_G = \frac{y_B + y_A + y_D}{3} = \frac{-4+2+(-3)}{3} = \frac{-5}{3}$$

Ainsi, $G\left(0; -\frac{5}{3}\right)$.

6 Par définition, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
Donc, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GD}$.
Ainsi, $\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GD}$.
Les deux vecteurs sont donc colinéaires et ont un point en commun (G). Par conséquent, D, G et M sont alignés.

Or, I appartient à (DG) car I est le milieu de $[AB]$ et (DG) est la médiane issue de D dans le triangle BAD.
De plus, D, I et C sont alignés. Donc D, G, I, M et C sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.24 page 115

1 Dans le triangle équilatéral DEC, la hauteur issue de E coupe $[DC]$ en son milieu, donc coupe $[AB]$ en son milieu. Ainsi, l'abscisse de E est $\frac{1}{2}$.
Pour trouver l'ordonnée de E, on doit calculer la hauteur de DEC, que l'on ajoutera à 1 (l'ordonnée de D).

mathweb.fr

Posons H le pied de la hauteur issue de E dans DEC. Alors, DEH est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} EH^2 &= DE^2 - DH^2 \\ &= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \\ EH &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E\left(\frac{1}{2}\,;1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Des calculs précédents, on peut déduire que $\boxed{F\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$.

2 D'après la question précédente, $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si $xy' = yx'$.

Dans notre cas, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} xy' &= \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{3}{4} \\ xy' &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} yx' &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ yx' &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $xy' = yx'$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires. Ils ont de plus un point en commun, donc les points A, E et F sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.25 page 115

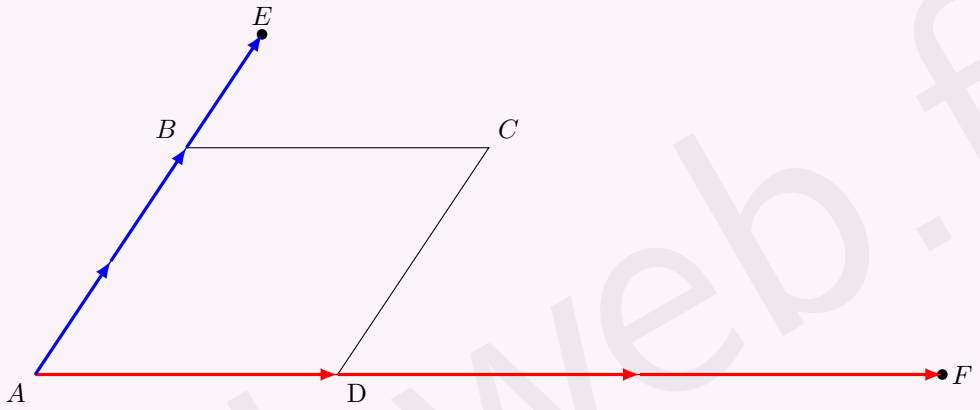
1 Le point E est défini par l'égalité : $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Pour construire E, il vaut mieux transformer l'égalité en :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

afin de partir d'un point que l'on connaît (ici, le point B).

mathweb.fr

2 Les points E et F sont disposés ainsi :



3 Plaçons-nous dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$.
Dans ce repère, $C\,(1\,;2)$, $E\,(0\,;3)$ et $F\,(3\,;0)$. Ainsi,

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On a $(-1)\times(-2) - 1\times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires. Or, ils ont un point en commun (le point C) donc E, C et F sont alignés.

Remarque 41

Le choix du repère importe peu. J'ai choisi en second axe $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ pour simplifier les futures coordonnées, mais rien ne nous empêche de nous placer dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)$ ou tout autre repère.

Corrigé de l'exercice 5.26 page 116

1 Il s'agit ici de trouver les coordonnées du point M tel que $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, avec $A\,(-3\,;2)$ et $B\,(5\,;4)$.
Il existe deux méthodes pour répondre à cette question :

- **Première méthode.**
  On pose $M\,(x\,;y)$.

  $\rightarrow$ $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x_A - x_M \\ y_A - y_M \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -3-x \\ 2-y \end{pmatrix} \iff 3\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 3(-3-x) \\ 3(2-y) \end{pmatrix}$.

  $\rightarrow$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 5-x \\ 4-y \end{pmatrix} \iff 2\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 2(5-x) \\ 2(4-y) \end{pmatrix}$.

  Ainsi,

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} &\iff \begin{pmatrix} 3(-3-x) \\ 3(2-y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(5-x) \\ 2(4-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -9-3x+10-2x \\ 6-3y+8-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -5x+1 \\ -5y+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -5x+1 &= 0 \\ -5y+14 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

mathweb.fr

$$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} \iff \begin{cases}-5x=-1\\-5y=-14\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}x=\frac{1}{5}\\y=\frac{14}{5}\end{cases}$$

Finalement, $\boxed{M\left(\frac{1}{5}\,;\frac{14}{5}\right)}$.

- **Seconde méthode.**
  D'après la relation de Chasles, on a :
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}&=3\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)+2\overrightarrow{MB}\\&=3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{MB}\\&=5\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

  Ainsi,
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} &\iff 5\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}\\&\iff 5\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{BA}\\&\iff 5\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{AB}\\&\iff \overrightarrow{MB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\\&\iff \begin{pmatrix}x_B-x_M\\y_B-y_M\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\\&\iff \begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}5-(-3)\\4-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} &\iff \begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\\&\iff \begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\times 8\\\frac{3}{5}\times 2\end{pmatrix}\\&\iff \begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{24}{5}\\\frac{6}{5}\end{pmatrix}\\&\iff \begin{cases}5-x&=\frac{24}{5}\\4-y&=\frac{6}{5}\end{cases}\\&\iff \begin{cases}x&=5-\frac{24}{5}=\frac{25}{5}-\frac{24}{5}=\frac{1}{5}\\y&=4-\frac{6}{5}=\frac{20}{5}-\frac{6}{5}=\frac{14}{5}\end{cases}\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{M\left(\frac{1}{5}\,;\frac{14}{5}\right)}$.

2 Il s'agit ici de trouver les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, avec $A\,(-3\,;2)$, $B\,(5\,;4)$ et $C\,(1\,;7)$.
Je vais faire comme dans la seconde méthode précédente : je vais utiliser la relation de Chasles pour faire apparaître $\overrightarrow{NA}$ dans les vecteurs $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NC}$, en posant $N\,(x\,;y)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}&=\overrightarrow{NA}+\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}\right)\\&=-\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

mathweb.fr

Donc,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0} &\iff \overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\
&\iff \begin{pmatrix}x_N-x_A\\y_N-y_A\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\13\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}x+3&=4\\y-2&=13\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=4-3=1\\y=13+2=15\end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{N\,(1\,;15)}$.

3 Le point P tel que $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ existe-t-il ?

Pour répondre à cette question utilisons la relation de Chasles pour faire apparaître $\overrightarrow{PA}$ dans $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}&=\overrightarrow{PA}+\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}\right)-2\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}\right)\\
&=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{AC}\\
&=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0} &\iff \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\
&\iff \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}\\
&\iff \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité n'étant pas vraie, l'égalité $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ non plus.

Par conséquent, il n'existe pas de point P tel que $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

Corrigé de l'exercice 5.27 page 116

1 $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \iff \begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\iff \begin{pmatrix}3-(-3)\\-1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-x_D\\2-y_D\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-x_D\\2-y_D\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}6=6-x_D\\1=2-y_D\end{cases} \iff \begin{cases}x_D=0\\y_D=1\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $D\,(0\,;1)$.

mathweb.fr

2 On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-(-3)\\1-(-2)\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix}6 & 3\\1 & 3\end{vmatrix} = 6\times 3 - 1\times 3 = 18 - 3 = 15.$$

L'aire de $ABCD$ est donc égale à 15.

3 On sait que l'aire d'un parallélogramme est égale à :

$$\text{base} \times \text{hauteur}.$$

Donc, si l'on considère la hauteur du sommet D, que l'on va noter h, on a :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times h.$$

Or,

$$AB = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

donc cette dernière égalité s'écrit :

$$15 = \sqrt{37} \times h$$

c'est-à-dire :

$$h = \frac{15}{\sqrt{37}}.$$

La hauteur du parallélogramme $ABCD$ issue du sommet D est donc égale à $\dfrac{15}{\sqrt{37}}$.

4 Le point d'intersection des droites (AC) et (BD) est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ car $ABCD$ est un parallélogramme. Appelons ce point I. Alors,

$$x_I = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{3}{2}$$

et

$$y_I = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

Ainsi, $I\left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$.

5 On considère le point $E\left(-6\,;-\frac{5}{2}\right)$. Les points E, A et B sont-ils alignés ?
Pour répondre à cette question, on peut voir si $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}-3-(-6)\\-2-\left(-\frac{5}{2}\right)\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\det\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix}3 & 6\\\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix} = 3\times 1 - 6\times\frac{1}{2} = 3 - 3 = 0.$$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires.

Les points E, A et B sont alors alignés.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 5.28 page 116

1 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} + k\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Ainsi, en prenant $\boxed{k = \frac{2}{3}}$, on a :

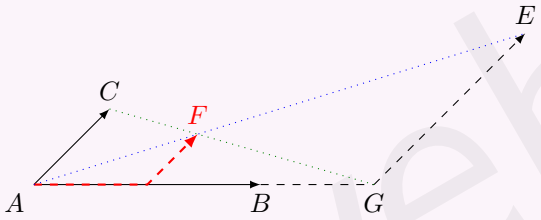
$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

Dans ce cas, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et donc, A, E et F sont alignés.

2 On a la figure suivante :



3

- $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$
  $= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

  $\boxed{\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$
- $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$
  $= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

  $\boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$

On constate alors que :

$$3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires, ce qui implique que C, F et G sont alignés.

4 Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AC}\right)$, posons $M\,(x\,;y)$.
On a :

- $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $F\left(\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right)$;
- $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $G\left(\frac{3}{2}\,;0\right)$;
- $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ donc $E\left(\frac{3}{2}\,;2\right)$.

mathweb.fr

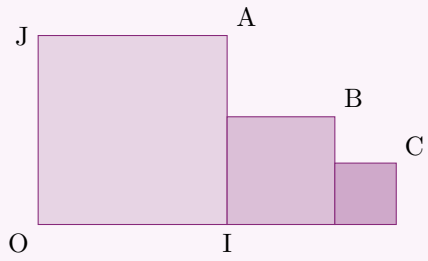
Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{ME}=\vec{0} &\iff \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-x\\ \frac{2}{3}-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-x\\ 0-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-x\\ 2-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}\frac{1}{2}-x+\frac{3}{2}-x+\frac{3}{2}-x=0\\ \frac{2}{3}-y-y+2-y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}3x=\frac{7}{2}\\ 3y=\frac{8}{3}\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=\frac{7}{6}\\ y=\frac{8}{9}\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{M\left(\frac{7}{6}\,;\frac{8}{9}\right)}$.

Corrigé de l'exercice 5.29 page 117

Introduisons le repère $(O;I,J)$ comme ci-dessous :



Le carré du milieu est une réduction du carré de gauche avec un facteur de réduction k, donc son côté mesure $1\times k=k$.
Le carré du droite est une réduction du carré du milieu avec un facteur de réduction k, donc son côté mesure $k\times k=k^2$.
Ainsi, dans le repère $(O;I,J)$,

$$A\,(1\,;1) \quad , \quad B\,(1+k\,;k) \quad , \quad C\left(1+k+k^2\,;k^2\right).$$

On en déduit alors que :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}k\\ k-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}k+k^2\\ k^2-1\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) &= k(k^2-1)-(k-1)(k+k^2)\\ &= k(k-1)(k+1)-(k-1)k(k+1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc toujours colinéaires, quelle que soit la valeur de k.
Par conséquent, les points A, B et C sont toujours alignés.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 5.30 page 117

1 $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GB} = \dfrac{9}{10}\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
&\iff 10\overrightarrow{GA} = -1\overrightarrow{AB} \text{ et } 10\overrightarrow{GB} = 9\overrightarrow{AB}\\
&\iff 90\overrightarrow{GA} = -9\overrightarrow{AB} \text{ et } 10\overrightarrow{GB} = 9\overrightarrow{AB}\\
&\iff 90\overrightarrow{GA} + 10\overrightarrow{GB} = \vec{0}\\
&\iff 9\overrightarrow{GA} + 1\overrightarrow{GB} = \vec{0}\\
&\iff \boxed{G = \text{bar}\{(A,9);(B,1)\}}
\end{aligned}$$

2 $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GB} = \dfrac{7}{10}\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
&\iff 10\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB} \text{ et } 10\overrightarrow{GB} = 7\overrightarrow{AB}\\
&\iff 70\overrightarrow{GA} = -21\overrightarrow{AB} \text{ et } 30\overrightarrow{GB} = 21\overrightarrow{AB}\\
&\iff 70\overrightarrow{GA} + 30\overrightarrow{GB} = \vec{0}\\
&\iff 7\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}\\
&\iff \boxed{G = \text{bar}\{(A,7);(B,3)\}}
\end{aligned}$$

Remarque 42

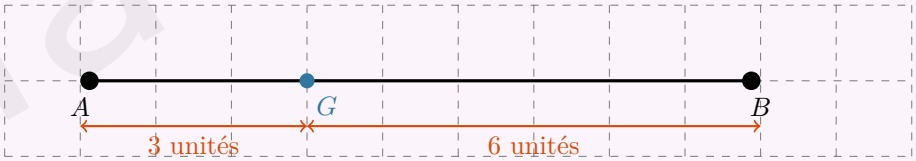
Dans le cas suivant :



on a toujours :

$$G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}.$$

3 On a ici :



Donc, d'après la remarque précédente,

$$G = \text{bar}\{(A,6);(B,3)\}$$

que l'on peut aussi simplifier (en divisant toutes les pondérations par 3) :

$$\boxed{G = \text{bar}\{(A,2);(B,1)\}}$$

Corrigé de l'exercice 5.31 page 117

1 $\overrightarrow{BG} = \dfrac{-1}{5}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{BG} = \dfrac{-1}{5}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right)$

$$\begin{aligned}
&\iff \overrightarrow{BG} = \frac{-1}{5}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{5}\overrightarrow{GB}\\
&\iff -\frac{1}{5}\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BG} = \vec{0}\\
&\iff -\frac{1}{5}\overrightarrow{GA} - \frac{4}{5}\overrightarrow{GB} = \vec{0}\\
&\iff 1\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}\\
&\iff \boxed{G = \text{bar}\{(A,1);(B,4)\}}
\end{aligned}$$

mathweb.fr

2 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right)$

$\iff \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB}$

$\iff \overrightarrow{AG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\iff -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\iff 1\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\iff \boxed{G = \text{bar}\{(A,1);(B,2)\}}$

3 $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{BG} = \frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right)$

$\iff \overrightarrow{BG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{7}\overrightarrow{GB}$

$\iff \frac{3}{7}\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\iff \frac{3}{7}\overrightarrow{GA} - \frac{10}{7}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\iff 3\overrightarrow{GA} - 10\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\iff \boxed{G = \text{bar}\{(A,3);(B,-10)\}}$

Remarque 43

Le fait d'avoir une pondération négative signifie que G est à l'extérieur du segment $[AB]$. Comme la pondération de B est, en valeur absolue, plus grande que celle de A, G sera plus proche de B que de A, donc G est à l'extérieur de $[AB]$ du côté de B.
De plus, on aurait aussi pu écrire :

$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} \iff \frac{3}{7}\overrightarrow{GA} - \frac{10}{7}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\iff -3\overrightarrow{GA} + 10\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\iff \boxed{G = \text{bar}\{(A,-3);(B,10)\}}$

mathweb.fr

6 Équations de droites

Dans ce chapitre

1 Équations d'une droite . . . 142
1 Équation réduite d'une droite . . . 142
2 Équation cartésienne d'une droite . . . 143
3 Établir une équation cartésienne d'une droite . . . 143
a À partir de l'équation réduite . . . 143
b À l'aide de vecteurs . . . 144
2 Vecteur directeur d'une droite . . . 144
1 Définition . . . 144
2 Lien entre vecteur directeur et équations de droite . . . 145
a Équation réduite . . . 145
b Équation cartésienne . . . 145
3 Intersection de droites . . . 146
1 Critère d'existence . . . 146
2 Calcul des coordonnées du point d'intersection . . . 146
Prendre un bon départ . . . 147
Exercices . . . 149
Corrigés des exercices . . . 152

1 Équations d'une droite

Dans ce chapitre, le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

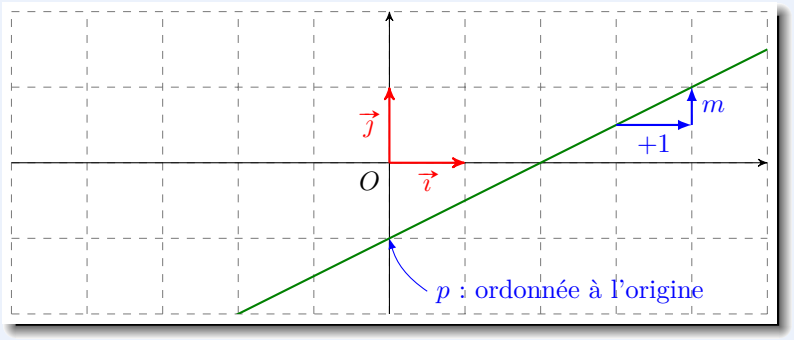
1 Équation réduite d'une droite

Définition 35

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. On appelle **équation réduite** de $\mathcal{D}$ l'égalité :

$$y = mx + p \qquad , \qquad m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}$$

où $M\,(x\,;y)$ est un point quelconque de $\mathcal{D}$.
m est appelé le **coefficient directeur** de $\mathcal{D}$; on l'appelle aussi la **pente** de la droite.
p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de $\mathcal{D}$; c'est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.



Propriété 26

Soient $\mathrm{A}(x_A\,;y_A)$ et $\mathrm{B}(x_B\,;y_B)$ deux points du plan. L'équation de la droite (AB) est $y = mx + p$, où :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et

$$p = y_A - mx_A = y_B - mx_B.$$

Exemple 41

Soient $\mathrm{A}(-1\,;-3)$ et $\mathrm{B}(3\,;5)$. Alors, l'équation réduite de (AB) est $y = mx + p$ où :

$$m = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

et

$$p = y_B - mx_B = 5 - 2 \times 3 = -1.$$

Ainsi, l'équation réduite de (AB) est : $y = 2x - 1$.

Remarque 44

- si $m = 0$ alors la droite est horizontale.
- si $p = 0$ alors la droite passe par l'origine du repère.

2 Équation cartésienne d'une droite

Définition 36

Une **équation cartésienne de droite** est une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

Exemple 42

- $3x - 5y + 2 = 0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.
- $-4y + 7 = 0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a = 0$, $b = -4$ et $c = 7$.
- $3x + 1 = 0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a = 3$, $b = 0$ et $c = 1$.

Attention 6

Une équation cartésienne n'est pas unique (d'où l'article « une »).
En effet, $2x + 2y + 2 = 0 \iff x + y + 1 = 0$ (en divisant tous les coefficients par 2).

Remarque 45 (interprétation d'une équation de droite)

Qu'elle soit réduite ou cartésienne, une équation de droite représente toujours un lien entre les abscisses et les ordonnées des points de cette droite.

- En écrivant $y = mx + p$, on signifie que n'importe quel point M de la droite a pour ordonnée $mx + p$, où x est son abscisse.
  Ainsi, si on connaît l'abscisse d'un point de la droite, on peut connaître son ordonnée, et réciproquement.
- En écrivant $ax + by + c = 0$, on signifie que, quel que soit le point $\mathrm{M}(x\,;y)$ sur la droite, on a nécessairement l'égalité $ax + by + c = 0$.

On décrit ainsi, à l'aide d'une égalité (algébrique), un ensemble (géométrique).

C'est le français René Descartes qui, au XVIIe siècle, fait le lien entre la géométrie et l'algèbre.

3 Établir une équation cartésienne d'une droite

Il existe deux façons principales d'obtenir une équation cartésienne d'une droite : à partir de son équation réduite ou à l'aide de vecteurs.

a À partir de l'équation réduite

L'équation réduite d'une droite étant de la forme $y = mx + p$, on arrive à :

$$mx - y + p = 0.$$

Exemple 43

Soient $A\,(-1\,;-3)$ et $B\,(3\,;5)$. Alors, l'équation réduite de (AB) est :

$$y = 2x - 1$$

d'après l'exemple 1.
Une équation cartésienne de (AB) est donc :

$$2x - y - 1 = 0.$$

b À l'aide de vecteurs

Considérons deux points $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$, ainsi qu'un point $M\,(x\,;y)$ sur (AB), où :

- x_A, y_A, x_B, y_B sont quatre réels fixés ;
- x et y sont deux réels variables (dont les valeurs peuvent changer).

Dire que M appartient à (AB) signifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Or, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$ (leur déterminant est nul).

Nous avons ainsi un moyen de passer de la géométrie (colinéarité) à l'algèbre (égalité), ce qui signifie que nous pouvons établir une équation cartésienne.

Exemple 44

Soient$A\,(-2\,;5)$ et $B\,(5\,;-1)$. Posons alors $M\,(x\,;y)\in(AB)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\text{ et }\overrightarrow{AB}\text{ sont colinéaires} &\iff 7(y-5)-(-6)(x+2)=0\\ &\iff 7y-35+6x+12=0\\ &\iff 6x+7y-23=0.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $6x+7y-23=0$.

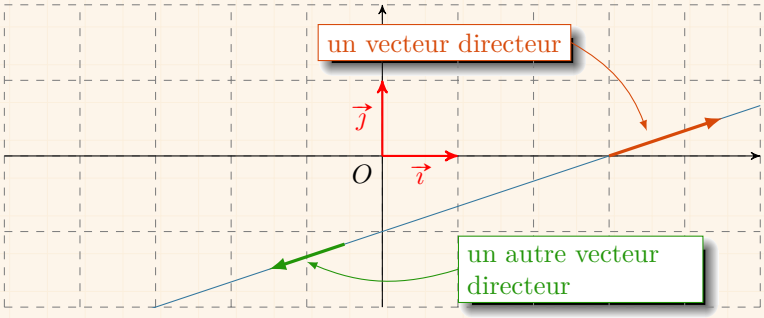
2 Vecteur directeur d'une droite

1 Définition

Définition 37

Un **vecteur directeur** d'une droite est un vecteur dont la direction est la même que celle de la droite.

Exemple 45



2 Lien entre vecteur directeur et équations de droite

a Équation réduite

Propriété 27 (équation réduite)

Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$.

Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Démonstration 11

Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point de (d).
Cherchons les coordonnées du point B dont l'abscisse vaut $x_B = x_A + 1$:

$$y_B = mx_B + p = m(x_A + 1) + p = mx_A + p + m = y_A + m.$$

D'où $B(x_A + 1\,;y_A + m)$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x_A + 1) - x_A\\(y_A + m) - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.
Or $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d) car A et B sont sur (d).
Donc le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

b Équation cartésienne

Propriété 28 (coefficient directeur)

Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Démonstration 12

$ax + by + c = 0 \iff y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$.
Ainsi, l'équation réduite de (d) est : $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$, où $-\dfrac{a}{b}$ est le coefficient directeur.

D'après la propriété 27, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), comme tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

Ainsi, $\vec{u} = -b\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d). Or, $-b\vec{v}\begin{pmatrix}-b\times 1\\-b\times\left(-\frac{a}{b}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

3 Intersection de droites

1 Critère d'existence

Par définition, deux droites sécantes sont deux droites qui ne sont pas parallèles.
Ainsi, l'intersection de deux droites existe quand leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Propriété 29

Soient (d) et (d') deux droites d'équations cartésiennes respectives :

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a'x + b'y + c' = 0.$$

$$(d) \text{ et } (d') \text{ sont parallèles} \iff ab' = ba'$$

Démonstration 13

$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de (d) et (d').

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ colinéaires} &\iff -b \times a' - a \times (-b') = 0 \\ &\iff -ba' + ab' = 0 \\ &\iff ab' = ba'. \end{aligned}$$

Exemple 46

$(d) : -3x + 5y - 2 = 0$
$(d') : 8x + 3y + 1 = 0$

$-3 \times 3 = -9$ et $8 \times 5 = 40 \neq -9$, donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

2 Calcul des coordonnées du point d'intersection

Soient $(d) : y = mx + p$ et $(d') : y = m'x + p'$. On suppose que $m \neq m'$, ce qui signifie que les deux droites sont sécantes. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection des deux droites, on recherche d'abord son abscisse en résolvant l'équation :

$$mx + p = m'x + p'$$

puis on remplace x dans l'équation $y = mx + p$ par la valeur trouvée.

Exemple 47

$(d) : y = -5x + 2$
$(d') : y = 3x + 10$

$$-5x + 2 = 3x + 10 \iff -8x = 8 \iff x = -1.$$

On remplace x par -1 dans l'équation $y = -5x + 2$: $y = -5 \times (-1) + 2 = 7$.

Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(-1\,;7)$.

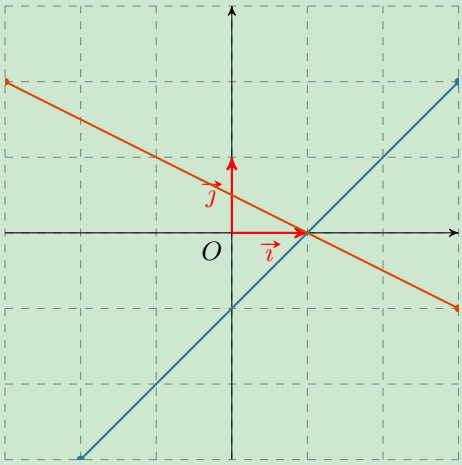
Remarque 46

Si nous avons les équations cartésiennes des droites, nous pouvons les transformer de sorte à ce qu'elles deviennent des équations réduites.

Par exemple, $3x + 2y - 5 = 0 \iff y = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$.

6 Prendre un bon départ

Exercice type 19 ▶ Trouver l'équation réduite d'une droite

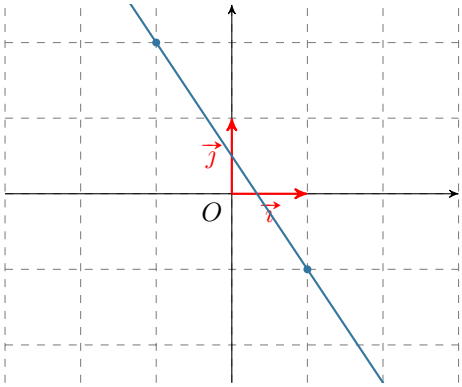


Trouver l'équation réduite des droites représentées ci-contre.

- **Droite rouge.**
  L'ordonnée à l'origine est $\dfrac{1}{2}$ et, en considérant les points de la droite de coordonnées $(-3\,;2)$ et $(3\,;-1)$, le coefficient directeur est égal à :
  $$\frac{2-(-1)}{-3-3} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}.$$
  L'équation réduite est donc : $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
- **Droite bleue.**
  L'ordonnée à l'origine est -1 et, en considérant les points de la droite de coordonnées $(-2\,;-3)$ et $(3\,;2)$, le coefficient directeur est égal à :
  $$\frac{-3-2}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$
  L'équation réduite est donc : $y = 1x + (-1)$, soit $y = x - 1$.

Exercice type 20 ▶ Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, une droite a pour équation cartésienne $3x + 2y - 1 = 0$.
Tracer cette droite.



Il suffit de prendre deux valeurs de x au hasard et de calculer le y qui correspond. Pour cela, on peut d'abord établir l'équation réduite :

$$3x + 2y - 1 = 0 \iff 2y = -3x + 1 \iff y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

x	-1	1
y	2	-1

Exercice type 21 ▶ Paralélisme de deux droite

Soient les droites (d) et (d') d'équations respectives $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y + 7 = 0$ et $-4x + 6y - 1 = 0$.
Sont-elles parallèles ?

D'après le cours, un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de (d') est $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -6 \\ \frac{1}{2} & -4 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \times (-4) - \frac{1}{2} \times (-6) = -3 + 3 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs sont colinéaires et donc, les droites sont parallèles.

Exercice type 22 ▶ Trouver l'intersection de deux droites

Soient les droites $(d_1) : -x + 2y - 3 = 0$ et $(d_2) : y = 3x - 1$.
Trouver les coordonnées de leur point d'intersection.

L'équation réduite de (d_1) est : $-x + 2y - 3 = 0 \iff 2y = x + 3 \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
On résout donc l'équation :

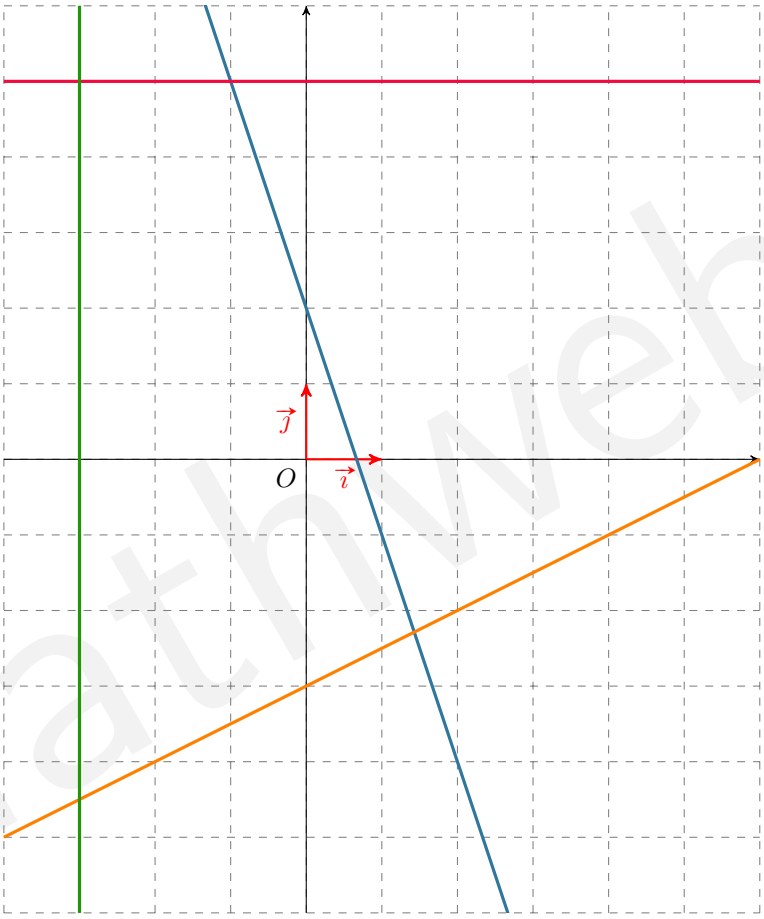
$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 3x - 1 \iff \frac{1}{2}x - 3x = -1 - \frac{3}{2} \iff -\frac{5}{2}x = -\frac{5}{2} \iff x = -\frac{5}{2} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = 1.$$

On trouve alors $y = 3 \times 1 - 1 = 2$.
Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(1\,;2)$.

6 Exercices

Exercice 6.1 (trouver une équation cartésienne)

Pour chacune des droites représentées ci-dessous, donner une équation cartésienne.



Solution page 152

Exercice 6.2 (appartenance d'un point à une droite)

Pour chacune des questions suivantes, dire si le point A, dont on donne les coordonnées, appartient à la droite d, dont on donne l'équation réduite.

1 $(d) : y = -3x + 7$; $A\,(-3\,;2)$.

2 $(d) : y = 7x - 1$; $A\,(-1\,;-8)$.

3 $(d) : y = -\dfrac{2}{5}x + 21$; $A\,(10\,;17)$.

4 $(d) : y = -\dfrac{1}{3}x + 8$; $A\,(9\,;5)$.

5 $(d) : y = x\sqrt{2} - 2$; $A\left(\sqrt{2}\,;0\right)$.

6 $(d) : y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x + 5 - \sqrt{3}$; $A\left(1-\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}\right)$.

Solution page 152

mathweb.fr

Exercice 6.3 (appartenance d'un point à une droite)

Pour chacune des questions suivantes, dire si le point A appartient à la droite (d).

1. $(d) : 3x + y - 5 = 0$; $A(-2\,;1)$.
2. $(d) : -x + 5y + 6 = 0$; $A(1\,;-1)$.
3. $(d) : -x\sqrt{2} - y\sqrt{3} + 5 = 0$; $A\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)$.
4. $(d) : \dfrac{1}{2}x - 9y + 5 = 0$; $A(8\,;1)$.

Solution page 154

Exercice 6.4 (droites confondues ?)

Les droites suivantes sont-elles confondues ?

1. $(d) : \dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{10} = 0$ et $(d') : 20x - 18y + 3 = 0$.
2. $(d) : \dfrac{1}{7}x + 2y - \dfrac{1}{5} = 0$ et $(d') : 5x + 70y - 7 = 0$.
3. $(d) : \dfrac{3}{5}x - \dfrac{5}{3}y + 1 = 0$ et $(d') : -9x + 25y + 15 = 0$.

Solution page 154

Exercice 6.5 (connaissant deux points)

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

1. $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;-7)$.
2. $A(3\,;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).
3. $A(5\,;-4)$ et (AB) est parallèle à la droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.
4. $A(3\,;2)$ et (AB) a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

Solution page 155

Exercice 6.6 (trouver un vecteur directeur)

Dans chacun des cas suivants, donner un vecteur directeur de la droite dont on donne une équation cartésienne.

1. $3x - 5y + 2 = 0$
2. $-5x + 9y - 7 = 0$
3. $y = 3x - 1$
4. $y = 5$

Solution page 156

Exercice 6.7 (trouver un coefficient directeur)

Dans chacun des cas suivants, donner un coefficient directeur de la droite dont on donne une équation cartésienne.

1. $3x - 5y + 2 = 0$
2. $-5x + 9y - 7 = 0$
3. $y = 3x - 1$
4. $y = 5$

Solution page 156

mathweb.fr

Exercice 6.8 (médiatrice)

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère les points $A\,(3\,;1)$, $B\,(1\,;2)$, $C\,(2\,;-1)$ et $D\,(-4\,;2)$.

1 Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2 Montrer que O appartient à (CD).

3 Soit $M\,(x\,;y)$. Exprimer les distances BM et CM en fonction de x et y.
En déduire une équation de la droite Δ, médiatrice de $[BC]$, puis montrer que Δ est la droite (OA).

Solution page 156

Exercice 6.9 (équation de droites avec paramètre)

Dans un repère, on considère la droite $\mathcal{D}_m$, $m \in \mathbb{R}$, dont une équation cartésienne est :

$$mx + (2m-1)y + 4 = 0.$$

1 Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?

2 Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ?

3 Montrer que quelle que soit la valeur de m, la droite $\mathcal{D}_m$ passe par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

Solution page 157

Exercice 6.10 (centre de gravité d'un triangle)

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère le triangle ABC où $A\,(-10\,;-10)$, $B\,(-1\,;7)$ et $C\,(5\,;-2)$.
On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$.

1 Déterminer les coordonnées de I et J.

2 En déduire une équation cartésienne des droites (CI) et (BJ).

3 Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle (ABC).

Solution page 157

mathweb.fr

6 Corrigés

Corrigé de l'exercice 6.1 page 149

- La droite rouge est horizontale est passe par le point de coordonnées $(0\,;5)$. Tous les points de cette droite ont une ordonnée égale à 5, donc son équation est :

$$y = 5.$$

- La droite verte est verticale et tous les points de cette droite ont une même abscisse : -3. Son équation est donc :

$$x = -3.$$

Pour les autres droites, le principe consiste à trouver les coordonnées d'un point de la droite et d'un vecteur directeur, puis d'appliquer la « méthode du déterminant ».

- Pour la droite bleue, le point $A\,(0\,;2)$ est sur cette droite, ainsi que le point $B\,(1\,;-1)$. Un vecteur directeur de cette droite est alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
M\,(x\,;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix}1 & x-0\\-3 & y-2\end{vmatrix} = 0\\
&\iff 1(y-2) - (-3)(x-0) = 0\\
&\iff y - 2 + 3x = 0\\
&\iff 3x + y - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite bleue est alors $3x + y - 2 = 0$.

- Pour la droite orange, le point $C\,(0\,;-3)$ est sur cette droite, ainsi que le point $D\,(2\,;-2)$. Un vecteur directeur de cette droite est alors :

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
M\,(x\,;y) \in (CD) &\iff \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{CM} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff \det\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM}\right) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix}2 & x-0\\1 & y-(-2)\end{vmatrix} = 0\\
&\iff 2(y+2) - 1(x-0) = 0\\
&\iff 2y + 4 - x = 0\\
&\iff -x + 2y + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite rouge est alors $-x + 2y + 4 = 0$.

Corrigé de l'exercice 6.2 page 149

Un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. Il suffit donc de remplacer dans chaque équation x par l'abscisse du point A donné, et de vérifier si le calcul donne l'ordonnée de A.

mathweb.fr

1 $(d) : y = -3x + 7\,;\ A\,(-3\,;2)$.

$$-3x_A + 7 = -3 \times (-3) + 7 = 9 + 7 = 16 \neq 2 (= y_A).$$

Donc $A \notin (d)$.

2 $(d) : y = 7x - 1\,;\ A\,(-1\,;-8)$.

$$7x_A - 1 = 7 \times (-1) - 1 = -7 - 1 = -8 = y_A.$$

Donc $A \in (d)$.

3 $(d) : y = -\dfrac{2}{5}x + 21\,;\ A\,(10\,;17)$.

$$-\frac{2}{5}x_A + 21 = -\frac{2}{5} \times 10 + 21 = -4 + 21 = 17 = y_A.$$

Donc $A \in (d)$.

4 $(d) : y = -\dfrac{1}{3}x + 8\,;\ A\,(9\,;5)$.

$$-\frac{1}{3}x_A + 8 = -\frac{1}{3} \times 9 + 8 = -3 + 8 = 5 = y_A.$$

Donc $A \in (d)$.

5 $(d) : y = x\sqrt{2} - 2\,;\ A\left(\sqrt{2}\,;0\right)$.

$$x_A\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2 = 2 - 2 = 0 = y_A.$$

Donc $A \in (d)$.

6 $(d) : y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x + 5 - \sqrt{3}\,;\ A\left(1-\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}\right)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x_A + 5 - \sqrt{3} &= \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}(1-\sqrt{3}) + 5 - \sqrt{3} \\
&= \frac{(1-\sqrt{3})^2}{1+\sqrt{3}} + 5 - \sqrt{3} \\
&= \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{1+\sqrt{3}} + 5 - \sqrt{3} \\
&= \frac{4-2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + 5 - \sqrt{3} \\
&= \frac{4 - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 \times 3}{1^2 - (\sqrt{3})^2} + 5 - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x_A + 5 - \sqrt{3} &= \frac{10 - 6\sqrt{3}}{-2} + 5 - \sqrt{3} \\
&= -5 + 3\sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3} \\
&= y_A.
\end{aligned}$$

Donc $A \in (d)$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 6.3 page 150

1 $(d) : 3x + y - 5 = 0$; $A(-2\,;1)$.

$$3x_A + y_A - 5 = 3 \times (-2) + 1 - 5 = -6 + 1 - 5 = -10 \neq 0.$$

Donc $A \notin (d)$.

2 $(d) : -x + 5y + 6 = 0$; $A(1\,;-1)$.

$$-x_A + 5y_A + 6 = -1 + 5 \times (-1) + 6 = -1 - 5 + 6 = -6 + 6 = 0.$$

Donc $A \in (d)$.

3 $(d) : -x\sqrt{2} - y\sqrt{3} + 5 = 0$; $A\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)$.

$$-x_A\sqrt{2} - y_A\sqrt{3} + 5 = -\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 5 = -2 - 3 + 5 = 0.$$

Donc $A \in (d)$.

4 $(d) : \dfrac{1}{2}x - 9y + 5 = 0$; $A(8\,;1)$.

$$\frac{1}{2}x_A - 9y_A + 5 = \frac{1}{2} \times 8 - 9 \times 1 + 5 = 4 - 9 + 5 = -5 + 5 = 0.$$

Donc $A \in (d)$.

Corrigé de l'exercice 6.4 page 150

Deux droites sont confondues si leurs équations cartésiennes sont équivalentes, c'est-à-dire si, en multipliant l'une, on obtient l'autre.

1 $(d) : \dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{10} = 0$ et $(d') : 20x - 18y + 3 = 0$.

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (d) &\iff \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y + \frac{1}{10} = 0 \\ &\iff 30 \times \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y + \frac{1}{10}\right) = 30 \times 0 \\ &\iff 30 \times \frac{2}{3}x - 30 \times \frac{3}{5}y + 30 \times \frac{1}{10} = 0 \\ &\iff 20x - 18y + 3 = 0 \leftarrow \text{ équation de } (d') \\ &\iff M(x\,;y) \in (d'). \end{aligned}$$

Ainsi, (d) et (d') sont confondues.

Remarque 48

Comment obtenir le nombre « 30 » par lequel j'ai multiplié ? J'ai regardé les dénominateurs des fractions $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{1}{10}$ et j'ai pris le plus petit nombre dans leurs tables (le ppcm de 3, 5 et 10 est égal à 30).

2 $(d) : \dfrac{1}{7}x + 2y - \dfrac{1}{5} = 0$ et $(d') : 5x + 70y - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (d) &\iff \frac{1}{7}x + 2y - \frac{1}{5} = 0 \\ &\iff 35 \times \left(\frac{1}{7}x + 2y - \frac{1}{5}\right) = 35 \times 0 \\ &\iff 5x + 70y - 7 = 0 \leftarrow \text{ équation de } (d') \\ &\iff M(x\,;y) \in (d'). \end{aligned}$$

Ainsi, (d) et (d') sont confondues.

3 $(d) : \dfrac{3}{5}x - \dfrac{5}{3}y + 1 = 0$ et $(d') : -9x + 25y + 15 = 0$.

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (d) &\iff \frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y + 1 = 0 \\ &\iff 15 \times \left(\frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y + 1\right) = 0 \\ &\iff 9x - 25y + 15 = 0 \\ &\iff -9x + 25y - 15 = 0 \text{ en multipliant par } (-1) \end{aligned}$$

Nous n'obtenons pas la même écriture que celle de l'équation de (d') (le signe de « 15 » n'est pas le même) donc les deux droites ne sont pas confondues.

Corrigé de l'exercice 6.5 page 150

1 $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;-7)$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\-7-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff -9(x+1) - 4(y-2) = 0 \\ &\iff -9x - 4y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $9x + 4y + 1 = 0$.

2 $A(3\,;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff 1(x-3) - 2(y+2) = 0 \\ &\iff x - 2y - 7 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $x - 2y - 7 = 0$.

3 $A(5\,;-4)$ et (AB) est parallèle à la droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.

La droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et (AB) est parallèle à cette droite, donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (AB). Donc :

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y+4\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff 1(x-5) - (-1)(y+4) = 0 \\ &\iff x + y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $x + y - 1 = 0$.

4 $A(3\,;2)$ et (AB) a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$, où m est le coefficient directeur de la droite.

mathweb.fr

Donc un vecteur directeur de (AB) est ici $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$$M(x\,;y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff -\frac{1}{2}(x-3) - 1(y-2) = 0$$

$$\iff -\frac{1}{2}x - y + \frac{7}{2} = 0$$

$$\iff x + 2y - 7 = 0.$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $x + 2y - 7 = 0$.

Corrigé de l'exercice 6.6 page 150

1 $3x - 5y + 2 = 0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ (propriété 28).

2 $-5x + 9y - 7 = 0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix}$ (propriété 28).

3 $y = 3x - 1$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ (propriété 27).

4 $y = 5$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (propriété 27).

Corrigé de l'exercice 6.7 page 150

1 $3x - 5y + 2 = 0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ (propriété 28). Donc le coefficient directeur est :

$$m = \frac{3}{5}.$$

2 $-5x + 9y - 7 = 0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix}$ (propriété 28). Donc le coefficient directeur est :

$$m = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9}.$$

3 $y = 3x - 1$. C'est une équation réduite, donc le coefficient directeur de la droite est le coefficient de x :

$$m = 3.$$

4 $y = 5$. La droite est horizontale, donc son coefficient directeur est nul (il n'y a aucune inclinaison par rapport à l'horizontale). Donc, $m = 0$.

Corrigé de l'exercice 6.8 page 151

1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-3\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4-2\\2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix} = 3\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

2 $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = -\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc O, C et D sont alignés.

mathweb.fr

3 $BM = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ et $CM = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$.
La médiatrice de $[BC]$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $BM = CM$, donc $BM^2 = CM^2$. On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-2)^2 = (x-2)^2+(y+1)^2 &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4 = x^2-4x+4+y^2+2y+1\\ &\Leftrightarrow 2x-6y=0\\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x.\end{aligned}$$

L'équation réduite de Δ est donc $y=\frac{1}{3}x$.

Les coordonnées de O et de A vérifient cette équation (car $y_0 = \frac{1}{3}x_O$ et $y_A = \frac{1}{3}x_A$) donc O et A appartiennent à cette droite. Ainsi, $\Delta = (OA)$.

Corrigé de l'exercice 6.9 page 151

1 La droite est parallèle à l'axe des abscisses lorsqu'un vecteur directeur est de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Or, on sait que la droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
Ainsi, il faut que $m=0$ pour que $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

2 La droite est parallèle à l'axe des ordonnées lorsqu'un vecteur directeur est de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. D'après ce que l'on a dit dans la question précédente, il faut donc que $1-2m=0$, soit $m=\frac{1}{2}$.
Ainsi, il faut que $m=\frac{1}{2}$ pour que $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées.

3 Posons $\mathrm{A}(x_A\,;y_A)$ le point fixe. Ainsi, $\mathrm{A} \in \mathcal{D}_0$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$ (on prend les valeurs de m précédemment trouvées par exemple).

$\mathcal{D}_0 : y=4$. Donc $y_A = 4$.
$\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} : x=-8$. Donc $x_A = -8$.

Le point fixe est donc $\mathrm{A}(-8\,;4)$.

Corrigé de l'exercice 6.10 page 151

1

- $x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{-10-1}{2} = -\dfrac{11}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{-10+7}{2} = -\dfrac{3}{2}$.
  Ainsi, $I\left(-\dfrac{11}{2}\,;-\dfrac{3}{2}\right)$.
- $x_J = \dfrac{x_A+x_C}{2} = \dfrac{-10+5}{2} = -\dfrac{5}{2}$ et $y_J = \dfrac{y_A+y_C}{2} = \dfrac{-10-2}{2} = -\dfrac{12}{2} = -6$.
  Ainsi, $I\left(-\dfrac{5}{2}\,;-6\right)$.

mathweb.fr

2 • **Droite (*CI*)**.

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (CI) &\iff \det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CI}\right) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x-5 & -\frac{11}{2}-5 \\ y+2 & -\frac{3}{2}+2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}(x-5) + \frac{21}{2}(y+2) = 0 \\ &\iff x - 5 + 21(y+2) = 0 \text{ (on a multiplié par 2)} \\ &\iff \boxed{x + 21y + 37 = 0} \end{aligned}$$

• **Droite (*BJ*)**.

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (BJ) &\iff \det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BJ}\right) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x+1 & -\frac{5}{2}+1 \\ y-7 & -6-7 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -13(x+1) + \frac{3}{2}(y-7) = 0 \\ &\iff 26(x+1) - 3(y-7) = 0 \text{ (on a multiplié par } -2) \\ &\iff \boxed{26x - 3y + 47 = 0} \end{aligned}$$

3 Le centre de gravité du triangle (ABC) est l'intersection des médianes, donc le point d'intersection de (CI) et (BJ).

• $(CI) : x + 21y + 37 = 0 \iff y = -\dfrac{1}{21}x - \dfrac{37}{21}$.

• $(BJ) : 26x - 3y + 47 = 0 \iff y = \dfrac{26}{3}x + \dfrac{47}{3}$.

On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{21}x - \frac{37}{21} = \frac{26}{3}x + \frac{47}{3} &\iff -\frac{1}{21}x - \frac{26}{3}x = \frac{37}{21} + \frac{47}{3} \\ &\iff -\frac{1}{21}x - \frac{26\times 7}{21}x = \frac{37}{21} + \frac{47\times 7}{3} \\ &\iff -\frac{183}{21}x = \frac{366}{21} \\ &\iff -183x = 366 \\ &\iff x = -\frac{366}{183} = -2. \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$y = \frac{26}{3} \times (-2) + \frac{47}{3} = -\frac{5}{3}.$$

L'intersection des droites a pour coordonnées $\left(-2\,;-\dfrac{5}{3}\right)$

mathweb.fr

7 Généralités sur les fonctions

Dans ce chapitre

1 Définition 160
1 Introduction 160
2 Définition mathématique 160
2 Ensemble de définition et ensemble image 161
1 Ensemble de définition 161
2 Ensemble image 161
3 Représentation graphique 162
1 Tableau de valeurs 162
2 Courbe représentative 162
3 Ce que fait votre calculatrice 163
4 Variations d'une fonction 165
1 Sens de variation 165
2 Tableau de variations 166
3 Minimum et maximum 166
5 Fonctions paires, fonctions impaires 167
1 Fonctions paires 167
2 Fonctions impaires 167
Prendre un bon départ 169
Exercices 170
Notion de fonctions 170
Domaine de définition et tableau de valeurs 172
Tableau de variations 174
Résolution graphique d'équations et d'inéquations 176
Corrigés des exercices 180

1 Définition

1 Introduction

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- l'élever au carré
- soustraire 7

Si on note x le nombre choisi au départ, ce programme donne à la fin le nombre $x^2 - 7$.
Si on décide de noter $r(x)$ le **r**ésultat (dépendant du nombre de départ x) alors :

$$r(x) = x^2 - 7.$$

Si on avait noté a le nombre de départ et $f(a)$ le nombre **f**inal obtenu (dépendant de a), alors on aurait noté :

$$f(a) = a^2 - 7.$$

Ce qui compte est l'expression qui permet d'obtenir le nombre final *en fonction* du nombre de départ.

On dit qu'à tout nombre réel x, ce programme **associe** le nombre $x^2 - 7$, et on note :

$$x \longmapsto x^2 - 7.$$

Il y a donc deux notations pour désigner le fait qu'un nombre est transformé en un autre.

Cette transformation est appelée une **fonction**.

2 Définition mathématique

Définition 38

Soit x un nombre réel.
On appelle **fonction** toute opération sur x qui le transforme en un autre nombre.

Si on note f cette fonction alors le nombre final est noté $f(x)$.
x est appelé **un antécédent** de $f(x)$.
$f(x)$ est appelé **l'image** de x par la fonction f.
On note alors :

$$f \ : \ x \longmapsto f(x)$$

2 Ensemble de définition et ensemble image

1 Ensemble de définition

Définition 39

Soit f une fonction.
L'**ensemble de définition** de f (aussi appelé **domaine de définition**) est l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.
On le note en général $\mathcal{D}_f$.

Exemple 48

1. Si $f : x \longmapsto x^2 - 7$ alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car on peut calculer $x^2 - 7$ pour toutes les valeurs réelles de x.
2. Si $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ alors $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car on peut toujours calculer $\dfrac{1}{x-1}$ sauf si $x = 1$ (car il est impossible de diviser par 0)

2 Ensemble image

Définition 40

Soit f une fonction dont le domaine de définition est $\mathcal{D}_f$.
On appelle **ensemble image** de f l'ensemble de toutes les valeurs que prend $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple 49

Soit $f : x \longmapsto x^2 - 7$. On sait que pour tout x réel, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - 7 \geqslant -7$.
De plus, x pouvant prendre des valeurs de plus en plus grandes, x^2 peut aussi prendre des valeurs de plus en plus grandes, donc il n'y a pas de limite supérieure à x^2, donc à $x^2 - 7$ (on dit que $x^2 - 7$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$).
Ainsi, l'ensemble image de f est $[-7\,;+\infty[$.

Remarque 49

Trouver l'ensemble image d'une fonction n'est pas immédiat. Il sera très souvent nécessaire d'étudier la fonction. C'est l'objet du reste de ce chapitre.

3 Représentation graphique

1 Tableau de valeurs

Définition 41

On considère une fonction f définie sur un intervalle $I = [a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.
On appelle **tableau de valeurs** de f un tableau constitué de deux lignes :

- sur la 1re, sont reportées plusieurs valeurs de x comprises entre a et b ;
- sur la 2e, sont reportées les images des valeurs de x de la 1re ligne.

Remarque 50

Le **pas** des valeurs de x, c'est-à-dire la différence entre chaque valeur de x, est arbitraire : c'est nous qui le choisissons selon le contexte dans lequel nous sommes.

Exemple 50

Soit $f\ :\ x \longmapsto x^2 - 7$. Un tableau de valeurs de f sur $[-5\,;5]$ est :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	18	9	2	-3	-6	-7	-6	-3	2	9	18

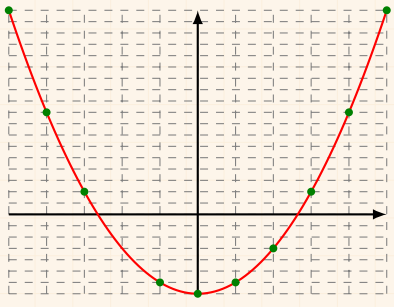
Ici, j'ai pris la décision (ça n'a pas été simple, mais j'y suis tout de même arrivé...) de prendre un pas égal à 1 pour les valeurs de x, c'est-à-dire que je suis parti de la plus petite valeur de x permise (donc $x = -5$ car la fonction est définie sur $[-5\,;5]$) et j'ai avancé en ajoutant 1 à chaque fois, jusqu'à arriver à la plus grande valeur de x permise, donc jusqu'à $x = 5$.
Pour chaque valeur de x, j'ai calculé $f(x)$ (donc $f(-5)$, $f(-4)$, $f(-3)$, ... jusqu'à $f(5)$).

2 Courbe représentative

Définition 42

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
On appelle **courbe représentative** de f dans un repère cartésien l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x\,;f(x))$, pour $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple 51 (courbe représentative)



On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction :

$$f\ :\ x \mapsto x^2 - 7$$

Pour tracer cette courbe, on s'aide du tableau de valeurs établi précédemment en mettant dans le repère les points de coordonnées $(-5\,;18)$, $(-4\,;9)$, ..., $(5\,;18)$.

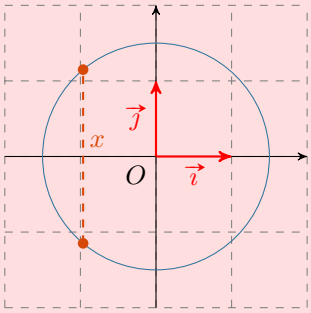
On les relie ensuite de sorte à ce que la courbe finale ne soit pas trop rectiligne.

Remarque 51

La définition de la courbe représentative d'une fonction est très importante. En effet, elle nous permet de savoir l'ordonnée d'un de ses points si on en connaît l'abscisse.
Par exemple, sur la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$, on sait que le point de la courbe représentative de f d'abscisse $x = 2,5$ a pour ordonnée $y = f(2,5) = 2,5^2 - 7 = -0,75$.

Attention 7

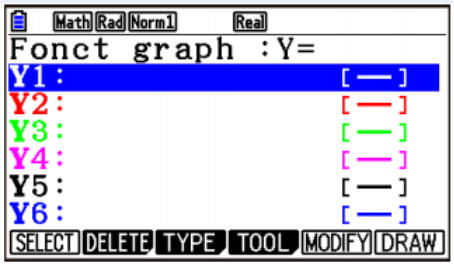
La courbe représentative d'une fonction ne « retourne pas en arrière » ; autrement dit, pour un x donné, il n'y a qu'un seul point sur la courbe dont l'abscisse vaut x. Par exemple, le cercle suivant n'est pas la courbe représentative d'une fonction car pour l'abscisse x indiquée, il y a deux points sur le cercle dont l'abscisse est x :



3 Ce que fait votre calculatrice

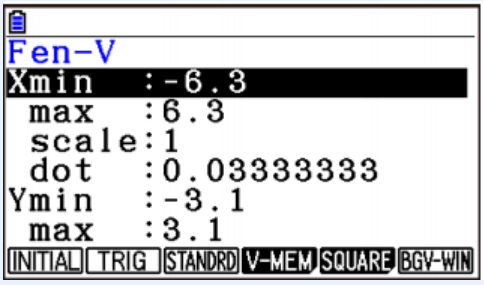
Les captures d'écran ci-dessous sont issues du manuel d'utilisation de la CASIO GRAPH90+.
Pour tracer une courbe sur une calculatrice,

1 il faut avant tout entrer l'expression de la fonction en accédant à un écran ressemblant à celui-ci :



(Exemple : mode **Graphe**)

2 il faut ensuite entrer les paramètres d'affichage en accédant à une fenêtre comme celle-ci :



Ici, `Xmin` représente la plus petite valeur de x du domaine de définition sur lequel on souhaite tracer la courbe. Quant à `Xmax`, cela représente la plus grande valeur de x. Ainsi, pour une fonction définie sur $[-5\,;5]$, on entrera `Xmin=-5` et `Xmax=5`.

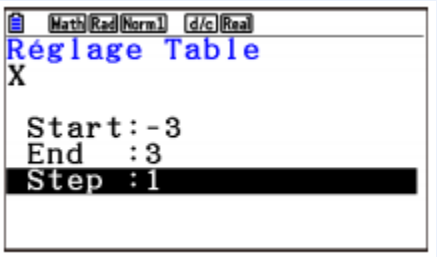
Il va de soit que `Ymin` et `Ymax` jouent le même rôle, mais pour les valeurs des images. Sur l'exemple précédent, d'après le tableau de valeurs, on pourra prendre `Ymin=-7` et `Ymax=18`.

Le paramètre `scale` représente l'échelle des graduations.

Sur la TI89, un paramètre `xres` est présent : pour un tracé très précis, ce paramètre doit valoir 1. Pour un tracé rapide mais moins précis, on peut entrer une valeur de 2 à 10 (si « 10 » est entré, cela sous-entend que la calculatrice prendra 1 pixel sur 10, calculera son image, et tracera un segment de cette image à la suivante).

Votre calculatrice peut aussi construire un tableau de valeurs.
Par exemple, sur la CASIO GRAPH90+, après avoir entré l'expression de la fonction, on devra définir les paramètres du tableau de valeurs :

MENU Table
F5 (SET)
(–) 3 EXE 3 EXE 1 EXE

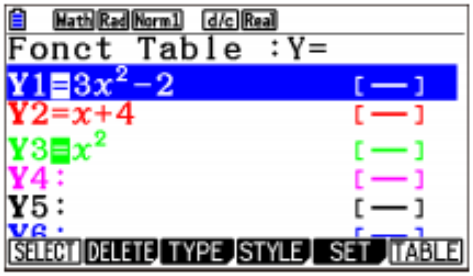


Ici, le paramètre `step` indique le *pas* entre chaque valeurs de x (sur cet exemple, `step=1` stipule que les valeurs de x vont être : -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3).

Voici ci-dessous un extrait du manuel d'utilisation de la CASIO GRAPH90+ permettant de voir comment générer un tableau de valeurs pour trois fonctions ($x \mapsto 3x^2 - 2$, $x \mapsto x + 4$ et $x \mapsto x^2$).

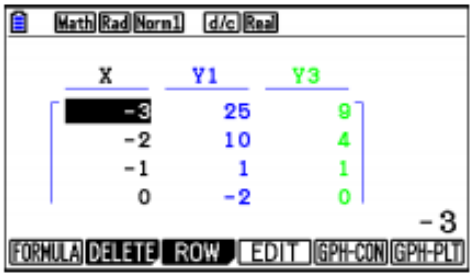
Utilisez ▲ et ▼ pour mettre en surbrillance la fonction que vous voulez sélectionner pour générer le tableau et appuyez sur F1 (SELECT) pour la sélectionner.

Le signe « = » des fonctions sélectionnées est en surbrillance à l'écran. Pour désélectionner une fonction, amenez le curseur sur celle-ci et appuyez une nouvelle fois sur F1 (SELECT).



Appuyez sur F6 (TABLE) pour générer un tableau de chiffres à partir des fonctions sélectionnées. La valeur de la variable x change en fonction de la plage ou du contenu de la liste que vous avez spécifiée.

L'exemple ci-contre montre les résultats obtenus pour la liste 6 (–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3).



Chaque cellule peut contenir jusqu'à six chiffres, signe négatif compris.

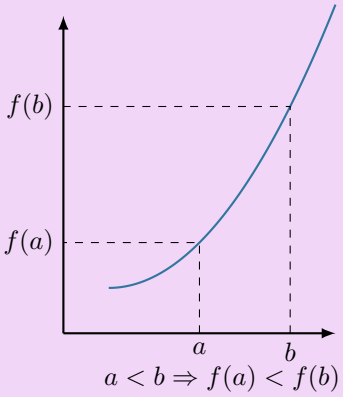
4 Variations d'une fonction

1 Sens de variation

Définition 43

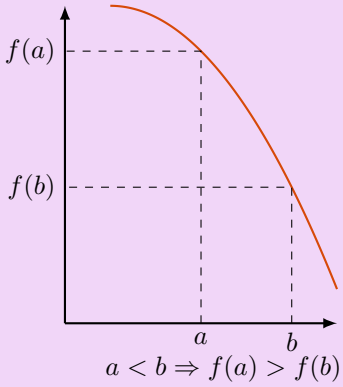
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère deux nombres a et b quelconques dans I tels que $a < b$.

- On dit que f est **strictement croissante sur I** si $f(a) < f(b)$.
- On dit que f est **strictement décroissante sur I** si $f(a) > f(b)$.
- On dit que f est **constante sur I** si $f(a) = f(b)$.



$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

f est strictement croissante

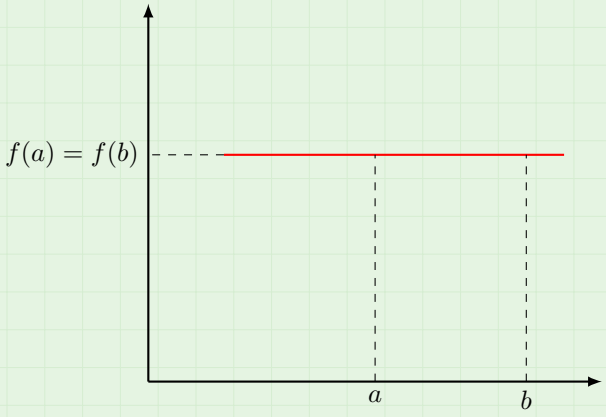


$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

f est strictement décroissante

Remarque 52

- Si f est strictement croissante sur un intervalle I alors les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents.
- Si f est strictement décroissante sur un intervalle I alors les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents.
- Une fonction constante sur un intervalle I sera représentée par une droite (ou segment si l'intervalle est fini) horizontale :



2 Tableau de variations

Définition 44

Soit f une fonction définie sur un domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Le **tableau de variations** de f sur $\mathcal{D}_f$ est un tableau comportant deux lignes :

- sur la 1re sont reportées toutes les valeurs de x importantes (bornes du domaine de définition, valeurs interdites de la fonction, valeurs de x où la fonction change de sens de variation) ;
- sur la 2e sont représentées les variations de f (une flèche montante quand f est croissante, une flèche descendante quand f est décroissante), ainsi éventuellement que la donnée de certaines images.

Exemple 52

D'après la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ donnée dans l'exemple 51, ainsi que du tableau de valeurs de cette fonction, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	-5		0		5
Variations de $f(x)$	18	↘	-7	↗	18

3 Minimum et maximum

Définition 45

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On appelle **minimum** de f sur I la plus petite valeur atteinte par $f(x)$ pour $x \in I$.
- On appelle **maximum** de f sur I la plus grande valeur atteinte par $f(x)$ pour $x \in I$.

Exemple 53

D'après le tableau de variations précédent,

- le minimum de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ sur $[-5\,;5]$ est -7 ;
- le maximum de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ sur $[-5\,;5]$ est 18.

5 Fonctions paires, fonctions impaires

1 Fonctions paires

Définition 46

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est **paire** si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$;
- $f(-x) = f(x)$.

Exemple 54

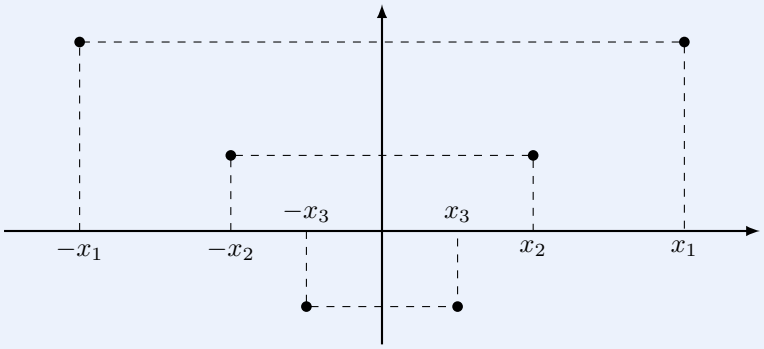
La fonction $f\ :\ x \mapsto x^2 - 7$ est paire car son domaine de définition est $\mathbb{R}$ (donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$) et :

$$f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x).$$

Propriété 30

Si une fonction f est paire alors, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

En effet, on a la situation suivante :



f est paire donc $f(x_1) = f(-x_1)$, $f(x_2) = f(-x_2)$, $f(x_3) = f(-x_3)$, etc.
Les points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

2 Fonctions impaires

Définition 47

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est **impaire** si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$;
- $f(-x) = -f(x)$.

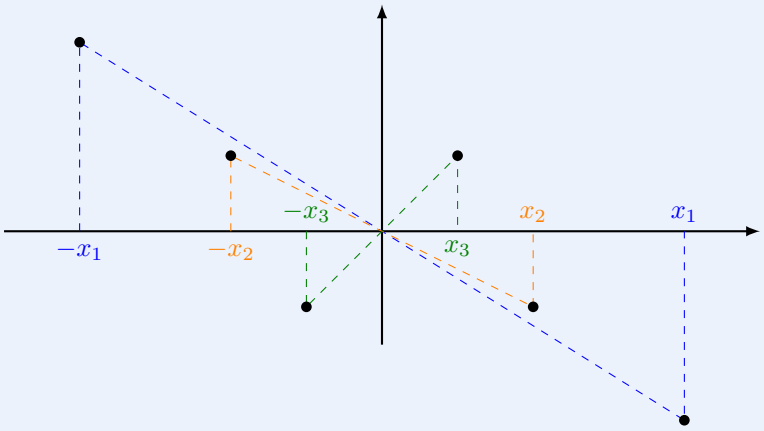
Exemple 55

La fonction $f\ :\ x \mapsto x^3 + x$ est impaire car son domaine de définition est $\mathbb{R}$ (donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$) et :

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

Propriété 31

Si une fonction f est impaire alors, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.



f est impaire donc $f(-x_1) = -f(x_1)$, $f(-x_2) = -f(x_2)$, $f(-x_3) = -f(x_3)$, etc.
Les points sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

7 Prendre un bon départ

Exercice type 23 ▶ Trouver le domaine de définition d'une fonction

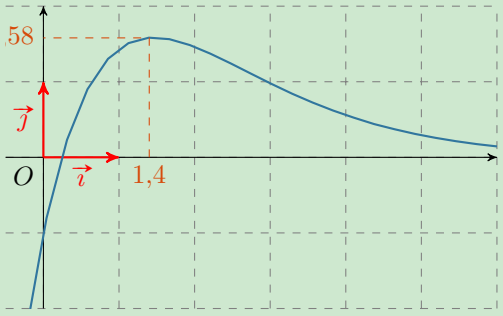
On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{8x-4}$.
Quel est son domaine de définition ?

Le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.
f est une racine carrée donc son radicande (ce qui se trouve à l'intérieur de la racine carrée) doit être supérieur ou égal à 0.
On résout donc l'inéquation :

$$\begin{aligned} 8x-4 \geqslant 0 &\iff 8x \geqslant 4 \\ &\iff x \geqslant \frac{4}{8} \\ &\iff x \geqslant \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Le domaine de définition de f est donc $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice type 24 ▶ Dresser un tableau de variations



On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f sur $\left[-\frac{1}{2}\,;6\right]$.
On sait de plus que $f(-0,5) = -4,45$ et $f(6) = 0,14$.

Construire un tableau de variations complet de f sur $\left[-\frac{1}{2}\,;6\right]$.

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		1,4		6
$f(x)$	4,45	↗	1,58	↘	0,14

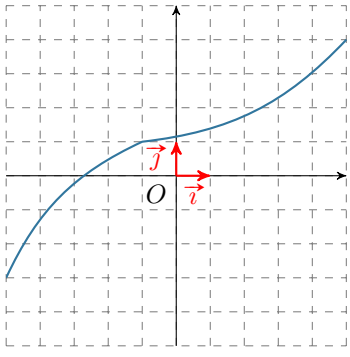
7 Exercices

Notion de fonctions

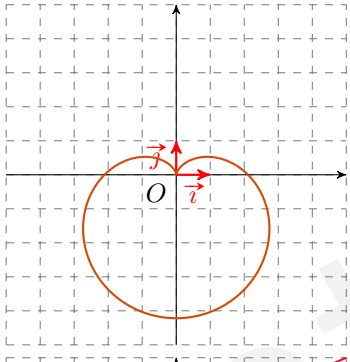
Exercice 7.1 (fonction ou pas fonction ?)

Pour chaque courbe dessinée ci-dessous, dire si elle représente une fonction en justifiant.

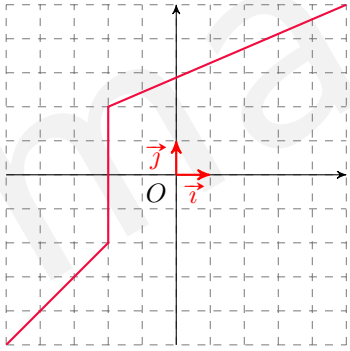
1



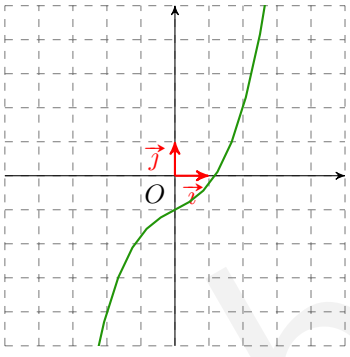
2



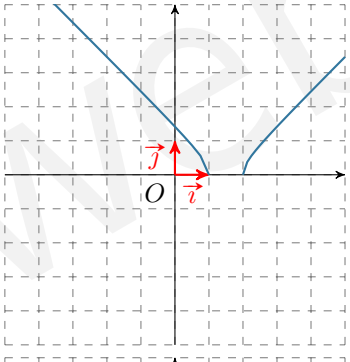
3



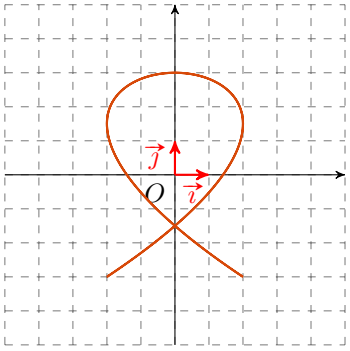
4



5



6



Solution page 180

mathweb.fr

Exercice 7.2 (associer une fonction à une notion)

Dans chacune des situations suivantes, donner l'expression de la fonction associée.

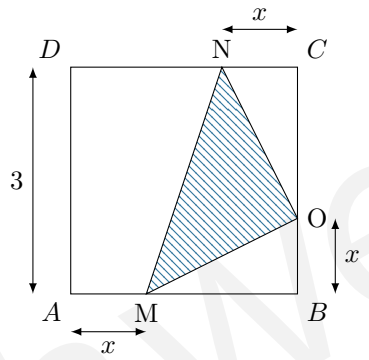
1. Soit $ABCD$ un carré de côté x. p est la fonction qui à x associe le périmètre de $ABCD$.
2. Soit $ABCD$ un carré de côté x. $\mathcal{A}$ est la fonction qui à x associe l'aire de $ABCD$.
3. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 10$ et $AC = x$. f est la fonction qui à x associe l'aire de ABC.
4. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 10$ et $AC = x$. c est la fonction qui à x associe la longueur BC.

Solution page 180

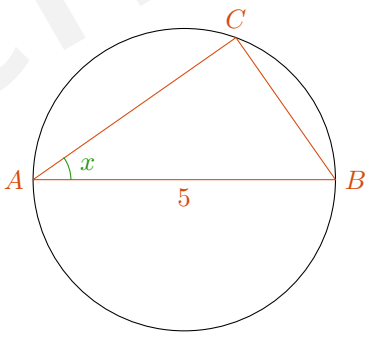
Exercice 7.3 (établir une expression d'une fonction)

Pour chacune des questions suivantes, exprimer $f(x)$ sous sa forme la plus simple, puis donner son domaine de définition.

1. Un complexe sportif est composé de plusieurs activités. Pour pouvoir y avoir accès, on doit payer un droit d'entrée de 5 € puis payer 2 € par heure.
   $f(x)$ représente le prix à payer pour x heures.
2. $f(x)$ représente l'aire hachurée dans le carré $ABCD$ suivant :



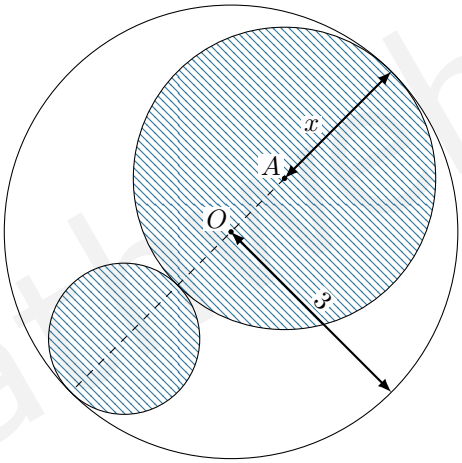
3. $f(x)$ représente l'aire du triangle ABC inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$:



4. On choisit un nombre x. $f(x)$ représente alors la différence entre le carré de son précédent et celui de son suivant.

mathweb.fr

5 $f(x)$ représente l'aire du domaine blanc de la figure suivante, où O est le centre du cercle de rayon 3 et A le centre du cercle de rayon x :



Solution page 181

Exercice 7.4 (fonction impaire)

Soit f une fonction impaire telle que $f(0)$ existe.
Montrer que $f(0) = 0$.

Solution page 182

Domaine de définition et tableau de valeurs

Exercice 7.5 (domaine de définition)

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver leur domaine de définition.

1 $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x-8}$

2 $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$

3 $f_3 : x \mapsto \sqrt{x-7}$

4 $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

5 $f_5 : x \mapsto x^2 - 5x + 1$

6 $f_6 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{-8}{x-1}}$

Solution page 182

Exercice 7.6 (loi d'Ohm)

En sciences physiques, la *loi d'Ohm* dit que la tension U (en volts) entre les bornes d'un résistor de résistance R est égale au produit de l'intensité du courant électrique I (en ampères) et de la valeur de R : $U = R \times I$.

1 Si l'intensité reste constamment égale à 5 ampères, quelle est la fonction $f(R)$ donnant la tension en fonction de la résistance ?

2 Construire un tableau de valeurs de la fonction f sur $[1\,;10]$ avec un pas de 1.

3 Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Solution page 182

mathweb.fr

Exercice 7.7 (tableau de valeurs à la calculatrice)

À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de valeurs donné pour chaque fonction.

1 $f(x) = x^2 - 3x + 6$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

2 $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

x	-1	0	1	2	$2{,}25$	$2{,}5$	$2{,}75$	$3{,}25$	$3{,}5$	$3{,}75$	4	5	6
$g(x)$													

3 $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$h(x)$									

Solution page 183

Exercice 7.8 (appartenance de points à une courbe)

Soit f une fonction et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si le point A (dont les coordonnées sont données à chaque fois) appartient ou non à $\mathcal{C}_f$.

1 $f(x) = -5x + 2$, A$(-1\,;7)$

2 $f(x) = x^2 + x + 1$, A$(-2\,;3)$

3 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, A$(2\,;0{,}25)$

4 $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, A$\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)$

Solution page 184

Exercice 7.9 (images et antécédents)

1 Soit $f(x) = -3x + 2$.

- **a.** Donner l'image des nombres -1, 0 et $\sqrt{2}$ par la fonction f.
- **b.** -1 est-il un antécédent de 1 par la fonction f ?
- **c.** Trouver tous les antécédents de -3 par la fonction f.

2 Soit $g(x) = x^2 - 5x + 2$.

- **a.** Donner l'image des nombres -1, 1 et $\sqrt{2}$ par la fonction g.
- **b.** -2 est-il un antécédent de 1 par la fonction g ?
- **c.** Donner tous les antécédents de 2 par la fonction g.

Solution page 185

Exercice 7.10 (domaine de définition, images, appartenance à une courbe)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-4}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Quel est le domaine de définition de f ? Justifier votre réponse.

2 Calculer l'image de 2 par f, puis l'image de -1 par f.

mathweb.fr

3 Les points suivants sont-ils situés sur $\mathcal{C}$? Justifier votre réponse.

$$A\left(0\,;\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad B\,(15\,;4,27) \quad ; \quad C\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{9}{11}\right).$$

Solution page 185

Tableau de variations

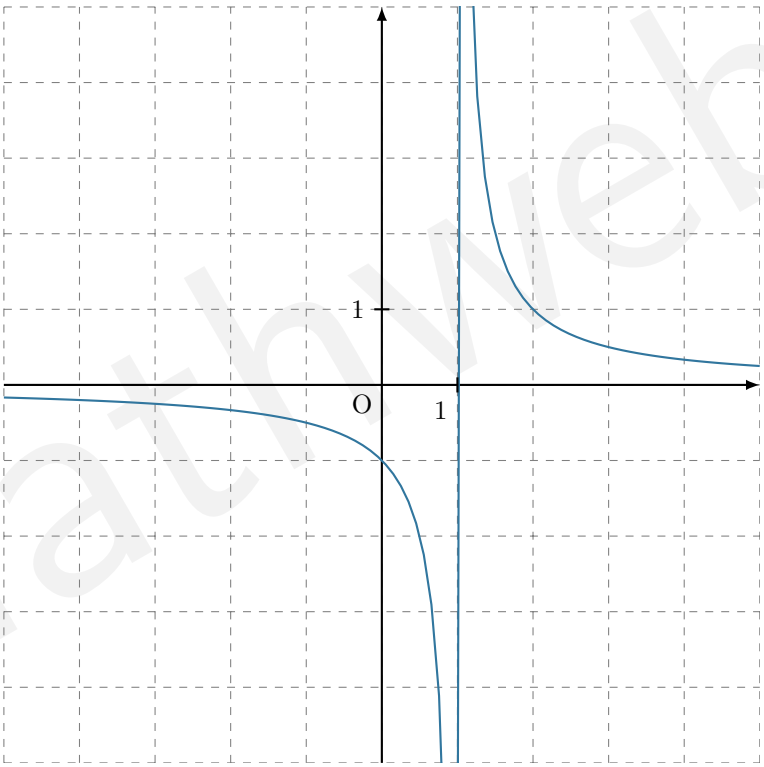
Exercice 7.11 (tableau de variations avec valeur interdite)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé (dessinée à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes) est donnée ci-dessous.

Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.



Solution page 186

mathweb.fr

Exercice 7.12 (lecture d'un tableau de variations)

On considère la fonction f définie sur $[-6\,;5]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-6		-3		0		1		5
$f(x)$	2	↗	5	↘	-3	↗	0	↘	-4

1 Quel est le maximum de la fonction f sur $[-6\,;5]$?

2 Quel est le minimum de la fonction f sur $[-6\,;5]$?

3 Comparer $f(-5)$ et $f(-4)$. Justifier.

4 Peut-on comparer $f(-5)$ et $f(3)$? Justifier.

5 Peut-on comparer $f(-1)$ et $f(4)$? Justifier.

Solution page 186

Exercice 7.13 (lecture d'un tableau de variations)

Le tableau de variations d'une fonction f est donnée ci-dessous.

x	-5		-2		0		3		5
$f(x)$	-4	↘	-5	↗	6	↘	0	↗	4

1 Déterminer le maximum et le minimum de f ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

2 Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$? Justifier votre réponse.

3 Compléter par $<$, $>$, ou ? si on ne peut pas savoir en justifiant votre réponse :

$$f(1)\dots f(2) \quad ; \quad f(-1)\dots f(-2) \quad ; \quad f(-1)\dots f(4) \quad ; \quad f(4)\dots f(-3)$$

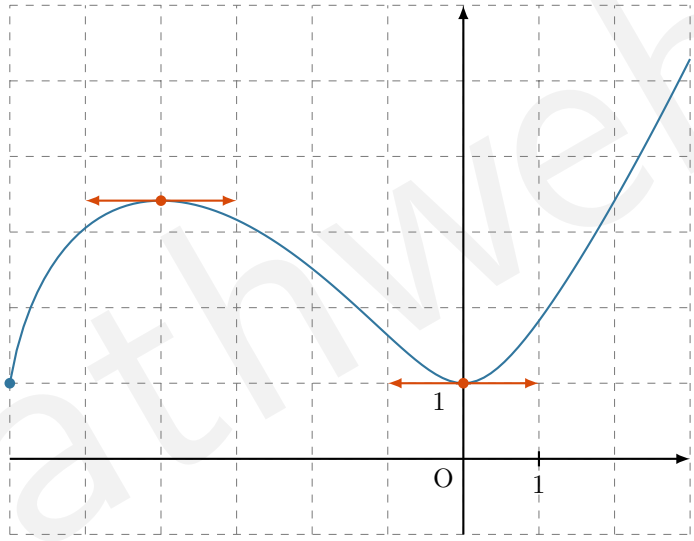
Solution page 187

Exercice 7.14 (tableau de variations)

On considère la fonction f définie sur $[-6\,;3]$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



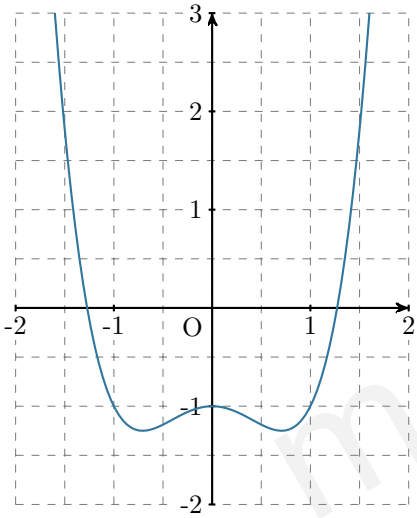
Construire le tableau de variations de f sur $[-6\,;3]$ en précisant les valeurs des extrema locaux (maximum et minimum dans cet intervalle).

Solution page 187

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Exercice 7.15

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;2]$ représentée par la courbe ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

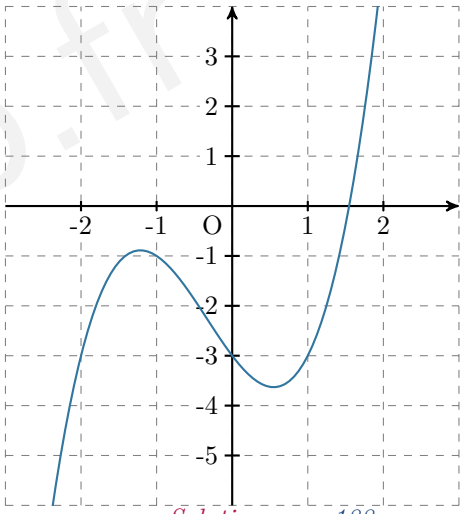
1. Résoudre l'équation : $f(x) = -1$ sur $[-2\,;2]$.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant -1$ sur $[-2\,;2]$.
3. Résoudre l'inéquation : $f(x) < -2$ sur $[-2\,;2]$.

Solution page 187

mathweb.fr

Exercice 7.16

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ représentée par la courbe ci-dessous :



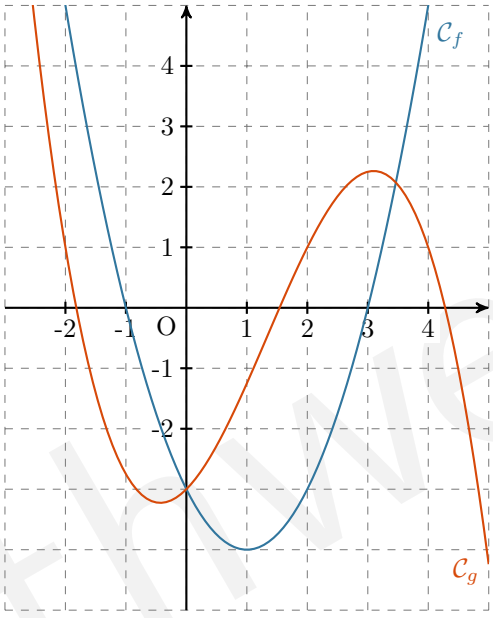
À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$ sur $[-3\,;3]$.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant -3$ sur $[-3\,;3]$.
3. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$ sur $[-3\,;3]$.

Solution page 188

Exercice 7.17

On considère deux fonctions f et g définies sur $[-3\,;5]$ dont les courbes représentatives sont dessinées ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

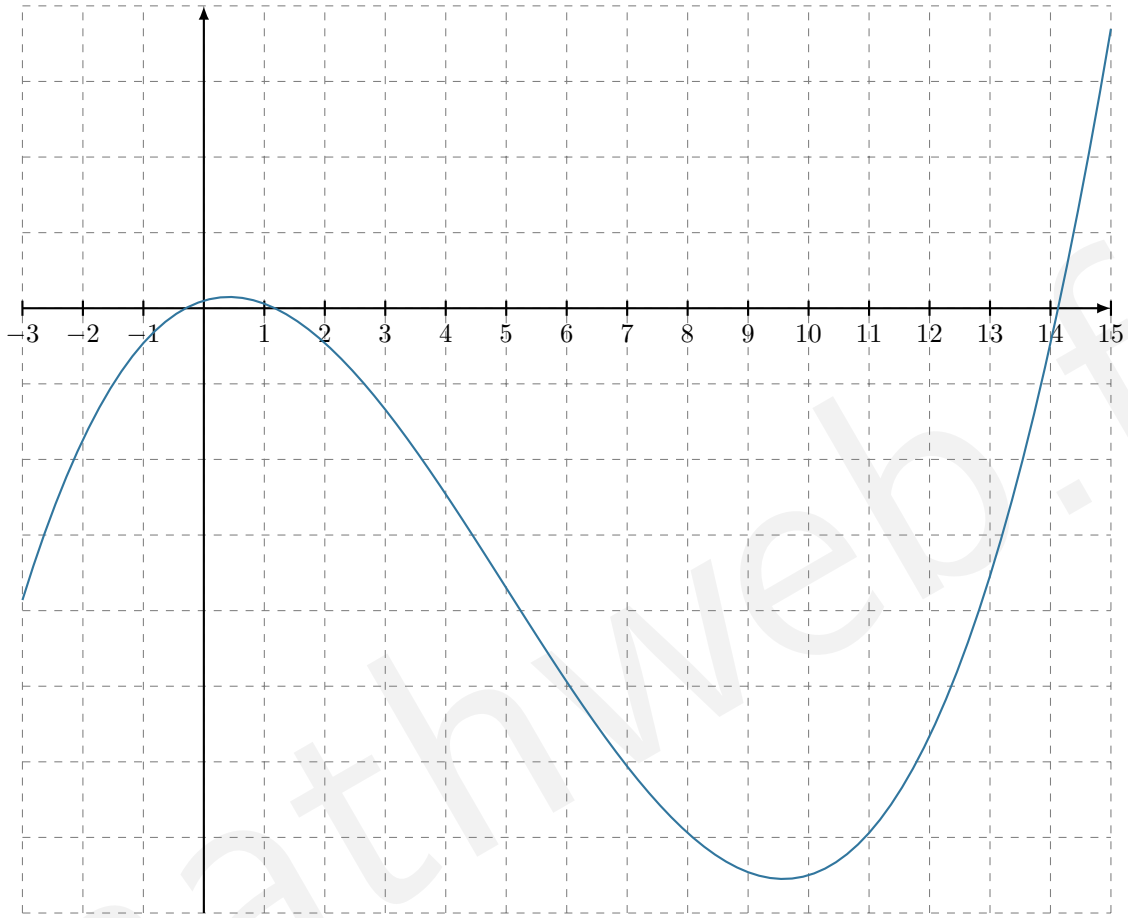
1. Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$ sur $[-5\,;5]$.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[-5\,;5]$.
3. Combien l'équation $g(x) = 3$ possède-t-elle de solution(s) ?
4. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[-5\,;5]$.
5. Dresser un tableau de signes de la fonction g sur $[-5\,;5]$.

Solution page 189

mathweb.fr

Exercice 7.18 (Python)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{12}{5}x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative sur $[-3\,;15]$ est donnée ci-dessous :



Compléter le programme suivant, écrit en Python, afin qu'il calcule l'image de toutes les valeurs de x pour $x \in [0\,;1]$ avec un pas de 0,01 et d'afficher le maximum de f sur cet intervalle ainsi que l'abscisse de ce maximum.

Code Python 7-10

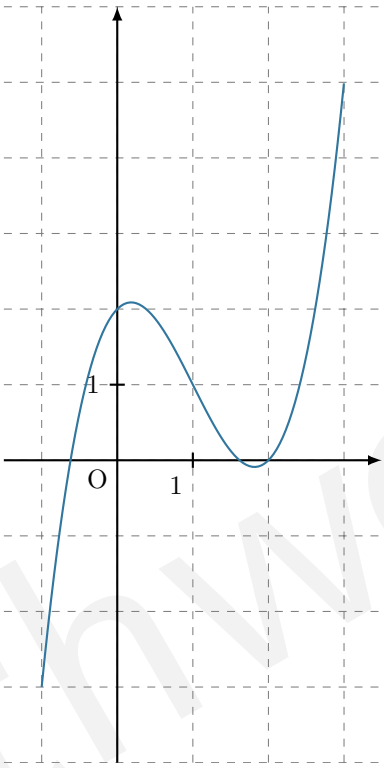
```
M = 0
xmax = 0
x = 0
while x <= ...:
    if 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1 > ...:
        M = 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1
        xmax = ...
    x = x + 0.01
print(xmax,M)
```

Solution page 191

mathweb.fr

Exercice 7.19

On donne la représentation graphique d'une fonction f sur $[-1\,;3]$:



1 Par lectures graphiques, donner :

a. l'image de -1 par la fonction f ;

b. un antécédent entier de 2 par la fonction f ;

c. le nombre de solutions à l'équation $f(x) = 0$

2 On donne : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

a. Montrer que $f(x) = (x-2)\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

b. En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

c. Dresser alors le tableau de signes de f sur $[-1\,;3]$.

Solution page 191

mathweb.fr

7 Corrigés

Corrigé de l'exercice 7.1 page 170

1 La courbe représente bien une fonction malgré la singularité au point d'abscisse -1 (regardez bien ce qui se passe au point de coordonnées $(-1\,;1)$: la courbe se « brise » mais ce n'est pas vraiment grave...). En effet, chaque valeur de x dans $[-5\,;5]$ n'admet qu'une image $f(x)$: si on prend une valeur de x quelconque dans $[-5\,;5]$, on ne peut trouver qu'un seul point de la courbe qui a pour abscisse x.

2 La courbe ne représente pas une fonction car il existe au moins un x pour lequel deux images par f existent. Par exemple, pour $x = 1$, les points de coordonnées $(1\,;0,5)$ et $(1\,;-4)$ sont sur cette courbe.

3 Cette courbe ne représente pas une fonction car on voit qu'il existe plusieurs points de cette courbe dont l'abscisse vaut -2.

4 La courbe représente bien une fonction car sur $[-5\,;5]$, chaque valeur de x admet une unique image.

5 Cette courbe représente bien une fonction malgré le fait qu'elle possède un « trou » sur $[1\,;2]$. En effet, chaque valeur de x dans $[-5\,;1]$ possède une unique image et il en est de même pour chaque valeur de x dans $[2\,;5]$.

6 Cette courbe n'est pas représentative d'une fonction car il existe au moins une valeur de x qui possède deux images. Par exemple, pour $x = 0$, il y a deux images : 3 et $-1,5$.

Corrigé de l'exercice 7.2 page 171

1 Le périmètre d'un carré de côté x est égal à $4x$. Donc :

$$\boxed{p \ : \ x \mapsto 4x \qquad \text{ou} \qquad p(x) = 4x.}$$

2 L'aire d'un carré de côté x est égale à x^2. Donc :

$$\boxed{\mathcal{A} \ : \ x \mapsto x^2 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A}(x) = x^2.}$$

3 L'aire de ABC est égale à $\dfrac{AB \times AC}{2}$ car il est rectangle en A.

$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{10 \times x}{2} = 5x.$$

Donc :

$$\boxed{f \ : \ x \mapsto 5x \qquad \text{ou} \qquad f(x) = 5x.}$$

4 D'après le théorème de Pythagore,

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{10^2 + x^2} = \sqrt{100 + x^2}.$$

Donc :

$$\boxed{c \ : \ x \mapsto \sqrt{100 + x^2} \qquad \text{ou} \qquad c(x) = \sqrt{100 + x^2}.}$$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 7.3 page 171

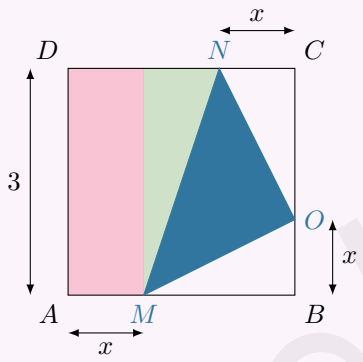
1 $f(x) = 5 + 2x$. Son domaine de définition est $[0\,;+\infty[$ car x ne peut pas être négatif (vu que x représente un nombre d'heures).

2

- L'aire du carré $ABCD$ est : 9.
- L'aire des triangles MBO et NCO est : $\dfrac{x(3-x)}{2}$.
- L'aire du trapèze $AMND$ est la somme des aires des figures rouge clair et verte :

$$3x + \frac{3(3-2x)}{2} = \frac{6x+9-6x}{2} = \frac{9}{2}$$

(soit la moitié de l'aire du carré $ABCD$... coïncidence ? Je ne crois pas...)



L'aire du triangle MON est donc :

$$f(x) = 9 - \frac{9}{2} - 2 \times \frac{x(3-x)}{2} = \frac{9}{2} - x(3-x) = x^2 - 3x + \frac{9}{2}.$$

Son domaine de définition est $[0\,;3]$ car x ne peut pas être négatif ni plus grand que la mesure d'un côté de ABCD.

3 Le triangle ABC est rectangle en C donc :

$$\cos x = \frac{AC}{5} \quad ; \quad \sin x = \frac{BC}{5}$$

donc $AC = 5\cos x$ et $BC = 5\sin x$.
L'aire de ABC est donc $f(x) = \dfrac{AC \times BC}{2} = \dfrac{25}{2}\sin x \cos x$.
x étant un angle aigu, le domaine de définition de f est $]0\,;90[$, si x est exprimé en degrés.

4 Le carré du précédent de x est $(x-1)^2$.
Le carré du suivant de x est $(x+1)^2$.
Ainsi, $f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2 = -4x$. C'est une fonction linéaire dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

5 L'aire du disque de rayon 3 est : 9π (formule : $\pi \times r^2$).
L'aire du disque de rayon x est : πx^2.
L'aire du « petit disque » est : $(3-x)^2\pi$.

Ainsi, l'aire blanche est :

$$\begin{aligned} 9\pi - \pi x^2 - (3-x)^2\pi &= \left[9 - x^2 - (9 - 6x + x^2)\right]\pi \\ &= (6x - 2x^2)\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 2x(3-x)\pi}$$

Le domaine de définition de f est $[0\,;3]$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 7.4 page 172

f est impaire donc pour tout x de son domaine de définition, $f(-x) = -f(x)$.

$f(0)$ existe donc, en remplaçant x par 0 dans l'égalité $f(-x) = -f(x)$, on a les équivalences page suivante.

$$\begin{aligned} f(-0) = -f(0) &\iff f(0) = -f(0) \\ &\iff f(0) + f(0) = 0 \\ &\iff 2f(0) = 0 \\ &\iff \frac{2f(0)}{2} = \frac{0}{2} \\ &\iff \underline{f(0) = 0}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.5 page 172

1 $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x-8}$ est définie pour toutes les valeurs de x sauf quand $x - 8 = 0$ car le dénominateur d'une fraction ne peut pas être égal à 0.
Or $x - 8 = 0 \iff x = 8$; donc il faut enlever « 8 » à l'ensemble des nombre réels pour que $f_1(x)$ existe.
$\underline{\text{Donc } \mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{8\}.}$

2 $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$ est définie pour toutes les valeurs de x sauf pour les valeurs telles que $x^2 - 4 = 0$.
Or, $x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$.
On doit donc enlever à $\mathbb{R}$ les valeurs -2 et 2.

$\underline{\text{Donc } \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}.}$

3 $f_3 : x \mapsto \sqrt{x-7}$ est définie uniquement si $x - 7 \geqslant 0$, donc si $x \geqslant 7$.
$\underline{\text{Ainsi, } \mathcal{D}_{f_3} = [7\,;+\infty[.}$

4 $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est définie uniquement si $x^2 + 1 \geqslant 0$. Or, pour toutes les valeurs de x réelles, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1$. Donc $f_4(x)$ existe toujours, quelle que soit la valeur de x.

$\underline{\text{Donc } \mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}.}$

5 $f_5 : x \mapsto x^2 - 5x + 1$ est définie pour toutes les valeurs que x peut prendre car on peut toujours calculer $x^2 - 5x + 1$.

$\underline{\text{Donc } \mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}.}$

6 $f_6 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{-8}{x-1}}$ est définie uniquement si $\dfrac{-8}{x-1} \geqslant 0$ et si $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire si $x - 1 < 0$, soit $x < 1$.
$\underline{\text{Donc } \mathcal{D}_{f_6} =]-\infty\,;1[.}$

Corrigé de l'exercice 7.6 page 172

1 $f(R) = U = RI = 5R$ d'après la loi d'Ohm.

2 Tableau de valeurs de la fonction f sur $[1\,;10]$ avec un pas de 1 :

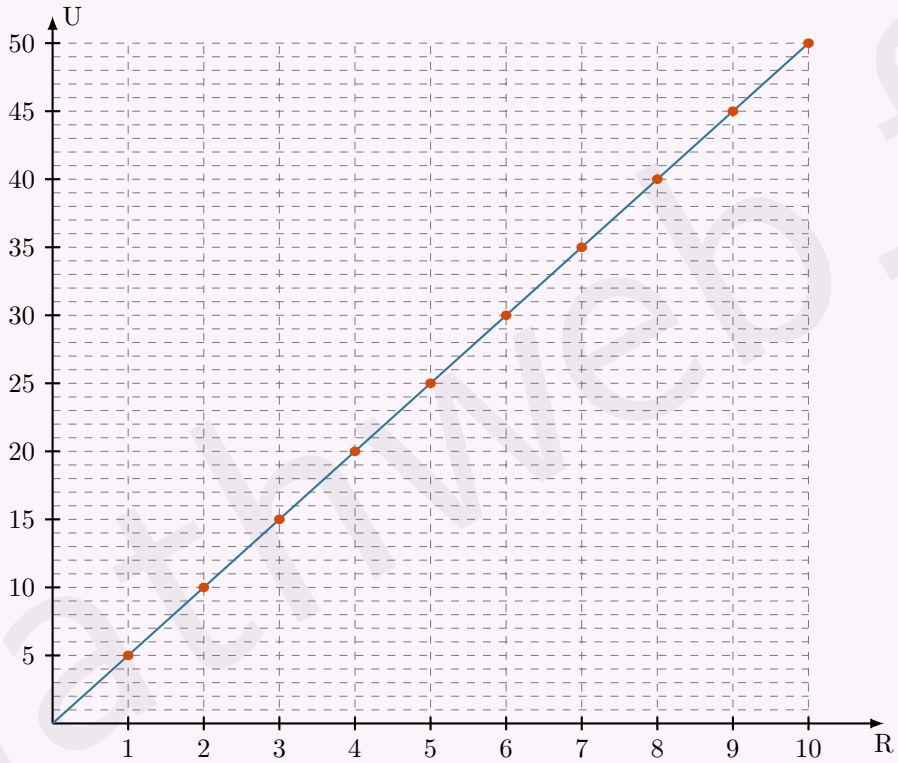
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(R)$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Remarque 58

C'est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité égal à 5.

mathweb.fr

3 Courbe représentative de f dans un repère orthonormé :



Remarque 59

On reconnaît ici la représentation d'une fonction linéaire : c'est une droite qui passe par l'origine du repère.

Corrigé de l'exercice 7.7 page 173

Sur CASIO, appuyer sur la touche [MENU], puis appuyer sur la touche [7] (ou sélectionner [TABLE]).
Ensuite, entrer l'expression de chaque fonction en Y1, Y2 et Y3. Noter que la touche [X,t,θ,n] est à utiliser pour la variable X. Valider en appuyant sur la touche [EXE].
Pour construire le tableau de valeurs d'une fonction, positionnez-vous sur la ligne correspondant à la fonction souhaitée, puis appuyer sur la touche [F5] (SET) pour paramétrer la valeur initiale et la valeur finale de x, en précisant le pas (Step).

Sur TI, appuyer sur la touche [$f(x)$] pour rentrer l'expression des fonctions en Y1, Y2 et Y3. Noter que la touche [X,t,θ,n] est à utiliser pour la variable X. Valider en appuyant sur la touche [ENTRER].
Pour paramétrer le tableau de valeurs, appuyer sur [2nd]+[F4] (afin de sélectionner "TblSet").

Sur NUMWORKS, c'est bien plus simple : après avoir entré l'expression de la fonction (en choisissant « Fonctions » dans le menu principal, sélectionner « Afficher les valeurs » et aller sur « Régler l'intervalle » au-dessus du tableau.

1 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -5
- End : 5
- Step : 1

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -5
- Δtbl : 1

mathweb.fr

On obtient :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	46	34	24	16	10	6	4	4	6	10	16

2 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -1
- End : 6
- Step : 0.25

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -1
- Δtbl : 0.25

On obtient :

x	-1	0	1	2	2,25	2,5	2,75	3,25	3,5	3,75	4	5	6
$g(x)$	$-0,25$	$-0,333$	$-0,5$	-1	$-1,333$	-2	-4	4	2	1,333	1	0,5	0,333

3 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -2
- End : 2
- Step : 0.5

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -2
- Δtbl : 0.5

On obtient :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$	0	1,323	1,732	1,936	2	1,936	1,732	1,323	0

Corrigé de l'exercice 7.8 page 173

Remarque 60

Pour voir si un point appartient à la courbe représentative d'une fonction f, on doit vérifier si son ordonnée est égale à l'image de son abscisse par la fonction f ; autrement dit,

$$M(x\,;y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x).$$

1 $f(x) = -5x + 2$, A$(-1\,;7)$.
$f(-1) = -5 \times (-1) + 2 = 5 + 2 = 7 = y_A$. Donc $\underline{\text{A}\in \mathcal{C}_f}$.

2 $f(x) = x^2 + x + 1$, A$(-2\,;3)$.
$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 2 + 1 = 3 = y_A$ donc $\underline{\text{A}\in \mathcal{C}_f}$.

3 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, A$(2\,;0,25)$.
$f(2) = \dfrac{1}{2^2+1} = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5} = 0,2 \neq y_A$. Donc $\underline{\text{A}\notin \mathcal{C}_f}$.

4 $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, A$\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)$.
$f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{\sqrt{2}^2+1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} = y_A$ donc $\underline{\text{A}\in \mathcal{C}_f}$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 7.9 page 173

1 Soit $f(x) = -3x + 2$.

a. Donner l'image des nombres -1, 0 et $\sqrt{2}$ par la fonction f.

$$f(-1) = -3 \times (-1) + 2 = 5 \quad ; \quad f(0) = -3 \times 0 + 2 = 2 \quad ;$$
$$\underline{f(\sqrt{2}) = -3\sqrt{2} + 2.}$$

b. -1 est-il un antécédent de 1 par la fonction f ?
$f(-1) = -3 \times (-1) + 2 = 3 + 2 = 5 \neq 1$.
$\underline{-1 \text{ n'est donc pas un antécédent de 1 par la fonction } f.}$

c. Trouver tous les antécédents de -3 par la fonction f.
Rechercher les antécédents de -3 par f revient à trouver toutes les valeurs de x telles que $f(x) = -3$. Il faut donc résoudre cette équation.

$$\begin{aligned} f(x) = -3 &\iff -3x + 2 = -3 \\ &\iff -3x = -5 \\ &\iff x = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$\underline{\text{Ainsi, le seul antécédent de } -3 \text{ par } f \text{ est } \frac{5}{3}.}$

2 $g(x) = x^2 - 5x + 2$.

a. Donner l'image des nombres -1, 1 et $\sqrt{2}$ par la fonction g.

$$g(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 2 = 8 \quad ; \quad g(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 2 = -2 \quad ;$$
$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 - 5\sqrt{2} + 2 = \underline{4 - 5\sqrt{2}}.$$

b. -2 est-il un antécédent de 1 par la fonction g ?
$g(-2) = (-2)^2 - 5(-2) + 2 = 4 + 10 + 2 = 16 \neq 1$.
$\underline{-2 \text{ n'est donc pas un antécédent de 1 par } g.}$

c. Donner tous les antécédents de 2 par la fonction g.

$$\begin{aligned} g(x) = 2 &\iff x^2 - 5x + 2 = 2 \\ &\iff x^2 - 5x = 0 \\ &\iff x(x - 5) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$

$\underline{\text{Les antécédents de 2 par } g \text{ sont donc 0 et 5.}}$

Corrigé de l'exercice 7.10 page 173

1 Le nombre $f(x)$ est défini quand son dénominateur n'est pas égal à zéro.
Or, $x - 4 = 0 \iff x = 4$. Donc la fonction f admet une valeur interdite : $x = 4$.
$\underline{\text{Par conséquent, le domaine de définition de } f \text{ est : } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}.}$

2 L'image de 2 par la fonction f est :

$$f(2) = \frac{3 \times 2 + 2}{2 - 4} = \frac{8}{-2} = \boxed{-4}$$

L'image de -1 par la fonction f est :

$$f(-1) = \frac{3(-1) + 2}{-1 - 4} = \frac{-1}{-5} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

mathweb.fr

3 Un point de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ quand $y = f(x)$.

- $f(0) = \dfrac{3\times 0+2}{0-4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, donc $A\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right) \in \mathcal{C}$.
- $f(15) = \dfrac{3\times 15+2}{15-4} = \dfrac{47}{11} \approx 4,272727\cdots \neq 4,27$, donc $B\,(15\,;4,27) \notin \mathcal{C}$.

Attention 9

Il faut que l'ordonnée du point soit exactement égale à l'image de son abscisse pour que le point appartienne à la courbe. Ici, l'image de 15 n'est pas exactement égale à 4,27, donc le point B ne sera pas exactement sur la courbe, mais « juste à côté ».

- $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3\times\frac{1}{3}+2}{\frac{1}{3}-4} = \dfrac{3}{\frac{-11}{3}} = \dfrac{-9}{11}$, donc $C\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{9}{11}\right) \in \mathcal{C}$.

Corrigé de l'exercice 7.11 page 174

Avant de construire le tableau de variations de f, remarquons qu'il a été tracée une droite verticale en $x = 1$. Cette droite ne fait pas partie de la courbe mais a été tracé par le logiciel automatiquement pour signifier qu'en $x = 1$, il y a une valeur interdite. En effet, l'expression de la fonction montre que l'on divise par $x - 1$ et que ce n'est pas possible de le faire quand $x - 1 = 0$, soit quand $x = 1$.

De plus, il semblerait que la courbe se rapproche de l'axe des abscisses aux infinis, donc que $f(x)$ se rapproche de 0 aux infinis.
Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	0
		$-\infty$			

Corrigé de l'exercice 7.12 page 175

1 Le maximum de la fonction f sur $[-6\,;5]$ est 5 ; il est atteint pour $x = -3$.

2 Le minimum de la fonction f sur $[-6\,;5]$ est -4 ; il est atteint pour $x = 5$.

3 $-6 < -5 < -4 < -3$. De plus, sur $[-6\,;-3]$, f est strictement croissante donc $f(-6) < f(-5) < f(-4) < f(-3)$ (les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents quand la fonction est strictement croissante).
Ainsi, $f(-5) < f(-4)$.

4 $-6 < -5 < -3$ et f est strictement croissante sur $[-6\,;-3]$ donc $f(-6) < f(-5) < f(-3)$, soit $2 < f(-5) < 5$.
De plus, $1 < 3 < 5$ et f est strictement décroissante sur $[1\,;5]$ donc $f(1) > f(3) > f(5)$, soit $0 > f(3) > -4$, que l'on peut aussi écrire : $-4 < f(3) < 0$.
Donc $f(3)$ est négatif et $f(-5)$ est positif.
Ainsi, $f(-5) > f(3)$.

5 De la même manière, $-3 < f(-1) < 5$ et $-4 < f(4) < 0$. On ne peut donc pas comparer $f(-1)$ et $f(4)$ car les intervalles sur lesquels ils sont (à savoir $]-3\,;5[$ et $]-4\,;0[$) ne sont pas disjoints, c'est-à-dire que leur intersection n'est pas vide.

Corrigé de l'exercice 7.13 page 175

1
- Le maximum de f est 6 ; il est atteint pour $x = 0$.
- Le minimum de f est -5 ; il est atteint pour $x = -2$.

2 L'équation $f(x) = 4$ admet exactement 3 solutions. En effet,
- Sur $[-5\,;-2]$, $f(x)$ passe de -4 à -5, donc ne passe pas par 4 ;
- sur $[-2\,;0]$, $f(x)$ passe de -5 à 6, donc passe par 4 une fois ;
- sur $[0\,;3]$, $f(x)$ passe de 6 à 0, donc passe par 4 une fois ;
- sur $[3\,;5]$, $f(x)$ passe de 0 à 4, donc passe par 4 une fois (à la fin).

3
- Sur $[0\,;3]$, f est strictement décroissante, donc :
$$1 < 2 \iff f(1) > f(2).$$
- Sur $[-2\,;0]$, f est strictement croissante, donc :
$$-1 > -2 \iff f(-1) > f(-2).$$
- Sur $[-1\,;4]$, f n'est pas monotone et les valeurs de $f(0)$ et $f(3)$ ne peuvent pas nous permettre d'ordonner $f(-1)$ et $f(4)$ donc :
$$f(-1) \quad ? \quad f(4).$$
- Sur $[-3\,;4]$, f n'est pas monotone mais, d'après les valeurs des images mises dans le tableau de variations, $f(-3) < 0$ et $f(4) > 0$. Donc :
$$f(4) > f(-3).$$

Corrigé de l'exercice 7.14 page 176

Avant de construire le tableau de variations de f, calculons la valeur du minimum et du maximum :

- il y a un maximum pour $x = -4$, et :
$$f(-4) = \sqrt{\frac{1}{3} \times (-4)^3 + 2 \times (-4)^2 + 1} = \sqrt{-\frac{64}{3} + 32 + 1} = \sqrt{\frac{35}{3}}.$$
- il y a un minimum pour $x = 0$ et $f(0) = 1$.
- $f(-6) = 1$.
- $f(3) = 2\sqrt{7}$.

Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	-6		-4		0		3
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{\frac{35}{3}}$	↘	1	↗	$2\sqrt{7}$

Corrigé de l'exercice 7.15 page 176

1 La droite horizontale passant par $y = -1$ coupe la courbe en 3 points d'abscisses respectives -1, 0 et 1. Ainsi, l'équation $f(x) = -1$ admet pour ensemble solution :

$$\boxed{S = \{-1\,;0\,;1\}}$$

mathweb.fr

2 Les parties de la courbe se trouvant au-dessus de la droite horizontale passant par $y = -1$ (ou sur cette droite) se trouvent respectivement sur $[-2\,;-1]$, $[1\,;2]$ et au point d'abscisse 0. L'inéquation $f(x) \geqslant -1$ admet donc pour ensemble solution :

$$\boxed{S = [-2\,;-1] \cup \{0\} \cup [1\,;2]}$$

3 La courbe n'est jamais sous la droite horizontale passant par $y = -2$ donc l'inéquation $f(x) < -2$ admet pour ensemble solution :

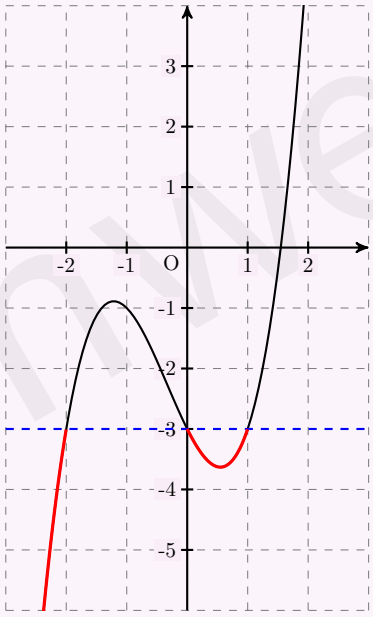
$\boxed{S = \varnothing}$ (ensemble vide)

Corrigé de l'exercice 7.16 page 177

1 La courbe semble couper l'axe des abscisses en $x = 1,5 = \dfrac{3}{2}$. Ainsi, $f(x) = 0$ admet pour ensemble solution :

$$\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

2 Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -3$ sont les valeurs de x pour lesquelles les points de la courbe d'abscisse x sont sous la droite horizontale passant par $y = -3$, donc sur les parties en rouge ci-dessous :

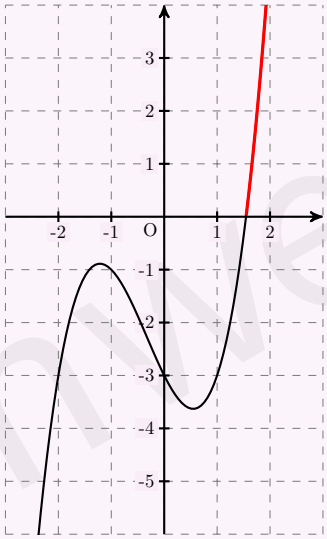


Ces parties sont sur les intervalles $[-3\,;-2]$ et $[0\,;1]$ donc l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leqslant -3$ est :

$$\boxed{S = [-3\,;-2] \cup [0\,;1]}$$

mathweb.fr

3 Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles les points de la courbe d'abscisse x sont au-dessus de l'axe des abscisses, donc sur la branche rouge ci-dessous :

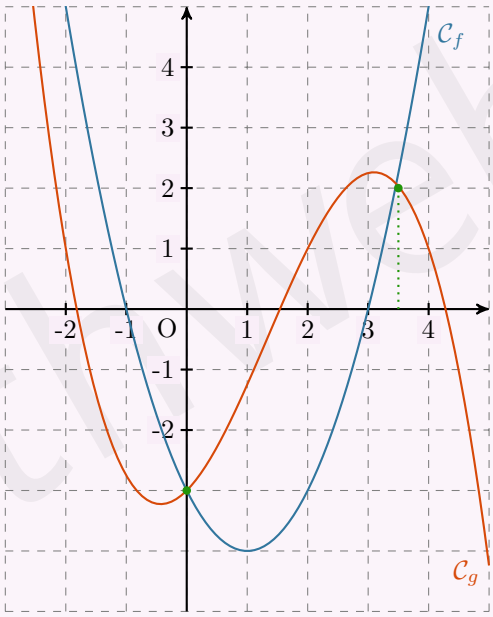


Donc l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > 0$ sur $[-3\,;3]$ est :

$$\boxed{S = \left]\frac{3}{2}\,;3\right]}$$

Corrigé de l'exercice 7.17 page 177

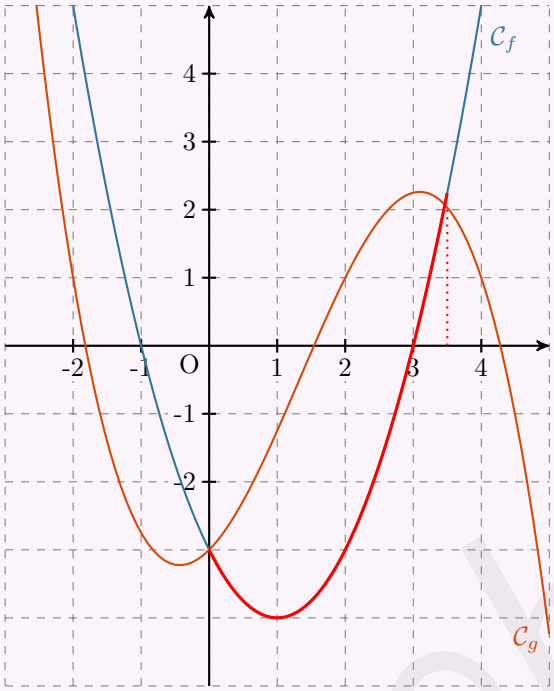
1 Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Il y a deux points d'intersection (en rouge).



Les solutions à l'équation $f(x) = g(x)$ sont donc $x = 0$ et $x = 3,5$.

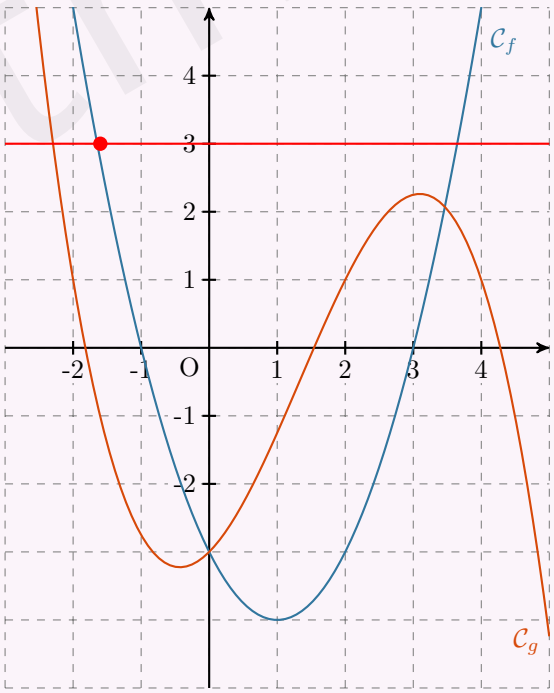
mathweb.fr

2 Repassons en rouge la partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sous $\mathcal{C}_g$:



La partie repassée en rouge correspond aux images des x compris entre 0 à 3,5.
Donc, l'inéquation a pour solution l'intervalle $[0\,;3,5]$.

3 Pour savoir combien l'équation $f(x) = 3$ admet de solution(s), on regarde combien il y a de points d'intersection entre la droite d'équation $y = 3$ et $\mathcal{C}_f$:



Il n'y a qu'un seul point d'intersection donc il n'y a qu'une solution à l'équation $f(x) = 3$.

mathweb.fr

4 Le tableau de variations de la fonction g est :

x	-5		$-0,5$		$3,1$		5
$g(x)$		↘	$-3,2$	↗	$2,2$	↘	$-4,2$

5 Le tableau de signes de la fonction g est :

x	-5		$-1,9$		$1,5$		$4,4$		5
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque 61

Les valeurs mises pour les deux dernières réponses sont approximatives.

Corrigé de l'exercice 7.18 page 178

Le programme Python complété est le suivant.

Code Python 7-12

```
1 M, xmax, x = 0,0,0
2 while x <= 1:
3     if 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1 > M:
4         M = 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1
5         xmax = x
6     x = x + 0.01
7 print(xmax,M)
```

Explications :

- `while x <= 1` : les instructions dans la boucle « `while` » sont exécutées tant que la valeur de `x` est inférieure ou égale à 1. En effet, on veut les images des x qui sont dans $[0\,;1]$.
- `if 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1 > M` : si $f(x) > M$ c'est que M n'est pas le maximum de la fonction f, donc il faut remplacer la valeur mise dans `M` par $f(x)$: `M = 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1`. Dans ce cas, `xmax` représente la valeur de x pour laquelle on atteint ce maximum, donc la valeur du `x` sur laquelle on est actuellement dans la boucle « while ».

Le programme affiche alors `xmax=0,42` et `M=1,4936176`.

Remarque 62

Si vous suivez l'enseignement de spécialité en 1re, vous saurez démontrer qu'en fait, l'abscisse du maximum est $x = 5 - \sqrt{21} \approx 0,4174$.

Corrigé de l'exercice 7.19 page 179

1 Par lectures graphiques,

a. l'image de -1 par la fonction f est -3 ;

b. un antécédent entier de 2 par la fonction f est 0 car $f(0) = 2$;

c. le nombre de solutions à l'équation $f(x) = 0$ est 3 car la courbe coupe trois fois l'axe des abscisses.

2 **a.** Développons :

$$\begin{aligned}
&(x-2)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\
=&(x-2)\left(x^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\
=&(x-2)\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\
=&(x-2)\left(x^2-x+\frac{1^2-\sqrt{5}^2}{4}\right)\\
=&(x-2)(x^2-x-1)\\
=&x^3-x^2-x-2x^2+2x+2\\
=&x^3-3x^2+x+2\\
=&f(x).
\end{aligned}$$

b. $f(x)=0 \iff (x-2)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$

$\iff x-2=0$ ou $x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=0$ ou $x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=0$

$\iff x=2$ ou $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

L'ensemble solution de l'équation $f(x)=0$ est donc :

$$S=\left\{2;\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

c. Le tableau de signes de f peut être obtenu à partir de sa représentation graphique :

x	-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		2		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

mathweb.fr

8 Fonctions affines et linéaires. Tableaux de signes.

Dans ce chapitre

1 Fonctions affines et linéaires 194
1 Fonctions affines 194
a Définition 194
b Signe d'une fonction affine 194
2 Fonctions linéaires 195
2 Équations-produits 196
3 Inéquations-produits 197
1 Définition et méthode de résolution 197
2 Exemple de résolution 197
4 Inéquations-quotients 198
1 Définition et méthode de résolution 198
2 Exemple de résolution 198
Prendre un bon départ 199
Exercices 201
Fonctions affines 201
Tableaux de signes 204
Corrigés des exercices 206

1 Fonctions affines et linéaires

1 Fonctions affines

a Définition

Définition 48

Une fonction f est une **fonction affine** si, pour tout réel x,

$$f(x) = mx + p \quad , \quad m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}.$$

Une fonction affine est représentée dans un repère par une droite. Tout ce qui a été vu dans le chapitre 6 sera donc utile quand on parlera de fonctions affines.

m est donc le **coefficient directeur** de la droite représentative de la fonction, et p est l'**ordonnée à l'origine**, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

b Signe d'une fonction affine

Propriété 32 (signe d'une fonction affine)

Soit $f(x) = mx + p$, où $m \neq 0$.

- Si $m < 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- Si $m > 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

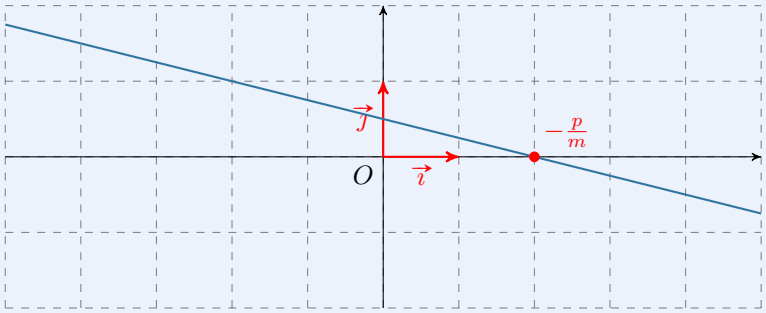
x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

En effet,

- d'une part, résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff mx + p = 0 \iff mx = -p \iff x = -\frac{p}{m} \text{ car } m \neq 0.$$

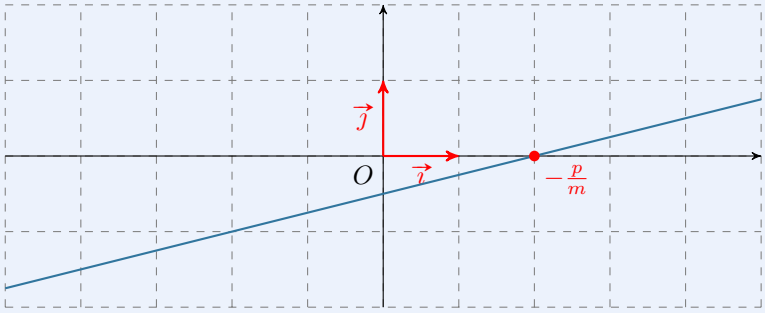
- d'autre part, si $m < 0$ alors la fonction est décroissante. On a donc la situation suivante :



La droite est **au-dessus** de l'axe des abscisses pour $x < -\dfrac{p}{m}$, ce qui signifie que $f(x) > 0$ sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{p}{m}\right[$, et donc $f(x) < 0$ sur $\left]-\dfrac{p}{m}\,;+\infty\right[$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Et si $m > 0$, la fonction est croissante :



La droite est **en dessous** de l'axe des abscisses pour $x < -\dfrac{p}{m}$, ce qui signifie que $f(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{p}{m}\right[$, et donc $f(x) > 0$ sur $\left]-\dfrac{p}{m}\,;+\infty\right[$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Remarque 63

Dans le cas où $m = 0$, $f(x) = p$ donc $f(x)$ est du signe de p sur $\mathbb{R}$.

2 Fonctions linéaires

Définition 49

Une fonction f est une **fonction linéaire** si pour tout réel x,

$$f(x) = mx \quad , \quad m \in \mathbb{R}.$$

C'est un cas particulier de fonctions affines.
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Propriété 33

Soit $f(x) = mx$, avec $m \neq 0$.

- Si $m < 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- Si $m > 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2 Équations-produits

Définition 50

Une **équation-produit** (sous-entendu *équation-produit nul*) est une équation dont un membre est le produit de plusieurs fonctions affines ou linéaires et dont le second membre est le nombre 0.

Exemple 56

1. $(2x-1)(3x+8) = 0$ est une équation-produit. Le membre de gauche est le produit des fonctions affines $x \mapsto 2x-1$ et $x \mapsto 3x+8$.
2. $-2x(5-3x) = 0$ est aussi une équation-produit. Le membre de gauche est le produit de la fonction linéaire $x \mapsto -2x$ et de la fonction affine $x \mapsto 5-3x$.

Théorème 1 (du produit nul : TPN)

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Exemple 57

$$\begin{aligned}(2x-1)(3x+8) = 0 &\iff 2x-1=0 \quad \text{ou} \quad 3x+8=0\\ &\iff 2x=1 \quad \text{ou} \quad 3x=-8\\ &\iff x=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(2x-1)(3x+8)=0$ est donc $S = \left\{\frac{1}{2}\,;\,-\frac{8}{3}\right\}$.

3 Inéquations-produits

1 Définition et méthode de résolution

Définition 51

Une **inéquation-produit** (sous-entendu *inéquation-produit nul*) est une inéquation dont un membre est le produit de plusieurs fonctions affines ou linéaires et dont le second membre est le nombre 0.

Exemple 58

1. $(2x-1)(3x+8) < 0$ est une inéquation-produit.
2. $(8x-7)(6x-3)(7x+1) \geqslant 0$ est une inéquation-produit.

Remarque 64

Pour résoudre une inéquation-produit,

- on cherche le signe de chaque facteur ;
- on dresse un tableau dans lequel chaque ligne contient les différents signes de chaque facteur (1 ligne par facteur) ;
- la dernière ligne est le signe « bilan », trouvé avec la règle des signes.

2 Exemple de résolution

On souhaite résoudre l'inéquation : $(3x-5)(-7x-8) \leqslant 0$.

- **On cherche le signe de chaque facteur.**
  Pour cela, on résout les inéquations suivantes (ou on utilise la propriété 32).

$$3x-5>0 \iff 3x>5 \iff x>\frac{5}{3}$$

$$-7x-8>0 \iff -7x>8 \iff x<-\frac{8}{7}$$

- **On en déduit le tableau de signes.**

x	$-\infty$		$-\frac{8}{7}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-7x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x-5)(-7x-8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est ici négatif ou nul — Le produit est ici négatif ou nul

Donc l'ensemble solution de l'inéquation est : $S = \left]-\infty\,;-\frac{8}{7}\right] \cup \left[\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$.

4 Inéquations-quotients

1 Définition et méthode de résolution

Définition 52

Une **inéquation-quotient** est une inéquation où un membre est de la forme $\dfrac{N(x)}{D(x)}$, où $N(x)$ et $D(x)$ sont des produits de fonctions affines.

Exemple 59

1. $\dfrac{3-2x}{7x+6} \geqslant 0$ est une inéquation-quotient.
2. $\dfrac{(8x+5)(6x-3)}{x+1} < 0$ est une inéquation-quotient.

Pour résoudre une inéquation-quotient, on procède de la même façon que pour les inéquations-produits, à ceci près que l'on doit toujours exclure sur la dernière ligne du tableau de signes les valeurs de x qui annulent le dénominateur. Cela se traduit par des **doubles barres**, symbolisées par « $\|$ », au niveau des valeurs de x à exclure.

2 Exemple de résolution

On souhaite résoudre l'inéquation : $\dfrac{(7x-21)(20-5x)}{8x+16} \geqslant 0$.

En utilisant la propriété 32 pour connaître le signe des facteurs, on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		4		$+\infty$
$7x-21$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$20-5x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$8x+16$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Quotient		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

On exclut $x = -2$ car le dénominateur du quotient s'annule pour cette valeur ; le quotient n'est donc pas défini ici.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $S =]-\infty\,;-2[\cup [3\,;4]$ (on exclut -2).

8 Prendre un bon départ

Exercice type 25 ▶ Etablir l'expression d'une fonction affine

Quelle est l'expression de la fonction affine f telle que $f(3) = 1$ et $f(5) = 7$?

Notons $f(x) = ax + b$.

- $f(3) = 1 \iff a \times 3 + b = 1 \iff b = 1 - 3a$.
- $f(5) = 7 \iff a \times 5 + b = 7 \iff b = 7 - 5a$.

On en déduit que :

$$1 - 3a = 7 - 5a \iff -3a + 5a = 7 - 1 \iff 2a = 6 \iff a = 3.$$

On en déduit alors que $b = 1 - 3a = 1 - 3 \times 3 = 1 - 9 = -8$.

Ainsi, $f(x) = 3x - 8$.

Autre méthode : on calcule le coefficient directeur de la manière suivante.

$$a = \frac{f(3) - f(5)}{3 - 5} = \frac{1 - 7}{3 - 5} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Ainsi, $f(x) = 3x + b$. Pour trouve la valeur de b, on peut partir de l'égalité :

$$f(3) = 1 \iff 3 \times 3 + b = 1 \iff b = 1 - 9 = -8.$$

Ainsi, $f(x) = 3x - 8$.

Exercice type 26 ▶ Traduire une situation à l'aide d'une fonction affine

Un *Laser Game* propose à ses clients deux tarifs :

- 7 € la partie de 20 minutes sans abonnement ;
- 5 € la partie de 20 minutes avec un abonnement à 30 € pour un mois.

Pour x parties dans un mois, on note $f(x)$ la fonction représentant le tarif à payer sans abonnement, et par $g(x)$ la fonction représentant le tarif à payer avec un abonnement.

Donner l'expression de $f(x)$ et $g(x)$.

$f(x) = 7x$. En effet, sans abonnement, on paie 7 € pour 1 partie donc, pour x parties, on doit payer $x \times 7$ €.

$g(x) = 30 + 5x$. En effet, avec abonnement, on doit payer 30 € pour le mois auxquels s'ajoutent x parties à 5 € pour un montant de $5x$ €.

Exercice type 27 ▶ Inéquation produit

Résoudre l'inéquation : $(x-1)(x+2) \leqslant 0$.

- $x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$.
- $x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$.

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation est alors $[-2\,;1]$.

Exercice type 28 ▶ Inéquation quotient

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x-1}{x+2} \leqslant 0$.

- $x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$.
- $x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$.

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation est alors $]-2\,;1]$.

⚠ Attention 10

Quand on résout une inéquation quotient, il ne faut jamais oublier la double barre sur la dernière ligne (s'il y a des valeurs interdites comme ici).

8 Exercices

Fonctions affines

Exercice 8.1 (établir l'expression de la fonction)

f est une fonction affine. Déterminer son expression dans chacun des cas suivants.

1. $f(0) = 2$ et $f(1) = 5$.
2. $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.
3. $f(-3) = 2$ et $f(2) = -3$.
4. $f(5) = 1$ et $f(-5) = 2$.

Solution page 206

Exercice 8.2 (établir l'expression de la fonction)

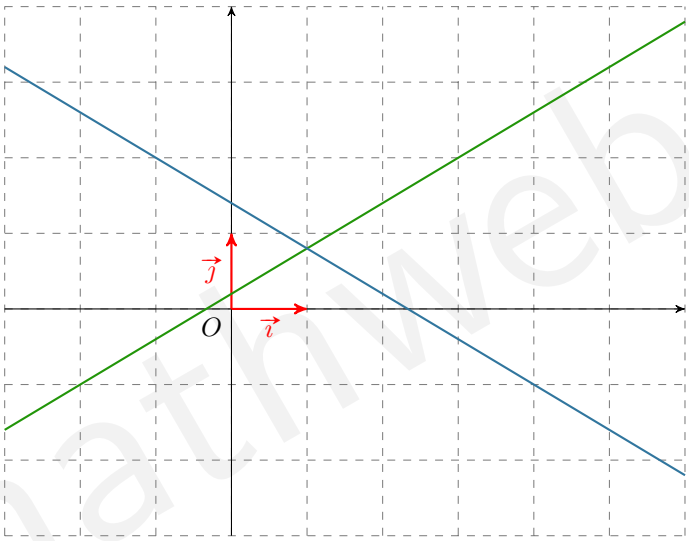
f est une fonction affine. On note $\mathcal{D}$ sa représentation graphique. Dans chacun des cas suivants, donner son expression.

1. $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur -3 et passe par le point $A\,(0\,;2)$.
2. $\mathcal{D}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et passe par le point $B\,(-1\,;0)$.
3. $\mathcal{D}$ passe par les points $A\,(-3\,;5)$ et $B\,(2\,;-1)$.

Solution page 206

Exercice 8.3 (établir l'expression de la fonction)

On donne ci-dessous la représentation de deux fonctions affines f (en vert) et g (en bleu) :



Déterminer une expression de $f(x)$ et $g(x)$.

Solution page 207

mathweb.fr

Exercice 8.4 (le zéro absolu)

Guillaume Amontons, physicien du XVIIe siècle fit une expérience : il a calculé la pression d'un gaz (exprimée en kPa - kilo-Pascal) en fonction de la température (exprimée en degré Celsius). Il a obtenu les résultats suivants :

Température (°C)	Pression (kPa)
0	100
50	118,3
100	136,6

On note $p(t)$ la fonction qui donne la pression du gaz (en kPa) pour une température de t °C. On suppose que $p(t) = at + b$.

1 Calculer les valeurs de a et b.

2 Pour quelle valeur théorique de la température la pression serait-elle nulle ?

Solution page 208

Exercice 8.5 (taxi)

La compagnie de taxis « Charles à temps » propose les tarifs suivants :

- 1,40 € / km
- 0,25 € / min

1 Combien devra-t-on payer pour une course de 22,7 km faite en 22 minutes ?

2 **a.** Je dois le rendre à 50 km de chez moi. Je note $f(t)$ la fonction représentant le prix que je devrai payer pour un trajet fait en t minutes .
Quelle est l'expression de $f(t)$?

b. Je n'ai que 30 minutes pour faire mon trajet. Je note $g(x)$ la fonction représentant le prix que je devrai payer pour x kilomètres parcourus.
Quelle est l'expression de $g(x)$?

3 **a.** Je dois me rendre à un endroit situé à 17 km de chez moi. En combien de temps au maximum le trajet doit-il être fait pour dépenser au maximum 30 € ?

b. Est-ce réalisable sachant que je suis en ville et que la vitesse moyenne est d'environ 35 km/h ?

Solution page 209

Exercice 8.6 (fonction définie par morceaux)

Une entreprise vend des vis au poids. Le prix est de :

- 0,15 € par gramme jusqu'à 100 grammes ;
- 0,07 € par gramme supplémentaire jusqu'à 200 grammes ;
- 0,05 € par gramme au-delà.

1 Quel est le coût total pour 52 grammes ? 130 grammes ? 220 grammes ?

2 On note $f(x)$ le prix à payer pour x grammes de vis achetées.

a. Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0\,;100]$, $x \in]100\,;200]$ et $x \in]200\,;+\infty]$.

3 Quelle quantité de vis a-t-on achetée si l'on a payé 11,25 € ? 19,20 € ? 57 € ?

Solution page 210

mathweb.fr

Exercice 8.7 (fonction par morceaux)

Dans un magasin bio, on peut acheter des lentilles en fonction de la masse selon la tarification suivante :

- 0,05 € par gramme jusqu'à 50 grammes ;
- 0,03 € par gramme supplémentaire jusqu'à 150 grammes ;
- 0,02 € par gramme au-delà.

1 Quel est le coût total pour 20 grammes ? 100 grammes ? 200 grammes ?

2 On note $f(x)$ le prix à payer pour x grammes de lentilles achetées.

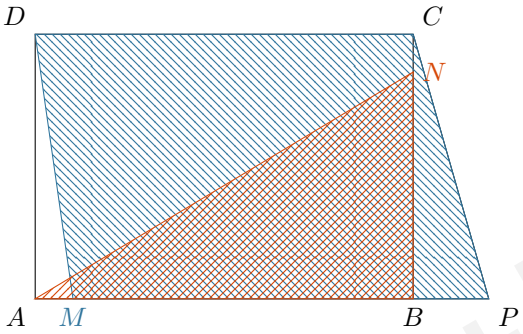
a. Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0\,;50]$, $x \in]50\,;150]$ et $x \in]150\,;+\infty]$.

3 Quelle quantité de lentilles a-t-on achetée si l'on a payé 2,25 € ? 4,75 € ? 12,50 € ?

Solution page 211

Exercice 8.8

On considère la figure suivante :



On donne :

- $AB = 10$, $AD = 7$
- M est un point de $[AB]$ tel que $AM = x$
- N est un point de $[BC]$
- $BP = 2x$, $CN = x$
- $f(x)$ représente l'aire de $MPCD$
- $g(x)$ représente l'aire de ABN

1 Donner le domaine de définition des fonctions f et g.

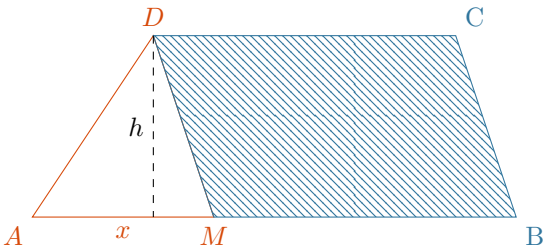
2 Donner l'expression de $f(x)$.

3 Donner l'expression de $g(x)$.

4 Pour quelle valeur de x l'aire de $MPCD$ est-elle égale au triple de celle de ABN ?

Solution page 212

Exercice 8.9



$ABCD$ est un trapèze de hauteur $h = 6$ avec $AB = 17$ et $CD = 9$.

À tout point M du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.

On note f la fonction telle que le nombre $f(x)$ est égal à l'aire du trapèze $MBCD$.

1 Quel est le domaine de définition de f ?

2 Justifier que $f(x) = 78 - 3x$.

3 Déterminer la position du point M pour que l'aire de $MBCD$ soit supérieure ou égale à la moitié de celle de $ABCD$.

Solution page 213

mathweb.fr

Exercice 8.10

Soit f la fonction affine définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + b \qquad \text{avec} \qquad f(3) = -1.$$

Lequel des quatre tableaux de variation suivants est celui de la fonction f ?

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$C(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$B(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$D(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

Solution page 213

Tableaux de signes

Exercice 8.11 (comparaison de deux fonctions)

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (4x-1)(2-3x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = -6x^2 - 5x + 6.$$

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g.

1 **a.** Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
b. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

2 **a.** Vérifier que $f(x) - g(x) = -2(x-2)(3x-2)$.
b. Étudier alors la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
c. Comparer alors sans calcul $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Solution page 214

Exercice 8.12 (inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $(4x-5)^2 \leqslant (12x-15)(1-x)$ **2** $3x^3 > 12x$

Solution page 215

Exercice 8.13 (position relative de courbes)

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x^2 - x + 7 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 7x + 7.$$

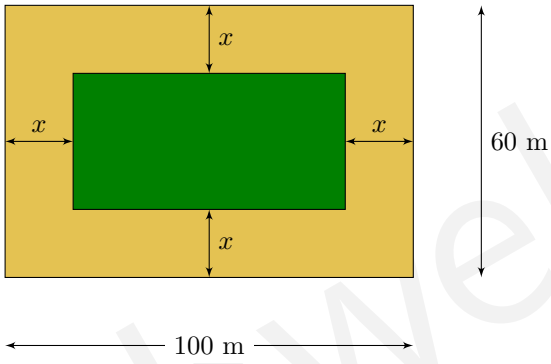
1 Vérifier que $f(x) - g(x) = 2x(1-x)(x+3)$.

2 Déterminer alors la position relative des courbes représentatives des deux fonctions.

Solution page 215

Exercice 8.14 (mise en inéquation)

Un jardin à forme rectangulaire est représenté ci-dessous (partie verte) :



On note $f(x)$ l'aire (en m^2) de la partie extérieure à l'espace vert.

1 Montrer que $f(x) = -4x(x - 80)$.

2 Montrer que $f(x) = -4(x - 40)^2 + 6\,400$.

On souhaite savoir pour quelles valeurs de x cette aire est inférieure ou égale à 1 500 m^2.

3 Montrer alors que $(75 - x)(x - 5) \leqslant 0$.

4 Résoudre cette dernière inéquation et conclure.

Solution page 216

Exercice 8.15 (inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $(3x - 2)(5x - 7) \geqslant 0$

2 $(5x - 1)(-x + 9)(2x + 1) > 0$

3 $\dfrac{2x+1}{2x-1} - \dfrac{2x-1}{2x+1} < \dfrac{2x+6}{4x^2-1}$

4 $\dfrac{5x+4}{2x-3} + \dfrac{(8-x)(10x+8)}{(2x-3)^2} \leqslant 0$

5 $\dfrac{(4-3x)(9x^2-10x-3)}{2x-7} < 4 - 3x$

6 $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x(x^2-1)}$

7 $\dfrac{1-2x}{16x^2-9} \geqslant \dfrac{1-2x}{4x+3}$

Solution page 217

mathweb.fr

8 Corrigés

Corrigé de l'exercice 8.1 page 201

Posons $f(x) = ax + b$.

1 $f(0) = 2$ et $f(1) = 5$.

- $f(0) = 2 \iff a \times 0 + b = 2 \iff b = 2$. Donc $f(x) = ax + 2$.
- $f(1) = 5 \iff a \times 1 + 2 = 5 \iff a = 5 - 2 = 3$.

Ainsi, $f(x) = 3x + 2$.

2 $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.

- $f(-1) = -1 \iff a \times (-1) + b = -1 \iff -a + b = -1 \iff b = -1 + a$.
- $f(1) = 1 \iff a \times 1 + b = 1$
  $\iff a + b = 1$
  $\iff a + (-1 + a) = 1$
  $\iff 2a = 2$
  $\iff a = 1$.

On en déduit que $b = -1 + a = -1 + 1 = 0$, et donc $f(x) = x$.

3 $f(-3) = 2$ et $f(2) = -3$.

- $f(2) = -3 \iff 2a + b = -3 \iff b = -3 - 2a$.
- $f(-3) = 2 \iff -3a + b = 2 \iff b = 2 + 3a$.

On en déduit :

$$-3 - 2a = 2 + 3a \iff -2a - 3a = 2 + 3 \iff -5a = 5 \iff a = -1$$

et donc :

$$b = 2 + 3a = 2 + 3 \times (-1) = 2 - 3 = -1.$$

Finalement, $f(x) = -x - 1$.

4 $f(5) = 1$ et $f(-5) = 2$.

- $f(5) = 1 \iff 5a + b = 1 \iff b = 1 - 5a$.
- $f(-5) = 2 \iff -5a + b = 2 \iff b = 2 + 5a$.

On en déduit que :

$$1 - 5a = 2 + 5a \iff -5a - 5a = 2 - 1 \iff -10a = 1 \iff a = -\frac{1}{10}$$

et donc :

$$b = 1 - 5a = 1 - 5 \times \left(-\frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{5}{10} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Finalement, $\boxed{f(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{3}{2}}$.

Corrigé de l'exercice 8.2 page 201

1 $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur -3 et passe par le point $A(0\,;2)$.

- $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur -3 donc $f(x) = -3x + p$.
- $\mathcal{D}$ passe par le point $A(0\,;2)$ donc $f(0) = 2$, soit $p = 2$. Ainsi, $f(x) = -3x + 2$.

mathweb.fr

2 $\mathcal{D}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et passe par le point $B(-1\,;0)$.

- $\mathcal{D}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 donc $f(0)=1$, c'est-à-dire $f(x)=mx+1$.
- $\mathcal{D}$ passe par le point $B(-1\,;0)$ donc $f(-1)=0$, soit $-m+1=0$, donc $m=1$.

Finalement, $f(x)=x+1$.

3 $\mathcal{D}$ passe par les points $A(-3\,;5)$ et $B(2\,;-1)$. Posons $f(x)=mx+p$.

- $\mathcal{D}$ passe par le point $A(-3\,;5)$ donc $f(-3)=5$, soit $-3m+p=5$, et donc $p=5+3m$.
- $\mathcal{D}$ passe par le point $B(2\,;-1)$ donc $f(2)=-1$, soit $2m+p=-1$, et donc $p=-1-2m$.

On en déduit alors que :

$$5+3m=-1-2m \iff 3m+2m=-1-5 \iff 5m=-6 \iff m=-\frac{6}{5}$$

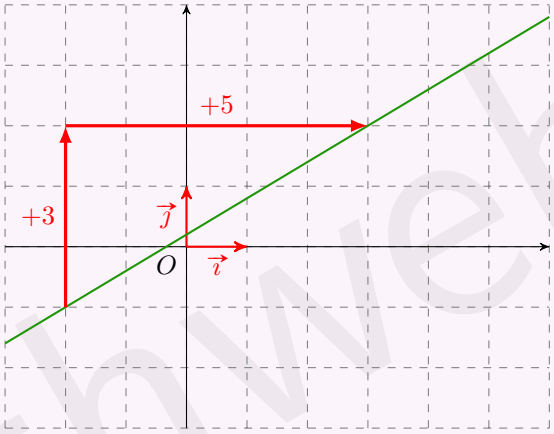
et donc :

$$p=5+3m=5+3\times\left(-\frac{6}{5}\right)=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}.$$

Finalement, $\boxed{f(x)=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}}$.

Corrigé de l'exercice 8.3 page 201

- Détermination de $f(x)=mx+p$.
  On prend deux points de la droite verte dont les coordonnées sont entières (si possible) : ici, $A(-2\,;-1)$ et $B(3\,;2)$.
  Pour aller de A à B, on fait : $+3$ en y (à la verticale) pour $+5$ en x (à l'horizontale). Le coefficient directeur est donc $m=\frac{3}{5}$.



Pour trouver l'ordonnée à l'origine, qui n'est pas très visible sur le schéma, on exploite le fait que le point $B(3\,;2)$ appartient à la droite et donc que ses coordonnées vérifient l'équation. Autrement dit, on remplace x et y par les coordonnées :

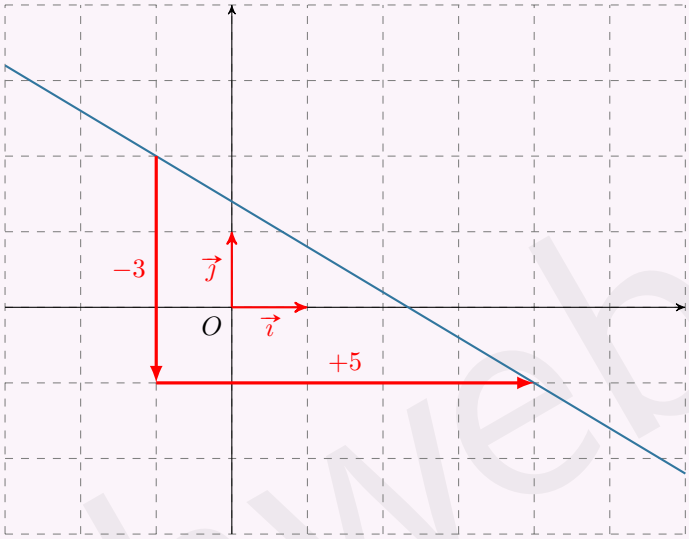
$$\begin{aligned} B\in(AB) &\iff y_B=\frac{3}{5}x_B+p \\ &\iff 2=\frac{3}{5}\times 3+p \\ &\iff p=2-\frac{9}{5}=\frac{10}{5}-\frac{9}{5}=\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}}$$

mathweb.fr

- Détermination de $g(x) = m'x + p'$.
  On prend deux points de la droite : $C\,(-1\,;2)$ et $D\,(4\,;-1)$.



On obtient un coefficient directeur $m' = \frac{-3}{5}$. Ainsi, $g(x) = -\frac{3}{5}x + p'$.

$$\begin{aligned} D \in (CD) &\iff y_D = -\frac{3}{5}x_D + p' \\ &\iff -1 = -\frac{3}{5} \times 4 + p' \\ &\iff p = -1 + \frac{12}{5} = \frac{-5+12}{5} = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{g(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}}$$

Remarque 66

Pour déterminer la valeur de p et p', sous avons pris les points B et D, mais nous aurions pu aussi prendre les points A et C.

Corrigé de l'exercice 8.4 page 202

1 $p(t) = at + b$.

- $a = \dfrac{p(50) - p(0)}{50 - 0} = \dfrac{118,3 - 100}{50} = 0,366.$
- $b = p(0) = 100.$

Donc, $p(t) = 0,366t + 100$.

2 On doit résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} p(t) = 0 &\iff 0,366t + 100 = 0 \\ &\iff 0,366t = -100 \\ &\iff t = -\frac{100}{0,366} \approx -273. \end{aligned}$$

Ainsi, en théorie, pour une température de -273°C, la pression serait nulle.

Cette dernière valeur (-273°C) est appelée « le zéro absolu » et constitue l'origine de l'échelle *Kelvin* (le zéro absolu est égal à 0 degré Kelvin).

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 8.5 page 202

1 Selon les tarifs proposés, si une course fait 22,7 km et que je paie 1,40 €/km, cela me fera :

$$22,7 \times 1,40 = 31,78 \text{ €}.$$

À cela s'ajoute le prix que je dois payer pour 22 minutes sachant que je dois payer 0,25 €/min, donc :

$$22 \times 0,25 = 5,5 \text{ €}.$$

Je devrais donc payer :

$$31,78 + 5,5 = 37,28 \text{ €}.$$

2 **a.** Dans cette question, je connais la distance (50 km), donc je sais que je vais payer :

$$50 \times 1,40 = 70 \text{ €}$$

en plus de 0,25 € par minute, donc en plus de $0,25t$ (car un trajet dure t minutes). Donc :

$$\boxed{f(t) = 0,25t + 70}$$

b. Dans cette question, je connais le temps (30 minutes) donc je sais que je vais payer :

$$0,25 \times 30 = 7,5 \text{ €}$$

en plus de 1,40 € par kilomètre, donc en plus de $1,4x$ pour x km de parcourus. Donc :

$$\boxed{g(x) = 1,4x + 7,5}$$

3 Si je note x le nombre de kilomètres et t le nombre de minutes d'une course, alors le prix à payer est :

$$1,4x + 0,25t.$$

a. Dans cette question, je sais que $x = 17$ et je cherche à connaître t de sorte que le tarif soit inférieur ou égal à 30 €, donc :

$$\begin{aligned} 1,4 \times 17 + 0,25t &\leqslant 30 \\ 23,8 + 0,25t &\leqslant 30 \\ 0,25t &\leqslant 30 - 23,8 \\ 0,25t &\leqslant 6,2 \\ t &\leqslant \frac{6,2}{0,25} \\ t &\leqslant 24,8. \end{aligned}$$

Ainsi, il faut que le trajet soit fait en moins de 25 minutes (si on arrondit à la minute près).

b. Dans cette question, je dois calculer le temps théorique d'une course de 17 km avec une vitesse moyenne de 35 km/h, à l'aide de la formule :

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$

soit ici :

$$35 = \frac{17}{t}, \text{ soit : } t = \frac{17}{35} \approx 0,4857 \text{ h} = 0,4857 \times 60 \text{ min} \approx 29\text{min}.$$

On dépasse donc le temps imparti (25 minutes).

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 8.6 page 202

1 Quel est le coût total pour 52 grammes ? 130 grammes ? 220 grammes ?

- $0 \leqslant 52 \leqslant 100$ donc le coût total pour 52 grammes est :

$$52 \times 0,15 = 7,80 \text{ €}.$$

- $100 < 130 \leqslant 200$ donc le coût total pour 130 grammes est :

$$100 \times 0,15 + (130 - 100) \times 0,07 = 17,10 \text{ €}.$$

- $220 > 200$ donc le coût total pour 220 grammes est :

$$100 \times 0,15 + (200 - 100) \times 0,07 + (220 - 200) \times 0,05 = 23 \text{ €}.$$

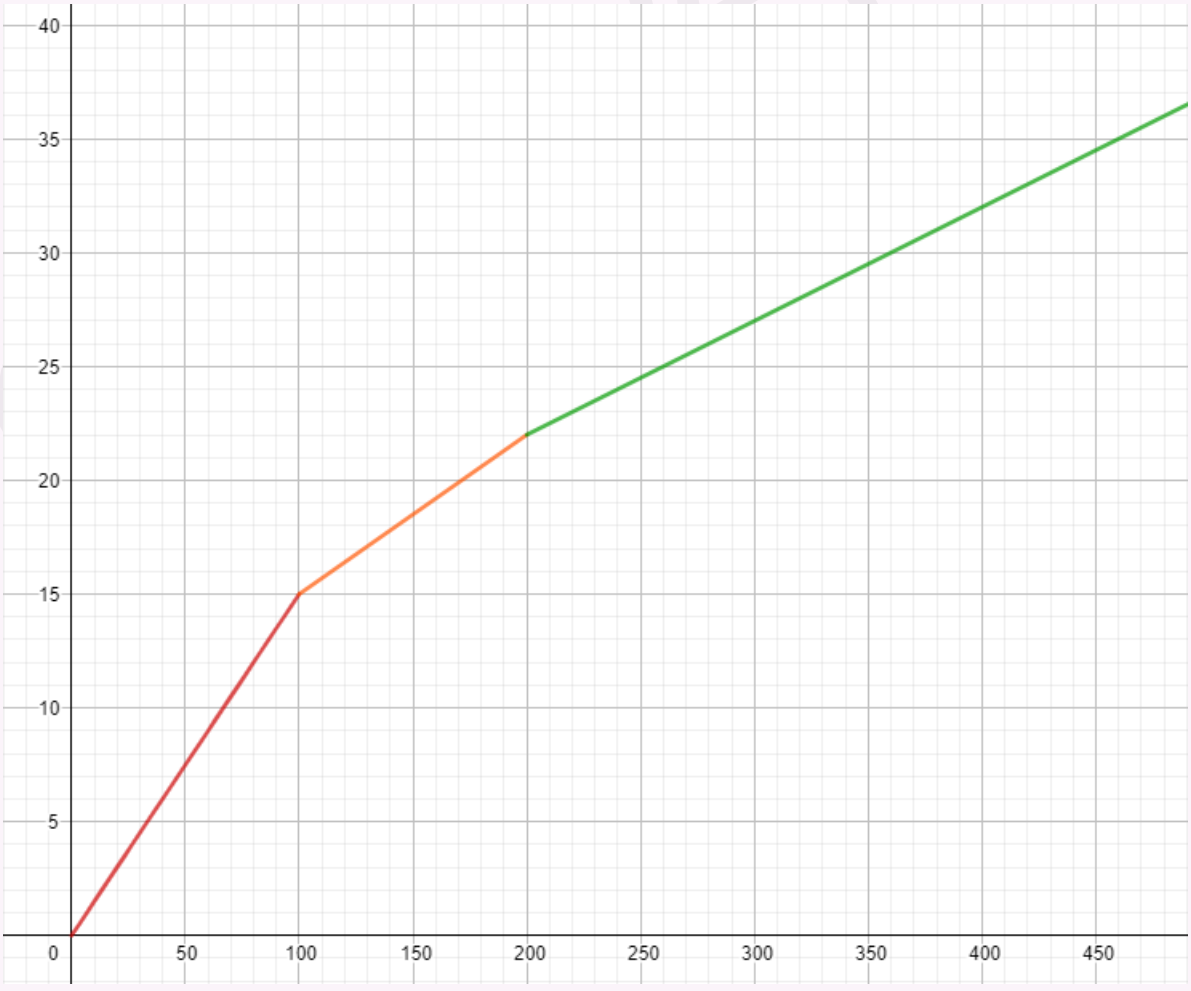
2 **a.** En s'inspirant des calculs de la question précédent, on peut écrire :

$$f(x) = \begin{cases} 0,15x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 15 + 0,07(x - 100) & \text{si } 100 < x \leqslant 200 \\ 15 + 7 + 0,05(x - 200) & \text{si } x > 200 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0,15x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 0,07x + 8 & \text{si } 100 < x \leqslant 200 \\ 0,05x + 12 & \text{si } x > 200 \end{cases}}$$

Cela donne graphiquement :



3 Quelle quantité de vis a-t-on achetée si l'on a payé 11,25 € ? 19,20 € ? 57 € ?

- On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 11,25$. Or, $11,25 < 15$ donc nous devons prendre la première expression de $f(x)$:

$$0,15x = 11,25 \iff x = \frac{11,25}{0,15} = 75.$$

Donc si l'on a payé 11,25 €, on a pris 75 grammes de vis.

- On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 19,20$. Or, $15 < 19,20 < 22$ donc nous devons prendre la deuxième expression de $f(x)$:

$$\begin{aligned} 0,07x + 8 = 19,20 &\iff 0,07x = 19,20 - 8 \\ &\iff 0,07x = 11,2 \\ &\iff x = \frac{11,20}{0,07} \\ &\iff x = 160. \end{aligned}$$

Donc si l'on a payé 19,20 €, on a pris 160 grammes de vis.

- On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 57$. Or, $57 > 22$ donc nous devons prendre la troisième expression de $f(x)$:

$$0,05x + 12 = 57 \iff 0,05x = 57 - 12 \iff 0,05x = 45 \iff x = \frac{45}{0,05} \iff x = 900.$$

Donc si l'on a payé 57 €, on a pris 900 grammes de vis.

Corrigé de l'exercice 8.7 page 203

1 Quel est le coût total pour 20 grammes ? 100 grammes ? 200 grammes ?

- $0 \leqslant 20 \leqslant 50$ donc pour 20 grammes, on doit payer $0,05 \times 20 = 1$ €.
- $20 < 100 \leqslant 150$ donc pour 100 grammes, on doit payer $0,05 \times 50 + 0,03(100 - 50) = 4$ €.
- $200 > 150$ donc pour 200 grammes, on doit payer $0,05 \times 50 + 0,03(150 - 50) + 0,02(200 - 150) = 6,50$ €.

2 **a.** D'après les calculs faits à la question précédente, on peut écrire :

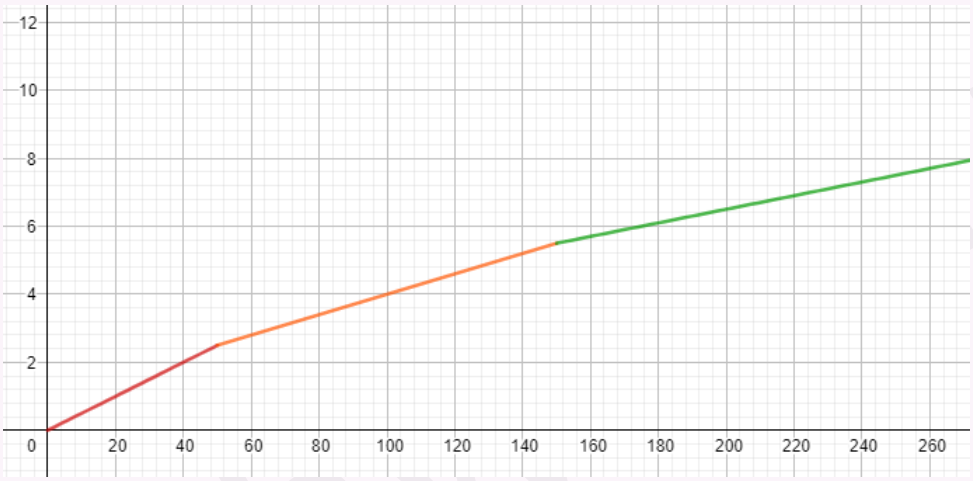
$$f(x) = \begin{cases} 0,05x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 0,05 \times 50 + 0,03(x - 50) & \text{si } 50 < x \leqslant 150 \\ 0,05 \times 50 + 0,03 \times 100 + 0,02(x - 150) & \text{si } x > 150 \end{cases}$$

soit, après simplifications :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0,05x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 0,03x + 1 & \text{si } 50 < x \leqslant 150 \\ 0,02x + 2,5 & \text{si } x > 150 \end{cases}}$$

Cela donne le graphique page suivante.

mathweb.fr



3 Quelle quantité de lentilles a-t-on achetée si l'on a payé 2,25 €? 4,75 €? 12,50 €?

- $2,25 < 2,5$ donc $f(x) = 2,25 \iff 0,05x = 2,25 \iff x = \dfrac{2,25}{0,05} = 45$.
  On a donc pris 45 grammes de lentilles si l'on a payé 2,25 €.
- $2,5 < 4,75 < 5,5$ donc $f(x) = 4,75 \iff 0,03x + 2,5 = 4,75$
  $\iff 0,03x = 2,25$
  $\iff x = 75$.
  On a donc pris 75 grammes de lentilles si l'on a payé 4,75 €.
- $12,5 > 5,5$ donc $f(x) = 12,5 \iff 0,02x + 2,5 = 12,5 \iff 0,02x = 10 \iff x = 500$.
  On a donc pris 500 grammes de lentilles si l'on a payé 12,50 €.

Corrigé de l'exercice 8.8 page 203

1 x représentant la longueur AM, et M étant un point de [AB], x peut varier de 0 à 10.
Le domaine de définition de la fonction f est donc $[0\,;10]$.

N est un point de $[BC]$, donc CN varie de 0 à 7.
Le domaine de définition de la fonction g est donc $[0\,;7]$.

2 Pour calculer l'aire de $MPCD$, on peut ajouter l'aire de $MBCD$ et celle de BPC.
L'aire de $MBCD$ se trouve en prenant l'aire de $ABCD$ et en lui enlevant celle de AMD. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(7 \times 10 - \frac{7x}{2}\right) + \frac{2x \times 7}{2} \\ &= 70 - \frac{7}{2}x + \frac{14}{2}x \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{7}{2}x + 70}$$

3 L'aire du triangle rectangle ABN est :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{AB \times BN}{2} \\ &= \frac{10 \times (7 - x)}{2} \\ &= 5(7 - x) \end{aligned}$$

$$\boxed{g(x) = 35 - 5x}$$

mathweb.fr

4 L'aire de $MPCD$ est égale au triple de celle de ABN si :

$$\begin{aligned} f(x) = 3g(x) &\iff \frac{7}{2}x + 70 = 3(35 - 5x) \\ &\iff \frac{7}{2}x + 70 = 105 - 15x \\ &\iff \frac{7}{2}x + 15x = 105 - 70 \\ &\iff \frac{37}{2}x = 35 \\ &\iff x = 35 \times \frac{2}{37} = \frac{70}{37} \approx 1,9 \end{aligned}$$

$\dfrac{70}{37}$ étant dans le domaine de définition des fonctions f et g, cette valeur est bien solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Corrigé de l'exercice 8.9 page 203

1 M est un point de $[AB]$, avec $AB = 17$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $[0\,;17]$.

2 L'aire d'un trapèze est obtenue à l'aide de la formule :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(MB + CD) \times h}{2} \\ &= \frac{\big[(17 - x) + 9\big] \times 6}{2} \\ &= 3(26 - x) \\ &= 78 - 3x. \end{aligned}$$

3 On veut :

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant \frac{1}{2} \times \frac{(AB + CD) \times h}{2} &\iff 78 - 3x \geqslant \frac{(17 + 9) \times 6}{4} \\ &\iff 78 - 3x \geqslant 39 \\ &\iff 78 - 39 \geqslant 3x \\ &\iff 13 \geqslant x. \end{aligned}$$

Il faut donc que M soit à une distance au plus égale à 13 de A pour que l'aire de $MBCD$ soit supérieure ou égale à la moitié de celle de $ABCD$.

Corrigé de l'exercice 8.10 page 204

Avant tout, déterminons la valeur de b : $f(3) = -1$ donc :

$$-\frac{2}{3} \times 3 + b = -1 \iff b = -1 + \frac{2}{3} \times 3 = -1 + 2 = 1.$$

Ainsi, $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -\frac{2}{3}x + 1 = 0 \\ &\iff -\frac{2}{3}x = -1 \\ &\iff x = -1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &\iff x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

mathweb.fr

Le coefficient directeur de f est négatif, donc la fonction est décroissante. Elle s'annule pour $x = \frac{3}{2}$.
Le tableau de variation qui convient est donc celui de $D(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$D(x) = f(x)$		0	

Corrigé de l'exercice 8.11 page 204

1 **a.** Le tableau de signes de $f(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$4x - 1$	$-$	0	$+$	$+$
$2 - 3x$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	0	$-$

b. L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est donc :

$$\boxed{S = \left[\frac{1}{4}\,;\frac{2}{3}\right]}$$

2 **a.** Pour vérifier que $f(x) - g(x) = -2(x-2)(3x-2)$, on peut développer les membres de droite et gauche séparément, et constater que les formes développées sont égales :

- $f(x) - g(x) = (4x-1)(2-3x) - (-6x^2 - 5x + 6)$
  $= 8x - 12x^2 - 2 + 3x + 6x^2 + 5x - 6$
  $= -6x^2 + 16x - 8.$

- $-2(x-2)(3x-2) = -2(3x^2 - 2x - 6x + 4)$
  $= -2(3x^2 - 8x + 4)$
  $= -6x^2 + 16x - 8.$

Les deux formes développées sont donc égales : $f(x) - g(x) = -2(x-2)(3x-2)$.

b. Dressons le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ à l'aide de la forme factorisée trouvée à la question précédente :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
-2	$-$	$-$	$-$	
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
$3x - 2$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x) - g(x)$	$-$	0	0	$-$

On peut alors conclure que :

- $f(x) - g(x) < 0$, et donc $f(x) < g(x)$, sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right[$ et sur $]2\,;+\infty[$, soit $\mathcal{C}_f$ sous $\mathcal{C}_g$ sur ces intervalles ;
- $f(x) - g(x) > 0$, et donc $f(x) > g(x)$, sur $\left]\frac{2}{3}\,;2\right[$, soit $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur cet intervalle ;

- $f(x) - g(x) = 0$, soit $f(x) = g(x)$, pour $x = \dfrac{2}{3}$ et $x = 2$ et donc que les courbes se coupent aux points de coordonnées $(2\,;f(2))$ et $\left(\dfrac{2}{3}\,;f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)$, c'est-à-dire aux points de coordonnées $(2\,;-28)$ et $\left(\dfrac{2}{3}\,;0\right)$.

c. Comparer alors sans calcul $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$:
$\dfrac{2}{3} < \dfrac{\pi}{2} < 2$ donc d'après l'étude précédente de la position relative des deux courbes, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 8.12 page 204

1 $(4x-5)^2 \leqslant (12x-15)(1-x) \iff (4x-5)^2 \leqslant 3(4x-5)(1-x)$
$\iff (4x-5)^2 - 3(4x-5)(1-x) \leqslant 0$
$\iff (4x-5)\big[(4x-5) - 3(1-x)\big] \leqslant 0$
$\iff (4x-5)(4x-5-3+3x) \leqslant 0$
$\iff (4x-5)(7x-8) \leqslant 0$

x	$-\infty$		$\frac{8}{7}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x-8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x-5)(7x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left[\frac{8}{7}\,;\frac{5}{4}\right]$$

2 $3x^3 > 12x \iff 3x^3 - 12x > 0$
$\iff 3x(x^2-4) > 0$
$\iff 3x(x-2)(x+2) > 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(x-2)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S =]-2\,;0[\cup]2\,;+\infty[$$

Corrigé de l'exercice 8.13 page 204

1 - $f(x) - g(x) = (2x^2 - x + 7) - (2x^3 + 6x^2 - 7x + 7)$
$= 2x^2 - x + 7 - 2x^3 - 6x^2 + 7x - 7$
$= -2x^3 - 4x^2 + 6x.$

- $2x(1-x)(x+3) = 2x(x+3-x^2-3x)$
  $= 2x(-x^2-2x+3)$
  $= -2x^3-4x^2+6x$
  $= f(x)-g(x)$.

2 Dressons le tableau de signes de $f(x)-g(x)$:

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f, et $\mathcal{C}_g$ celle de g.
Du tableau de signes, on déduit alors que :

- sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]0\,;1[$, $f(x)-g(x)>0$, donc $f(x)>g(x)$, ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$;
- sur $]-3\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$;
- les courbes se coupent aux points d'abscisses $A\,(-3\,;f(-3))$, $B\,(0\,;f(0))$ et $C\,(1\,;f(1))$, soit $A\,(-3\,;28)$, $B\,(0\,;7)$ et $C\,(1\,;8)$.

Corrigé de l'exercice 8.14 page 205

1 $f(x) = 100\times 60-(100-2x)(60-2x)$
$= 6\,000-6\,000+200x+120x-4x^2$
$= -4x^2+320x$

$\boxed{f(x) = -4x(x-80)}$

2 On a : $-4(x-40)^2+6\,400 = -4(x^2-80x+1\,600)+6\,400$
$= -4x^2+320x-6\,400+6\,400$
$= -4x^2+320x$
$= f(x)$.

3 $f(x)\leqslant 1\,500 \iff -4(x-40)^2+6\,400\leqslant 1\,500$
$\iff -4(x-40)^2+6\,400-1\,500\leqslant 0$
$\iff 4\,900-4(x-40)^2\leqslant 0$
$\iff 70^2-\big[2(x-40)\big]^2\leqslant 0$
$\iff \big[70-2(x-40)\big]\big[70+2(x-40)\big]\leqslant 0$
$\iff (70-2x+80)(70+2x-80)\leqslant 0$
$\iff (150-2x)(2x-10)\leqslant 0$
$\iff 2(75-x)\times 2(x-5)\leqslant 0$
$\iff (75-x)(x-5)\leqslant 0$

mathweb.fr

4 Dressons le tableau de signes du produit $(75-x)(x-5)$ sur $[0\,;30]$ (car x ne peut pas dépasser 30 mètres, soit la moitié de la largeur du rectangle extérieur) :

x	0		5		30
$75-x$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$	0	$+$	
$(75-x)(x-5)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, l'aire jaune est inférieure à 1 500 m^2 pour $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Corrigé de l'exercice 8.15 page 205

1 $(3x-2)(5x-7) \geqslant 0$.

Les valeurs de x qui annulent le produit $(3x-2)(5x-7)$ sont les solutions des équations $3x-2=0$ et $5x-7=0$, donc sont égales à $x=\dfrac{2}{3}$ et $x=\dfrac{7}{5}$, où $\dfrac{2}{3}<\dfrac{7}{5}$.

De plus, le coefficient de x dans chaque facteur est positif, donc pour chacun d'eux, le signe sera : $-\ 0\ +$, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{7}{5}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x-2)(5x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S=\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{7}{5}\,;+\infty\right[}$

2 $(5x-1)(-x+9)(2x+1)>0$.

Les valeurs de x qui annulent le produit $(5x-1)(-x+9)(2x+1)$ sont les solutions des équations $5x-1=0$, $-x+9=0$ et $2x+1=0$, donc sont égales à $x=\dfrac{1}{5}$, $x=9$ et $x=-\dfrac{1}{2}$, où $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{5}<9$.

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{5}$		9		$+\infty$
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+9$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{S=\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{5}\,;9\right[}$

3 $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}<\dfrac{2x+6}{4x^2-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x+1)(2x-1)}<\dfrac{2x+6}{4x^2-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+1-2x+1)(2x+1+2x-1)-2x-6}{4x^2-1}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{8x-2x-6}{(2x-1)(2x+1)}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6(x-1)}{(2x+1)(2x-1)}<0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Fraction		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S=\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2}\,;1\right[}$

4 $\dfrac{5x+4}{2x-3}+\dfrac{(8-x)(10x+8)}{(2x-3)^2}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(5x+4)(2x-3)+2(8-x)(5x+4)}{(2x-3)^2}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(5x+4)(2x-3+16-2x)}{(2x-3)^2}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{13(5x+4)}{(2x-3)^2}\leqslant 0$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$5x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
Fraction		$-$	0	$+$	‖	$+$	

Donc $\boxed{S=\left]-\infty\,;-\frac{4}{5}\right]}$

5 $\dfrac{(4-3x)(9x^2-10x-3)}{2x-7}<4-3x$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4-3x)(9x^2-10x-3)-(4-3x)(2x-7)}{2x-7}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4-3x)(9x^2-10x-3-2x+7)}{2x-7}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4-3x)(9x^2-12x+4)}{2x-7}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4-3x)(3x-2)^2}{2x-7}<0$

mathweb.fr

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$4-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x-2)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Fraction		$-$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc $\boxed{S = \left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{2}\,;+\infty\right[}$

6 $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x(x^2-1)}$, $x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x+1) - x(x-1) - (x+1)(x-1) - 2}{x(x-1)(x+1)} \leqslant 0$ (remarque : $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$)

$\Leftrightarrow \dfrac{2x - x^2 - 1}{x(x+1)(x-1)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x-1)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1) > 0,$ car $(x-1)^2 > 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Fraction		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Donc $\boxed{S =]-1\,;0[\cup]1\,;+\infty[}$

7 $\dfrac{1-2x}{16x^2-9} \geqslant \dfrac{1-2x}{4x+3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1-2x) - (1-2x)(4x-3)}{16x^2-9} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1-2x)(1-4x+3)}{16x^2-9} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(1-2x)(1-x)}{(4x-3)(4x+3)} \geqslant 0$

Donc :

$\boxed{S = \left]-\infty\,;-\frac{3}{4}\right[\cup \left[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4}\right[\cup [1\,;+\infty[}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Fraction		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

mathsweb.fr

9 Fonctions de référence

1 La fonction carré 221
1 Définition 221
2 Courbe représentative 221
3 Sens de variation 222
4 Équations 222
5 Inéquations 223
2 La fonction inverse 224
1 Définition 224
2 Sens de variation 225
3 Courbe représentative 225
4 Équations 226
5 Inéquations 227
3 La fonction cube 228
1 Définition 228
2 Sens de variation 229
3 Courbe représentative 229
4 Équations et inéquations 230
4 Racine carrée 231
1 Définition 231
2 Sens de variation 231
3 Courbe représentative 231
4 Équations et inéquations 232
5 Généralités sur les fonctions de référence 232
1 Ordre des images 232
2 Position relative des courbes 233
Prendre un bon départ 235
Exercices 237
Fonction carré 237
La fonction inverse 238
La fonction cube 239
La fonction racine carrée 239
Exercices généraux 240
Python 243
Corrigés des exercices 244

Dans ce chapitre

1 La fonction carré

1 Définition

Définition 53

La fonction carré est la fonction qui à tout réel x associe son carré x^2.
On la note :

$$x \longmapsto x^2.$$

Propriété 34

La fonction carré est paire.

Démonstration 14

Posons $f(x) = x^2$.
f est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel x,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ ,$$

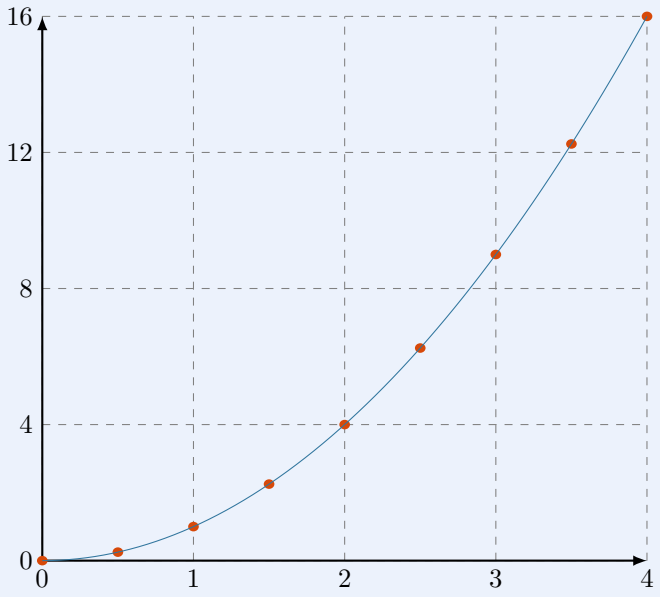
ce qui justifie que f est paire.

2 Courbe représentative

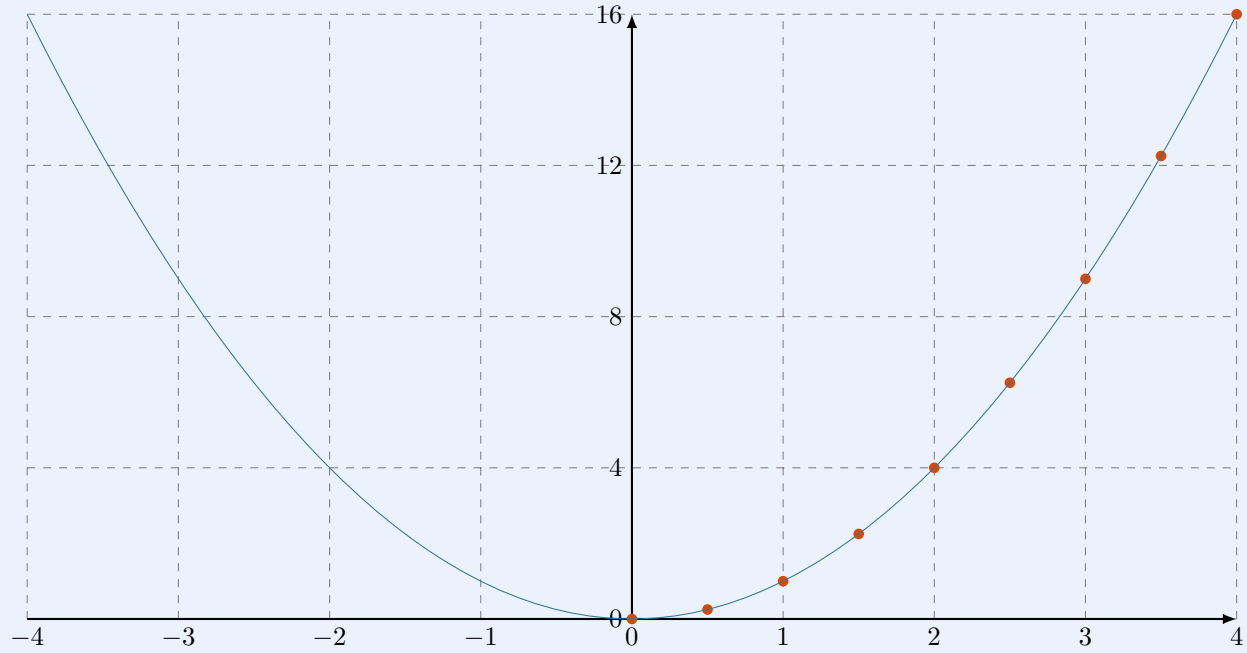
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction carré sur un intervalle $[-4\,;4]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $[0\,;4]$ car la fonction est paire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $[0\,;4]$).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x^2	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16

On obtient alors la courbe suivante :



Par symétrie, on obtient la courbe représentative complète sur $[-4\,;4]$:



On dit que cette courbe est une *parabole*.

3 Sens de variation

On peut bien entendu voir sur le graphique les variations de la fonction carré, mais on aurait pu aussi trouver les variations avant de construire la courbe.
Pour cela, on aurait pu prendre deux nombres a et b sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et comparer a^2 et b^2 :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant a < b &\iff a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)}_{<0}\underbrace{(a+b)}_{>0} \\ &\iff a^2 < b^2 \\ &\iff \text{la fonction carré est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[. \end{aligned}$$

Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on peut en déduire que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
Le tableau de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}$ est donc le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

4 Équations

Propriété 35

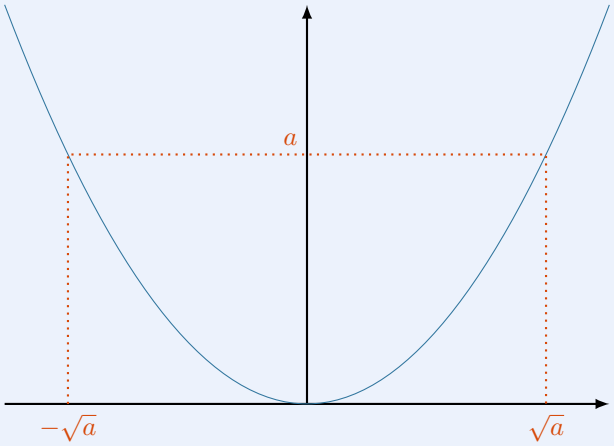
Pour tout nombre $a > 0$,

$$x^2 = a \iff x = -\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a}.$$

Exemple 60

1. $x^2 = 7 \iff x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.
2. $x^2 = 16 \iff x = -\sqrt{16} = -4$ ou $x = \sqrt{16} = 4$.

Graphiquement, cela revient à trouver les antécédents du nombre a par la fonction carré :



5 Inéquations

Propriété 36

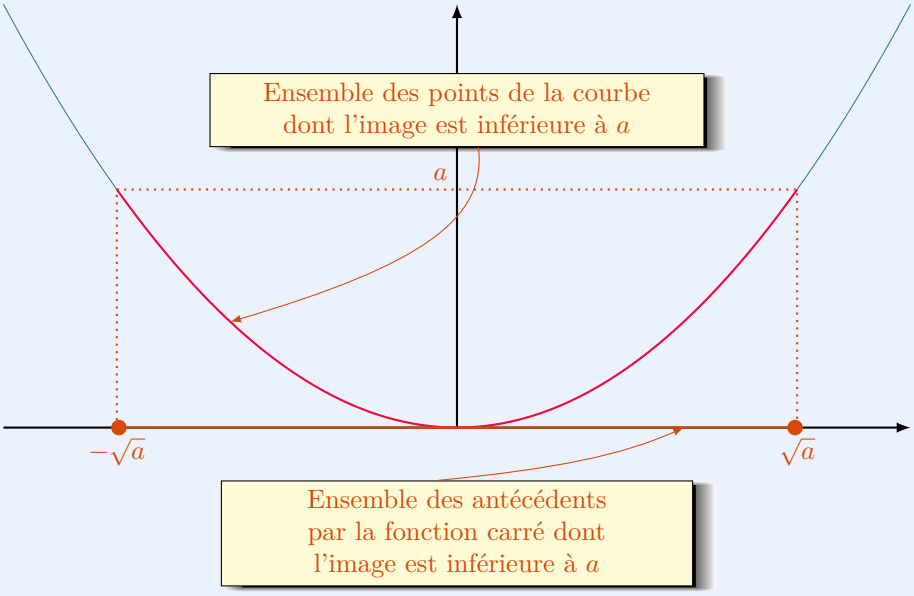
Pour tout nombre $a > 0$,

$$x^2 < a \iff -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}.$$

Exemple 61

$$x^2 < 9 \iff -3 < x < 3.$$

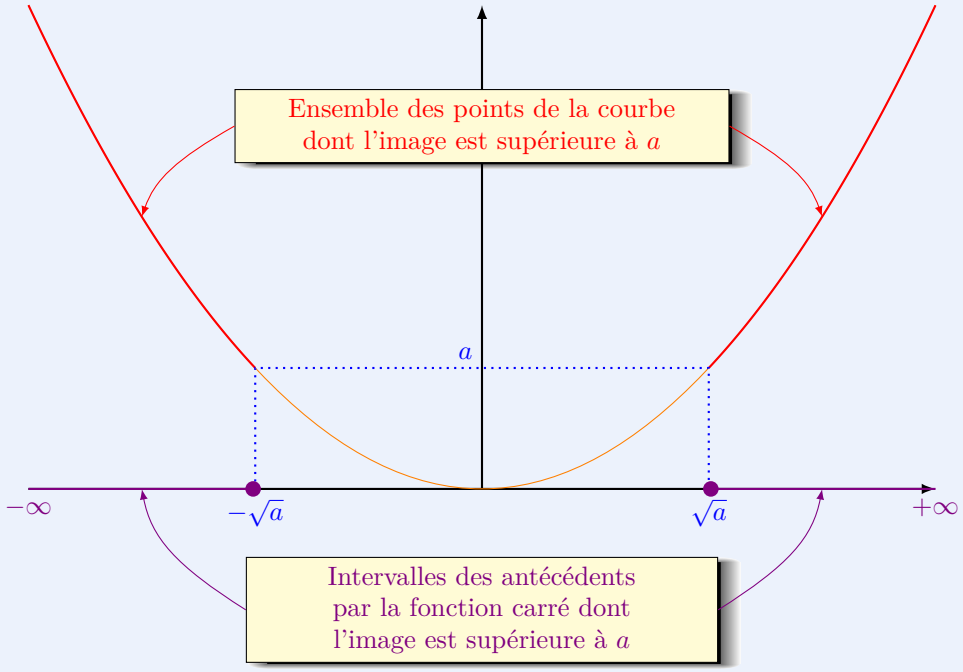
Graphiquement, cela revient à trouver tous les antécédents dont l'image est plus petite que 9 par la fonction carré :



Propriété 37

Pour tout réel $a > 0$,

$$x^2 > a \iff x \in]-\infty\,;-\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}\,;+\infty[.$$



2 La fonction inverse

1 Définition

Définition 54

La fonction inverse est la fonction qui à tout réel x associe son inverse $\dfrac{1}{x}$.
On la note :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Propriété 38

La fonction inverse est impaire.

Démonstration 15

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
f est définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)\ ,$$

ce qui justifie que f est impaire.

2 Sens de variation

Soient deux nombres a et b de même signe tels que $a < b$. Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ &= \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} \\ &= \frac{b-a}{ab}. \end{aligned}$$

- Si on se place sur $]-\infty\,;0[$ alors $a < 0$ et $b < 0$ donc a et b sont de même signe, ce qui signifie que $ab > 0$.
- Si on se place sur $]0\,;+\infty[$ alors $a > 0$ et $b > 0$ donc a et b sont aussi de même signe, ce qui signifie que $ab > 0$.

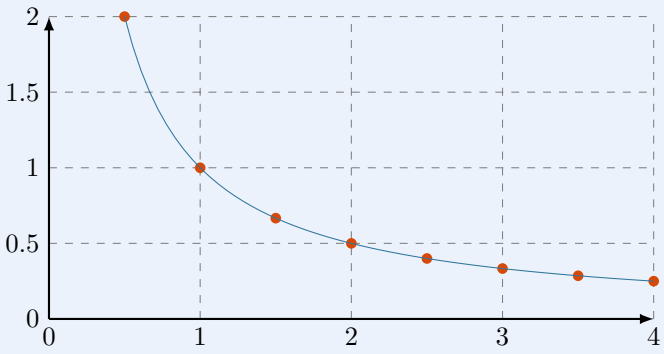
De plus, $a < b$ donc $b - a > 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) > 0$, ce qui signifie que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

3 Courbe représentative

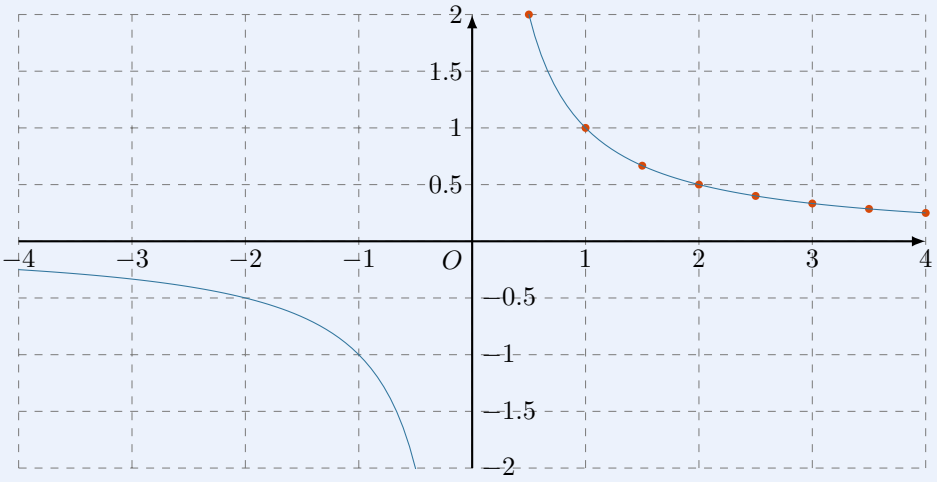
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction inverse sur un intervalle $[-4\,;0] \cup]0\,;4]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $]0\,;4]$ car la fonction est impaire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $]0\,;4]$).

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\frac{1}{x}$	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,29	0,25

On obtient alors :



Par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe représentative complète sur $[-4\,;4]$:



On dit que cette courbe est une *hyperbole*.

4 Équations

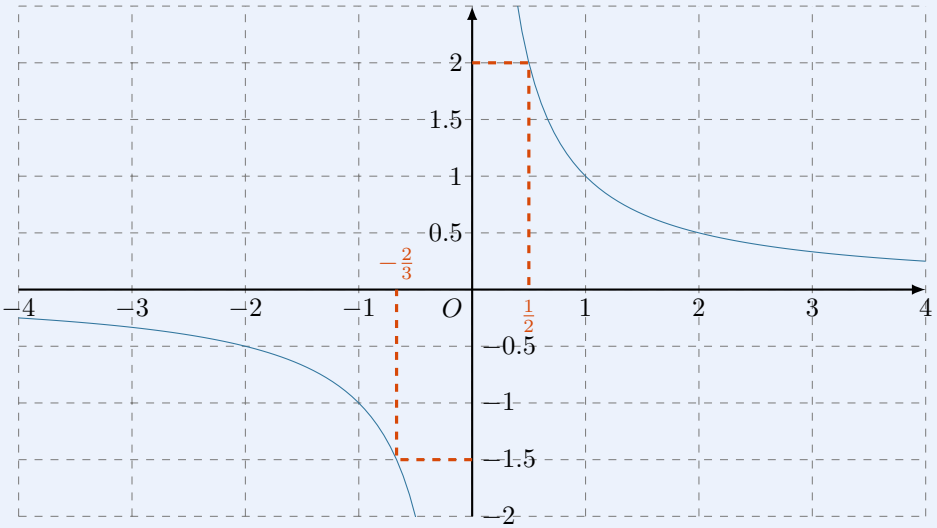
Propriété 39

Pour tout nombre $a \neq 0$,

$$\frac{1}{x} = a \iff x = \frac{1}{a}.$$

Exemple 62

1. $\dfrac{1}{x} = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
2. $\dfrac{1}{x} = -1,5 \iff x = \dfrac{1}{-1,5} = -\dfrac{1}{1,5} = -\dfrac{1}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{3}$.



5 Inéquations

Propriété 40

1 Si $a > 0$,

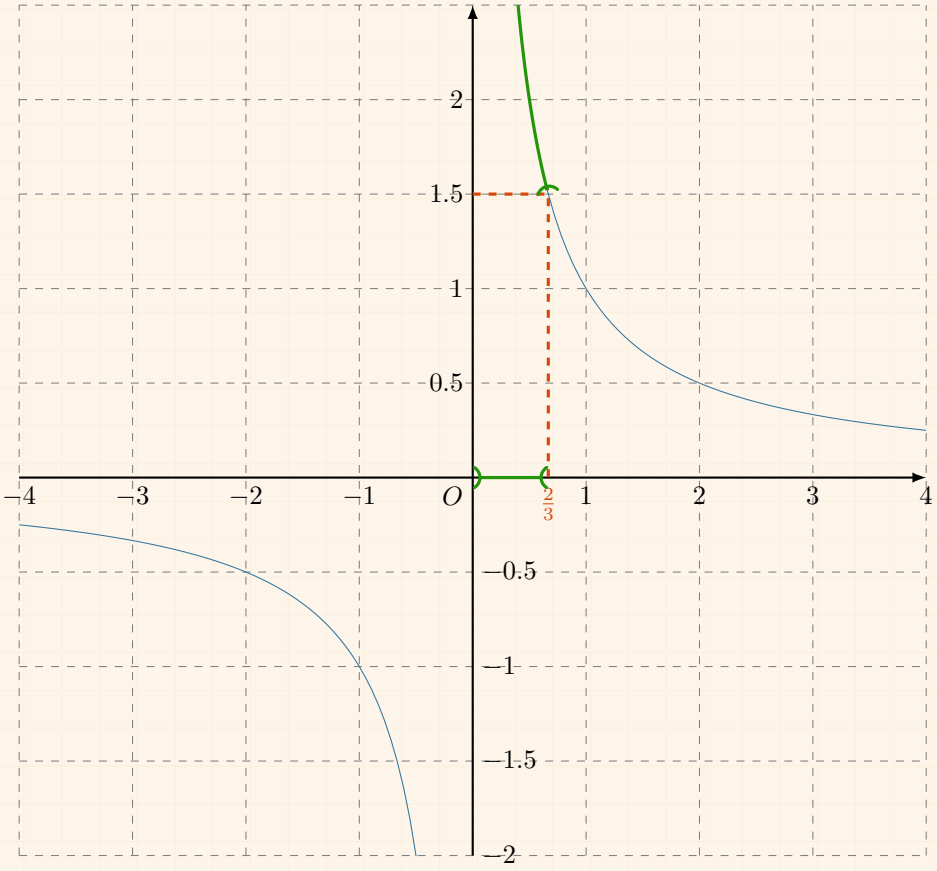
- $\dfrac{1}{x} > a \iff x \in \left]0\,;\dfrac{1}{a}\right[$;
- $\dfrac{1}{x} < a \iff x \in]-\infty\,;0[\cup \left]\dfrac{1}{a}\,;+\infty\right[$.

2 Si $a < 0$,

- $\dfrac{1}{x} > a \iff x \in \left]-\infty\,;\dfrac{1}{a}\right[\cup]0\,;+\infty[$;
- $\dfrac{1}{x} < a \iff x \in \left]\dfrac{1}{a}\,;0\right[$.

Exemple 63

1 $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{2} \iff x \in \left]0\,;\dfrac{2}{3}\right[$.



2 $\dfrac{1}{x} < \dfrac{3}{2} \iff x \in]-\infty\,;0[\cup \left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.



3 La fonction cube

1 Définition

Définition 55

La fonction cube est la fonction qui à tout réel x associe son cube x^3.
On la note :

$$x \longmapsto x^3.$$

Propriété 41

La fonction cube est impaire.

Démonstration 16

Posons $f(x) = x^3$.
f est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel x,

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1 \times x)^3 = (-1)^3 \times x^3 = -1 \times x^3 = -x^3 = -f(x)\ ,$$

ce qui justifie que f est impaire.

2 Sens de variation

Soient deux nombres a et b tels que $a < b$. Posons $f(x) = x^3$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^3 - b^3 \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

- Si on se place sur $]-\infty\,;0]$ alors $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$ donc $ab \geqslant 0$.
- Si on se place sur $[0\,;+\infty[$ alors $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ donc $ab \geqslant 0$.

Dans les deux cas, $ab \geqslant 0$; de plus, $a^2 \geqslant 0$ et $b^2 \geqslant 0$ donc $a^2 + ab + b^2 > 0$.

Remarque 67

a et b ne peuvent pas être égaux à 0 tous les deux car on a supposé $a < b$. Donc $a^2 + b^2 \neq 0$, et donc $a^2 + b^2 > 0$, d'où $a^2 + b^2 + ab > 0$ (l'inégalité est nécessairement stricte).

De plus, $a < b$ donc $a - b < 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$.

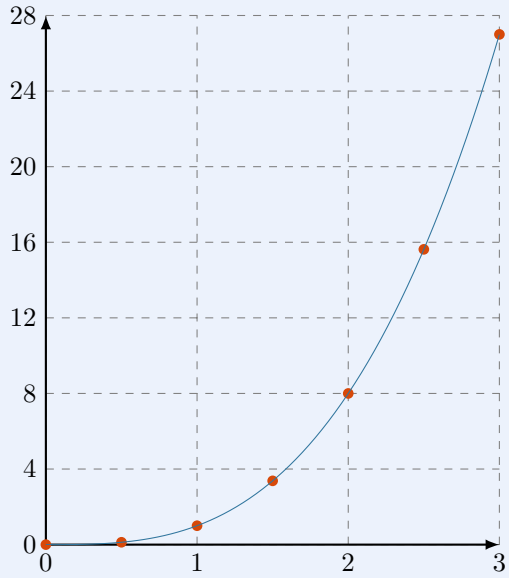
Si maintenant $a < 0 < b$, $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$, donc $a^3 < b^3$ et donc $f(a) < f(b)$.
Dans tous les cas, $f(a) < f(b)$, ce qui signifie que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 Courbe représentative

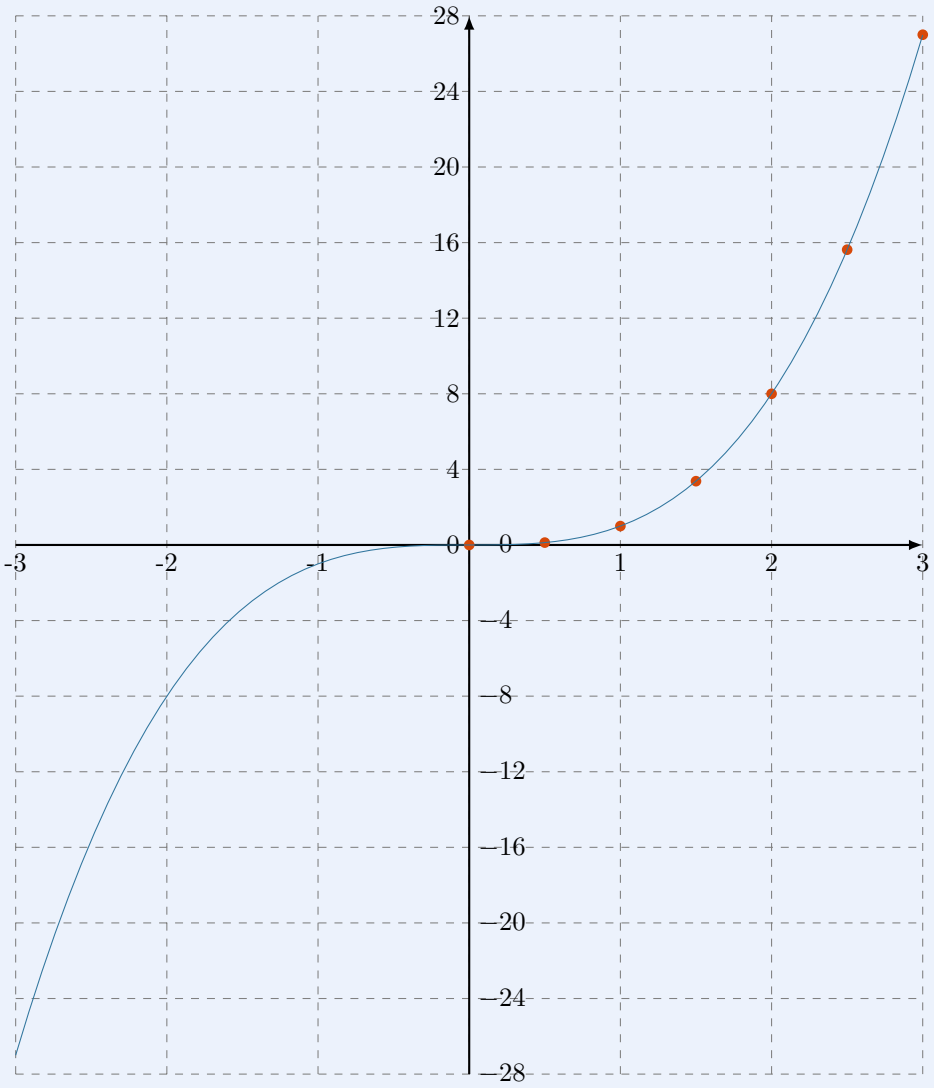
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction cube sur un intervalle $[-3\,;3]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $]0\,;3]$ car la fonction est impaire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $]0\,;3]$).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^3	0	0,125	1	3,375	8	15,625	27

On obtient alors :



Par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe représentative complète sur $[-3\,;3]$:



4 Équations et inéquations

Propriété 42

Pour tout nombre réel a,

$$x^3 = a \iff x = \sqrt[3]{a}.$$

Exemple 64

1. $x^3 = 27 \iff x = \sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$.
2. $x^3 = -8 \iff x = \sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

Propriété 43

Pour tout nombre réel a,

$$x^3 > a \iff x > \sqrt[3]{a}$$
$$x^3 < a \iff x < \sqrt[3]{a}$$

4 Racine carrée

1 Définition

Définition 56

La fonction racine carrée est la fonction qui à tout réel x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.
On la note :

$$x \longmapsto \sqrt{x}.$$

Son domaine de définition est $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $[0\,;+\infty[$.

2 Sens de variation

Soient deux nombres positifs a et b tels que $a < b$. Posons $f(x) = \sqrt{x}$.

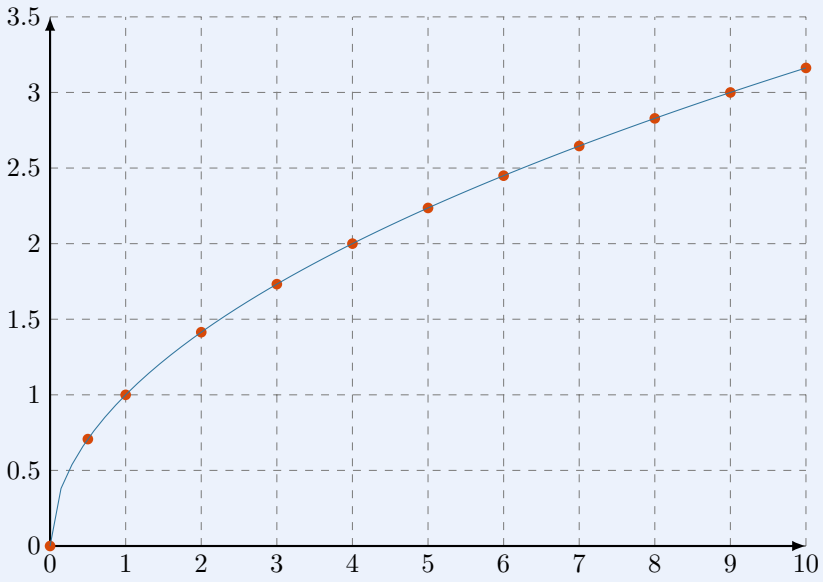
$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ &= \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

$a < b$ donc $a - b < 0$. De plus, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, ce qui signifie que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3 Courbe représentative

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}$	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2

On obtient alors :



4 Équations et inéquations

Propriété 44

Soit $a > 0$.

$$\sqrt{x} = a \iff x = a^2$$
$$\sqrt{x} < a \iff x \in [0\,;a^2[$$
$$\sqrt{x} > a \iff x \in]a^2\,;+\infty[.$$

Exemple 65

1. $\sqrt{x} = 2 \iff x = 2^2 = 4$.
2. $\sqrt{x} < 3 \iff 0 \leqslant x < 9$.
3. $\sqrt{x} > 4 \iff x > 4^2 \iff x > 16$.

5 Généralités sur les fonctions de référence

1 Ordre des images

Propriété 45

1. $0 < a < b \iff 0 < a^2 < b^2$ et $a < b < 0 \iff 0 < b^2 < a^2$.
2. $a < b \iff \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
3. $a < b \iff a^3 < b^3$.
4. $0 < a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Les résultats de cette propriété viennent des variations des fonctions de référence.

Quand une fonction est croissante sur un intervalle, les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents ($x \mapsto x^2$ sur $[0\,;+\infty[$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$).

Au contraire, quand une fonction est décroissante sur un intervalle, les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents ($x \mapsto x^2$ sur $]-\infty\,;0]$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$).

2 Position relative des courbes

Propriété 46

Pour tout réel x strictement compris entre 0 et 1, $x^3 < x^2 < x$.
Pour tout réel $x > 1$, $x < x^2 < x^3$.

Démonstration 17

- Soit $x \in]0\,;1[$.

  $$x^3 - x^2 = x^2(x-1).$$

  Or, $x^2 > 0$ et $x - 1 < 0$, donc $x^2(x-1) < 0$, soit $x^3 - x^2 < 0$. Donc $x^3 < x^2$.

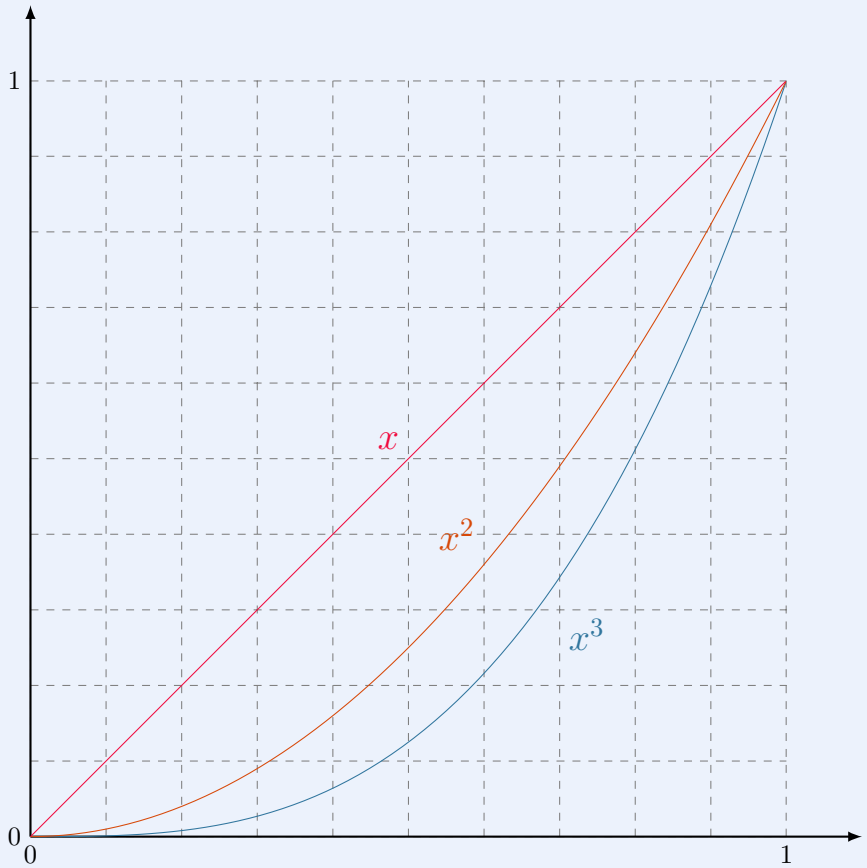
  De plus, $x^2 - x = x(x-1) < 0$ car $x > 0$ et $x - 1 < 0$. Ainsi, $x^2 < x$.

  Finalement, on obtient : $x^3 < x^2 < x$.
- Soit $x > 1$. Alors, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$ car $x^2 > 0$ et $x - 1 > 0$. Donc $x^3 > x^2$.

  De plus, $x^2 - x = x(x-1) > 0$ car $x > 0$ et $x - 1 > 0$. Donc $x^2 > x$.

  On obtient finalement : $x^3 > x^2 > x$, que l'on peut aussi écrire : $x < x^2 < x^3$.

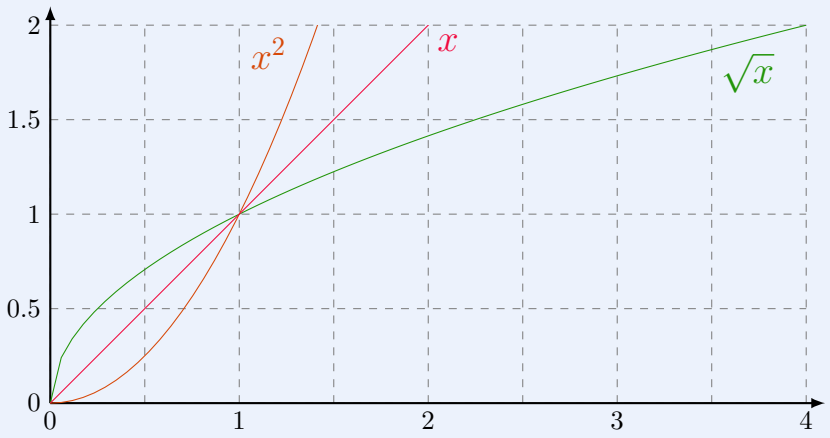
Graphiquement, cela se traduit par le fait que sur $[0\,;1]$, la courbe représentative de $x \mapsto x^3$ est en-dessous de celle de $x \mapsto x^2$, qui est elle-même en-dessous de celle de $x \mapsto x$:



Cela sous-entend notamment que si $0 < x < 1$ alors x^2 et x^3 sont plus petits que x.

Propriété 47

Pour tout réel x strictement compris entre 0 et 1, $x^2 < x < \sqrt{x}$.
Pour tout réel $x > 1$, $\sqrt{x} < x < x^2$.



9 Prendre un bon départ

Exercice type 29 ▶ Parité d'une fonction

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto -3x^2 + 2$ est paire.

Pour étudier la parité d'une fonction, on calcule $f(-x)$ pour tout réel x :

$$f(-x) = -3(-x)^2 + 2 = -3x^2 + 2 = f(x).$$

Ainsi, pour tout réel xn $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

Exercice type 30 ▶ Encadrement et inéquation avec la fonction carré

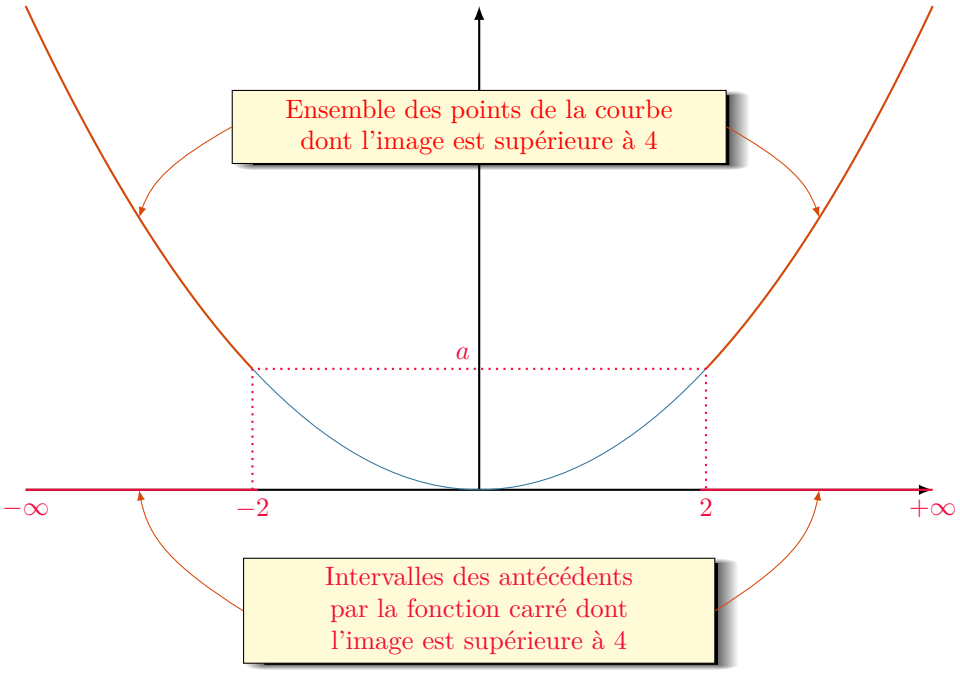
1 En utilisant les variations de la fonction carré, donner un encadrement de x^2 si $-10 < x < -7$.

2 Donner tous les nombres x tels que $x^2 > 4$.

1 $-10 < x < -7 \iff (-7)^2 < x^2 < (-10)^2$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ (donc on change l'ordre en élevant au carré).

Donc si $-10 < x < -7$ alors $49 < x^2 < 100$.

2 $x^2 > 4$ signifie que l'on prendre la partie de la courbe représentative de la fonction carré qui est au-dessus de $y = 4$, qui correspond aux valeurs de x qui sont strictement inférieures à $-\sqrt{4} = -2$ et strictement supérieures à $\sqrt{4} = 2$.



Donc $x^2 > 4$ signifie que $x \in]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$.

Exercice type 31 ▶ Encadrement avec la fonction cube

Donner un encadrement de x^3 si $-2 < x < 1$.

La fonction cube étant strictement croissante, on conserve l'ordre en élevant au cube. Ainsi,

$$-2 < x < 1 \iff (-2)^3 < x^3 < 1^3 \iff -8 < x^3 < 1.$$

Exercice type 32 ▶ Comparaison de deux inverses

Comparer les nombres $\dfrac{1}{-5}$ et $\dfrac{1}{-8}$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, on a l'équivalence :

$$-8 < -5 \iff \frac{1}{-5} < \frac{1}{-8}.$$

Exercice type 33 ▶ Résoudre une inéquation avec la fonction inverse

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{1}{2x} + 3 \leqslant 0$.

Attention : il faut garder en tête que x doit être différent de 0 (sinon, $\dfrac{1}{2x}$ n'existe pas).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x} + 3 \leqslant 0 &\iff \frac{1}{2x} \leqslant -3 \\
&\iff 2x \geqslant \frac{1}{-3} \\
&\iff x \geqslant -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\
&\iff x \geqslant -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Or, $x \neq 0$ donc dire que $x \geqslant -\dfrac{1}{6}$ signifie que l'ensemble solution de l'inéquation est : $\left[-\dfrac{1}{6}\,;0\right[\cup\,]0\,;+\infty[$.

Exercice type 34 ▶ Inéquation avec racine carrée

Résoudre l'inéquation : $2\sqrt{x} - 1 \leqslant 5$.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x} - 1 \leqslant 5 &\iff 2\sqrt{x} \leqslant 5 + 1 \\
&\iff 2\sqrt{x} \leqslant 6 \\
&\iff \sqrt{x} \leqslant 3 \\
&\iff 0 \leqslant x \leqslant 3^2 \\
&\iff 0 \leqslant x \leqslant 9.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $[0\,;9]$.

9 Exercices

Fonction carré

Exercice 9.1 (complétions et ordre)

Compléter les pointillés par l'un des symboles « < » et « > ».

1 $2,18^2 \dots 2,19^2$
2 $(-\pi)^2 \dots (-4)^2$
3 $1,718^2 \dots 1,0817^2$
4 $0,04^2 \dots 0,006^2$
5 $(-0,78)^2 \dots (-0,77)^2$
6 $(1-\pi)^2 \dots (3-2\pi)^2$

Solution page 244

Exercice 9.2 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1 $x^2 = 8$
2 $x^2 = 16$
3 $x^2 = 25$
4 $x^2 = 54$
5 $2x^2 - 18 = 0$
6 $5x^2 + 1 = 0$

Solution page 244

Exercice 9.3 (résolution d'inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1 $x^2 \geqslant 81$
2 $x^2 < -1$
3 $x^2 > -5$
4 $x^2 \leqslant 64$

Solution page 245

Exercice 9.4 (équations)

Résoudre les équations suivantes.

1 $(x+1)^2 = 5$
2 $(x-3)^2 = 100$
3 $(2x-1)^2 = 36$
4 $(5-2x)^2 = 64$
5 $2(x-1)^2 - 7 = 0$
6 $5(x+3)^2 + 1 = 0$

Solution page 245

Exercice 9.5 (complétions)

Compléter les pointillés.

1 Si $x \in [5\,;8]$ alors $x^2 \in \dots$
2 Si $x \in [-4\,;-2[$ alors $x^2 \in \dots$
3 Si $x \in]-1\,;1]$ alors $x^2 \in \dots$
4 Si $x \in]-2\,;6[$ alors $x^2 \in \dots$

Solution page 246

mathweb.fr

Exercice 9.6 (déroutant mais pas si difficile que ça)

On pose $f(x) = x^2$. Soient a et b deux réels quelconques. Calculer et simplifier :

1 $\frac{1}{2}\Big[f(a+b) - \big(f(a) + f(b)\big)\Big]$

2 $f(a+b) - f(a-b)$

3 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Solution page 247

La fonction inverse

Exercice 9.7 (complétions et ordre)

Compléter les pointillés par l'un des symboles « $<$ » et « $>$ ».

1 $\frac{1}{2,18} \cdots \frac{1}{2,19}$

2 $\frac{1}{-\pi} \cdots \frac{1}{-4}$

3 $\frac{1}{1,718} \cdots \frac{1}{1,0817}$

4 $\frac{1}{0,04} \cdots \frac{1}{0,006}$

5 $\frac{1}{-0,78} \cdots \frac{1}{-0,77}$

6 $\frac{1}{1-\pi} \cdots \frac{1}{3-2\pi}$

Solution page 248

Exercice 9.8 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1 $\frac{1}{x} = 8$

2 $\frac{1}{x} = -16$

3 $\frac{1}{x} = 0$

Solution page 248

Exercice 9.9 (résolution d'inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1 $\frac{1}{x} \geqslant 81$

2 $\frac{1}{x} < -1$

3 $\frac{1}{x} > -5$

4 $\frac{1}{x} \leqslant 64$

Solution page 249

Exercice 9.10 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1 $\frac{1}{x+1} = 5$

2 $\frac{1}{x-3} = 100$

3 $\frac{1}{2x-1} = 36$

4 $\frac{1}{5-2x} = 64$

5 $\frac{2}{x-1} - 7 = 0$

6 $\frac{5}{x+3} + 1 = 0$

Solution page 250

mathweb.fr

Exercice 9.11 (complétions)

Compléter les pointillés.

1 Si $x \in [5\,;8]$ alors $\dfrac{1}{x} \in \ldots$

2 Si $x \in [-4\,;-2[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \ldots$

3 Si $x \in]-1\,;0[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \ldots$

4 Si $x \in]0\,;7[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \ldots$

Solution page 252

Exercice 9.12

On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Soient a et b deux nombres non opposés. Calculer et simplifier :

1 $f(a+b) - f(a-b)$

2 $\dfrac{1}{2}\big[f(a+b) + f(a-b)\big]$

Solution page 252

La fonction cube

Exercice 9.13 (complétions et ordre)

Compléter les pointillés par l'un des symboles « $<$ » et « $>$ ».

1 $2,18^3 \ldots 2,19^3$

2 $(-\pi)^3 \ldots (-4)^3$

3 $1,718^3 \ldots 1,0817^3$

4 $(-0,04)^3 \ldots 0,006^3$

5 $(-0,78)^3 \ldots (-0,77)^3$

6 $(1-\pi)^3 \ldots (3-2\pi)^3$

Solution page 252

Exercice 9.14 (complétions)

Compléter les pointillés.

1 Si $x \in [5\,;8]$ alors $x^3 \in \ldots$

2 Si $x \in [-4\,;-2[$ alors $x^3 \in \ldots$

3 Si $x \in]-1\,;1]$ alors $x^3 \in \ldots$

4 Si $x \in]-2\,;6[$ alors $x^3 \in \ldots$

Solution page 253

La fonction racine carrée

Exercice 9.15 (complétion et ordre)

Compléter les pointillés par l'un des symboles « $<$ » et « $>$ ».

1 $\sqrt{2,18} \ldots \sqrt{2,19}$

2 $\sqrt{(-\pi)^2} \ldots \sqrt{(-4)^2}$

3 $\sqrt{1,718} \ldots \sqrt{1,0817}$

4 $\sqrt{(-0,04)^2} \ldots \sqrt{0,006^2}$

5 $\sqrt{(-0,78)^2} \ldots \sqrt{(-0,77)^2}$

6 $\sqrt{(1-\pi)^2} \ldots \sqrt{(3-2\pi)^2}$

Solution page 253

mathweb.fr

Exercice 9.16 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1 $\sqrt{x} = 8$
2 $\sqrt{x} = 16$
3 $\sqrt{x} = 25$
4 $\sqrt{x} = 54$
5 $2\sqrt{x} - 18 = 0$
6 $5\sqrt{x} + 1 = 0$

Solution page 253

Exercice 9.17 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1 $\sqrt{x+1} = 5$
2 $\sqrt{x-3} = 1$
3 $\sqrt{2x-1} = 6$
4 $\sqrt{5-2x} = 7$
5 $2\sqrt{x-1} - 7 = 0$
6 $5\sqrt{x+3} - 1 = 0$

Solution page 254

Exercice 9.18 (résolutions d'inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1 $\sqrt{x} \geqslant 9$
2 $\sqrt{x} < -1$
3 $\sqrt{x} > -5$
4 $\sqrt{x} \leqslant 8$
5 $\sqrt{3x-8} < 1$
6 $\sqrt{5-2x} \geqslant 2$

Solution page 255

Exercice 9.19

On pose $f(x) = \sqrt{x}$.
Montrer que pour tous réels positifs a et b, $f(a+b) < f(a) + f(b)$.

Solution page 256

Exercices généraux

Exercice 9.20 (comparaison de deux nombres)

Comparer a et b dans chacun des cas suivants.

1 $a = (\pi+1)^3$ et $b = 4,5^3$
2 $a = \sqrt{\pi+4}$ et $b = \sqrt{7}$
3 $a = \dfrac{1}{\pi}$ et $b = \dfrac{1}{3,1}$
4 $a = (\pi-5)^3$ et $b = (\pi-4)^3$
5 $a = \dfrac{1}{-4}$ et $b = \dfrac{1}{\pi-7}$

Solution page 256

Exercice 9.21 (comparaison de deux nombres)

Comparer a et b sans calcul.

1 $a = (\pi-2)^2$ et $b = 1,1^2$
2 $a = \sqrt{\pi-1}$ et $b = \sqrt{2}$
3 $a = \frac{1}{\pi}$ et $b = \frac{\pi^2+1}{\pi}$
4 $a = (\pi-7)^3$ et $b = (\pi-6)^3$

Solution page 256

Exercice 9.22 (encadrements)

1 Encadrer a^2, a^3 et $\dfrac{1}{a}$ dans chacun des cas suivants :

a. $3 < a < 5$

b. $-2 \leqslant a < -\dfrac{1}{2}$

2 Encadrer a^2 dans les cas suivants :

a. $-\pi \leqslant a \leqslant -3$

b. $-\dfrac{6}{7} < a < \dfrac{7}{6}$

Solution page 257

Exercice 9.23 (intersection de courbes)

Montrer que la courbe représentative des fonctions carré et racine carrée se coupent en seulement deux points, dont on donnera les coordonnées.

Solution page 257

Exercice 9.24 (intersection de courbes)

Montrer que la courbe représentative des fonctions inverse et racine carrée se coupent en un unique point, dont on donnera les coordonnées.

Solution page 257

Exercice 9.25 (intersection de courbes)

Montrer que la courbe représentative des fonctions inverse et carré se coupent en un unique point, dont on donnera les coordonnées.

Solution page 258

Exercice 9.26 (équations et inéquations)

1 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 10$ **b.** $x^3 = 216$ **c.** $\sqrt{x} = 8$ **d.** $\dfrac{1}{x} = 5$

2 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2 < 6$ **b.** $x^2 \geqslant 10$ **c.** $x^3 < 8$ **d.** $\sqrt{x} \leqslant 4$

Solution page 258

Exercice 9.27 (équations et inéquations)

1 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 7$ **b.** $x^3 = -64$ **c.** $\sqrt{x} = 16$ **d.** $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{7}$

2 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2 < 12$ **b.** $x^2 \geqslant 7$ **c.** $x^3 < -1$ **d.** $\sqrt{x} \leqslant 9$

Solution page 259

mathweb.fr

Exercice 9.28 (encadrements)

1 Encadrer a^2, a^3 et $\frac{1}{a}$ dans chacun des cas suivants :

a. $1 \leqslant a < 2$ **b.** $-3 \leqslant a < -1$

2 Encadrer a^2 dans chacun des cas suivants :

a. $-2\pi < a \leqslant 3$ **b.** $-\dfrac{2}{3} \leqslant a < \dfrac{3}{2}$

Solution page 259

Exercice 9.29

On considère deux fonctions f et g telles que :

$$f(x) = 2 + \sqrt{x} - x \qquad \text{et} \qquad g(x) = x + \frac{1}{x}.$$

1 Quel est le domaine de définition de f ?

2 Quel est le domaine de définition de g ?

3 Montrer que les courbes représentatives de f et g se coupent au point $A\,(1\,;2)$.

4 Tracer sur une calculatrice les deux courbes, puis en déduire le nombre de points d'intersection de ces deux courbes.

5 En déduire la valeur des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. On donnera une valeur approchée au centième si nécessaire.

À partir de là, les questions sont assez compliquées.

6 Montrer que l'équation $2x^2 - 2x + 1 = x\sqrt{x}$ admet les mêmes solutions que l'équation $f(x) = g(x)$.

7 Montrer alors que les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont aussi solutions de l'équation :

$$4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0.$$

8 On sait que $x = 1$ est une solution de cette dernière équation. On peut alors écrire :

$$4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = (x - 1)(ax^3 + bx^2 + xc + d).$$

Trouver les valeurs de a, b, c et d.

Solution page 259

mathweb.fr

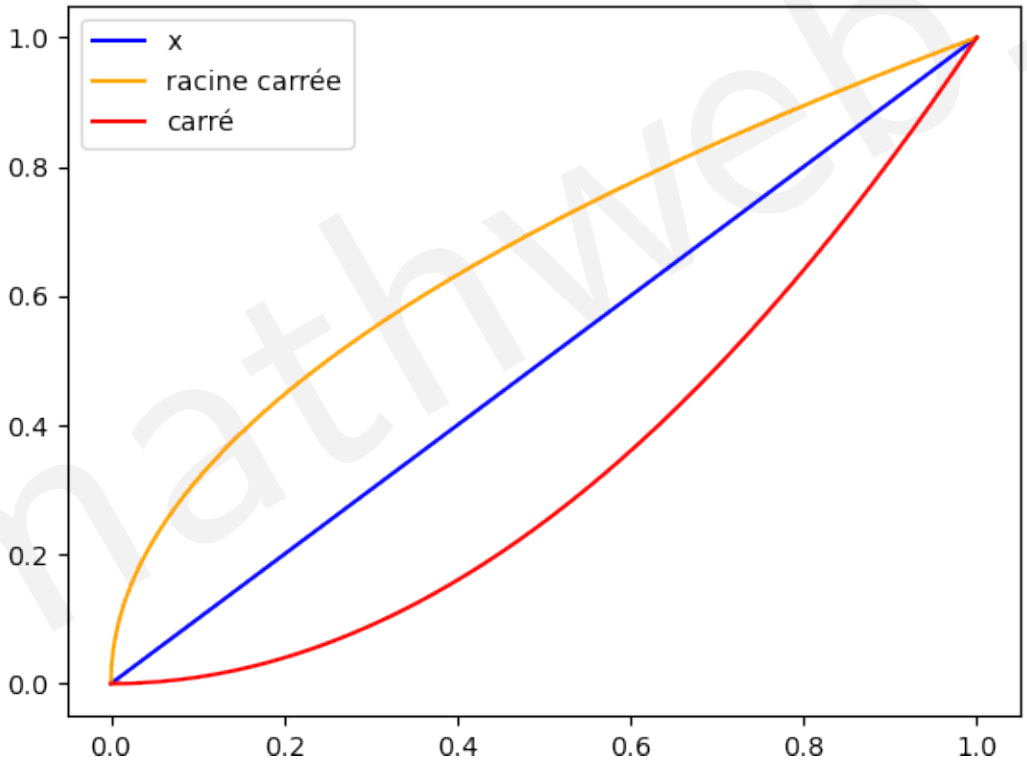
Python

Exercice 9.30 (utilisation de matplotlib)

Le module `matplotlib` permet de faire des graphiques, notamment des représentations graphiques de courbes (avec la bibliothèque `matplotlib.pyplot`).
On l'installe en ligne de commande avec la commande :

```
pip install matplotlib
ou
conda install matplotlib (sous anaconda)
```

Effectuer quelques recherches sur le fonctionnement de ce module, puis écrire un programme Python permettant d'afficher les courbes de référence $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ sur $[0\,;1]$ comme l'illustration suivante en faisant appel au moins de fonctions possible.



Solution page 261

mathweb.fr

9 Corrigés

Corrigé de l'exercice 9.1 page 237

1 $2,18^2 < 2,19^2$. En effet, $0 < 2,18 < 2,19$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

2 $(-\pi)^2 < (-4)^2$. En effet, $-4 < -\pi < 0$ et la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc les images sont rangées dans l'ordre inverse : $(-4)^2 > (-\pi)^2$.

3 $1,718^2 > 1,0817^2$. En effet, $0 < 1,0817 < 1,718$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

4 $0,04^2 > 0,006^2$. En effet, $0 < 0,006 < 0,04$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

5 $(-0,78)^2 > (-0,77)^2$. En effet, $-0,78 < -0,77 < 0$ et la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc les images sont rangées dans l'ordre inverse :
$(-0,78)^2 > (-0,77)^2$.

6 $(1-\pi)^2 < (3-2\pi)^2$. En effet, $1-\pi \approx 1-3,14 \approx -2,14$ et $3-2\pi \approx 3-6,28 \approx -3,28$ donc $3-2\pi < 1-\pi < 0$. De plus, la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc les images sont rangées dans l'ordre inverse : $(3-2\pi)^2 > (1-\pi)^2$.

Corrigé de l'exercice 9.2 page 237

1
$$\begin{aligned} x^2 = 8 &\iff x = -\sqrt{8} \text{ ou } x = \sqrt{8} \\ &\iff x = -\sqrt{4\times 2} \text{ ou } x = \sqrt{4\times 2} \\ &\iff x = -\sqrt{4}\times\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{4}\times\sqrt{2} \\ &\iff x = -2\sqrt{2} \text{ ou } x = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $x^2 = 8$ est donc : $\boxed{S = \left\{-2\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2}\right\}}$.

2
$$\begin{aligned} x^2 = 16 &\iff x = -\sqrt{16} \text{ ou } x = \sqrt{16} \\ &\iff x = -4 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $x^2 = 16$ est donc : $\boxed{S = \{-4\ ;\ 4\}}$.

3
$$\begin{aligned} x^2 = 25 &\iff x = -\sqrt{25} \text{ ou } x = \sqrt{25} \\ &\iff x = -5 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $x^2 = 25$ est donc : $\boxed{S = \{-5\ ;\ 5\}}$.

4
$$\begin{aligned} x^2 = 54 &\iff x = -\sqrt{54} \text{ ou } x = \sqrt{54} \\ &\iff x = -\sqrt{9\times 6} \text{ ou } x = \sqrt{9\times 6} \\ &\iff x = -3\sqrt{6} \text{ ou } x = 3\sqrt{6}. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $x^2 = 16$ est donc : $\boxed{S = \left\{-3\sqrt{6}\ ;\ 3\sqrt{6}\right\}}$.

5
$$\begin{aligned} 2x^2 - 18 = 0 &\iff 2x^2 = 18 \\ &\iff x^2 = 9 \\ &\iff x = -3 \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $2x^2 - 18 = 0$ est donc : $\boxed{S = \{-3\ ;\ 3\}}$.

mathweb.fr

6 $5x^2+1=0 \iff x^2=-\dfrac{1}{5}$ ← impossible car un carré est toujours positif ou nul.

L'ensemble solution de l'équation $5x^2+1=0$ est donc : $\boxed{S=\varnothing}$.

Corrigé de l'exercice 9.3 page 237

1 $x^2 \geqslant 81 \iff \underline{x \in]-\infty\,;-9] \cup [9\,;+\infty[}$.

2 $x^2 < -1$. Cette inégalité étant impossible (car un carré est toujours positif ou nul), l'ensemble solution est : $\underline{S=\varnothing}$.

3 $x^2 > -5$. Un carré étant toujours positif ou nul, il est toujours plus grand que -5 donc l'ensemble solution de l'inéquation est : $\underline{S=\mathbb{R}}$.

4 $x^2 \leqslant 64 \iff \underline{x \in [-8\,;8]}$.

Corrigé de l'exercice 9.4 page 237

1 $(x+1)^2=5$. Posons $X=x+1$. Alors,

$$\begin{aligned}(x+1)^2=5 &\iff X^2=5\\ &\iff X=-\sqrt{5} \text{ ou } X=\sqrt{5}\\ &\iff x+1=-\sqrt{5} \text{ ou } x+1=\sqrt{5}\\ &\iff x=-\sqrt{5}-1 \text{ ou } x=\sqrt{5}-1.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(x+1)^2=5$ est donc : $\boxed{S=\left\{-\sqrt{5}-1\ ;\ \sqrt{5}-1\right\}}$.

2 $(x-3)^2=100$. Posons $X=x-3$. Alors,

$$\begin{aligned}(x-3)^2=100 &\iff X^2=100\\ &\iff X=-10 \text{ ou } X=10\\ &\iff x-3=-10 \text{ ou } x-3=10\\ &\iff x=-10+3 \text{ ou } x=10+3\\ &\iff x=-7 \text{ ou } x=13.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(x-3)^2=100$ est donc : $\boxed{S=\{-7\ ;\ 13\}}$.

3 $(2x-1)^2=36$. Posons $X=2x-1$. Alors,

$$\begin{aligned}(2x-1)^2=36 &\iff X^2=36\\ &\iff X=-6 \text{ ou } X=6\\ &\iff 2x-1=-6 \text{ ou } 2x-1=6\\ &\iff 2x=-5 \text{ ou } 2x=7\\ &\iff x=-\frac{5}{2} \text{ ou } x=\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(2x-1)^2=36$ est donc :

$$\boxed{S=\left\{-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{7}{2}\right\}}$$

4 $(5-2x)^2 = 64$. Posons $X = 5-2x$. Alors,

$$\begin{aligned}(5-2x)^2 = 64 &\iff X^2 = 64\\ &\iff X = -8 \text{ ou } X = 8\\ &\iff 5-2x = -8 \text{ ou } 5-2x = 8\\ &\iff -2x = -13 \text{ ou } -2x = 3\\ &\iff x = \frac{13}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(5-2x)^2 = 64$ est donc : $\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{13}{2}\right\}}$.

5 $2(x-1)^2 - 7 = 0$. Posons $X = x-1$. Alors,

$$\begin{aligned}2(x-1)^2 - 7 = 0 &\iff 2X^2 = 7\\ &\iff X^2 = \frac{7}{2}\\ &\iff X = -\sqrt{\frac{7}{2}} \text{ ou } X = \sqrt{\frac{7}{2}}\\ &\iff x-1 = -\sqrt{\frac{7}{2}} \text{ ou } x-1 = \sqrt{\frac{7}{2}}\\ &\iff x = -\sqrt{\frac{7}{2}}+1 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{2}}+1.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $2(x-1)^2 - 7 = 0$ est donc :

$$\boxed{S = \left\{1-\sqrt{\frac{7}{2}}\,;\,1+\sqrt{\frac{7}{2}}\right\}}$$

6 $5(x+3)^2 + 1 = 0 \iff 5(x+3)^2 = -1$.
Or, $5 > 0$ et $(x+3)^2 \geqslant 0$ donc $5(x+3)^2 \geqslant 0$, quel que soit x.
Ainsi, $5(x+3)^2$ ne peut jamais être égal à -1. Donc :

$$\boxed{S = \varnothing}$$

Corrigé de l'exercice 9.5 page 237

1 Si $x \in [5\,;8]$ alors $x^2 \in [25\,;64]$.
En effet, $5 > 0$ et $8 > 0$, et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc quand on passe aux carrés, l'ordre ne change pas :

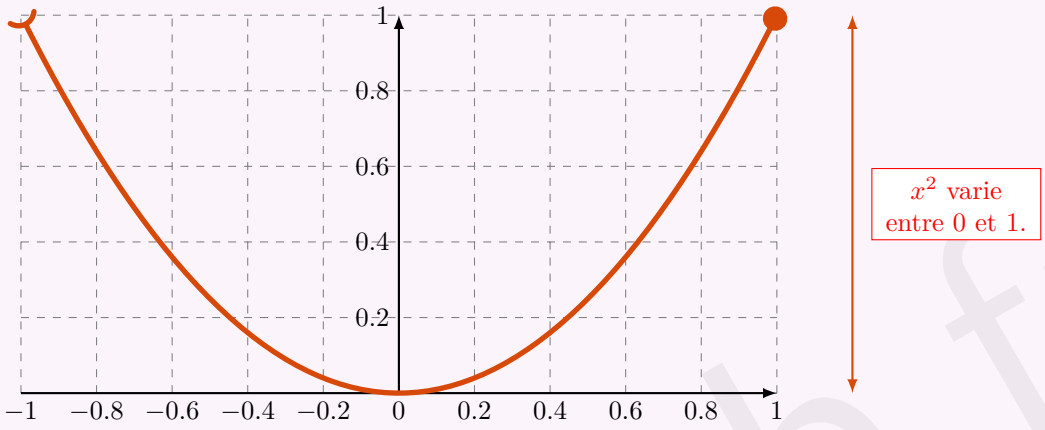
$$5 \leqslant x \leqslant 8 \iff 5^2 \leqslant x^2 \leqslant 8^2.$$

2 Si $x \in [-4\,;-2[$ alors $x^2 \in]4\,;16]$.
En effet, $-4 < 0$ et $-2 < 0$, et la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc quand on passe aux carrés, on change l'ordre :

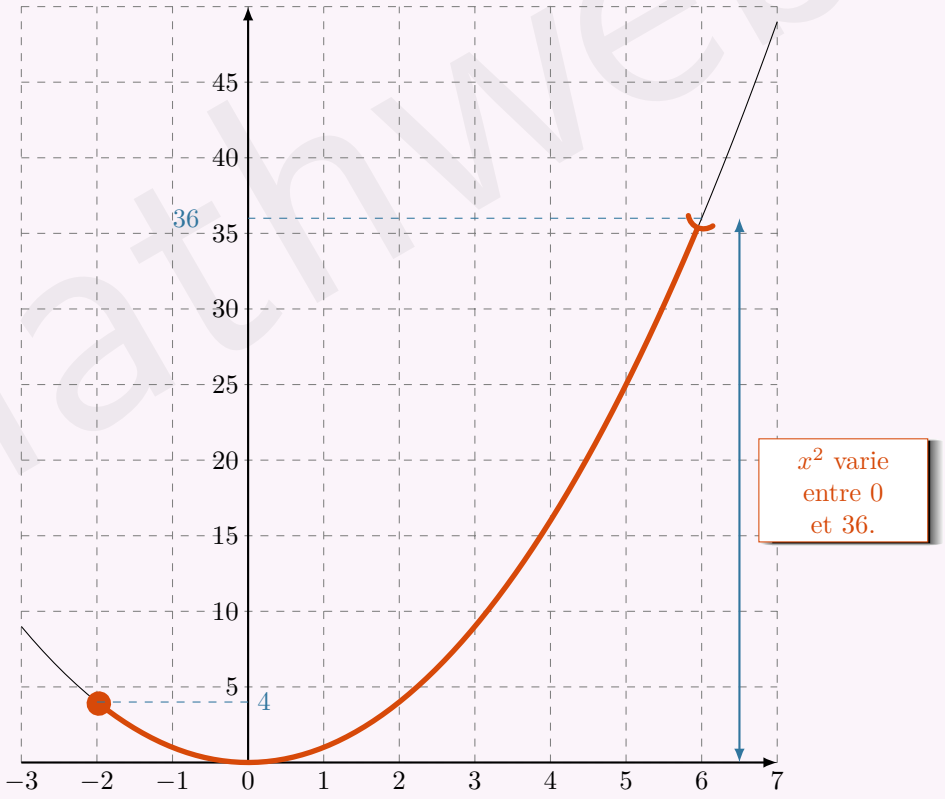
$$-4 \leqslant x < -2 \iff (-4)^2 \geqslant x^2 > (-2)^2.$$

mathweb.fr

3 Si $x \in]-1\,;1]$ alors $x^2 \in [0\,;1]$. On peut le voir sur le graphique suivant :



4 Si $x \in]-2\,;6[$ alors $x^2 \in [0\,;36[$. On peut le voir sur le graphique suivant :



Corrigé de l'exercice 9.6 page 238

1 $\dfrac{1}{2}\Big[f(a+b)-\big(f(a)+f(b)\big)\Big] = \dfrac{1}{2}\Big[(a+b)^2-\big(a^2+b^2\big)\Big]$

$= \dfrac{1}{2}[a^2+2ab+b^2-a^2-b^2]$

$$\boxed{\frac{1}{2}\Big[f(a+b)-\big(f(a)+f(b)\big)\Big] = ab}$$

mathweb.fr

2 $f(a+b)-f(a-b)=(a+b)^2-(a-b)^2$
$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$
$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$\boxed{f(a+b)-f(a-b)=4ab}$

3 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$
$=\frac{4ab}{4}$ (d'après la question précédente)

$\boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)=ab}$

Corrigé de l'exercice 9.7 page 238

1 $\frac{1}{2,18}>\frac{1}{2,19}$. En effet, $2,18<2,19$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc les images sont rangées dans l'ordre inverse.

2 $\frac{1}{-\pi}<\frac{1}{-4}$. En effet, $-\pi>-4$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, donc les images sont rangées dans l'ordre inverse.

3 $\frac{1}{1,718}<\frac{1}{1,0817}$ car $1,718>1,0817$ et les images par la fonction inverse sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents.

4 $\frac{1}{0,04}<\frac{1}{0,006}$ car $0,04>0,006$.

5 $\frac{1}{-0,78}>\frac{1}{-0,77}$ car $-0,78<-0,77$.

6 $\frac{1}{1-\pi}<\frac{1}{3-2\pi}$ car $1-\pi\approx-2,14$ et $3-2\pi\approx-3,28$, donc $1-\pi>3-2\pi$.

Corrigé de l'exercice 9.8 page 238

1 $\frac{1}{x}=8\iff\boxed{x=\frac{1}{8}}$.

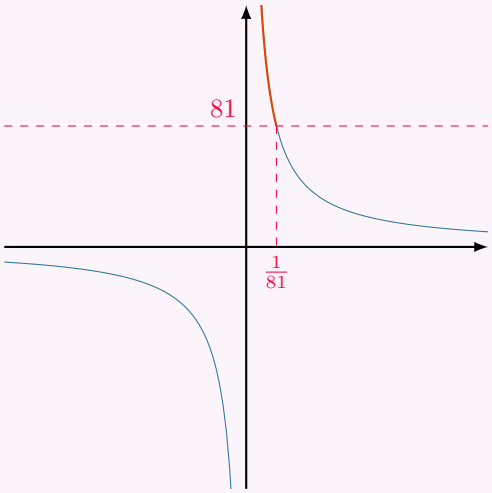
2 $\frac{1}{x}=-16\iff\boxed{x=-\frac{1}{16}}$.

3 $\frac{1}{x}=0\leftarrow$ impossible (la courbe représentative de la fonction inverse ne coupe jamais la droite d'équation $y=0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses). Donc $\underline{S=\varnothing}$.

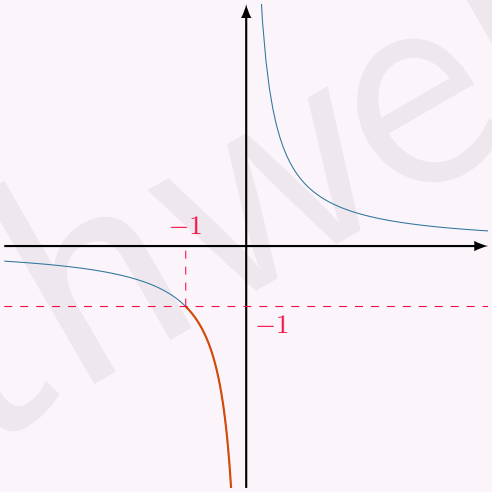
mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 9.9 page 238

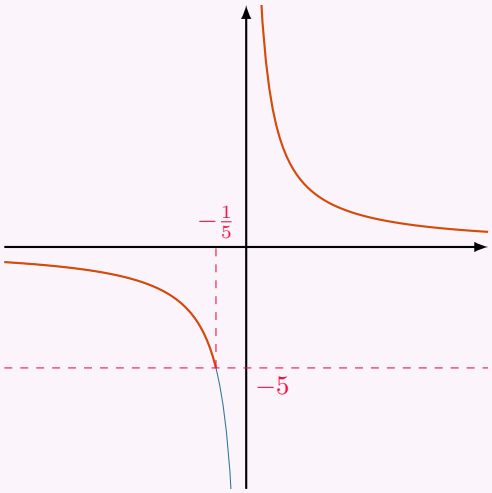
1 $\dfrac{1}{x} \geqslant 81 \iff x \in \left]0\,;\dfrac{1}{81}\right]$.



2 $\dfrac{1}{x} < -1 \iff x \in]-1\,;0[$.

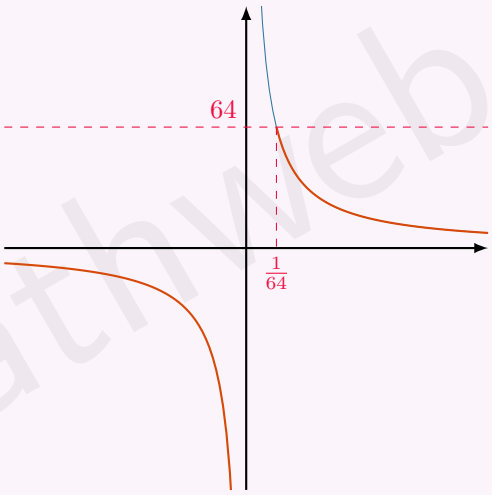


3 $\dfrac{1}{x} > -5 \iff x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{5}\right[\cup]0\,;+\infty[$.



mathweb.fr

4 $\dfrac{1}{x} \leqslant 64 \iff x \in]-\infty\,;0[\cup \left[\dfrac{1}{64}\,;+\infty\right[$.



Corrigé de l'exercice 9.10 page 238

1 $\dfrac{1}{x+1} = 5$. Posons $X = x+1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} = 5 &\iff \frac{1}{X} = 5\\
&\iff X = \frac{1}{5}\\
&\iff x+1 = \frac{1}{5}\\
&\iff x = \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{5}\\
&\iff x = -\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{1}{x+1} = 5$ est donc : $\boxed{S = \left\{-\dfrac{4}{5}\right\}}$.

2 $\dfrac{1}{x-3} = 100$. Posons $X = x-3$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-3} = 100 &\iff \frac{1}{X} = 100\\
&\iff X = \frac{1}{100}\\
&\iff x-3 = \frac{1}{100}\\
&\iff x = \frac{1}{100} + 3 = \frac{1}{100} + \frac{300}{100}\\
&\iff x = \frac{301}{100}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{1}{x-3} = 100$ est donc : $\boxed{S = \left\{\dfrac{301}{100}\right\}}$.

mathweb.fr

3 $\dfrac{1}{2x-1} = 36$. Posons $X = 2x - 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x-1} = 36 &\iff \frac{1}{X} = 36 \\
&\iff X = \frac{1}{36} \\
&\iff 2x - 1 = \frac{1}{36} \\
&\iff 2x = \frac{1}{36} + 1 \\
&\iff 2x = \frac{37}{36} \\
&\iff x = \frac{1}{2} \times \frac{37}{36} \\
&\iff x = \frac{37}{72}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{1}{2x-1} = 36$ est donc : $\boxed{S = \left\{\dfrac{37}{72}\right\}}$.

4 $\dfrac{1}{5-2x} = 64$. Posons $X = 5 - 2x$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5-2x} = 64 &\iff \frac{1}{X} = 64 \\
&\iff X = \frac{1}{64} \\
&\iff 5 - 2x = \frac{1}{64} \\
&\iff -2x = \frac{1}{64} - 5 \\
&\iff -2x = \frac{-319}{64} \\
&\iff x = \frac{319}{128}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{1}{5-2x} = 64$ est donc : $\boxed{S = \left\{\dfrac{319}{128}\right\}}$.

5
$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-1} - 7 = 0 &\iff \frac{2}{x-1} = 7 \\
&\iff \frac{x-1}{2} = \frac{1}{7} \qquad \text{(on a inversé les deux membres de l'égalité)} \\
&\iff x - 1 = \frac{2}{7} \qquad \text{(on a multiplé par deux les deux membres)} \\
&\iff x = \frac{2}{7} + 1 = \frac{9}{7}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{2}{x-1} - 7 = 0$ est donc : $\boxed{S = \left\{\dfrac{9}{7}\right\}}$.

6
$$\begin{aligned}
\frac{5}{x+3} + 1 = 0 &\iff \frac{5}{x+3} = -1 \\
&\iff \frac{x+3}{5} = -1 \\
&\iff x + 3 = -5 \quad \text{(on a multiplié par 5 les deux membres de l'égalité)} \\
&\iff x = -8.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{5}{x+3} + 1 = 0$ est donc : $\boxed{S = \{-8\}}$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 9.11 page 239

1 Si $x \in [5\,;8]$ alors $\dfrac{1}{x} \in \left[\dfrac{1}{8}\,;\dfrac{1}{5}\right]$.

En effet, la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, les images sont rangées dans l'ordre inverse : $5 \leqslant x \leqslant 8 \iff \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{8}$.

2 Si $x \in [-4\,;-2[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{4}\right]$.

3 Si $x \in]-1\,;0[$ alors $\dfrac{1}{x} \in]-\infty\,;-1[$.

4 Si $x \in]0\,;7[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \left]\dfrac{1}{7}\,;+\infty\right[$.

Corrigé de l'exercice 9.12 page 239

1
$$\begin{aligned} f(a+b)-f(a-b) &= \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b} \\ &= \frac{a-b}{(a+b)(a-b)}-\frac{a+b}{(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{(a-b)-(a+b)}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{a-b-a-b}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(a+b)-f(a-b)=\frac{-2b}{a^2-b^2}}$$

2
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big[f(a+b)+f(a-b)\big] &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}+\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(a-b)+(a+b)}{(a-b)(a+b)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a-b+a+b}{a^2-b^2}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\big[f(a+b)+f(a-b)\big]=\frac{a}{a^2-b^2}}$$

Corrigé de l'exercice 9.13 page 239

1 $2,18^3 < 2,19^3$. En effet, $0 < 2,18 < 2,19$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

2 $(-\pi)^3 > (-4)^3$. En effet, $-4 < -\pi < 0$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, donc les images sont rangées dans le même ordre : $(-4)^3 < (-\pi)^3$.

3 $1,718^3 > 1,0817^3$. En effet, $0 < 1,0817 < 1,718$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

4 $(-0,04)^3 < 0,006^3$. En effet, $-0,04 < 0$ donc $(-0,04)^3 < 0$ et $0,006 > 0$ donc $0,006^3 > 0$.

5 $(-0,78)^3 < (-0,77)^3$. En effet, $-0,78 < -0,77 < 0$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

6 $(1-\pi)^3 > (3-2\pi)^3$. En effet, $1-\pi \approx 1-3,14 \approx -2,14$ et $3-2\pi \approx 3-6,28 \approx -3,28$ donc $3-2\pi < 1-\pi < 0$. De plus, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ donc les images sont rangées dans l'ordre inverse : $(3-2\pi)^3 > (1-\pi)^3$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 9.14 page 239

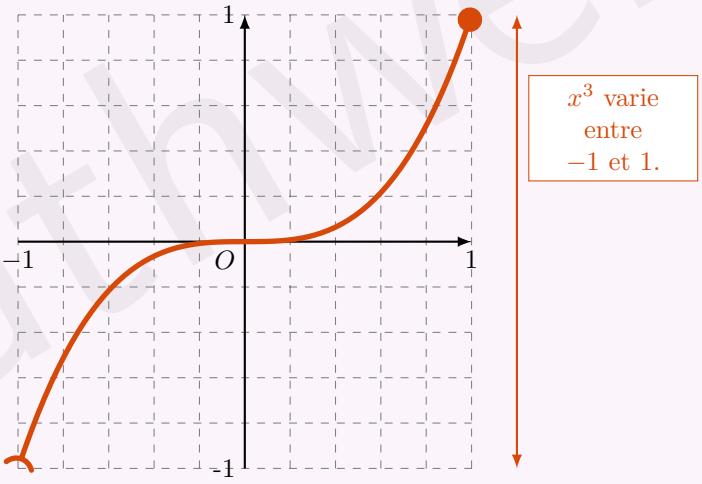
1 Si $x \in [5\,;8]$ alors $x^3 \in [125\,;512]$, où $5^3 = 125$ et $8^3 = 512$.
En effet, $5 > 0$ et $8 > 0$, et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc quand on passe aux cubes, l'ordre ne change pas :

$$5 \leqslant x \leqslant 8 \iff 5^3 \leqslant x^3 \leqslant 8^3.$$

2 Si $x \in [-4\,;-2[$ alors $x^3 \in [-64\,;-8[$.
En effet, $-4 < 0$ et $-2 < 0$, et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ donc quand on passe aux cubes, on change l'ordre :

$$-4 \leqslant x < -2 \iff (-4)^3 \leqslant x^3 < (-2)^3.$$

3 Si $x \in]-1\,;1]$ alors $x^3 \in]-1\,;1]$. On peut le voir sur le graphique suivant :



4 Si $x \in]-2\,;6[$ alors $x^3 \in]-8\,;216[$, où $(-2)^3 = -8$ et $6^3 = 216$.

Corrigé de l'exercice 9.15 page 239

1 $\sqrt{2,18} < \sqrt{2,19}$. En effet, $0 < 2,18 < 2,19$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

2 $\sqrt{(-\pi)^2} < \sqrt{(-4)^2}$. En effet, $(-\pi)^2 = \pi^2 \approx 9,9$ et $(-4)^2 = 16$, donc $(-\pi)^2 < (-4)^2$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

3 $\sqrt{1,718} > \sqrt{1,0817}$. En effet, $0 < 1,0817 < 1,718$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

4 $\sqrt{(-0,04)^2} > \sqrt{0,006^2}$. En effet, $(-0,04)^2 = 0,04^2$ et $0,006 < 0,04$.
De plus, $\sqrt{0,04^2} = 0,04$ et $\sqrt{0,006^2} = 0,006$. Or, on sait que $0,006 < 0,04$. D'où le résultat.

5 $\sqrt{(-0,78)^2} > \sqrt{(-0,77)^2}$. En effet, $\sqrt{(-0,78)^2} = 0,78$ et $\sqrt{(-0,77)^2} = 0,77$. Or, on sait que $0,77 < 0,78$. D'où le résultat.

6 $\sqrt{(1-\pi)^2} < \sqrt{(3-2\pi)^2}$. En effet, $1 - \pi \approx 1 - 3,14 \approx -2,14$ donc $1 - \pi < 0$, ce qui signifie que $\sqrt{(1-\pi)^2} = \pi - 1 \approx 2,314$.
De plus, $3 - 2\pi \approx 3 - 6,28 \approx -3,28 < 0$ donc $\sqrt{(3-2\pi)^2} = 2\pi - 3 \approx 6,28 - 3 \approx 3,28$.
À l'aide des valeurs approchées trouvées précédemment, on peut dire que $\pi - 1 < 2\pi - 3$. D'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 9.16 page 240

1 $\sqrt{x} = 8 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 = 8^2 \iff x = 64$. Donc $\underline{S = \{64\}}$.

2 $\sqrt{x} = 16 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 = 16^2 \iff x = 256$. Donc $\underline{S = \{256\}}$.

3 $\sqrt{x} = 25 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 = 25^2 \iff x = 625$. Donc $\underline{S = \{625\}}$.

4 $\sqrt{x} = 54 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 = 54^2 \iff x = 2\,916$. Donc $\underline{S = \{2\,916\}}$.

5 $2\sqrt{x} - 18 = 0 \iff 2\sqrt{x} = 18 \iff \sqrt{x} = 9 \iff x = 9^2 \iff x = 81$. Donc $\underline{S = \{81\}}$.

6 $5\sqrt{x} + 1 = 0 \iff \sqrt{x} = -\dfrac{1}{5}$ ←impossible car une racine carrée est toujours positive ou nulle. Donc $\underline{S = \varnothing}$.

Corrigé de l'exercice 9.17 page 240

1 $\sqrt{x+1} = 5$. On pose $X = x + 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} = 5 &\iff \sqrt{X} = 5\\ &\iff X = 5^2\\ &\iff x + 1 = 25\\ &\iff x = 24.\end{aligned}$$

On vérifie que $x = 24$ vérifie l'égalité : $\sqrt{24+1} = \sqrt{25} = 5$, ce qui est ce que nous souhaitons.

$\underline{\text{L'ensemble solution de l'équation est donc } S = \{24\}.}$

2 $\sqrt{x-3} = 1$. On pose $X = x - 3$. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} = 1 &\iff \sqrt{X} = 1\\ &\iff X = 1^2\\ &\iff x - 3 = 1\\ &\iff x = 4.\end{aligned}$$

On vérifie que $x = 4$ vérifie l'égalité : $\sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$, ce qui est ce que nous souhaitons.

$\underline{\text{L'ensemble solution de l'équation est donc } S = \{4\}.}$

3 $\sqrt{2x-1} = 6$. On pose $X = 2x - 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1} = 6 &\iff \sqrt{X} = 6\\ &\iff X = 6^2\\ &\iff 2x - 1 = 36\\ &\iff 2x = 37\\ &\iff x = \frac{37}{2}.\end{aligned}$$

On vérifie que $x = \dfrac{37}{2}$ vérifie l'égalité : $\sqrt{2 \times \dfrac{37}{2} - 1} = \sqrt{37-1} = \sqrt{36} = 6$, ce qui est ce que nous souhaitons.

$\underline{\text{L'ensemble solution de l'équation est donc } S = \left\{\dfrac{37}{2}\right\}.}$

4 $\sqrt{5-2x} = 7$. On pose $X = 5 - 2x$. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{5-2x} = 7 &\iff \sqrt{X} = 7\\ &\iff X = 7^2\\ &\iff 5 - 2x = 49\\ &\iff -2x = 44\\ &\iff x = -22.\end{aligned}$$

On vérifie que $x = -22$ vérifie l'égalité : $\sqrt{5 - 2 \times (-22)} = \sqrt{5 + 44} = \sqrt{49} = 7$, ce qui est ce que nous souhaitons.

$\underline{\text{L'ensemble solution de l'équation est donc } S = \{-22\}.}$

mathweb.fr

5 $2\sqrt{x-1}-7=0$. On pose $X=x-1$. Alors,

$$\begin{aligned}2\sqrt{x-1}-7=0 &\iff 2\sqrt{X}=7\\ &\iff X=\frac{7}{2}\\ &\iff X=\left(\frac{7}{2}\right)^2\\ &\iff x-1=\frac{49}{4}\\ &\iff x=\frac{49}{4}+1\\ &\iff x=\frac{53}{4}.\end{aligned}$$

On vérifie que $x=\dfrac{53}{4}$ vérifie l'égalité :

$$2\sqrt{\frac{53}{4}-1}-7=2\sqrt{\frac{49}{4}}-7=2\times\frac{7}{2}-7=7-7=0,$$

ce qui est ce que nous souhaitons.

L'ensemble solution de l'équation est donc $S=\left\{\dfrac{53}{4}\right\}$.

6 $5\sqrt{x+3}-1=0 \iff 5\sqrt{x+3}=1$

$$\begin{aligned}&\iff \sqrt{x+3}=\frac{1}{5}\\ &\iff x+3=\frac{1}{25}\\ &\iff x=\frac{1}{25}-3\\ &\iff x=-\frac{74}{25}\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc $S=\left\{-\dfrac{74}{25}\right\}$.

Remarque 72

Nous ne sommes pas obligés de toujours vérifier l'exactitude de la valeur trouvée, comme je l'ai fait dans les questions 1 à 5. Nous ne sommes pas non plus obligés de poser $X=\cdots$. Dans la question 6, j'ai justement fait autrement pour montrer qu'il est possible d'aller plus vite.
Attention toutefois : il faut tout de même vérifier que la valeur trouvée est possible quand il y a une racine carrée... En effet, si on trouve par exemple $x=-2$ et que l'équation comporte $\sqrt{x-3}$, cette valeur n'est pas possible car $\sqrt{-2-3}=\sqrt{-5}$ n'existe pas ! Enfin... pas dans les nombres réels.

Corrigé de l'exercice 9.18 page 240

1 $\sqrt{x}\geqslant 9 \iff x\geqslant 9^2 \iff x\geqslant 81$. Donc $S=[81\,;+\infty[$.

2 $\sqrt{x}<-1$. Une racine carrée étant toujours positive ou nulle, elle ne peut pas être inférieure à -1. Donc il n'y a aucune valeur de x qui vérifie l'inégalité $\sqrt{x}<-1$. D'où $S=\varnothing$.

3 $\sqrt{x}>-5$. Cette inégalité est toujours vraie car une racine carrée est toujours positive ou nulle. En revanche, x doit être positif ou nul pour que $\sqrt{x}$ existe. Donc $S=[0\,;+\infty[$.

4 $\sqrt{x}\leqslant 8 \iff 0\leqslant x\leqslant 8^2$. Donc $S=[0\,;64]$.

mathweb.fr

5 $\sqrt{3x-8} < 1 \iff 0 \leqslant 3x-8 < 1$

$\iff 8 \leqslant 3x < 9$ en ajoutant 8 à chaque membre

$\iff \dfrac{8}{3} \leqslant x < 3$ en divisant par 3 chaque membre

L'ensemble solution est donc $\underline{S = \left[\dfrac{8}{3}\,;3\right[}$.

6 $\sqrt{5-2x} \geqslant 2 \iff 5-2x \geqslant 4$

$\iff -2x \geqslant -1$

$\iff x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

L'ensemble solution est donc :

$\underline{S = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]}$.

Remarque 73

On s'assure que $5-2x \geqslant 0$ pour $x \in S$ sinon $\sqrt{5-2x}$ n'existe pas.

Corrigé de l'exercice 9.19 page 240

Pour tous a et b strictement positifs,

$$\begin{aligned} f(a+b) < f(a)+f(b) &\iff \sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ &\iff \left(\sqrt{a+b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \text{ car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff a+b < \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}\times\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \\ &\iff a+b < a+2\sqrt{ab}+b \\ &\iff 0 < 2\sqrt{ab} \quad \leftarrow \text{ ce qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$

Nous avons raisonné par *équivalences*, ce qui justifie que dans la mesure où « $2\sqrt{ab} > 0$ » est toujours vraie, « $f(a+b) < f(a)+f(b)$ » l'est aussi.

Corrigé de l'exercice 9.20 page 240

1 $\pi + 1 \approx 3,14 + 1 \approx 4,14$ donc $\pi + 1 < 4,5$; ainsi, $\underline{(\pi+1)^3 < 4,5^3}$ (la fonction « cube » conserve l'ordre de deux nombres).

2 $\pi + 4 \approx 7,14$ donc $\pi + 4 > 7$; ainsi, $\underline{\sqrt{\pi+4} > \sqrt{7}}$ (la fonction « racine carrée » conserve l'ordre de deux nombres positifs).

3 $\pi \approx 3,14 > 3,1$ donc $\boxed{\dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{3,1}}$ (la fonction « inverse » inverse l'ordre de deux nombres de même signe).

4 $\pi - 5 < \pi - 4$ donc $\underline{(\pi-5)^3 < (\pi-4)^3}$.

5 $\pi - 7 \approx 3,14 - 7 \approx -3,86$ donc $\pi - 7 > -4$; ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{-4} > \dfrac{1}{\pi-7}}$.

Corrigé de l'exercice 9.21 page 240

1 $\pi - 2 \approx 1,14 > 1,1 > 0$ donc $(\pi-2)^2 > (1,1)^2$ car la fonction carré conserve l'ordre de deux nombres positifs.

2 $\pi - 1 \approx 2,14 > \sqrt{2}$ donc $\sqrt{\pi-1} > \sqrt{2}$ car la fonction racine carrée conserve l'ordre de deux nombres positifs.

3 $1 < 1 + \pi^2$ donc $\frac{1}{\pi} < \frac{\pi^2+1}{\pi}$.

4 $\pi - 7 < \pi - 6$ donc $(\pi-7)^3 < (\pi-6)^3$ car la fonction cube conserve l'ordre.

Corrigé de l'exercice 9.22 page 241

1 **a.** Si $3 < a < 5$ alors :

- $3^2 < a^2 < 5^2$, soit $9 < a^2 < 25$ car 3 et 5 sont tous les deux positifs et la fonction « carré » conserve l'ordre sur les nombres positifs ;
- $3^3 < a^3 < 5^3$, soit $27 < a^3 < 125$ car la fonction « cube » conserve l'ordre ;
- $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{3}$ car la fonction « inverse » change l'ordre sur les nombres de mêmes signes.

b. Si $-2 \leqslant a < -\dfrac{1}{2}$ alors :

- $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 < a^2 \leqslant (-2)^2$, soit $\dfrac{1}{4} < a^2 \leqslant 4$;
- $(-2)^3 \leqslant a^3 < \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$, soit $-8 \leqslant a^3 < -\dfrac{1}{8}$;
- $\dfrac{1}{-\frac{1}{2}} < \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{-2}$, soit $-2 < \dfrac{1}{a} \leqslant -\dfrac{1}{2}$ (attention aux signes « $<$ » et « $\leqslant$ »).

2 **a.** Si $-\pi \leqslant a \leqslant -3$ alors $(-3)^2 \leqslant a^2 \leqslant (-\pi)^2$, soit $\underline{9 \leqslant a^2 \leqslant \pi^2}$.

Attention 14

La fonction « carré » inverse l'ordre sur les nombres négatifs.

b. Si $-\dfrac{6}{7} < a < \dfrac{7}{6}$ alors $0 \leqslant a < \left(\dfrac{7}{6}\right)^2$, soit $\boxed{0 \leqslant a^2 < \dfrac{49}{36}}$.

Attention 15

Ici, a est compris entre un nombre négatif et un nombre positif donc quand on élève au carré, on « passera » forcément par « 0 », donc a^2 sera égal à $0^2 = 0$. « 0 » est donc la valeur minimale atteinte par a^2.

Corrigé de l'exercice 9.23 page 241

Supposons que la courbe représentative de la fonction carré coupe celle de la fonction racine carrée en au moins un point. Notons alors ce point $I(x\,;y)$.
Alors, $y = x^2$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction carré) et $y = \sqrt{x}$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction racine carrée), avec $x \geqslant 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x^2 = \sqrt{x} &\iff \left(x^2\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ &\iff x^4 = x \\ &\iff x^4 - x = 0 \\ &\iff x(x^3 - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x^3 - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x^3 = 1 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe deux points d'intersection :

- l'un d'abscisse 0, et donc d'ordonnée $y = 0^2 = 0$; c'est l'origine du repère,
- l'autre d'abscisse 1, et donc d'ordonnée $y = 1^2 = 1$.

Corrigé de l'exercice 9.24 page 241

Supposons que la courbe représentative de la fonction inverse coupe celle de la fonction racine carrée en au moins un point. Notons alors ce point $I(x\,;y)$.

mathweb.fr

Alors, $y = \dfrac{1}{x}$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction inverse), avec $x \neq 0$, et $y = \sqrt{x}$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction racine carrée), avec $x \geqslant 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} = \sqrt{x} &\iff \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \\
&\iff \frac{1}{x^2} = x \\
&\iff \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x} = x \times \frac{1}{x} \\
&\iff \frac{1}{x^3} = 1 \\
&\iff x^3 = 1 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, il n'existe qu'un seul point d'intersection, donc l'abscisse vaut 1 et dont l'ordonnée vaut $y = \sqrt{1} = 1$.

Corrigé de l'exercice 9.25 page 241

Supposons que la courbe représentative de la fonction inverse coupe celle de la fonction carré en au moins un point. Notons alors ce point $I(x\,;y)$.

Alors, $y = \dfrac{1}{x}$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction inverse), avec $x \neq 0$, et $y = x^2$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction carré). Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} = x^2 &\iff \frac{1}{x} \times x = x^2 \times x \\
&\iff 1 = x^3 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, il n'existe qu'un seul point d'intersection, donc l'abscisse vaut 1 et dont l'ordonnée vaut $y = 1^2 = 1$.

Corrigé de l'exercice 9.26 page 241

1 **a.** $x^2 = 10 \iff x = -\sqrt{10}$ ou $x = \sqrt{10}$

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{10}\,;\sqrt{10}\right\}}$$

b. $x^3 = 216 \iff x = \sqrt[3]{216} \iff x = 6$.

$$\boxed{S = \{6\}}$$

c. $\sqrt{x} = 8 \iff x = 8^2 \iff x = 64$.

$$\boxed{S = \{64\}}$$

d. $\dfrac{1}{x} = 5 \iff x = \dfrac{1}{5}$.

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{5}\right\}}$$

2 **a.** $x^2 < 6 \iff -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \iff \boxed{x \in \left]-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\right[}$.

b. $x^2 \geqslant 10 \iff x \leqslant \sqrt{10}$ ou $x \geqslant \sqrt{10} \iff \boxed{x \in \left]-\infty\,;\sqrt{10}\right] \cup \left[\sqrt{10}\,;+\infty\right[}$.

mathweb.fr

c. $x^3 < 8 \iff x < \sqrt[3]{8} \iff x < 2 \iff \boxed{x \in]-\infty\,;2[}$.

d. $\sqrt{x} \leqslant 4 \iff 0 \leqslant x \leqslant 4^2 \iff 0 \leqslant x \leqslant 16 \iff \boxed{x \in [0\,;16]}$.

Corrigé de l'exercice 9.27 page 241

1 **a.** $x^2 = 7 \iff x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$. $\boxed{S = \{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}}$

b. $x^3 = -64 \iff x = -8$. $\boxed{S = \{-8\}}$

c. $\sqrt{x} = 16 \iff x = 16^2 \iff x = 256$. $\boxed{S = \{256\}}$

d. $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{7} \iff x = -\frac{7}{2}$. $\boxed{S = \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}}$

2 **a.** $x^2 < 12 \iff -\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$. $\boxed{S =]-\sqrt{12}\,;\sqrt{12}[}$, que l'on peut aussi écrire $\boxed{S =]-2\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}[}$

b. $x^2 \geqslant 7 \iff x \leqslant -\sqrt{7}$ ou $x \geqslant \sqrt{7}$. $\boxed{S =]-\infty\,;-\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}\,;+\infty[}$

c. $x^3 < -1 \iff x < -1$. $\boxed{S =]-\infty\,;-1[}$

d. $\sqrt{x} \leqslant 9 \iff 0 \leqslant x \leqslant 81$. $\boxed{S = [0\,;81]}$

Corrigé de l'exercice 9.28 page 242

1 Encadrer a^2, a^3 et $\frac{1}{a}$ dans chacun des cas suivants :

a. $1 \leqslant a < 2$. On a :

$$1 \leqslant a^2 < 4 \quad 1 \leqslant a^3 < 8 \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{a} \leqslant 1$$

b. $-3 \leqslant a < -1$. On a :

$$1 < a^2 < 9 \quad -27 < a^3 < 1 \quad -1 < \frac{1}{a} < -\frac{1}{3}$$

2 Encadrer a^2 dans chacun des cas suivants :

a. $-2\pi < a \leqslant 3 \iff 0 \leqslant a^2 < 4\pi^2$

b. $-\dfrac{2}{3} \leqslant a < \dfrac{3}{2} \iff 0 \leqslant a^2 < \dfrac{9}{4}$

Corrigé de l'exercice 9.29 page 242

1 $f(x) = \sqrt{x} + 2 - x$. Le domaine de définition de $x \mapsto \sqrt{x}$ étant $\mathbb{R}_+$ et celui de $x \mapsto 2 - x$ étant $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f est l'intersection des deux ensembles, c'est-à-dire :

$$\underline{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[}.$$

2 $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Le domaine de définition de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant $\mathbb{R}^*$, celui de g est aussi :

$$\underline{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[}.$$

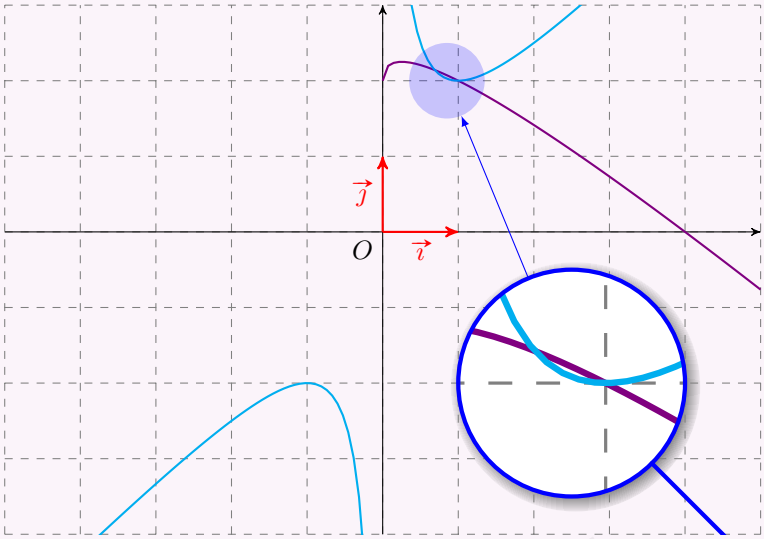
3 $f(1) = 2 + \sqrt{1} - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$; donc le point A$(1\,;2)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

$g(1) = \dfrac{1}{1} + 1 = 1 + 1 = 2$, donc $A \in \mathcal{C}_g$, courbe représentative de g.

Par conséquent, les deux courbes se coupent en A.

4 On trace les deux courbes.

On voit alors qu'il y a deux points d'intersection, dont le point A.



5 Le premier point d'intersection a pour abscisse à peu près 0,69. Par conséquent, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $x \approx 0,69$ et $x = 2$; ce sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

6 $f(x) = g(x) \iff 2 + \sqrt{x} - x = \dfrac{1}{x} + x$

$\iff x\left(2 + \sqrt{x} - x\right) = x\left(\dfrac{1}{x} + x\right)$ on multiplie par $x \neq 0$ chaque membre de l'équation

$\iff 2x + x\sqrt{x} - x^2 = 1 + x^2$ on distribue le x

$\iff x\sqrt{x} = 2x^2 - 2x + 1$

Ainsi, les deux équations $f(x) = g(x)$ et $x\sqrt{x} = 2x^2 - 2x + 1$ sont équivalentes, ce qui signifie qu'elles ont exactement les mêmes solutions.

Remarque 74

L'étape où on a multiplié par x les deux membres de l'équation est importante. Ici, nous avons pu faire cela car $x = 0$ n'est pas une solution de l'équation $f(x) = g(x)$. Si 0 avait été une solution de l'équation, on aurait tout de même pu multiplier par x, mais en posant la condition « avec $x \neq 0$ » et en transformant l'équivalence (« $\iff$ ») en implication (« $\Rightarrow$ »), ce qui rend la tâche moins évidente, mais possible tout de même. Dans un tel cas, les deux équations n'auraient pas eu exactement les mêmes solutions.

7 $f(x) = g(x) \iff x\sqrt{x} = 2x^2 - 2x + 1$ d'après la question précédente

$\Longrightarrow \left(x\sqrt{x}\right)^2 = \left(2x^2 - 2x + 1\right)^2$

$\Longrightarrow x^2 \times x = 4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1$ d'après la formule $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$\Longrightarrow 4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0.$

Attention 16

Dès que nous élevons au carré deux membres d'une équation, nous perdons l'équivalence. Cela signifie que SI x est solution de $f(x) = g(x)$ ALORS x est aussi solution de $4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0$, mais la réciproque est fausse.

8 Développons :

$$\begin{aligned}(x-1)(ax^3+bx^2+xc+d) &= ax^4+bx^3+cx^2+dx-ax^3-bx^2-cx-d\\ &= ax^4+(b-a)x^3+(c-b)x^2+(d-c)x-d\\ &= 4x^4-9x^3+8x^2-4x+1 \text{ (par hypothèse).}\end{aligned}$$

Donc les coefficients de x^4 doivent être égaux ; de même pour ceux de x^3, x^2, x et pour le nombre constant :

$$\begin{cases} a & = 4\\ b-a & = -9\\ c-b & = 8\\ d-c & = -4\\ -d & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4\\ d = -1\\ b = -9+a = -9+4 = -5\\ c = 8+b = 8-5 = 3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\underline{4x^4-9x^3+8x^2-4x+1 = (x-1)(4x^3-5x^2+3x-1).}$$

Remarque 75

Le fait d'écrire la dernière équation sous la forme $(x-1)(4x^3-5x^2+3x-1)=0$ est intéressante car pour trouver la solution différente de 1, il suffit de résoudre l'équation $4x^3-5x^2+3x-1=0$. Mais cette équation n'est pas facile à résoudre pour des élèves de lycées. Il existe cependant une méthode, que l'on appelle la *méthode de Cardan*, qui permet de trouver la valeur exacte de la solution qu'il manque, et non une valeur approchée.

En résumé, nous sommes partis de l'équation $\sqrt{x}+2-x=\dfrac{1}{x}+x$ et comme nous n'avons pas pu trouver de valeur exacte à toutes ses solutions, nous l'avons transformé en l'équation $(x-1)(4x^3-5x^2+3x-1)=0$ en ayant à l'esprit que les solutions de la 1re équation sont nécessairement dans l'ensemble solution de la seconde (ici, elles sont même identiques). Si nous avons transformée la 1re équation, c'est dans l'espoir de trouver une équation plus simple à résoudre (ce qui est le cas pour les mathématiciens, mais pas pour les élèves de Seconde).

On arrive ainsi à démontrer que la valeur exacte de la seconde solution est... (accrochez-vous...) :

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{5\,041}{746\,496}-\frac{1\,331}{2\,985\,984}}+\frac{71}{1\,728}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{5\,041}{746\,496}-\frac{1\,331}{2\,985\,984}}-\frac{71}{1\,728}}+\frac{5}{12},$$

dont une valeur approchée est 0,688 042 944 721.
Je précise que $\sqrt[3]{y}$ est le nombre x tel que $x^3=y$ (c'est l'antécédent de y par la fonction cube).

Corrigé de l'exercice 9.30 page 243

Un programme possible est le suivant :

Code Python 9-14

```
from matplotlib.pyplot import plot,show,legend

x = [ a/1000 for a in range(0,1001) ]
y1 = [ (a/1000)**0.5 for a in range(0,1001) ]
y2 = [ (a/1000)**2 for a in range(0,1001) ]

plot(x,x,color='blue',label='x')
plot(x,y1,color='orange',label='racine carrée')
plot(x,y2,color='red',label='carré')
legend()
show()
```

La plupart des exemples que l'on peut trouver sur Internet font appel au module `numpy`, ce qui est totalement superflu à mon sens ici...
En effet, pour tracer la courbe représentative d'une fonction f, il faut avant tout définir une *plage de données*, c'est-à-dire un intervalle sur lequel les valeurs de x vont varier. Comme je veux tracer mes courbes sur $[0\,;1]$, il me faut définir une *liste* (que je vais naturellement nommer `x`) dont les éléments sont les valeurs de x que je veux prendre.
Ici, j'ai donc construit ma liste `x` comme étant la liste des valeurs `a/1000` pour `a` = 0, 1, 2, 3, ..., 1000. En effet, il ne faut pas oublier que la fonction `range(0,1001)` donne tous les entiers de 0 à 1 000, c'est-à-dire les 1 001 premiers entiers naturels.
Ainsi, on a :

```
x = [ 0 , 0.001 , 0.002 , 0.003 , ... , 0.999 , 1 ]
```

Ensuite, je créé une liste `y1` qui contient toutes les valeurs de `(a/1000)**0.5` pour `a` = 0, 1, 2, ..., 1001. Ici, il ne faut pas oublier que `b**0.5` représente $\sqrt{b}$. Ainsi, `y1` est la liste des images des éléments de la liste `x` par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
De même, `y2` est la liste des images des éléments de `x` par la fonction $x \mapsto x^2$.
La ligne 7 trace alors la fonction $x \mapsto x$ en bleu ;
la ligne 8 trace la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en orange ;
la ligne 9 trace la fonction $x \mapsto x^2$ en rouge.
La commande `legend()` place la légende grâce aux étiquettes (`label`) renseignés dans les fonctions `plot`.
La commande `show()` affiche le graphique.

mathweb.fr

10 Pourcentages et statistiques

Dans ce chapitre

1 Pourcentages et proportions . . . 264
1 Partie d'un tout . . . 264
2 Partie d'une partie . . . 264
2 Évolutions . . . 265
1 Évolution simple . . . 265
2 Évolutions successives . . . 266
3 Évolution réciproque . . . 267
3 Indicateurs d'une série statistique . . . 267
1 Moyenne pondérée . . . 267
2 Écart interquartile . . . 268
3 Variance et écart-type . . . 269
4 Croisement de deux variables qualitatives . . . 270
1 Fréquences marginales . . . 270
2 Fréquences conditionnelles . . . 270
Prendre un bon départ . . . 271
Exercices . . . 273
Pourcentages . . . 273
Indicateurs d'une série statistique . . . 276
Croisement de deux variables qualitatives . . . 280
Corrigés des exercices . . . 282

1 Pourcentages et proportions

1 Partie d'un tout

Propriété 48

On considère un ensemble constitué de n éléments.
Dans cet ensemble, on considère un sous-groupe A constitué de x éléments.

Le pourcentage représentant x par rapport à n est :

$$\frac{x}{n} \times 100.$$

Exemple 66

Si une ville est constituée de 150 000 habitants et qu'un quartier de cette ville compte 30 000 habitants, alors le pourcentage correspondant est :

$$\frac{30\ 000}{150\ 000} \times 100 = 20\,\%.$$

Il y a donc 20 % des habitants de cette ville qui habitent dans ce quartier.

2 Partie d'une partie

Propriété 49

On considère un ensemble E constitué de n éléments.
Dans cet ensemble, on considère un sous-groupe A constitué de $x_A\%$ éléments de E, et un sous-groupe B de A constitué de $x_B\%$ éléments de A.

Le pourcentage d'éléments dans B par rapport à l'ensemble E est alors :

$$x_A \times x_B\%.$$

Exemple 67

Dans une ville, 20 % des habitants résident dans un quartier Q.
Dans ce quartier, 40 % ont un salaire inférieur à 1 100€. Cela représente :

$$\frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{800}{10\ 000} = \frac{8}{100} = 8\,\%$$

de la ville.

2 Évolutions

1 Évolution simple

Propriété 50

Soit x un nombre.

1. Si x *augmente* de $t\%$ alors la valeur finale est égale à $\left(1+\frac{t}{100}\right)x$.
2. Si x *diminue* de $t\%$ alors la valeur finale est égale à $\left(1-\frac{t}{100}\right)x$.

Exemple 68

1. Un tee-shirt « Adada » est normalement vendu à 150 €dans la boutique de monsieur Arnac. Il décide d'augmenter ce prix de 20 %. Le prix final sera alors :

$$\left(1+\frac{20}{100}\right)\times 150 = 1,2\times 150 = 180 \text{ €}.$$

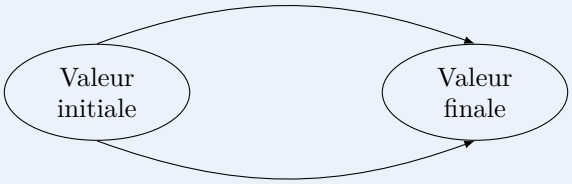
2. Dans la boutique de monsieur Bonepouar, ce même tee-shirt est à 110 €. Il décide de le solder à $-30\,\%$. Le prix final sera alors :

$$\left(1-\frac{30}{100}\right)\times 110 = 0,7\times 110 = 77 \text{ €}.$$

Définition 57

Lors d'une évolution de $t\%$ (avec $t>0$ ou $t<0$), le nombre $\left(1+\frac{t}{100}\right)$ est appelé le *coefficient multiplicateur* (en abrégé : CM).

évolution de $t\%$



$$\times\left(1+\frac{t}{100}\right) = CM$$

Remarque 76

On dit ici que l'évolution est *relative* car elle dépend de la valeur initiale.

Propriété 51

Soient deux valeurs V_1 et V_2, et soit CM le coefficient multiplicateur représentant l'évolution de V_1 à V_2. Alors,

$$CM = \frac{V_2}{V_1}.$$

Exemple 69

Un article est passé de 150 € à 120 €. Le coefficient multiplicateur est donc :

$$CM = \frac{120}{150} = 0,8.$$

Remarque 77

Si $0 < CM < 1$ alors l'évolution est une réduction.
Si $CM > 1$ alors l'évolution est une augmentation.

2 Évolutions successives

Propriété 52

Faire deux évolutions successives de $t_1\,\%$ et $t_2\,\%$ revient à multiplier par $\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\left(1+\frac{t_2}{100}\right)$.

Exemple 70

1 Un article vaut 150 €. Son prix diminue de 10 % puis augmente de 10 %. Le prix final est alors :

$$150 \times \left(1-\frac{10}{100}\right) \times \left(1+\frac{10}{100}\right) = 150 \times 0,9 \times 1,1 = 148,50 \text{ €}.$$

2 Un article coûte 140 €. Son prix subit une première hausse de 5 %, puis une seconde hausse de 5 %. Le prix final est alors :

$$140 \times \left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = 140 \times 1,05^2 = 154,35 \text{ €}.$$

Remarque 78

Cette propriété revient à dire que lors de deux évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2.$$

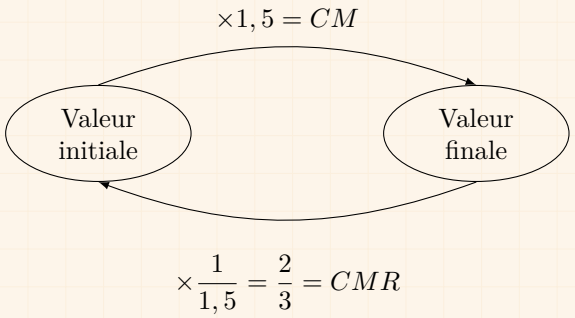
3 Évolution réciproque

Définition 58

Soient deux valeurs V_1 et V_2, et soit CM le coefficient multiplicateur représentant l'évolution de V_1 à V_2. Alors, le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$CMR = \frac{1}{CM} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Exemple 71



3 Indicateurs d'une série statistique

1 Moyenne pondérée

Définition 59

On considère la série statistique représentée par le tableau ci-dessous :

Caractères x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
Effectifs n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_p

La **moyenne pondérée** de cette série est :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}.$$

Exemple 72

Jean-Simon a obtenu en mathématiques les notes suivantes au cours du deuxième trimestre :

Notes	18	12	8	14
Coefficients	1	2	3	2

Sa moyenne en mathématiques au deuxième trimestre est donc :

$$\overline{x} = \frac{18 \times 1 + 12 \times 2 + 8 \times 3 + 14 \times 2}{1 + 2 + 3 + 2} = 11,75.$$

Propriété 53

On considère deux séries statistiques S_1 et S_2 :

- S_1 a pour effectif total N_1, et a pour moyenne $\overline{x}_1$;
- S_2 a pour effectif total N_2, et a pour moyenne $\overline{x}_2$.

Alors, la moyenne de la série constituée des deux séries S_1 et S_2 a pour moyenne :

$$\overline{x} = \frac{N_1 \times \overline{x}_1 + N_2 \times \overline{x}_2}{N_1 + N_2}.$$

Exemple 73

Monsieur Lessadic fait un même contrôle à ses deux classes de Seconde.

- En Seconde A, la moyenne est égale à 11,2 sur un effectif total de 25 élèves.
- En Seconde B, la moyenne est égale à 7,8 sur un effectif total de 32 élèves.

La moyenne générale sur ces deux classes à ce contrôle est donc :

$$\overline{x} = \frac{25 \times 11,2 + 32 \times 7,8}{25 + 32} \approx 9,3.$$

Propriété 54 (linéarité de la moyenne)

On considère une série statistique $S = \left\{ (x_i\,;n_i) \right\}_{1\leqslant i\leqslant p}$, de moyenne $\overline{x}$.
Alors, la moyenne de la série $S' = \left\{ (ax_i + b\,;n_i) \right\}_{1\leqslant i\leqslant p}$ (obtenue en multipliant par a toutes les valeurs de la série S et en leur ajoutant b) est :

$$\overline{x}' = a\overline{x} + b.$$

Exemple 74

Monsieur Lessadic constate que la moyenne générale de ses deux classes de Seconde est égale à 9,3. Il souhaite que cette moyenne soit égale à 10. Il a plusieurs possibilités, dont :

- 1re possibilité : il ajoute 0,7 point à chaque note ; dans ce cas, il obtient une série $S' = \left\{ (x_i + 0,7\,;n_i) \right\}$ et la moyenne de cette nouvelle série est alors :

$$\overline{x}' = \overline{x} + 0,7 = 9,3 + 0,7 = 10.$$

- 2e possibilité : il multiplie toutes les notes par $\dfrac{10}{9,3}$. Il obtient donc une série $S' = \left\{ \left(\frac{10}{9,3}x_i\,;n_i\right) \right\}_{1\leqslant i\leqslant p}$ dont la moyenne est :

$$\overline{x}' = \frac{10}{9,3} \times \overline{x} = \frac{10}{9,3} \times 9,3 = 10.$$

2 Écart interquartile

Définition 60 (quartiles)

- On appelle **premier quartile** d'une série statistique, et on note Q_1, la valeur du caractère pour lequel 25 % des valeurs lui sont inférieures.
- On appelle **troisième quartile** d'une série statistique, et on note Q_3, la valeur du caractère pour lequel 75 % des valeurs lui sont inférieures.
- On appelle **écart interquartile** le nombre $Q_3 - Q_1$.

Exemple 75

On considère la série statistique suivante, représentant les diverses notes d'une classe lors d'un contrôle noté sur 10 :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	1	1	2	5	3	8	6	5	3	1	1
E.c.c.	1	2	4	9	12	20	26	31	34	35	36

25 % de l'effectif total

75 % de l'effectif total sont dépassés

- $Q_1 = 3$ car pour la note « 3 », on a atteint un effectif cumulé croissant (E.c.c.) de 9, qui est le quart (25 %) de l'effectif total (36).
- $Q_3 = 7$ car pour la note « 7 », on a dépassé les $\frac{3}{4}$ (les 75 %) de l'effectif total.
- L'écart interquartile est donc $Q_3 - Q_1 = 7 - 3 = 4$.

3 Variance et écart-type

Définition 61

On considère une série statistique $S = \{(x_i\,;n_i)\}_{1\leqslant i\leqslant p}$, de moyenne $\overline{x}$.

- La **variance** de la série est la valeur V telle que :

$$V = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\cdots+n_p}.$$

- L'**écart-type** de la série est la valeur σ telle que :

$$\sigma = \sqrt{V}.$$

Exemple 76

On considère la série représentée par le tableau suivant :

n_i	x_i
6	7
3	8
4	9
3	10

Sa moyenne est $\overline{x} = 8,25$.

L'écart-type est donc :

$$\sigma = \sqrt{1,3125} \approx 1,15.$$

On considère alors la série dont les effectifs sont les mêmes mais où les valeurs sont égales à $(x_i - \overline{x})^2$:

n_i	$(x_i-\overline{x})^2$
6	1,5625
3	0,0625
4	0,5625
3	3,0625

La variance est la moyenne de cette nouvelle série :

$$V = \frac{6\times 1,5625 + \cdots + 3\times 3,0625}{6+3+4+3} = 1,3125.$$

4 Croisement de deux variables qualitatives

Dans cette section, on considère la répartition des salariés d'une société en fonction de leur genre et de leur statut.

salaires \ genres	Hommes	Femmes	Total
Cadres	50	50	100
Ouvriers	250	150	400
Total	300	200	500

1 Fréquences marginales

Définition 62

Dans une série statistique où l'on étudie les caractères A et B, on définit leurs **fréquences marginales** comme étant le quotient de leurs effectifs par l'effectif total.

Exemple 77

Dans notre cas,

- la fréquence marginale des hommes est $\frac{300}{500} = \frac{3}{5}$ et celle des femmes est $\frac{200}{500} = \frac{2}{5}$;
- la fréquence marginale des cadres est $\frac{100}{500} = \frac{1}{5}$ et celle des ouvriers est donc $\frac{4}{5}$.

2 Fréquences conditionnelles

Définition 63

Dans une série statistique où l'on étudie deux caractères, la fréquence d'une valeur de B prise parmi A est une **fréquence conditionnelle**.

Exemple 78

Dans notre cas, les fréquences suivantes sont des fréquences conditionnelles :

- la fréquence des hommes pris parmi les cadres est $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$;
- la fréquences des ouvriers pris parmi les femmes est $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$.

10 Prendre un bon départ

Exercice type 35 ▶ Coefficient multiplicateur

À quel coefficient multiplicateur les évolutions suivantes correspondent-elles ?

1 Augmentation de 13 % **2** Baisse de 7 % **3** Deux augmentations de 8 %

1 Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 13 % est :

$$1 + \frac{13}{100} = 1 + 0,13 = 1,13.$$

2 Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 7 % est :

$$1 - \frac{7}{100} = 1 - 0,07 = 0,93.$$

3 Le coefficient multiplicateur correspondant à deux augmentations de 8 % est :

$$\left(1 + \frac{8}{100}\right)^2 = 1,08^2 = 1,1664.$$

Exercice type 36 ▶ Taux d'évolution à partir d'un coefficient

Une valeur a été multipliée par 0,788. Quel est le taux d'évolution entre sa valeur initiale et sa valeur finale ?

$0,788 < 1$ donc il s'agit d'une baisse : le taux d'évolution ets donc négatif.
De plus, $0,788 = 1 - 0,212 = 1 - \frac{21,2}{100}$.
Le taux d'évolution a donc été de $-21,2\,\%$.

Exercice type 37 ▶ Taux d'évolution réciproque

Le prix d'une voiture a subit une hausse de 7 % en un an.
Quel devrait être le taux d'évolution pour que ce prix revienne à sa valeur initiale ?

On cherche ici le taux réciproque.
Le coefficient multiplicateur est $CM = 1 + \frac{7}{100} = 1,07$.
Le coefficient multiplicateur réciproque est alors :

$$CMR = \frac{1}{CM} \approx 0,935 = 1 - 0,065 = 11 - \frac{6,5}{100}.$$

Le taux réciproque est donc égal à environ $-6,5\,\%$.

Exercice type 38 ▶ Indicateurs de dispersion

Dans une boulangerie industrielle, le poids affiché de la baguette est 250 grammes.
Lors d'un contrôle, un agent du service des fraudes a prélevé 50 baguettes et a relevé leur poids.
Les résultats sont dans le tableau suivant.

Poids de la baguette (en g)	247	248	249	250	251	252	253
Nombre de baguettes	2	5	11	15	8	6	3

Déterminer la moyenne et l'écart type de cette série de poids.

- La moyenne se calcule ainsi :

$$\frac{247\times 2+248\times 5+249\times 11+\cdots+253\times 3}{2+5+1+\cdots+3}=250,04.$$

  Le poids moyen d'une baguette sur ce lot est 250,04 grammes.
- Pour calculer l'écart type, on commence par calculer la variance :

$$\frac{(247-250,04)^2\times 2+(248-250,04)^2\times 5+\cdots+(253-250,04)^2\times 3}{2+5+1+\cdots+3}\approx 2,16.$$

  L'écart type est la racine carrée de la variance, donc ici :

$$\sigma\approx\sqrt{2,16}\approx 1,47.$$

Exercice type 39 ▶ Fréquences marginales et conditionnelles

On a relevé les températures quotidiennes moyennes dans un même lieu pendant deux mois. Les résultats, en nombre de jours, sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	$[-20;-10[$	$[-10;0[$	$[0;5[$	$[5;20[$	$[20;40]$
Février	2	9	13	4	0
Mars	1	7	11	9	3

1 Déterminer les fréquences marginales associées à chaque intervalle de température.

2 Détermminer la fréquence conditionnelle de l'intervalle $[-10;0[$ au cours du mois de mars.

1 Le nombre total de jours sur les mois de février et mars est égal à $28+31=59$.
Les fréquences marginales pour les cinq intervalles sont donc :

$$\frac{2+1}{59}=\frac{3}{49}\quad;\quad\frac{9+7}{59}=\frac{16}{59}\quad;\quad\frac{24}{59}\quad;\quad\frac{13}{59}\quad;\quad\frac{3}{59}.$$

2 La fréquence conditionnelle de l'intervalle $[-10;0[$ au cours du mois de mars est :

$$\frac{7}{1+7+11+9+3}=\frac{7}{31}.$$

10 Exercices

Pourcentages

Exercice 10.1 (calculs de pourcentages)

Le tableau suivant donne la répartition des élèves d'une classe de Seconde suivant leur genre et le type de leur résidence.

genres \ résidence	Appartement	Maison	Total
Masculin	5	15	20
Féminin	4	12	16
Total	9	27	36

Les résultats seront arrondis au centième si nécessaire.

1. À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves garçons vivant en appartement par rapport à l'ensemble de la classe ?
2. À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves garçons vivant en appartement par rapport à l'ensemble des garçons ?
3. À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves filles vivant en maison par rapport à l'ensemble des élèves vivant en maison ?

Solution page 282

Exercice 10.2 (taux d'évolution simples)

Calculer, dans chacun des cas suivants, le taux d'évolution pour passer de la valeur x_1 à la valeur x_2.

1. $x_1 = 20$ et $x_2 = 130$.
2. $x_1 = 15$ et $x_2 = 70$.
3. $x_1 = 150$ et $x_2 = 100$.
4. $x_1 = 200$ et $x_2 = 10$.

Solution page 282

Exercice 10.3 (taux d'évolution simples)

1. Un article coûtant 20 € en temps normal est en solde à « $-15\,\%$ ». Calculer le prix de cet article pendant ces soldes.
2. Un article vaut, après réduction de $15\,\%$, 21,25 €. Quel est le prix de cet article avant réduction ?

Solution page 283

Exercice 10.4 (évolution réciproque)

Une valeur subit une évolution de $30\,\%$.
Quelle doit être l'évolution suivante pour revenir à la valeur initiale ?

Solution page 283

mathweb.fr

Exercice 10.5 (prix du timbre)

Le coût d'un timbre poste pour une lettre normale a été de :

1990	1993	1994	2021
0,34 €	0,38 €	0,43 €	0,95 (*)

(*) tarif pour un écopli (tarif le plus bas)

1 Quel est le pourcentage d'augmentation du prix du timbre entre 1990 et 1993 ? Entre 1993 et 1994 ? Entre 1990 et 2021 ?

2 À l'aide d'un tableur ou de Python, par exemple, trouver le pourcentage moyen annuel d'évolution entre 1990 et 2021.

Solution page 283

Exercice 10.6 (évolutions successives)

Le prix d'un article subit une hausse de 20 %, puis une baisse de 10 %.
Quel est le taux d'évolution global ?

Solution page 284

Exercice 10.7 (hausse et baisse successives)

Une valeur est augmentée de t %, puis diminuée de t %, où $t > 0$.
Existe-t-il une valeur de t telle que le nombre final soit égal au nombre initial ?

Solution page 284

Exercice 10.8 (retour à l'état initial)

Une valeur est augmentée de t %, puis diminuée de t' %, où $t > 0$ et $t' > 0$.

1 Exprimer t' en fonction de t de sorte que le nombre final soit égal au nombre initial.

2 Calculer alors t' quand $t = 20$.

Solution page 284

Exercice 10.9 (taux d'évolution moyen)

On considère deux évolutions successives t_1 % et t_2 %.
On appelle *taux d'évolution moyen* le pourcentage t % tel que, si l'on effectue deux évolutions successives de t %, on obtient la même évolution globale.

Calculer le taux d'évolution moyen lorsque $t_1 = 6$ % et $t_2 = 10$ %.

Solution page 285

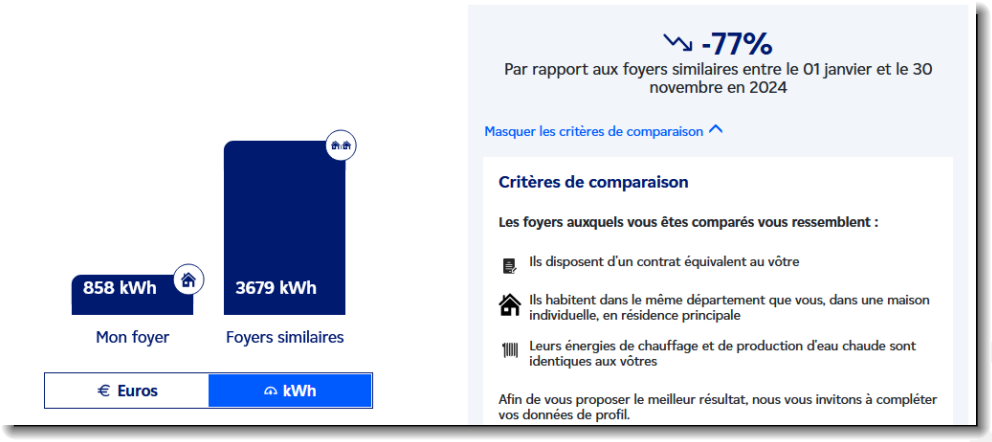
Exercice 10.10 (taux d'évolution moyen, le retour)

Une grande entreprise souhaite voir le prix de ses prestations augmenter de 30 % sur 5 ans.
Les journalistes disent alors que cela fera une augmentation annuelle moyenne de 6 %. Ont-ils raison ?

Solution page 285

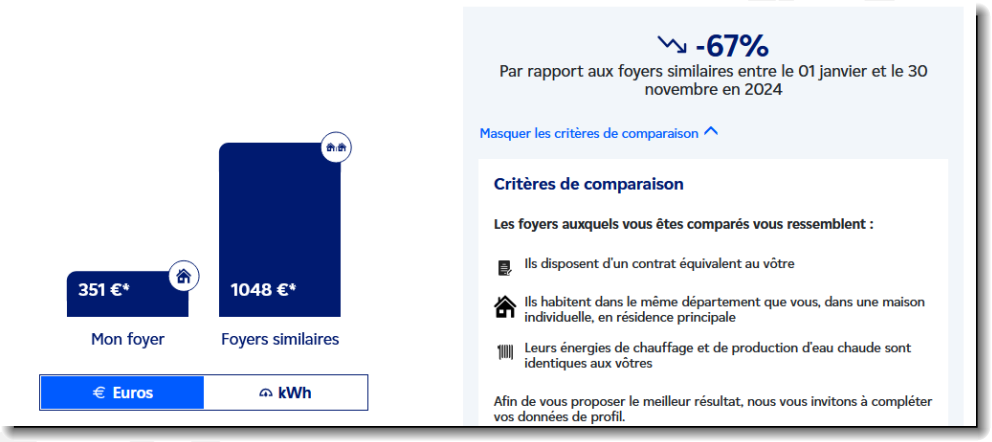
Exercice 10.11 (consommation d'électricité)

1 La capture d'écran suivante a été faite sur le site internet d'un fournisseur d'électricité :



Donnez le calcul ayant permis de trouver « 77 % ».

2 La capture d'écran suivante a été faite sur le même site internet en cliquant sur l'onglet « Euros ».



Vérifiez que le pourcentage affiché est correct.

3 Sachant que ces deux pourcentages portent sur la même période, que vous inspire cette différence de pourcentages ?

4 Le client voit ses deux captures d'écran :



Quelle est l'évolution du montant de sa facture entre début 2022 et fin 2024 ? (en pourcentage)

Solution page 286

Exercice 10.12 (un peu de tout...)

1 Le prix initial d'un parfum est 80 €. Il bénéficie d'une baisse de 70 % lors du Black Friday.
À quel prix sera vendu ce parfum ce jour-là ?

2 En 2017, 224 femmes ont été élues députées à l'Assemblée Nationale française. Elles représentaient 38,8 % du nombre total de députés.
Quel était le nombre de députés à l'Assemblée Nationale ?

3 En 2015, la ville de Porto-Vecchio, en Corse, comptait 11 826 habitants, en augmentation de 7,17 % par rapport à 2010.
Combien cette ville comptait-elle d'habitants en 2010 ?

4 Fin 2017, il y avait 173 000 sites de e-commerce actifs en France.
Fin 2018, il y en avait 182 000.
Calculer le taux d'évolution (en pourcentage) du nombre de sites de e-commerce entre ces deux dates (donner une valeur approchée au dixième).

5 Une commune organise chaque année une course à pieds dans ses rues. En 2017, le nombre de participants a augmenté de 20 % par rapport à l'année précédente, mais en 2018, il a baissé de 12 % par rapport à 2017.

a. Calculer le taux d'évolution global, en pourcentage, du nombre de participants entre 2016 et 2018.

b. Quelle doit être l'évolution (en pourcentage) du nombre de coureurs de 2018 à 2019 pour que l'évolution globale de 2017 à 2019 soit +0,32% ?

6 Quel est le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 43 % ?

7 Une entreprise possède 34 % de cadres, dont 85 % parlent couramment anglais.
Quel est dans l'entreprise le pourcentage de salariés qui sont des cadres parlant couramment anglais ?

Solution page 286

Indicateurs d'une série statistique

Exercice 10.13 (moyenne, e.c.c. et médiane)

Le tableau ci-dessous donne la répartition des diverses notes d'une classe de 35 élèves à un contrôle.

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	Total
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	35

1 Recopier et compléter ce tableau en calculant les fréquences à 10^{-3} près, et les effectifs cumulés croissants et décroissants.

2 Donner la médiane de la série statistique.

3 Calculer la moyenne de la série statistique et comparer à la médiane.

Solution page 288

Exercice 10.14 (moyenne, e.c.c. et médiane avec classes)

Un relevé des durées des communications téléphoniques effectué dans un central téléphonique a fourni les informations consignées dans le tableau suivant (l'unité de durée est la minute) :

Intervalles de durée	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Effectifs	14	16	25	15	17	13

1 Calculer la durée moyenne d'un appel.

2 Dans quel intervalle se trouve la médiane.

Solution page 288

mathweb.fr

Exercice 10.15 (calculs avec classes)

On considère la série statistique suivante :

Classes	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 12[	[12 ; 20[	[20 ; 25]
Effectifs	10	15	10	20	25

1 Calculer les effectifs cumulés croissants.
En déduire l'intervalle dans lequel se trouve la médiane de la série statistique.

2 En assimilant chaque classe à son centre, calculer une valeur approchée de la moyenne de la série statistique.

Solution page 288

Exercice 10.16 (salaires dans deux entreprises)

Nous avons observé les salaires nets dans deux entreprises concurrentes, et nous les avons réunis dans les tableaux suivants :

Entreprise A

Classes	[1 150 ; 1 250[	[1 250 ; 1 350[	[1 350 ; 1 450[	[1 450 ; 1 550[
Effectifs	18	27	52	48

Classes	[1 550 ; 1 650[	[1 650 ; 1 750[	[1 750 ; 1 850[	[1 850 ; 2 000]
Effectifs	36	25	20	8

Entreprise B

Classes	[900 ; 1 000[	[1 000 ; 1 100[	[1 100 ; 1 200[	[1 200 ; 1 300[
Effectifs	10	15	22	34

Classes	[1 300 ; 1 400[	[1 400 ; 1 500[	[1 500 ; 1 600[	[1 600 ; 1 700[
Effectifs	38	42	58	30

Classes	[1 700 ; 1 800[	[1 800 ; 1 900[	[1 900 ; 2 000[	[2 000 ; 2 100]
Effectifs	22	14	10	4

Déterminer le couple $(\overline{x}\,;\sigma)$ pour chacune des deux entreprises.

Solution page 289

Exercice 10.17 (notes de deux classes)

Un professeur a en charge deux classes de Seconde. Il souhaite comparer les résultats de ces deux classes sur le dernier contrôle à l'aide des tableaux suivants :

Notes de la Seconde 1

Notes (x_i)	2	5	6	7	8	9	11	13	14	15	18
Effectifs (n_i)	1	1	2	5	3	6	5	6	1	1	1

Notes de la Seconde 2

Notes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs (n_i)	1	1	1	3	2	3	4	3	5	4	3	1	1	1	1	1

1 Calculer la moyenne des deux classes.

2 Calculer la variance, puis l'écart-type, des deux classes.

mathweb.fr

3 Déterminer la médiane ainsi que l'écart inter-quartile.

4 Comparer alors les résultats de ces deux classes.

Solution page 290

Exercice 10.18 (influence d'un ajout dans une série statistique)

On considère une série statistique de n données x_1, x_2, …, x_n.
On note $\overline{x}$ sa moyenne.

On ajoute une donnée x à cette série, et on note $m(x)$ la nouvelle moyenne.

1 Montrer que $m(x) = \dfrac{x + n\overline{x}}{n+1}$.

2 Quelle valeur de x faut-il prendre pour que $m(x) = \overline{x}$?

Solution page 291

Exercice 10.19 (de l'algèbre dans les statistiques)

1 Hugo a obtenu au 2e trimestre une moyenne de 8/20 aux 3 premiers contrôles (dont les coefficients respectifs sont 0,5, 2 et 1). Il ne reste qu'un contrôle avant l'arrêt des notes (dont le coefficient sera égal à 2).
Combien faut-il qu'il obtienne au minimum pour obtenir 10/20 de moyenne au 2e trimestre ?

2 M. Zébulon enseigne les mathématiques aux classes Seconde 1 (30 élèves) et Seconde 2 (26 élèves). Il propose systématiquement les mêmes sujets de devoirs. Sur celui portant sur les statistiques, la Seconde 1 a obtenu une moyenne de 14,5/20.

a. Quelle doit être la moyenne de la Seconde 2 pour que la moyenne de ce contrôle (sur les deux classes) soit supérieure à 12/20 ?

b. Lors des précédents devoirs, la moyenne de la Seconde 2 était inférieure à celle de la Seconde 1 de 20 %.
Peut-il espérer atteindre 12/20 de moyenne à ce contrôle sur les deux classes ?

3 Mme Zébulon enseigne aussi les mathématiques dans le même lycée que son mari. Elle a la Seconde 3 dans laquelle se trouve Kévin Zépadbol à qui elle propose, avec un sourire narquois, l'énigme suivante :
« Tu as eu 5/20 (coefficient 2) et 8/20 (coefficient 1) aux deux premiers devoirs, et tu attends ta note pour le dernier devoir coefficient 2. Sur ces trois devoirs, l'écart-type de tes notes est à peu près égal à 1,643. Si tu arrives à trouver la note que tu as obtenue au dernier contrôle, je la triple. »
Saurez-vous trouver la note de Kévin ? (il faudra dans cette question faire preuve d'initiative).

Solution page 291

Exercice 10.20 (moyenne de deux groupes)

Un club sportif est composé de deux groupes : le groupe A, composé de 135 personnes, et le groupe B, composé de 98.
Lors d'une compétition, les deux groupes participent à une course. Le temps moyen du groupe A est de 10 minutes et 27 secondes. Celui du groupe B est de 9 minutes et 2 secondes.

Quel est le temps moyen du club ?

Solution page 292

Exercice 10.21

Dans une village, on a relevé le nombre d'enfants par habitation, et on a mis les résultats dans le tableau ci-dessous :

Nombres d'enfants x_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs n_i	230	125	142	97	24	2
Effectifs cumulés						
$(x_i - \overline{x})^2$						

1 Compléter la troisième ligne du tableau (celle des effectifs cumulés).
En déduire la valeur de la médiane M_e et des quartiles Q_1 et Q_3.

2 Calculer le nombre moyen d'enfants (noté $\overline{x}$) par habitation dans ce village.

3 Compléter alors la dernière ligne du tableau.
Calculer ensuite la variance V, puis l'écart-type σ.

4 Calculer le pourcentage d'habitations ayant un nombre d'enfants compris dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma\,;\overline{x} + \sigma]$.

Solution page 292

Exercice 10.22

Dans une entreprise, on a relevé les salaires des employés, que l'on a répertoriés dans le tableau ci-dessous en les regroupant par classes :

Salaires (en €)	[0 ; 950[	[950 ; 1 250[	[1 250 ; 1 400[	[1 400 ; 1 700[	[1 700 ; 2 400]
Centre des classes x_i					
Effectifs n_i	230	320	550	480	420
Effectifs cumulés					
$(x_i - \overline{x})^2$					

1 Dans quel intervalle se trouve la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 ?

2 Calculer le salaire moyen $\overline{x}$ de cette entreprise.

3 Calculer la variance et l'écart-type des salaires.

Solution page 293

Exercice 10.23 (propriété de la moyenne)

1 Les élèves de deux classes A et B, d'effectifs respectifs 35 et 27 élèves, ont fait le même devoir. La moyenne de la classe A est $10,7$ et celle de la classe B est $12,3$.
Quelle est la moyenne de ce devoir sur les deux classes A et B ?

2 Deux classes C et D ont fait le même devoir. La moyenne de la classe C (dans laquelle il y avait 30 élèves) est 8,9 et celle de la classe D est $15,7$.
Sachant que la moyenne des deux classes est environ égale à 12, combien d'élèves de la classe D ont fait ce devoir ?

Solution page 294

mathweb.fr

Exercice 10.24 (vers une équation)

Un groupe de touristes est séparé en deux pour faire des achats.
Le premier groupe, constitué de 25 personnes, a dépensé en moyenne, 50 € par personne.
Le second a dépensé en moyenne 80 € par personne.
La dépense moyenne du groupe par personne est 67,50 €.

Combien de personnes constituent le second groupe ?

Solution page 295

Croisement de deux variables qualitatives

Exercice 10.25 (pratique sportive)

Dans un lycée, on interroge 200 élèves sur leur pratique sportive.

	Pratique un sport	Ne pratique pas de sport	Total
Filles	72	48	120
Garçons	56	24	80
Total	128	72	200

1 Calculer les fréquences marginales :
- **a.** des filles ;
- **b.** des garçons ;
- **c.** des élèves pratiquant un sport ;
- **d.** des élèves ne pratiquant pas de sport.

2 Calculer les fréquences conditionnelles suivantes :
- **a.** parmi les filles, la fréquence des élèves pratiquant un sport ;
- **b.** parmi les garçons, la fréquence des élèves pratiquant un sport ;
- **c.** parmi les élèves pratiquant un sport, la fréquence des filles ;
- **d.** parmi les élèves ne pratiquant pas de sport, la fréquence des garçons.

3 Comparer la pratique sportive des filles et des garçons à l'aide des fréquences conditionnelles calculées.

4 Une affirmation est-elle vraie ?
« La majorité des élèves pratiquant un sport sont des filles. »
Justifier la réponse.

Solution page 296

Exercice 10.26 (utilisation des réseaux sociaux)

Un lycée a interrogé 500 élèves sur leur utilisation d'un réseau social donné.

	Utilise le réseau	N'utilise pas le réseau	Total
Seconde	180	70	250
Première	120	130	250
Total	300	200	500

1 Calculer les fréquences marginales :
- **a.** des élèves de Seconde ;
- **b.** des élèves de Première ;
- **c.** des élèves utilisant le réseau social ;
- **d.** des élèves n'utilisant pas le réseau social.

mathweb.fr

2 Calculer les fréquences conditionnelles suivantes :

- **a.** parmi les élèves de Seconde, la fréquence de ceux qui utilisent le réseau social ;
- **b.** parmi les élèves de Première, la fréquence de ceux qui utilisent le réseau social ;
- **c.** parmi les utilisateurs du réseau social, la fréquence des élèves de Seconde ;
- **d.** parmi les élèves n'utilisant pas le réseau social, la fréquence des élèves de Première.

3 Comparer l'utilisation du réseau social entre les élèves de Seconde et ceux de Première.

4 Un élève est choisi au hasard parmi les utilisateurs du réseau social.
Quelle est la probabilité qu'il soit en Seconde ?

5 Un élève affirme :
« Comme il y a davantage d'élèves de Seconde qui utilisent le réseau social que d'élèves de Première (180 contre 120), on peut dire que les élèves de Seconde utilisent davantage ce réseau social. »
Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier.

Solution page 297

Exercice 10.27 (restauration scolaire)

Le gestionnaire d'un lycée étudie la fréquentation de la cantine.
Il a relevé les informations suivantes pour les élèves de Seconde et de Première.

	Déjeune à la cantine	Ne déjeune pas à la cantine	Total
Seconde	180	120	300
Première	90	30	120
Total	270	150	420

1 Calculer les fréquences marginales :

- **a.** des élèves de Seconde ;
- **b.** des élèves de Première ;
- **c.** des élèves déjeunant à la cantine.

2 Calculer les fréquences conditionnelles suivantes :

- **a.** parmi les élèves de Seconde, la fréquence de ceux qui déjeunent à la cantine ;
- **b.** parmi les élèves de Première, la fréquence de ceux qui déjeunent à la cantine ;
- **c.** parmi les élèves déjeunant à la cantine, la fréquence des élèves de Seconde.

3 Comparer la fréquentation de la cantine des élèves de Seconde et de Première.

4 Un élève affirme :
« Comme il y a deux fois plus d'élèves de Seconde que d'élèves de Première qui déjeunent à la cantine, les élèves de Seconde fréquentent davantage la cantine. »
Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier.

5 On choisit au hasard un élève parmi ceux qui ne déjeunent pas à la cantine.
Quelle est la fréquence des élèves de Première dans ce groupe ?

Solution page 298

mathweb.fr

10 Corrigés

Corrigé de l'exercice 10.1 page 273

1 *À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves garçons vivant en appartement par rapport à l'ensemble de la classe ?*

Il y a 5 garçons qui vivent en appartement sur les 36 élèves de la classe. Cela représente :

$$\frac{5}{36} \times 100 \approx 13,89\,\%.$$

2 *À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves garçons vivant en appartement par rapport à l'ensemble des garçons ?*

Il y a 5 garçons qui vivent en appartement sur les 20 garçons. Cela représente :

$$\frac{5}{20} \times 100 = 25\,\%.$$

Remarque 80

Par rapport à 20, 5 représente le quart, donc 25 %. C'est un pourcentage à connaître, au même titre que la moitié correspond à 50 %.

3 *À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves filles vivant en maison par rapport à l'ensemble des élèves vivant en maison ?*

Il y a 12 filles qui vivent en maison sur les 27 élèves vivant en maison. Cela représente :

$$\frac{12}{27} \times 100 \approx 44,44\,\%.$$

Corrigé de l'exercice 10.2 page 273

1 $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \dfrac{130 - 20}{20} \times 100 = \dfrac{110}{20} \times 100 = 550.$

Le taux d'évolution est donc égal à 550 %.

2 $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \dfrac{70 - 15}{15} \times 100 = \dfrac{55}{15} \times 100 \approx 366,67.$

Le taux d'évolution est donc égal à 366,67 %.

3 $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \dfrac{100 - 150}{150} \times 100 = \dfrac{-50}{150} \times 100 \approx -33,33.$

Le taux d'évolution est donc égal à −33,33 %.

4 $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \dfrac{10 - 200}{200} \times 100 = \dfrac{-190}{200} \times 100 = -95.$

Le taux d'évolution est donc égal à −95 %.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 10.3 page 273

1 $20 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 20 \times 0,85 = 17.$

L'article vaut donc 17 € pendant ces soldes.

2 $21,25 \div \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 25.$

L'article vaut donc, avant réduction, 25 €.

Corrigé de l'exercice 10.4 page 273

Le CM correspondant à 30 % est égal à 1,3. Le CM inverse est donc égal à :

$$\frac{1}{1,3} \approx 0,77\ ,$$

ce qui correspond à une évolution de $-23\,\%$.

L'évolution doit donc être de $-23\,\%$ pour revenir à la valeur initiale.

Corrigé de l'exercice 10.5 page 274

1

- Entre 1990 et 1993, le prix du timbre est passé de 0,34 € à 0,38 €. Le pourcentage d'évolution est donc :
$$\frac{0,38 - 0,34}{0,34} \times 100 \approx 11,76\,\%.$$
- Entre 1993 et 1994, le prix du timbre est passé de 0,38 € à 0,43 €. Le pourcentage d'évolution est donc :
$$\frac{0,43 - 0,38}{0,38} \times 100 \approx 13,16\,\%.$$
- Entre 1990 et 2021, le prix du timbre est passé de 0,34 € à 0,95 €. Le pourcentage d'évolution est donc :
$$\frac{0,95 - 0,34}{0,34} \times 100 \approx 179,4\,\%.$$

2 Notons t le pourcentage moyen annuel d'évolution entre 1990 et 2021, soit sur 31 ans. Il faut alors que :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{31} \approx 1 + \frac{179,4}{100} \approx 2,794.$$

(le coefficient multiplicateur global sur 31 ans doit être le même que celui qui nous permet de voir l'évolution de 1990 à 2021).

On pourrait écrire une boucle en Python calculant les valeurs successives de $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{31}$ pour t variant de 0 à 9 par exemple :

```
for t in range(10):
    print( t, (1+t/100)**31 )
```

```
0 1.0
1 1.3613274044862351
2 1.847588815785422
3 2.500080345325352
4 3.3731334104286432
5 4.538039493908201
6 6.088100643288055
7 8.145112895648387
8 10.867669440199327
9 14.461769531353092
```

On peut alors voir que $3 < t < 4$. On peut ensuite calculer les valeurs de $\left(1+\frac{t}{100}\right)^{31}$ pour $3+\frac{t}{100}$, pour t variant de 0 à 99 :

```
for t in range(100):
    print( 3+t/100, (1+(3+t/100)/100)**31 )
```

```
...
3.36 2.7856562290189264
3.37 2.7940231777974414
3.38 2.8024144443710957
...
```

On constate alors que le pourcentage moyen annuel d'augmentation est $t \approx 3,37$.

Corrigé de l'exercice 10.6 page 274

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 20 % est égal à 1,2 ; celui correspondant à une baisse de 10 % est égal à 0,9.
Ainsi, le coefficient multiplicateur global est égal à $1,2 \times 0,9$, soit 1,08, ce qui correspond à une hausse de 8 %.

Le taux d'évolution global est donc égal à 8 %.

Corrigé de l'exercice 10.7 page 274

Le coefficient multiplicateur global (CMG) est égal à $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1-\dfrac{t}{100}\right) = 1-\dfrac{t^2}{10\,000}$.
Pour que le nombre final soit égal au nombre initial, il faudrait que le CMG soit égal à 1, ce qui ne peut pas être le cas car $\dfrac{t^2}{10\,000} \neq 0$.

Il n'existe donc aucun pourcentage correspondant à ce que l'on veut.

Corrigé de l'exercice 10.8 page 274

1 Le coefficient multiplicateur global (CMG) est égal à :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t'}{100}\right).$$

On souhaite que le CMG soit égal à 1 d'où :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t'}{100}\right)=1 \Leftrightarrow 1-\frac{t'}{100}=\frac{1}{1+\frac{t}{100}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{t'}{100}=\frac{100}{100+t}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t'}{100}=\frac{100}{100+t}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t'}{100}=1-\frac{100}{100+t}$$

$$\Leftrightarrow t'=100-\frac{10\ 000}{100+t}$$

$$\Leftrightarrow t'=\frac{10\ 000+100t-10\ 000}{100+t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t'=\frac{100t}{100+t}}$$

2 Si $t=20$, alors $t'=\dfrac{100\times 20}{100+20}=\dfrac{2\ 000}{120}=\dfrac{200}{12}=\dfrac{50}{3}\approx 16,67$.

Corrigé de l'exercice 10.9 page 274

Le CMG est égal ici à $1,06\times 1,1=1,166$.

Si les deux augmentations sont égales à $t\,\%$, alors le CMG est égal à $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2$.

Ainsi, on veut :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^2=1,166 \iff 1+\frac{t}{100}=\sqrt{1,166}$$

$$\iff \frac{t}{100}=\sqrt{1,166}-1$$

$$\iff t=100\left(\sqrt{1,166}-1\right)\approx 7,98.$$

Le taux moyen d'évolution est donc égal ici à $7,98\,\%$.

Corrigé de l'exercice 10.10 page 274

Prenons un tarif au hasard : $x=100$.
S'il subit 5 hausses successives de $6\,\%$, alors le CMG est égal à :

$$1,06^5=1{,}338\ 225\ 578.$$

À la fin, le tarif sera égal à :

$$100\times 1{,}338\ 225\ 578=133{,}822\ 557\ 8.$$

Or,

$$\frac{133{,}822\ 557\ 8-100}{100}\times 100=33,8225578.$$

Donc l'augmentation sera de $33,82\,\%$, et non $30\,\%$.

Les journalistes ont donc tort de diviser le pourcentage total par le nombre d'années.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 10.11 page 275

1 Pour obtenir le pourcentage d'évolution, on fait le calcul suivant :

$$\frac{858 - 3\,679}{3\,679} \times 100 \approx -76,678\,\% \approx -77\,\%.$$

2 Pour obtenir le pourcentage d'évolution, on fait le calcul suivant :

$$\frac{351 - 1\,048}{1\,048} \times 100 \approx -66,50763\,\% \approx -67\,\%.$$

3 Les pourcentages portant sur une même période, le fait que les pourcentages diffèrent alors qu'ils portent sur les mêmes consommations d'énergie signifie que le tarif de cette énergie a changé.
Ici, comme le pourcentage portant sur les montants (en euros) est plus petit que celui de la consommation (en kWh), cela signifie que les tarifs ont augmenté.

4 Le montant de sa facture a augmenté de 6 % la première année, puis de 6 % la seconde année.
Le coefficient multiplicateur global est alors :

$$\left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 = 1,1236$$

ce qui signifie que le montant de sa facture a augmenté de :

$$(1,1236 - 1) \times 100 = 12,36\,\%.$$

Corrigé de l'exercice 10.12 page 276

1 **Le prix initial d'un parfum est 80 €. Il bénéficie d'une baisse de 70 % lors du Black Friday.**
Cela signifie que ce parfum est vendu à un prix égal à 30 % du prix initial, soit :

$$\frac{30}{100} \times 80 = 0,3 \times 80 = 24\ €.$$

2 **En 2017, 224 femmes ont été élues députées à l'Assemblée Nationale française. Elles représentaient 38,8 % du nombre total de députés.**
Notons x le nombre de députés cherché.
On sait que :

$$\frac{38,8}{100} \times x = 224 \qquad \text{soit} \quad 0,388x = 224.$$

Ainsi,

$$x = \frac{224}{0,388} = 577.$$

Il y avait donc 577 députés à l'Assemblée Nationale (ce qui est toujours le cas).

3 **En 2015, la ville de Porto-Vecchio, en Corse, comptait 11 826 habitants, en augmentation de 7,17 % par rapport à 2010.**
Notons x le nombre d'habitants de la ville en 2010, avant l'augmentation de 7,17 %. Alors,

$$\left(1 + \frac{7,17}{100}\right) x = 11\,826 \qquad \text{soit} \qquad 1,0717x = 11\,826.$$

On en déduit alors que :

$$x = \frac{11\,826}{1,0717} = 11\,035.$$

4 **Fin 2017, il y avait 173 000 sites de e-commerce actifs en France. Fin 2018, il y en avait 182 000.**
Le taux d'évolution est donc, en pourcentage :

$$\frac{182\,000 - 173\,000}{173\,000} \times 100 \approx 5,2\,\%.$$

mathweb.fr

5 **Une commune organise chaque année une course à pieds dans ses rues. En 2017, le nombre de participants a augmenté de $20\,\%$ par rapport à l'année précédente, mais en 2018, il a baissé de $12\,\%$ par rapport à 2017.**

a. **Calculer le taux d'évolution global, en pourcentage, du nombre de participants entre 2016 et 2018.**

Le coefficient multiplicateur entre 2016 et 2017 est :

$$CM_1 = 1 + \frac{20}{100} = 1,2.$$

Le coefficient multiplicateur entre 2017 et 2018 est :

$$CM_2 = 1 - \frac{12}{100} = 0,88.$$

Le coefficient multiplicateur global entre 2016 et 2018 est donc :

$$CM = CM_1 \times CM_2 = 1,2 \times 0,88 = 1,056.$$

Ce qui signifie que globalement, le nombre de participants à augmenté (car $CM > 1$) de $5,6\,\%$.

b. **Quelle doit être l'évolution (en pourcentage) du nombre de coureurs de 2018 à 2019 pour que l'évolution globale de 2017 à 2019 soit $+0,32\%$?**

Fouillouillou ! C'est compliqué tout ça... :-) Non, pas tant que ça finalement : c'est le même raisonnement que précédemment sauf que nous avons une inconnue à trouver.

Le coefficient multiplicateur entre 2017 et 2018 est :

$$CM_2 = 0,88.$$

Notons CM_3 celui entre 2018 et 2019.

Le coefficient multiplicateur global entre 2017 et 2019 est donc :

$$CM' = CM_2 \times CM_3 = 0,88 \times CM_3.$$

Mais on sait que sa valeur doit être :

$$CM' = 1 + \frac{0,32}{100} = 1,0032.$$

Donc :

$$0,88 \times CM_3 = 1,0032 \qquad \text{soit} \qquad CM_3 = \frac{1,0032}{0,88} = 1,14.$$

Ainsi, l'évolution entre 2018 et 2019 doit être de $+14\%$.

6 **Quel est le taux d'évolution réciproque d'une baisse de $43\,\%$?**

Partons d'une valeur x et baissons-la de $43\,\%$ pour obtenir une valeur y. Alors,

$$(1 - 0,43)x = y \qquad \text{soit} \qquad 0,57x = y.$$

Ainsi,

$$x = \frac{1}{0,57}y$$

soit :

$$x \approx 1,7544y$$

Par conséquent, pour passer de y à x (donc pour faire l'évolution réciproque), il faut multiplier par :

$$1 + 0,7544 = 1 + \frac{75,44}{100}.$$

Donc le taux d'évolution réciproque est $+75,44\,\%$.

7 **Une entreprise possède $34\,\%$ de cadres, dont $85\,\%$ parlent couramment anglais.**

Pour connaître le pourcentage de salariés qui sont des cadres parlant couramment anglais, on fait :

$$\frac{85}{100} \times \frac{34}{100} \times 100 = 0,85 \times 0,34 \times 100 = 28,9.$$

Il y a donc $28,9\,\%$ de salariés qui sont des cadres parlant couramment anglais.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 10.13 page 276

1 Le tableau complété est :

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	Total
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	35
Fréquences	0,029	0,086	0,057	0,057	0,171	0,114	0,114	0,143	0,086	0,086	0,057	1
e.c.c.	1	4	6	8	14	18	22	27	30	33	35	

2 Les effectifs cumulés croissants dépassent 50 % de l'effectif total (soit 17,5) pour la note 11.
La médiane est donc ici égale à $m_e = 11$.

3 La moyenne de la série statistique est :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{2\times 1 + 4\times 3 + 5\times 2 + \cdots + 15\times 3 + 16\times 3 + 18\times 2}{1+3+2+\cdots+3+3+2}\\ &= \frac{381}{35}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 10,9}$$

Corrigé de l'exercice 10.14 page 276

1 La durée moyenne se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1\times 14 + 3\times 16 + 5\times 25 + 7\times 15 + 9\times 17 + 11\times 13}{14+16+25+15+17+13}\\ &= \frac{588}{100}\\ &= 5,88\\ &= 5 \text{ min} + 0,88\times 60 \text{ sec}\end{aligned}$$

La durée moyenne d'un appel est donc d'à peu près 5 minutes et 53 secondes.

2 Complétons le tableau avec la ligne des effectifs cumulés croissants (E.c.c) :

Intervalles de durée	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Effectifs	14	16	25	15	17	13
E.c.c.	14	30	55	70	87	100

50 % de l'effectif total (soit 50) sont atteints et dépassés pour [4 ; 6[.
Ainsi, la médiane appartient à [4 ; 6[.

Corrigé de l'exercice 10.15 page 277

1 On a :

Classes	[0 ;3[	[3 ;6[	[6 ;12[	[12 ;20[	[20 ;25]
Effectifs	10	15	10	20	25
E.c.c.	10	25	35	55	80

50 % de l'effectif total sont dépassés dans [12 ;20[, donc la médiane appartient à cet intervalle.

2 La moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{2 \times 10 + 4,5 \times 15 + 9 \times 10 + 16 \times 20 + 22,5 \times 25}{10 + 15 + 10 + 20 + 25}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 13,25}$$

Corrigé de l'exercice 10.16 page 277

- Pour l'entreprise A :

$$\begin{aligned}\overline{x}_A &= \frac{1\,200 \times 18 + 1\,300 \times 27 + \cdots + 1\,925 \times 8}{18 + 27 + 52 + \cdots + 20 + 8}\\ &= \frac{353\,000}{234}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x}_A \approx 1\,509}$$

$$\mathrm{V}_A = \frac{18(1\,509 - 1\,200)^2 + 27(1\,509 - 1\,300)^2 + \cdots + 8(1\,509 - 1\,925)^2}{234}$$

$$\boxed{\mathrm{V}_A \approx 33\,367}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\mathrm{V}_A}$$

$$\boxed{\sigma_A \approx 183}$$

- Pour l'entreprise B :

$$\begin{aligned}\overline{x}_B &= \frac{950 \times 10 + 1\,050 \times 15 + \cdots + 2\,050 \times 4}{10 + 15 + \cdots + 10 + 4}\\ &= \frac{436\,750}{299}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x}_B \approx 1\,461}$$

$$\mathrm{V}_B = \frac{10(950 - 1\,461)^2 + 15(1\,050 - 1\,461)^2 + \cdots + 4(2\,050 - 1\,461)^2}{299}$$

$$\boxed{\mathrm{V}_B \approx 61\,959}$$

$$\sigma_B = \sqrt{\mathrm{V}_B}$$

$$\boxed{\sigma_B \approx 249}$$

Ainsi, des couples $(\overline{x}_A\,;\sigma_A) = (1\,509\,;183)$ et $(\overline{x}_B\,;\sigma_B) = (1\,461\,;249)$, on peut déduire qu'en moyenne, on gagne plus dans l'entreprise A que dans la B, mais que l'écart à ce salaire moyen est plus important dans l'entreprise B quand dans la A.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 10.17 page 277

1

- **Moyenne de la Seconde 1 :**

$$\overline{x}_1 = \frac{2\times 1 + 5\times 1 + 6\times 2 + \cdots + 15\times 1 + 18\times 1}{1+1+2+\cdots+1+1} = \frac{312}{32}$$

$\boxed{\overline{x}_1 \approx 9,75}$

- **Moyenne de la Seconde 2 :**

$$\overline{x}_2 = \frac{1\times 1 + 2\times 1 + 3\times 1 + \cdots + 15\times 1 + 16\times 1}{1+1+1+\cdots+1+1} = \frac{286}{35}$$

$\boxed{\overline{x}_2 \approx 8,17}$

2 Pour la Seconde 1, la variance est : $\mathrm{V}_1 = \dfrac{173}{16} \approx 10,81$.

Ainsi, son écart-type est : $\sigma_1 = \sqrt{\mathrm{V}_1} = \dfrac{\sqrt{173}}{4} \approx 3,29$.

Pour la Seconde 2, la variance est : $\mathrm{V}_2 = \dfrac{15\,014}{1\,225} \approx 12,26$.

Ainsi, son écart-type est : $\sigma_2 = \sqrt{\mathrm{V}_2} = \dfrac{\sqrt{15\,014}}{35} \approx 3,5$.

3 Complétons les deux tableaux avec la ligne des effectifs cumulés croissants :

Notes de la Seconde 1

Notes (x_i)	2	5	6	7	8	9	11	13	14	15	18
Effectifs (n_i)	1	1	2	5	3	6	5	6	1	1	1
E.c.c.	1	2	4	9	12	18	23	29	30	31	32

Notes de la Seconde 2

Notes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs (n_i)	1	1	1	3	2	3	4	3	5	4	3	1	1	1	1	1
E.c.c.	1	2	3	6	8	11	15	18	23	27	30	31	32	33	34	35

On voit alors que la médiane de la Seconde 1 est 9 (car c'est la première note pour laquelle les e.c.c. sont supérieurs ou égaux à la moitié de l'effectif total, soit $32 \div 2 = 16$).

Donc $m_1 = 9$.

De plus, $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 13$ donc l'écart interquartile est $e_1 = 13 - 7 = 6$.

On voit aussi que la médiane de la Seconde 2 est $m_2 = 8$.
De plus, $Q_1 = 6$ et $Q_3 = 10$, donc l'écart inter-quartile est $e_2 = 10 - 6 = 4$.

4 Le couples $(m_1\,;e_1) = (9\,;6)$ et $(m_2\,;e_2) = (8\,;4)$ nous permettent de dire que la dispersion des notes autour des médianes est plus étroite dans la Seconde 2 que dans la Seconde 1, en ayant à peu près la même médiane (à 1 point près).

Les couples $(\overline{x}_1\,;\sigma_1) = (9,75\,;3,29)$ et $(\overline{x}_2\,;\sigma_2) = (8,17\,;3,5)$ nous permet de dire que la concentration des notes autour des moyennes est quasiment identique, en ayant une moyenne plus forte dans la Seconde 1 que dans la Seconde 2.

On peut donc voir que la Seconde 1 est légèrement plus performante que la Seconde 2.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 10.18 page 278

Posons $x_{n+1} = x$.

1 Par définition, on a :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad \text{donc} \qquad n\overline{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \,.$$

On a alors :

$$m(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x}{n+1}$$

$$\boxed{m(x) = \frac{n\overline{x} + x}{n+1}}$$

2

$$\begin{aligned} & m(x) = \overline{x} \\ \iff & \frac{x + n\overline{x}}{n+1} = \overline{x} \\ \iff & x + n\overline{x} = (n+1)\overline{x} \\ \iff & x = \overline{x}. \end{aligned}$$

Il faut ainsi choisir d'ajouter à la série une valeur égale à la moyenne de la série pour que la moyenne de la nouvelle série

Corrigé de l'exercice 10.19 page 278

1 Notons x la note au devoir coefficient 2. Il faut :

$$\frac{(0,5+2+1)\times 8 + 2x}{0,5+2+1+2} \geqslant 10$$

soit :

$$28 + 2x \geqslant 10 \times 5,5.$$

On a alors :

$$x \geqslant \frac{55-28}{2}$$

ou encore :

$$x \geqslant 13,5.$$

Il faut donc que Hugo obtienne une note supérieure ou égale à 13,5/20 lors du prochain contrôle.

2 **a.** Notons $\overline{x_1} = 14,5$ la moyenne de la Seconde 1 et $\overline{x_2}$ celle de la Seconde 2. Il faut :

$$\begin{aligned} \frac{30 \times 14,5 + 26 \times \overline{x_2}}{30+26} \geqslant 12 & \iff 435 + 26\overline{x_2} \geqslant 12 \times 56 \\ & \iff \overline{x_2} \geqslant \frac{12 \times 56 - 435}{26} \\ & \iff \overline{x_2} \geqslant 9,12. \end{aligned}$$

Il faut donc que la moyenne de la Seconde 2 soit supérieure ou égale à 9,12.

b. Lors des précédents devoirs, $\overline{x_2} = 0,8\overline{x_1}$. Ici, $0,8\overline{x_1} = 0,8 \times 14,5 = 11,6$.
M. Zébulon peut donc se rassurer : il est fort probable que la moyenne de ses deux classes soit supérieure à 12/20.

3 La variance des notes de Kévin est : $1,643^2 \approx 2,7$.
Notons n sa note au dernier devoir, $\overline{x}$ sa moyenne sur ses trois contrôles et V la variance. Alors :

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{5 \times 2 + 8 \times 1 + 2n}{5} \\ \mathrm{V} = \dfrac{2\left(5-\overline{x}\right)^2 + \left(8-\overline{x}\right)^2 + 2\left(n-\overline{x}\right)^2}{5} \end{cases}$$

mathweb.fr

On obtient :

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{18}{5} + \dfrac{2}{5}n \\ \mathrm{V} = \dfrac{1}{5}\left[5\overline{x}^2 - (36+4n)\overline{x} + 114 + 2n^2\right] \end{cases}$$

En remplaçant dans la deuxième égalité $\overline{x}$ par son expression en fonction de n, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \frac{1}{25}(18+2n)^2 - \frac{1}{25}\underbrace{(36+4n)}_{=2(18+2n)}(18+2n) + \frac{1}{5}(114+2n^2) \\ &= -\frac{1}{25}(18+2n)^2 + \frac{1}{25}(570+10n^2) \\ &= \frac{1}{25}(10n^2 + 570 - 18^2 - 72n - 4n^2) \\ &= \frac{2}{25}(3n^2 - 36n + 123). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{V} = 2,7 &\iff \frac{2}{25}(3n^2 - 36n + 123) = \frac{27}{10} \\ &\iff 3n^2 - 36n + 123 = \frac{27}{10} \times \frac{25}{2} \\ &\iff 3n^2 - 36n + 123 = \frac{135}{4} \\ &\iff 3n^2 - 36n + 123 - \frac{135}{4} = 0 \\ &\iff 12n^2 - 144n + 357 = 0. \end{aligned}$$

La fonction $n \mapsto 12n^2 - 144n - 357$ est une fonction du second degré. En la traçant à la calculatrice, on trouve qu'elle coupe l'axe des abscisses en $n = 3,5$ et $n = 8,5$.
Mais le fait que l'enseignante puisse tripler la note suggère que cette note ne peut pas être 8,5 (sans quoi la note triplée serait supérieure à 20).
Kévin a donc eu 3,5/20.

Corrigé de l'exercice 10.20 page 278

Il faut ici utiliser la formule :

$$\frac{n_A \times \overline{x_A} + n_B \times \overline{x_B}}{n_A + n_B}$$

où n_A et n_B représentent respectivement l'effectif du groupe A et celui du groupe B, et où $\overline{x_A}$ et $\overline{x_B}$ leurs moyennes (en secondes, par exemple).
Ainsi, $\overline{x_A} = 10 \times 60 + 27 = 627$ secondes et $\overline{x_B} = 9 \times 60 + 2 = 542$ secondes.
Alors, le temps moyen du club est :

$$\frac{135 \times 627 + 98 \times 542}{135 + 98} \approx 591,25 \text{ secondes;}$$

soit un temps moyen de 9 min 51 sec

Corrigé de l'exercice 10.21 page 279

1 Le tableau complété est le suivant :

mathweb.fr

Nombres d'enfants x_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs n_i	230	125	142	97	24	2
Effectifs cumulés	230	355	497	594	618	620

La médiane M_e est la valeur du caractère pour laquelle 50% de l'effectif total est dépassé. La moitié de 620 est égale à 310.

Or, 310 est dépassé pour un nombre d'enfants de 1.

Donc $\underline{M_e = 1}$. Le quart de 620 est la moitié de 310, soit 155, atteint pour un nombre d'enfants de 0. Donc $\underline{Q_1 = 0}$.

Les trois quarts de 620 sont égaux à $3 \times 155 = 465$, atteint pour un nombre d'enfants de 2. Donc $\underline{Q_3 = 2}$.

2 Le nombre moyen d'enfants est obtenu par le calcul suivant :

$$\overline{x} = \frac{0 \times 230 + 1 \times 125 + 2 \times 142 + 3 \times 97 + 4 \times 24 + 5 \times 2}{620} = 1,3.$$

Le nombre moyen d'enfants par habitation dans ce village est donc 1,3.

3 Le tableau complété est le suivant :

Nombres d'enfants x_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs n_i	230	125	142	97	24	2
Effectifs cumulés	230	355	497	594	618	620
$(x_i - \overline{x})^2$	1,69	0,09	0,49	2,89	7,29	13,69

La variance est donc la moyenne des $(x_i - \overline{x})^2$, soit :

$$V = \frac{230 \times 1,69 + 125 \times 0,09 + 142 \times 0,49 + 97 \times 2,89 + 24 \times 7,29 + 2 \times 13,69}{620}$$

soit :

$$\boxed{V \approx 1,54}$$

Ainsi, l'écart-type est :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V} \approx 1,2}$$

4 L'intervalle $[\overline{x} - \sigma\,;\overline{x} + \sigma]$ est $[1,3 - 1,2\,;1,3 + 1,2] = [0,1\,;2,5]$. On cherche donc le pourcentage d'habitations ayant 1 ou 2 enfants.

Il y a $125 + 142 = 267$ habitations concernées, soit un pourcentage de $\dfrac{267}{620} \times 100 \approx 43\%$.

Il y a donc environ 43% d'habitations ayant 1 ou 2 enfants dans ce village.

Corrigé de l'exercice 10.22 page 279

1 Complétons la ligne des effectifs cumulés :

Salaires (en €)	[0 ; 950[	[950 ; 1 250[	[1 250 ; 1 400[	[1 400 ; 1 700[	[1 700 ; 2 400]
Effectifs n_i	230	320	550	480	420
Effectifs cumulés	230	550	1 100	1 580	2 000

On voit alors que la moitié de l'effectif total est atteint pour la classe [1 250 ; 1 400[; la médiane appartient donc à cet intervalle.

mathweb.fr

Le quart de l'effectif total (500) est atteint pour la classe $[950\,;1\,250[$ donc $Q_1 \in [950\,;1\,250[$.
Les trois quarts (1 500) sont atteints pour $[1\,400\,;1\,700[$ donc $Q_3 \in [1\,400\,;1\,700[$.

2 Calculons le salaire moyen en complétant d'abord la ligne des centres des classes :

Salaires (en €)	$[0\,;950[$	$[950\,;1\,250[$	$[1\,250\,;1\,400[$	$[1\,400\,;1\,700[$	$[1\,700\,;2\,400]$
Centre des classes x_i	475	1 100	1 325	1 550	2 050
Effectifs n_i	230	320	550	480	420

Par exemple, pour trouver le centre de la classe $[950\,;1\,250[$, on fait :

$$\frac{1250+950}{2} = 1100.$$

Calculons alors la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{475\times 230 + 1\,100\times 320 + 1\,325\times 550 + 1\,550\times 480 + 2\,050\times 420}{2\,000}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\overline{x} = 1\,397{,}50}$$

3 Pour calculer la variance, complétons la ligne des $(x_i-\overline{x})^2$:

Salaires (en €)	$[0\,;950[$	$[950\,;1\,250[$	$[1\,250\,;1\,400[$	$[1\,400\,;1\,700[$	$[1\,700\,;2\,400]$
Centre des classes x_i	475	1 100	1 325	1 550	2 050
Effectifs n_i	230	320	550	480	420
$(x_i-\overline{x})^2$	851 006,25	88 506,25	5 256,25	23 256,25	425 756,25

Ainsi,

$$V = \frac{230\times 851\,006{,}25 + 320\times 88\,506{,}25 + \cdots + 420\times 425\,756{,}25}{2\,000}.$$

On obtient alors :

$$\boxed{V \approx 208\,462{,}5}$$

soit un écart-type de :

$$\boxed{\sigma \approx 456,58}$$

Corrigé de l'exercice 10.23 page 279

1 Calculons la moyenne du devoir sur les deux classes :

$$\frac{10,7\times 35 + 12,3\times 27}{35+27} \approx 11,4.$$

Ainsi, la moyenne de ce devoir sur les deux classes est d'environ 11,4.

mathweb.fr

2 Notons x le nombre d'élèves de la classe D qui ont fait le devoir. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{8,9\times 30+15,7x}{(30+x)}=12 &\iff \frac{267+15,7x}{(30+x)}=12\\
&\iff 267+15,7x=12(30+x)\\
&\iff 267+15,7x=360+12x\\
&\iff 15,7x-12x=360-267\\
&\iff 3,7x=93\\
&\iff x=\frac{93}{3,7}\\
&\iff x\approx 25.
\end{aligned}$$

Ainsi, 25 élèves ont fait le devoir dans la classe D.

Corrigé de l'exercice 10.24 page 280

On sait que la moyenne du groupe de touristes est donnée par la formule :

$$\bar{x}=\frac{n_1\overline{x_1}+n_2\overline{x_2}}{n_1+n_2} \qquad \text{avec :}$$

- n_1 est l'effectif du premier groupe,
- $\overline{x_1}$ est la moyenne du premier groupe,
- n_2 est l'effectif du second groupe,
- $\overline{x_2}$ est la moyenne du second groupe.

Cela donne alors :

$$\begin{aligned}
67,50=\frac{25\times 50+n_2\times 80}{25+n_2} &\iff 67,50=\frac{1\ 250+80n_2}{25+n_2}\\
&\iff 67,50(25+n_2)=1\ 250+80n_2\\
&\iff 67,5\times 25+67,5n_2=1\ 250+80n_2\\
&\iff 1\ 687{,}5+67,5n_2=1\ 250+80n_2\\
&\iff 67,5n_2-80n_2=1\ 250-1\ 687{,}5\\
&\iff -12,5n_2=-437,5\\
&\iff n_2=\frac{-437,5}{12,5}\\
&\iff n_2=35.
\end{aligned}$$

Il y a donc 35 personnes dans le second groupe de touristes.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 10.25 page 280

L'effectif total est de 200 élèves.

1 Fréquences marginales

a. Fréquence des filles :

$$\frac{120}{200} = 0,60 = 60\,\%$$

b. Fréquence des garçons :

$$\frac{80}{200} = 0,40 = 40\,\%$$

c. Fréquence des élèves pratiquant un sport :

$$\frac{128}{200} = 0,64 = 64\,\%$$

d. Fréquence des élèves ne pratiquant pas de sport :

$$\frac{72}{200} = 0,36 = 36\,\%$$

2 Fréquences conditionnelles

a. Parmi les filles, la fréquence des élèves pratiquant un sport est :

$$\frac{72}{120} = 0,60 = 60\,\%$$

b. Parmi les garçons, la fréquence des élèves pratiquant un sport est :

$$\frac{56}{80} = 0,70 = 70\,\%$$

c. Parmi les élèves pratiquant un sport, la fréquence des filles est :

$$\frac{72}{128} = 0,5625 \approx 56,3\,\%$$

d. Parmi les élèves ne pratiquant pas de sport, la fréquence des garçons est :

$$\frac{24}{72} = \frac{1}{3} \approx 33,3\,\%$$

3 Comparaison de la pratique sportive

Parmi les filles, 60 % pratiquent un sport.
Parmi les garçons, 70 % pratiquent un sport.
Comme $70\,\% > 60\,\%$, les garçons pratiquent davantage un sport que les filles dans cet échantillon.

4 Étude de l'affirmation

« La majorité des élèves pratiquant un sport sont des filles. »
Parmi les élèves pratiquant un sport, la fréquence des filles est :

$$\frac{72}{128} = 56,25\,\%.$$

Cette fréquence est supérieure à 50 %.
L'affirmation est donc **vraie** : la majorité des élèves pratiquant un sport sont des filles.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 10.26 page 280

L'effectif total est de 500 élèves.

1 **Fréquences marginales**

a. Fréquence des élèves de Seconde :

$$\frac{250}{500} = 0,50 = 50\,\%$$

b. Fréquence des élèves de Première :

$$\frac{250}{500} = 0,50 = 50\,\%$$

c. Fréquence des élèves utilisant le réseau social :

$$\frac{300}{500} = 0,60 = 60\,\%$$

d. Fréquence des élèves n'utilisant pas le réseau social :

$$\frac{200}{500} = 0,40 = 40\,\%$$

2 **Fréquences conditionnelles**

a. Parmi les élèves de Seconde :

$$\frac{180}{250} = 0,72 = 72\,\%$$

b. Parmi les élèves de Première :

$$\frac{120}{250} = 0,48 = 48\,\%$$

c. Parmi les utilisateurs du réseau social :

$$\frac{180}{300} = 0,60 = 60\,\%$$

d. Parmi les élèves n'utilisant pas le réseau social :

$$\frac{130}{200} = 0,65 = 65\,\%$$

3 **Comparaison**

Parmi les élèves de Seconde, 72 % utilisent le réseau social.

Parmi les élèves de Première, 48 % utilisent le réseau social.

Comme $72\,\% > 48\,\%$, les élèves de Seconde utilisent davantage ce réseau social que les élèves de Première.

4 On choisit un élève parmi les utilisateurs du réseau social.

La probabilité qu'il soit en Seconde est :

$$\frac{180}{300} = 0,60 = 60\,\%.$$

5 L'affirmation est **incorrecte**.

Pour comparer les comportements de deux groupes, il faut comparer des fréquences conditionnelles et non des effectifs.

On compare donc :

$$\frac{180}{250} = 72\,\% \qquad \text{et} \qquad \frac{120}{250} = 48\,\%.$$

C'est parce que les groupes ont le même effectif que l'on retrouve ici la même conclusion. En général, comparer uniquement les effectifs peut conduire à une erreur.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 10.27 page 281

L'effectif total est de 420 élèves.

1 **Fréquences marginales**

a. Fréquence des élèves de Seconde :

$$\frac{300}{420} = \frac{5}{7} \approx 71,4\,\%$$

b. Fréquence des élèves de Première :

$$\frac{120}{420} = \frac{2}{7} \approx 28,6\,\%$$

c. Fréquence des élèves déjeunant à la cantine :

$$\frac{270}{420} = \frac{9}{14} \approx 64,3\,\%$$

2 **Fréquences conditionnelles**

a. Parmi les élèves de Seconde :

$$\frac{180}{300} = 0,60 = 60\,\%$$

b. Parmi les élèves de Première :

$$\frac{90}{120} = 0,75 = 75\,\%$$

c. Parmi les élèves déjeunant à la cantine :

$$\frac{180}{270} = \frac{2}{3} \approx 66,7\,\%$$

3 **Comparaison**

Parmi les élèves de Seconde, 60 % déjeunent à la cantine.
Parmi les élèves de Première, 75 % déjeunent à la cantine.
Comme $75\,\% > 60\,\%$, les élèves de Première fréquentent davantage la cantine que les élèves de Seconde.

4 L'affirmation est **fausse**.
Il est vrai que $180 > 90$, mais les effectifs des deux niveaux sont différents.
Pour comparer les comportements des deux groupes, il faut utiliser les fréquences conditionnelles :

$$\frac{180}{300} = 60\,\% \qquad \text{et} \qquad \frac{90}{120} = 75\,\%.$$

Les élèves de Première fréquentent davantage la cantine que les élèves de Seconde.

5 Parmi les élèves ne déjeunant pas à la cantine, il y a 30 élèves de Première sur un total de 150 élèves.
La fréquence cherchée est :

$$\frac{30}{150} = 0,20 = 20\,\%.$$

mathweb.fr

11 Probabilités

Dans ce chapitre

1 Vocabulaire 300
1 Expérience aléatoire 300
2 Événement 300
3 Réunion d'événements 300
4 Intersection d'événements 301
5 Événement complémentaire 301
6 Cardinal 301
2 Diagrammes de Venn 302
1 Union 302
2 Intersection 302
3 Complémentaire 303
4 Partition de l'univers 303
3 Probabilités 303
1 Loi de probabilité 303
2 Calcul d'une probabilité 304
3 Propriétés fondamentales 304
4 Probabilités conditionnelles 305
4 Méthodes de dénombrement 305
1 Tableau à double entrée 305
2 Arbre de probabilités 306
Prendre un bon départ 308
Exercices 310
Probabilités élémentaires 310
Probabilités conditionnelles 314
Corrigés des exercices 319

1 Vocabulaire

1 Expérience aléatoire

Définition 64

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les issues sont obtenues par hasard.

L'ensemble de toutes les issues que l'on peut obtenir est appelé l'**univers**. On le note : Ω (Oméga).

Exemple 79

On considère l'expérience qui consiste à lancer un dé tétraédrique (4 faces numérotées 1, 2, 3 et 4). On s'intéresse à la face obtenue (au numéro qu'elle porte). Pour un dé tétraédrique, c'est la face cachée.
Si le dé n'est pas pipé (truqué), c'est une expérience aléatoire car on ne sait pas à l'avance quelle face sera obtenue.
L'univers est ici : $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

2 Événement

Définition 65

On appelle **événement** une partie (un sous-ensemble) de l'univers, c'est-à-dire un ensemble d'issues.

Exemple 80

Dans le lancer de dé tétraédrique, « obtenir un 1 » est un événement.
De même, « obtenir un 2 » est un événement. Idem pour les autres faces.
L'univers est donc ici composé de 4 issues.

3 Réunion d'événements

Définition 66

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
On appelle **réunion** de A et B l'événement « A ou B est réalisé. »
On note cette réunion : $A \cup B$.

Exemple 81

On lance un dé cubique et on note :

- A l'événement : « obtenir un nombre pair »
- B l'événement : « obtenir un multiple de 3 »

L'événement $A \cup B$ est alors : « obtenir un nombre pair ou un multiple de 3 ».

Remarque 81

Dans ce dernier exemple, on peut aussi *décrire* la réunion :

- $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$;
- $B = \{3\ ;\ 6\}$;
- $A \cup B = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;6\}$.

En effet, $A \cup B$ est constitué des nombres compris entre 1 et 6 qui sont pairs ou multiples de 3 (ou les deux).

4 Intersection d'événements

Définition 67

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
On appelle **intersection** de A et B l'événement « A et B sont réalisés en même temps. »
On note cette intersection : $A \cap B$.

Exemple 82

On lance un dé cubique et on note :

- A l'événement : « obtenir un nombre pair »
- B l'événement : « obtenir un multiple de 3 »

L'événement $A \cap B$ est alors : « obtenir un nombre pair et un multiple de 3 », c'est-à-dire : « obtenir 6 ».

Remarque 82

Dans ce dernier exemple, on peut aussi *décrire* l'intersection :

- $A = \{2 \ ; \ 4 \ ; \ 6\}$;
- $B = \{3 \ ; \ 6\}$;
- $A \cap B = \{6\}$.

En effet, $A \cap B$ est constitué des nombres compris entre 1 et 6 qui sont à la fois pairs et multiples de 3 ; il n'y a donc que le nombre 6.

5 Événement complémentaire

Définition 68

Soit A un événement d'un univers Ω.
Le **complémentaire de A** est l'événement : « A n'est pas réalisé ». On le note $\overline{A}$ (on le lit souvent : A *barre*).

Exemple 83

Soit $\Omega = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 3 \ ; \ 4 \ ; \ 5 \ ; \ 6\}$.

- Si $A = \{2 \ ; \ 4 \ ; \ 6\}$ alors $\overline{A} = \{1 \ ; \ 3 \ ; \ 5\}$;
- Si $B = \{3 \ ; \ 6\}$ alors $\overline{B} = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 4 \ ; \ 5\}$.

6 Cardinal

Définition 69

Soit Ω un univers et A un événement de cet univers.
On notera Card($Omega$) le nombre total d'issues possibles de Ω et Card(A) le nombre d'issues contenues dans A.

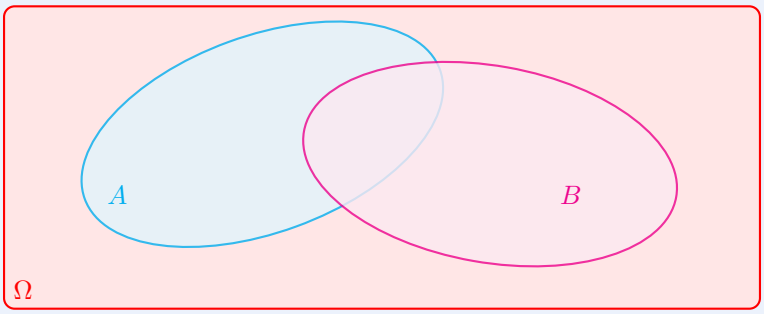
Exemple 84

En reprenant l'exemple précédent,

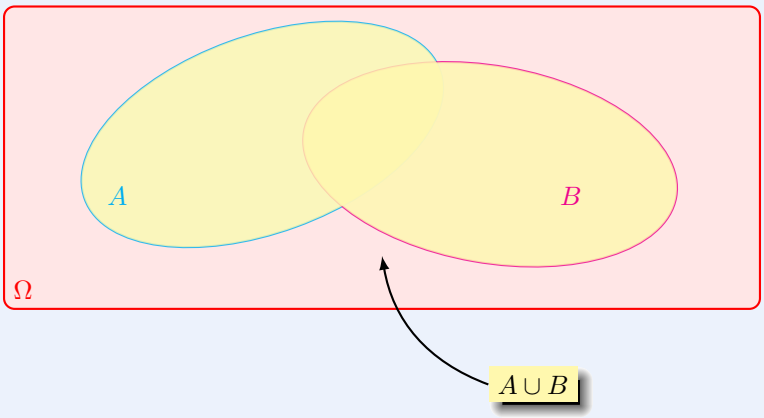
- $\text{Card}(\Omega) = 6$;
- $\text{Card}(A) = 3$;
- $\text{Card}(B) = 2$.

2 Diagrammes de Venn

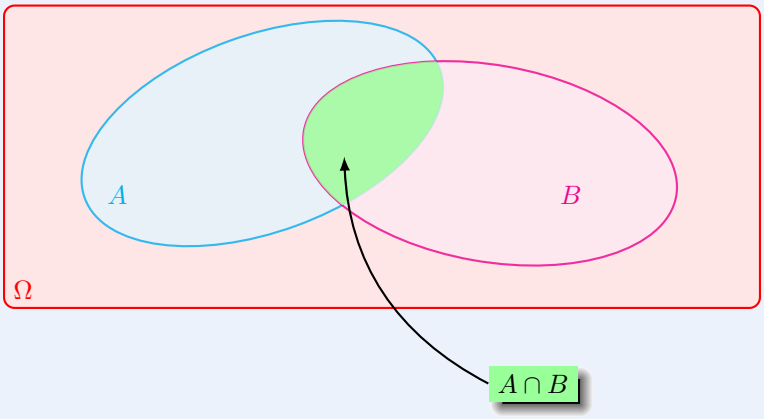
Une expérience aléatoire ainsi que des événements de cette expérience peuvent être modélisés par un dessin ; c'est un diagramme de Venn.



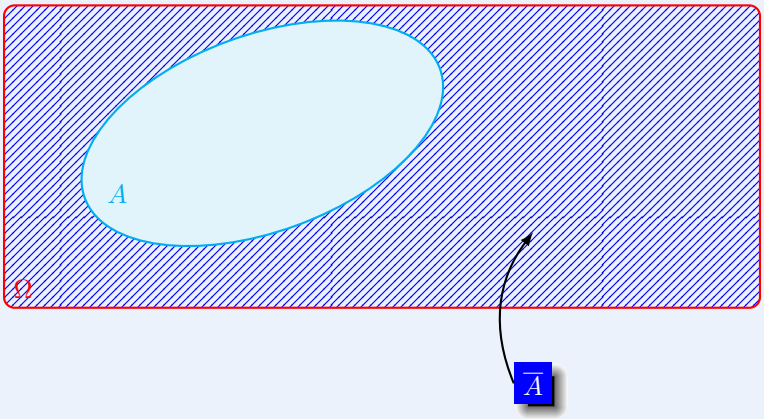
1 Union



2 Intersection



3 Complémentaire



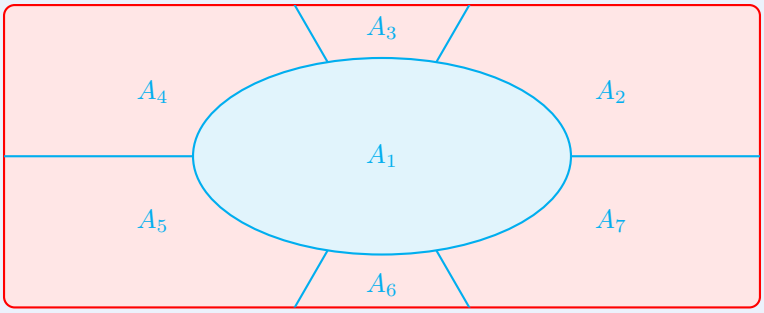
4 Partition de l'univers

Définition 70

On dit que des événements A_1, A_2, ..., A_n forment une **partition de l'univers** Ω si :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \\ A_i \cap A_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

On peut représenter une partition par exemple de la façon suivante :



3 Probabilités

1 Loi de probabilité

Définition 71

Une **loi de probabilité** est un modèle que l'on adopte en fonction de l'expérience aléatoire menée.

Si toutes les issues ont la même probabilité d'être obtenues, la loi de probabilité usuelle que l'on choisit est l'**équiprobabilité**.
Si l'on peut calculer les probabilités de chaque issue dans un cas autre que l'équiprobabilité, la loi de probabilité peut être donnée sous forme de tableau contenant les probabilités de toutes les issues.

Exemple 85 (loi de probabilité)

1 Si l'expérience consiste à lancer un dé cubique et à regarder la face obtenue, il y a équiprobabilité car toutes les faces ont une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ d'être obtenue.

2 Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte. On considère les événements :

- F : « on choisit une figure » ;
- A : « on choisit un as »
- D : « on choisit un 7, 8, 9 ou 10 ».

La loi de probabilité de cette expérience est donnée par le tableau suivant :

Événements	F	A	D
Probabilités	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

En effet, il y a 3 figures par famille – qui compte 8 cartes (donc $\mathrm{P}(F) = \frac{3}{8}$) ; de plus, il y a 1 As par famille (donc $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{8}$) et il y a 4 cartes sur 8 qui sont des 7, 8, 9 ou 10 (donc $\mathrm{P}(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$).

2 Calcul d'une probabilité

Propriété 55

Si A est un événement de cardinal fini d'un univers Ω de cardinal fini, alors :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Exemple 86

Si $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ et si $A = \{1;5\}$ alors,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3 Propriétés fondamentales

Propriété 56

Soit Ω un univers et soient A_1, A_2, ..., A_n des événements formant une partition de Ω.
Alors, $\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(A_n) = 1$.

Exemple 87

Si on reprend la question 2 de l'exemple 85, les événements F, A et D forment une partition de l'univers, et la somme des probabilités trouvées est bien égale à 1 :

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1.$$

Propriété 57

Soient A et B deux événements d'un univers Ω. Alors,

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

4 Probabilités conditionnelles

Définition 72

Soit Ω un univers. Soient A et B deux événements de cet univers.
La **probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé** est nommée la probabilité de B sachant A, et est notée $\mathrm{P}_A(B)$.

Propriété 58

Soit Ω un univers de cardinal fini. Soient A et B deux événements de cet univers de cardinaux finis et tels que $\mathrm{P}(A) \neq 0$. Alors,

$$\mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(A)}.$$

4 Méthodes de dénombrement

Il existe deux méthodes principales pour dénombrer : le tableau à double entrée et l'arbre.

1 Tableau à double entrée

Il est souvent utilisé quand on s'intéresse à deux caractères dans un même univers.

Exemple 88 (tableau à double entrée)

Dans un lycée, il y a 50 % d'élèves de Seconde, 30 % d'élèves de Première et 20 % d'élèves de Terminale.
Parmi les élèves de Seconde, il y en a 48 % qui sont des filles.
Parmi les élèves de Première, il y en a 51 % qui sont des filles.
Parmi les élèves de Terminale, il y en a 55 % qui sont des filles.
La répartition peut alors se représentée par le tableau suivant :

Classes / Genres	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	24 %	15,3 %	11 %	50,3 %
Garçons	26 %	14,7 %	9 %	49,7 %
Total	50 %	30 %	20 %	100 %

- On commence par mettre 50 %, 30 % et 20 % sur la dernière ligne car cela représente le total (en pourcentage) de chaque classe.
- Ensuite, on calcule 48 % de 50 % : $\frac{48}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{24}{100}$, ce qui correspond au pourcentage de filles de Seconde par rapport à l'ensemble du lycée.
  On fait de même pour les autres pourcentages des filles.
- On finit ensuite en complétant la ligne des garçons de sorte que le total des pourcentages de chaque colonne soit égal à celui indiqué en dernière ligne.

1 On peut ainsi dire, par exemple, que si on choisit au hasard un élève de ce lycée,

a. la probabilité que ce soit un garçon de Terminale est égale à 9 % ;
b. la probabilité que ce soit une fille est égale à 50, 3 %.

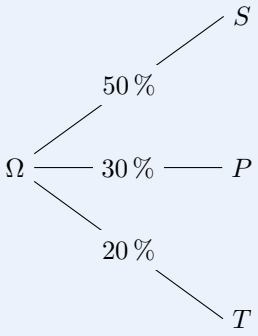
2 Si maintenant on choisit un élève parmi les garçons, la probabilité qu'il soit en Première est égale à $\frac{14,7}{49,7}$, soit $\frac{147}{497} = \frac{21}{71}$. C'est la probabilité (conditionnelle) que l'élève soit en Première sachant que c'est un garçon.

2 Arbre de probabilités

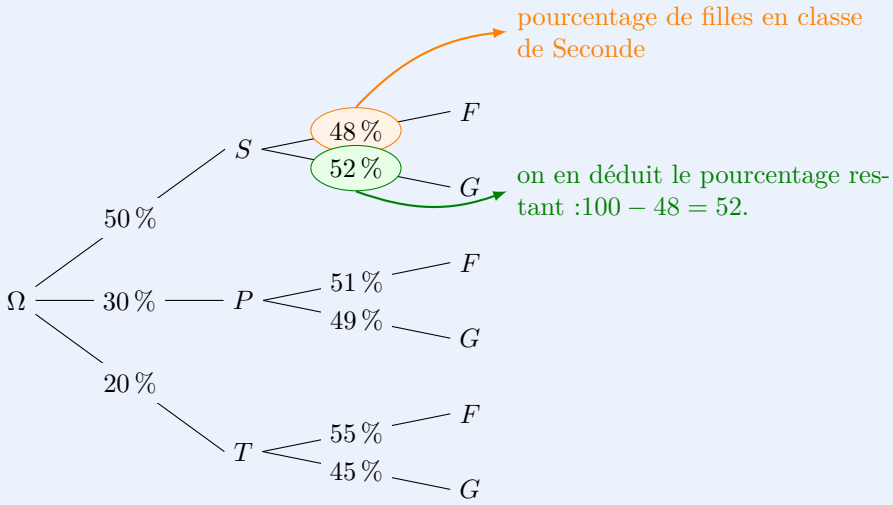
C'est sans nul doute la représentation la plus répandue en probabilités.
Reprenons l'exemple 88, et notons :

- S l'événement : « l'élève choisi.e. est en Seconde » ;
- P l'événement : « l'élève choisi.e. est en Première » ;
- T l'événement : « l'élève choisi.e. est en Terminale » ;
- F l'événement : « l'élève choisie est une fille » ;
- G l'événement : « l'élève choisi est un garçon » ;

L'énoncé nous parle en premier de la répartition des élèves en fonction de leur classe, donc le premier niveau de l'arbre doit concerner les classes :



On complète ensuite le second niveau de l'arbre par les possibilités : pour chaque élève de Seconde, Première et Terminale, nous avons la possibilité que l'élève soit une fille ou un garçon :



L'événement $T \cap G$ est : « l'élève choisi est un garçon de Terminale ».
Pour calculer $\mathrm{P}(T \cap G)$, on multiplie les probabilités des deux branches :

$$\mathrm{P}(T \cap G) = \frac{20}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{9}{100} = \mathrm{P}(T) \times \mathrm{P}_T(G).$$

On retrouve bien la probabilité trouvée dans l'exemple 88.

On retrouve les probabilités conditionnelles au second niveau de l'arbre (par exemple, $\mathrm{P}_S(G) = 0,52$).

11 Prendre un bon départ

Exercice type 40 ▶ Calculer une probabilité élémentaire

Un sac de billes contient 18 billes rouges, 12 billes bleues et 20 billes vertes.
On tire au hasard une bille de ce sac.

Calculer la probabilité que la bille tirée soit verte.

Notons :

- Ω l'ensemble de toutes les issues possibles du tirage ;
- A l'événement : « on tire une bille verte ».

Alors, $\text{Card}(\Omega) = 18 + 12 + 20 = 50$ (cela correspond au nombre total de billes) et $\text{Card}(A) = 20$ (car il y a 20 billes vertes). Alors,

$$\text{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Exercice type 41 ▶ Probabilités conditionnelles et arbre de probabilités

Une urne contient des coules 18 rouges (numérotées de 1 à 18) et 12 boules vertes (numérotées de 1 à 12).
On tire au hasard une boule de cette urne et on note :

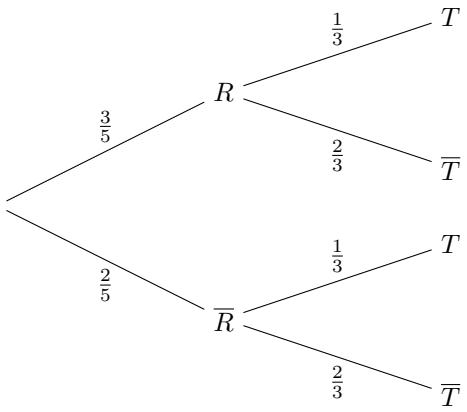
- R l'événement : « la boule tirée est rouge » ;
- T l'événement : « la boule tirée porte un nombre multiple de 3 ».

Représenter la situation à l'aide d'un arbre et calculer la probabilité $\text{P}(R \cap T)$.

On a :

- $\text{P}(R) = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5}$;
- $\text{P}\left(\overline{R}\right) = 1 - \text{P}(R) = \dfrac{2}{5}$;
- $\text{P}_R(T) = \dfrac{\text{Card}(\{3;6;9;12;15;18\})}{\text{Card}(R)} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$;
- $\text{P}_R\left(\overline{T}\right) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$;
- $\text{P}_{\overline{R}}(T) = \dfrac{\text{Card}(\{3;6;9;12\})}{\text{Card}(\overline{R})} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$;
- $\text{P}_{\overline{R}}\left(\overline{T}\right) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

L'arbre des probabilités est le suivant :



On a alors :

$$\text{P}(R \cap T) = \text{P}(R) \times \text{P}_R(T) = \frac{\cancel{3}}{5} \times \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{5}.$$

Exercice type 42 ▶ Tableau à double entrée

Dans un lycée, tous les élèves étudient soit l'espagnol, soit l'allemand comme deuxième langue vivante.
On sait que :

- 65 % des élèves étudient l'espagnol, les autres étudient l'allemand ;
- parmi les élèves étudiant l'espagnol, 60 % sont des filles ;
- parmi les élèves étudiant l'allemand, 45 % sont des filles.

1 Compléter le tableau à double entrée suivant :

Genre \ LV2	Espagnol	Allemand	Total
Filles			
Garçons			
Total			100 %

2 On choisit au hasard un élève du lycée.
Calculer la probabilité :

a. qu'il soit une fille étudiant l'espagnol ;
b. qu'il soit un garçon étudiant l'allemand ;
c. qu'il soit une fille.

3 On choisit maintenant un élève parmi les filles.
Quelle est la probabilité qu'il étudie l'espagnol ?

4 On choisit maintenant un élève parmi ceux qui étudient l'allemand.
Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

---

1 On calcule 60 % de 65 % : $0,60 \times 0,65 = 0,39 = 39\,\%$.
De même, 45 % de 35 % : $0,45 \times 0,35 = 0,1575 = 15,75\,\%$.
On obtient alors :

Genre \ LV2	Espagnol	Allemand	Total
Filles	39 %	15,75 %	54,75 %
Garçons	26 %	19,25 %	45,25 %
Total	65 %	35 %	100 %

2 **a.** P (Fille et Espagnol) = 39 %.
b. P (Garçon et Allemand) = 19,25 %.
c. P (Fille) = 54,75 %.

3 On se place dans l'ensemble des filles ; on cherche donc une probabilité conditionnelle :

$$\mathrm{P}_{(\text{Fille})}\,(\text{Espagnol}) = \frac{39}{54,75} = \frac{520}{730} = \frac{104}{146} = \frac{52}{73} \approx 0,712\,\%.$$

La probabilité que l'élève étudie l'espagnol sachant que c'est une fille est donc environ 71,2 %.

4 On se place parmi les élèves étudiant l'allemand ; il s'agit donc d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathrm{P}_{(\text{Allemand})}\,(\text{Garçon}) = \frac{19,25}{35} = 0,55.$$

La probabilité que l'élève soit un garçon sachant qu'il étudie l'allemand est donc 55 %.

11 Exercices

Probabilités élémentaires

Exercice 11.1 (lancer de deux dés équilibrés)

On lance un dé cubique et un dé tétraédrique (4 faces), tout deux non pipés (c'est-à-dire parfaitement équilibrés).

1. Quelle est la probabilité pour que la somme des faces obtenues soit un multiple de 3 ?
2. Avec les deux chiffres obtenus, on forme un nombre dont le chiffre des unités est celui obtenu avec le dé cubique et celui des dizaines, obtenu avec le dé tétraédrique.
   a. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un multiple de 3 ?
   b. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un multiple de 2 ?
3. Reprendre les questions a et b de la question précédente en considérant maintenant que le chiffre des unités est donné par le dé tétraédrique et celui des dizaines par le dé cubique.

Solution page 319

Exercice 11.2 (jeu de cartes : réunion et intersection)

Un jeu de cartes est constitué de 52 cartes.
Il est composé de 4 « couleurs » : cœur (rouge), carreau (rouge), pique (noire) et trèfle (noire).
Pour chaque couleur, il y a 3 figures : valet, dame et roi.
On tire au hasard une carte de ce jeu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure ou une carte rouge ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure rouge ou une carte noire qui ne soit pas une figure ?

Solution page 319

Exercice 11.3 (avec un dé portant des lettres)

Un dé cubique porte sur chaque face une lettre.
Ce dé est pipé ; le tableau suivant donne les probabilités de chaque face :

A	M	H	T	U	Y
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	?

On lance une fois ce dé. On note :

- Y l'événement : « on obtient la face où figure la lettre Y » ;
- X l'événement : « on obtient une lettre du mot MATH »

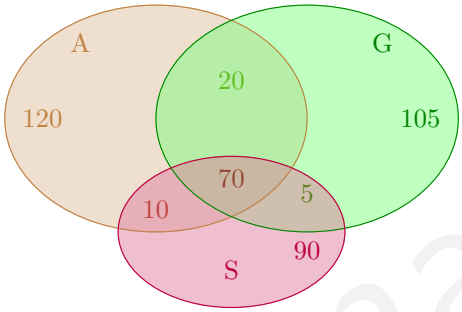
1. Calculer $\mathrm{P}(Y)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(X)$.
3. Calculer $\mathrm{P}(Y \cap X)$.
4. Calculer $\mathrm{P}(Y \cup X)$.

Solution page 320

mathweb.fr

Exercice 11.4 (chez les profs de math)

Chaque année, le club des profs de math d'une ville convie chacun de ses membres à une réunion secrète. Cette année, il envoie 420 invitations.
Parmi ces profs de math, il y a ceux qui adorent la géométrie, ceux qui adorent l'algèbre et ceux qui adorent les statistiques. Mais certains peuvent adorer deux des trois disciplines, voire même les trois. La répartition est donnée par le diagramme de Venn suivant :



On choisit un prof au hasard dans cette réunion. On note :

- A est l'événement : « le prof adore l'algèbre » ;
- G est l'événement : « le prof adore la géométrie » ;
- S est l'événement : « le prof adore les statistiques ».

1 Calculer la probabilité pour que le prof adore la géométrie et les statistiques.

2 Calculer la probabilité pour que le prof adore la géométrie ou les statistiques.

Solution page 321

Exercice 11.5 (anglais & espagnol dans une classe)

Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol. 8 étudient les deux langues.
Pour un élève donné, on note A l'événement : « l'élève étudie l'anglais » et E l'événement : « l'élève étudie l'espagnol ».

1 Que représente l'événement $A \cap E$?

2 Que représente l'événement $A \cup E$?

3 Combien d'élèves n'apprennent ni l'anglais ni l'espagnol ?

4 Quel est l'événement contraire de A ?

Solution page 321

Exercice 11.6 (QCM)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (QCM). Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte.

1 On a lancé 5 fois de suite un dé cubique équilibré, et on n'a jamais obtenu le SIX. La probabilité d'obtenir SIX au 6e lancer est :

a. inférieure à $\frac{1}{6}$ **b.** supérieure à $\frac{1}{6}$ **c.** égale à $\frac{1}{6}$ **d.** inconnue

2 Une famille possède deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles ?

a. $\frac{1}{8}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** 1

3 On effectue 2 tirages aléatoires successifs et sans remise dans un jeu de 52 cartes ordinaire.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux cartes identiques ?

a. 1 **b.** $\frac{1}{16}$ **c.** 0 **d.** $\frac{1}{32}$

4 On lance deux dés cubiques non truqués. Quelle est la probabilité d'obtenir un « double », c'est-à-dire que les faces des deux dés indiquent le même chiffre ?

a. $\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{1}{36}$ **c.** 6 **d.** $\frac{2}{36}$

Solution page 321

Exercice 11.7 (le digicode)

Le digicode d'un immeuble possède un clavier pour saisir un code. Le code est composé de deux chiffres, parmi 1, 2 ou 3, suivis d'une lettre parmi A ou B. Par exemple : 21B est un code possible, tout comme 33A.
Un seul code permet d'accéder au hall de l'immeuble.

1 À l'aide d'un arbre des possibilités, déterminer le nombre de codes possibles.

2 Calculer la probabilité des événements A, B, C, D et E suivants :

- A : « Le code ouvrant l'immeuble est le code 33A » ;
- B : « Le code ouvrant l'immeuble commence par le chiffre 2 » ;
- C : « Le code ouvrant l'immeuble se termine par la lettre A » ;
- D : « Le code ouvrant l'immeuble contient deux fois le même chiffre » ;
- E : « Le code ouvrant l'immeuble ne contient ni le 1, ni le B ».

Solution page 322

Exercice 11.8 (les fantômes du village)

Dans un village, 13 % des habitants affirment avoir vu au moins un fantôme dans leur vie. Parmi les personnes qui ont vu un fantôme, 93 % aiment bien faire un tour au bistrot en fin de journée, contre seulement 15 % des autres habitants (celles et ceux qui n'en ont jamais vu).
On choisit au hasard une personne habitant ce village. Quelle est la probabilité qu'elle aime aller au bistrot en fin de journée ?

Solution page 322

Exercice 11.9 (dans un magasin)

Un petit magasin possède 2 caisses, toujours ouvertes (mais bien sûr pas toujours libres, parfois les caisses sont occupées et il faut attendre). On note :

- C_1 l'événement : « La caisse n°1 est libre »
- C_2 l'événement : « La caisse n°2 est libre »

1 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $C_1 \cap C_2$.

Une étude statistique permet d'affirmer que $\mathrm{P}(C_1) = 0,3$, $\mathrm{P}(C_2) = 0,4$ et $\mathrm{P}(C_1 \cap C_2) = 0,2$.

2 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{C_1}$ puis calculer sa probabilité.

3 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $C_1 \cup C_2$ puis calculer sa probabilité.

4 Calculer la probabilité qu'il faille attendre, c'est-à-dire qu'aucune des deux caisses ne soient libres.

Solution page 323

Exercice 11.10 (dans un sac)

Un sac contient 4 jetons, indiscernables au toucher, portant les chiffres 1, 3, 6 et 9.
On tire au hasard un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac. On note le nombre à deux chiffres obtenu dont les dizaines sont données par le premier jeton extrait et les unités par le second.

Par exemple, le tirage « 6 » puis « 1 » conduit au nombre « 61 ».

1 **a.** Construire un arbre des possibilités représentant cette expérience aléatoire.
b. Déterminer le nombre d'issues possibles liées à cette expérience.

2 On considère les événements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est un multiple de 3 »

a. Déterminer les probabilités des événements A, B et $\overline{B}$.

b. Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$ puis calculer sa probabilité.

c. Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.

Solution page 323

Exercice 11.11 (compléter un programme)

On souhaite simuler 1 000 lancers d'un dé cubique équilibré et compter le nombre de fois que l'on obtient la face « 1 ».
Pour cela, compléter le programme Python suivant :

Code Python 11-15

```
1  from random import randint
2
3  count = 0
4
5  for i in range(...):
6      d = randint(1,6)
7      if d == ...:
8          count = count + 1
9
10 print( count )
```

Solution page 324

Exercice 11.12 (jetons carrés, ronds, verts, bleus et noirs)

Un sac contient des jetons carrés ou ronds, de couleur verte, bleue ou noire.
Il y a 10 jetons verts dont 4 carrés ; 10 des 12 jetons bleus sont carrés ; 14 des 18 jetons noirs sont ronds.

1 Utiliser un arbre ou un tableau pour donner le nombre de jetons de chaque sorte.

2 On tire un jeton au hasard. On suppose qu'il y a équiprobabilité. Soit A l'événement : « le jeton est vert », B l'événement : « le jeton est carré » et C l'événement : « le jeton est carré et n'est pas bleu ».

a. Calculer les probabilités respectives de A, de B et de C.

b. Calculer les probabilités des événements contraires de A, de B et de C.

c. Exprimer par une phrase l'événement contraire de C et calculer sa probabilité de deux manières différentes.

Solution page 324

Exercice 11.13 (dé truqué)

On joue avec un dé truqué à 6 faces. On lance une fois ce dé. On sait que :

- la probabilité d'obtenir 1,2,3,4 ou 5 est la même ;
- la probabilité d'obtenir un 6 est égale à $\frac{1}{2}$.

1 Soit A l'événement : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 ».
Calculer $P(A)$.

2 Soit B l'événement : « obtenir 1 ».
Déterminer $P(B)$.

3 Soit C l'événement : « obtenir un nombre pair ».
Déterminer $P(C)$.

En déduire la probabilité d'obtenir un nombre impair.

Solution page 325

Exercice 11.14

Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100. On prélève une boule au hasard.
On considère les événements suivants :

- A : « le numéro de la boule est pair » :
- B : « le numéro de la boule est un multiple de 5 » ;
- C : « le numéro de la boule est un multiple de 10 ».

1 Calculer les probabilités des événements A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$ et $A \cap \overline{C}$.

2 En déduire la probabilité des événements $A \cup B$ et $A \cup C$.
Que peut-on dire de l'événement $A \cup \overline{C}$?

Solution page 325

Probabilités conditionnelles

Exercice 11.15 (QCM)

Ceci est un Q.C.M. Une seule réponse est exacte pour chaque question.

Deux groupes de personnes (A et B) sont répartis selon les caractères désignés par S, L, M de la façon suivante :

Caractère \ Groupe	A	B	Total
S	16	8	24
L	12	14	26
M	6	10	16
Total	34	32	66

On interroge une personne au hasard. Les données précédentes sont à utiliser pour les quatre questions suivantes.

1 La probabilité que la personne interrogée appartienne au groupe A est égale à :

a. $\frac{1}{66}$ **b.** $\frac{1}{34}$ **c.** $\frac{17}{33}$

2 La probabilité que la personne interrogée présente le caractère M ou soit dans le groupe A est égale à :

a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{25}{33}$ **c.** $\frac{1}{11}$

3 La probabilité que la personne interrogée présente le caractère M sachant qu'il appartient au groupe A est égale à :

a. $\frac{1}{34}$ **b.** $\frac{1}{11}$ **c.** $\frac{3}{17}$

4 La probabilité que la personne interrogée appartienne au groupe A sachant qu'elle présente le caractère M est égale à :

a. $\frac{3}{17}$ **b.** $\frac{14}{17}$ **c.** $\frac{3}{8}$

Solution page 326

mathweb.fr

Exercice 11.16 (moyens de locomotions des élèves)

Dans un lycée, nous avons réparti les élèves selon leur genre et le moyen de locomotion qu'ils utilisent pour venir en cours. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Moyens de locomotion	Filles	Garçons
En transport en commun	126	148
À vélo	16	10
À pied	108	84
En voiture	42	30

1 On choisit au hasard un élève parmi les 564 élèves de ce lycée.

a. Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?

b. Quelle est la probabilité pour que cet élève vienne à vélo ?

c. Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille qui vienne à pied ?

2 On choisit maintenant un garçon au hasard.
Quelle est la probabilité pour qu'il vienne en voiture ?

3 On choisit maintenant un élève qui vient en transport en commun.
Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?

Solution page 326

Exercice 11.17 (dans un lycée)

Dans un lycée de 2 000 élèves, 55 % sont des garçons.
Parmi les garçons, 70 % font « Anglais L.V.1 » , le reste faisant « Espagnol L.V.1 ».
On sait de plus que 65 % des élèves de ce lycée font « Anglais L.V.1 ».

1 Compléter le tableau suivant :

	Filles	Garçons	Total
Anglais L.V.1			
Espagnol L.V.1			
Total			

2 On choisit au hasard un élève de ce lycée.
Quelle est la probabilité que ce soit un garçon faisant Anglais L.V.1 ?

3 On choisit au hasard un élève de ce lycée.
Quelle est la probabilité que ce soit une fille ou que l'élève fasse Espagnol L.V.1 ?

4 On choisit au hasard un élève parmi les garçons.
Quelle est la probabilité qu'il fasse Espagnol L.V.1 ?

5 On choisit au hasard un élève.
Sachant que c'est une fille, quelle est la probabilité qu'elle fasse Anglais L.V.1 ?

Solution page 327

mathweb.fr

Exercice 11.18 (MP3 défectueux)

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1 Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2 **a.** Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3 Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.

Solution page 328

Exercice 11.19 (parc informatique)

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5 % des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10 % des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20 % des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc. On note les événements suivants :

- N : « L'ordinateur est neuf »
- R : « L'ordinateur est récent »
- A : « L'ordinateur est ancien »
- D : « L'ordinateur est défaillant »
- $\overline{D}$ l'événement contraire de D.

1 Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2 Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.

3 Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,132 5.

4 Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

Solution page 328

mathweb.fr

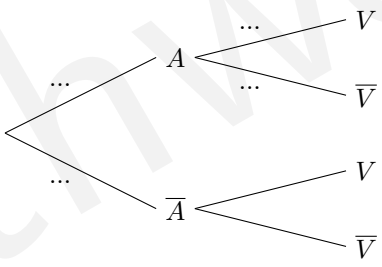
Exercice 11.20 (agence TOCAR)

L'agence TOCAR propose aux youtubeurs de les faire connaître sur Internet. Elle affirme que ses clients possèdent 80 % de vidéos vues plus de 200 000 fois.
Les statistiques de cette agence montrent que si un youtuber met en ligne une vidéo en lien avec le thème principal de sa chaîne, la probabilité que cette vidéo soit vue plus de 200 000 fois est égale à 0,7.

La youtubeuse *Mimolette* fait appel à cette agence pour avoir plus de vidéos vues. Elle poste 80 % de vidéos portant sur le thème principal de sa chaîne.
On appelle :

- A l'événement : « la youtubeuse poste une vidéo en rapport avec le thème principal de sa chaîne » ;
- V l'événement : « la vidéo postée est vue plus de 200 000 fois ».

1 Compléter l'arbre des probabilités suivant :



2 Calculer la probabilité qu'une vidéo soit vue plus de 200 000 fois sachant qu'elle n'a pas de lien avec le thème principal de la chaîne si l'agence TOCAR disait la vérité.

3 Donner un encadrement du pourcentage de vidéos vues plus de 200 000 fois par client.

Solution page 329

Exercice 11.21 (dans une urne)

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les événements :

- R : « le jeton tiré est rouge »,
- V : « le jeton tiré est vert »,
- G : « le jeton tiré est gagnant ».

1 Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2 Calculer la probabilité de l'événement « le jeton tiré est un jeton vert et marqué gagnant ».

3 Soit $\mathrm{P}(G)$ la probabilité de tirer un jeton gagnant.
Montrer que $\mathrm{P}(G) = \dfrac{2}{5}$.

4 Sachant que le jeton tiré est gagnant, calculer la probabilité qu'il soit de couleur rouge.

5 On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, deux jetons dans l'urne.
Calculer la probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant ». Expliquer votre démarche.

Solution page 329

mathweb.fr

Exercice 11.22 (vers une équation)

Quand Pierre est en vacances, il pense à sortir les poubelles dans 90 % des cas où il le faut, c'est-à-dire la veille du ramassage des ordures. Quand il n'est pas en vacances, il pense à les sortir une fois sur deux. Son voisin, prof de math de métier, remarque que cette semaine, Pierre pense à sortir ses poubelles avec une probabilité de 0,548.
En notant :

- V l'événement « Pierre est en vacances »,
- S l'événement : « Pierre pense à sortir les poubelles la veille du ramassage »,

Calculer la probabilité que Pierre soit en vacances.

Solution page 331

Exercice 11.23 (test faux positif)

On a un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint 0,5 % de la population.
Sur 99 % des malades, le test réagit (c'est-à-dire que 99 % des malades sont identifiés par le test) mais sur 2 % des sains, le test montre une fausse réaction positive.

Sur un patient, un test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Solution page 331

mathweb.fr

11 Corrigés

Corrigé de l'exercice 11.1 page 310

1 Représentons les sommes possibles dans un tableau :

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Nous voyons ici qu'il y a $6 \times 4 = 24$ issues possibles. De plus, il y a 8 issues correspondant à une somme qui est multiple de 3. Donc la probabilité d'obtenir une somme multiple de 3 est :

$$p_1 = \frac{8}{24} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{1}{3}}$$

2 **a.** Le nombre formé est un multiple de 3 si la somme des chiffres est un multiple de 3. D'après la question précédente, on obtient une probabilité de :

$$p_2 = p_1 \quad \boxed{p_2 = \frac{1}{3}}$$

b. Un nombre est un multiple de 2 s'il est pair. Il y a ici $3 \times 4 = 12$ nombres pairs, soit la moitié des issues possibles. La probabilité pour que le nombre formé soit un multiple de 2 est alors :

$$\boxed{p_3 = \frac{1}{2}}$$

3 **a.** L'ordre des chiffres importe peu, donc :

$$\boxed{p_4 = p_2 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}}$$

b. Il y a toujours un nombre pair sur 2 pour le chiffre des unités. Donc :

$$\boxed{p_5 = \frac{1}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 11.2 page 310

1 Il y a 6 figures rouges (en tout, $4 \times 3 = 12$ figures dont la moitié sont rouges). La probabilité est alors :

$$p_1 = \frac{6}{52} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{3}{26}}$$

mathweb.fr

2 En notant F l'événement « obtenir une figure » et R l'événement « obtenir une carte rouge », on peut écrire :

$$\mathrm{P}(F \cup R) = \mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(R) - \mathrm{P}(F \cap R).$$

D'après la question précédente, $\mathrm{P}(F \cap R) = \dfrac{3}{26}$.

De plus, $\mathrm{P}(F) = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$ et $\mathrm{P}(R) = \dfrac{1}{2}$ (car il y a autant de cartes rouges que de cartes noires).

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(F \cup R) &= \frac{3}{13} + \frac{1}{2} - \frac{3}{26}\\ &= \frac{6}{26} + \frac{13}{26} - \frac{3}{26}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(F \cup R) = \frac{8}{13}}$$

Remarque 85

On aurait aussi pu raisonner en passant par l'événement contraire, à savoir $\overline{F \cup R}$: « obtenir une carte qui n'est pas une figure et qui est noire ». On en compte en tout $10 \times 2 = 20$ (10 cartes ne sont pas des figures et il n'y a que 2 couleurs noires). Donc la probabilité de l'événement contraire est égale à $\dfrac{20}{52} = \dfrac{5}{13}$.

La probabilité demandée au départ est donc égale à $1 - \dfrac{5}{13} = \dfrac{13}{13} - \dfrac{5}{13} = \dfrac{8}{13}$.

3 Pour cette question, il vaut mieux compter les cartes de chaque ensemble car ces deux derniers sont disjoints (ils n'ont pas d'élément en commun).

Il y a 6 figures rouges et 20 cartes noires qui ne sont pas des figures, donc il y a en tout 26 cartes (soit la moitié du jeu).

La probabilité est donc égale à $\dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 11.3 page 310

1 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y) &= 1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15}\right)\\ &= 1 - \frac{13}{15}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(Y) = \frac{2}{15}}$$

2 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X) &= \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}\\ &= \frac{9}{15}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(X) = \frac{3}{5}}$$

3 Il n'est pas possible d'avoir une lettre du mot MATH **et** le Y donc $\boxed{\mathrm{P}(Y \cap X) = 0}$.

4 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \cup X) &= \mathrm{P}(Y) + \mathrm{P}(X) - \mathrm{P}(Y \cap X)\\ &= \frac{2}{15} + \frac{3}{5} - 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(Y \cup X) = \frac{11}{15}}$$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 11.4 page 311

1 D'après le diagramme, il y a $70 + 5 = 75$ profs qui adorent les statistiques et la géométrie. Donc :

$$\mathrm{P}(G \cap S) = \frac{75}{420} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{P}(G \cap S) = \frac{5}{28}}$$

2 Il y a 120 profs qui ne sont pas dans l'ensemble $S \cup G$ donc :

$$\mathrm{P}(S \cup G) = 1 - \frac{120}{420} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{P}(S \cup G) = \frac{5}{7}}$$

Corrigé de l'exercice 11.5 page 311

1 $A \cap E$ est l'événement : « l'élève étudie l'anglais et l'espagnol ».

2 $A \cup E$ est l'événement : « l'élève étudie l'anglais ou l'espagnol ».

⚠ Attention 18

Quand on décrit « l'élève étudie l'anglais ou l'espagnol », cela sous-entend qu'il étudie l'une des deux langues ou les deux.
On dit que le « ou » est *inclusif*. Il ne faut pas le confondre avec le « ou » *exclusif*, qui signifie que l'élève étudie l'une des deux langues mais pas les deux en même temps.

3 Sur les 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol, sachant que 8 étudient les deux langues.
Le nombre d'élèves qui n'étudient aucun de ces langues est alors :

$$30 - (20 + 15 - 8) = 30 - 27 = 3.$$

4 L'événement contraire de A est :

$$\overline{A} = \text{« l'élève n'étudie pas l'anglais. »}$$

Corrigé de l'exercice 11.6 page 311

1 Réponse (c) : $\frac{1}{6}$.
En effet, le dé est équilibré donc chaque face a la même probabilité d'être obtenue, à savoir 1 chance sur 6, quelles que soient les issues obtenues précédemment du lancer.

2 Réponse (c) : $\frac{1}{4}$. En effet, il y a 1 chance sur 2 pour que le 1er enfant soit une fille et autant pour le 2e enfant, donc la probabilité que les deux enfants soient deux filles est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

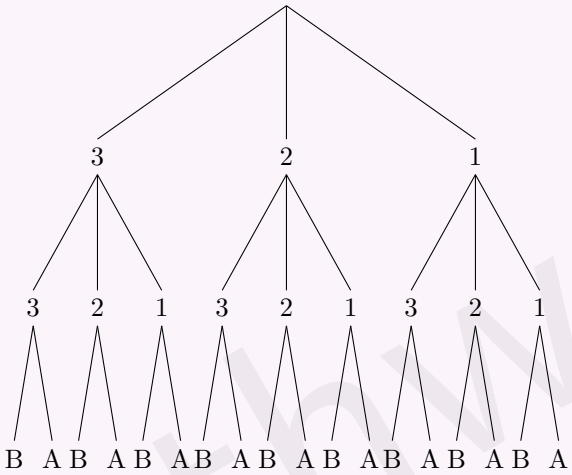
3 Réponse (c) : 0. Le tirage se fait sans remise, ce qui signifie que la carte obtenue lors du premier tirage n'est pas remise dans le jeu et donc ne peut pas être obtenue lors du second tirage.

4 Réponse (a) : $\frac{1}{6}$. Si on lance deux dés cubiques, il y a $6 \times 6 = 36$ issues possibles :
11,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,26,31,32, ...
Parmi ces 36 issues, 6 donnent deux chiffres identiques (11,22,33,44,55,66), donc la probabilité d'obtenir 2 chiffres identiques est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 11.7 page 312

1 On a l'arbre suivant :



Il y a donc 18 codes possibles.

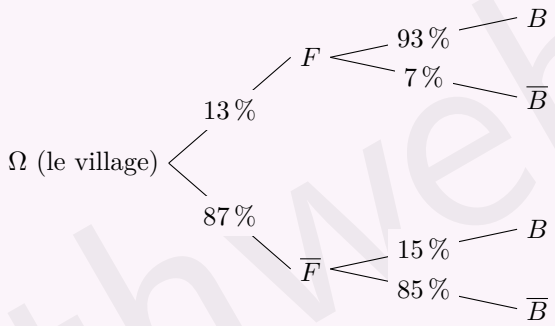
2

- $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{18}$: il n'y a qu'un code « 33A » sur les 18 codes possibles.
- $\mathrm{P}(B) = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$ car il y a 6 codes commençant par 2.
- $\mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{2}$: il y a 1 code sur 2 qui finit par A.
- $\mathrm{P}(D) = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$: seuls les codes 11A, 11B, 22A, 22B, 33A et 33B conviennent.
- $\mathrm{P}(E) = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$: seuls les codes 22A, 23A, 32A et 33A ne contiennent ni le 1, ni le B.

Corrigé de l'exercice 11.8 page 312

Commençons par noter :

- F l'événement : « la personne a vu au moins un fantôme dans sa vie » ;
- B l'événement : « la personne aime bien aller au bistrot en fin de journée ».



La probabilité que la personne choisie au hasard aime aller au bistrot en fin de journée est égale à la probabilité qu'elle ait vu un fantôme et qu'elle aime aller au bistrot, ou qu'elle n'ait pas vu de fantôme et qu'elle aime aller au bistrot.

Autrement dit : $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(F \cap B) + \mathrm{P}\left(\overline{F} \cap B\right)$

$= 0,13 \times 0,93 + 0,87 \times 0,15$

$= 0,1209 + 0,1305$

$\boxed{\mathrm{P}(B) = 0,2514}$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 11.9 page 312

1 $C_1 \cap C_2$ est l'événement : « les caisses 1 et 2 sont libres en même temps ».

2 $\overline{C_1}$ est l'événement : « la caisse 1 n'est pas libre ».

$$\mathrm{P}\left(\overline{C_1}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(C_1\right) = 1 - 0,3 = \underline{0,7}.$$

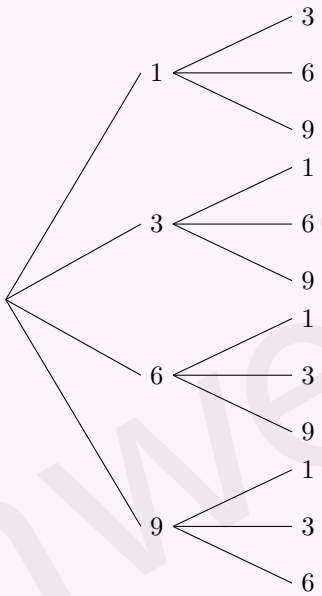
3 $C_1 \cup C_2$ est l'événement : « la caisse 1 ou la caisse 2 est libre ».

$$\mathrm{P}\left(C_1 \cup C_2\right) = \mathrm{P}\left(C_1\right) + \mathrm{P}\left(C_2\right) - \mathrm{P}\left(C_1 \cap C_2\right) = 0,3 + 0,4 - 0,2 = \underline{0,5}.$$

4 $\mathrm{P}\left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{C_1 \cup C_2}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(C_1 \cup C_2\right) = 1 - 0,5 = \underline{0,5}$.

Corrigé de l'exercice 11.10 page 312

1 **a.** L'arbre des possibilités est le suivant :



b. Nous voyons sur l'arbre des possibilités qu'il y a 12 issues possibles.

2 **a.**
- Il y a 3 issues qui représentent des nombres pairs (16, 36 et 96) donc $\mathrm{P}\left(A\right) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
- Un nombre est un multiple de 3 lorsque la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3. Il y a donc 6 nombres divisibles par 3 (36, 39, 63, 69, 93 et 96), donc $\mathrm{P}\left(B\right) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.
- $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(B\right) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

b. $A \cup B$ est l'événement : « le nombre obtenu est pair ou multiple de 3 » ; il contient donc 7 issues concernées (16, 36, 39, 63, 69, 93 et 96), donc $\mathrm{P}\left(A \cup B\right) = \dfrac{7}{12}$.

c. $A \cap B$ est l'événement : « le nombre obtenu est pair et divisible par 3 » ; il y a donc 2 issues concernées (36 et 96), donc $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

mathweb.fr

Remarque 86

On aurait aussi pu utiliser la formule :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B) &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{7}{12}\\ &= \frac{3}{12}+\frac{6}{12}-\frac{7}{12}\\ &= \frac{2}{12}\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 11.11 page 313

Le programme complété est le suivant :

Code Python 11-17

```
1  from random import randint
2  count = 0
3  for i in range(1000):
4      d = randint(1,6)
5      if d == 1:
6          count = count + 1
7  print( count )
```

Explications :

Ligne 5 : c'est une boucle *itérative*, qui signifie « Pour chaque valeur de `i` dans la liste `[0,1,2,...,999]` ». Elle signifie donc que l'on va exécuter 1 000 fois les instructions qui se trouvent dans cette boucle.

Ligne 6 : `d` prend une valeur entière aléatoire entre 1 et 6 (inclus).

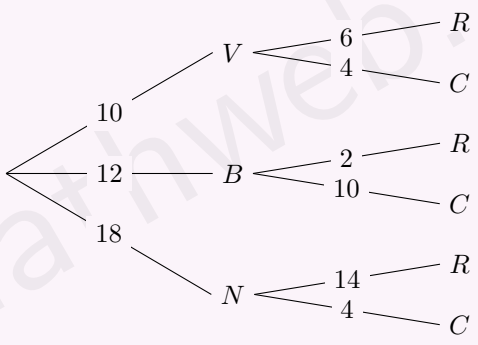
Ligne 7 : on teste ici si `d` est égale à 1, auquel cas on exécute l'instruction suivante.

Ligne 8 : la valeur contenue dans la variable `count` est désormais égale à elle-même augmentée de 1. Donc cette variable compte le nombre de fois où `d` prend la valeur 1.

Ainsi, la boucle représente les 1 000 lancers du dé, et l'instruction « `d = randint(1,6)` » simule un lancer du dé. À la fin du programme, la valeur contenue dans `count` est affichée, représentant le nombre de fois où l'on a obtenu « 1 ».

Corrigé de l'exercice 11.12 page 313

1 Construisons un arbre pour dénombrer les jetons selon leur couleur et leur forme :



2 **a.** D'après l'arbre construit précédemment, on a :

- $P(A) = \dfrac{10}{10+12+18} = \dfrac{1}{4}$.
- $P(B) = \dfrac{4+10+4}{40} = \dfrac{18}{40} = \dfrac{9}{20}$.
- $P(C) = \dfrac{4+4}{40} = \dfrac{1}{5}$.

b.

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
- $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{9}{20} = \dfrac{11}{20}$.
- $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$.

c. L'événement contraire de C est :

$\overline{C}$: « le jeton n'est pas carré ou il est bleu ».

- On compte les jetons qui ne sont pas carrés ou qui sont bleus pour calculer :

$$P(\overline{C}) = \frac{6+2+14+10}{40} = \frac{32}{40} = \frac{\cancel{8} \times 4}{\cancel{8} \times 5} = \frac{4}{5}.$$

- On utilise la formule du cours :

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Corrigé de l'exercice 11.13 page 313

Avant de répondre aux questions, on peut dresser le tableau suivant :

Face du dé	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$

En effet, si la probabilité d'obtenir 6 est $\dfrac{1}{2}$, la somme des autres probabilités est aussi égale à $\dfrac{1}{2}$. De plus, toutes les autres probabilités sont égales ; donc elles sont égales à $\dfrac{\frac{1}{2}}{5} = \dfrac{1}{10}$.

1 $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

2 $P(B) = \dfrac{1}{10}$.

3 Obtenir un nombre pair, c'est obtenir « 2 ou 4 ou 6 ».

Donc $P(C) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{10}$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir un nombre impair est :

$$1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Ce dernier résultat est cohérent d'après le tableau construit en début de corrigé.

Corrigé de l'exercice 11.14 page 314

1

- $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$. En effet, il y a un nombre pair sur 2 sur l'intervalle des entiers $[\![1;100]\!]$.
- $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{5}$. En effet, il y a un nombre sur 5 qui est un multiple de 5 sur l'intervalle des entiers $[\![1;100]\!]$.

mathweb.fr

- $\mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{10}$. En effet, il y a un nombre sur 10 qui est un multiple de 10 sur l'intervalle des entiers $[\![1;100]\!]$.
- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{10}$.
  En effet, « un nombre pair ET multiple de 5 » est un nombre multiple de 10.
- $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{10}$.
  En effet, « un nombre multiple de 5 ET de 10 » est un nombre multiple de 10.
- $\mathrm{P}\left(A \cap \overline{C}\right) = \dfrac{50-10}{100} = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$. En effet, parmi les 50 nombres pairs, on enlève les 10 multiples de 10 pour obtenir les « nombres pairs qui ne sont pas multiples de 10 ».

2
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{5}$.
- $\mathrm{P}(A \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap C) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2}$.
- $\mathrm{P}\left(A \cup \overline{C}\right) = \mathrm{P}(A) + \left[1 - \mathrm{P}(C)\right] - \mathrm{P}\left(A \cap \overline{C}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{10} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{5+9-4}{10} = 1$.
  On peut alors dire que l'événement $A \cup \overline{C}$ est *certain*.

Corrigé de l'exercice 11.15 page 314

1 Réponse c.

En effet, il y a 34 personne dans le groupe A sur les 66 au total. La probabilité est donc égale à $\dfrac{34}{66} = \dfrac{17}{33}$.

2 Réponse a.

En effet, il y a 16 personnes qui présentent le caractère M et 34 qui sont dans le groupe A, auxquels il faut enlever les 6 qui présentent aussi le caractère M.

La probabilité est donc égale à : $\dfrac{16+34-6}{66} = \dfrac{44}{66} = \dfrac{2}{3}$.

3 Réponse c.

Il y a 6 personnes du groupe A qui présentent le caractère M, donc 6 sur 34. La probabilité est donc égale à $\dfrac{6}{34} = \dfrac{3}{17}$.

4 Réponse c.

Il y a 16 personnes qui présentent le caractère M, dont 6 sont dans le groupe A. La probabilité est donc égale à $\dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.

Corrigé de l'exercice 11.16 page 315

1 L'univers est ici composé de tous les élèves du lycée, donc il comporte 564 éléments.

a. Il y a, dans le lycée, $148 + 10 + 84 + 30 = 272$ garçons.
Par conséquent, la probabilité de choisir un garçon parmi tous les élèves est :

$$p_1 = \frac{272}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{68}{141}}.$$

b. Il y a $10 + 16 = 26$ élèves qui viennent à vélo.
Par conséquent, la probabilité de choisir un élève qui vient à vélo parmi les élèves du lycée est :

$$p_2 = \frac{26}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_2 = \frac{13}{282}}$$

c. Il y a 108 filles qui viennent à pied donc la probabilité de choisir une fille qui vient à pieds parmi les élèves du lycée est :

$$p_3 = \frac{108}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_3 = \frac{9}{47}}$$

2 L'univers est ici composé des garçons du collège ; il est donc composé de 272 éléments.
Il y a 30 garçons qui viennent en voiture donc la probabilité de choisir un élève qui vient en voiture parmi les garçons est :

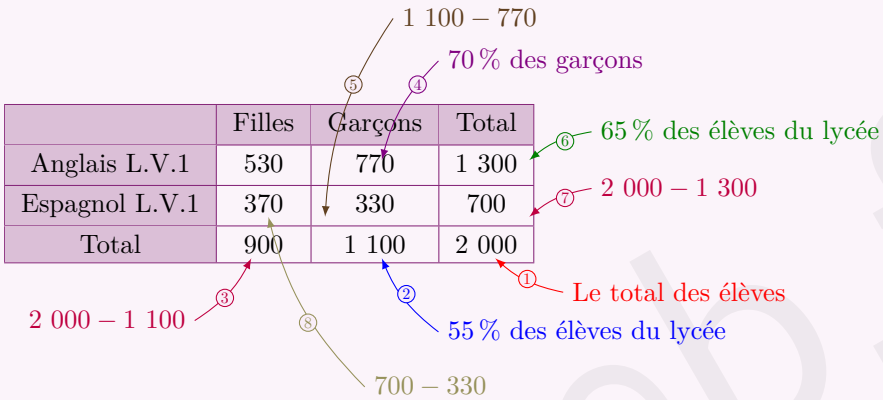
$$p_4 = \frac{30}{272} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p_4 = \frac{15}{136}}$$

3 L'univers est ici composé des élèves qui viennent en transport en commun ; il y a donc $126 + 148 = 274$ éléments dans l'univers.
Il y a 126 filles dans cet univers donc la probabilité de choisir une fille parmi les élèves qui viennent en transport en commun est :

$$p_5 = \frac{126}{274} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p_5 = \frac{63}{137}}$$

Corrigé de l'exercice 11.17 page 315

1 On a le tableau complété suivant :



	Filles	Garçons	Total
Anglais L.V.1	530	770	1 300
Espagnol L.V.1	370	330	700
Total	900	1 100	2 000

2 On choisit au hasard un élève parmi les 2 000.
Il y a 770 garçons qui font Anglais L.V.1 donc la probabilité que l'élève pris au hasard soit un garçon faisant Anglais L.V.1 est :

$$\frac{770}{2\,000} = \frac{77}{200}.$$

3 On choisit au hasard un élève parmi les 2 000.
Il y a 900 filles et 700 élèves qui font Espagnol L.V.1, dont 370 filles. Donc la probabilité que l'élève choisi(e) soit une fille ou fasse Espagnol L.V.1 est :

$$\frac{900 + 700 - 370}{2\,000} = \frac{1\,230}{2000} = \frac{123}{200}.$$

4 On choisit parmi les 1 100 garçons. Il y en a 330 qui font Espagnol L.V.1 donc la probabilité que l'on choisisse un élève qui fait Espagnol L.V.1 parmi les garçons est :

$$\frac{330}{1\,100} = \frac{3}{10}.$$

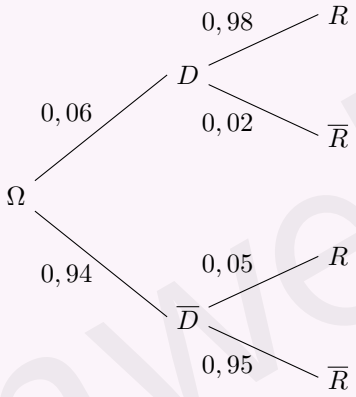
5 On sait qu'il y a 530 filles qui font Anglais L.V.1 donc sachant que l'élève choisie est une fille, la probabilité qu'elle fasse Anglais L.V.1 est :

$$\frac{530}{900} = \frac{53}{90}.$$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 11.18 page 316

1 On a l'arbre suivant :



2 **a.** En suivant la deuxième branche : $\mathrm{P}\left(D \cap \overline{R}\right) = 0,06 \times 0,02 = \underline{0,001\ 2}$.

b. Il y a erreur de contrôle pour les événements disjoints $D \cap \overline{R}$ et $\overline{D} \cap R$.
Sa probabilité est donc :

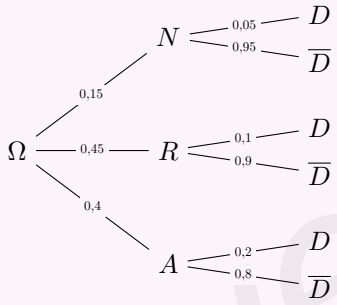
$$\mathrm{P}\left(D \cap \overline{R}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D} \cap R\right) = 0,06 \times 0,02 + 0,94 \times 0,05 = 0,001\ 2 + 0,047\ 0 = \underline{0,048\ 2}.$$

3 La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à :

$$\mathrm{P}\left(D \cap \overline{R}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = 0,06 \times 0,02 + 0,94 \times 0,95 = 0,001\ 2 + 0,893\ 0 = \underline{0,894\ 2}.$$

Corrigé de l'exercice 11.19 page 316

1 On a l'arbre pondéré suivant :



2 La probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant est donnée par :

$$P(N \cap D) = P(N) \times P_N(D) = 0,15 \times 0,05 = \underline{0,007\ 5}.$$

3 Il y a 3 « chemins » qui mènent à D donc :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap R) + P(D \cap N).$$

Ainsi, d'après l'arbre, on a :

$$P(D) = 0,4 \times 0,2 + 0,45 \times 0,1 + 0,007\ 5 = \underline{0,132\ 5}.$$

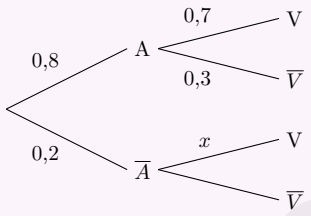
4 La probabilité que l'ordinateur choisi soit ancien sachant qu'il est défaillant est donnée par :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,08}{0,132\ 5} \approx \underline{0,60}.$$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 11.20 page 317

1 L'arbre est le suivant :



2 On cherche $x = \mathrm{P}_{\overline{A}}(V)$. Pour cela, on a :

$$\begin{aligned} 0,8 = \mathrm{P}(V) &= 0,8 \times 0,7 + 0,2x \\ x &= \frac{0,8 - 0,8 \times 0,7}{0,2} \\ x &= \frac{0,24}{0,2} \\ x &= 1,2 > 1 \text{ donc impossible car une probabilité est comprise entre 0 et 1} \end{aligned}$$

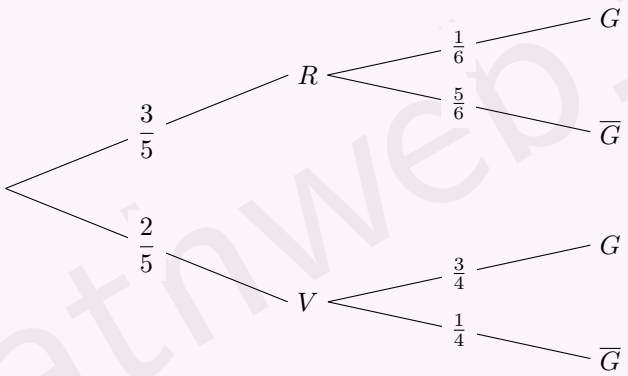
3 D'après la question précédente, $\mathrm{P}(V) = 0,56 + 0,2x$. De plus, $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant 0,2x \leqslant 0,2 \\ \iff & 0,56 \leqslant 0,56 + 0,2x \leqslant 0,76 \\ \iff & 0,56 \leqslant \mathrm{P}(V) \leqslant 0,76. \end{aligned}$$

Ainsi, Mimolette pourra espérer avoir entre 56 % et 76 % de ses vidéos qui seront vues plus de 200 000 fois.

Corrigé de l'exercice 11.21 page 317

1 L'arbre de probabilités modélisant la situation est le suivant :



2 On doit ici calculer $\mathrm{P}(V \cap G)$ qui, d'après le cours, est égale à :

$$\mathrm{P}(V \cap G) = \mathrm{P}(V) \times \mathrm{P}_V(G) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

mathweb.fr

3 Il y a deux chemins qui mènent à G donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(G) &= \mathrm{P}(V \cap G) + \mathrm{P}\left(V \cap \overline{G}\right) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{4}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(G) = \frac{2}{5}}$$

4 On souhaite ici calculer $\mathrm{P}_G(R)$ qui, d'après le cours, est égale à :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_G(R) &= \frac{\mathrm{P}(R \cap G)}{\mathrm{P}(G)} \\ &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}_G(R) = \frac{1}{4}}$$

5 Tirer au hasard et simultanément deux jetons revient à en tirer un, puis un autre (sans remettre le premier dans l'urne).

On sait que la probabilité de tirer un premier jeton gagnant est $\mathrm{P}(G) = \frac{2}{5}$ d'après la question 3. Mais une fois ce jeton choisi, nous avons une autre configuration :

- si le premier jeton gagnant est rouge, alors il n'y a plus de jeton gagnant rouge pour le second tirage ; la probabilité de tirer un jeton gagnant est donc égale à :

$$\mathrm{P}(V \cap G) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$

- si le premier jeton gagnant est vert, alors il y a encore un jeton rouge gagnant (sur les 9 jetons restants) et 2 jetons gagnants verts ; la probabilité de tirer un second jeton gagnant est donc égale à :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(R \cap G) + \mathrm{P}(V \cap G) &= \frac{6}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

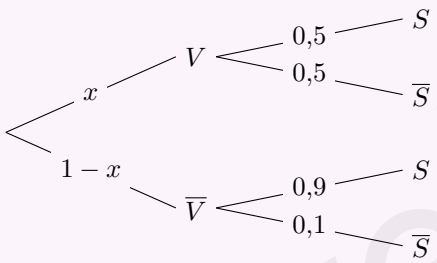
La probabilité de tirer simultanément deux jetons gagnants est alors égale à :

$$\mathrm{P}(1^{\text{er}}\ \text{R gagnant}) \times \frac{1}{3} + \mathrm{P}(1^{\text{er}}\ \text{V gagnant}) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 11.22 page 318

Notons $x = \mathrm{P}(V)$ et construisons un arbre de probabilités représentant la situation :



On sait que $\mathrm{P}(S) = 0,548$ d'après le voisin de Pierre.
Il y a deux chemins qui mènent à S donc :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(V \cap S) + \mathrm{P}\left(\overline{V} \cap S\right)\\
\iff &0,548 = \mathrm{P}(V) \times \mathrm{P}_V(S) + \mathrm{P}\left(\overline{V}\right) \times \mathrm{P}_{\overline{V}}(S)\\
\iff &0,548 = x \times 0,9 + (1-x) \times 0,5\\
\iff &0,548 = 0,9x + 0,5 - 0,5x\\
\iff &0,548 = 0,4x + 0,5\\
\iff &0,4x = 0,048\\
\iff &x = \frac{0,048}{0,4}\\
\iff &x = 0,12.
\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que Pierre soit en vacances est égale à 0,12.

Corrigé de l'exercice 11.23 page 318

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population.
On pose :

- M : « l'individu est malade »
- T : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :

- $\mathrm{P}(M) = 0,5\,\% = \frac{5}{1\,000} = \frac{1}{200}$, d'où $\mathrm{P}\left(\overline{M}\right) = \frac{199}{200}$;
- $\mathrm{P}_M(T) = \frac{99}{100}$;
- $\mathrm{P}_{\overline{M}}(T) = 2\,\% = \frac{1}{50}$.

On cherche à déterminer $\mathrm{P}_T(M)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_T(M) &= \frac{\mathrm{P}(M \cap T)}{\mathrm{P}(T)}\\
&= \frac{\mathrm{P}_M(T) \times \mathrm{P}(M)}{\mathrm{P}_M(T) \times \mathrm{P}(M) + \mathrm{P}_{\overline{M}}(T) \times \mathrm{P}\left(\overline{M}\right)}\\
&= \frac{0,99 \times 0,005}{0,99 \times 0,005 + 0,02 \times 0,995}\\
&\approx 0,2.
\end{aligned}$$

Il y a donc 20 % d'être malade sachant que le test est positif.

mathweb.fr

12 Échantillonnage

Dans ce chapitre

1 Introduction 333
2 Intervalle de fluctuation 334
1 Échantillon 334
2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % 334
3 Prise de décision 335
Exercices 336
Corrigés des exercices 338

Attention 19

Officiellement, le programme suggère d'aborder la notion d'échantillonnage uniquement à travers des simulations informatiques.
Le cours et les exercices de ce chapitre traitant des intervalles de fluctuation sont donc *hors-programme*.
J'ai toutefois décidé de les garder pour les élèves souhaitant aller au-delà du programme.

1 Introduction

Nous allons considérer l'expérience consistant à lancer un dé cubique supposé non truqué.
On pose alors :

A : « obtenir le 1 ».

Nous allons effectuer une simulation de 100 lancers de dé à l'aide d'un tableur.
Ouvrons un tableur et entrons dans la cellule `A1` la formule suivante :

	A	B	C
1	`=ENT(1+6*ALEA())`		
2			

- La fonction `ALEA()` permet de calculer un nombre aléatoire compris entre 0 (compris) et 1 (non compris) ;
- `6*ALEA()` affichera donc un nombre dans l'intervalle $[0\,;6[$;
- `1+6*ALEA()` affichera donc un nombre dans l'intervalle $[1\,;7[$;
- La fonction `ENT` calcule la partie entière d'un nombre ; donc `ENT(1+6*ALEA())` affichera un nombre entier parmi : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Maintenant, copions cette formule de `A2` à `A100` afin d'obtenir, au final, 100 nombres entiers compris entre 1 et 6.
Dans la cellule `A101`, entrons la formule :

```
=NB.SI(A1:A100;1)
```

Elle affichera le nombre de « 1 » qui apparaissent dans la colonne `A`.
Ensuite, entrons dans la cellule `A102` la formule :

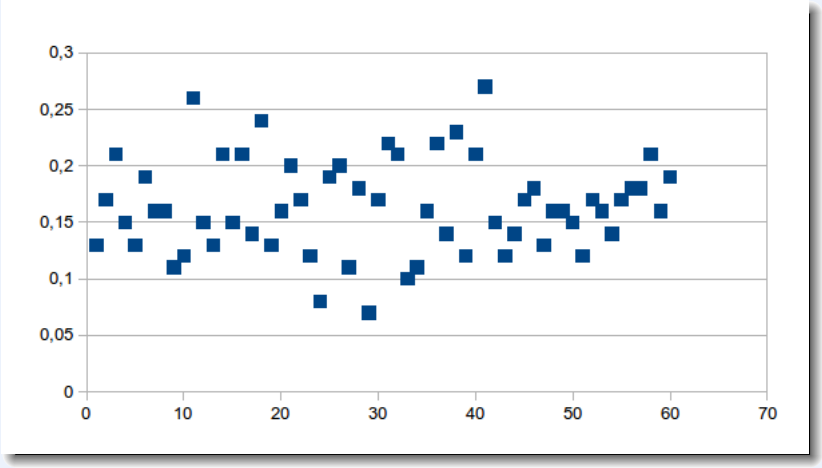
```
=A101/100
```

pour afficher la fréquence d'apparition du nombre « 1 » dans la colonne `A`.

Copions alors la colonne `A` dans les colonnes de `B` à `BG` afin d'obtenir au final 60 colonnes de nombres.
Ceci simule 60 échantillons de 100 lancers d'un dé cubique (60 échantillons de taille $n = 100$).

On construit alors un nuage de points représentant les différentes fréquences obtenues.

En appuyant sur la touche `[F9]`, on rafraîchit les calculs et on obtient un autre graphique. Voici un des graphiques obtenus :



La fréquence d'apparition théorique du nombre « 1 » est la probabilité d'obtenir ce nombre :

$$p = \frac{1}{6} \approx 0,17.$$

On s'aperçoit alors sur le graphique que les fréquences semblent se regrouper autour de cette valeur. On peut donc imaginer que les fréquences d'apparition du nombre « 1 » vont se trouver dans un intervalle centré en p : un intervalle de la forme $I = [p - \delta\,;p + \delta]$.
Nous allons prendre $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$. Alors, $I \approx [0,066\,;0,267]$.

Pour connaître le pourcentage de fréquences comprises dans cet intervalle, insérons dans la cellule `A103` la formule :

```
=SI(A102<=0,266;SI(A102>0,067;1;0);0)
```

qui affiche « 1 » si tel est le cas, et « 0 » sinon. Ensuite, copions-la sur toute la ligne 103 jusqu'à `BH103`.
Dans la cellule `A104`, insérons la formule :

```
=SOMME(A103:BH103)/60
```

puis formatons cette cellule de sorte à ce qu'elle affiche un pourcentage (en cliquant sur l'icône « % ») : ceci affichera le pourcentage de fréquences d'apparition du « 1 » qui sont dans I.

En appuyant sur la touche `[F9]` plusieurs fois, je vois les pourcentages suivants :

$$100\,\% \quad ; \quad 96,67\,\% \quad ; \quad 98,33\,\% \quad ; \quad 100\,\% \quad ; \quad 100\,\% \quad ; \quad 98,33\,\%.$$

En utilisant donc cette valeur de δ, nous sommes *a priori* assurés qu'au moins 95 % des fréquences se trouvent dans I.

2 Intervalle de fluctuation

1 Échantillon

Définition 73

Soit une population dans laquelle on observe un groupe de n individus.
Ce groupe est appelé un **échantillon de taille n** de la population.

Exemple 89

Dans l'expérience précédente, qui consiste à lancer 100 fois un dé cubique, l'échantillon était de taille 100 car on a effectué 100 lancers de dés (que l'on a ensuite répété 60 fois).

2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

Définition 74

On considère une expérience aléatoire dans laquelle on considère un événement A de probabilité p. On effectue n fois cette expérience ; on note alors f la fréquence d'apparition de l'événement A sur cet échantillon de taille n.
Un **intervalle de fluctuation au seuil de** 95 % de f, noté I_f, est un intervalle centré en p qui contient f dans un échantillon de taille n avec une probabilité égale à 0,95 :

$$I_f = [p - \delta\,;p + \delta] \quad (\delta > 0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(f \in \mathrm{I}_f) = 0,95.$$

Propriété 59

Considérons un échantillon de taille n et posons p la probabilité d'obtenir un résultat précis. Notons f la fréquence d'apparition de ce résultat dans l'échantillon.
Si $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ et $n \geqslant 25$, un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est approché par l'intervalle :

$$I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

3 Prise de décision

On utilise les intervalles de fluctuations pour déterminer si l'on peut considérer qu'un événement est « normal » ou pas.

Exemple 90

On lance 100 fois un dé tétraédrique (4 faces) et on observe que la fréquence d'apparition de la face « 3 » est $f = 0,32$.
On peut donc se demander si le dé n'est pas truqué car la fréquence observé est plus grande que la probabilité de l'événement, à savoir $p = \frac{1}{4} = 0,25$.
Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$I_f = \left[0,25 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,25 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0,15 ; 0,35].$$

On constate alors que $f \in I_f$, ce qui nous permet de dire que le dé n'est probablement pas truqué.

En revanche, si $f = 0,29$ sur 10 000 lancers, l'intervalle de fluctuation devient :

$$I'_f = \left[0,25 - \frac{1}{\sqrt{10\,000}} ; 0,25 + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}\right] = [0,24 ; 0,26].$$

Dans ce cas, $f \notin I'_f$, ce qui nous permet de dire que le dé est probablement truqué.

12 Exercices

Exercice 12.1 (le dé d'Al)

Al a fabriqué un dé cubique. Il le lance 50 fois et obtient 10 fois la face « 3 ».

1. Avec un dé équilibré, quelle est la probabilité d'obtenir la face « 3 » ?
2. Peut-on utiliser l'intervalle de fluctuation vu en cours pour déterminer si le dé d'Al est équilibré ?

Solution page 338

Exercice 12.2 (le Dédale)

Le Dédale est un labyrinthe d'un parc de loisirs.
D'après les statistiques observées au cours de la première année d'ouverture de cette attraction, le pourcentage de visiteurs ayant mis plus de 5 minutes pour le traverser était de 69 %.
La seconde année, sur 1 000 visiteurs, le pourcentage de clients ayant mis plus de 5 minutes pour le traverser était de 66 %.

Doit-on s'inquiéter de cette baisse ?

Solution page 338

Exercice 12.3 (influence de la taille d'un échantillon)

En 2014, selon l'INSEE, la France comptait 51, 45 % de femmes.
À des fins de sondages, un institut souhaite constituer un échantillon représentatif de la population concernant la répartition des genres (hommes/femmes).

1. Un premier échantillon de 500 personnes est constitué de 55 % de femmes.
   Est-il représentatif de la France quant à la répartition des genres ?
2. Un second échantillon de 1 000 est constitué de 55 % de femmes ?
   Est-il représentatif de la France quant à la répartition des genres ?

Solution page 338

Exercice 12.4 (fourchette de sondage)

Au second tour d'une élection locale, un candidat souhaite savoir s'il a des chances de gagner.
On admettra qu'en théorie, il a une chance sur deux qu'un électeur pris au hasard vote pour lui.

Il commande alors un sondage qui rapporte que sur 800 personnes, 387 ont l'intention de voter pour lui.

1. Donner l'intervalle de fluctuation correspondant à ce sondage.
2. Ce sondage semble-t-il acceptable au seuil de 95 % ?

Solution page 338

Exercice 12.5 (taux de réussite au bac)

Dans le lycée Casimir, le taux de réussite au bac est en moyenne égal à 79, 7 %.

En 2022, dans ce même lycée, d'après le bac blanc effectué en février, 75, 1 % des 500 élèves de Terminale ont eu une note supérieure ou égale à 10.

Le proviseur de ce lycée doit-il sérieusement s'inquiéter ?

Solution page 339

mathweb.fr

Exercice 12.6 (recherche de la taille d'un échantillon)

Sur la planète Vailox, on estime à 78 % la proportion de personnes circulant à deux roues.
Dans un village de n habitants de cette planète, le pourcentage de personnes circulant à deux roues est égal à 85 % sans que cela soit incohérent avec les statistiques planétaires.

Donnez la valeur maximale de n.

Solution page 339

Exercice 12.7 (d'après un exercice SESAMATH 2014)

Double Face, célèbre ennemi de Batman, utilise une pièce fétiche pour choisir s'il doit gracier ou tuer ses ennemis.
Spiderman, fan de Batman, a regardé tous les comics et a constaté que la pièce était tombée 117 fois sur la face vie pour 256 lancers.
Clark Kent pense qu'il y a autant de chances à ce tirage de tomber sur la face mort que sur la face vie.
Catwoman, et son esprit vif comme un félin, pense, elle, que Double Face a truqué la pièce pour laisser seulement à ses proies une chance de survie de 40 %.
Qui de Clark ou de Catwoman peut avoir raison ?

Solution page 339

Exercice 12.8 (taux de passage en Premières S et ES)

Jusqu'en 2017, les enseignements de spécialité n'existaient pas : il y avait (par exemple) des 1re S (filière scientifique) et 1re ES (filière économique et sociale).

Jusqu'en 2017, dans le lycée Casimir, le taux d'élèves de Seconde souhaitant aller en 1re S (paix à son âme) était de 52 %, et celui des élèves souhaitant aller en 1re ES (paix à son âme aussi) était de 36 % (reposez en paix, chères 1re S et 1re ES).
En 2018, ces taux étaient égaux à 45 % (pour la 1re S) et 48 % (pour la 1re ES).

Quelles devaient être les nombres possibles d'élèves en 2018 pour que ces taux soient acceptables au seuil de 95 % ?

Solution page 340

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 12.1 page 336

1 La probabilité d'obtenir la face « 3 »avec un dé équilibré est $p = \frac{1}{6}$.

2 L'intervalle de fluctuation correspondant à $n = 50 \geqslant 25$ lancers et à $p = \frac{1}{6}$ ne peut pas se trouver à l'aide de la formule du cours car $p \notin [0,2\,;0,8]$.
On ne peut donc pas, avec cette formule, vérifier si le dé d'Al est équilibré.

Corrigé de l'exercice 12.2 page 336

Ici, $n = 1\,000$ et $p = 0,69$ (69 %).
On a bien $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$. On peut donc utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation du pourcentage de clients ayant mis plus de 5 minutes pour traverser le Dédale :

$$I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,69 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\,;0,69 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0,6584\,;0,7216]$$

$f = 0,66 \in I_f$ donc la fluctuation du pourcentage ne semble pas anormale.

Corrigé de l'exercice 12.3 page 336

1 Ici, $n = 500$ et $p = 0,5145$. On a bien $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ donc on peut utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,5145 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;0,5145 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,4678\,;0,5592]$$

$f = 0,55 \in I_f$ donc l'échantillon peut être considéré comme représentatif de la France concernant la répartition des genres (au risque de se tromper de 5 %).

2 Ici, $n = 1\,000$ et $p = 0,5145$. On a bien $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ donc on peut utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,5145 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\,;0,5145 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0,4829\,;0,5461]$$

$f = 0,55 \notin I_f$ donc l'échantillon ne peut pas être considéré comme représentatif de la France concernant la répartition des genres (au risque de se tromper de 5 %).

Corrigé de l'exercice 12.4 page 336

1 L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % se calcule en prenant $n = 800$ et $p = 0,5$ (probabilité théorique qu'il gagne) :

$$I_f = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{800}}\,;0,5 + \frac{1}{\sqrt{800}}\right] \approx [0,4647\,;0,5353].$$

2 $f = \frac{387}{800} \approx 0,48375 \in I_f$. Par conséquent, cette observation semble conforme à nos attentes, donc ce sondage semble conforme au seuil de 95 %.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 12.5 page 336

Notons $p = 0,918$ la probabilité qu'un · e caondidat · e ait son bac.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est, sur la population constituée des 500 élèves :

$$I = \left[0,797 - \frac{1}{\sqrt{500}} ; 0,797 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,7523 ; 0,8417].$$

Remarque 88

On arrondit toujours la borne inférieure par excès et la borne supérieure par défaut.

Le taux d'élèves ayant eu au moins 10 au bac blanc est 75,1 %. Or, $0,751 \notin I$ donc le proviseur peut s'inquiéter.

Corrigé de l'exercice 12.6 page 337

Ici, $p = 0,78$. Donc $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$. On peut donc utiliser la formule du cours donnant un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,78 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,78 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

De plus, $f = 0,85 \in I_f$ car cette fréquence est dite cohérente avec les statistiques planétaires.
On peut donc déduire :

$$\begin{aligned}
&0,85 \leqslant 0,78 + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\iff &0,85 - 0,78 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\iff &0,07 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\iff &\frac{1}{0,07} \geqslant \sqrt{n} \\
\iff &n \leqslant \left(\frac{1}{0,07}\right)^2 \\
\iff &n \leqslant 204,08
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a au maximum 204 habitants dans ce village.

Corrigé de l'exercice 12.7 page 337

Notons $f = \dfrac{117}{256} \approx 0,457$ la fréquence de faces « vie » obtenue.

- S'il y avait autant de chances d'obtenir l'une ou l'autre des deux faces de la pièce, alors la probabilité théorique d'obtenir la face « vie » serait $p = 0,5$ et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % serait :

$$I_1 = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{256}} ; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{256}}\right] = [0,4375 ; 0,5625].$$

  $f \in I_1$ donc la pièce pourrait en effet être équilibrée.

- Si, au contraire, la pièce n'était pas équilibrée pour ne donner que 40 % de chances de survie aux proies de Double Face, alors $p = 0,4$ et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % serait :

$$I_2 = \left[0,4 - \frac{1}{\sqrt{256}} ; 0,4 + \frac{1}{\sqrt{256}}\right] = [0,3375 ; 0,4625].$$

  $f \in I_2$ donc la pièce aurait pu aussi être truquée.

Conclusion : au seuil de 95 %, on ne peut pas conclure quant à l'équilibre de la pièce de Double Face.

Corrigé de l'exercice 12.8 page 337

Notons n le nombre d'élèves dans le lycée Casimir.

- Pour la 1re S, notons $p_S = 0,52$ la probabilité qu'un élève de Seconde souhaite passer dans cette classe et $f = 0,45$ la fréquence de ces élèves en 2018.
  L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de cette fréquence est :
  $$I_S = \left[0,52 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,52 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$
  On doit alors avoir :
  $$0,52 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,45 \leqslant 0,52 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
  soit, en soustrayant 0,52 à chaque membre de cet encadrement :
  $$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -0,07 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$
  ou encore :
  $$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0,07$$
  et donc :
  $$\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{0,07}.$$
  Alors,
  $$n \leqslant \frac{1}{0,07^2}$$
  Ainsi, $n \leqslant 204$.
- Pour la 1re ES, on a l'intervalle suivant :
  $$I_{ES} = \left[0,36 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,36 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
  et on doit avoir :
  $$0,36 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,48 \leqslant 0,36 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
  soit :
  $$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,12 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$
  et en particulier :
  $$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0,12$$
  donc :
  $$\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{0,12}$$
  soit $n \leqslant \dfrac{1}{0,12^2}$, soit $n \leqslant 69,444$, donc $n \geqslant 70$.

Ainsi, le nombre d'élèves de Seconde dans le lycée Casimir doit être compris entre 70 et 204.

mathweb.fr