Terminale

Edition 2026 - 2027

Mathématiques

Enseignement de spécialité

Stéphane Pasquet

Uniquement sur mathweb.fr

Table des matières

326 exercices entièrement corrigés

AVANT–PROPOS

Ce livre s'adresse aux élèves de Terminale qui suivent l'enseignement de spécialité « Mathématiques ». Les parents et les enseignants y trouveront également matière à accompagner ou approfondir les notions abordées.
Il est conforme au programme officiel de l'Éducation Nationale française en vigueur.

Cette édition est une version revue, corrigée et enrichie de la précédente. Pour chaque chapitre, vous trouverez :

- un cours complet réunissant les outils mathématiques nécessaires à la compréhension de la notion abordée ;
- des exercices types, destinés à illustrer les notions fondamentales à maîtriser ;
- les énoncés des exercices ;
- leurs corrigés détaillés.

Chaque exercice est accompagné d'une indication de difficulté :

★ exercice accessible ;

★★ exercice de niveau intermédiaire ;

★★★ exercice nécessitant un raisonnement plus approfondi.

Un pictogramme 💬 cliquable accompagne chaque énoncé : il vous redirige vers une page de mon site internet où vous pouvez signaler une erreur ou laisser un commentaire.
À la fin de chaque énoncé figure le numéro de la page du corrigé correspondant, sur lequel vous pouvez cliquer pour y accéder directement.

Chaque chapitre se clôt par une section « **Objectif bac** » composée d'extraits de sujets d'examens des années précédentes. Ces exercices permettront aux élèves de s'évaluer sur les notions du chapitre, à un niveau représentatif de celui attendu lors de l'épreuve finale.

En fin de volume, vous trouverez un sujet de bac entièrement inédit, de ma composition. Son niveau est volontairement légèrement supérieur à celui de l'examen, à l'image d'un bac blanc tel qu'on peut en proposer en cours d'année.

Je vous remercie de la confiance que vous accordez à ce livre. Il est le fruit d'un travail long et minutieux ; aussi je vous serais reconnaissant de le partager avec respect : ce livre est à usage strictement personnel et sa reproduction ou sa revente, sous quelque forme que ce soit, est formellement interdite.

L'auteur,
Stéphane Pasquet

1 Suites numériques

Dans ce chapitre

1 Raisonnement par récurrence

Propriété 1 (principe de récurrence)

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :

- pour un entier n_0, $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie (initialisation),
- pour tout entier naturel $k \geqslant n_0$, le fait que $\mathcal{P}_k$ soit vraie implique que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie (hérédité),

alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur à n_0.

Remarque 1

si $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ alors on dira que la propriété est héréditaire.

Définition 1

Une *démonstration par récurrence* est une démonstration dans laquelle on utilise le principe de récurrence.

Exemple 1

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- *Initialisation :* comme :
$$1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6},$$
la propriété est vraie au rang 1.
- *Hérédité :* soit k un entier non nul arbitrairement fixé ; supposons la propriété vraie au rang k :
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$
On veut montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, soit :
$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.\end{aligned}$$
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k+1}{6}\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.\end{aligned}$$
La propriété est donc vraie au rang $k+1$.
Ainsi, on a montré que si la propriété est vraie au rang k, alors elle est vraie au rang $k+1$.
La propriété considérée est donc vraie pour tout rang $n \geqslant 1$ en vertu du principe de récurrence.

2 Limite d'une suite

1 Convergence et divergence d'une suite

Définition 2

- On dit que la suite (u_n) *converge* vers un réel ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n \geqslant N,\ \left| u_n - \ell \right| < \varepsilon.$$

  On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
  On dira alors que (u_n) *tend vers* ℓ.
- On dit que la suite (u_n) *diverge* vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant A,\ u_n > A.$$

  On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la suite (u_n) *diverge* vers $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$.

Exemple 2

- La suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0. En effet, pour un ε donné (strictement positif),

$$\begin{aligned} \left| u_n - 0 \right| < \varepsilon &\iff \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\iff n > \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

  Il existe donc bien un $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ tel que $\left| u_n - 0 \right| < \varepsilon$.
- La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$. En effet, pour tout nombre réel $A > 0$,

$$\begin{aligned} u_n > A &\iff n^2 > A \\ &\iff n > \sqrt{A}. \end{aligned}$$

  Il existe donc bien un entier $N = \left\lceil \sqrt{A} \right\rceil$ (partie entière supérieure de $\sqrt{A}$) tel que $u_n > A$.

Remarque 2

Si $A = 10$ alors $\sqrt{10} \approx 3,16$ et donc $\left\lceil \sqrt{A} \right\rceil = 4$.

2 Suites non convergentes et non divergentes

Définition 3

On dit que la suite (u_n) *n'admet pas de limite* quand elle ne converge pas et quand elle ne diverge pas.

Exemple 3

- La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite.

  En effet, pour tout entier naturel k, $\begin{cases} u_{2k} & = (-1)^{2k} = \left[(-1)^2\right]^k = 1^k = 1 \\ u_{2k+1} & = (-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1 \end{cases}$

  On dit ici que la suite est *alternée*.

- La suite (v_n) définie par $v_n = \cos(n)$ n'admet pas de limite (admis).
- La suite (w_n) définie par $w_n = \sin(n)$ n'admet pas de limite (admis).

3 Limites de référence

Propriété 2

Soit p un entier strictement positif. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty.$$

4 Opérations sur les limites

Propriété 3 (somme, produit et quotient de limites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell'$, où ℓ et ℓ' sont deux nombres réels. Alors,

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = -\ell$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'}$ (si $\ell' \neq 0$)

Définition 4 (forme indéterminée)

On appellera *forme indéterminée* une expression dont on ne peut pas calculer la limite directement.

Propriété 4 (formes indéterminées sur les limites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=\ell'$. Alors,

- Si $\ell=+\infty$ et $\ell'=-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ est une forme indéterminée.
  On notera alors : F.I. du type « $\infty-\infty$ ».
- Si $\ell=0$ et $\ell'=\pm\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$ est une forme indéterminée.
  On notera alors : F.I. du type « $0\times\infty$ ».
- Si $\ell=\pm\infty$ et $\ell'=\pm\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est une forme indéterminée.
  On notera alors : F.I. du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
- Si $\ell=0$ et $\ell'=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est une forme indéterminée.
  On notera alors : F.I. du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

Exemple 4

- **Indétermination du type « $\infty-\infty$ » :**
  Si $u_n=n^2$ et $v_n=-3n+1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-3n+1)$ est une forme indéterminée.
- **Indétermination du type « $0\times\infty$ » :**
  Si $u_n=\mathrm{e}^{-n}$ et $v_n=3n+1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left((3n+1)\mathrm{e}^{-n}\right)$ est une forme indéterminée.
- **Indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » :**
  Si $u_n=\mathrm{e}^{n}$ et $v_n=3n+1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^n}{3n+1}\right)$ est une forme indéterminée.
- **Indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ » :**
  Si $u_n=\mathrm{e}^{-n}$ et $v_n=\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}\right)$ est une forme indéterminée.

Propriété 5 (lever une indétermination)

Dans le cas d'une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ » ou « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », on factorise par le terme qui croît le plus vite vers l'infini.

Exemple 5 (polynôme)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n=n^2-3n+1$. Pour lever l'indétermination du type « $\infty-\infty$ », on factorise par n^2 (le terme dominant) :

$$u_n=n^2\left(\frac{n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)=n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

De plus, $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2)=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=0 \text{ donc, par limite d'une somme, } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=1\end{cases}$

Ainsi, par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$.

5 Limite et comparaison

a Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 (théorème de comparaison)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- **Théorème de minoration :**

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ v_n \geqslant u_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{cases} \implies \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

- **Théorème de majoration :**

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ v_n \leqslant u_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \end{cases} \implies \lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty.$$

Exemple 6

- Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant n^2$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2\right) = +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = +\infty$.
- Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant -n^2$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$ donc, d'après le théorème de majoration, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = -\infty$.

Théorème 2 (théorème d'encadrement)

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) et un réel ℓ.

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \end{cases} \implies \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

Remarque 3

Ce théorème est aussi appelé « théorème des gendarmes ».

Exemple 7

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

b Comportement à l'infini de (q^n)

Propriété 6 (inégalité de Bernoulli)

Pour tout réel $x > -1$ ($x \neq 0$) et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Démonstration 1

Elle se fait par récurrence (voir partie exercices).

Propriété 7

Soient q un nombre réel et n un entier naturel.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = 0$.
- Si $q < -1$, alors (q^n) n'a pas de limite (admis).

Démonstration 2

- Si $q > 1$ alors $q = 1 + x$, avec $x > 0$. Ainsi, d'après l'inégalité de Bernoulli,

  $$q^n = (1+x)^n > 1 + nx, \; x > 0.$$

  Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + nx) = +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $q^n = 1$ pour tout entier naturel n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} (1) = 1$.
- Si $0 < q < 1$ alors $\dfrac{1}{q} > 1$ et donc, d'après le premier point de cette démonstration, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$. On peut aussi écrire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{q^n}\right) = +\infty$.

  Ainsi, par inverse de la limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = \lim\limits_{N \to +\infty} \left(\dfrac{1}{N}\right) = 0$.

  Si $-1 < q < 0$ alors $0 < -q < 1$ et le résultat précédent donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-q)^n = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = 0$.

Propriété 8

Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ converge vers 0.

Démonstration 3

Cette propriété découle de la propriété précédente.

6 Suite majorée, suite minorée

Définition 5

- Une suite (u_n) est dite *majorée* s'il existe un réel M tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

- Une suite (u_n) est dite *minorée* s'il existe un réel m tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n.$$

- Une suite est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemple 8

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

- Pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$ donc $u_n \leqslant 1 + 1$, soit $u_n \leqslant 2$.

  La suite (u_n) est donc majorée par 2.
- De plus, $\dfrac{1}{n} > 0$ pour tout entier naturel n non nul donc $u_n > 1$.

  La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est minorée et majorée ; elle est donc bornée.

Théorème 3 (théorème de convergence des suites monotones)

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Toute suite monotone et bornée converge.

Exemple 9

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3.$$

Alors, la suite est *croissante* (car $u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée (par 3).
Donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

⚠ Attention 1

La limite n'est pas nécessairement égale à 3.

3 Algorithmique

1 Calcul des premiers termes d'une suite en Python

Pour calculer les k premiers termes d'une suite dont on connaît la relation de récurrence, on utilisera une *boucle itérative* : `for n in range(k)`.

Propriété 9 (fonction range de Python)

- `range(k)` désigne la liste des entiers de 0 à $k-1$: il y a donc k termes dans la liste.
- `range(a,b+1)` désigne la liste des entiers n tels que $a \leqslant n \leqslant b$.

Exemple 10

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 0,9u_n + 2 \end{cases}$$

Calculons les premiers termes de cette suite jusqu'à u_{10}. Pour cela, utilisons le programme suivant :

```python
u = 7

for n in range(10):
    u = 0.9*u + 2 # relation de récurrence de la suite
    print(u)
```

```
8.3
9.47
10.523000000000001
11.4707
12.323630000000001
13.091267000000002
13.782140300000002
14.403926270000001
14.963533643000002
15.467180278700003
```

Les résultats affichés sont donnés ci-contre.
Pour des raisons de représentation des nombres réels en Python, certains résultats (qui se terminent par « 000X ») ne sont que des valeurs approchées.

Remarque 4

L'instruction « `u = 0.9*u + 2` » est construite à partir de la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,9u_n + 2$.
Dans cette instruction, il faut comprendre que le `u` *avant* le signe « = » représente le terme que l'on veut calculer (u_{n+1}), alors que le `u` *après* le signe « = » représente le terme déjà en mémoire, donc le terme qui précède celui que l'on veut calculer (donc u_n).

2 Algorithme de seuil

Définition 6

Soit (u_n) une suite numérique.
On appelle *algorithme de seuil* tout programme permettant d'obtenir la plus petite valeur de n pour laquelle une condition sur u_n est remplie.

Exemple 11

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 0,9u_n + 2 \end{cases}$
Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \geqslant 19,98$ peut être fait à l'aide d'un algorithme de seuil.

En général, on utilise une *boucle conditionnelle* (`while <contraire de la condition>`) dans un algorithme de seuil.

Exemple 12

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 0,9u_n + 2 \end{cases}$$

On souhaite déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \geqslant 19,98$ (condition).
On calcule donc tous les premiers termes de la suite *tant que* la condition n'est pas remplie, c'est-à-dire tant que $u_n < 19,98$. On utilise alors le programme suivant :

```python
u = 7 # premier terme de la suite
n = 0 # indice du premier terme

while u < 19.98:
    u = 0.9*u + 2 # relation de récurrence de la suite
    n = n+1 # on augmente de 1 l'indice

print(n)
```

```
62
```

Ce résultat nous dit que pour tout entier naturel $n < 62$, $u_n < 19,98$ et que $u_{62} \geqslant 19,98$.

On peut aussi utiliser une *fonction* dont le paramètre est le seuil.

Exemple 13

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 0,9u_n + 2 \end{cases}$$

On souhaite déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \geqslant 19,98$ (condition).
On calcule donc tous les premiers termes de la suite *tant que* la condition n'est pas remplie, c'est-à-dire tant que $u_n < 19,98$. On utilise alors le programme suivant :

```python
def seuil(k):
    u = 7 # premier terme de la suite
    n = 0 # indice du premier terme

    while u < k:
        u = 0.9*u + 2 # relation de récurrence de la suite
        n = n+1 # on augmente de 1 l'indice

    return n
```

```
>>> seuil(19)
25
```

Ce résultat nous dit que le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 19$ est $n = 25$.

1 Exercices types

Exercice type 1 ▶ démonstration par récurrence

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 0,2u_n + 2 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}_n)\ :\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5.$$

- **Initialisation.**
  On vérifie que la propriété à démontrer est vraie pour la première valeur de n possible (ici, $n = 0$).

  $$u_1 = 0,2 \times u_0 + 2 = 0,2 \times 5 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

  Ainsi,

  $$0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 5.$$

  $(\mathcal{P}_0)$ est donc vraie.
- **Hérédité.**
  On suppose que, pour un entier $k \geqslant 0$ fixé, $(\mathcal{P}_k)$ est vraie, c'est-à-dire :

  $$(\mathcal{P}_k)\ :\ 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 5.$$

  C'est l'*hypothèse de récurrence* (notée : HR).
  On veut alors démontrer que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie, c'est-à-dire :

  $$(\mathcal{P}_{k+1})\ :\ 0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 5.$$

  D'après HR,

  $$\begin{aligned} 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 5 &\Longrightarrow 0 \times 0,2 \leqslant 0,2u_{k+1} \leqslant 0,2u_k \leqslant 5 \times 0,2 \\ &\ \text{(car } 0,2 > 0 \text{ donc on ne change pas le sens des inégalités)} \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant 0,2u_{k+1} \leqslant 0,2u_k \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow 0 + 2 \leqslant 0,2u_{k+1} + 2 \leqslant 0,2u_k + 2 \leqslant 1 + 2 \\ &\Longrightarrow 2 \leqslant \underbrace{0,2u_{k+1} + 2}_{=u_{k+2}} \leqslant \underbrace{0,2u_k + 2}_{=u_{k+1}} \leqslant 3 \\ &\Longrightarrow 2 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 3 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 5 \\ &\ \text{(car si des nombres sont compris entre 2 et 3, ils sont compris entre 0 et 5).} \end{aligned}$$

- **Conclusion.**
  $(\mathcal{P}_0)$ est vraie et, pour un entier $k \geqslant 0$, $(\mathcal{P}_k) \Longrightarrow (\mathcal{P}_{k+1})$ donc, d'après le principe de récurrence, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice type 2 ▶ Calcul de limites

Calculer la limite des suites ci-dessous.

1 $u_n = 3n^2 + 2n - 1$

2 $v_n = \dfrac{n^2 + 3n - 2}{2n^2 + 5n + 1}$

1 $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (3n^2) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1) = +\infty \end{cases}$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$.

2 En s'inspirant de ce qui a été fait à la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + 3n - 2) = +\infty \lim\limits_{n\to+\infty} (2n^2 + 5n + 1) = +\infty \end{cases}$$

Ainsi, par quotient des limites, nous avons une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». Nous allons donc lever cette indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par les termes dominants :

$$v_n = \frac{n^2\left(1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^k}\right) = 0$ pour tout entier $k > 0$ donc, par somme :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 2 \end{cases}$$

et ainsi, par quotient des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n) = \frac{1}{2}.$$

Exercice type 3 ▶ Utilisation du théorème de comparaison

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n^2 + 2\sin(n)}{n+1}.$$

Déterminer sa limite.

Dans la mesure où un sinus intervient dans l'expression de u_n (il en serait de même pour un cosinus ou un $(-1)^n$), il faut encadrer u_n en partant de :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 &\iff -2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2 \\ &\iff n^2 - 2 \leqslant n^2 + 2\sin(n) \leqslant n^2 + 2 \\ &\iff \frac{n^2-2}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2+2}{n+1} \text{ (car } n+1 > 0) \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2-2}{n+1}\right) = +\infty$ (voir exercice précédent pour la méthode) et, de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+2}{n+1}\right) = +\infty$.

On ne garde alors que la partie de l'encadrement qui nous intéresse : $\dfrac{n^2-2}{n+1} \leqslant u_n$.

Ainsi, d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$.

Exercice type 4 ▶ Utilisation du théorème des gendarmes

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n + 2 \times (-1)^n}{n^2 + 3}.$$

Déterminer sa limite.

Dans la mesure où un $(-1)^n$ intervient dans l'expression de u_n (il en serait de même pour un cosinus ou un sinus), il faut encadrer u_n en partant de :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 &\iff -2 \leqslant 2(-1)^n \leqslant 2 \\ &\iff n - 2 \leqslant n + 2(-1)^n \leqslant n + 2 \\ &\iff \frac{n-2}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+2}{n^2+1} \text{ (car } n^2 + 1 > 0) \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n-2}{n^2+1} \right) = 0$ (voir exercice précédent pour la méthode) et, de même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1} \right) = 0$.

Les deux bornes de l'encadrement ayant une limite <u>commune et finie</u>, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.

1 Exercices

Raisonnement par récurrence sans suite

Exercice 1.1 (une somme avec factorielles)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots$$

où $k! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (k-1) \times k$.

1 Calculer S_1, S_2 et S_3.

Vérifier que $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Solution page 28

Exercice 1.2 (somme des premiers carrés)

On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2.$$

Montrer par récurrence que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution page 28

Exercice 1.3 (inégalité de Bernoulli)

Montrer par récurrence l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Bernoulli* :

$$\forall\, x > -1,\ \ x \neq 0, \forall\, n > 1,\ \ (1+x)^n > 1 + nx.$$

Solution page 29

Exercice 1.4 (factorielle et inégalité)

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $n! > n^2$.
Il faudra faire preuve d'initiative dans cet exercice.
On rappelle que $n! = 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Solution page 30

Exercice 1.5 (inégalité)

1 Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $4n > 2(n+1)$.

2 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $2^n > 2n$.

Solution page 30

Exercice 1.6 (de l'importance de l'initialisation)

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

« $4^n + 1$ est divisible par 3. »

1 On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un entier k arbitrairement fixé.
Montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est alors vraie.

2 $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

3 Que cela vous inspire-t-il ?

Solution page 31

Exercice 1.7 (en arithmétique)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

1 Pour tout entier naturel n, $4^n - 3n - 1$ est divisible par 9.

2 Pour tout entier naturel n, $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Solution page 31

Raisonnement par récurrence avec une suite

Exercice 1.8 (conjecturer une formule et la démontrer)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fraction irréductible.

2 Conjecturer la formule qui donne u_n puis la montrer par récurrence.

Solution page 32

Exercice 1.9 (avec une fonction croissante)

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f :

x	0		5
$f(x)$	1	$\nearrow$	5

On définit alors la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 0$ et par l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$.

Solution page 33

Exercice 1.10 (suite définie par récurrence)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad , \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Solution page 33

Exercice 1.11 (suite définie par récurrence)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \quad , \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Solution page 34

Limites de suites

Exercice 1.12 (fractions rationnelles)

Déterminer la limite des suites suivantes.

1 $a_n = \dfrac{3n+2}{4n-1}$ **2** $b_n = \dfrac{n^2-3n+1}{n+7}$ **3** $c_n = \dfrac{3n-7}{n^2+1}$

Solution page 34

Exercice 1.13 (avec racines carrées)

Déterminer les limites des suites suivantes.

1 $u_n = \dfrac{n^2+3n-2}{\sqrt{n}+1}$ **2** $v_n = \sqrt{\dfrac{4n+1}{n+2}}$ **3** $w_n = \dfrac{2\sqrt{n}+n-3}{\sqrt{n}+1}$

Solution page 35

Exercice 1.14 (théorème des gendarmes)

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où $u_n = \dfrac{n+\cos(n)}{n^2}$.

Solution page 35

Exercice 1.15 (limite d'une somme avec factorielles)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots$$

où $k! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (k-1) \times k$.

1 Montrer que pour tout entier naturel k, $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$.

2 En déduire que pour tout entier naturel n, $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

3 Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Solution page 36

Exercice 1.16 (théorème de comparaison)

Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+\sin(n)}{n+1}$

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n - n^3}{1+n^2}$

Solution page 36

Exercice 1.17 (théorème des gendarmes)

Soit $a \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans les cas suivants.

1 $u_n = \dfrac{n+\sin(n)}{n+\cos(n)}$

2 $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n} \sin^p(a)$.

Solution page 37

Étude complète d'une suite

Exercice 1.18 (étude d'une suite)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3. \end{cases}$$

1 Étudier la monotonie de (u_n).

2 **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.
b. Déterminer alors la limite de (u_n).

3 Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer la propriété conjecturée.

Solution page 38

Exercice 1.19 (construction graphique des premiers termes)

Dans un repère orthonormé, construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 10$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
Conjecturez alors la limite de la suite (u_n).

Solution page 39

Exercice 1.20 (récurrence et théorème de convergence)

Soit la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1 Déterminer les variations de f sur $[0\,;2]$.
Montrer alors l'implication suivante :

$$x \in [1\,;2] \Rightarrow f(x) \in [1\,;2].$$

2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [1\,;2]$ et que $u_n \leqslant u_{n+1}$.

3 En déduire que la suite (u_n) converge.
On ne demande pas de déterminer la limite de la suite.

Solution page 40

Exercice 1.21 (suite homographique et suite géométrique)

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases} , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

On admet que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2,5$.
Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$.

1 Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera alors son premier terme et sa raison.

2 En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution page 40

Exercice 1.22 (suite homographique & suite arithmétique)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases} , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ et la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$.

1 Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

2 En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Solution page 41

Exercice 1.23 (étude se ramenant à une suite géométrique)

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$

1 Calculer les 10 premiers termes de cette suite à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur. Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de (u_n) ?

2 On pose $v_n = u_n - 4n + 10$.

- **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.
- **b.** En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
- **c.** On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
  Donner l'expression de S_n en fonction de n.

Solution page 41

Exercice 1.24 (une suite arithmético-géométrique)

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20.$$

2 Montrer que (u_n) est convergente.

3 Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 16$.

- **a.** Calculer v_0.
- **b.** Montrer que (v_n) est géométrique.
- **c.** En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
- **d.** Déterminer la limite de (u_n).

Solution page 42

Exercice 1.25 (suites imbriquées)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_0 = v_0 = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 0,6u_n + 0,3v_n \\ v_{n+1} = 0,4u_n + 0,7v_n \end{cases}$$

On pose alors pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases}$$

1 Montrer que (a_n) est constante.

2 Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

3 En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis celle de v_n en fonction de n.

4 Démontrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Solution page 43

Exercice 1.26 (les coccinelles)

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !
On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = kx(1-x),$$

k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.
Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$.
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1 Supposons $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

- **a.** Étudier le sens de variations de la suite (u_n).
- **b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
- **c.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
  On admet que la limite de la suite est la solution de l'équation $f(x) = x$.
- **d.** Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

2 Supposons maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.

- **a.** Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.
- **b.** En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
  - montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$;
  - établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- **c.** La suite (u_n) est-elle convergente ? Calculer sa limite α en admettant que $\alpha = f(\alpha)$, puis interpréter ce dernier résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution page 44

Exercice 1.27 (les états du manchot : avec des probabilités)

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :

- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

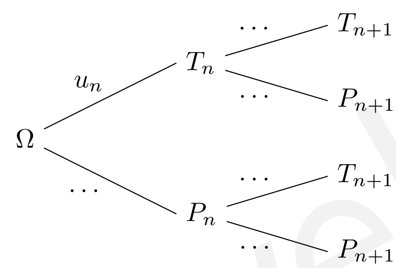
On considère alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = p\left(T_n\right)$$

où $p\left(T_n\right)$ est la probabilité de l'événement T_n.

1
- **a.** Donner les valeurs des probabilités $p\left(T_1\right)$, $p\left(P_1\right)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}\left(T_2\right)$, $p_{P_1}\left(T_2\right)$.
- **b.** Montrer que $p\left(T_2\right) = \dfrac{1}{4}$.

c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



d. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1, u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1.e. ?

Solution page 45

Exercice 1.28 (probabilités et mouvement d'une puce)

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C. Soit n un entier naturel. À l'instant initial $n = 0$, la puce se trouve en A.

- Si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- Si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est soit en A, soit en C de façon équiprobable.
- Si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On désigne par A_n (resp. B_n et C_n) l'événement :
« À l'instant n, la puce est en A (resp. B et C). »
On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, et $c_n = P(C_n)$.
On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.
Pour traiter cet exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1 Étude du mouvement pour $1 \leqslant n \leqslant 3$.

a. Donner a_1 , b_1 et c_1. Calculer $a_1 + b_1 + c_1$.

b. À l'instant $n = 2$, dans quelles cases la puce peut-elle se trouver ? Déterminer a_2, b_2 et c_2.

c. À l'instant $n = 3$, dans quelles cases la puce peut-elle se trouver ? En déduire a_3. Calculer b_3 et vérifier que $c_3 = \frac{17}{18}$.

2 Étude du cas général.

a. Conjecturer les cases sur lesquelles la puce peut se trouver à l'instant n lorsque l'entier n est pair ($n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$), et les cases sur lesquelles elle peut se trouver si l'entier n est impair ($n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$).
En déduire (sans autre justification) la valeur de a_{2k+1}.

b. Démontrer que :

$$\begin{cases} b_{2k+1} = \dfrac{1}{3} a_{2k} \\ a_{2k+2} = \dfrac{1}{2} b_{2k+1} \end{cases}$$

c. Démontrer que pour tout entier naturel k, $a_{2k} = \dfrac{1}{6^k}$.

3 **a.** Déterminer le plus petit entier naturel N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow a_n \leqslant 10^{-6}.$$

b. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

Solution page 46

Exercice 1.29 (les suites de Héron)

Pour un réel a strictement positif quelconque, on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & > 0 \\ u_{n+1} & = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

1 Compléter la fonction Python (page suivante) afin que l'instruction :

```
>>> heron(4,7,20)
```

retourne les $n+1$ premiers termes de la suite $(u(4)_n)$.

Code Python 1-1

```python
def heron(a,u,n):
    if u <=0:
        return "Le premier terme doit être strictement positif."
    elif a <= 0:
        return "La valeur de 'a' doit être strictement positive."
    else:
        L = [ ... ]
        k = 0
        while k < ...:
            u = ...
            L.append(...)
            k = ...
        return ...
```

2 L'instruction renvoie alors la liste suivante :

```
[7, 3.7857142857142856, 2.4211590296495955, 2.0366301688743387, 2.0003294091613366,
    2.0000000271231317, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0,
    2.0, 2.0]
```

Faites deux conjectures à partir de ces valeurs.

On se propose d'étudier mathématiquement la suite (u_n) pour une valeur de $a > 0$.
Pour cela, on introduit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

3 Calculer $f'(x)$, puis donner les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ en fonction de a.

4 En déduire que $u_1 \geqslant \sqrt{a}$, quelle que soit la valeur de $u_0 > 0$.

5 Montrer que pour tout réel $x \geqslant \sqrt{a}$, $f(x) \leqslant x$.

6 Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

7 Déduire que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

8 On admet que $\ell = f(\ell)$. Déterminer alors la limite de (u_n).

Solution page 48

Exercice 1.30 (suites imbriquées)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1
- **a.** Calculez u_1 et v_1.
- **b.** Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.
- **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.
- **d.** En déduire la limite de la suite (u_n).

2 On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

- **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

- **b.** En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- **c.** Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
- **d.** Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

Code Python 1-3

```python
def seuil():
    n = 0
    r = 1
    while abs( r - sqrt(2) ) > 10**(-4):
        r = (2 + r) / (1 + r)
        n = n + 1
    return n
```

(« `abs` » désigne la valeur absolue, `sqrt` la racine carrée et `10**(-4)` représente 10^{-4}).
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

Solution page 49

Objectif bac

Exercice 1.31 (des « vrai/faux » issus de différents sujets)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2+\cos(n)}.$$

Affirmation : la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

2 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n}.$$

Affirmation : la suite (u_n) converge vers $\dfrac{5}{3}$.

3 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Affirmation : la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

4 On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation précédente.
Affirmation : l'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50}.

Code Python 1-4

```python
def suite(k):
    S = 0
    for i in range(k):
        S = S + (3/4)**k
    return S
```

5 **Affirmation :** toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.

Solution page 51

Exercice 1.32 (des « vrai/faux » issus de différents sujets)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1 On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, on a :

$$u_n \leqslant \frac{-9^n + 3^n}{7^n}.$$

Affirmation : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$.

2 On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

Code Python 1-5

```python
def terme(N) :
    U = 1
    for i in range(N):
        U = U+i
    return U
```

Affirmation : `terme(4)` renvoie la valeur 7.

3 Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

$$\frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}.$$

Affirmation : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \frac{1}{2}$.

4 **a.** On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation : la suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

b. On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation : pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

5 On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \frac{S_n}{n}.$$

Affirmation : la suite (u_n) converge.

Solution page 52

Exercice 1.33 (des « vrai/faux » issus de différents sujets)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}. \end{cases}$$

Affirmation : pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

2 On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

Code Python 1-6

```python
def seuil(S) :
    n = 0
    u = 7
    while u < S :
        n = n + 1
        u = 1.05*u + 3
    return(n)
```

Affirmation : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18.

3 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2. \end{cases}$$

Affirmation : la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Solution page 53

Exercice 1.34 (Amérique du Nord, sujet 2 de secours)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : conjecture

1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$			

2 Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

1 Calculer w_0.

2 Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3 Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4 Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n$.

5 Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : étude de la suite (u_n)

1 Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2 En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3 On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \dfrac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution page 55

1 Corrigés

Corrigé de l'exercice 1.1 page 14

1
- $S_1 = \dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2!}$.
- $S_2 = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} = \dfrac{5}{6} = 1 - \dfrac{1}{6} = 1 - \dfrac{1}{3!}$.
- $S_3 = S_2 + \dfrac{3}{4!} = \dfrac{23}{24} = 1 - \dfrac{1}{24} = 1 - \dfrac{1}{4!}$.

On constate alors que $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2 Démontrons par récurrence cette dernière conjecture. Nous avons réalisé l'initialisation dans la question précédente.

Supposons que pour un entier k fixé, $S_k = 1 - \dfrac{1}{(k+1)!}$ (HR). Alors,

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + \frac{k+1}{(k+2)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(k+1)!} \times \frac{k+2}{k+2} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\
&= 1 - \frac{k+2}{(k+2)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(k+2)!}.
\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.
La formule est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

Corrigé de l'exercice 1.2 page 14

Posons $P(n)$ la propriété :

$$(P_n) \; : \; 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1 **Initialisation.**
$S_1 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times (1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$.
Donc $P(1)$ est vraie.

2 **Hérédité.**
Supposons que pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= S_k+(k+1)^2\\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\ &= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]\\ &= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\right]\\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\end{aligned}$$

« $k_1=-2$ » est une racine évidente du polynôme $2k^2+7k+6$ donc la seconde racine k_2 est telle que $k_1k_2=\dfrac{c}{a}$, donc $k_2=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{2}=-\dfrac{3}{2}$.
Donc $2k^2+7k+6=2\,(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right)=(k+2)(2k+3)$.
Finalement, on a :

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

L'hérédité est donc vérifiée.

3 Conclusion.
Quel que soit l'entier naturel $k\geqslant 1$, $P(k)\Rightarrow P(k+1)$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geqslant 1$.

Corrigé de l'exercice 1.3 page 14

- **Initialisation.**
Pour $n=2$, $(1+x)^n=(1+x)^2=1+2x+x^2$
$1+nx=1+2x$
Or, $x^2>0$ donc $1+2x+x^2>1+2x$; ainsi, $(1+x)^2>1+2x$.
L'inégalité est donc vraie au rang $n=2$.

- **Hérédité.**
On suppose que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire que l'on suppose que pour un entier n quelconque supérieur strictement à 1 :
$$\forall x\geqslant -1,\ x\neq 0,\ (1+x)^n>1+nx \qquad \text{(HR)}$$
et on souhaite démontrer que :
$$\forall x\geqslant -1,\ x\neq 0,\ (1+x)^{n+1}>1+(n+1)x.$$
$\forall x\geqslant -1,\ x\neq 0$, on a :
$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n\times(1+x)\\ &> (1+nx)\times(1+x) \qquad \text{par HR}\\ &> 1+nx+x+x^2 \qquad \text{en développant}\\ &> 1+(n+1)x+x^2.\end{aligned}$$
Or, $x^2>0$ donc $1+(n+1)x+x^2>1+(n+1)x$, d'où :
$$(1+x)^{n+1}>1+(n+1)x.$$

Ainsi, si l'inégalité est vraie à un rang n quelconque, elle l'est aussi au rang $n+1$: l'hérédité est démontrée.
Par conséquent, l'inégalité de Bernoulli est vraie pour tout entier naturel n supérieur strictement à 1.

Corrigé de l'exercice 1.4 page 14

Posons :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \forall\, n \geqslant 4, n \in \mathbb{N}, n! > n^2.$$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie.

- *Initialisation.*
  $4! = 2 \times 3 \times 4 = 24$ et $4^2 = 16$ donc pour $n = 4$, $n! > n^2$.
- *Hérédité.*
  Supposons que pour un certain entier k fixé supérieur ou égal à 4, $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire que $k! > k^2$ (HR).
  Démontrons alors que $(k+1)! > (k+1)^2$, soit $(k+1)! > k^2 + 2k + 1$.

$$\begin{aligned}(k+1)! &= k! \times (k+1) \\ &> k^2 \times (k+1) \qquad \text{d'après (HR)}\end{aligned}$$

  Il faudrait démontrer maintenant que $k^2(k+1) \geqslant (k+1)^2$.
  On calcule alors :

$$\begin{aligned}k^2(k+1) - (k+1)^2 &= (k+1)\big[k^2 - (k+1)\big] \\ &= (k+1)(k^2 - k - 1) \\ &= (k+1)\big[k(k-1) - 1\big].\end{aligned}$$

  $\forall\, k \geqslant 4$,

$$\left.\begin{aligned}k(k-1) - 1 \geqslant 4 \times 3 - 1,\ \text{soit } k(k-1) - 1 \geqslant 11 \\ k + 1 \geqslant 5\end{aligned}\right\} \Rightarrow (k+1)\big[k(k-1) - 1\big] \geqslant 55 > 0.$$

  Donc $k^2(k+1) - (k+1)^2 \geqslant 0$, soit $k^2(k+1) \geqslant (k+1)^2$.
  Ainsi, $(k+1)! > (k+1)^2$. La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4.

Corrigé de l'exercice 1.5 page 15

1 Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$$\begin{aligned}4n > 2(n+1) &\iff 4n > 2n + 2 \\ &\iff 2n > 2 \\ &\iff n > 1.\end{aligned}$$

2 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$$\mathcal{P}(n) : \qquad 2^n > 2n.$$

- **Initialisation :** pour $n = 3$, $2^n = 2^3 = 8$ et $2n = 2 \times 3 = 6$.
  $8 > 6$ donc $2^3 > 2 \times 3$.
  $\mathcal{P}(3)$ est donc vraie.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k arbitrairement fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
  Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie, c'est-à-dire que $2^{k+1} > 2(k+1)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(k) \text{ vraie} &\Rightarrow 2^k > 2k \\ &\Rightarrow 2 \times 2^k > 2 \times 2k \\ &\Rightarrow 2^{k+1} > 4k > 2(k+1) \text{ (d'après la question précédente car } k > 1) \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie.}\end{aligned}$$

  L'hérédité est alors prouvée.
- **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$.

Corrigé de l'exercice 1.6 page 15

1 Supposons que pour un entier k fixé, 4^k+1 est divisible par 3. Alors, il existe un entier naturel p tel que :

$$4^k+1=3p.$$

On a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
&4^k+1=3p\\
\Rightarrow &4\times(4^k+1)=4\times 3p\\
\Rightarrow &4^{k+1}+4=12p\\
\Rightarrow &4^{k+1}+4-3=12p-3\\
\Rightarrow &4^{k+1}+1=3(4p-1).
\end{aligned}$$

Ainsi, $4^{k+1}+1$ est un multiple de 3, et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On dit que la propriété $\mathcal{P}$ est *héréditaire*.

2 $\mathcal{P}(0)$ stipule que $4^0+1=2$ est un multiple de 3, ce qui est loin d'être vrai.
De même, $\mathcal{P}(1)$ stipule que $4^1+1=5$ est un multiple de 3, ce qui n'est pas le cas.

Donc $\mathcal{P}(n)$ n'est pas vraie pour tout entier naturel n.

3 Ce qui précède nous permet de constater que ce n'est pas parce qu'une propriété est héréditaire qu'elle est tout le temps vraie.
Le principe de récurrence s'appuie d'ailleurs sur le fait qu'il est nécessaire de vérifier que la propriété est vraie pour un entier (généralement, le plus petit possible : c'est l'initialisation).
Donc il faut veiller à faire l'initialisation lors d'un raisonnement par récurrence sans quoi, le raisonnement est faux.

Corrigé de l'exercice 1.7 page 15

1 Posons $\mathcal{P}(n)$: $4^n-3n-1=9p$, où p est un entier relatif.

- **Initialisation.**
  Pour $n=0$, on a :
  $$4^n-3n-1=4^0-3\times 0-1=1-1=0=9\times 0.$$
  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier k arbitrairement fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
  Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie, c'est-à-dire que :
  $4^{k+1}-3(k+1)-1=9p$, soit $4^{k+1}-3k-4=9p$, où p est un entier relatif.
  $$\begin{aligned}
  \mathcal{P}(k)\text{ vraie} &\Rightarrow 4^k-3k-1=9p\\
  &\Rightarrow 4\times(4^k-3k-1)=4\times 9p\\
  &\Rightarrow 4^{k+1}-12k-4=4\times 9p\\
  &\Rightarrow 4^{k+1}-3k-9k-4=4\times 9p\\
  &\Rightarrow 4^{k+1}-3k-4=4\times 9p+9k\\
  &\Rightarrow 4^{k+1}-3k-4=9(4p+k)\\
  &\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)\text{ vraie.}
  \end{aligned}$$
  En effet, $4p+k$ est un entier relatif (car c'est une combinaison linéaire de deux entiers relatifs).

- **Conclusion.**
  $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(k)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ vraie donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, à savoir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 4^n - 3n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

2 Posons $\mathcal{P}(n)$: $7 \times 3^{5n} + 4 = 11p$, où p est un entier naturel (non nul).

- **Initialisation.**
  Pour $n = 0$, on a :

$$7 \times 3^{5n} + 4 = 7 \times 3^0 + 4 = 7 + 4 = 11 = 11 \times 1.$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier k arbitrairement fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
  Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie, c'est-à-dire que :

$$7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11p.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(k) \text{ vraie} &\Rightarrow 7 \times 3^{5k} + 4 = 11p \\
&\Rightarrow 3^5 \times \left(7 \times 3^{5k} + 4\right) = 3^5 \times 11p \\
&\Rightarrow 7 \times 3^{5k} \times 3^5 + 4 \times 3^5 = 11 \times 3^5 p \\
&\Rightarrow 7 \times 3^{5k+5} + 972 = 11 \times 3^5 p \\
&\Rightarrow 7 \times 3^{5(k+1)} + 4 + 968 = 11 \times 3^5 p \\
&\Rightarrow 7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11 \times 3^5 p - 968 \\
&\Rightarrow 7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11 \times 3^5 p - 11 \times 88 \\
&\Rightarrow 7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11 \times \left(3^5 p - 88\right) \\
&\Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie.}
\end{aligned}$$

- **Conclusion.**
  $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(k)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ vraie donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, à savoir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 7 \times 3^{5n} + 4 \text{ est un multiple de } 11.$$

Corrigé de l'exercice 1.8 page 15

1 Calculons :

$$u_1 = \frac{1}{2 - u_0} \qquad \boxed{u_1 = \frac{1}{2}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2 - u_1} \qquad u_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} \qquad \boxed{u_2 = \frac{2}{3}}$$

$$u_3 = \frac{1}{2 - u_2} \qquad u_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} \qquad \boxed{u_3 = \frac{3}{4}}$$

2 Posons $P(n)$ la propriété : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- **Initialisation.**
  Faite dans la question 1.

- **Hérédité.**
Supposons que pour un entier naturel k, $P(k)$ est vraie (H.R.). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2-u_k} = \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} \quad \text{(H.R.)} \\ &= \frac{1}{\frac{2(k+1)-k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

- **Conclusion.**
Quel que soit l'entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Corrigé de l'exercice 1.9 page 15

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$.

- **Initialisation**.
$u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 5$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**.
Supposons que pour un entier k fixé, $0 \leqslant u_k \leqslant 5$.
Alors, puisque f est croissante sur $[0\,;5]$, on peut prendre l'image de chaque membre de cet encadrement sans changer le sens des inégalités : les images de 0, u_k et 5 sont rangées dans le même ordre :

$$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(5)$$

soit :

$$1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5 \qquad \text{et donc :} \qquad 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5.$$

L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier naturel n.

Corrigé de l'exercice 1.10 page 16

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

- **Initialisation**.
$u_0 = 2$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**.
Supposons que pour un entier k fixé, $1 \leqslant u_k \leqslant 2$.
Alors,on a :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant u_k \leqslant 2 &\Rightarrow 1+1 \leqslant 1+u_k \leqslant 1+2 \\ &\Rightarrow 2 \leqslant 1+u_k \leqslant 3 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+u_k} \leqslant \sqrt{3} \\ &\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2 \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.

Corrigé de l'exercice 1.11 page 16

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

- **Initialisation**.

  $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**.

  Supposons que pour un entier k fixé, $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant 1$.

  Alors,on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant 1 &\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \leqslant 1 + u_k \leqslant 1 + 1 \\
&\Rightarrow \frac{3}{2} \leqslant 1 + u_k \leqslant 2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1 + u_k} \leqslant \frac{2}{3} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{2}{3} \leqslant 1
\end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.

- **Conclusion.**

  La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout entier naturel n.

Corrigé de l'exercice 1.12 page 16

1 $a_n = \dfrac{3n+2}{4n-1} = \dfrac{n\left(3 + \frac{2}{n}\right)}{n\left(4 - \frac{1}{n}\right)} = \dfrac{3 + \frac{2}{n}}{4 - \frac{1}{n}}$, pour $n > 0$.

Or, d'après le cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, par somme, produit et quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{4}}$$

2 $b_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n + 7} = \dfrac{n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 + \frac{7}{n}\right)} = \dfrac{n\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{7}{n}}$, pour $n > 0$.

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ donc, par somme produit et quotient de limites :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n \times 1}{1} = +\infty}$$

3 $c_n = \dfrac{3n - 7}{n^2 + 1} = \dfrac{n\left(3 - \frac{7}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{3 - \frac{7}{n}}{n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$, pour $n > 0$.

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ donc, par somme, produit et quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0}$$

Corrigé de l'exercice 1.13 page 16

1 Pour cette question, on aura besoin de voir que $n^2 = n \times n = n \times \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Ainsi, $\dfrac{n^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}$.

$u_n = \dfrac{n^2+3n-2}{\sqrt{n}+1} = \dfrac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{n\sqrt{n}\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, pour $n>0$.

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc, par somme, produit et quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(n\sqrt{n}\right) = +\infty}$$

2 $v_n = \sqrt{\dfrac{4n+1}{n+2}} = \sqrt{\dfrac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}} = \sqrt{\dfrac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}$, pour $n>0$.

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ donc, par somme, produit et quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2}$$

3 $w_n = \dfrac{2\sqrt{n}+n-3}{\sqrt{n}+1} = \dfrac{n\left(\frac{2\sqrt{n}}{n}+1-\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, pour $n>0$.

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc, par somme, produit et quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1} = +\infty}$$

Corrigé de l'exercice 1.14 page 16

Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1.$$

Ainsi,

$$n-1 \leqslant n+\cos(n) \leqslant n+1$$

$$\iff \frac{n-1}{n^2} \leqslant \frac{n+\cos(n)}{n^2} \leqslant \frac{n+1}{n^2}$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{n}\right) = 0.$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = 0.$$

Les limites des bornes étant finies et communes, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Corrigé de l'exercice 1.15 page 17

1 Pour tout entier naturel k,

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{\cancel{(k+1)}}{k!\times\cancel{(k+1)}}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}.$$

2 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$

$$=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$=\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{2!}}+\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}+\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n!}}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

3 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)!=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1}$.

Corrigé de l'exercice 1.16 page 17

1 Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(n)}{n+1}$.

Pour tout entier naturel n,

$$-1\leqslant\sin(n)\leqslant 1\iff n^2-1\leqslant n^2+\sin(n)\leqslant n^2+1$$
$$\iff\frac{n^2-1}{n+1}\leqslant\frac{n^2+\sin(n)}{n+1}\leqslant\frac{n^2+1}{n+1}\text{ car }n+1>0.$$

Or, $\frac{n^2-1}{n+1}=\frac{\cancel{n}(n-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc :

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{1}{n}\right)&=+\infty\\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{n+1}=+\infty\text{ (par quotient).}$$

On a :

$$\underbrace{\frac{n^2-1}{n+1}}_{\to+\infty}\leqslant\frac{n^2+\sin(n)}{n+1}$$

donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(n)}{n+1}=+\infty}$$

2 Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n-n^3}{1+n^2}$.

Pour tout entier naturel n,

$$-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1\iff(-1)-n^3\leqslant(-1)^n-n^3\leqslant 1-n^3$$
$$\iff\frac{-1-n^3}{1+n^2}\leqslant\frac{(-1)^n-n^3}{1+n^2}\leqslant\frac{1-n^3}{1+n^2}$$

Or,

$$\frac{1-n^3}{1+n^2}=\frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2}-n\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)}=\frac{\frac{1}{n^2}-n}{\frac{1}{n^2}+1}.$$

De plus,

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-n\right)=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-n}{\frac{1}{n^2}+1}=-\infty \text{ (par quotient).}$$

On a :

$$\frac{(-1)^n-n^3}{1+n^2}\leqslant\underbrace{\frac{1-n^3}{1+n^2}}_{\to-\infty}$$

donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n-n^3}{1+n^2}=-\infty}$$

Remarque 6

Quand on a un encadrement de la forme $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$ et que l'on souhaite déterminer la limite de u_n, il suffit de prendre une partie de cet encadrement quand $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ et/ou $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ est infinie, car le théorème des gendarmes ne fonctionne pas avec une limite infinie.

Corrigé de l'exercice 1.17 page 17

1 $u_n=\dfrac{n+\sin(n)}{n+\cos(n)}=\dfrac{\cancel{n}\left(1+\frac{\sin(n)}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{\cos(n)}{n}\right)}$.

Or, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases}-1\leqslant\sin(n)\leqslant1 & \text{donc } -\frac{1}{n}\leqslant\frac{\sin(n)}{n}\leqslant\frac{1}{n}\\ -1\leqslant\cos(n)\leqslant1 & \text{donc } -\frac{1}{n}\leqslant\frac{\cos(n)}{n}\leqslant\frac{1}{n}\end{cases}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n)}{n}=0$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{1}=1}$$

2 $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\sin^p(a)=\dfrac{1}{n}\left(1+\sin(a)+\sin^2(a)+\cdots+\sin^n(a)\right)=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1-\sin^{n+1}(a)}{1-\sin(a)}$.

En effet, nous pouvons voir la somme :

$$1+\sin(a)+\sin^2(a)+\cdots+\sin^n(a)$$

comme étant la somme :

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

avec $q=\sin(a)$ ($a\neq\dfrac{\pi}{2}\mod 2\pi$ donc $\sin(a)\neq1$).

De plus,

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1 &\Rightarrow -1 \leqslant \sin^{n+1}(a) \leqslant 1 \\
&\Rightarrow -1 \leqslant -\sin^{n+1}(a) \leqslant 1 \\
&\Rightarrow 0 \leqslant 1 - \sin^{n+1}(a) \leqslant 2 \\
&\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1 - \sin^{n+1}(a)}{1 - \sin(a)} \leqslant \frac{2}{1 - \sin(a)} \\
&\Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{1 - \sin(a)}}_{\text{constante}}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{1 - \sin(a)}}_{\text{constante}} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

Corrigé de l'exercice 1.18 page 17

1 On a : $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 3 - u_n$

$$= 2n + 3 > 0$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

2 **a.** Posons $P(n)$ la propriété : $u_n \geqslant n^2$.

- **Initialisation.**
  $u_0 = 1 \geqslant 0$ donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier naturel k positif, $P(k)$ est vraie (H.R.). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geqslant (k+1)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\
&\geqslant k^2 + 2k + 3 \quad \text{(H.R.)} \\
&\geqslant k^2 + 2k + 1 + 2 \\
&\geqslant (k+1)^2 + 2 \\
&\geqslant (k+1)^2
\end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.

- **Conclusion.**
  Quel que soit l'entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
  Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. D'après le théorème de comparaison des suites et d'après la question précédente, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \geqslant \lim_{n \to +\infty} n^2$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

3 Calculons les premiers termes de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1\\
u_1 &= u_0 + 2\times 0 + 3 = 4\\
u_2 &= u_1 + 2\times 1 + 3 = 9\\
u_3 &= u_2 + 2\times 2 + 3 = 16\\
u_4 &= u_3 + 2\times 3 + 3 = 25
\end{aligned}$$

On peut alors conjecturer que $u_n = (n+1)^2$. Montrons cela par récurrence.

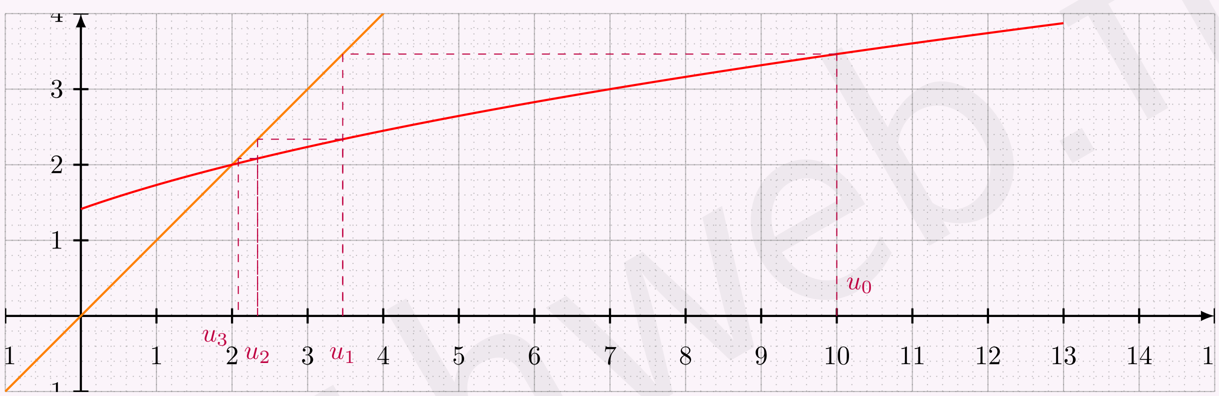
- **Initialisation.**
  Faite précédemment.
- **Hérédité.**
  On suppose que pour un entier naturel k, $u_k = (k+1)^2$ (qui constitue la propriété $P(k)$). Montrons que $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3\\
&= (k+1)^2 + 2k + 3\\
&= k^2 + 4k + 4\\
&= (k+2)^2
\end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
  $P(0)$ est vraie et P est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Corrigé de l'exercice 1.19 page 18

Le fait que $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ nous dit que $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \sqrt{2+x}$. Il faut donc tracer la courbe représentative de la fonction f (en rouge ci-dessous) ainsi que la droite d'équation $y = x$ (en orange ci-dessous) pour transformer les images (en ordonnées) en abscisses.



On peut alors conjecturer que la limite de cette suite est l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite, soit la solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
x = \sqrt{2+x} &\iff x^2 = 2 + x\\
&\iff x^2 - x - 2 = 0 \quad , \quad \Delta = 9\\
&\iff x = 2.
\end{aligned}$$

⚠ Attention 3

Ce n'est qu'une conjecture... On pourra le démontrer à l'aide du théorème du point fixe (voir chapitre sur la continuité).

Corrigé de l'exercice 1.20 page 18

1 On a :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[0\,;2]$.
On en déduit alors :

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$$

Or, $f(1) = \dfrac{3}{2} > 1$ et $f(2) = \dfrac{5}{3} < 2$.
Ainsi,

$$\boxed{x \in [1\,;2] \Rightarrow f(x) \in [1\,;2]}$$

2 Soit $P(n)$ la propriété : $1 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 2$.
Démontrons qu'elle est vraie pour tout entier naturel n par récurrence.

- **Initialisation**.
  $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{2\times 1+1}{1+1} = 1{,}5$ donc $1 \leqslant u_n < u_1 \leqslant 2$.
- **Hérédité**.
  Supposons que $P(k)$ soit vraie, où k est un entier naturel. Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi.
  D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 2 &\Longrightarrow f(1) \leqslant f\left(u_k\right) < f(u_{k+1}) \leqslant f(2) \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant 1{,}5 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant \frac{5}{3} \leqslant 2. \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion**.
  $P(0)$ est vraie et P est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3 De la question précédente, on peut conclure que la suite (u_n) est croissante et bornée, donc majorée. Or, *toute suite croissante et majorée converge.*
Donc (u_n) est convergente.

Corrigé de l'exercice 1.21 page 18

1 On a $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3} = \frac{\frac{u_n+6}{u_n+2} - 2}{\frac{u_n+6}{u_n+2} + 3} = \frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n+2} \times \frac{u_n+2}{u_n+6+3u_n+6} \\ &= \frac{-u_n+2}{4u_n+12} = -\frac{1}{4} \times \frac{u_n-2}{u_n+3} = -\frac{1}{4} v_n\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+3} = -\dfrac{1}{4}$ et de raison $q = -\dfrac{1}{4}$.

2 La suite (v_n) converge vers « 0 » comme suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n-2}{u_n+3} = 0 &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2} \\ &\quad(\text{car } 1 \leqslant u_n \leqslant 2{,}5 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} (u_n+3) \neq \pm\infty) \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.22 page 18

1 $$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-\frac{1}{2}}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{\frac{4u_n-1}{4u_n}-\frac{1}{2}}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{\frac{4u_n-1}{4u_n}-\frac{2u_n}{4u_n}}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{\frac{2u_n-1}{4u_n}}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{4u_n}{2u_n-1}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{2u_n}{u_n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{2\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{u_n-\frac{1}{2}}=2.\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de premier terme $v_0=\dfrac{1}{u_0-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$ et de raison $r=2$.

2 D'après ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ car $r>0$ d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}=+\infty\ ,$$

ce qui signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)=0.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 1.23 page 19

1 On trouve :

- $u_1=-0,5$
- $u_2=0,75$
- $u_3=3,375$
- $u_4=6,6875$
- $u_5=10,34375$
- $u_6=14,171875$
- $u_7=18,0859375$
- $u_8=22,04296875$
- $u_9=26,021484375$

On peut alors conjecturer que (u_n) est strictement croissante à partir de $n=1$.

2 **a.** $$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}-4(n+1)+10\\ &=\frac{1}{2}u_n+2n-1-4n-4+10\\ &=\frac{1}{2}u_n-2n+5\\ &=\frac{1}{2}\left(u_n-4n+10\right)\\ &=\frac{1}{2}v_n\ .\end{aligned}$$

On déduit alors que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=u_0-4\times 0+10=11$.

b. On a alors : $v_n=11\times\dfrac{1}{2^n}$ et donc : $u_n=v_n+4n-10=\dfrac{11}{2^n}+4n-10$.

c. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{11}{2^k}+4k-10\right)$

$$= 11\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+4\sum_{k=0}^{n}k-10\sum_{k=0}^{n}1$$

$$= 11\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)+4\times\frac{n(n+1)}{2}-10(n+1)$$

$$= 22\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+2(n-5)(n+1).$$

Corrigé de l'exercice 1.24 page 19

1 Posons $\mathcal{P}(n) : 4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation.**

  $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 12 = 1 + 12 = 13$.

  On a alors : $4 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 20$.

  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.**

  Supposons que pour un entier k fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

  Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(k) \text{ vraie} &\Rightarrow 4 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 20\\
&\Rightarrow \frac{1}{4}\times 4 \leqslant \frac{1}{4}u_k \leqslant \frac{1}{4}\times u_{k+1} \leqslant \frac{1}{4}\times 20\\
&\Rightarrow 1+12 \leqslant \frac{1}{4}u_k + 12 \leqslant \frac{1}{4}u_{k+1}+12 \leqslant 5+12\\
&\Rightarrow 13 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 17\\
&\Rightarrow 4 \leqslant 13 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 17 \leqslant 20\\
&\Rightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie.}
\end{aligned}$$

- **Conclusion.**

  $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(k)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ vraie donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, à savoir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20.$$

2 D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée (par 20) donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

3 **a.** $v_0 = u_0 - 16 = 4 - 16 = -12$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 16$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}u_n + 12 - 16\\
&= \frac{1}{4}u_n - 4\\
&= \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{4}{\frac{1}{4}}\right)\\
&= \frac{1}{4}(u_n - 16)\\
&= \frac{1}{4}v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

c. On déduit de la question précédente que :

$$v_n = v_0 \times q^n = -12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

et que :

$$u_n = v_n + 16 = 16 - 12 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

d. $0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 16$.

Corrigé de l'exercice 1.25 page 19

1 $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$
$= 0,6u_n + 0,3v_n + 0,4u_n + 0,7v_n$
$= u_n + v_n$
$= a_n$.

Ainsi, (a_n) est constante.

Or, $a_0 = u_0 + v_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ donc $a_n = 1$ pour tout entier naturel n.

2 $b_{n+1} = 4u_{n+1} - 3v_{n+1}$
$= 4(0,6u_n + 0,3v_n) - 3(0,4u_n + 0,7v_n)$
$= 2,4u_n + 1,2v_n - 1,2u_n - 2,1v_n$
$= 1,2u_n - 0,9v_n$
$= 0,3\,(4u_n - 3v_n)$
$= 0,3b_n$.

Ainsi, (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,3$ et de premier terme :

$$\begin{aligned} b_0 &= 4u_0 - 3v_0 \\ &= 4 \times 0,5 - 3 \times 0,5 \\ b_0 &= 0,5. \end{aligned}$$

3 D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{2}(0,3)^n.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases} &\iff \begin{cases} 3a_n = 3u_n + 3v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b_n = 4u_n - 3v_n \\ 3a_n + b_n = 7u_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3v_n = 4\left(\frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n\right) - b_n \\ u_n = \frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v_n = \frac{4}{7}a_n - \frac{1}{7}b_n \\ u_n = \frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v_n = \frac{4}{7} - \frac{1}{14}(0,3)^n \\ u_n = \frac{3}{7} + \frac{1}{14}(0,3)^n \end{cases} \end{aligned}$$

4 $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,3)^n = 0$ car $0 < 0,3 < 1$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \dfrac{3}{7}}$.

Corrigé de l'exercice 1.26 page 20

1 $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, $u_0 = 0,4$.

a.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - u_n^2 - u_n \\ &= -u_n^2 \\ &\leqslant 0 \text{ car un carré est toujours positif ou nul.} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$; la suite (u_n) est donc décroissante.

b.
- **Initialisation.**
  $u_0 = 0,4$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
- **Hérédité.**
  On suppose que pour un entier n donné, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$; de plus, par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et donc :
  $$0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1.$$
  Par produit, $0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant 1$. Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
  L'hérédité est alors vérifiée : $u_n \Rightarrow u_{n+1}$.
- **Conclusion.**
  La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.
  Par conséquent, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c. La suite (u_n)étant décroissante et minorée, donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge.

d. La limite de la suite est la solution de l'équation $f(x) = x$, soit ici :

$$\begin{aligned} x(1 - x) = x &\iff x(1 - x) - x = 0 \\ &\iff x - x^2 - x = 0 \\ &\iff x^2 = 0 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Avec de telles hypothèses, la population de coccinelles tend alors à disparaître.

2 $u_{n+1} = 1,8u_n(1 - u_n)$, $u_0 = 0,3$.

a. $f(x) = 1,8x(1 - x) = 1,8(x - x^2)$ donc $f'(x) = 1,8(1 - 2x)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } f'(x) \geqslant 0 &\iff 1 - 2x \geqslant 0 \\ &\iff 1 \geqslant 2x \\ &\iff x \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De plus, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,8 \times 0,5 \times 0,5 = 0,45 \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$. D'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,45$	$\searrow$	0

b. • **Initialisation.**
$u_0 = 0,3$ et $u_1 = f(0,3) = 1,8 \times 0,3 \times 0,7 = 0,378$.
Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

• **Hérédité.**
Supposons que pour un entier n donné, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \\
\iff\ & f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{car } f \text{ est croissante sur } \left[0\,;\frac{1}{2}\right] \\
\iff\ & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}. \text{ L'hérédité est alors vérifiée.}
\end{aligned}$$

• **Conclusion.**
La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c. De la question précédente, on déduit que (u_n)est croissante $(u_{n+1} \geqslant u_n)$ et majorée (par $\dfrac{1}{2}$) donc elle converge.
Sa limite α vérifie :

$$\begin{aligned}
\alpha = f(\alpha) \iff \alpha = 1,8\alpha(1-\alpha) \iff 1 = 1,8(1-\alpha) \qquad & \text{car } \alpha \neq 0 \\
\iff \frac{1}{1,8} = 1 - \alpha \iff \alpha = 1 - \frac{1}{1,8} & \\
\iff \alpha = \frac{4}{9} \approx 0,444444 &
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{9}$.
On conclut de la question précédente qu'à long terme, la population de coccinelles se rapprochera de 444 444.

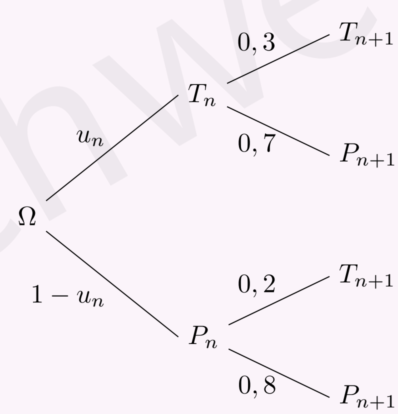
Corrigé de l'exercice 1.27 page 20

1 **a.** T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.
D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.
Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.

b. D'après la formule des probabilités totales :

$p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25 = \dfrac{1}{4}$.

c. L'arbre est le suivant :



d. Toujours d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p\left(T_{n+1}\right) \\ &= p\left(T_n \cap T_{n+1}\right) + p\left(P_n \cap T_{n+1}\right) \\ &= u_n \times 0,3 + \left(1 - u_n\right) \times 0,2 \\ &= 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n \\ &= 0,1u_n + 0,2. \end{aligned}$$

e. La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.
Il semble que u_n ait pour limite $0,222\ldots$.

2 **a.** $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{9} \\ &= 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} \\ &= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$; son premier terme est :

$$v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}.$$

b. On sait que $v_n = v_1\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

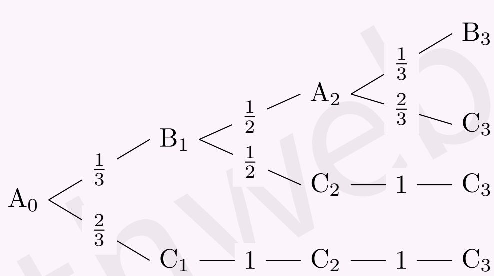
Comme $u_n = v_n + \dfrac{2}{9}$, on a $u_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

c. Comme $0 < \dfrac{1}{10} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{9}$.

Or $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.

Corrigé de l'exercice 1.28 page 21

1 Faisons un bel arbre de probabilités pour nous aider :



a. $a_1 = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\right) = 0$; $b_1 = \dfrac{1}{3}$ et $c_1 = \dfrac{2}{3}$ d'après l'énoncé.
$a_1 + b_1 + c_1 = 1$, ce qui est normal car la somme des probabilités d'événements formant une partition de l'univers est toujours égale à 1.

b. À l'instant $n = 2$, la puce peut se trouver en A ou C car à l'instant $n = 1$, elle se trouve en B ou C uniquement.

On a alors les valeurs de a_2, b_2 et c_2 suivantes.

- $a_2 = \mathrm{P}_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_2) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.
- $b_2 = 0$.
- $c_2 = 1 \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

c. Pour $n = 3$, la puce se trouve en B ou C.

- $a_3 = 0$.
- $b_3 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18}$.
- $c_3 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{17}{18}$.

2 **a.** On s'inspire de ce qui a été fait pour conjecturer que $a_{2k+1} = 0$. En effet, pour les rangs impairs, la puce ne peut pas être en A car pour les rangs pairs, elle se trouve en A ou C.

b. $b_{2k+1} = \mathrm{P}_{\mathrm{A}_{2k}}(\mathrm{B}_{2k+1}) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}_{2k}) = \dfrac{1}{3}a_{2k}$.

$a_{2k+2} = \mathrm{P}_{\mathrm{B}_{2k+1}}(\mathrm{A}_{2k+2}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}_{2k+1}) = \dfrac{1}{2}b_{2k+1}$.

c. De la question précédente, on déduit : $a_{2k+2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}a_{2k} = \dfrac{1}{6}a_{2k}$.

Donc : $$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{6}a_{2(k-1)} = \frac{1}{6^2}a_{2(k-2)} = \frac{1}{6^3}a_{2(k-3)} = \cdots \\ &= \frac{1}{6^k}a_{2(k-k)} = \frac{1}{6^k}a_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{a_{2k} = \frac{1}{6^k}} \quad \text{car } a_0 = 1.$$

3 $$\begin{aligned} a_n \leqslant 10^{-6} &\Rightarrow a_{2k} \leqslant 10^{-6} \\ &\Rightarrow \frac{1}{6^k} \leqslant 10^{-6} \\ &\Rightarrow \ln\frac{1}{6^k} \leqslant \ln 10^{-6} \\ &\Rightarrow k\ln\frac{1}{6} \leqslant -6\ln 10 \\ &\Rightarrow k \geqslant \frac{-6\ln 10}{-\ln 6} \\ &\Rightarrow k \geqslant 8 \Rightarrow n \geqslant 2 \times 8 = 16. \end{aligned}$$

Le plus petit entier N tel que $a_N \leqslant 10^{-6}$ est donc $N = 16$.

4 $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{6^k} = 0$.
Donc (a_n) converge vers 0.

Corrigé de l'exercice 1.29 page 22

1 La fonction Python complétée est la suivante :

Code Python 1-7

```python
def heron(a,u,n):
    if u <=0:
        return "Le premier terme doit être strictement positif."
    elif a <= 0:
        return "La valeur de 'a' doit être strictement positive."
    else:
        L = [ u ]
        k = 0
        while k < n:
            u = 0.5 * (u + a / u)
            L.append(u)
            k = k + 1
        return L
```

2 On peut constater :

- d'une part que la suite $(u(4)_n)$ semble être décroissante ;
- d'autre part, que la suite $(u(4)_n)$ semble converger vers 2.

3 On a : $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{x^2}\right) = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$.
$x^2 - a$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, d'où le tableau page suivante.

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	

4 D'après les variations de f, si $x \in [0\,;\sqrt{a}[$ alors $f(x) \geqslant \sqrt{a}$.
Or, $u_1 = f(u_0)$ donc si $u0 \in]0\,;\sqrt{a}]$ alors $u_1 \geqslant \sqrt{a}$.
De plus, si $u_0 \geqslant \sqrt{a}$, d'après les variations de f, $f(u_0) \geqslant \sqrt{a}$.
Ainsi, quelle que soit la valeur de $u_0 > 0$, $u_1 \geqslant \sqrt{a}$.

5 Montrer que pour tout réel $x \geqslant \sqrt{a}$, $f(x) \leqslant x$.
Considérons alors la fonction $g(x) = f(x) - x$:

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - x\right).$$

Sa dérivée est alors :

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{x^2} - 1\right)$$

donc $g'(x) < 0$ sur $[\sqrt{a}\,;+\infty[$, ce qui signifie que g est strictement décroissante sur $[\sqrt{a}\,;+\infty[$.
De plus, $g(\sqrt{a}) = 0$ donc $g(x) \leqslant 0$ sur $[\sqrt{a}\,;+\infty[$. On a alors $f(x) - x \leqslant 0$, soit $f(x) \leqslant x$.

6 Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation.**
  $u_1 > \sqrt{a}$ et $u_2 = f(u_1) \leqslant u_1$ d'après la question précédente.
  On a donc bien $\sqrt{a} \leqslant u_2 \leqslant u_1$.
  L'initialisation est alors réalisée.

- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier $k > 1$, $\sqrt{a} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$.
  D'après la question 3., f est strictement croissante sur $]\sqrt{a}\,;+\infty[$ donc :
  $$f(\sqrt{a}) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k)$$
  soit :
  $$\sqrt{a} \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}.$$
  L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
  La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, donc $\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

7 La suite (u_n) est, d'après la question précédente, décroissante et minorée. Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge.

8 On admet que $\ell = f(\ell)$, soit $f(\ell) - \ell = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} g(\ell) = 0 &\iff \frac{a}{\ell} - \ell = 0 \\ &\iff a - \ell^2 = 0 \\ &\iff \ell = -\sqrt{a} \text{ ou } \ell = \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Or, $\ell > 0$ car $u_n > 0$. Donc $\ell = \sqrt{a}$.
Ainsi, la limite de (u_n) est égale $\sqrt{a}$.

Corrigé de l'exercice 1.30 page 23

1 **a.** $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$.
$v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

b. Pour tout entier naturel$n$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2u_n + v_n - v_n \\ &= 2u_n \\ &> 0 \text{ par hypothèses de départ.} \end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} > v_n$ pour tout entier n ; la suite (v_n) est donc strictement croissante.

Or, $v_0 = 1$ donc pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.

c.
- **Initialisation.**
  $u_0 = 1 \geqslant 0 + 1$. L'inégalité est donc vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier k fixé, $u_k \geqslant k + 1$ (HR).
  $$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + v_k \\ &\geqslant (k+1) + 1 \text{ par (HR) et car } v_n \geqslant 1. \end{aligned}$$
  L'hérédité est alors démontrée.
- **Conclusion.**
  La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, donc $u_n \geqslant n + 1$.

d. $u_n \geqslant n + 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2 **a.** On sait que pour tout entier naturel n,

$$-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$$

donc, en divisant par $u_n^2 > 0$:

$$\boxed{-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}}$$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{u_n^2}\right) = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes (théorème d'encadrement), on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0}$$

c. D'après la question précédente, par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n^2 = 2 + 0$$

donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = \sqrt{2}}$$

d. Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{2 + r_n}{1 + r_n} &= \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} \\ &= \frac{\frac{2u_n + v_n}{u_n}}{\frac{u_n + v_n}{u_n}} \\ &= \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}}$$

e. La valeur de n renvoyée par le programme correspond à la première valeur de n pour laquelle :

$$|\, r - \sqrt{2}\, | \leqslant 10^{-4}.$$

Cela signifie que r_5 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

Corrigé de l'exercice 1.31 page 24

1 $v_n = \dfrac{n}{2+\cos(n)}$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 &\iff 2-1 \leqslant 2+\cos(n) \leqslant 2+1\\
&\iff 1 \leqslant 2+\cos(n) \leqslant 3\\
&\iff \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\cos(n)} \leqslant 1\\
&\iff \frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2+\cos(n)} \leqslant n \quad (n \geqslant 0).
\end{aligned}$$

Ainsi, $v_n \geqslant \dfrac{n}{3}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{3}\right) = +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = +\infty$.

L'affirmation est donc vraie.

2 $$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1+5^n}{2+3^n}\\
&= \frac{5^n\left(1+\dfrac{1}{5^n}\right)}{3^n\left(1+\dfrac{2}{3^n}\right)}\\
&= \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{1+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1+2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}.
\end{aligned}$$

De plus,

- $\dfrac{5}{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$;
- $0 < \dfrac{1}{5} < 1$ et $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Ainsi, par somme, produit et quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$.

L'affirmation est donc fausse.

3 $u_n = 1 + \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{3}{4}} = 4\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$.

Or, $0 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 4 \times (1-0) = 4$.

L'affirmation est donc fausse.

4 Dans le programme donné, la première valeur de `i` est 0 (car cette variable varie de 0 à $k-1$).
Ainsi, lors du premier passage dans la boucle, S devient $S + (3/4)^0 = 0 + 1 = 1$; c'est le terme u_0.
Lors du deuxième passage dans la boucle, S devient $S + (3/4)^1 = 1 + 3/4 = u_1$.
Mais la dernière valeur de `i` étant $k-1$, la variable `S` contiendra $1 + (3/4) + \cdots + (3/4)^{k-1} = u_{k-1}$.
Donc l'instruction `suite(50)` renvoie u_{49}.

L'affirmation est donc fausse.

5 Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

Elle est bien minorée par 0 car $u_n > 1$, donc $u_n > 0$.

De plus, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ donc (u_n) est décroissante.

Cependant, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 1$, ce qui contredit l'affirmation.

L'affirmation est donc fausse.

Corrigé de l'exercice 1.32 page 25

1 $$\begin{aligned}\frac{-9^n+3^n}{7^n} &= \frac{9^n\left(-1+\dfrac{3^n}{9^n}\right)}{7^n}\\ &= \left(\frac{9}{7}\right)^n \times \left(-1+\left(\frac{3}{9}\right)^n\right)\\ &= \left(\frac{9}{7}\right)^n \times \left(-1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Or,

- $\dfrac{9}{7} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{7}\right)^n = +\infty$;
- $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Ainsi, par somme et produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-9^n+3^n}{7^n}\right) = -\infty$.

Or, $u_n \leqslant \dfrac{-9^n+3^n}{7^n}$ donc, d'après le théorème de majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = -\infty$.

L'affirmation est donc vraie.

2 La variable `i` prend ses valeurs entre 0 et 3 inclus. Donc l'instruction `U = U+i` donnera :

- Avant d'entrer dans la boucle, $U = 1$;
- Pour $i = 0$, $U = U + i = 1 + 0 = 1$;
- Pour $i = 1$, $U = U + i = 1 + 1 = 2$;
- Pour $i = 2$, $U = 2 + i = 2 + 2 = 4$;
- Pour $i = 3$, $U = 4 + i = 4 + 3 = 7$.

L'affirmation est donc vraie.

3 $$\begin{aligned}\frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} &= \frac{n^2\left(3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\dfrac{1}{n^2}\right)}\\ &= \frac{3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{6+\dfrac{1}{n^2}}.\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel $k > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^k}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{6+\dfrac{1}{n^2}}\right) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

De plus, $\dfrac{1}{2} < u_n \leqslant \dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \dfrac{1}{2}$.

L'affirmation est donc vraie.

4 **a.** Posons $u_n = -1 - \dfrac{1}{n}$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Alors,

- pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = -1$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n) = 1$.

Cependant, (v_n) n'a pas de limite.

L'affirmation est donc fausse.

b. (u_n) est croissante donc, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n$.
(w_n) est décroissante donc, pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant w_0$.
On a alors :

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0.$$

L'affirmation est donc vraie.

5 $$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4 \iff \frac{3n-4}{n} \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant \frac{3n+4}{n}$$
$$\iff 3 - \frac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{4}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc u_n est encadré par deux termes de limite égale à 3.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 3.

L'affirmation est donc vraie.

Corrigé de l'exercice 1.33 page 26

1 Le calcul des 2 ou 3 premiers termes de la suite laisse à penser que l'affirmation est vraie. On peut alors tenter de démontrer cela par récurrence.

- **Initialisation.**
  Pour $n = 1$, $\dfrac{n+1}{n} = 2 = u_1$ donc l'égalité est vraie.
- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier $k \geqslant 1$ fixé, $v_k = \dfrac{k+1}{k}$.
  Alors, d'après la relation de récurrence de (v_n),

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= 2 - \frac{1}{v_k} \\ &= 2 - \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{2(k+1) - k}{k+1} \\ &= \frac{k+2}{k+1} \\ &= \frac{(k+1)+1}{(k+1)}. \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
  L'égalité est vraie pour tout entier naturel n, et donc **l'affirmation est vraie.**

2 Le programme renvoie la première valeur de n pour laquelle le terme u_n la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 1,05u_n + 3 \end{cases}$$

est supérieur ou égal à 100.
On peut utiliser le tableur de la calculatrice pour calculer les premiers termes de cette suite et regarder le premier indice pour lequel $u_n \geqslant 100$. Ce tableau de valeurs donne :

n	u_n
1	10.350000000000001
2	13.867500000000001
3	17.560875000000003
4	21.438918750000003
5	25.510864687500003
6	29.786407921875004
7	34.275728317968756
8	38.989514733867196
9	43.938990470560555
10	49.13593999408858
11	54.59273699379301
12	60.322373843482666
13	66.3384925356568
14	72.65541716243965
15	79.28818802056163
16	86.25259742158971
17	93.5652272926692
18	101.24348865730268

On voit alors que le premier terme tel que $u_n \geqslant 100$ est u_{18}.
L'affirmation est donc vraie.

3 Posons (P_n) : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Montrons qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

- **Initialisation.**
  $u_0 = 10$ et $u_1 = \dfrac{1}{3} \times 10 + 2 = \dfrac{16}{3} \approx 5,33$.
  Alors, $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. (P_0) est alors vraie.
- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier $k \geqslant 0$ fixé, $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k &\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{3}u_{k+1} \leqslant \frac{1}{3}u_k \quad \text{car } \frac{1}{3} > 0 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{3}u_{k+1} + 2 \leqslant \frac{1}{3}u_k + 2 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}. \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
  (P_0) est vraie et la propriété est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, (P_n) est vraie pour tout entier naturel n.

L'affirmation est donc vraie.

Corrigé de l'exercice 1.34 page 26

Partie A : conjecture

1 Le tableau complété est le suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2 En dressant un tableau de valeurs de la suite (u_n), on constate qu'elle semble décroissante et que ses termes semblent se rapprocher de 0.

Partie B : étude d'une suite auxiliaire

1 $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2 Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{(définition de } w \text{ au rang } n+1\text{)} \\
&= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\
&= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{(relation de récurrence de } (u_n)\text{).} \\
&= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\
&= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\
&= \frac{1}{2}w_n \quad \text{(définition de } w \text{ au rang } n\text{).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cela prouve que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3 La suite (w_n) est géométrique, donc d'après le cours :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n &= w_0 \times q^n \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

4 Soit n un entier naturel. D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned}
w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \\
&\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n.
\end{aligned}$$

5 Pour tout n entier naturel, posons :

$$P_n \quad : \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- **Initialisation :** $u_0 = 0$ et $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.
  P_0 est donc vraie.
- **Hérédité :** pour un entier naturel k donné, on suppose que la propriété P_k est vraie, c'est-à-dire : $u_k = k\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2}u_k \quad \text{(relation de récurrence de la question B. 4)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2} \times k\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times (1+k) \\ u_{k+1} &= (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

  Ainsi, l'hérédité est vérifiée.
- **Conclusion :** P_0 est vraie, et, pour un entier naturel k fixé, $P_k$vraie $\Rightarrow P_{k+1}$ vraie. Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Partie C : étude de la suite (u_n)

1 Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{(question B. 5.)} \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \left((n+1) - 2n\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n). \end{aligned}$$

Or,

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement ;
- $(1-n) \leqslant 0$ car $n \geqslant 1$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. On en déduit alors que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2 L'expression de u_n permet de dire que la suite (u_n) est minorée par 0, car pour tout entier naturel n, $n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$.

De plus, la suite est décroissante à partir du rang $n = 1$ d'après la question précédente.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0. Ainsi, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

3 On admet ici que la limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \dfrac{1}{4}\ell$.
Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} \ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\ &\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\ &\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

2 Limites de fonctions

Dans ce chapitre

1 Limite aux infinis

1 Définition

Définition 7

La limite d'une fonction f en $-\infty$ (resp. $+\infty$) est la valeur (si elle existe) vers laquelle se rapproche $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$). On la note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$).
Cette limite, quand elle existe, peut être un nombre réel ou un infini.

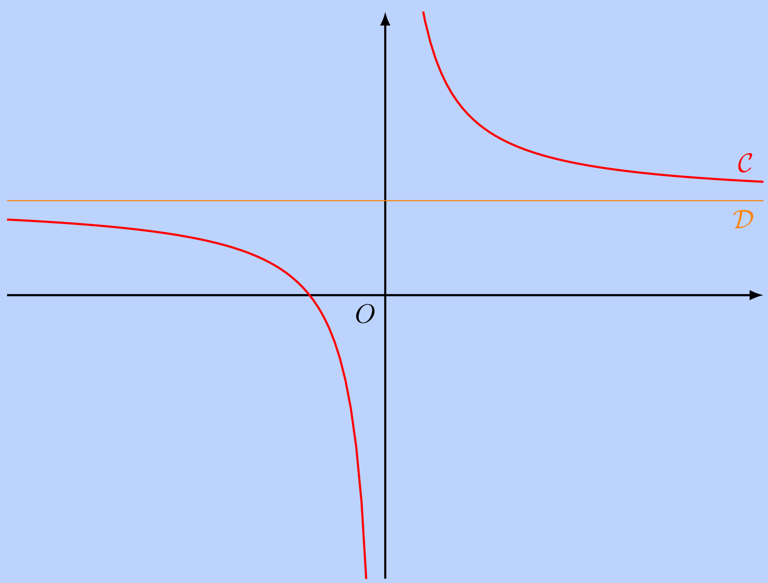
Exemple 14

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ car plus x se rapproche de $-\infty$, plus $\dfrac{1}{x}$ se rapproche de 0.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2\right) = +\infty$ car plus x devient grand, plus son carré aussi.

2 Asymptote horizontale

Propriété 10 (asymptote horizontale)

Soit a un réel. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $y = a$ en $-\infty$ (resp. $+\infty$).
Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une *asymptote horizontale* de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3 Limite aux infinis d'une fraction rationnelle

Propriété 11 (fractions rationnelles)

La limite aux infinis d'une fraction rationnelle est égale à la limite du rapport des termes de plus haut degré.

Exemple 15

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+5x+2}{8x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{8x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{3}{8}.$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2-3x+1}{-x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x)=-\infty.$

4 Limites et croissances comparées de l'exponentielle

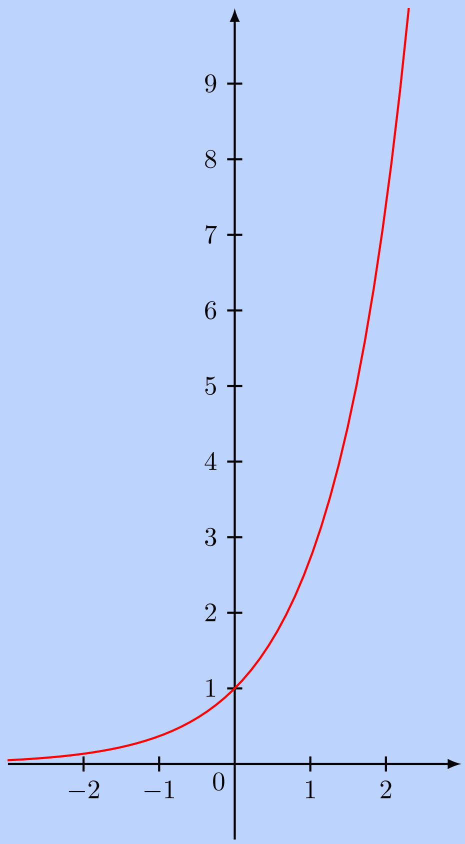
Propriété 12 (croissances comparées de l'exponentielle)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)=+\infty.$$

Croissances comparées :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\mathrm{e}^x\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)=+\infty$$



2 Limite en un nombre fini

1 Définition

Définition 8

Soit a un réel fini. La limite d'une fonction f en a est la valeur vers laquelle $f(x)$ se rapproche quand x se rapproche de a. On la note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Remarque 7 (limites à droite et à gauche)

Il se peut que, lorsque x se rapproche de a tout en lui étant inférieur, la limite soit différente du cas où x se rapproche de a en lui étant supérieur. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x).$$

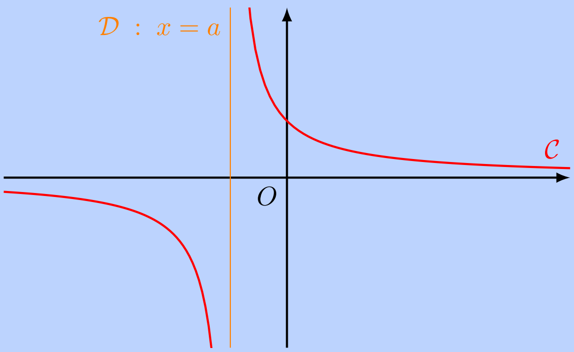
Exemple 16

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

2 Asymptote verticale

Propriété 13 (asymptote verticale)

Soit a un réel. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $x = a$.
Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}$ en a.

Propriété 14

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\dfrac{1}{x^{2n}}\right) = +\infty,\ n \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x^{n}}\right) = +\infty,\ n \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right) = -\infty,\ n \in \mathbb{N}$.

3 Opération sur les limites

1 Propriété générale

Propriété 15

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\lim_{x\to A} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to A} g(x) = \ell'$$

où A peut désigner un nombre réel ou un infini. Alors,

- $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}^*,\ \lim_{x\to A} \left[\lambda f(x)\right] = \lambda \times \ell$.
- Si $\ell' \neq -\infty,\ \lim_{x\to A} \big(f(x)+g(x)\big) = \ell + \ell'$.
- Si $\ell \neq 0$,
  - → Si $\ell' \neq 0,\ \lim_{x\to A} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.
  - → Si $\ell' = 0,\ \lim_{x\to A} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \pm\infty$.
- Si $\ell \neq 0$ et $\ell' \neq \pm\infty,\ \lim_{x\to A} \left[f(x)\times g(x)\right] = \ell \times \ell'$.

Exemple 17

- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -3$ alors,
  - → $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)+g(x)\right] = 2 + (-3) = -1$.
  - → $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)\times g(x)\right] = 2 \times (-3) = -6$.
  - → $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$.
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors,
  - → $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)+g(x)\right] = $ « $-2+(+\infty)$ » $= +\infty$.
  - → $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)\times g(x)\right] = $ « $-2\times(+\infty)$ » $= -\infty$.
  - → $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = $ « $\dfrac{-2}{+\infty}$ » $= 0$.

2 Formes indéterminées

Propriété 16

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\lim_{x\to A} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to A} g(x) = \ell'$$

où A peut désigner un nombre réel ou un infini. Alors,

- Si $\ell = +\infty$ et $\ell' = -\infty$ alors $\lim_{x\to A} \left[f(x)+g(x)\right]$ est une *forme indéterminée* du type « $\infty - \infty$ » : on ne peut pas la calculer directement.
- Si $\ell = \pm\infty$ et $\ell' = \pm\infty$ alors $\lim_{x\to A} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ est une *forme indéterminée* du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
- Si $\ell = 0$ et $\ell' = \pm\infty$ alors $\lim_{x\to A} \left[f(x)\times g(x)\right]$ est une *forme indéterminée* du type « $0 \times \infty$ ».
- Si $\ell = \ell' = 0$ alors $\lim_{x\to A} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ est une *forme indéterminée* du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

4 Composition et comparaison

1 Composition de deux fonctions

Propriété 17 (composition)

Soient u et v deux fonctions. On définit la fonction f par $f(x) = u\big[v(x)\big]$. Alors,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{X\to y} u(X) \quad , \quad \text{où } y = \lim_{x\to\alpha} v(x),$$

α pouvant représenter un nombre fini ou un infini.

Remarque 8

On peut aussi noter :

$$f(x) = u\big[v(x)\big] = (u \circ v)(x)$$

(lire « u rond v »). On dit que f est une *fonction composée.*

Exemple 18

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2 Théorème de comparaison

Théorème 4 (théorème de comparaison)

Soient f et g deux fonctions.

- **Théorème de minoration :**

$$\begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, x > A,\ g(x) \geqslant f(x) \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

- **Théorème de majoration :**

$$\begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, x > A,\ g(x) \leqslant f(x) \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Exemple 19

- Soit g une fonction telle que, pour tout réel x, $g(x) \geqslant x+1$.
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- Soit g une fonction telle que, pour tout réel x, $g(x) \leqslant -\sqrt{x}$
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-\sqrt{x}\right) = -\infty$ donc, d'après le théorème de majoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Remarque 9

Le théorème de comparaison est aussi valable lorsque x tend vers $-\infty$:

- $\begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, x < A,\ g(x) \geqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \implies \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$
- $\begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, x < A,\ g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \implies \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$

3 Théorème d'encadrement (des gendarmes)

Théorème 5 (théorème d'encadrement)

On considère trois fonctions u, v et f et un réel ℓ.

$$\begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, x > A,\ u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell \end{cases} \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Exemple 20

Soit f une fonction telle que, pour tout réel x,

$$\frac{-x}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{x^2+1}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

2 Exercices types

Exercice type 5 ▶ limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 1}{4x^2 + x + 1}.$$

Déterminer sa limite en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

D'après la propriété de la limite aux infinis des fractions rationnelles,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x - 1}{4x^2 + x + 1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2}{4x^2} \right) = \frac{3}{4}.$$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{3}{4}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice type 6 ▶ limite d'une fonction avec racine carrée

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1} \right)$.

Posons $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$.

⚠ Attention 4

$f(x)$ n'est pas une fraction rationnelle car elle comporte une racine carrée.

- On constate une forme indéterminée.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty \text{ (par somme des limites)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} [f(x)] \text{ est une forme indéterminée du type « } \frac{\infty}{\infty} \text{ ».}$$

- On lève l'indétermination en factorisant par le terme dominant au numérateur et au dénominateur.

$$f(x) = \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \text{ (ne pas oublier que } \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\cancel{\sqrt{x}} \times 1}{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}} \text{)}$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} \right) = 0$. Donc, par somme, produit et quotient des limites,

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

Exercice type 7 ▶ limite d'une fraction rationnelle en un point

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 1}.$$

Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left[f(x)\right]$, et interpréter graphiquement ce résultat.

- $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 5x + 1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 1 = 3 - 5 + 1 = -1.$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x - 1) = 0^+$ (en effet, si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$).

Ainsi, par quotient,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left[f(x)\right] = -\infty.$$

En effet, en termes de limites, « $\dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ » (on utilise la règle des signes « $-$ par $+$ donne $-$ » et on sait qu'une constante sur une expression qui tend vers 0 donne un infini).

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f admet une asymptote (verticale) d'équation $x = 1$.

Exercice type 8 ▶ limite d'une composée de fonctions

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{-x-1}{\sqrt{x}+1}}\right)$.

- On calcule avant tout la limite de $\dfrac{-x-1}{\sqrt{x}+1}$.

$$\frac{-x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x\left(-1 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}\left(-1 - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(-1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x}\left(-1 - \dfrac{1}{x}\right)\right] = -\infty.$
  De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1.$
  Ainsi, par quotient des limites,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x-1}{\sqrt{x}+1}\right) = -\infty.$$

- On calcule maintenant la limite de la composée.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-x-1}{\sqrt{x}+1}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \left(\mathrm{e}^X\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{-x-1}{\sqrt{x}+1}}\right) = 0.$$

Exercice type 9 ▶ théorème des gendarmes

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + \sin(x)}{x^2} \right)$.

Methode 1

Dès qu'il y a un sinus ou un cosinus dans une expression où il est demandé de déterminer une limite à un infini, il faut toujours partir de l'encadrement « $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ », et on construit petit à petit l'expression demandée.

L'objectif est d'encadrer l'expression par deux expressions dont on peut facilement trouver la limite.

On nous demande ici la limite en $+\infty$, donc on va prendre $x > 0$:

$$\begin{aligned} \forall\, x > 0, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 &\iff x - 1 \leqslant x + \sin(x) \leqslant x + 1 \\ &\iff \frac{x-1}{x^2} \leqslant \frac{x + \sin(x)}{x^2} \leqslant \frac{x+1}{x^2}. \end{aligned}$$

Or, d'après la propriété sur la limite aux infinis des fractions rationnelles,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

De même,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2} \right) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + \sin(x)}{x^2} \right) = 0.$$

Exercice type 10 ▶ théorème de comparaison

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + \sin(x)}{x} \right)$.

L'objectif est d'encadrer l'expression par deux expressions dont on peut facilement trouver la limite.

On nous demande ici la limite en $+\infty$, donc on va prendre $x > 0$:

$$\begin{aligned} \forall\, x > 0, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 &\iff x^2 - 1 \leqslant x^2 + \sin(x) \leqslant x^2 + 1 \\ &\iff \frac{x^2-1}{x} \leqslant \frac{x^2 + \sin(x)}{x} \leqslant \frac{x^2+1}{x}. \end{aligned}$$

Or, d'après la propriété sur la limite aux infinis des fractions rationnelles,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty.$$

Nous allons retenir uniquement la partie gauche de l'encadrement :

$$\frac{x^2-1}{x} \leqslant \frac{x^2 + \sin(x)}{x}.$$

Ainsi, d'après le théorème de minoration,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + \sin(x)}{x} \right) = +\infty.$$

2 Exercices

Limites à l'infini

Exercice 2.1 (fractions rationnelles)

Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3-x}{4+x}\right)$

2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}\right)$

3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2+5x-7}{x^2+3x-1}\right)$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4x^2+7x-9}{x-1}\right)$

Solution page 72

Exercice 2.2 (limites diverses : polynômes et composition)

Calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$.

1 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

2 $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3 $h(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$

4 $k(x) = \dfrac{x^2+1}{\sin \frac{1}{x}}$

Solution page 73

Exercice 2.3 (asymptote)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x+1}{x-5}.$$

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet deux asymptotes dont on donnera une équation.

Solution page 74

Exercice 2.4 (théorèmes de comparaison et des gendarmes)

À l'aide du théorème de comparaison ou du théorème de gendarmes, calculer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1-\sin x}{x^2}\right)$

2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\cos(x)\mathrm{e}^x\right]$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sin x)$

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x+3}{x-7\sin x}\right)$

Solution page 74

Exercice 2.5 (expressions conjuguées)

À l'aide d'une expression conjuguée, déterminer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)$

Solution page 76

Exercice 2.6 (limites diverses)

Calculer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1}\right)$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}\right)$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+1}\right)$

Solution page 78

Exercice 2.7 (limites d'une fonction)

Soit $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.
Déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Solution page 79

Exercice 2.8 (avec une exponentielle)

Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{7+2x}\right)$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{3x-2}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x+5)\mathrm{e}^{2x}\right)$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{-x}\right)$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(3-\sqrt{x})\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right]$

Solution page 79

Limites en un nombre fini

Exercice 2.9 (fractions rationnelles)

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \left(\dfrac{3x-5}{x-2}\right)$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \left(\dfrac{x-9}{x-3}\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} \left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-9x-5}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+8x-9}\right)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\dfrac{3x-5}{x^2+2x-8}\right)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \left(\dfrac{2x^2+3x+1}{-5x^2-x+4}\right)$

Solution page 81

Exercice 2.10 (avec une exponentielle)

Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\dfrac{2\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^{x-1}-1}\right)$.

Solution page 83

Exercice 2.11 (méthodes diverses)

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2}\right)$

Solution page 83

Exercice 2.12 (pour les cracks)

On pose :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}}}{x}.$$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Solution page 84

Exercice 2.13 (pour les cracks)

On pose :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}-\sqrt{7}}{x-2}.$$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Solution page 84

Objectif bac

Remarque 13

Les calculs de limites de fonctions sont très souvent simples au baccalauréat.

Exercice 2.14 (Métropole, juin 2025, sujet 1)

Calculer la limite de la fonction $f(t) = \dfrac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t}+1}$ en $+\infty$.

Solution page 85

Exercice 2.15 (Métropole, juin 2025, sujet 2)

Soit v la fonction définie par :

$$v(t) = 12\mathrm{e}^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}}.$$

Calculer la limite de $v(t)$ en $+\infty$.

Solution page 85

Exercice 2.16 (Afrique du sud, juin 2025, sujet 1)

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.
On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}.$$

Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution page 86

Exercice 2.17 (Amérique du sud, novembre 2025, sujet 1)

Pour tout réel x, on pose $f(x) = (6x^2+2x-2)\mathrm{e}^{-5x+1}$.
Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

Solution page 86

Exercice 2.18 (Centres étrangers, juin 2024, sujet 2)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en 1 et en déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

Solution page 86

Exercice 2.19 (Centres étrangers – Suède, juin 2024, jour 1 *bis*)

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(t) = 10t\mathrm{e}^{-0,01t} + 20.$$

Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Solution page 87

2 Corrigés

Corrigé de l'exercice 2.1 page 68

Attention 7

Dans mon cours, j'ai inséré la propriété 3 (limites aux infinis des fractions rationnelles), mais beaucoup d'enseignants ne l'utilisent pas et préfèrent passer par la méthode générale consistant à factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré. C'est ainsi que je vais corriger toutes les questions portant sur les limites de fractions rationnelles pour aider au mieux les élèves.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3-x}{4+x}\right)$. Pour $x>0$ (car on regarde la limite en $+\infty$) :

$$\frac{3-x}{4+x}=\frac{x\left(\frac{3}{x}-1\right)}{x\left(\frac{4}{x}+1\right)}=\frac{\frac{3}{x}-1}{\frac{4}{x}+1}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}-1\right)=-1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x}+1\right)=1$.

Ainsi, par quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-x}{4+x}\right)=-1}$$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}\right)$. Pour $x>0$ (car on regarde la limite en $+\infty$) :

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2+1}=\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}.$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$.

Ainsi, par quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{2x^2+1}\right)=\frac{1}{2}}$$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+5x-7}{x^2+3x-1}\right)$. Pour $x<0$ (car on regarde la limite en $-\infty$) :

$$\frac{x^2+5x-7}{x^2+3x-1}=\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^2}\right)=1$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$.

Ainsi, par quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5x-7}{x^2+3x-1}\right)=1}$$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2+7x-9}{x-1}\right)$. Pour $x<0$ (car on regarde la limite en $-\infty$) :

$$\frac{4x^2+7x-9}{x-1}=\frac{x^2\left(4+\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{x\left(4+\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{1-\frac{1}{x}}.$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(4+\dfrac{7}{x}-\dfrac{9}{x^2}\right)=-\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Ainsi, par quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+7x-9}{x-1}\right)=-\infty}$$

Corrigé de l'exercice 2.2 page 68

1 $$\begin{aligned}f(x)&=x^3+4x^2-5x+1\\&=x^3\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$ donc par produit des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

2 $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{X\to0}\left(\sin X\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0}$$

3 $$\begin{aligned}h(x)&=\sqrt{x^2+2x+3}\\&=\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\\&=x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\quad\text{pour } x>0\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=1$.

Ainsi, par produit des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$

4

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+}\big(\sin(X)\big)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ par quotient des limites, } \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=+\infty}$$

Corrigé de l'exercice 2.3 page 68

- *Existence d'une asymptote horizontale.*
  Pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{-3x+1}{x-5}\\&=\frac{\cancel{x}\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{5}{x}\right)}\\&=\frac{-3+\frac{1}{x}}{1-\frac{5}{x}}.\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$. Ainsi, par quotient des limites :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-3.$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=-3$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque 14

Il en est de même au voisinage de $-\infty$ car la limite de f est la même en $-\infty$.

- *Existence d'une asymptote verticale.*
  La fraction rationnelle possède une valeur interdite ($x=5$). On calcule alors la limite de $f(x)$ en $x=5$ (par valeurs supérieures ici).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5}(-3x+1)=-3\times 5+1=-14<0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}}(x-5)=0^+ \text{ car } x>5 \iff x-5>0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{(par quotient)} \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}}\left(\frac{-3x+1}{x-5}\right)=\lim\limits_{X\to 0^+}\left(\frac{-14}{X}\right)=-\infty.$$

Ainsi, la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x=5$.

Remarque 15

Inutile de déterminer la limite de $f(x)$ en 5 par valeurs inférieures car le résultat obtenu est suffisant pour prouver l'existence d'une asymptote verticale.

Corrigé de l'exercice 2.4 page 68

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\sin x}{x^2}\right)$.

Pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned}-1\leqslant \sin x\leqslant 1 &\iff -1\leqslant -\sin x\leqslant 1\\&\iff 0\leqslant 1-\sin x\leqslant 2\\&\iff 0\leqslant \frac{1-\sin x}{x^2}\leqslant\frac{2}{x^2}.\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right)=0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\sin x}{x^2}\right)=0}$$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\cos(x)\mathrm{e}^x\right]$.
Pour tout réel x,

$$-1\leqslant\cos x\leqslant 1 \iff -\mathrm{e}^x\leqslant\cos(x)\mathrm{e}^x\leqslant\mathrm{e}^x.$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\cos(x)\mathrm{e}^x\right)=0}$$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\sin x)$. Pour tout réel x,

$$-1\leqslant-\sin x\leqslant 1 \iff \color{red}{x^2-1\leqslant x^2-\sin x}\leqslant x^2+1$$

En tenant compte de la partie gauche de l'encadrement (en rouge), d'après le théorème de minoration,

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^2-\sin x)=+\infty}$$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+3}{x-7\sin x}\right)$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+,\qquad -1\leqslant\sin x\leqslant 1 &\iff -7\leqslant-7\sin x\leqslant 7\\ &\iff x-7\leqslant x-7\sin x\leqslant x+7\\ &\iff \frac{1}{x+7}\leqslant\frac{1}{x-7\sin x}\leqslant\frac{1}{x-7}\\ &\iff \frac{4x+3}{x+7}\leqslant\frac{4x+3}{x-7\sin x}\leqslant\frac{4x+3}{x-7}\end{aligned}$$

(on a multiplié par $4x+3>0$ donc on ne change pas le sens des inégalités)

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+3}{x+7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x}{x}\right)=4$.
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+3}{x-7}\right)=4$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{x-7\sin x}\right)=4}$$

Corrigé de l'exercice 2.5 page 69

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1} &= \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{x+2-(x-1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(par somme des limites)} \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)=+\infty.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{3}{X}\right)=0$.

On en déduit alors que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)=0}$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\ &= \frac{x^2+3x+1-(2x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\ &= \frac{-x^2+2x}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\ &= \frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}\\ &= \frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}},\ \text{pour } x>0\\ &= \frac{\cancel{x}\times x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]},\ \text{pour } x>0\\ &= \frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}},\ \text{pour } x>0\end{aligned}$$

On sait que pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(-1+\dfrac{2}{x}\right)\right]=-\infty$ (par produit des limites) ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1+\sqrt{2}>0$.

Donc, par quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)=-\infty}$$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3} &= \frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\
&= \frac{3-x-x^2+3}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\
&= \frac{-x^2-x+6}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\
&= \frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\\
&= \frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\left[\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right]}\\
&= \frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right]}, \quad \text{pour } x<0\\
&= \frac{-x\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}, \quad \text{pour } x<0
\end{aligned}$$

Attention 8

On calcule une limite en $-\infty$ donc on prendra les calculs en considérant que $x<0$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x}\right)\right]=-\infty$ (par produit des limites) ;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}\right)=1$.

Ainsi, par quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)=-\infty}$$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x} &= \frac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}\right)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}\\
&= \frac{5-x-10+x}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}\\
&= \frac{-5}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{10-x}=+\infty$ donc par somme des limites,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}\right)=+\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{-5}{X}\right)=0$, en considérant que $X=\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)=0}$$

Corrigé de l'exercice 2.6 page 69

1 Pour $x \neq 0$, $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1} = \dfrac{\cancel{x^2}\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=2$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=3$.

Ainsi, par quotient des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1}\right)=\dfrac{2}{3}}$

2 Pour $x \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)} = \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)} = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)=0$ donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{1}=1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)=2$.

Ainsi, par quotient des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}\right)=\dfrac{1}{2}}$

3
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{x^2+3-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$.

Ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)=0}$

4
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+1} &= \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{pour } x\neq 0\\ &= x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x>0\\ &= x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=0$ donc par différence : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1$.

Ainsi, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+1}\right)=+\infty}$

Corrigé de l'exercice 2.7 page 69

- *Limite en* $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty.$$

Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty}$$

- *Limite en* $-\infty$.

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}\\&=\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}\\&=\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$$

donc

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty.$$

Ainsi, par somme,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=-\infty.$$

Par passage à l'inverse, on a alors :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{X\to-\infty}\left(\frac{-1}{X}\right)=0}$$

Corrigé de l'exercice 2.8 page 69

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right)$.

On sait d'après le cours (croissances comparées) que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)=+\infty$ donc, en inversant l'expression,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{X}\right)=0}$$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{7+2x}\right)$.

> **Methode 3**
>
> Quand on doit calculer une limite à l'infini d'une expression où est présente l'exponentielle, il faut s'arranger pour transformer l'expression de sorte à faire apparaître une croissance comparée.

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{7+2x}&=\frac{e^x}{x\left(\frac{7}{x}+2\right)}\\&=\frac{e^x}{x}\times\frac{1}{2+\frac{7}{x}}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)=+\infty$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{7}{x}}\right)=\frac{1}{2}$.
Ainsi, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{7+2x}\right)=+\infty}$$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{5x}}{3x-2}\right)$.

Comme dit dans la méthode précédente, on doit faire apparaître une croissance comparée dans l'expression.
La plus appropriée semble être $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)=+\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{5x}}{3x-2}&=\frac{\mathrm{e}^{\color{red}{5x}}}{\frac{3}{5}\times\color{red}{5x}\color{black}{}-2}\\&=\frac{\mathrm{e}^{5x}}{\frac{3}{5}\left(5x-\frac{2}{\frac{3}{5}}\right)}\\&=\frac{\mathrm{e}^{5x}}{\frac{3}{5}\left(5x-\frac{10}{3}\right)}\\&=\frac{5}{3}\times\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5x-\frac{10}{3}}\\&=\frac{5}{3}\times\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5x\left(1-\frac{10}{3\times5x}\right)}\\&=\frac{5}{3}\times\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5x}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3x}}.\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5x}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^X}{X}=+\infty$ en posant $X=5x$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)=1$;
- $\frac{5}{3}>0$.

Ainsi, par produit des limites, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{5x}}{3x-2}\right)=+\infty}$$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)\mathrm{e}^{2x}$.

On va tenter de faire apparaître la croissance comparée $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x)=0$.

$$\begin{aligned}(x+5)\mathrm{e}^{2x}&=\left(\frac{1}{2}\times\color{red}{2x}\color{black}{}+5\right)\mathrm{e}^{\color{red}{2x}}\\&=\frac{1}{2}\times2x\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x\mathrm{e}^{2x}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(X\mathrm{e}^X\right)=0$, avec $X=2x$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5\mathrm{e}^{2x}\right)=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.

Ainsi, par somme des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left[(x+5)\mathrm{e}^{2x}\right]=0}$$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{-x}\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{-x} &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{\mathrm{e}^x}\\ &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\mathrm{e}^x}, \quad x>0\\ &= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\mathrm{e}^x}, \quad x>0\\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}, \quad x>0.\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{1}=1$.

Ainsi, par produit des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{-x}\right)=0}$$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(3-\sqrt{x})\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right]$.

$$(3-\sqrt{x})\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}=3\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}-\sqrt{x}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(3\mathrm{e}^{X}\right)=0$ en posant $X=-\sqrt{x}$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(X\mathrm{e}^{X}\right)=0$ avec $X=-\sqrt{x}$.

Ainsi, par somme des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[(3-\sqrt{x})\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right]=0}$$

Corrigé de l'exercice 2.9 page 70

1 $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(\dfrac{3x-5}{x-2}\right)$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(3x-5)=3\times2-5=1>0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(x-2)=0^-$ (car $x<2 \iff x-2<0$)

Or, $\lim\limits_{\substack{X\to0\\X<0}}\left(\dfrac{1}{X}\right)=-\infty$ donc, par limite du quotient,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(\frac{3x-5}{x-2}\right)=-\infty}$$

2 $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\left(\dfrac{x-9}{x-3}\right)$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(x-9)=3-9=-6<0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(x-3)=0^+$ (car $x>3 \iff x-3>0$)

Or, $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \left(\frac{-6}{X}\right) = -\infty$ donc, par limite du quotient,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \left(\frac{x-9}{x-3}\right) = -\infty}$$

3 $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} \left(\frac{x^2+x+1}{2x^2-9x-5}\right)$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} (x^2+x+1) = 5^2+5+1 = 31 > 0$
- Remarquons que les racines de $2x^2-9x-5$ sont $-\frac{1}{2}$ et 5.

  Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} (2x^2-9x-5) = 0^-$ ($2x^2-9x-5$ est négatif entre ses racines).

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} \left(\frac{x^2+x+1}{2x^2-9x-5}\right) = -\infty}$$

4 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{3x^2-5x+2}{x^2+8x-9}\right)$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (3x^2-5x+2) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^2+8x-9) = 0$

Par conséquent, « 1 » est une racine du numérateur et du dénominateur. On peut alors écrire :

$$\frac{3x^2-5x+2}{x^2+8x-9} = \frac{(x-1)(3x-2)}{(x-1)(x+9)} = \frac{3x-2}{x+9}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{3x^2-5x+2}{x^2+8x-9}\right) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{3x-2}{x-9}\right) = \frac{3\times 1-2}{1+9} = \frac{1}{10}}$$

5 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\frac{3x-5}{x^2+2x-8}\right)$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (3x-5) = 3\times 2-5 = 1 > 0$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x^2+2x-8) = 0^+$ ($x^2+2x-8>0$ à l'extérieur de ses racines -4 et 2).

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\frac{3x-5}{x^2+2x-8}\right) = +\infty}$$

Remarque 16

Dans la mesure où x^2+2x-8 s'annule en $x_1 = 2$, on trouve la seconde racine à l'aide du produit des racines : $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ donc $2x_2 = -8$, soit $x_2 = -4$.

6 $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4} \right)$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (2x^2 + 3x + 1) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (-5x^2 - x + 4) = 0$

Cela signifie que l'on peut factoriser par $x - (-1) = x + 1$ au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4} = \frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(4-5x)} = \frac{2x+1}{4-5x} \text{ pour } x \neq -1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(\frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4} \right) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(\frac{2x+1}{4-5x} \right) = -\frac{1}{9}}$$

Corrigé de l'exercice 2.10 page 70

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(2\mathrm{e}^{x-1} \right) = 2 \times \mathrm{e}^0 = 2 > 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(\mathrm{e}^{x-1} - 1 \right) = 0^-$

Ainsi, par quotient des limites,

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(\frac{2\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^{x-1} - 1} \right) = -\infty}$$

Corrigé de l'exercice 2.11 page 70

1
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} &= \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} \\
&= \frac{\sqrt{(x-1)} \times \sqrt{(x+1)}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \\
&= \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.
\end{aligned}$$

Notons que le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ est $]-\infty\,; -1] \cup]1\,; +\infty[$ donc quand on parle de la limite de $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ en 1, il est sous-entendu que $x > 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ par quotient des limites, } \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = +\infty$$

Or, $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} \right) = +\infty}$

2 $$\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$
$$= \frac{x^2+x-2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$
$$= \frac{x^2+x-6}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$
$$= \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$
$$= \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}+2}.$$

- $\lim\limits_{x\to 2}(x+3) = 5$
- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right) = \sqrt{2^2+2-2}+2 = 4$

Ainsi, par quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2}\right) = \frac{5}{4}}$$

Corrigé de l'exercice 2.12 page 70

Multiplions le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par l'expression conjuguée du numérateur :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}}}$$
$$= \frac{2x\sqrt{1+x^2}}{x\left(\sqrt{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}}\right)}$$
$$= \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2\sqrt{1+0^2}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1}$$

Corrigé de l'exercice 2.13 page 70

Multiplions le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par l'expression conjuguée du numérateur :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}-\sqrt{7}}{x-2} \times \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{7}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{7}}$$
$$= \frac{x^2+\sqrt{x^2+5}-7}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{7}\right)}$$
$$= \frac{x^2-7+\sqrt{x^2+5}}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{7}\right)}$$
$$= \frac{x^2-7+\sqrt{x^2+5}}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{7}\right)} \times \frac{x^2-7-\sqrt{x^2+5}}{x^2-7-\sqrt{x^2+5}}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(x^2-7)^2-(x^2+5)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{7}\right)\left(x^2-7-\sqrt{x^2+5}\right)}\\ &= \frac{x^4-15x^2+44}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{7}\right)\left(x^2-7-\sqrt{x^2+5}\right)}.\end{aligned}$$

En posant $X=x^2$,

$$x^4-15x^2+44 = X^2-15X+44,$$

qui est un polynôme de degré 2 dont une racine évidente est $X_1=4$; donc l'autre racine est X_2 telle que $X_1X_2=\dfrac{c}{a}$, soit $4X_2=44$, soit $X_2=11$.

Donc,

$$X^2-15X+44=(X-4)(X-11).$$

Ainsi,

$$x^4-15x^2+44=(x^2-4)(x^2-11)=(x-2)(x+2)(x^2-11).$$

D'où :

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2-11)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{7}\right)\left(x^2-7-\sqrt{x^2+5}\right)}.$$

Alors,

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{(2+2)(2^2-11)}{2\sqrt{7}\times(-6)}=\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

Corrigé de l'exercice 2.14 page 71

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{t\to+\infty}(-0,3t)=-\infty\\ \displaystyle\lim_{T\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{T}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-0,3t}\right)=0.$$

Ainsi, par somme, produit et quotient des limites,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t}+1}\right)=\frac{15}{14\times 0+1}=15.$$

Corrigé de l'exercice 2.15 page 71

Par croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)=+\infty,$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{X}\right)=0.$$

En posant $x=0,6t$, il vient :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}}\right)=0.$$

De plus,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-0,6t}\right)=\lim_{T\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{T}\right)=0.$$

Ainsi, par produit et somme de limites,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(12\mathrm{e}^{-0,6t}+\frac{1}{0,6}\times\frac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}}\right)=12\times 0+\frac{1}{0,6}\times 0=0.$$

Corrigé de l'exercice 2.16 page 71

On a :

$$f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t} = 5 \times \frac{t}{\mathrm{e}^t}.$$

Par croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^t}{t}\right) = +\infty$$

donc :

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{\mathrm{e}^t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^t}{t}}\right) = \lim_{T\to+\infty} \left(\frac{1}{T}\right) = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 5 \times 0 = 0.$$

Cela signifie qu'à longs termes, la concentration du médicament dans le sang tend à disparaître.

Corrigé de l'exercice 2.17 page 71

- D'une part, on a :

$$6x^2 + 2x - 2 = x^2\left(6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$$

  Or,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$$

  donc, par somme et produit des limites,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = 6.$$

  De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2\right) = +\infty,$$

  donc, par produit des limites,

$$\lim_{x\to-\infty} (6x^2 + 2x - 2) = +\infty.$$

- D'autre part,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (-5x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\mathrm{e}^X\right) = +\infty \end{cases}$$

  donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-5x+1}\right) = +\infty.$$

- Ainsi, par produit des limites,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 2.18 page 71

1 f est définie sur $]-\infty\,;1[$ donc on doit calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1} \left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e} > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (x-1) = 0^- \end{cases}$$

Ainsi, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$.

Cela signifie que la courbe représentative de f admet une asymptote (verticale) d'équation $x = 1$.

2 On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (\mathrm{e}^x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty \end{cases}$$

Ainsi, par quotient des limites,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Corrigé de l'exercice 2.19 page 71

On peut écrire $g(t)$ sous la forme :

$$g(t) = 10t\mathrm{e}^{-0,01t} + 20 = 10 \times 100 \times \frac{0,01t}{\mathrm{e}^{0,01t}} + 20.$$

Or, par croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} \right) = +\infty$$

donc, en posant $x = 0,01t$ (qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$), on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{0,01t}{\mathrm{e}^{0,01t}} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}} \right) = 0.$$

Ainsi, par somme et produit des limites,

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 1\ 000 \times 0 + 20 = 20.$$

3

Dérivation, convexité et continuité d'une fonction

Dans ce chapitre

1 Compléments sur la dérivation

1 Dérivée d'une fonction composée

Définition 9

Soient u et v deux fonctions telles que u est définie sur un ensemble I et v est définie sur un ensemble J, avec $u(I) \subseteq J$.
On appelle *fonction composée de u par v* la fonction définie par :

$$x \mapsto v\big[u(x)\big] \qquad \text{notée} \qquad (v \circ u)(x).$$

Exemple 21

- $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$ est la composée de $u : x \mapsto 3x+1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ car $f(x) = \sqrt{u(x)} = v\big[u(x)\big]$.
- $g : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est la composée de $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$ car $g(x) = \mathrm{e}^{u(x)} = v\big[u(x)\big]$.
- $h : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+1}$ est la composée de $u : x \mapsto 3x^2+1$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ car $h(x) = \dfrac{1}{u(x)} = v\big[u(x)\big]$.

Théorème 6 (théorème de dérivation des fonctions composées)

Soit $f(x) = (v \circ u)(x)$. Sa dérivée est :

$$f'(x) = u'(x) \times v'\big[u(x)\big].$$

On en déduit alors les propriétés suivantes :

Propriété 18

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée	Condition
e^u	$u'\mathrm{e}^u$	
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	

Exemple 22

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.
On peut écrire $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$.
Ainsi, $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.

2 Limite et nombre dérivé

Définition 10 (dérivabilité en un point)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
On dit que f est *dérivable* en a si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est une limite réelle finie ℓ.

ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.

Exemple 23

On souhaite calculer :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right).$$

Au prime abord, on a une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

Posons alors $u(x) = \sqrt{1+x^2}$. Ainsi, $u'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$ et :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{u(x)-u(0)}{x-0} \right) = u'(0) = 0.$$

2 Convexité d'une fonction

1 Dérivée seconde

Définition 11

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée f' soit elle aussi dérivable sur I.
On appelle *dérivée seconde de f* la dérivée de la dérivée de f, et on la note f''.

Exemple 24

Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = \left(3x^2\right)' = 6x$.

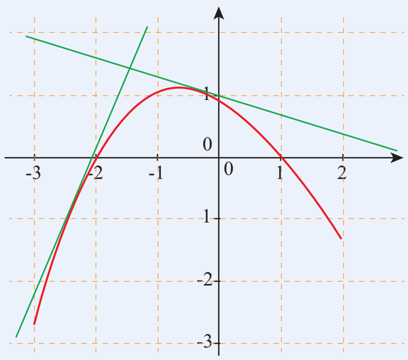
2 Fonction concave, fonction convexe

Définition 12

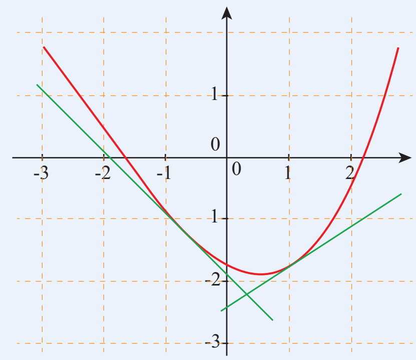
On dit que f est *concave* sur un intervalle I si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.
On dit que f est *convexe* sur un intervalle I si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.

Interprétation graphique :

- la courbe représentative d'une fonction *convexe* sur un intervalle I sera toujours *au-dessus* de ses tangentes ;
- la courbe représentative d'une fonction *concave* sur un intervalle I sera toujours *en dessous* de ses tangentes.



Fonction concave sur $[-3\ ;\ 2]$



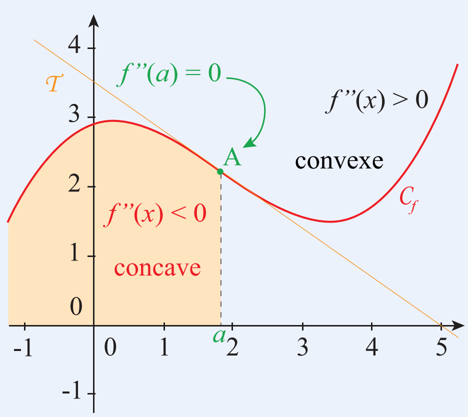
Fonction convexe sur $[-3\ ;\ 2]$

3 Point d'inflexion

Définition 13

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et soit $a \in I$.
On dit que le point de coordonnées $\big(a\ ;\ f(a)\big)$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

Graphiquement, cela se traduit par un changement de convexité en a.

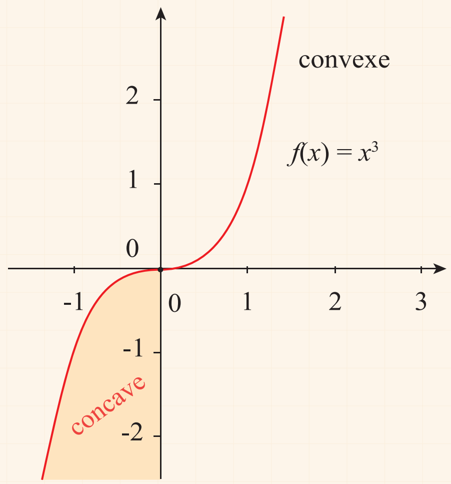


Exemple 25

Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f''(x) = 6x$ et :

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$;
- $f''(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- $f''(0) = 0$.

Donc le point de coordonnées $(0\ ;\ f(0))$, c'est-à-dire l'origine du repère, est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.



3 Continuité

1 Continuité en un point a

Définition 14

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que f est *continue* en a si :

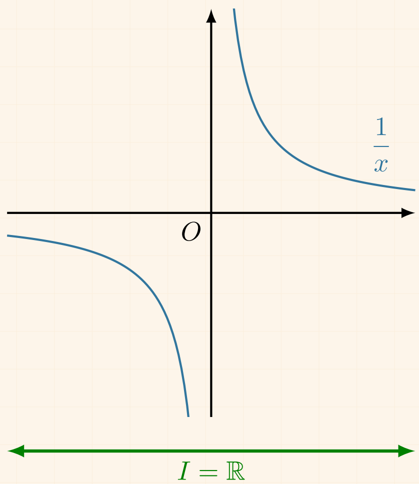
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I.

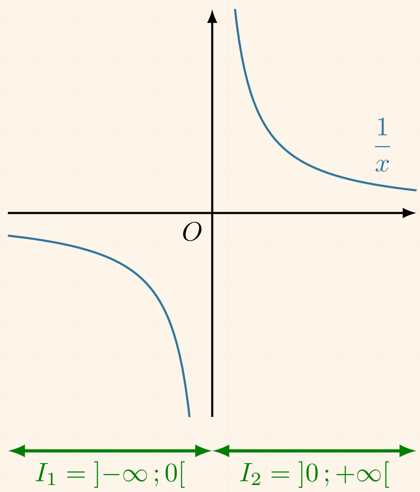
Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative d'une fonction continue sur I peut se tracer sans lever le crayon sur cet intervalle.

Exemple 26 (et contre-exemple)

La courbe représentative de la fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (car ses limites en 0 sont infinies). En revanche, elle l'est sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.



Il y a un « trou » au niveau de $x = 0$ donc la fonction n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $\mathbb{R}$.



Il n'y a pas de trou sur chaque intervalle I_1 et I_2 donc la fonction est continue sur I_1 et sur I_2.

Remarque 17

- Dans le second cas, on ne dit pas que la fonction est continue sur $I_1 \cup I_2$, mais *continue sur chacun des intervalles.*
- Quand une fonction n'est pas continue, on ne dit pas qu'elle est *discontinue.*

Définition 15

On appelle *point de discontinuité* tout point en lequel une fonction n'est pas continue.

Exemple 27

$x = 0$ est un point de discontinuité de la fonction inverse.

2 Fonctions continues de référence

Propriété 19

1. Les fonctions *polynômes* sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions *rationnelles* sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
3. La fonction *racine carrée* est continue sur $[0\,;+\infty[$.
4. Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
5. Les fonctions obtenues par somme, produit ou quotient de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Exemple 28

1. La fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
2. La fonction $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto (x^2 + 1)\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$ est continue sur $]-\infty\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur ces deux intervalles.

3 Continuité d'une fonction composée

Propriété 20

Soit $f = v \circ u$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si u est continue sur I et si v est continue sur $u(I)$ alors f est continue sur I.

Exemple 29

Soient $u\ :\ x \mapsto x - 1$ et $v\ :\ \sqrt{x}$.
Notons $f(x) = (v \circ u)(x) = \sqrt{x-1}$.
u est continue sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ car $x - 1 < 0$ pour $x < 1$. Ainsi, f est définie sur $I = [1\,;\,+\infty[$, et elle est continue sur I car u est continue sur I et v est continue sur $u(I) = [0\,;\,+\infty[$.

4 Continuité et tableau de variations

Dans un tableau de variations, un point de discontinuité est représenté par une double barre verticale. Par exemple, pour la fonction inverse, on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$	

5 Fonction définie et fonction continue

Une fonction peut être définie sur un intervalle I sans nécessairement être continue sur I.

Exemple 30

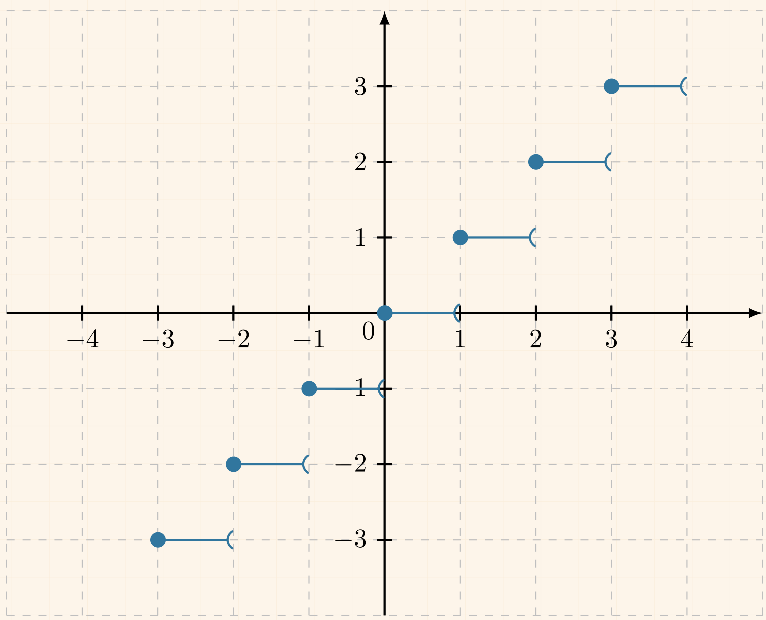
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E(x) = \lfloor x \rfloor.$$

Cette fonction est appelée *fonction partie entière* : pour tout entier relatif n,

$$\forall\, x \in [n\,;\, n+1[, \quad f(x) = n.$$

Sa représentation graphique est la suivante :



Cette fonction est définie en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

6 Dérivabilité et continuité

Théorème 7

Si f est une fonction définie et dérivable en a alors elle est continue en a.

Attention 9

La réciproque de ce théorème est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0 car :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +1.$$

7 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 8

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

Attention 10

Ce théorème assure, sous certaines hypothèses, l'existence d'*au moins un* antécédent à k, mais il n'assure pas son unicité et ne permet pas de calculer sa valeur.

Propriété 21 (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a\,; b]$.

Exemple 31

Soit $f(x) = \cos x - x$. Alors, $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante. f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
De plus,

- $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$
- $f(\pi) = \cos\pi - \pi = -\pi < 0$

donc $0 \in]f(\pi)\,;\, f(0)[$. Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;\,\pi]$.

8 Théorème du point fixe

Théorème 9

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subseteq I$.
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ telle que (u_n) converge vers un nombre réel ℓ.
Alors, $\ell = f(\ell)$.

3 Exercices types

Exercice type 11 ▶ Dérivation de fonctions composées

Donner la dérivée des fonctions suivantes, sans vous soucier du domaine de définition ni du domaine de dérivabilité.

1 $f(x) = \sqrt{3x+1}$ **2** $g(x) = \mathrm{e}^{5x-3}$ **3** $h(x) = (-4x+7)^9$

1 $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

$f = \sqrt{u}$, avec $u(x) = 3x+1$, et $u'(x) = 3$. Donc,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

2 $g(x) = \mathrm{e}^{5x-3}$.
$g = \mathrm{e}^u$, avec $u(x) = 5x-3$ et $u'(x) = 5$. Donc :

$$g'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} = 5\mathrm{e}^{5x-3}.$$

3 $h(x) = (-4x+7)^9$.
$h = u^9$, avec $u(x) = -4x+7$ et $u'(x) = -4$. Donc :

$$h'(x) = 9 \times u'(x) \times \left[u(x)\right]^{9-1} = -36(-4x+7)^8.$$

Exercice type 12 ▶ nombre dérivée et limite

On souhaite calculer $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x-2}-1}{x-2}\right)$.

1 On pose $f(x) = \mathrm{e}^{x-2}$. Déterminer sa dérivée $f'(x)$.

2 Exprimer le taux d'accroissement de f entre les valeurs x et 2.

3 En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x-2}-1}{x-2}\right)$.

1 $f(x) = \mathrm{e}^{x-2}$ donc $f = \mathrm{e}^u$, avec $u(x) = x-2$ et $u'(x) = 1$. Alors,

$$f'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} = 1 \times \mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{e}^{x-2}.$$

2 Le taux d'accroissement de f entre les valeurs x et 2 est :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e}^{2-2}}{x-2} = \frac{\mathrm{e}^{x-2}-1}{x-2}.$$

3 On a :

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{\mathrm{e}^{x-2}-1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = f'(2) \text{ (par définition).}$$

Or, $f'(2) = \mathrm{e}^{2-2} = 1$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{\mathrm{e}^{x-2}-1}{x-2}\right) = 1.$$

Exercice type 13 ▶ Convexité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1 Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.

2 En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$ en précisant si sa courbe représentative admet ou non un point d'inflexion.

1 $f(x) = (3x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

- $f = u \times v$ avec : $u(x) = 3x-1 \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

  $u'(x) = 3 \qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v+uv')(x) \\ &= 3\mathrm{e}^{-x} + (3x-1)\big(-\mathrm{e}^{-x}\big) \\ &= \big[3+(3x-1)(-1)\big]\mathrm{e}^{-x} \\ &= (3-3x+1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-3x+4)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

- $f' = u \times v$ avec : $u(x) = -3x+4 \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

  $u'(x) = -3 \qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -3\mathrm{e}^{-x} + (-3x+4)\big(-\mathrm{e}^{-x}\big) \\ &= \big[-3+(-3x+4)(-1)\big]\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-3+3x-4)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (3x-7)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

2 $f''(x)$ est du signe de $3x-7$ car $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x.

$$3x-7 \geqslant 0 \iff 3x \geqslant 7 \iff x \geqslant \frac{7}{3}.$$

Ainsi,

- sur $\left]-\infty\,;\frac{7}{3}\right[$, $f''(x) < 0$ donc f est *concave* ;
- sur $\left]\frac{7}{3}\,;+\infty\right[$, $f''(x) > 0$ donc f est *convexe* ;
- $f''\left(\frac{7}{3}\right) = 0$ et $f''(x)$ change de signe en $\frac{7}{3}$ donc la courbe représentative de f admet un point d'inflexion en $x = \frac{7}{3}$.

Exercice type 14 ► Continuité d'une fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie par morceaux de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & \text{pour } x \leqslant -1 \\ -5x + 3 & \text{pour } x > -1 \end{cases}$$

Est-elle continue en -1 ?

D'une part, on a :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 - 5x + 2) = (-1)^2 - 5 \times (-1) + 2 = 1 + 5 + 2 = 8,$$

et d'autre part,

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (-5x + 3) = -5 \times (-1) + 3 = 5 + 3 = 8.$$

On constate alors que :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = 8$$

et donc que f est continue en -1.

Exercice type 15 ► Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 5x + 1.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

- *On étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.*

  $$f'(x) = 3x^2 + 5 > 0.$$

  Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- *On calcule les limites aux bornes de l'ensemble.*
  - → $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x^3 \left(1 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right]$.

    Or,

    $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n} \right) = 0$$

    donc, par somme et produit de limites,

    $$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 1.$$

    Or, $\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 \right) = -\infty$ donc, par produit,

    $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

  - → Par un raisonnement analogue, on montre que :

    $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

- *On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.*
  Sur $\mathbb{R}$,

- → f est continue (comme polynôme) et strictement monotone (croissante) ;
- → $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.

3 Exercices

Complément sur la dérivation

Exercice 3.1

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}.$$

Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.

Solution page 116

Exercice 3.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1 Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.

2 En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solution page 116

Exercice 3.3

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2} - 1}.$$

Solution page 116

Exercice 3.4

Déterminer la dérivée de la fonction suivante, sans se soucier de son domaine de définition ni de son domaine de dérivabilité :

$$f(x) = \sqrt{(5-7x)^3}.$$

Solution page 117

Exercice 3.5

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}}.$$

Déterminer l'expression de $f'(x)$, puis en déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

Solution page 117

Exercice 3.6

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}.$$

1 Montrer que la dérivée de $f(x)$ est :

$$f'(x)=\frac{x+4\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2}.$$

2 Dresser le tableau de signes du polynôme X^2+4X-1.

3 En déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
Dresser alors un tableau de variations complet de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
On veillera notamment à calculer la valeur de l'extremum de f.

Solution page 118

Limite en un nombre fini à l'aide du nombre dérivé

Exercice 3.7 (méthodes diverses)

Calculer les limites suivantes.

1 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\cos x+1}{x-\pi}\right)$

2 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right)$

Solution page 120

Exercice 3.8 (règle de l'Hospital)

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables en un nombre réel a telles que $f(a)=g(a)=0$ et $g'(a)\neq 0$.

1 Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(a)}{g'(a)}$. C'est la *règle de l'Hospital*.

On pourra considérer le taux d'accroissement des fonctions f et g en $x=a$.

2 Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(5x)-\cos(3x)}{\sin(4x)-\sin(3x)}\right)$.

Solution page 120

Exercice 3.9 (avec une exponentielle)

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}\right)$.

Solution page 120

Continuité

Lectures graphiques

Exercice 3.10 (tangente et équation)

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ ci-dessous. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

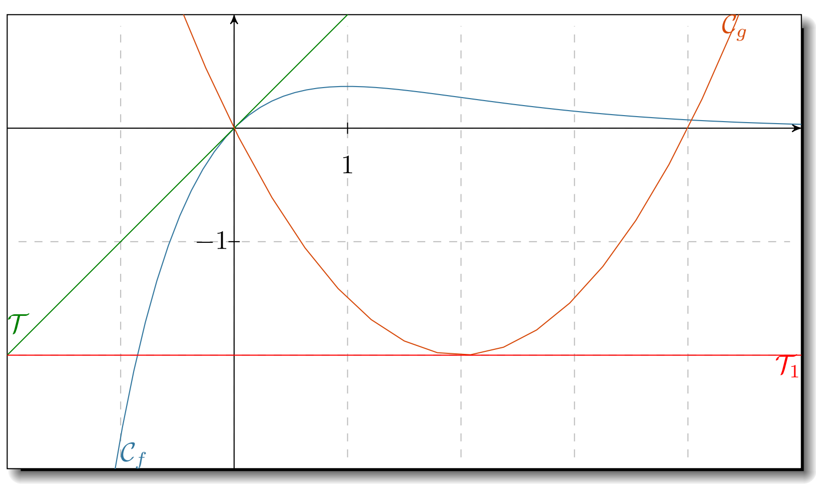
x	2		3		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

Á l'aide du tableau de variations, répondre aux questions suivantes.
Aucune justification n'est demandée.

1. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
2. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$?

Solution page 121

Exercice 3.11 (nombres dérivés et inéquation)



- $\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- $\mathcal{T}_1$ est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.
- $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 0 et 4.

Á l'aide du graphique ci-dessus, répondez aux questions suivantes.

1. Que vaut $f'(0)$? $g'(2)$?
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[-2\,;5]$.

Solution page 121

Exercice 3.12 (nombres dérivés et équation)

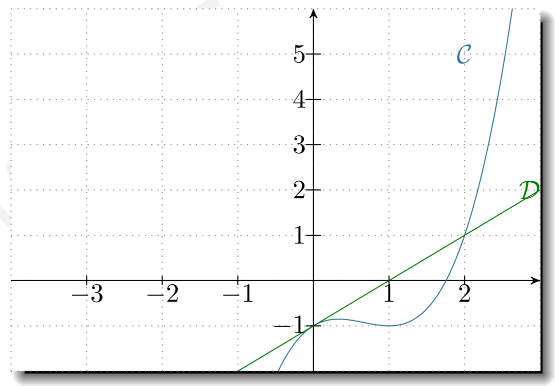
Une fonction f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre.
$\mathcal{D}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 est un minimum local.

Répondre aux questions suivantes par lectures graphiques :

1. Donner la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Donner la valeur de $f'(1)$.
3. Donner, sur $[-3\,;3]$, les solutions de l'équation :

$$f(x) = x - 1.$$

4. Dresser un tableau de signes de la fonction f'.



Solution page 121

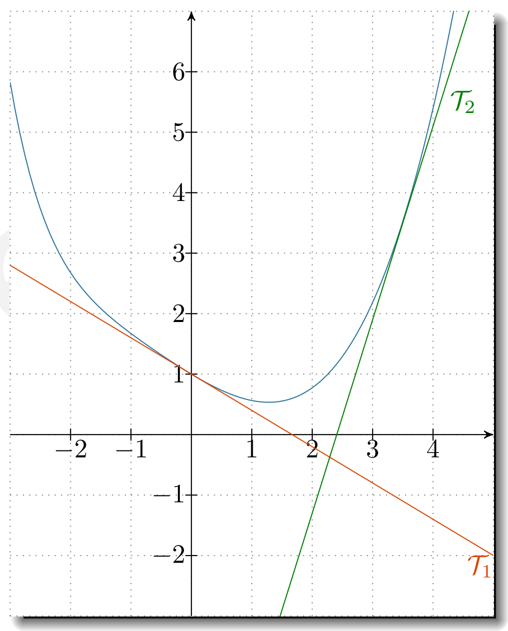
Exercice 3.13 (image, nombre dérivé et tableau de signes)

La courbe ci-contre représente une fonction f sur $[-3\,;5]$.

La droite $\mathcal{T}_1$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

La droite $\mathcal{T}_2$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 3,5.

1. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Avec la précision que permet le graphique, déterminer $f(3,5)$ et $f'(3,5)$.
3. Dresser un tableau de signes de f' avec la précision que permet le graphique.



Solution page 122

Exercice 3.14 (coefficients indéterminés)

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est celle d'une fonction f telle que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2+1}.$$

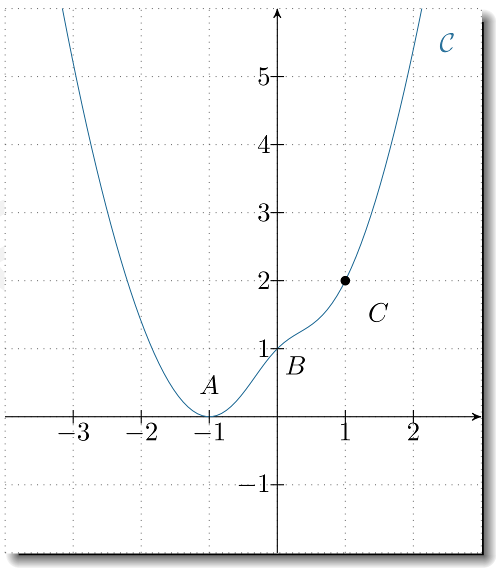
On sait :

- Condition (1) : que les points $A\,(-1\,;0)$, $B\,(0\,;1)$, $C\,(1\,;2)$ appartiennent à $\mathcal{C}$;
- Condition (2) : l'axe des abscisses est tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

1 Exprimez en fonction de a, b, c et d la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$. Quelle équation peut-on alors écrire à partir de la condition (2) ?

2 écrivez, en fonction de a, b, c et d, les trois équations que permet d'établir la condition (1).

3 Trouvez alors, à l'aide des quatre équations établies, la valeur de a, b, c et d.



Solution page 122

Exercice 3.15 (coefficients indéterminés)

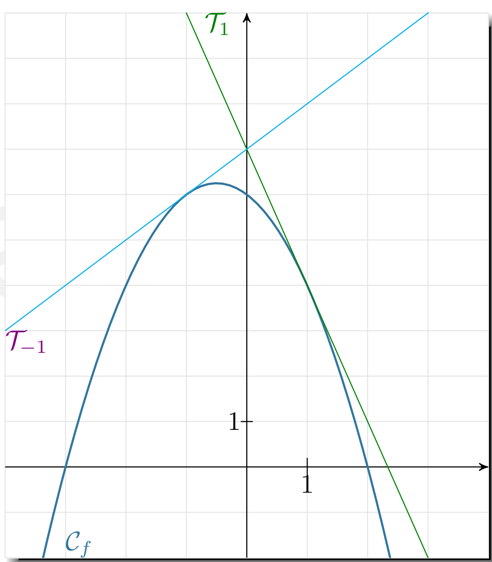
On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_{-1}$.
On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1 Par lecture graphique, donner la valeur de $f(0)$.
En déduire la valeur de c.

2 Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.

3 Par lecture graphique, donner la valeur des nombres $f'(1)$ et $f'(-1)$.
En déduire les valeurs de a et b.

4 Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Retrouver ce résultat par le calcul.



Solution page 123

Fonctions définies par morceaux

Exercice 3.16 (continuité en un point)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Solution page 123

Exercice 3.17 (continuité en un point)

On définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - k & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de k la fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution page 123

Exercice 3.18 (racine carrée et cosinus)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & si \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \cos(x) & si \quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

f est-elle continue en 0 ?

Solution page 124

Exercice 3.19 (continuité en un point)

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;4]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

Solution page 124

Exercice 3.20 (continuité en un point)

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

f est-elle continue en 1 ?

Solution page 124

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 3.21 (polynôme de degré 3)

Montrer que l'équation $3x^3 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles dont on donnera une valeur approchée à 0,001 près.

Solution page 125

Exercice 3.22 (avec une exponentielle)

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;1]$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2$.

1 Montrer que $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

2 En déduire les variations de f.

3 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
Donner alors une valeur approchée de α au centième.

Solution page 125

Exercice 3.23 (taux de médicament dans le sang)

On injecte par voie intraveineuse un médicament.
Le taux du produit dans le sang est modélisé par la fonction :

$$f(t) = (1-0,02t)\mathrm{e}^{-0,2t} \qquad , \qquad t \in [0\,;50].$$

où t représente le temps après injection, exprimé en heures.

1 Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;50[$.

2 Montrer que l'équation $f(t) = 0,5$ admet une unique solution sur $[0\,;50]$. En Donner alors une valeur approchée au dixième. Interpréter ce résultat.

Solution page 126

Exercice 3.24 (démonstration)

Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.
En considérant la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0\,;1]$.

Solution page 126

Exercice 3.25 (approximation d'une fonction par une autre)

Partie A

On considère la fonction u définie sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par :

$$u(x) = 1 + (x-1)\sqrt{1+x}.$$

1 Montrer que $u'(x) = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{1+x}}$.

2 En déduire les variations de u, puis le signe de $u(x)$ sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad ; \qquad g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2.$$

On considère alors la fonction d définie sur $[0\,;1]$ par :

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

1 Montrer que $d'(x) = \dfrac{u(x)}{2\sqrt{1+x}}$.

2 En déduire les variations de d sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.
Dresser un tableau de variations complet.

3 Pour $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, majorer l'erreur commise en approximant $f(x)$ par $g(x)$.

4 Proposer une méthode sans calculatrice pour approximer $\sqrt{4,5}$.

Solution page 127

Exercice 3.26 (dilution d'un produit dans le sang)

Une entreprise pharmaceutique étudie la dilution dans le sang d'un nouveau produit. Après observations, elle modélise le taux de présence dans le sang de ce produit à l'aide de la fonction f définie par :

$$f(t) = 1,5(t+1)\mathrm{e}^{-t} - 0,5$$

où t est le temps, exprimé en heures, écoulé depuis son injection.
Ainsi, $f(0) = 1$ signifie que $100\,\%$ du produit est initialement présent dans le sang.

1. Quel est, en pourcentage, le taux de présence de ce produit après 1 heure ?
2. Montrer que la dérivée de $f(t)$ peut s'exprimer sous la forme : $f'(t) = -1,5t\mathrm{e}^{-t}$.
3. Quel est le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$?
4. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
5. Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$. Donner alors une valeur approchée de α au centième.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
6. On admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(t) = 1,5(t-1)\mathrm{e}^{-t}.$$

   Déterminer à quel moment la vitesse de dilution du produit commence à diminuer.

Solution page 128

Exercice 3.27

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x \qquad ; \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
   En déduire le sens de variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
3. Montrer que $f'(x) = g(x) - 2$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;1]$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Solution page 129

Exercice 3.28

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x non nul, $f(-x) = -f(x)$.

On se place alors sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. En vous aidant de l'égalité : $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right) = 1$, déterminer la limite de f en 0.

4 Montrer que la dérivée de f est : $f'(x) = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{2x} - x - 1}{x^2\mathrm{e}^x}$.

5 On pose $u(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x} - x - 1$.

a. Montrer que $u''(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.

b. En déduire que l'équation $u'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.

c. En déduire les variations de u sur $[0\,;+\infty[$, puis que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;+\infty[$.

6 Déduire de ce qui précède le sens de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Solution page 130

Théorème du point fixe

Exercice 3.29 (étude de fonction et suites)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

1 Calculer :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **c.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ **d.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

2 Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

3 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]0\,;+\infty[$.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}} \end{cases}$$

On admet que la suite converge.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$, où α est la valeur trouvée dans la partie A.

Solution page 132

Exercice 3.30 (existence d'une solution à une équation)

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation :

$$(E) \quad : \quad \mathrm{e}^x = \frac{1}{x}$$

admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
On pose pour tout réel x :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}.$$

1 Démontrer que x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2 Étude du signe de f.

a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

On pose pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$:

$$g(x) = \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

3 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

4 En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

5 Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

6 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

7 En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

8 Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

9 À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Solution page 133

Exercice 3.31 (une fraction infinie)

L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur de la fraction infinie :

$$\cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \ddots}}}}$$

Pour cela, on pose pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3 - u_n} \end{cases}$$

1 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

2 Montrer que (u_n) est strictement croissante. En déduire que (u_n) converge.
On pose ℓ cette limite. Calculer ℓ. Conclure.

Solution page 134

Exercice 3.32

Partie A : étude d'une fonction exponentielle

Soit la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1 Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2 Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$, puis sa dérivée seconde.

3 Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4 Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Préciser l'abscisse des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}$.

5 Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $]0\,;1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

6 Justifier que $\mathrm{e}^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 2$.

Partie B : étude d'une suite

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > \alpha$, α étant l'unique solution à l'équation $f(x) = 0$.

1 Justifier que $f(u_n) > 0$ pour tout entier naturel n.

2 En déduire que (u_n) est strictement décroissante, puis que (u_n) converge.

3 Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \alpha$.

Solution page 135

Exercice 3.33 (méthode de Newton)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \sqrt{x}$, dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est nommée $\mathcal{C}$.

1 Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;1[$. On la notera α.

3 Montrer que l'équation réduite de la tangente (T_0) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = 1$ est :

$$y = -\left(\frac{2+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} + 1\right)x + \frac{4-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}.$$

On considère la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 = 1$ et en considérant que pour tout entier naturel n, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente (T_n) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_n et de l'axe des abscisses.
Ainsi, x_1 est l'abscisse du point d'intersection de (T_0) et de l'axe des abscisses.

4 Montrer que $x_1 = \frac{4-\mathrm{e}}{2+\mathrm{e}}$.

5
a. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \neq 0$.
b. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

6 On considère le programme Python suivant :

Code Python 3-8

```
from math import exp,sqrt
x = 1
for i in range(4):
    x = x - (exp(-x) - sqrt(x)) / (-exp(-x)-1/(2*sqrt(x)))
    print(x)
```

a. Quelles sont les valeurs affichées par ce programme ?

b. À quoi correspondent-elles ?

c. Émettre une conjecture quant à la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

7 On admet que, pour tout entier naturel n, $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de (T_n).
Expliquer les raisons pour lesquelles, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $x_n \leqslant \alpha$.

8 Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
En déduire qu'elle converge vers α.

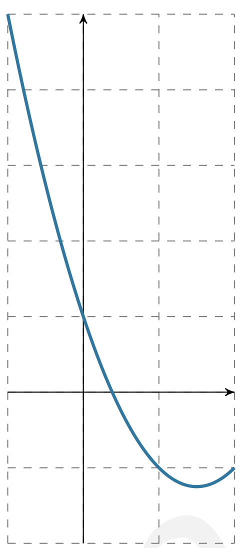
Solution page 137

Convexité

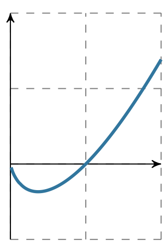
Exercice 3.34 (lectures graphiques)

Pour chacune des courbes suivantes, étudier la convexité de la fonction correspondante sur l'intervalle où la courbe est tracée.
Préciser, s'il y a lieu, la position des points d'inflexion.

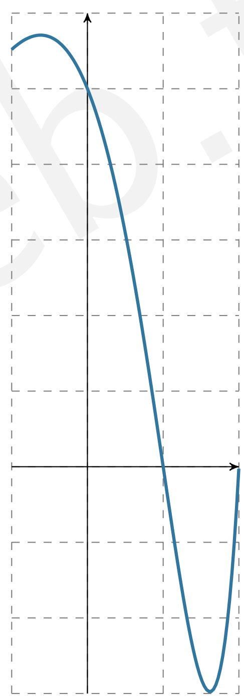
1



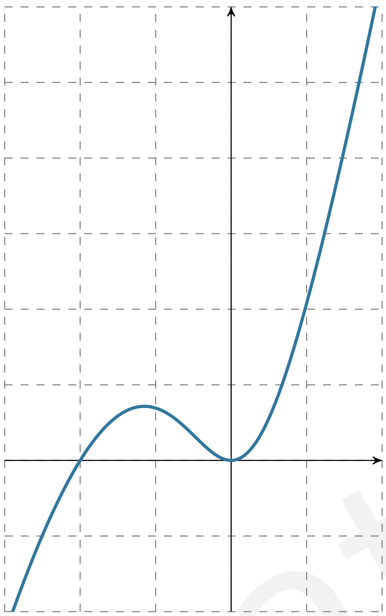
2



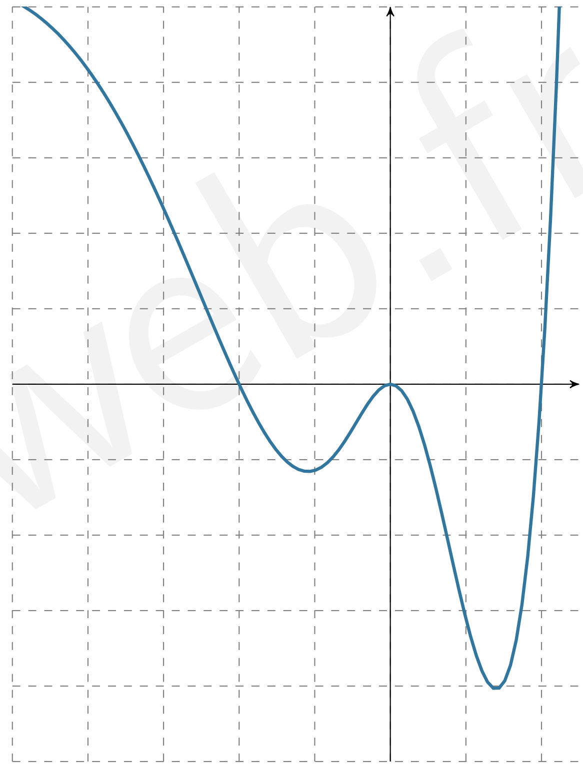
3



4



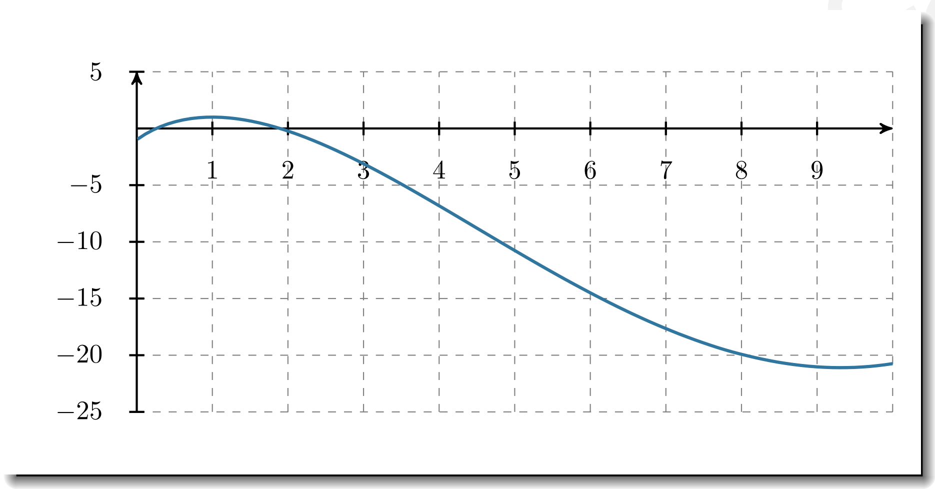
5



Solution page 139

Exercice 3.35 (point d'inflexion)

On considère une fonction f dont la courbe représentative est la suivante :



Placer approximativement son point d'inflexion et préciser les intervalles où f est concave et convexe.

Solution page 140

Exercice 3.36 (étude d'une convexité)

Déterminer la convexité de la fonction f définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution page 140

Exercice 3.37 (propagation d'une rumeur)

Lors de la propagation d'une rumeur, le nombre d'individus propageant cette rumeur x jours après son commencement est donné, en unité, par la fonction :

$$f(x) = 100 + x^4 \mathrm{e}^{-0,1x} \qquad \text{pour } x \in [0\,;50].$$

1 Déterminer le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement.

2 **a.** Prouver que $f'(x) = x^3(4 - 0,1x)\mathrm{e}^{-0,1x}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;50]$

3 Dans cette question, on admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = x^2 \mathrm{e}^{-0,1x}\left(0,01x^2 - 0,8x + 12\right).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur $[0\,;50]$.

4 En déduire :

a. le nombre de jours qu'il faut attendre avant que le nombre d'individus propageant cette rumeur diminue (arrondi à l'unité) ;

b. le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur (arrondi à l'unité) ;

c. le nombre de jours qu'il faut attendre avant que la croissance du nombre d'individus propageant cette rumeur diminue.

Solution page 141

Exercice 3.38 (point d'inflexion)

La courbe représentative de la fonction f telle que $f''(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^x$ admet-elle un point d'inflexion ?

Solution page 142

Objectif bac

Exercice 3.39 (Centres étrangers, juin 2024, sujet 2)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1 **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

b. En déduire une interprétation graphique.

2 Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3 **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

4 On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a :

$$f''(x) = \frac{\left(x^2 - 4x + 5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a :

$$e^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5 **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Solution page 142

Exercice 3.40 (D'après Polynésie, septembre 2025, jour 1)

Remarque 21

Cet exercice nécessite l'utilisation de la fonction logarithme népérien à partir de la question 5.

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.
Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.
Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.
Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.
La direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée est :

$$f(x) = \frac{800}{1+15e^{-0,05x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.
Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \dfrac{800}{1+15e^{-0,05x}}$	$f(x) = \dfrac{800}{1+15e^{-0,05x}}$
2	$f'(x) :=$ `Dérivée` $(f(x))$	$f'(x) = \dfrac{600e^{-0,05x}}{\left(1+15e^{-0,05x}\right)^2}$
3	$f''(x) :=$ `Dérivée` ($f'(x)$)	$f''(x) = \dfrac{30e^{-0,05x}}{\left(1+15e^{-0,05x}\right)^3}\left(15e^{-0,05x}-1\right)$
4	`Résoudre` ($15e^{-0,05x} - 1 \geqslant 0$)	$x \leqslant 20\ln(15)$

1 Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0,05f(x)(1-0,00125f(x)).$$

2 Avec ce nouveau modèle f, estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.

3 Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ? Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.

4 Justifier que la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5 Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.

6 On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C.

b. La direction de la réserve affirme :

« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ». La direction a-t-elle raison ? Justifier.

Solution page 143

Exercice 3.41 (variations, convexité et fonction auxiliaire)

Partie A : étude du signe d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3x^3 + 9x^2 - 2x + 2.$$

1 Calculer les limites de $g(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2 Déterminer la dérivée $g'(x)$.
En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
Dresser un tableau de variations complets de g sur $\mathbb{R}$.

3 En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Donner une valeur approchée de α au dixième.

Partie B : étude d'une fonction

On définie la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (3x-2)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}.$$

1 Montrer que $f'(x) = \dfrac{(3x + 6\sqrt{x} - 2)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

2 **a.** Étudier le signe du polynôme $3X^2 + 6X - 2$ sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

3 On admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = \frac{(3x\sqrt{x} + 9x - 2\sqrt{x} + 2)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{4x^2}.$$

À l'aide de la partie A, étudier la convexité de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

Solution page 145

3 Corrigés

Corrigé de l'exercice 3.1 page 100

f est de la forme $\sqrt{u}$ avec :

$$u(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1 \Longrightarrow u'(x) = x^2 + 4x.$$

Donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{2\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}}}$$

Corrigé de l'exercice 3.2 page 100

1 $f = u \times v$ avec $u(x) = 3x + 1 \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$u'(x) = 3 \qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 3\mathrm{e}^{-x} + (3x+1)\big(-\mathrm{e}^{-x}\big) \\ &= (3 - 3x - 1)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-3x + 2)\mathrm{e}^{-x}}$$

2 Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-3x + 2$.

$$\begin{aligned} -3x + 2 \geqslant 0 &\iff -3x \geqslant -2 \\ &\iff x \leqslant \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Corrigé de l'exercice 3.3 page 100

$f = \dfrac{1}{g}$ avec $g(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1$.

De plus, $g = \mathrm{e}^u - 1$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$, donc :

$$g'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 2x\mathrm{e}^{x^2}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{\big[g(x)\big]^2} = -\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{\big(\mathrm{e}^{x^2} - 1\big)^2}.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $-x$, car $\mathrm{e}^{x^2} > 0$ et $\big(\mathrm{e}^{x^2} - 1\big)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
f		$\nearrow$	‖	$\searrow$	

Corrigé de l'exercice 3.4 page 100

$f = \sqrt{g}$ avec $g = u^3$, où $u(x) = 5 - 7x$ et $u'(x) = -7$, donc :

$$g'(x) = 3 \times u'(x) \times \big[u(x)\big]^2 = -21(5-7x)^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \\
&= \frac{-21(5-7x)^2}{2\sqrt{(5-7x)^3}} \\
&= \frac{-21(5-7x)^2}{2\sqrt{(5-7x)^2 \times (5-7x)}} \\
&= \frac{-21(5-7x)^2}{2(5-7x)\sqrt{5-7x}} \\
&= \frac{-21(5-7x)}{2\sqrt{5-7x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-21}{2}\sqrt{5-7x}}$$

Remarque 22

N'oublions pas, d'une part, que :

$$\sqrt{(5-7x)^2} = 5 - 7x \qquad \text{car } 5 - 7x > 0$$

et d'autre part, que :

$$\frac{X}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X} \times \sqrt{X}}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$$

Corrigé de l'exercice 3.5 page 100

$f = \sqrt{g}$ avec $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, où :

$$\begin{array}{ll}
u(x) = \mathrm{e}^x - 1 & \qquad v(x) = \mathrm{e}^x + 1 \\
u'(x) = \mathrm{e}^x & \qquad v'(x) = \mathrm{e}^x
\end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2}(x) \\
&= \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}^x+1)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \\
&= \frac{\frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}}.
\end{aligned}$$

Inutile d'aller plus loin quand notre objectif est de trouver le signe de $f'(x)$.
En effet, on constate que sur $[0\,;+\infty[$,

- $2\mathrm{e}^x > 0$
- $(\mathrm{e}^x+1)^2\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}} > 0$

donc $f'(x) > 0$, et donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 3.6 page 101

1 f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$u(x) = 2x - \sqrt{x}$

$u'(x) = 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$v(x) = 2 + \sqrt{x}$

$v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

D'où :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\
&= \frac{\left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2+\sqrt{x}) - (2x-\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2+\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{(4\sqrt{x}-1)(2+\sqrt{x}) - (2x-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{8\sqrt{x}+4x-2-\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{2(x+4\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x+4\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}}$$

2 Le discriminant du polynôme $X^2 + 4X - 1$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 4^2 - 4 \times 1 \times (-1)\\ \Delta &= 20.\end{aligned}$$

Les deux racines du polynôme sont donc :

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{-4-\sqrt{20}}{2}\\ &= \frac{-4-2\sqrt{5}}{2}\\ &= -2-\sqrt{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_2 &= \frac{-4+\sqrt{20}}{2}\\ &= \frac{-4+2\sqrt{5}}{2}\\ &= -2+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

D'où le tableau de signe suivant :

X	$-\infty$		X_1		X_2		$+\infty$
X^2+4X-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

3 $f'(x)$ est du signe de $x + 4\sqrt{x} - 1$, c'est-à-dire de $X^2 + 4X - 1$ en posant $X = \sqrt{x}$, et donc $X > 0$ et $x = X^2$. D'après le tableau de signes précédent,

$$\begin{aligned}x + 4\sqrt{x} - 1 > 0 &\iff \sqrt{x} > -2 + \sqrt{5}\\ &\iff x > \left(-2+\sqrt{5}\right)^2\\ &\iff x > 9 - 4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

D'où :

x	0		$9-4\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-9+4\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\begin{aligned}f\left(9-4\sqrt{5}\right) &= \frac{2\left(9-4\sqrt{5}\right) - \sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\\ &= \frac{18-8\sqrt{5} - \left(-2+\sqrt{5}\right)}{2-\left(-2+\sqrt{5}\right)}\\ &= \frac{20-9\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{-45+20\sqrt{5}}{5}\\ &= -9+4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Remarque 23

Précisons que $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = -2+\sqrt{5}$ d'après les calculs faits précédemment.

Corrigé de l'exercice 3.7 page 101

1 On pose $u(x) = \cos x$. Alors, $u'(x) = -\sin x$ et :

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\cos x + 1}{x-\pi}\right) = \lim_{x\to\pi}\left(\frac{u(x)-u(\pi)}{x-\pi}\right) = u'(\pi) = -\sin\pi = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x + 1}{x-\pi} = 0}$

2 On pose $u(x) = \sqrt{x+1}$. Alors, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{u(x)-u(1)}{x-1}\right) = u'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Corrigé de l'exercice 3.8 page 101

1 On peut écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{g(x)-g(a)}$$

car $f(a) = g(a) = 0$.

Or, $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = f'(a)$ d'après la définition du nombre dérivé (vue en classe de première).

De même, $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = g'(a)$ donc $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{x-a}{g(x)-g(a)}\right) = \dfrac{1}{g'(a)}$ ($g'(a)\neq 0$ par hypothèses).

Ainsi,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{g(x)-g(a)}\right) = f'(a)\times\frac{1}{g'(a)}$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

2 Posons $f(x) = \cos(5x) - \cos(3x)$ et $g(x) = \sin(4x) - \sin(3x)$.
Alors, $f'(x) = -5\sin(5x) + 3\sin(3x)$ et $g'(x) = 4\cos(4x) - 3\cos(3x)$.
Ainsi, $f'(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.
f et g vérifient toutes les conditions nécessaires pour utiliser la règle de l'Hospital donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(5x)-\cos(3x)}{\sin(4x)-\sin(3x)}\right) = 0}$$

Corrigé de l'exercice 3.9 page 101

- $\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right) = \mathrm{e}^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$
- $\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right) = \mathrm{e}^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$

On a donc une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ » donc on pense à faire apparaître un ou plusieurs taux d'accroissement.

$$\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}=\frac{e^x-1}{x-0}\times\frac{x-0}{e^{2x}-1}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{u(x)-u(0)}{x-0}\right)=u'(0)=e^0=1$ avec $u(x)=e^x$ et donc $u'(x)=e^x$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-0}{e^{2x}-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-0}{v(x)-v(0)}\right)=\dfrac{1}{v'(0)}=\dfrac{1}{2e^0}=\dfrac{1}{2}$ avec $v(x)=e^{2x}$ et donc $v'(x)=2e^{2x}$.

On en déduit alors que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}\right)=\frac{1}{2}}$$

Methode 5

On aurait pu aussi utiliser la *règle de l'Hospital* vue dans l'exercice précédent, mais elle n'est pas au programme...

Corrigé de l'exercice 3.10 page 102

1 La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x=3$ est horizontale car $f'(3)=0$.
$f(3)=6$ donc son équation est : $\underline{y=6}$.

2 Il y a deux solutions à l'équation $f(x)=4$: l'une sur l'intervalle $]2\,;3[$ et l'autre sur l'intervalle $]3\,;10[$.

Corrigé de l'exercice 3.11 page 102

1 $f'(0)=1$ car $f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$. Et pour calculer le coefficient directeur de cette droite, on considère deux points qui sont sur cette droite : par exemple, $A(-1\,;-1)$ et $O(0\,;0)$.

$$f'(0)=\frac{y_O-y_A}{x_O-x_A}=\frac{0-(-1)}{0-(-1)}=1.$$

$g'(2)=0$ car la tangente à $\mathcal{C}_g$ est horizontale, et comme toute droite horizontale, elle a un coefficient directeur nul.

2 $f(x)\geqslant g(x)\iff x\in[0\,;4]$ car c'est sur cet intervalle que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Corrigé de l'exercice 3.12 page 103

1 $f(0)$ est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 : c'est le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées. Donc $f(0)=-1$.
$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. C'est donc le coefficient directeur de $\mathcal{D}$. Donc $f'(0)=1$ (les points de coordonnées $(0\,;-1)$ et $(1\,;0)$ sont sur la droite donc le coefficient directeur est $\dfrac{y_b-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{0-(-1)}{1-0}=1$.

2 L'énoncé dit que le point de la courbe d'abscisse 1 est un minimum local. Donc $f'(1)=0$.

3 $\mathcal{D}$ a pour équation $y=x-1$ (coefficient directeur égal à 1 et coupe l'axe des ordonnées en -1). Donc l'équation revient à trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.
Les solutions sont donc $x=0$ et $x=2$.

4 La fonction f est croissante jusqu'à $\frac{1}{3}$, puis décroissante jusqu'à 1, puis croissante, d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Corrigé de l'exercice 3.13 page 103

1 $f(0) = 1$ (cela correspond à l'ordonnée du point d'abscisse 0 qui est sur la courbe).

$f'(0) = -\frac{3}{5}$. Pour déterminer cette valeur, on prend deux points de la tangente à la courbe passant par le point d'abscisse $x = 0$. Les points $\mathrm{A}(0\,;1)$ et $\mathrm{B}(5\,;-2)$ sont sur cette tangente. On calcule alors la pente de cette droite :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{5-0} = -\frac{3}{5}.$$

2 $f(3,5) \approx 3,5$ et $f'(3,5) \approx 3,2$.

3 Le tableau de signes de la fonction f' est le suivant :

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

Corrigé de l'exercice 3.14 page 104

1 $f'(x) = 2ax + b - \dfrac{2dx}{(x^2+1)^2}$.

La condition (2) permet d'écrire : $f'(-1) = 0$, soit :

$$-2a + b + \frac{1}{2}d = 0.$$

2 La condition (1) permet d'écrire :

- $A(-1;0) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c + \frac{1}{2}d = 0.$
- $B(0;1) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c + d = 1.$
- $C(1;2) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + \frac{1}{2}d = 2.$

3 Nous avons alors le système suivant :

$$\begin{cases} -2a + b \qquad + \frac{1}{2}d = 0 & E_1 \\ \qquad\qquad c + \quad d = 1 & E_2 \\ a - b + c + \frac{1}{2}d = 0 & E_3 \\ a + b + c + \frac{1}{2}d = 2 & E_4 \end{cases}$$

En faisant $(E_4) - (E_3)$, on arrive à l'équation :

$$(E_4) - (E_3) \quad : \quad 2b = 2$$

Ainsi, $\underline{b = 1}$, d'où le système suivant :

$$\begin{cases} -2a \qquad + \frac{1}{2}d = -1 & E_1' \\ \qquad c + \quad d = 1 & E_2' \\ a + c + \frac{1}{2}d = 1 & E_3' \end{cases}$$

En faisant $(E_3') - (E_2')$, on a :

$$(E_3') - (E_2') \quad : \quad a - \frac{1}{2}d = 0$$

Soit : $\underline{d = 2a}$. L'équation (E_1') est donc équivalente à :

$$-d + \frac{1}{2}d = -1$$

Soit : $\underline{d = 2}$ et donc $\underline{a = 1}$. L'équation (E_2') donne alors : $c + 2 = 1$, soit $\underline{c = -1}$.

Finalement, on a : $\boxed{f(x) = x^2 + x - 1 + \dfrac{2}{x^2+1}}$.

Corrigé de l'exercice 3.15 page 104

1 $f(0) = 6$ car $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée égale à 6.
De plus, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $c = 6$.

2 $f'(x) = 2ax + b$.

3 $f'(1) = -3$ car le coefficient directeur de $\mathcal{T}_1$ est égal à -3.
$f'(-1) = 1$ car le coefficient directeur de $\mathcal{T}_{-1}$ est égal à 1.
$f'(1) = 2a + b = -3$ et $f'(-1) = -2a + b = 1$. D'où :

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \implies (2a+b) + (-2a+b) = -3 + 1 \implies 2b = -2 \implies b = -1.$$

alors,

$$2a + b = -3 \implies 2a + (-1) = -3 \implies 2a = -3 + 1 = -2 \implies a = -1.$$

4 L'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions -3 et 2. En effet, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives -3 et 2.
$f(x) = -x^2 - x + 6$ donc son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25,$$

d'où deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Corrigé de l'exercice 3.16 page 104

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Sur $]-\infty\,;1]$, f est une fonction polynôme de degré 2 donc continue ;
- sur $]1\,;+\infty[$, f est une fonction affine donc continue ;
- de plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = (1-1)^2 + 3 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 1 + 2 = 3$, donc f est continue en 1.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 3.17 page 105

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - k & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sur $[-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, g est continue comme fonction polynôme d'une part, et exponentielle d'autre part.

Pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut que g soit continue en 0, c'est-à-dire que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(x^2+3x-k\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(e^x+2\right),$$

soit quand :

$$-k = e^0 + 2 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{k=-3}$$

Corrigé de l'exercice 3.18 page 105

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-0^2} = 1\,;$
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1.$
Les deux limites (à droite et à gauche de zéro) sont égales, donc f est continue en 0.

Corrigé de l'exercice 3.19 page 105

1 Calculons $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \times \frac{\sqrt{4-x}+2}{\sqrt{4-x}+2} \\ &= \frac{(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{4-x-4} \\ &= \frac{(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{-x} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left[(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)\right] &= -8 \\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x) &= 0^- \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(par quotient)} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left[(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)\right] &= -8 \\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-x) &= 0^+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(par quotient)} \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$$

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ donc f n'est pas continue en 0.

2 Calculons $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2} (x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right) = 0^- \\ &\lim_{x\to 2} (-x) = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ (par quotient) } \lim_{x\to 2} f(x) = 0$$

Ainsi, $f(2) = \displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$.

La fonction f est donc continue en 2.

Corrigé de l'exercice 3.20 page 105

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+x+2}+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} \\ &= \frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)} \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} \quad \text{si } x \neq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{3}{4} = f(1)$. Donc f est continue en 1.

Corrigé de l'exercice 3.21 page 105

Posons $f(x) = 3x^3 - 5x + 1$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.
  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = 9x^2 - 5$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}}{3}$		$\frac{\sqrt{5}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$3,48$	$\searrow$	$-1,48$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 3,48 \qquad ; \qquad f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx -1,48.$$

- Notons $I_1 = \left]-\infty\,;-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right[$, $I_2 = \left]-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\,;\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right[$ et $I_3 = \left]\dfrac{\sqrt{5}}{3}\,;+\infty\right[$.
  f est continue et strictement monotone sur I_k, $k = 1,\ 2,\ 3$.
  De plus, d'après les variations de f, $0 \in f(I_k)$, $k = 1,\ 2,\ 3$.

  Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chacun des intervalles I_k, $k = 1,\ 2,\ 3$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que chacun d'eux.
  Donc l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles :
  → $\alpha \approx -1,381$;
  → $\beta \approx 0,205$;
  → $\gamma \approx 1,176$.

Corrigé de l'exercice 3.22 page 105

1 f est de la forme $u \times v$ avec :

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1 \qquad ; \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

$$\text{D'où :} \quad \begin{aligned} f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \times x \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}}$$

2 $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$, c'est-à-dire positif sur $[-2\,;1]$ (intervalle où est définie notre fonction f).
Par conséquent, f est strictement croissante sur $[-2\,;1]$.

3 Sur $[-2\,;1]$,

- f est continue (comme produit de deux fonctions continues) et strictement croissante ;
- $f(-2) = -2\mathrm{e}^2 + 2 \approx -12,8 < 0$ et $f(1) = e^{-1} + 2 > 0$; ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre $f(-2)$ et $f(1)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in [-2\,;1]$ telle que $f(\alpha) = 0$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0,85$ (il suffit de dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ sur $[-2\,;1]$ avec un pas de 0,01 pour x).

Corrigé de l'exercice 3.23 page 106

1 f est de la forme $u \times v$ avec :
$u(t) = 1 - 0,02t$, $u'(t) = -0,02$, $v(t) = \mathrm{e}^{-0,2t}$, $v'(t) = -0,2\mathrm{e}^{-0,2t}$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= (u'v + v'u)(t) \\ &= -0,02\mathrm{e}^{-0,2t} - 0,2(1 - 0,02t)\mathrm{e}^{-0,2t} \\ &= \big[-0,02 - 0,2(1 - 0,02)t\big]\mathrm{e}^{-0,2t} \\ &= (0,004t - 0,22)\mathrm{e}^{-0,2t}. \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$ pour tout réel t donc $f'(t)$ est du signe de $0,004t - 0,22$.

$$0,004t - 0,22 > 0 \iff t > \frac{0,22}{0,004} \iff t > 55.$$

Ainsi, $f'(t) < 0$ sur $[0\,;50]$. La fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

2 Sur $[0\,;50]$,

- f est continue et strictement décroissante ;
- $f(0) = 1$ et $f(50) = 0$ donc $0,5$ est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(50)$.

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in [0\,;50]$ telle que $f(\alpha) = 0,5$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3,1$.
Cela signifie qu'au bout de 3,1 h, soit 3 heures 06 min, le taux du médicament dans le sang sera de 0,5.

Corrigé de l'exercice 3.24 page 106

Posons $g(x) = f(x) - x$.

- $g(0) = f(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$;
- $g(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$;
- g est continue (car c'est la somme de deux fonctions continues) sur $[0\,;1]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0\,;1]$, ce qui signifie qu'il en est de même pour l'équation $f(x) = x$ car $g(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Corrigé de l'exercice 3.25 page 106

Partie A

1 $$\begin{aligned} u'(x) &= 1\times\sqrt{1+x}+(x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \sqrt{1+x}+\frac{x-1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{1+x}\times 2\sqrt{1+x}\right)+x-1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2(1+x)+x-1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2+2x+x-1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \boxed{\frac{3x+1}{2\sqrt{1+x}}} \end{aligned}$$

2 Sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $3x+1)>0$ donc u est strictement croissante.
De plus, $u(0)=1+(0-1)\sqrt{1+0}=1-1=0$.
On en déduit alors que $u(x)\geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

Partie B

1 $$\begin{aligned} d'(x) &= f'(x)-g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}+\frac{x\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1-\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1+(x-1)\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \boxed{\frac{u(x)}{2\sqrt{1+x}}} \end{aligned}$$

2 $d'(x)$ est du signe de $u(x)$ sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ car $2\sqrt{1+x}>0$.
D'après la partie A, $u(x)\geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ donc $d'(x)\geqslant 0$.
Ainsi, d est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

On a : $d(0)=f(0)-g(0)=1-1=0$ et $d\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{19}{16}$.

On a le tableau suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$
$d(x)$	0 $\nearrow$	$\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{19}{16}$

3 Les variations de d nous suggèrent qu'en approximant $f(x)$ par $g(x)$ pour $x\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, l'erreur commise est inférieure ou égale à $\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{19}{16}$, soit inférieure à 0,04.

4 $\sqrt{4,5} = \sqrt{4+0,5}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4\left(1+\frac{0,5}{4}\right)}\\
&= \sqrt{4}\times\sqrt{1+\frac{1}{8}}\\
&= 2\sqrt{1+\frac{1}{8}}\\
&= 2f\left(\frac{1}{8}\right)\\
&\approx 2g\left(\frac{1}{8}\right)\\
&\approx 2\times\left[1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{8^2}\right]\\
&\approx 2+\frac{1}{8}-\frac{1}{128} \qquad \rightarrow \quad -\frac{1}{128}=\frac{0,5}{64}=\frac{0,25}{32}=\dots=0,0078125\\
&\approx 2+0,125-0,0078125\\
&\approx 2,117.
\end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve $\sqrt{4,5}\approx 2,121$. La marge d'erreur est alors d'environ 0,004 avec la valeur trouvée avec g.

Corrigé de l'exercice 3.26 page 107

1 Le taux de présence de ce produit après 1 heure correspond à :

$$f(1) = 1,5\times 2\times \mathrm{e}^{-1} - 0,5 \approx 0,6036.$$

Le produit injecté est donc présent dans le sang à environ $60,36\,\%$ après une heure.

2 f est de la forme $u\times v$ donc $f' = u'v + uv'$, avec :

$$u(t) = 1,5(t+1) \qquad v(t) = \mathrm{e}^{-t}$$
$$u'(t) = 1,5 \qquad v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 1,5\mathrm{e}^{-t} + 1,5(t+1)\big(-\mathrm{e}^{-t}\big)\\
&= \big[1,5+(1,5t+1,5)(-1)\big]\mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t) = -1,5t\mathrm{e}^{-t}}$$

3 Pour $t\in[0\,;+\infty[$, $-1,5t\leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-t}>0$, donc $f'(t)\leqslant 0$.
f est donc décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

4 Nous avons :

- $\lim\limits_{t\to+\infty} 1,5(t+1) = +\infty$;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} 1,5(t+1)\mathrm{e}^{-t}$ est une forme indéterminée du type « $\infty\times 0$ » ; il nous faut donc exprimer $f(t)$ différemment pour lever cette indétermination.

$$f(t) = 1,5\frac{t}{\mathrm{e}^t} + 1,5\mathrm{e}^{-t} - 0,5.$$

Or, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ (cours : croissances comparées) et $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t} = 0$ donc, par somme :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = -0,5}$$

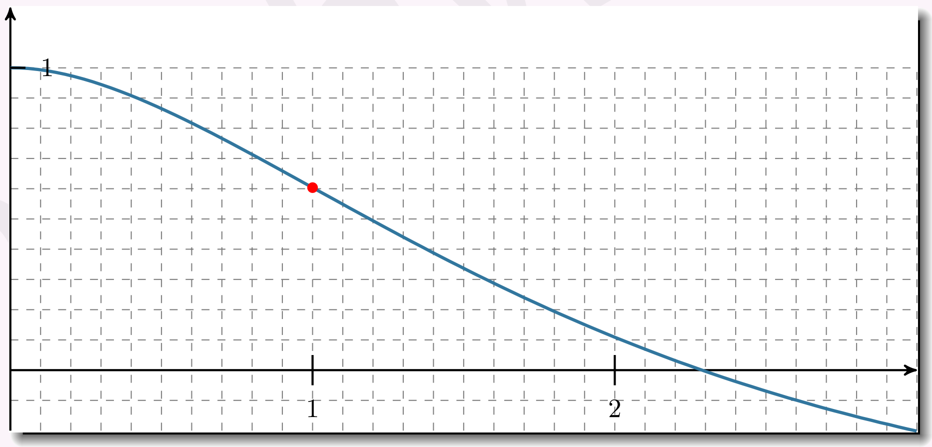
5 Sur $[0\,;+\infty[$, f est continue et décroissante.
De plus $f(0)=1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=-0,5$, et $0\in\,]-0,5\,;1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t)=0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha\approx 2,29$.
Cela signifie qu'après 2,29 h, soit après 2 heures 17 min 24 s, le produit aura théoriquement totalement disparu du sang.

6 $t-1\geqslant 0 \iff t\geqslant 1$ et $1,5\mathrm{e}^{-t}>0$. Ainsi,

- $f''(t)\leqslant 0$, donc f est concave, sur $[0\,;1]$;
- $f''(t)\geqslant 0$, donc f est convexe, sur $[1\,;+\infty[$;

Par conséquent, la courbe représentative de f admet un point d'inflexion de coordonnées $(1\,;f(1))$.
La vitesse de dilution du produit correspond à la dérivée $f'(t)$, et cette vitesse diminue quand la fonction passe de concave à convexe.
Ainsi, la vitesse de dilution du produit commence à diminuer à partir d'une heure après son injection.



Corrigé de l'exercice 3.27 page 107

1 $g'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\frac{1\times\sqrt{x^2+1}-x\times\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}\\
&=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\\
&=\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\\
&\boxed{g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}
\end{aligned}$$

$(x^2+1)>0$ et $\sqrt{x^2+1}>0$ donc $g'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Notons que la fonction g est impaire car $g(-x)=-g(x)$ et que son domaine de définition est centré en 0. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} \quad \text{pour } x \neq 0 \\
&= \frac{x}{|\,x\,|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \qquad \text{pour } x > 0.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$.
Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

3 $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 2 \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \end{aligned}$$
$f'(x) = g(x) - 2$.
Nous avons dit que g était strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

Donc $g(x) < 1$ sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $g(x) - 2 < 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 $f(0) = 1$ et $f(1) = \sqrt{2} - 2 < 0$.
Or, f est strictement décroissante et continue sur $[0\,;1]$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;1]$. On trouve $\alpha \approx 0,58$.

Corrigé de l'exercice 3.28 page 107

1 $$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{-x} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{x} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Remarque 24

Cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère, ce qui justifie que l'on étudie f uniquement sur $]0\,;+\infty[$ par la suite.

2 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
Or,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\mathrm{e}^{x}}\right) = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3 On peut écrire pour tout réel x non nul :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + \frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{1+e^{-x}}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$.

Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty}$$

4 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x)=e^x+e^{-x}$ $\qquad v(x)=x$

$u'(x)=e^x-e^{-x}$ $\qquad v'(x)=1$

Donc :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{u'v-v'u}{v^2}(x)\\&=\frac{x\left(e^x-e^{-x}\right)-\left(e^x+e^{-x}\right)}{x^2}\\&=\frac{xe^x-xe^{-x}-e^x-e^{-x}}{x^2}\times\frac{e^x}{e^x}\\&=\frac{xe^{2x}-x-e^{2x}-1}{x^2e^x}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}-x-1}{x^2e^x}}$$

5 **a.** $u'(x)=e^{2x}+2(x-1)e^{2x}-1=(2x-1)e^{2x}-1$.
Par suite, on trouve $u''(x)=2e^{2x}+2(2x-1)e^{2x}=4xe^{2x}$.

b. Sur $[0\,;+\infty[$, $u''(x)\geqslant 0$ donc u' est strictement croissante.
De plus, $u'(0)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}u'(x)=+\infty$.
u' étant continue, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u'(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$u'(x)$	-2 ↗	0	↗ $+\infty$

À la calculatrice, on trouve : $\alpha\approx 0{,}639$.

c. On déduit de la question précédente le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	-2	↘	$u(\alpha)$	↗	$+\infty$

- $u(\alpha)\approx -2{,}9$.
- $u(x)=x\left[\dfrac{x-1}{x}e^{2x}-1-\dfrac{1}{x}\right]$.

De plus,

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}e^{2x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1-\dfrac{1}{x}\right)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}u(x)=+\infty.$$

u étant continue sur $]\alpha\,;+\infty[$, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution β à l'équation $u(x)=0$ sur cet intervalle.
À la calculatrice, on trouve $\beta \approx 1,2$.

6 $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ donc :

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Corrigé de l'exercice 3.29 page 108

Partie A

1 **a.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)=\mathrm{e}^0=1$.
Ainsi, par somme, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

b. De même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{X}\right)=0$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)=0$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=0$.

d. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{X}\right)=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)=-\infty$.
Ainsi, par somme, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$.

2 $f'(x)=1-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1+\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}>0$ pour tout x non nul.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

3 f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
De plus, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique valeur α sur $]0\,;+\infty[$ telle que $f(\alpha)=0$.
À la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 1,76$.

Partie B

Notons ℓ la limite de (u_n). Alors, $\ell>0$ car u_n est une exponentielle.
De plus, la suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=g(u_n)$, avec $g(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
g est continue sur $]0\,;+\infty[$; de plus, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ donc $g\big(]0\,;+\infty[\big)=]1\,;+\infty[\subseteq]0\,;+\infty[$.
Ainsi, d'après le théorème du point fixe, $\ell=g(\ell)$, soit :

$$\begin{aligned}\ell=\mathrm{e}^{\frac{1}{\ell}} &\iff \ell-\mathrm{e}^{\frac{1}{\ell}}=0\\ &\iff f(\ell)=0.\end{aligned}$$

Or, l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ est α.
Donc $\ell=\alpha$.

Corrigé de l'exercice 3.30 page 108

1 $$\begin{aligned} \mathrm{e}^x = \frac{1}{x} &\iff \mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff x - \mathrm{e}^{-x} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2 **a.** $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive.
Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{X}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty$.
Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right) = \lim\limits_{X\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{X}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$.
- f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.

c. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx -0,12$ et $f(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0,63 > 0$ donc $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

d. La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\alpha]$ et $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ donc $f(x) < 0$ sur $[0\,;\alpha]$.

3 $$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x} = x \\ &\iff 1 + x = x(1+\mathrm{e}^x) \\ &\iff 1 + x = x + x\mathrm{e}^x \\ &\iff 1 = x\mathrm{e}^x \\ &\iff \frac{1}{\mathrm{e}^x} = x \\ &\iff x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0 \\ &\iff x - \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ &\iff f(x) = 0 \end{aligned}$$

4 α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$, donc l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ car les deux équations sont équivalentes.

5 $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1 \times (1+\mathrm{e}^x) - (1+x) \times \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{1 + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{1 - x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $g'(x) > 0 \iff 1 - x\mathrm{e}^x > 0$ car $(1+\mathrm{e}^x)^2 > 0$ pour tout réel x.

$$\begin{aligned} \text{Or, } 1 - x\mathrm{e}^x > 0 &\iff 1 > x\mathrm{e}^x \iff \frac{1}{\mathrm{e}^x} > x \\ &\iff x - \mathrm{e}^{-x} < 0 \iff f(x) < 0 \\ &\iff x \in [0\,;\alpha[\end{aligned}$$

Ainsi, g est croissante sur $[0\,;\alpha]$.

6
- $u_0 = 0$ et $u_1 = g(u_0) = g(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$.
L'initialisation est faite.
- Supposons que pour un entier n donné, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
Comme g est croissante sur $[0\,;\alpha]$, alors,

$$g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\alpha)\ ,$$

soit :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$$

car $g(\alpha) = \alpha$ d'après la question 4.

Comme $0 < \frac{1}{2}$, on a bien :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.$$

L'hérédité est alors vérifiée ; par conséquent, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.}$$

7 De la question précédente, on déduit que (u_n) est croissante et majorée.
Or, *toute suite croissante et majorée converge.*
Donc, (u_n) converge.

8 De l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$, on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(u_n)$$
$$\ell = g\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \quad \text{car } g \text{ est continue}$$
$$\boxed{\ell = g(\ell)}$$

Ainsi, ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$. Or, α est l'unique solution de cette équation.
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

9 On a :

n	u_n
0	0
1	0, 5
2	0,566 311 003 2
3	0,567 143 165
4	0,567 143 290 4

Ainsi, $u_4 \approx 0{,}567\ 143$.

Corrigé de l'exercice 3.31 page 109

1
- **Initialisation :** $0 < u_0 < 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $0 < u_k < 1$.

$$\begin{aligned} 0 < u_k < 1 &\Rightarrow -1 < -u_k < 0 \\ &\Rightarrow 2 < 3 - u_k < 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3 - u_k} < \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{3 - u_k} < 1 \\ &\Rightarrow 0 < u_{k+1} < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

2 $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3-u_n} - u_n = \dfrac{2-u_n(3-u_n)}{3-u_n} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3-u_n} = \dfrac{(u_n-1)(u_n-2)}{3-u_n}$.

Or, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$ donc :

- $u_n - 1 < 0$
- $u_n - 2 < 0$
- $3 - u_n > 0$

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi, (u_n) est strictement croissante.

3 (u_n) est bornée, donc majorée, et strictement croissante donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge.

On pose ℓ sa limite. Alors,

$$\begin{aligned}\ell = \frac{2}{3-\ell} &\iff \ell(3-\ell) = 2\\ &\iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0\\ &\iff \ell = 1 \text{ ou } \ell = 2.\end{aligned}$$

Or, $0 < u_n < 1$ donc $0 < \ell < 1$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

On en déduit alors que :

$$\cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \ddots}}}} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 3.32 page 110

Partie A : étude d'une fonction

1

- Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

  $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\right) = -\infty$ donc, pas somme :

  $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

- Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

  Commençons par transformer l'expression de $f(x)$:

  $$\begin{aligned}f(x) &= \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\\ &= \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x^2}{2\mathrm{e}^x} + \frac{2x}{\mathrm{e}^x} - \frac{2}{\mathrm{e}^x}\right)\end{aligned}$$

  Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$ donc, par somme et produit :

  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

2
- La dérivée de f est :
$$f'(x) = \mathrm{e}^x - x + 2.$$
- La dérivée seconde de f est :
$$f''(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

3 On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

4
- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$ donc f est concave sur cet intervalle.
- $f''(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$ donc f est convexe sur cet intervalle.
- $f''(x) = 0$ en changeant de signe en $x = 0$ donc $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion en $x = 0$.

5 Sur $]0\,;1[$,
- f est continue et strictement croissante ;
- $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = \mathrm{e} - \dfrac{1}{2} > 0$, donc $f(0) < 0 < f(1)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans $]0\,;1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

6 Par définition,
$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \mathrm{e}^\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 2. \end{aligned}$$

Partie B : étude d'une suite

1 On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > \alpha$; par conséquent, comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) > f(\alpha)$.
Or, $f(\alpha) = 0$ donc $f(u_n) > 0$.

2 $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Or, $f'(x) > 0$ donc $f'(u_n) > 0$. De plus, $f(u_n) > 0$ d'après la question précédente.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui signifie que (u_n) est décroissante.

De plus, $u_n > \alpha$ donc (u_n) est minorée.
Or, toute suite décroissante et minorée converge.
Par conséquent, (u_n) converge.

3 Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$.
Alors, de l'égalité :
$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)},$$

on déduit :

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \quad \text{(car } f \text{ et } f' \text{ sont continues)}$$

soit :

$$0 = -\frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

et donc :

$$f'(\ell) = 0.$$

Ainsi, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.
Or, nous avons vu que cette équation admettait une unique solution : α.

Ainsi, (u_n) converge vers α.

Corrigé de l'exercice 3.33 page 110

1 f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet ensemble.
On a :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Or, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive, donc $-\mathrm{e}^{-x} < 0$ et $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;1[$.

3 La formule qui donne l'équation réduite de la tangente en un point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

ce qui donne ici :

$$\begin{aligned}
y &= \left(-\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\right)(x-1) + \mathrm{e}^{-1} - 1 \\
&= \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} \\
&= -\left(\frac{2+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}\right)(x-1) + \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} \\
&= -\left(\frac{2+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}\right)x + \frac{2+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} + \frac{2-2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} \\
&\boxed{y = -\left(\frac{2+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}\right)x + \frac{4-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}}
\end{aligned}$$

4 L'abscisse du point d'intersection de (T_0) et de l'axe des abscisse se trouve en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{2+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}\right)x_1 + \frac{4-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -\left(\frac{2+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}\right)x_1 = -\frac{4-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} \\
\Leftrightarrow\ & x_1 = \frac{4-\mathrm{e}}{\cancel{2\mathrm{e}}} \times \frac{\cancel{2\mathrm{e}}}{2+\mathrm{e}} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{x_1 = \frac{4-\mathrm{e}}{2+\mathrm{e}}}
\end{aligned}$$

5 **a.** Sur $\mathbb{R}_+^*$, $-\mathrm{e}^{-x} < 0$ et $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ donc $f'(x) < 0$ soit, en particulier, $f'(x) \neq 0$.

b. Par définition, on a :

$$(T_n)\ :\ y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

et en remplaçant x par x_{n+1}, par définition toujours, on doit obtenir 0 :

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} & f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n) \\ \Leftrightarrow\ & x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ (car } f'(x_n) \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \end{aligned}$$

6 **a.** Les valeurs affichées par le programme sont :

```
0.27164934570251265
0.41160233281162323
0.4261836392185189
0.4263027432505926
```

b. Ces valeurs correspondent à celles de x_1, x_2, x_3 et x_4.

c. Dans la mesure où les différentes valeurs de x calculées dans la boucle du programme correspondent aux termes successifs de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, on peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \approx 0,426303$.

7 $\mathcal{C}$ est au-dessus de (T_0) donc $x_1 < \alpha$.
Dans un cas général, le point d'intersection de la tangente à une courbe $\mathcal{C}_f$ (toujours située au-dessus de ses tangentes) et de l'axe des abscisses sera toujours avant la solution de l'équation $f(x) = 0$.
Donc, $x_n \leqslant \alpha$ pour tout entier naturel n.

8 Par définition, $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
Or, $f(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;\alpha]$ (d'après les variations de f) et $f'(x) < 0$ sur ce même intervalle. Par conséquent, $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$, soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ croissante sur $]0\,;\alpha]$.

Or, la suite est majorée par α, donc elle converge. Notons ℓ sa limite. Alors, la relation :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

devient (car f et f' sont continues sur $]0\,;\alpha]$) :

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

soit :

$$f(\ell) = 0.$$

Or, l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\,;\alpha]$ est α.
Donc la limite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est α.

Corrigé de l'exercice 3.34 page 111

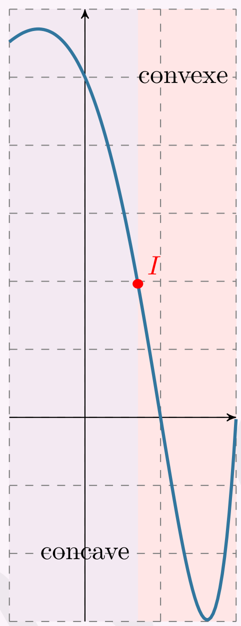
1 Quel que soit le point de la courbe, la tangente en ce point est toujours *sous* la courbe ; on dit ici que la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes.

Ainsi, la fonction est toujours *convexe* sur l'intervalle où est tracée la courbe.

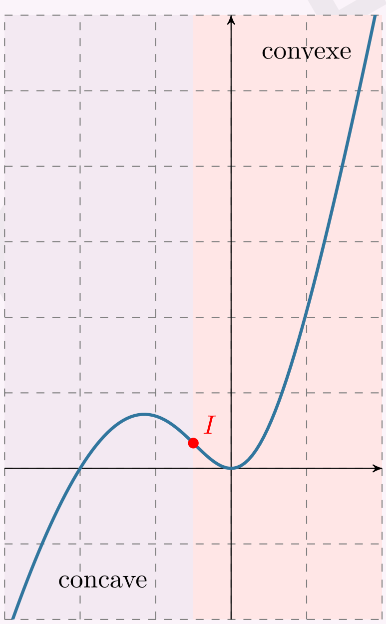
2 Ici, la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes, donc la fonction est *convexe* sur l'intervalle où est tracée la courbe.

3 Au début de l'intervalle, la courbe est sous ses tangentes jusqu'à un point I au-delà duquel la courbe est sous ses tangentes.

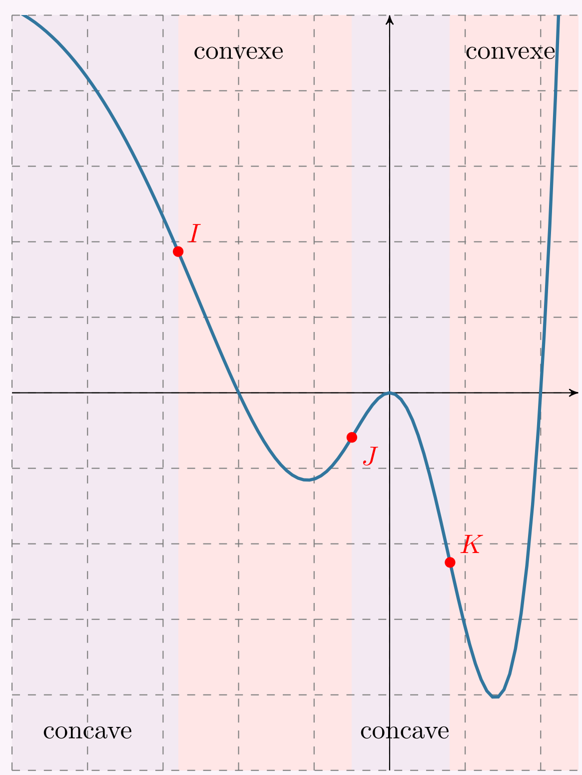
On peut alors dire que I est un point d'inflexion et que l'on a :



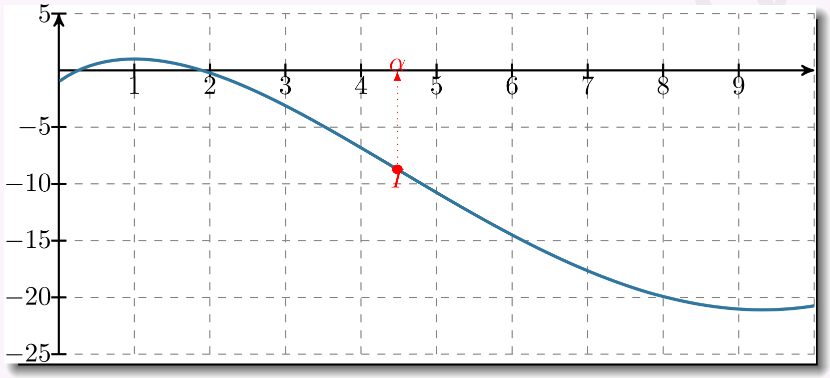
4



5



Corrigé de l'exercice 3.35 page 112



Sur $]0\,;\alpha]$, f est concave car la courbe est en dessous de ses tangentes.
Sur $[\alpha\,;+\infty[$, f est convexe car la courbe est au-dessus de ses tangentes.

Corrigé de l'exercice 3.36 page 112

« Déterminer la convexité d'une fonction » signifie regarder sur quels intervalles cette fonction est concave, et sur quels autres intervalles elle est convexe.
Quand il s'agit de regarder la convexité d'une fonction en ayant son expression, nous devons calculer sa dérivée seconde et étudier le signe de cette dernière.
f est de la forme uv donc $f' = u'v + v'u$ avec :

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 1\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

f' est aussi de la forme uv avec :

$$u(x) = 1 - x \qquad u'(x) = -1$$
$$v(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (1-x) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= -1\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left[-1-(1-x)\right]\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1-1+x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (x-2)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^{-x} > 0$$

donc $f''(x)$ est du signe de $x - 2$, d'où le tableau de la page suivante.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	P.I.	convexe	

Il y a ici un point d'inflexion car $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

Corrigé de l'exercice 3.37 page 113

1 Le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement correspond à $f(0)$.

$f(0) = 100 + 0^4 \times \mathrm{e}^{-0,1\times 0} = 100.$

Il y a donc initialement 100 personnes qui propagent initialement cette rumeur.

2 **a.** La dérivée de $f(x)$ est la dérivée de $x^4\mathrm{e}^{-0,1x}$ car la dérivée de 100 vaut 0.
$x^4\mathrm{e}^{-0,1x}$ est de la forme uv avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^4 & u'(x) = 4x^3 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,1x} & v'(x) = -0,1\mathrm{e}^{-0,1}x \end{array}$$

donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= 4x^3\mathrm{e}^{-0,1x} + x^4\left(-0,1\mathrm{e}^{-0,1x}\right) \\ &= 4x^3\mathrm{e}^{-0,1x} - 0,1x \times x^3\mathrm{e}^{-0,1x} \\ &= (4 - 0,1x) \times x^3\mathrm{e}^{-0,1x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = x^3(4 - 0,1x)\mathrm{e}^{-0,1x}}$$

b. $f'(x)$ est du signe de $4 - 0,1x$ car une exponentielle est toujours strictement positive et $x^3 \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$.
De plus,

$$\begin{aligned} 4 - 0,1x \geqslant 0 &\iff 4 \geqslant 0,1x \\ &\iff \frac{4}{0,1} \geqslant x \\ &\iff 40 \geqslant x \end{aligned}$$

d'où le tableau suivant :

x	0		40		50
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	100	$\nearrow$		$\searrow$	42 212

3 f est convexe si $f''(x) \geqslant 0$.
On voit que $f''(x)$ est du signe de $0,01x^2 - 0,8x + 12$, donc le discriminant est :

$$\Delta = (-0,8)^2 - 4 \times 0,01 \times 12 = 0,16$$

donc les deux racines sont :

$$x_1 = \frac{0,8 - \sqrt{0,16}}{0,02} = 20 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{0,8 + \sqrt{0,16}}{0,02} = 60 > 50.$$

Ainsi,

- $f''(x) \leqslant 0$, donc f est concave, sur $[20\,;50]$;
- $f''(x) \geqslant 0$, donc f est convexe, sur $[0\,;20]$.

4 **a.** f est croissante jusqu'à $x = 40$, donc il faut attendre 40 jours avant que la rumeur diminue.

b. Le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur est $f(40) \approx 46\,988$.

c. La notion de « diminution de croissance » est assez difficile à comprendre pour des élèves de Terminale ES ; il faut juste retenir que *la croissante diminue (ou augmente) quand il y a un changement de convexité*. Ainsi, cela correspond à la présence d'un point d'inflexion. Ici, c'est au bout de 20 jours que cela se produit (d'après la question **3** .

Corrigé de l'exercice 3.38 page 113

Une courbe admet un point d'inflexion uniquement lorsque la dérivée seconde s'annule *en changeant de signe*. Or, pour tout réel x,

- $(x-1)^2 \geqslant 0$, en s'annulant pour $x = 1$,
- $\mathrm{e}^x > 0$.

La condition $f''(x) = 0$ est bien satisfaite en $x = 1$, mais $f''(x)$ ne change pas de signe en cette valeur.

Ainsi, la courbe représentative de f n'admet pas de point d'inflexion.

Corrigé de l'exercice 3.39 page 113

1 **a.** $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} > 0\\ \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0^- \text{ car } x < 1 \iff x - 1 < 0.\end{array}\right\} \Rightarrow \text{(par quotient des limites) } \boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty}.$$

b. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = 1$.

2 $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}(\mathrm{e}^x) = 0\\ \lim\limits_{x\to -\infty}(x-1) = -\infty.\end{array}\right\} \Rightarrow \text{(par quotient des limites) } \boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0}.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet également une asymptote, d'équation $y = 0$, au voisinage de $-\infty$.

3 **a.** f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\begin{aligned}\forall\, x \in\,]-\infty\,;1[,\quad f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x-1)^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1-1)}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}}$$

b. $\forall\, x \in\,]-\infty\,;1[$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x-2)$.

$$x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2,$$

d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	$\Vert$
f	$0 \searrow -\infty$	$\Vert$

4 **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.
$\forall\, x \in\,]-\infty\,;1[,\quad (x-1) < 0 \iff (x-1)^3 < 0$.

De plus, $e^x > 0$. On en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : $x^2 - 4x + 5$, de discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0,$$

donc n'admettant pas de racine, ce qui signifie qu'il est strictement positif (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x.

Ainsi, $f''(x) < 0$, et donc f est concave sur $]-\infty\,;1[$.

b. Pour déterminer l'équation de T, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

- $f'(0) = \dfrac{(0-2)e^0}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$;
- $f(0) = \dfrac{e^0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

La formule classique donne une équation pour T :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = -2x - 1.$$

L'équation réduite de T est donc : $y = -2x - 1$.

c. f est concave sur $]-\infty\,;1[$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est *sous* ses tangentes, notamment sous la tangente T.

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} x \in \,]-\infty\,;1[&\implies f(x) \leqslant -2x-1 \\ &\implies \frac{e^x}{x-1} \leqslant -2x-1 \\ &\implies e^x \geqslant (x-1)(-2x-1) \qquad \text{car sur }]-\infty\ ;\ 1[,\quad x-1<0 \\ &\implies e^x \geqslant (-2x-1)(x-1). \end{aligned}$$

5 **a.** La fonction f est, sur $]-\infty\ ;\ 1[$:

- continue (car dérivable) ;
- strictement décroissante (d'après la question 3. b.) ;
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ et $-2 \in \,]-\infty\,;0[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

b. $f(0) = -1$ d'après la question 4.b. On sait donc que la solution sera à chercher dans l'intervalle $]0\,;1[$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve :

- $f(0,31) \approx -1,98 > -2$;
- $f(0,32) \approx -2,03 < -2$.

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $0,31 < \alpha < 0,32$.

Corrigé de l'exercice 3.40 page 114

1 On a d'une part :

$$f(0) = \frac{800}{1+15e^0} = \frac{800}{16} = 50,$$

D'autre part :

- $0,05f(x) = \dfrac{0,05 \times 800}{1+15e^{-0,05x}} = \dfrac{40}{1+15e^{-0,05x}}$
- $0,001\ 25f(x) = \dfrac{0,001\ 25 \times 800}{1+15e^{-0,05x}} = \dfrac{1}{1+15e^{-0,05x}}$
- $1 - 0,001\ 25f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+15e^{-0,05x}} = \dfrac{1+15e^{-0,05x}-1}{1+15e^{-0,05x}} = \dfrac{15e^{-0,05x}}{1+15e^{-0,05x}}$

- $0,05f(x)\left(1-0{,}001\ 25f(x)\right) = \dfrac{40}{1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}} \times \dfrac{15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}} = \dfrac{40\times 15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{\left(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right)^2}$

$$= \frac{600\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{\left(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right)^2} = f'(x) \text{ (d'après le logiciel de calcul formel).}$$

2 Avec ce nouveau modèle f, l'effectif de cette population en 2050 peut être estimé à $f(50)$ soit environ 358.

3 $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-0,05x) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty}\left(\mathrm{e}^X\right) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right) = 0.$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right) = 1$$

et que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{800}{1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}\right) = 800.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 800$, ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 800$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4 Sur $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{600\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{\left(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right)^2}$.

Or, pour tout réel X, on sait que $\mathrm{e}^X > 0$, donc $\mathrm{e}^{-0{,}05x} > 0$ pour tout x.

$\left(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On en conclut que la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5 On résout l'inéquation $15\mathrm{e}^{-0{,}05x} - 1 \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
15\mathrm{e}^{-0{,}05x} - 1 \geqslant 0 &\iff 15\mathrm{e}^{-0{,}05x} \geqslant 1 \\
&\iff \mathrm{e}^{-0{,}05x} \geqslant \frac{1}{15} \\
&\iff -0,05x \geqslant \ln\left(\frac{1}{15}\right) \\
&\iff x \leqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{-0,05} \\
&\iff x \leqslant \frac{-\ln(15)}{-0,05} \\
&\iff x \leqslant 20\ \ln(15).
\end{aligned}$$

6 On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.

a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on détermine le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

D'après le tableau : $f''(x) = \dfrac{30\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{\left(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right)^3}\left(15\mathrm{e}^{-0{,}05x} - 1\right)$.

D'après ce qui a été vu précédemment, $f''(x)$ est du signe de $\left(15\mathrm{e}^{-0{,}05x} - 1\right)$.

x	0		$20\ln(15)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi,

- f est *convexe* sur $]0\,;20\ln(15)[$;
- f est *concave* sur $]20\ln(15)\,;+\infty[$;
- En $x = 20\ \ln(15)$, $f''(x)$ s'annule et change de signe, donc la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion.

Si $x = 20\ \ln(15)$, $15\mathrm{e}^{-0,05x} - 1 = 0$ donc $15\mathrm{e}^{-0,05\times 20\ln(15)} = 1$

$$f\left(20\ln(15)\right) = \frac{800}{1+15\mathrm{e}^{-0,05\times 20\ln(15)}} = \frac{800}{1+1} = 400.$$

Donc le point de coordonnées $(20\ln(15)\,;400)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

b. La direction de la réserve affirme :

« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».

On établit le tableau de variations de la fonction f' qui modélise la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an.

x	0		$20\ln(15)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'		$\nearrow$		$\searrow$	

Or $20\ \ln(15) \approx 54,2$ donc la direction a raison.

Corrigé de l'exercice 3.41 page 115

Partie A : étude du signe d'une fonction auxiliaire

1 $g(x) = x^3\left(3 + \dfrac{9}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right)$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ pour tout entier naturel n non nul, donc :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(3x^3\right) = -\infty.$$

De même,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3x^3\right) = +\infty.$$

2 $g'(x) = 9x^2 + 18x - 2$. Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4\times 9\times(-2) = 396.$$

Donc $g'(x)$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18-6\sqrt{11}}{18} = \frac{-3-\sqrt{11}}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{11}}{3}.$$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(x_1)$	$\searrow$	$u(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- $g(x_1) \approx 18,1$
- $g(x_2) \approx 1,9$

3
- Sur $]-\infty\,;x_1[$, g est continue et strictement croissante. De plus, $0 \in g(]-\infty\,;x_1[)$.
  Donc, d'après le corollaire d u théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;x_1[$.
- Sur $]x_1\,;+\infty[$, le minimum de g est strictement positif. Donc sur cet intervalle, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Ainsi, il existe bien un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
Une valeur approchée est $\alpha \approx -3,3$.

Partie B : étude des variations d'une fonction

1 $f = u \times v$ avec :

$$u(x) = 3x - 2 \qquad v(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$
$$u'(x) = 3 \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 3\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \\ &= \left(3 + \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{6\sqrt{x} + 3x - 2}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$$

2 **a.** Le discriminant du polynôme $3X^2 + 6X - 2$ est :

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 36 + 24 = 60.$$

Il admet donc deux racines :

$$X_1 = \frac{-6 - \sqrt{60}}{6} = \frac{-3 - \sqrt{15}}{3} < 0$$

et

$$X_2 = \frac{-3 + \sqrt{15}}{3} > 0.$$

D'où le tableau de signes suivant :

X	0		X_2		$+\infty$
$3X^2 + 6X - 2$		$-$	0	$+$	

b. Remarquons que, en posant $X = \sqrt{x}$, on a :

$$f'(X) = \frac{3X^2 + 6X - 2}{2X}\mathrm{e}^X \quad , \qquad X > 0.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $3X^2 + 6X - 2$.

De plus, $X = \dfrac{\sqrt{15} - 3}{3} \iff x = \left(\dfrac{\sqrt{15} - 3}{3}\right)^2 = \dfrac{8 - 2\sqrt{15}}{3}$.

On en déduit alors le tableau suivant :

x	0		$\frac{8-2\sqrt{15}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

3 $f''(x)$ est du signe de $3x\sqrt{x} + 9x - 2\sqrt{x} + 2 = 3X^3 + 9X^2 - 2X + 2$, en posant $X = \sqrt{x}$.
D'après la partie A, pour $X \geqslant 0$, $3X^3 + 9X^2 - 2X + 2 > 0$, donc $f''(x) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
Par conséquent, f est convexe sur $[0\,;+\infty[$.

4 Logarithme népérien

Dans ce chapitre

1 Introduction

1 Définition

Définition 16

On définit la fonction *logarithme népérien* comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, c'est-à-dire l'unique fonction :

$$\begin{array}{rccl} \ln \ : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

pour laquelle :

$$\forall\, x > 0,\ \mathrm{e}^{\ln x} = \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x.$$

2 Variation de la fonction ln

Propriété 22

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

Démonstration 4

Considérons les deux fonctions :

$$u(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x\right) \qquad \text{et} \qquad v(x) = x$$

définies pour tout réel x.
On sait, par définition, que $u(x) = v(x)$ et donc que $u'(x) = v'(x)$.
D'après la formule qui donne la dérivée d'une fonction composée,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(\mathrm{e}^x\right)' \times \ln'\left(\mathrm{e}^x\right) \\ &= \mathrm{e}^x \ln'\left(\mathrm{e}^x\right). \end{aligned}$$

et

$$v'(x) = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u'(x) = v'(x) &\iff \mathrm{e}^x \ln'\left(\mathrm{e}^x\right) = 1 \\ &\iff \ln'\left(\mathrm{e}^x\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \\ &\iff \ln'(X) = \frac{1}{X}, \qquad \text{avec } X = \mathrm{e}^x > 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall\, X > 0, \quad \ln'(X) = \frac{1}{X}.$$

Propriété 23

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante et concave $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration 5

C'est la conséquence de la propriété précédente :

$$\forall\, x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

donc la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Égalité des opérandes et conservation de l'ordre

Propriété 24

Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln(x) = \ln(y) \iff x = y \qquad \text{et} \qquad \ln(x) < \ln(y) \iff x < y.$$

Cette propriété est nécessaire pour résoudre certaines équations avec logarithme népérien.

⚠ Attention 11

Dans la résolution d'équations ou d'inéquations avec des logarithmes, il faut toujours s'assurer que les opérandes soient strictement positives. Dans notre premier exemple, $x^2+7>0$ et $2x^2+3>0$ pour tout réel x ; on peut ainsi résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour l'inéquation.

Exemple 32

1. On souhaite résoudre l'équation $\ln(x^2+7) = \ln(2x^2+3)$.
   - **Domaine de résolution :** $x^2+7>0$ et $2x^2+3>0$ donc $\ln(x^2+7)$ et $\ln(2x^2+3)$ sont définis sur $\mathbb{R}$.
   - **Résolution :**

   $$\begin{aligned}\ln(x^2+7) = \ln(2x^2+3) &\iff x^2+7 = 2x^2+3\\ &\iff x^2 = 4\\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = -2.\end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $\ln(x^2+7) = \ln(2x^2+3)$ est :

   $$\boxed{S = \{-2; 2\}}$$

2. On souhaite résoudre l'inéquation $\ln(x^2+10) > \ln(2x^2+1)$.
   - **Domaine de résolution :** $x^2+10>0$ et $2x^2+1>0$ donc $\ln(x^2+10)$ et $\ln(2x^2+1)$ sont définis sur $\mathbb{R}$.
   - **Résolution :**

   $$\begin{aligned}\ln(x^2+10) > \ln(2x^2+1) &\iff x^2+10 > 2x^2+1\\ &\iff x^2 < 9\\ &\iff x \in]-3\ ;\ 3[.\end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $\ln(x^2+10) > \ln(2x^2+1)$ est :

   $$\boxed{S =]-3\,;3[}$$

Propriété 25

Soient $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln(y).$$

Démonstration 6

C'est la conséquence de la propriété sur l'égalité des opérandes :

$$\begin{aligned} \forall\, y > 0,\ y = \mathrm{e}^x &\iff \ln(y) = \ln\left(\mathrm{e}^x\right) \\ &\iff \ln(y) = x. \end{aligned}$$

Remarque 25

On en déduit notamment que :

$$\ln(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1.$$

Exemple 33

$\mathrm{e}^x = 7 \iff x = \ln(7)$.

4 Relations fonctionnelles

Propriété 26

Pour tous réels x et y strictement positifs, pour tout entier relatif n :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$.

Démonstration 7

- Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(y)} &= \mathrm{e}^{\ln(x)} \times \mathrm{e}^{\ln(y)} \\ &= x \times y. \end{aligned}$$

D'où, en prenant le logarithme népérien des deux membres de l'égalité :

$$\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(y)}\right) = \ln(x \times y) \iff \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy).$$

- Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\ln(x)-\ln(y)} &= \frac{\mathrm{e}^{\ln(x)}}{\mathrm{e}^{\ln(y)}} \\ &= \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

D'où, en prenant le logarithme népérien des deux membres de l'égalité :

$$\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(x)-\ln(y)}\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)) \iff \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

- En prenant $x = 1$ et $y = x$ dans l'égalité précédente, il vient :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1) - \ln(x) = 0 - \ln(x) = -\ln(x).$$

- Faisons un raisonnement par récurrence.
  → **Initialisation :** pour $n = 0$, on a :

$$\forall\, x > 0,\ \ln(x^n) = \ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x).$$

  → **Hérédité :** supposons que pour tout réel $x > 0$ et pour un entier naturel k, $\ln(x^k) = k\ln(x)$.
  Alors,

$$\begin{aligned}\ln\left(x^{k+1}\right) &= \ln\left(x^k \times x\right)\\ &= \ln\left(x^k\right) + \ln(x) \text{ (d'après la propriété du premier point)}\\ &= k\ln(x) + \ln(x) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (k+1)\ln(x).\end{aligned}$$

  → **Conclusion :** l'égalité est vraie pour $n = 0$ et l'hérédité est vérifiée donc, d'après le principe de récurrence, pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier naturel n, $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$.

Exemple 34

- $\ln(39) = \ln(3 \times 13) = \ln(3) + \ln(13)$.
- $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(2) - \ln(3)$.
- $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$.
- $\ln(256) = \ln\left(2^8\right) = 8\ln(2)$.

Attention 12

Faire preuve de rigueur lors de l'utilisation d'une relation fonctionnelle : ne pas scinder $\ln(xy)$ en somme de deux logarithmes sans avoir vérifié et mentionné la stricte positivité de x et y.

En effet, $\ln(39) = \ln\left[(-3) \times (-13)\right]$ mais on ne peut pas écrire que $\ln(39) = \ln(-3) + \ln(-13)$!

2 Limites

1 Limites du logarithme népérien

Propriété 27

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\ln(x)\right] = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x)\right] = +\infty.$$

Démonstration 8

- Soit un réel $A > 0$.

$$\begin{aligned} x > \mathrm{e}^A &\iff \ln(x) > \ln\left(\mathrm{e}^A\right) \\ &\iff \ln(x) > A. \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\forall\, A > 0,\ x > \mathrm{e}^A \Longrightarrow \ln(x) > A.$$

  C'est la définition de la limite infinie : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln(x)\right] = +\infty$.

- Posons $X = \dfrac{1}{x}$.
  Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \left[\ln(x)\right] &= \lim_{X \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{1}{X}\right)\right] \\ &= \lim_{X \to +\infty} \left[-\ln(X)\right] \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Remarque 26

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de la fonction logarithme.

2 Croissances comparées

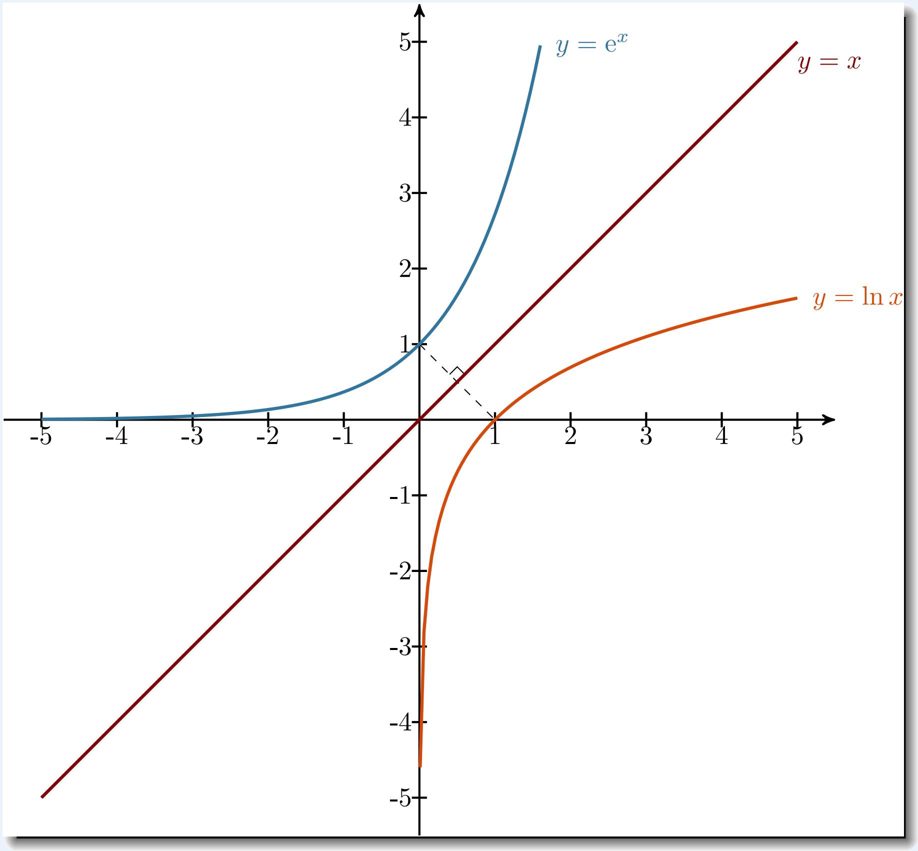
Propriété 28

Pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^n}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \left(x^n \ln x\right) = 0.$$

3 Représentation graphique

De la stricte croissante de la fonction ln, de sa concavité, de ses limites et des valeurs remarquables du logarithme népérien, on déduit sa représentation graphique dans un repère orthonormé :



Du fait que les fonctions exp et ln sont réciproques ($ln\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$), on déduit que, dans un repère orthonormé, leur courbe représentative sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

4 Dérivée de ln(u)

Propriété 29

Soit u une fonction définie et dérivable à valeurs strictement positives sur un intervalle I. Alors, sur I :

$$\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}.$$

Exemple 35

Soit $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$.
Alors, $f(x) = \ln\left[u(x)\right]$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
D'où :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

4 Exercices types

Exercice type 16 ► opérations algébriques

Écrire les nombres suivants uniquement à l'aide de $\ln(3)$.

1 $\ln(9)$ **2** $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ **3** $\ln\left(3\sqrt{3}\right)$ **4** $\ln(36) - 2\ln(2)$

1 $\ln(9) = \ln\left(3^2\right) = 2\ln(3)$.

2 $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$.

3 $\ln\left(3\sqrt{3}\right) = \ln(3) + \ln\left(\sqrt{3}\right) = \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(3) = \frac{3}{2}\ln(3)$.

4 $\ln(36) - 2\ln(2) = \ln(36) - \ln(2^2) = \ln\left(\frac{36}{4}\right) = \ln(9) = 2\ln(3)$.

Exercice type 17 ► résoudre une équation de base

Résoudre les équations suivantes.

1 $e^{-x+1} - 1 = 0$ **2** $-6\ln(x) + 3 = 0$ **3** $\ln(x+3) = 2\ln(x-1)$

1
$$\begin{aligned} e^{-x+1} - 1 = 0 &\iff e^{-x+1} = 1 \\ &\iff e^{-x+1} = e^0 \\ &\iff -x + 1 = 0 \\ &\iff -x = -1 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} -6\ln(x) + 3 = 0 &\iff -6\ln(x) = -3 \\ &\iff \ln(x) = \frac{-3}{-6} \\ &\iff \ln(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff e^{\ln(x)} = e^{\frac{1}{2}} \\ &\iff x = e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3

- **Domaine de résolution :** il faut que $\ln(x+3)$ et que $\ln(x-1)$ soient définis, donc que :

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x > -3 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad x > 1.$$

- **Résolution :**

$$\begin{aligned} \ln(x+3) = 2\ln(x-1) &\iff \ln(x+3) = \ln\left[(x-1)^2\right] \\ &\iff x + 3 = (x-1)^2 \\ &\iff x + 3 = x^2 - 2x + 1 \\ &\iff x^2 - 3x - 2 = 0 \\ &\iff x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < 1 \text{ ou } x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} > 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{S = \left\{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right\}}$$

Exercice type 18 ▶ étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x.$$

1 Déterminer la limite de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.

2 Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3 Calculer $f'(x)$.

4 Donner les variations de f sur son domaine de définition et dresser un tableau de variations complet.

1

- **Limites en 0.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\big[x\ln(x)\big] = 0 \text{ (croissance comparée)} \\ \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{(par somme) } \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

- **Limite en $+\infty$.**

$f(x) = x(\ln(x) - 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\big[\ln(x) - 1\big] = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ (par produit) } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

2

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x\ln(x) = x \\ &\iff \ln(x) = 1 \text{ (car } x \neq 0) \\ &\iff x = \mathrm{e}. \end{aligned}$$

3 $f(x) = uv(x) - x$ avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \ln(x) \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + uv')(x) - 1 \\ &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x) + 1 - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \ln(x)}$$

4

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff \ln(x) \geqslant 0 \\ &\iff x \geqslant 1. \end{aligned}$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0		$+$		
$f(x)$	‖ 0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

4 Exercices

Opérations algébriques, équations et inéquations

Exercice 4.1 (simplifications d'écritures)

Mettre les expressions suivantes sous la forme $\ln(a)$.

1 $\ln(8) - \ln(2)$
2 $\ln(6) + \ln(3)$
3 $\ln(25) - \ln(30) + \ln(10)$
4 $\ln(50) + \ln(2) - \ln(10)$
5 $3\ln(4) - \ln(256)$
6 $2\ln(2) - \ln(16) + \ln(128)$

Solution page 168

Exercice 4.2 (simplifications d'écritures)

Mettre les expressions suivantes sous la forme $n\ln(a)$, où a est un nombre premier et n un entier relatif.

1 $\ln(8) - \ln(2)$
2 $3\ln(4) - \ln(256)$
3 $2\ln(2) - \ln(16) + \ln(128)$
4 $\ln(27) - 8\ln(9) + 14\ln(3)$
5 $\ln(125) - 5\ln(5) + 4\ln(25)$
6 $7\ln(7) - 9\ln(49) + \ln(343)$

Solution page 168

Exercice 4.3 (simplifications d'écritures)

Simplifiez les expressions suivantes :

1 $\ln\left(e^{2x}\right)$
2 $\ln\left(e^{2x-4}\right) - \ln\left(e^{2x+4}\right)$
3 $\dfrac{3\ln\left(e^{x+1}\right)}{2\ln\left(e^{1-x}\right)}$

Solution page 169

Exercice 4.4 (équations)

Résoudre les équations suivantes :

1 $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$
2 $\ln(4-2x) = \ln(x-1)$
3 $\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1)$
4 $\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18)$
5 $\left[\ln(x)\right]^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$
6 $2\left[\ln(x)\right]^2 - 5\ln(x) - 3 = 0$
7 $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\ln(x)}$

Solution page 169

Exercice 4.5 (équations & inéquations avec exponentielle)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1 $\ln(5x-1) = 2$
2 $e^{-x} = 5$
3 $\ln(3x-1) < 0$
4 $e^{5-x} \leqslant 2$

Solution page 172

Exercice 4.6 (inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(5x+20) > \ln(3x-9)$
2. $\ln(8-2x) \leqslant \ln(5x-25)$
3. $\ln(x^2+1) < \ln(2x^2+x+2)$
4. $\ln(2x^2-3x+1) > \ln(-5x^2+8x-3)$
5. $\ln(x^2-5x-14) \leqslant \ln(2x^2-10x+8)$
6. $\ln(x^2+x-6) > \ln(-2x^2+14x+16)$

Solution page 173

Calcul de limites

Exercice 4.7 (démonstration de cours)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

1. Étudier les variations de f sur $[1\,;+\infty[$.
2. En déduire que pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln(x) < x$.
3. Déduire alors que pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{2x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
4. Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Solution page 175

Exercice 4.8 (croissance comparée à l'infinie)

Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\right)$.

Solution page 176

Exercice 4.9 (une limite hors programme)

En considérant la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ et son taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, déterminer la limite :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

Solution page 176

Exercice 4.10 (Limites et asymptotes)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x+1}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. En transformant l'expression de $f(x)$ afin de faire apparaître une croissance comparée, calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Solution page 176

Dérivation et étude de fonctions

Exercice 4.11 (calculs de dérivées)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x\ln(x) - x$
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
3. $f_3(x) = \ln\left(x^2\right)$
4. $f_4(x) = \ln\left(\sqrt{x+1}\right)$
5. $f_5(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$
6. $f_6(x) = \ln\left[\ln(x)\right]$

Solution page 177

Exercice 4.12 (étude d'une fonction)

Faites l'étude complète (étude de la parité, limites aux bornes du domaine de définition et sens de variations) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}.$$

Solution page 179

Exercice 4.13 (étude d'une fonction)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variations de f sur son domaine de définition.
3. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.
   Dresser un tableau de variations complet de la fonction f.

Solution page 180

Exercice 4.14 (étude d'une fonction)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)\ln\left(x^2-2x+1\right).$$

1. Donner le domaine de définition de f. On le notera $\mathcal{D}$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Trouver le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}$, puis en déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$.
   Dresser un tableau de variations complet de f.

Solution page 181

Exercice 4.15 (prise d'antibiotiques)

Lorsque l'on prend des antibiotiques, la concentration de bactéries présentes dans le corps d'une personne malade diminue avec le temps en suivant le modèle d'une fonction f définie, pour $0 \leqslant t \leqslant 6$, par :

$$f(t) = a\mathrm{e}^{kt} + b \quad , \quad a,\ b,\ k \text{ étant trois réels, avec } a \neq 0,$$

où t désigne le temps (exprimé en jour) et où $f(t)$ représente le taux de bactéries restantes.
Ainsi, $f(0) = 1$. On suppose que la totalité des bactéries sont éliminées après 6 jours. Donc $f(6) = 0$.

1 Montrer que $f(t) = a\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)t} + 1 - a$.

2 On sait que 50 % des bactéries disparaissent au bout de deux jours.
En déduire que $a\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)} + \dfrac{1}{2} - a = 0$.

Pour tout nombre réel $x > 1$, on pose :

$$g(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} - x + \frac{1}{2}.$$

3 Montrer que $g'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{3x-3}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} - 1$.

4
- **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$.
- **b.** On admet que $g''(x) = \dfrac{-2}{9x(x-1)}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$.
  En déduire les variations de la fonction g' puis celles de la fonction g sur $]1\,;+\infty[$.

5 Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]1,3\,;1,4[$.
On admet que $\alpha \approx 1,309$.

Solution page 183

Exercice 4.16 (étude d'une fonction)

Soit f la fonction définie pour tout réel $x > -1$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 6x - 1.$$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 Montrer que $f'(x) = \ln(x+1) - 5$.

3 En déduire les variations de f.

4 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;0\right]$ et une autre sur $[395\,;400]$.
En donner une valeur approchée au millième.

Solution page 184

Exercice 4.17 (étude avec fonction auxiliaire)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(x) + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}.$$

1 Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{2x^3}$.

2 Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ et en déduire les variations de h sur $]0\,;+\infty[$.
En déduire ensuite le signe de $h(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(x^2+1\right)\ln(x) - x.$$

1 Calculer sa dérivée puis montrer l'équivalence suivante :

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow h(x) > 0.$$

2 En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

3 **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c. Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

4 **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α, sur $]0\,;+\infty[$.
b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]1\,;2[$.
c. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution page 186

Exercice 4.18 (étude d'une fonction et tangente)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x)$$

et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1 **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

b. En déduire qu'il existe un réel positif unique α tel que : $\alpha\mathrm{e}^\alpha = 1$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2 **a.** Déterminer les limites de f aux bornes de $]0\,;+\infty[$.
b. Calculer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe sur $]0\,;+\infty[$ en utilisant la question 1. Dresser le tableau de variations de f.
c. Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. Justifier que : $2,32 \leqslant m \leqslant 2,34$.

3 Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{T}$ et de l'axe des abscisses.

Solution page 188

Exercice 4.19 (détermination de coefficients)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = k\ln(ax+b)$$

où a, b et k sont trois nombres réels non nuls.

1 On sait que $f(1) = 1$. Montrer alors que $a + b = e^{\frac{1}{k}}$.

2 On sait de plus que $f'(1) = 1$. Montrer alors que $a = \dfrac{b}{k-1}$.

3 En déduire que $b = \left(\dfrac{k-1}{k}\right) e^{\frac{1}{k}}$ puis que $a = \dfrac{1}{k} e^{\frac{1}{k}}$.

4 **a.** Montrer que $f(0) = 1 + k\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

b. On souhaite que $f(0) \approx \dfrac{1}{2}$. Est-ce possible ? Si oui, donner une valeur approchée de k au dixième près.

Aide : on pensera à appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur une fonction appropriée et sur l'intervalle $[-1\,;-0{,}2]$ *par exemple.*

Solution page 190

Exercice 4.20 (étude avec fonction auxiliaire)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2+1}.$$

Pour cela, on considère les fonctions g et h définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = (1-x^2)\ln(x) + x^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) = x^2\left[1 - 2\ln(x)\right].$$

1 **a.** Calculer $h'(x)$ puis en déduire les variations de la fonction h sur $]0\,;+\infty[$.

b. Montrer qu'il existe une unique valeur $\alpha > 1$ telle que $h(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à 0,001 près.

c. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

2 **a.** En vous aidant de la question précédente, trouver les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions β et γ telles que $0 < \beta < 1$ et $\gamma > \alpha$, avec $\gamma = \dfrac{1}{\beta}$.

3 Déduire de la question précédente les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

4 Montrer que $f(\beta) = -f(\gamma)$.

Solution page 191

Exercice 4.21 (avec une fonction auxiliaire)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - xe - 2\ln(x).$$

1 Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2 Déterminer les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

3 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

On notera α cette solution et on en donnera une valeur approchée à 0,01 près.

4 Donner alors le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x) + x\mathrm{e}}{x^2}.$$

1 Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ et en déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

3 Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1+\alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}$.

Solution page 193

Logarithme népérien et suites numériques

Exercice 4.22 (suites avec logarithme népérien)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n + 1). \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) - x.$$

1 Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à -1, $f(x) \leqslant 0$.

2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3 Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.

4 Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution page 195

Exercice 4.23 (suite se ramenant à une suite géométrique)

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5\mathrm{e} \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n} \end{cases}$$

1 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 5$.

2 Étudier les variations de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

3 En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

4 Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n) - \ln(5)$.

a. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique. Préciser alors sa raison et son premier terme.

b. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

c. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5 Pour tout entier naturel n, on pose $P_n = \dfrac{u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}{5^n}$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

Solution page 196

Exercice 4.24 (suite de fonctions)

1 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $\varphi \ : \ x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$.

2 Soit n un entier naturel non nul, n étant fixé pour cette question. On définit la fonction f_n sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}.$$

- **a.** Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
- **b.** Calculer la dérivée de f_n sur $[0\,;+\infty[$.
- **c.** Dresser le tableau de variations de f_n.
- **d.** En déduire que l'équation, d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0\,;+\infty[$.
- **e.** Justifier que $0 < \alpha_n < 1$.

3 Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $\ln\left(\alpha_n^2+1\right) = 2n(1-\alpha_n)$.
En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

4 étude de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- **a.** à l'aide de la calculatrice, proposer sans justification, des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de α_1, α_4 et α_{10}.
- **b.** Démontrer que la suite (α_n) est croissante.
- **c.** En déduire que la suite (α_n) est convergente.
- **d.** Déterminer la limite de la suite (α_n).

Solution page 197

Logarithme népérien et Python

Exercice 4.25 (limite d'une suite)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) \end{cases}$$

1 Écrire un programme en Python permettant d'afficher les termes de u_1 à u_{50}.

2 À l'aide de ce programme, conjecturer la limite de (u_n).

On se propose de démontrer cette conjecture.
Pour cela, on pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{2n} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{2n+1}.$$

3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 1$.
On démontre de façon analogue que $w_n \leqslant 1$.

4 Montrer que la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

5 En déduire que (v_n) est décroissante.
On démontre de même que (w_n) est croissante.

6 Démontrer que $w_n \leqslant v_n$ pour tout entier naturel n.

7 Montrer que (v_n), (w_n) et (u_n) convergent vers une même limite.

Solution page 199

Exercice 4.26 (suite définie par une fonction)

Remarque 29

Cet exercice traite de la même suite que celle vue dans l'exercice précédent, mais abordée d'une autre manière.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1 Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.

2 Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Dresser un tableau de variations complet de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

1 Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.
En déduire que l'équation α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On définit alors la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{2n}.$$

1 Calculer v_0, v_1 puis v_2. On donnera des valeurs approchées au millième.

2 Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(f(u_{2n}))$.

3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\frac{1}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1.$$

4 En déduire que (v_n) converge.

5 En déduire que (u_n) et (v_n) ont la même limite α, où α est la valeur introduite dans la partie B.

Partie D

On considère l'algorithme suivant :

```
   Entrées
1      a nombre réel
2      n nombre entier
3      d nombre réel
   Traitement
4      a prend la valeur 1
5      n prend la valeur 0
6      d prend la valeur 1
7      Tant que d > 10^-6
8          d prend la valeur a
9          a prend la valeur ln(1+1/a)
10         a prend la valeur ln(1+1/a)
11         n prend la valeur n+1
12         d prend la valeur d-a
13     Fin du Tant que
   Sortie
14     Afficher a
```

1 Un élève affirme qu'il y a une erreur car les lignes 9 et 10 sont identiques.
Expliquer en quoi cet élève se trompe.

2 Que doit-on écrire pour ne pas répéter ces deux lignes ?

3 Implanter cet algorithme en Python puis donner une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Solution page 201

Objectif bac

Exercice 4.27 (Extrait du sujet 1, Métropole 2025)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\left[2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 2\right],$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
dans un repère orthogonal, on note :

- $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f ;
- T_B la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $B\,(\mathrm{e}\,;\mathrm{e})$.

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2 Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3 On admet que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $\quad f'(x) = 2\big(\ln(x)\big)^2 + \ln(x) - 1$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln(x) + 1)$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

c. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_{B} sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Solution page 204

Exercice 4.28 (Polynésie, sujet 1, septembre 2025)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : exploitation de programmes Python

1 Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)`, qui prend en paramètre un entier naturel `k`, renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

Remarque : on précise que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

Code Python 4-11

```python
def suite(k):
    L = []
    u = 5
    for i in range(......):
        L.append(u)
        u = ............
    return (......)
```

2 On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642 ]
```

3 On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé `1`.
Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

Code Python 4-12

```python
def mystere(n):
    L = suite(n)
    c = 1
    for i in range(n - 1):
        if L[i] > L[i + 1]:
            c = 0
    return c
```

```
>>> mystere(10000)
1
```

Partie B : étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right).$$

On admet que g est dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1 Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\,;+\infty[$.

2 **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2	3	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\ln(6) - 1$	$\searrow$ $-\infty$

1 **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\,;+\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.

2 On note ℓ la limite de la suite (u_n).
Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.

Solution page 205

Corrigé de l'exercice 4.1 page 156

1 $\ln(8) - \ln(2) = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \boxed{\ln(4)}$

2 $\ln(6) + \ln(3) = \ln(6 \times 3) = \boxed{\ln(18)}$

3 $\ln(25) - \ln(30) + \ln(10) = \ln\left(\frac{25}{30} \times 10\right) = \boxed{\ln\left(\frac{25}{3}\right)}$

4 $\ln(50) + \ln(2) - \ln(10) = \ln\left(\frac{50 \times 2}{10}\right) = \boxed{\ln(10)}$

5
$$\begin{aligned} 3\ln(4) - \ln(256) &= \ln\left(4^3\right) - \ln(256) \\ &= \ln\left(\frac{2^6}{2^8}\right) \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned} 2\ln(2) - \ln(16) + \ln(128) &= \ln\left(2^2\right) - \ln\left(2^4\right) + \ln\left(2^7\right) \\ &= \ln\left(\frac{2^2 \times 2^7}{2^4}\right) \\ &= \ln\left(2^5\right) \\ &= \boxed{\ln(32)} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.2 page 156

1
$$\begin{aligned} \ln(8) - \ln(2) &= \ln\left(2^3\right) - \ln(2) \\ &= 3\ln(2) - \ln(2) \\ &= (3-1)\ln(2) \\ &= \boxed{2\ln(2)} \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} 3\ln(4) - \ln(256) &= 3\ln\left(2^2\right) - \ln\left(2^8\right) \\ &= 3 \times 2\ln(2) - 8\ln(2) \\ &= (6-8)\ln(2) \\ &= \boxed{-2\ln(2)} \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} 2\ln(2) - \ln(16) + \ln(128) &= 2\ln(2) - \ln\left(2^4\right) + \ln\left(2^7\right) \\ &= 2\ln(2) - 4\ln(2) + 7\ln(2) \\ &= (2-4+7)\ln(2) \\ &= \boxed{5\ln(2)} \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} \ln(27) - 8\ln(9) + 14\ln(3) &= \ln\left(3^3\right) - 8\ln\left(3^2\right) + 14\ln(3) \\ &= 3\ln(3) - 8 \times 2\ln(3) + 14\ln(3) \\ &= (3-16+14)\ln(3) \\ &= \boxed{\ln(3)} \end{aligned}$$

5 $\ln(125) - 5\ln(5) + 4\ln(25) = \ln\left(5^3\right) - 5\ln(5) + 4\ln\left(5^2\right)$
$= 3\ln(5) - 5\ln(5) + 8\ln(5)$
$= (3 - 5 + 8)\ln(5)$
$= \boxed{6\ln(5)}$

6 $7\ln(7) - 9\ln(49) + \ln(343) = 7\ln(7) - 9\ln\left(7^2\right) + \ln\left(7^3\right)$
$= 7\ln(7) - 18\ln(7) + 3\ln(7)$
$= (7 - 18 + 3)\ln(7)$
$= \boxed{-8\ln(7)}$

Corrigé de l'exercice 4.3 page 156

1 $\ln\left(e^{2x}\right) = \boxed{2x}$ car $\ln\left(e^X\right) = X$, quel que soit X.

2 $\ln\left(e^{2x-4}\right) - \ln\left(e^{2x+4}\right) = 2x - 4 - (2x + 4) = \boxed{-8}$.

3 $\dfrac{3\ln\left(e^{x+1}\right)}{2\ln\left(e^{1-x}\right)} = \dfrac{3(x+1)}{2(1-x)} = \boxed{\dfrac{3x+3}{2-2x}}$.

Corrigé de l'exercice 4.4 page 156

1 $\ln(3x - 4) = \ln(2x + 1)$.

- **Domaine de définition.**

  Il faut que $\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x > \dfrac{4}{3} \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, donc que $x > \dfrac{4}{3}$.

  Le domaine de définition de l'équation est donc $\mathcal{D} = \left]\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

- **Résolution.**

  $$\ln(3x - 4) = \ln(2x + 1) \iff 3x - 4 = 2x + 1 \iff x = 5.$$

  $5 \in \mathcal{D}$ donc l'ensemble solution de l'équation est :

  $$\boxed{\mathcal{S} = \{5\}}$$

2 $\ln(4 - 2x) = \ln(x - 1)$.

- **Domaine de définition.**

  Il faut que $\begin{cases} 4 - 2x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$, donc que $1 < x < 2$.

  Le domaine de définition de l'équation est donc $\mathcal{D} =]1\,;2[$.

- **Résolution.**

  $$\ln(4 - 2x) = \ln(x - 1) \iff 4 - 2x = x - 1 \iff 5 = 3x \iff x = \frac{5}{3}.$$

  $\dfrac{5}{3} \in \mathcal{D}$ donc l'ensemble solution de l'équation est :

  $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{3}\right\}}$$

3 $\ln(x^2+x+1)=\ln(x^2-2x+1)$.

- **Domaine de définition.**

  Il faut que $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2-2x+1>0 \end{cases}$.

  Or,

  → le discriminant de x^2+x+1 est égal à -3 donc ce polynôme est toujours strictement positif.

  → De plus, $x^2-2x+1=(x-1)^2$ donc seul $x=1$ ne convient pas.

  Le domaine de définition est donc $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

- **Résolution.**

$$\begin{aligned} & \ln(x^2+x+1)=\ln(x^2-2x+1) \\ \iff\quad & x^2+x+1=x^2-2x+1 \\ \iff\quad & 3x=0 \\ \iff\quad & x=0. \end{aligned}$$

  $0\in\mathcal{D}$ donc l'ensemble solution de l'équation est :

$$\boxed{\mathcal{S}=\{0\}}$$

4 $\ln(2x^2-10x+8)=\ln(3x^2-3x-18)$.

- **Domaine de définition.**

  Il faut que $\begin{cases} 2x^2-10x+8>0 \\ 3x^2-3x-18>0 \end{cases}$.

  → Le discriminant de $2x^2-10x+8$ est :

$$\Delta_1=100-64=36$$

  donc il admet deux racines réelles qui sont :

$$\frac{10-6}{4}=1 \qquad \text{et} \qquad \frac{10+6}{4}=4.$$

  Le polynôme $2x^2-10x+8$ est donc strictement positif sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]4\,;+\infty[$.

  → Le discriminant de $3x^2-3x-18$ est :

$$\Delta_2=9+216=225$$

  donc il admet deux racines réelles qui sont :

$$\frac{3-15}{6}=-2 \qquad \text{et} \qquad \frac{3+15}{6}=3.$$

  Le polynôme $3x^2-3x-18$ est donc strictement positif sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]3\,;+\infty[$.

  Le domaine de définition est donc :

$$\mathcal{D}=\,]-\infty\,;-2[\,\cup\,]4\,;+\infty[.$$

- **Résolution.**

$$\begin{aligned} & \ln(2x^2-10x+8)=\ln(3x^2-3x-18) \\ \iff\quad & 2x^2-10x+8=3x^2-3x-18 \\ \iff\quad & x^2+7x-26=0. \end{aligned}$$

  Le discriminant de $x^2+7x-26$ est :

$$\Delta=49+104=153$$

donc il admet deux racines :

$$\frac{-7-\sqrt{153}}{2} \in \mathcal{D} \qquad \text{et} \qquad \frac{-7+\sqrt{153}}{2} \notin \mathcal{D}.$$

L'ensemble solution de l'équation est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-7-\sqrt{153}}{2}\right\}}$$

5 $\left[\ln(x)\right]^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$.

- **Domaine de définition.**
  $\ln(x)$ est défini pour tout réel $x > 0$ donc le domaine de d'finition de l'équation est $\mathcal{D} =]0\,;+\infty[$.
- **Résolution.**
  Posons $X = \ln(x)$.
  L'équation devient :
  $$X^2 - 3X + 2 = 0$$
  et admet pour solutions :
  $$X = 1 \qquad \text{ou} \qquad X = 2.$$
  Ainsi,
  $$\ln(x) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \ln(x) = 2,$$
  soit :
  $$x = \mathrm{e} \in \mathcal{D} \qquad \text{ou} \qquad x = \mathrm{e}^2 \in \mathcal{D}.$$
  L'ensemble solution de l'équation est donc :
  $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e}^2\right\}}$$

6 $2\left[\ln(x)\right]^2 - 5\ln(x) - 3 = 0$.

- **Domaine de définition.**
  $\ln(x)$ est défini pour tout réel $x > 0$ donc le domaine de d'finition de l'équation est $\mathcal{D} =]0\,;+\infty[$.
- **Résolution.**
  Posons $X = \ln x$.
  L'équation devient :
  $$2X^2 - 5X - 3 = 0$$
  et admet pour solutions :
  $$X = 3 \qquad \text{ou} \qquad X = -\frac{1}{2}.$$
  Ainsi,
  $$\ln(x) = 3 \qquad \text{ou} \qquad \ln(x) = -\frac{1}{2},$$
  soit :
  $$x = \mathrm{e}^3 \in \mathcal{D} \qquad \text{ou} \qquad x = \mathrm{e}^{-0,5} \in \mathcal{D}.$$
  L'ensemble solution de l'équation est donc :
  $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\mathrm{e}^3\ ;\ \mathrm{e}^{-0,5}\right\}}$$

7 $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\ln(x)}$.

- **Domaine de définition.**

  Il faut que $\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \ln(x) \geqslant 0 \end{cases}$, soit $x > 0$ et $x \geqslant 1$.

  Le domaine de définition est donc : $\mathcal{D} = [1\,;+\infty[$.
- **Résolution.**

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\ln(x)} &\iff \left[\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2 = \ln(x) \quad \text{(on a élevé au carré)} \\
&\iff \left[\frac{1}{2}\ln(x)\right]^2 = \ln(x) \\
&\iff \frac{1}{4}\left[\ln(x)\right]^2 - \ln(x) = 0 \\
&\iff \ln(x)\left(\frac{1}{4}\ln(x) - 1\right) = 0 \\
&\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \frac{1}{4}\ln(x) - 1 = 0 \\
&\iff x = 1 \text{ ou } \ln(x) = 4 \\
&\iff x = 1 \in \mathcal{D} \text{ ou } x = \mathrm{e}^4 \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{1\ ;\ \mathrm{e}^4\right\}}$$

Corrigé de l'exercice 4.5 page 156

1

- **Domaine de définition.**

  $\ln(5x-1)$ est défini pour tout réel x tel que $5x - 1 > 0$, soit $x > \dfrac{1}{5}$.

  Le domaine de définition de l'équation est donc : $\mathcal{D} = \left]\dfrac{1}{5}\,;+\infty\right[$.
- **Résolution.**

$$\begin{aligned}
\ln(5x-1) = 2 &\iff \mathrm{e}^{\ln(5x-1)} = \mathrm{e}^2 \\
&\iff 5x - 1 = \mathrm{e}^2 \\
&\iff 5x = \mathrm{e}^2 + 1 \\
&\iff x = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{5} \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble solution de l'équation est :

$$\boxed{S = \left\{\frac{\mathrm{e}^2+1}{5}\right\}}.$$

2

- **Domaine de définition.**

  e^{-x} est défini quel que soit le réel x, donc le domaine de définition de l'équation est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- **Résolution.**

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x} = 5 &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = \ln(5) \\
&\iff -x = \ln(5) \\
&\iff x = -\ln(5) \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble solution de l'équation est :

$$\boxed{S = \{-\ln 5\}}$$

3 • **Domaine de définition.**

$\ln(3x-1)$ est défini pour tout réel x tel que $3x-1>0$, soit $x > \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\mathcal{D} = \left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

• **Résolution.**

$$\begin{aligned}\ln(3x-1) < 0 &\iff \mathrm{e}^{\ln(3x-1)} < \mathrm{e}^0\\ &\iff 3x-1<1\\ &\iff 3x<2\\ &\iff x<\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

L'intersection de l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[$ et de $\mathcal{D}$ est l'ensemble solution de l'inéquation. On trouve :

$$\boxed{S = \left]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right[}$$

4 • **Domaine de définition.**
e^{5-x} est défini quel que soit le réel $5-x$, donc que que soit le réel x. Le domaine de définition de l'inéquation est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

• **Résolution.**

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{5-x} \leqslant 2 &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{5-x}\right) \leqslant \ln(2)\\ &\iff 5-x \leqslant \ln(2)\\ &\iff -x \leqslant \ln(2)-5\\ &\iff x \geqslant 5-\ln(2).\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$\boxed{S = [5-\ln(2)\,;+\infty[}$$

Corrigé de l'exercice 4.6 page 157

1 $\ln(5x+20) > \ln(3x-9)$.

• **Domaine de définition.**

Il faut que $\begin{cases}5x+20>0\\3x-9>0\end{cases}$, soit $x>3$.

Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} =]3\,;+\infty[$.

• **Résolution.**

$$\begin{aligned}&\ln(5x+20) > \ln(3x-9)\\ \iff\ &5x+20>3x-9\\ \iff\ &2x>-29\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{U} = \left]-\dfrac{29}{2}\,;+\infty\right[$. L'ensemble solution de l'inéquation est $\mathcal{U}\cap\mathcal{D}$, soit :

$$\boxed{\mathcal{S} =]3\,;+\infty[}$$

2 $\ln(8-2x) \leqslant \ln(5x-25)$.

- **Domaine de définition.**

  Il faut que $\begin{cases} 8-2x>0 \\ 5x-25>0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x<4 \\ x>5 \end{cases}$, donc le domaine de définition est $\mathcal{D}=\varnothing$.
- **Résolution.**

  L'équation n'admet aucune solution car son domaine de définition est vide.

$$\boxed{\mathcal{S}=\varnothing}$$

3 $\ln(x^2+1) < \ln(2x^2+x+2)$.

- **Domaine de définition.**

  Il faut que $\begin{cases} x^2+1>0 \\ 2x^2+x+2>0 \end{cases}$, ce qui est toujours le cas car les discriminants des polynômes x^2+1 et $2x^2+x+2$ sont strictement négatifs.

  Le domaine de définition est donc $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
- **Résolution.**

$$\begin{aligned} & \ln(x^2+1) < \ln(2x^2+x+2) \\ \iff & x^2+1 < 2x^2+x+2 \\ \iff & x^2+x+1>0. \end{aligned}$$

  Le discriminant de x^2+x+1 étant strictement négatif, tout réel x convient.

  L'ensemble solution de cette inéquation est donc :

$$\boxed{\mathcal{S}=\mathbb{R}}.$$

4 $\ln(2x^2-3x+1) > \ln(-5x^2+8x-3)$.

- **Domaine de définition.**

  → Les racines de $2x^2-3x+1$ sont 1 et $\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $2x^2-3x+1>0$ sur $I=\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$.

  → Les racines de $-5x^2+8x-3$ sont 1 et $\dfrac{3}{5}$ donc $-5x^2+8x-3>0$ sur $J=\left]\dfrac{3}{5}\,;1\right[$.

  Le domaine de définition est donc $\mathcal{D}=I\cap J=\varnothing$.
- **Résolution.**

  Le domaine de définition étant l'ensemble vide, il ne peut y avoir de solutions à cette inéquation. Donc,

$$\boxed{\mathcal{S}=\varnothing}$$

5 $\ln(x^2-5x-14) \leqslant \ln(2x^2-10x+8)$.

- **Domaine de définition.**

  → Le polynôme $x^2-5x-14$ admet pour racines -2 et 7 donc il est strictement positif sur $I=\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]7\,;+\infty\right[$.

  → Le polynôme $2x^2-10x+8$ admet pour racines 4 et 1 donc il est strictement positif sur $J=\left]-\infty\,;1\right[\cup\left]4\,;+\infty\right[$.

  Le domaine de définition de l'inéquation est donc :

$$\mathcal{D}=I\cap J=\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]7\,;+\infty\right[.$$

- **Résolution.**

$$\begin{aligned} & \ln(x^2-5x-14) \leqslant \ln(2x^2-10x+8) \\ \iff & x^2-5x-14 \leqslant 2x^2-10x+8 \\ \iff & x^2-5x+22 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - 5x + 22$ est :
$$\Delta = 25 - 108 < 0$$
donc le polynôme est toujours strictement positif.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc :
$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;-2[\cup]7\,;+\infty[}$$

6 $\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16)$.

- **Domaine de définition.**
  - → Le polynôme x^2+x-6 admet pour racines 2 et -3 donc il est strictement positif sur $I =]-\infty\,;-3[\cup]2\,;+\infty[$.
  - → Le polynôme $-2x^2+14x+16$ admet pour racines -1 et 8 donc il est strictement positif sur $J =]-1\,;8[$.

  Le domaine de définition est donc $I \cap J$, soit $\mathcal{D} =]2\,;8[$.
- **Résolution.**
$$\begin{aligned} & \ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16) \\ \iff & x^2 + x - 6 > -2x^2 + 14 + 16 \\ \iff & 3x^2 - 13x - 22 > 0. \end{aligned}$$

  Le discriminant du polynôme $3x^2 - 13x - 22$ est :
$$\Delta = 169 + 12 \times 22 = 433 > 0$$
  donc il admet deux racines :
$$x_1 = \frac{13 - \sqrt{433}}{6} \notin \mathcal{D}$$
  et
$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{433}}{6} \in \mathcal{D}.$$
  Ainsi, $3x^2 - 13x - 22 > 0$ sur $\mathcal{U} =]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$.

  L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, soit :
$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{13 + \sqrt{433}}{6}\,;8\right[}$$

Corrigé de l'exercice 4.7 page 157

1 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

Or, pour $x \geqslant 1$, $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$, et donc $f'(x) \leqslant 0$.
La fonction f est donc décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

2 $f(1) = -1$, donc $f(x) < 0$ sur $[1\,;+\infty[$. Donc $\ln(x) < x$ sur cet intervalle.

De plus, on sait que pour $x \geqslant 1$, $\ln(x) \geqslant 0$.

On en déduit alors que sur $[1\,;+\infty[$, $0 \leqslant \ln(x) < x$.

3 Posons $x = \sqrt{u}$, $u \geqslant 1$.
Alors, de ce qui précède, on déduit que
$$0 \leqslant \ln\left(\sqrt{u}\right) < \sqrt{u}.$$
Ainsi, en divisant par u, on a :
$$0 \leqslant \frac{\ln\left(\sqrt{u}\right)}{u} < \frac{\sqrt{u}}{u},$$

on encore :

$$0 \leqslant \frac{\frac{1}{2}\ln(u)}{u} < \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Que l'on mette u ou x importe peu. Ainsi,

$$\forall x \in [1\,;+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{2x}\right) = 0.$

Multiplier l'expression par $\frac{1}{2}$ ne change pas la limite, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0.$

Corrigé de l'exercice 4.8 page 157

Nous savons (par croissance comparée) que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln(X)}{X^n}\right) = 0.$$

Posons $X = \sqrt{x^2-1}$. Alors,

$$\lim_{x\to-\infty}(X) = +\infty.$$

Donc,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-1}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln(X)}{X^2}\right) = 0.$$

Corrigé de l'exercice 4.9 page 157

Le taux d'accroissement de f entre 0 et x est :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Ainsi, par définition,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = f'(0).$$

Or, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \frac{1}{1+0}$$

soit :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1}$$

Corrigé de l'exercice 4.10 page 157

1 $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(x)\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0}(2x+1) = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow$ (par quotient des limites) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\right] = -\infty}$

Ce résultat signifie que la courbe représentative de f admet une asymptote (verticale) d'équation $x = 0$.

2 On a :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x+1} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{2x+1}.$$

Or, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x \times 1}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, par produit des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)\right] = 0}$$

Ce résultat signifie que la courbe représentative de f admet une asymptote (horizontale) d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 4.11 page 158

1 $f_1(x) = x\ln(x) - x$.
La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est de la forme uv avec :

$$u(x) = x \quad ; \quad u'(x) = 1$$
$$v(x) = \ln(x) \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

donc sa dérivée est :

$$(u'v + uv')(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Ainsi,

$$f_1'(x) = \ln(x) + 1 - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f_1'(x) = \ln(x)}$$

$f_1'(x) = \ln x$.

2 $f_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ donc f_2 est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = \ln(x) \quad ; \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v(x) = x \quad ; \quad v'(x) = 1$$

donc :

$$f_2'(x) = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)(x)$$
$$= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$$

$$\boxed{f_2'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}}$$

3 $f_3(x) = \ln\left(x^2\right)$ donc f_3 est de la forme $\ln(u)$, avec

$$u(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad u'(x) = 2x.$$

Donc :

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \left(\frac{u'}{u}\right)(x) \\ &= \frac{2x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_3'(x) = \frac{2}{x}}$$

4 $f_4(x) = \ln\left(\sqrt{x+1}\right)$ donc f_4 est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = \sqrt{x+1}$.

u est de la forme $\sqrt{g}$, avec $g(x) = x+1$ donc $u'(x) = \dfrac{g'}{2\sqrt{g}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \left(\frac{u'}{u}\right)(x) \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_4'(x) = \frac{1}{2(x+1)}}$$

5 $f_5(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$ donc f_5 est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = \ln\left(x^2+1\right) \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^2+1.$$

u est de la forme $\ln(g)$, avec $g(x) = x^2+1$ donc :

$$u'(x) = \left(\frac{u'}{u}\right)(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)(x) \\ &= \frac{\frac{2x}{x^2+1} \times (x^2+1) - 2x \times \ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{2x - 2x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_5'(x) = \frac{2x\left[1 - \ln(x^2+1)\right]}{(x^2+1)^2}}$$

6 $f_6(x) = \ln\left[\ln(x)\right]$ donc f_6 est de la forme $\ln(u)$ avec :

$$u(x) = \ln(x) \qquad \text{et} \qquad u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \left(\frac{u'}{u}\right)(x) \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_6'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}}$$

Corrigé de l'exercice 4.12 page 158

- **Parité de la fonction.**

  $f(-x) = f(x)$ et le domaine de définition de f est centré en 0.
  La fonction f est donc paire. On peut donc l'étudier sur $[0\,;+\infty[$.

- **Calculs des limites en $+\infty$.**

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right) &= +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

  De plus,

$$f(0) = \frac{\ln(1)}{1} = 0.$$

- **Calcul de la dérivée.**

  $f(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$ donc f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = \ln\left(x^2+1\right) \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^2+1.$$

  u est de la forme $\ln(g)$, avec $g(x) = x^2+1$ donc :

$$u'(x) = \left(\frac{u'}{u}\right)(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)(x) \\ &= \frac{\frac{2x}{x^2+1}\times\left(x^2+1\right) - 2x\times\ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{2x - 2x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x\left[1-\ln(x^2+1)\right]}{(x^2+1)^2}}$$

- **Sens de variation de la fonction.**

  Sur $[0\,;+\infty[$,
  $\rightarrow$ $2x > 0$
  $\rightarrow$ $(x^2+1)^2 > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln\left(x^2+1\right)$.

$$\begin{aligned}
1-\ln\left(x^2+1\right)>0 &\iff \ln\left(x^2+1\right)<1\\
&\iff x^2+1<\mathrm{e}^1\\
&\iff x^2<\mathrm{e}-1\\
&\iff 0<x<\sqrt{\mathrm{e}-1}.
\end{aligned}$$

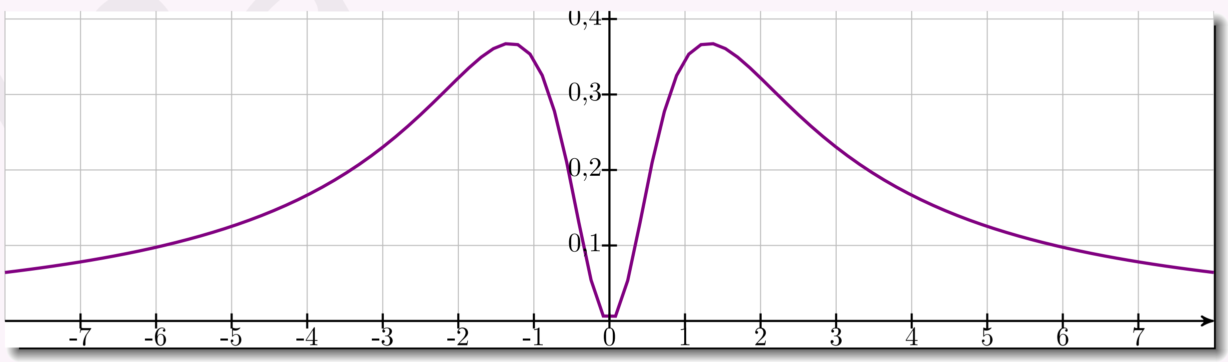
De plus,

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{\mathrm{e}-1}\right) &= \frac{\ln(\mathrm{e}-1+1)}{\mathrm{e}-1+1}\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}}\\
&= \mathrm{e}^{-1}
\end{aligned}$$

On obtient alors le tableau de variations suivant (en utilisant la symétrie d'axe des ordonnées) :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\mathrm{e}-1}$		0		$\sqrt{\mathrm{e}-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous à titre indicatif.



Corrigé de l'exercice 4.13 page 158

1 Afin que $f(x)$ existe, il faut que :

$$1+\frac{1}{x}>0 \iff \frac{x+1}{x}>0.$$

Dressons le tableau de signes de ce dernier quotient (voir page suivante).

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\frac{x+1}{x}>0 \iff x\in\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[.$$

Le domaine de définition de f est donc :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]0\,;+\infty[.$$

2 $f = \ln(u)$, avec $u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$$

Sur $\mathcal{D}_f$, $1 + \dfrac{1}{x} > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$.
Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

3

- **Limites aux infinis.**

  $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln(1) = 0.$

  De même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

- **Limite en -1.**

  $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0^+$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty.$

- **Limite en 0.**

  $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = +\infty.$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

Corrigé de l'exercice 4.14 page 158

1 f est définie pour tout x tel que $x^2 - 2x + 1 > 0$, c'est-à-dire lorsque $(x-1)^2 > 0$.
Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln(x^2-2x+1) = \lim_{x\to-\infty}\ln(x^2) = +\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.
- Par un raisonnement analogue, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
- $f(x) = (x-1)\ln\left[(x-1)^2\right]$.

  $\rightarrow$ Si $x > 1$,

  $$f(x) = 2(x-1)\ln(x-1).$$

  En posant $X = x - 1$, on a :

  $$f(X) = 2X\ln(X)$$

  avec $\displaystyle\lim_{x\to1}(X) = 0.$

Or, $\lim\limits_{X \to 0} X\ln(X) = 0$ (croissance comparée).
Ainsi,

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0}.$$

$\rightarrow$ Si $x < 1$, on peut écrire que $f(x) = (x-1)\ln\left[(1-x)^2\right]$ (car $1 - x > 0$) et donc :

$$f(x) = 2(x-1)\ln(1-x).$$

Par un raisonnement analogue à celui qui précède, en posant $X = 1 - x$,

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0}.$$

3 $f = u \times v$ avec :

$$u(x) = x - 1 \quad ; \quad v(x) = \ln(x^2 - 2x + 1) = \ln\left[g(x)\right] \text{ avec } g(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)(x) \\ &= \ln\left(x^2 - 2x + 1\right) + (x-1) \times \frac{2x-2}{x^2-2x+1} \\ &= \ln\left[(x-1)^2\right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2} \\ \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \ln\left[(x-1)^2\right] + 2}$$

4 $$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \ln\left[(x-1)^2\right] + 2 > 0 \\ &\iff \ln\left[(x-1)^2\right] > -2 \\ &\iff (x-1)^2 > \mathrm{e}^{-2} \\ &\iff (x-1)^2 - \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^2 > 0 \\ &\iff \left(x - 1 - \mathrm{e}^{-1}\right)\left(x - 1 + \mathrm{e}^{-1}\right) > 0 \end{aligned}$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$1-\mathrm{e}^{-1}$		1		$1+\mathrm{e}^{-1}$		$+\infty$
$x - 1 - \mathrm{e}^{-1}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - 1 + \mathrm{e}^{-1}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$\begin{aligned} f\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) &= \left(1 - \mathrm{e}^{-1} - 1\right)\ln\left[\left(1 - \mathrm{e}^{-1} - 1\right)^2\right] \\ &= -\mathrm{e}^{-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right) \\ &= -\mathrm{e}^{-1} \times (-2) \\ &= 2\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

De même, $f\left(1 + \mathrm{e}^{-1}\right) = -2\mathrm{e}^{-1}$.
On en déduit alors :

x	$-\infty$		$1-\mathrm{e}^{-1}$		0		$1+\mathrm{e}^{-1}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$0 \,\|\, 0$	$\searrow$	$-2\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque 30

On aurait peut-être été tenté de faire le tableau suivant :

x	$-\infty$		$1-\mathrm{e}^{-1}$		1		$1+\mathrm{e}^{-1}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-2\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

mais il ne faut pas oublier que « 1 » est une valeur interdite et qu'il faut donc nécessairement mettre une double barre au niveau de $x = 1$.

Corrigé de l'exercice 4.15 page 159

1
- On sait que $f(0) = 1$ donc $a\mathrm{e}^{k\times 0} + b = 1$, soit $a + b = 1$, ou encore $b = 1 - a$.
- De plus, $f(6) = 0$ donc $a\mathrm{e}^{6k} + b = 0$, soit $a\mathrm{e}^{6k} = -b = a - 1$. Ainsi, $\mathrm{e}^{6k} = 1 - \dfrac{1}{a}$ et donc $6k = \ln\left(1 - \dfrac{1}{a}\right)$.

  Finalement, $k = \dfrac{1}{6}\ln\left(1 - \dfrac{1}{a}\right)$.

On obtient alors :

$$\boxed{f(t) = a\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)t} + 1 - a}$$

2 50 % des bactéries disparaissent au bout de deux jours, donc $f(2) = \dfrac{1}{2}$, soit :

$$a\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)\times 2} + 1 - a = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{a\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)} + \frac{1}{2} - a = 0}$$

3 Si on pose $h(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$, alors h est de la forme uv avec :

$$u(x) = x \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

avec $u'(x) = 1$ et :

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{1}{3x^2} \times \frac{x}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{1}{3x} \times \frac{1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (u'v - uv')(x) \\
&= 1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} + x \times \frac{1}{3x} \times \frac{1}{x-1} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\left(1 + \frac{1}{3x-3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$g'(x) = h'(x) - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{g'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\left(1+\frac{1}{3x-3}\right) - 1}$$

4 **a.**

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x-3}\right) = 1$;
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{X\to 1}\ln(X) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 0$.

  De plus, $\displaystyle\lim_{Y\to 0}\left(\mathrm{e}^{Y}\right) = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right] = 1$.

Ainsi, par produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\left(1+\frac{1}{3x-3}\right)\right] = 1$, et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0}$$

b. Si $x > 1$, alors $9x(x-1) > 0$ et donc $\dfrac{-2}{9x(x-1)} < 0$.

De plus, une exponentielle est toujours strictement positive, donc $g''(x) < 0$ sur $]1\,;+\infty[$.

Par conséquent, g' est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$ et donc, d'après la question précédente, $g'(x) > 0$ sur cet intervalle.

On en déduit que g est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

5 $g(1,3) \approx -0{,}002\,612\,69 < 0$ et $g(1,4) \approx 0{,}022\,087\,258 > 0$ donc 0 est une valeur intermédiaire de $g(1,3)$ et $g(1,4)$.

De plus, g est continue et strictement monotone sur $[1,3\,;1,4]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1,3\,;1,4]$.

Corrigé de l'exercice 4.16 page 159

1

- **Calcul de $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)$.**

  On sait (d'après le cours) que $\displaystyle\lim_{X\to 0} X\ln(X) = 0$.

  Par conséquent, en posant $X = x+1$, $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)\ln(x+1) = 0$.

  De plus, $\displaystyle\lim_{x\to-1}(-6x-1) = 5$.

  Ainsi, par somme, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = 5}$.

- **Calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.**

  On commence par factoriser $f(x)$ par x :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\frac{x+1}{x}\ln(x+1) - 6 - \frac{1}{x}\right) \\ &= x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1) - 6 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)\right] = +\infty$ donc, par produit,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1)\right] = +\infty.$$

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-6-\frac{1}{x}\right) = -6$.

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x+1) - 6 - \dfrac{1}{x}\right] = +\infty$.

On en déduit par produit, que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

2 Calculons $f'(x)$.

- On commence par dériver $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$, qui est de la forme $u \times v$, où :

$$u(x) = x+1 \quad ; \quad v(x) = \ln(x+1)$$
$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x+1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} \\ g'(x) &= \ln(x+1) + 1. \end{aligned}$$

- On en déduit la dérivée de $f(x)$ par somme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) + (-6x-1)' \\ &= \ln(x+1) + 1 - 6 \end{aligned}$$
$$\boxed{f'(x) = \ln(x+1) - 5}$$

3

- Déterminons le signe de $f'(x)$. Pour cela, résolvons par exemple l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \ln(x+1) - 5 \\ &\iff \ln(x+1) > 5 \\ &\iff \mathrm{e}^{\ln(x+1)} > \mathrm{e}^5 \\ &\iff x+1 > \mathrm{e}^5 \\ &\iff x > \mathrm{e}^5 - 1. \end{aligned}$$

- On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de f.

x	-1		$\mathrm{e}^5 - 1$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	5	↘		↗	$+\infty$

4

- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[-\dfrac{1}{2} ; 0\right]$. Sur cet intervalle,
  - → f est continue et strictement décroissante ;
  - → de plus, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \approx 1,65$ et $f(0) = -1$ donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $f(0)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$. Notons-la α.

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0,196$.

- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[395\,;400]$. Sur cet intervalle,
  - → f est continue et strictement croissante ;
  - → de plus, $f(395) \approx -2,36$ et $f(400) = 2,58$ donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f(395)$ et $f(400)$.

  Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[395\,;400]$. Notons-la β.

  À la calculatrice, on trouve $\beta \approx 397,397$.

Corrigé de l'exercice 4.17 page 159

Partie A

1 h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{(2x-1)(2x^2) - 4x(x^2-x+1)}{4x^4} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{4x^3 - 2x^2 - 4x^3 + 4x^2 - 4x}{4x^4} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{2x^2 - 4x}{4x^4} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{x-2}{2x^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{2x^3}}$$

2 Sur $]0\,;+\infty[$, $2x^3 > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $2x^2 + x - 2$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-2) = 17.$$

Il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \qquad ; \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

$2x^2 + x - 2$ est du signe de « 2 » à l'extérieur des racines ; or, $x_1 < 0$.

D'où le tableau suivant :

x	0		$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	↘		↗	

$$h(x_2) = \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 1\right)}{2\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)^2} \approx 0,43 > 0.$$

Ainsi, $h(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

1 f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme d'une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ $(x \mapsto -x)$ et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ $(x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto \ln(x))$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\ln(x) + \left(x^2+1\right) \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= 2x\ln(x) + \frac{x^2+1}{x} - 1 \\ &= 2x\ln(x) + \frac{x^2-x+1}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 2x\left(\ln(x) + \frac{x^2-x+1}{2x^2}\right)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall\, x > 0,\ f'(x) > 0 &\iff 2x\left(\ln(x) + \frac{x^2-x+1}{2x^2}\right) > 0 \\ &\iff 2xh(x) > 0 \\ &\iff h(x) > 0. \end{aligned}$$

2 Dans la partie précédente, nous avons vu que sur $]0\,;+\infty[$, $h(x) > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

3 **a.** $f(x) = x \times x\ln(x) + \ln(x) - x$. Or,

$$\lim_{x\to 0}\left[x\ln(x)\right] = 0$$

et

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln(x)\right] = -\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty}$$

b. $f(x) = x\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln(x) - 1\right]$.
Or,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x)\right] = +\infty.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln(x) - 1\right] = +\infty.$$

On a donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

c. On a le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

4 **a.** f est dérivable et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$.
Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $]0\,;+\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

b. $f(1) = 2\ln(1) - 1 = -1 < 0$ et $f(2) = 5\ln(2) - 2 > 0$ donc $1 < \alpha < 2$.

c. Á l'aide de la calculatrice, on a : $\alpha \approx 1,6$.

Corrigé de l'exercice 4.18 page 160

1 **a.** $g'(x) = \mathrm{e}^x(1+x)$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. g est continue et strictement monotone (croissante ici) sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, $g(0) = -1$ et $g(1) = \mathrm{e}-1 > 0$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $[0\,;+\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0$, soit $\alpha\mathrm{e}^\alpha = 1$.
On trouve $\underline{\alpha \approx 0,567}$.

c. g est croissante et $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$ sur $[0\,;\alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.

2 **a.**

- **Calcul de la limite en 0.**

  $\lim\limits_{x\to 0} \left[\ln(x)\right] = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{e}^x\right) = 1$ donc, par somme,

  $$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$

- **Calcul de la limite en $+\infty$.**

  On peut écrire :

  $$f(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right).$$

  De plus,

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$$

  et

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty,$$

  soit :

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 0.$$

  Ainsi, par produit, on a :

  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

b. $f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$. Ainsi, d'après la question 1, on a :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c.
$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \mathrm{e}^\alpha - \ln(\alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha} - \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^\alpha}\right) \qquad \text{d'après la question 1.}b. \\ &= \frac{1}{\alpha} - \ln(1) + \ln\left(\mathrm{e}^\alpha\right) \end{aligned}$$
$$\boxed{m = \frac{1}{\alpha} + \alpha}$$

De plus, avec $\alpha \approx 0,567$, on a $m \approx 2,33$.
D'où le résultat demandé.

3 Une équation de la tangente est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \qquad , \qquad a = 0.$$

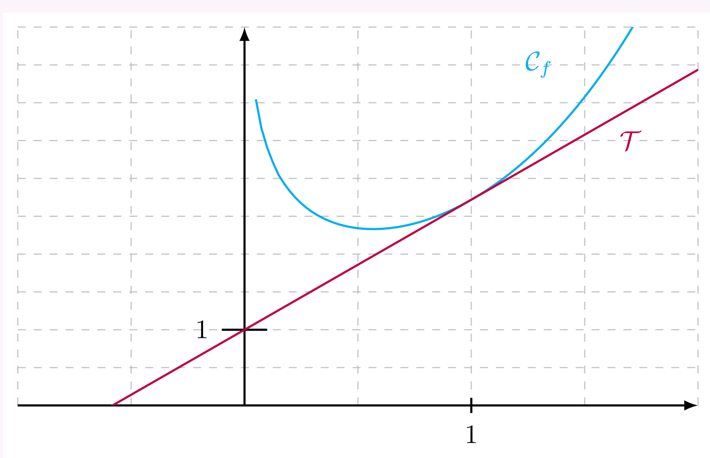
Ainsi,

$$\begin{aligned} & y = f'(1)(x-1) + f(1) \\ \iff & y = (\mathrm{e}-1)(x-1) + \mathrm{e} - \ln 1 \\ \iff & y = (\mathrm{e}-1)x - \mathrm{e} + 1 + \mathrm{e} \\ \iff & \boxed{y = (\mathrm{e}-1)x + 1} \end{aligned}$$

Notons $\mathrm{A}(x\,;0)$ le point d'intersection de $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses. Alors,

$$(\mathrm{e}-1)x + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{1-\mathrm{e}}}$$

À titre indicatif, voici la représentation graphique de la courbe et de la tangente :



Corrigé de l'exercice 4.19 page 161

1 $f(1)=1 \iff k\ln(a+b)=1$

$\iff \ln(a+b)=\dfrac{1}{k}$

$\iff \boxed{a+b=\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}$

2 $f'(x)=\dfrac{ka}{ax+b}$ donc $f'(1)=1 \iff \dfrac{ka}{a+b}=1$

$\iff ka=a+b$

$\iff ka-a=b$

$\iff (k-1)a=b$

$\iff \boxed{a=\dfrac{b}{k-1}}$

3 En remplaçant a par $\dfrac{b}{k-1}$ dans l'égalité obtenue à la question **1**, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{b}{k-1}+b=\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} &\iff \frac{b}{k-1}+\frac{b(k-1)}{k-1}=\frac{(k-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}{k-1}\\ &\iff b+b(k-1)=(k-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\\ &\iff bk=(k-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\\ &\iff \boxed{b=\frac{k-1}{k}\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}\end{aligned}$$

Comme $a=\dfrac{b}{k-1}=\dfrac{1}{k-1}\times b$, on en déduit que $a=\dfrac{1}{k-1}\times\dfrac{k-1}{k}\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$, soit après simplification par $k-1$:

$$\boxed{a=\frac{1}{k}\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}$$

4 **a.** $f(0)=k\ln b \qquad avec b=\dfrac{k-1}{k}\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}=\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$

$$\begin{aligned}&=k\ln\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right]\\ &=k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+k\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\\ &=k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+k\times\frac{1}{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{f(0)=k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+1}$$

b. On souhaite voir si l'équation $k\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)+1=0,5$ admet une solution.

$$k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+1=0,5 \iff k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+0,5=0.$$

Posons alors :

$$g(k)=k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+0,5.$$

Alors,

$$\begin{aligned}g'(k)&=\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+k\times\frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{k}}\\ &=\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k-1}\end{aligned}$$

et donc :

$$g''(x) = \frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{k}} - \frac{1}{(k-1)^2} = -\frac{1}{k(k-1)^2}.$$

Ainsi, $g''(k)$ est du signe opposé à k. Notons au passage que g n'est pas définie sur $]0\,;1[$.

Par conséquent, si $k<0$, $g''(k)>0$ donc g' croissante. Or, si k est très proche de $-\infty$, $\frac{1}{k}$ est proche de 0 et donc $\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ est proche de $\ln 1 = 0$.

Ainsi, $g'(k)>0$ donc g est strictement croissante.

De plus, $g(-1) = -\ln 2 + 0,5 < 0$ et $g(-0,2) = -0,2\ln(6) + 0,5 \approx 0,14 > 0$. g étant continue et strictement croissante sur $[-1\,;-0,2]$, d'après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique k sur $[-1\,;-0,2]$ tel que $g(k)=0$.

Remarque 31

Inutile de regarder sur $]1\,;+\infty[$ car une valeur de k nous suffit. Mais si l'on regarde sur cet intervalle, on voit qu'il n'y a pas de valeur possible car $1-\frac{1}{k}<1$ donc $\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)<0$ et donc $g(k)<0,5$.

La calculatrice nous donne : $\underline{k \approx -0,4}$.

Corrigé de l'exercice 4.20 page 161

1 **a.** $h'(x) = 2x\left[1-2\ln(x)\right] + x^2 \times \left(-2\times\frac{1}{x}\right)$

$= 2x - 4x\ln(x) - 2x$

$\boxed{h'(x) = -4x\ln(x)}$

$h'(x)>0 \iff -4x\ln(x)>0$

$\iff \ln(x)<0$ car $x>0$

$\iff 0<x<1$

De plus,

- $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x^2\ln(x)\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^n\ln(x)\right]=0$ pour tout entier naturel n.
- $h(1) = 1^2\left[1-2\ln(1)\right]) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-2\ln(x)\right] = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

D'où le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

b. h est continue et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
De plus, $h(1)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha>1$ telle que $h(\alpha)=0$. À la calculatrice, on trouve :

$$\alpha \approx 1,649$$

c. De ce qui précède, on déduit le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

2 **a.** $g'(x) = -2x\ln(x) + (1-x^2)\times\dfrac{1}{x} + 2x$

$$= \frac{-2x^2\ln(x) + 1 - x^2 + 2x^2}{x}$$

$$= \frac{-2x^2\ln(x) + x^2 + 1}{x}$$

$$= \frac{(1-2\ln(x))x^2 + 1}{x}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{h(x)}{x}}$$

Ainsi, $g'(x)$ est du signe de $h(x)$ (car $x > 0$).

De plus,

- $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(x)\right] = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x^2)\ln(x)\right] = -\infty$.
  De plus, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1) = 1$ donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty}$.
- $g(\alpha) \approx 2,9 > 0$
- $g(x) = x^2\left[\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)\ln(x) + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right]$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)\ln(x)\right] = -\infty$.
  De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)\ln(x) + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right] = -\infty$.

  Ainsi, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$.

D'où le tableau suivant.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha) > 0$	$\searrow$	$-\infty$

b. Sur $]0\,;\alpha[$, g est continue et strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $g(\alpha) > 0$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution β sur $]0\,;\alpha[$ à l'équation $g(x) = 0$.
Il en est de même sur $]\alpha\,;+\infty[$. La solution est alors notée γ.

$$\beta \approx 0,301 \qquad \text{et} \qquad \gamma \approx 3,319$$

Nous savons donc que :

$$g(\beta) = 0 \qquad \text{donc :} \qquad (1-\beta^2)\ln\beta + \beta^2 + 1 = 0.$$

Ainsi,

$$g\left(\frac{1}{\beta}\right) = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)\ln\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + 1$$

$$= \frac{\beta^2 - 1}{\beta}\times(-\ln\beta) + \frac{\beta^2+1}{\beta^2}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{\beta}\right) &= \frac{(1-\beta^2)\ln\beta + \beta^2 + 1}{\beta^2} \\ &= \frac{g(\beta)}{\beta^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{1}{\beta}$ est solution de l'équation $g(x) = 0$. Or, cette équation n'admet que deux solutions : β et γ. De plus, $\beta \neq \dfrac{1}{\beta}$ donc $\gamma = \dfrac{1}{\beta}$.

3 $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln(x)+1)(x^2+1) - 2x^2\ln(x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\ln(x) - x^2\ln(x) + x^2 + 1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(1-x^2)\ln(x) + x^2 + 1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)^2}}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ d'où :

x	0		β		$\frac{1}{\beta}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\frac{1}{\beta})$	$\searrow$	0

4 $$\begin{aligned} f(\gamma) = f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\frac{1}{\beta}\ln\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta^2}+1} &= \frac{\frac{-\ln\beta}{\beta}}{\frac{1+\beta^2}{\beta^2}} \\ &= -\frac{\ln\beta}{\beta} \times \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \\ &= -\frac{\beta\ln\beta}{\beta^2+1} \\ &= -f(\beta). \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.21 page 161

Partie A

1 $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}(1-xe) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\big[-2\ln(x)\big] = +\infty \end{array}\right\}$ par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}(1-xe) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\big[-2\ln(x)\big] = -\infty \end{array}\right\}$ par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty}$

2 $g(x) = u(x) + v(x)$, où $u(x) = 1 - xe$ et $v(x) = -2\ln x$.
u et v étant deux fonctions strictement décroissantes sur $]0\,;+\infty[$, g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ (comme somme de deux fonctions strictement décroissantes sur le même intervalle).

3 Sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$,

- g est continue et strictement monotone (décroissante ici) ;
- $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\mathrm{e}}{2} + 2\ln 2 \approx 1,03 > 0$ et $g(1) = 1 - \mathrm{e} < 0$

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α dans $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 0,67$.

4 On déduit de ce qui a été dit précédemment le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1 $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x) + x\mathrm{e}) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0}(x^2) = 0^+\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

$$f(x) = \frac{x\left(\frac{\ln(x)}{x} + \mathrm{e}\right)}{x^2} = \frac{\frac{\ln(x)}{x} + \mathrm{e}}{x}.$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \mathrm{e}\right) = \mathrm{e} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

2
$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x^2\left(\frac{1}{x} + \mathrm{e}\right) - 2x(\ln(x) + x\mathrm{e})}{x^4} \\ &= \frac{x + x^2\mathrm{e} - 2x\ln(x) - 2x^2\mathrm{e}}{x^4} \\ &= \frac{x - x^2\mathrm{e} - 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{x(1 - x\mathrm{e} - 2\ln(x))}{x^4} \\ &= \frac{1 - x\mathrm{e} - 2\ln(x)}{x^3}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}}$$

On déduit alors de la partie A le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3 α est la valeur pour laquelle $g(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned}g(\alpha) = 0 &\iff 1 - \alpha\mathrm{e} - 2\ln(\alpha) = 0 \\ &\iff -2\ln(\alpha) = -1 + \alpha\mathrm{e} \\ &\iff \ln(\alpha) = \frac{1 - \alpha\mathrm{e}}{2} \qquad \text{(E)}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\ln(\alpha) + \alpha \mathrm{e}}{\alpha^2} \\ &= \frac{\frac{1-\alpha\mathrm{e}}{2} + \alpha\mathrm{e}}{\alpha^2} \text{ , d'après l'égalité (E)} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1 - \alpha\mathrm{e} + 2\alpha\mathrm{e}}{2} \\ \boxed{f(\alpha) = \frac{1+\alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.22 page 162

1 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-(1+x)}{1+x} = \dfrac{-x}{1+x}$ et $f(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln 1 = 0$, d'où le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f		↗	0	↘	

Ainsi, pour $x > -1$, $f(x) \leqslant 0$.

2 Notons $\mathcal{P}_n$: $u_n > 0$.

- **Initialisation :** au $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang initial.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_k > 0 &\iff u_k + 1 > 1 \\ &\iff \ln(u_k + 1) > \ln 1 \\ &\iff u_{k+1} > 0. \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3 Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n = f(u_n).$$

Or, d'après la question précédente, $u_n > 0$ et $f(x) < 0$ pour $x > 0$.
Par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.

La suite est donc décroissante et minorée par 0.
Or, toute suite décroissante et minorée converge (*théorème de convergence des suites monotones*) donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4 On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$. Par définition,

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty} \big[\ln(u_n + 1)\big] = \ell. \tag{4.3}$$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant continue sur $]0\,;+\infty]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \big[\ln(u_n + 1)\big] = \ln\left[\lim_{n\to+\infty} (u_n) + 1\right] = \ln(\ell + 1). \tag{4.4}$$

Des égalités 4.3 et 4.4, on déduit :

$$\ln(\ell+1)=\ell \qquad \text{soit} \qquad \ln(\ell+1)-\ell=0 \qquad \text{ou encore :} \qquad f(\ell)=0.$$

D'après les variations de f, il n'existe qu'une valeur de x pour laquelle $f(x)=0$: c'est $x=0$.

Par conséquent, $\ell=0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0.

Corrigé de l'exercice 4.23 page 162

1 Pour $n=0$, $u_0=5\mathrm{e}\approx 13,59\geqslant 5$ donc l'initialisation est faite.
Supposons que pour un entier k fixé, $u_k\geqslant 5$.
Alors, $5u_k\geqslant 25$ et $\sqrt{5u_k}\geqslant 5$, soit $u_{k+1}\geqslant 5$.
L'hérédité est alors vérifiée ; ainsi, pour tout entier naturel n, on a bien $u_n\geqslant 5$.

2 Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sqrt{5u_n}-u_n\\
&= \frac{\left(\sqrt{5u_n}-u_n\right)\left(\sqrt{5u_n}+u_n\right)}{\sqrt{5u_n}+u_n}\\
&= \frac{5u_n-u_n^2}{\sqrt{5u_n}+u_n}\\
&= \frac{u_n(5-u_n)}{\sqrt{5u_n}+u_n}\\
&\leqslant 0 \text{ car } u_n\geqslant 5 \text{ d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 5) et décroissante, donc elle converge.

4 **a.**
$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln(u_{n+1})-\ln 5\\
&= \ln\sqrt{5u_n}-\ln 5\\
&= \frac{1}{2}\ln(5u_n)-\ln 5\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln 5+\ln(u_n)\right)-\ln 5\\
&= \frac{1}{2}\ln(u_n)-\frac{1}{2}\ln 5\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(u_n)-\ln 5\right)\\
&= \frac{1}{2}v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ et de premier terme :

$$v_0=\ln(u_0)-\ln(5)=\ln(5\mathrm{e})-\ln(5)=\ln(5)+\ln(\mathrm{e})-\ln(5)=\ln(\mathrm{e})=1.$$

b. $v_n=v_0\times q^n=\dfrac{1}{2^n}$ car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
De plus,

$$\begin{aligned}
v_n=\ln(u_n)-\ln(5) &\iff \ln(u_n)=v_n+\ln(5)\\
&\iff u_n=\mathrm{e}^{v_n+\ln(5)}\\
&\iff u_n=\mathrm{e}^{v_n}\times\mathrm{e}^{\ln(5)}\\
&\iff \boxed{u_n=5\mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}}}
\end{aligned}$$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=5\mathrm{e}^0=5$.

5 D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{\overbrace{u_0\times u_1\times u_2\times\cdots\times u_n}^{(n+1)\text{ facteurs}}}{5^n}\\
&= \frac{5\mathrm{e}^{v_0}\times 5\mathrm{e}^{v_1}\times 5\mathrm{e}^{v_2}\times\cdots\times 5\mathrm{e}^{v_n}}{5^n}\\
&= \frac{5^{n+1}\mathrm{e}^{v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n}}{5^n}\\
&= 5\mathrm{e}^{v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n}.
\end{aligned}$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique,

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Ainsi,

$$P_n=5\mathrm{e}^{2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=0$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(P_n)=5\mathrm{e}^2}$$

Corrigé de l'exercice 4.24 page 163

1 On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}\\
&= \frac{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\\
&= 2\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

Or,

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ (croissance comparée)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\ln(1)=0$ et, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=0$.

Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0}$$

2 **a.** Nous avons, pour n fixé :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}\right]=+\infty$ (car $n>0$).

Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty}$$

b. La dérivée de $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$ (fonction de la forme $\ln(u)$) est la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\left(\dfrac{u'}{u}\right)$.

Ainsi,

$$\boxed{f_n'(x) = 2 + \frac{2x}{n(x^2+1)}}$$

c. De la question précédente, on peut déduire que pour tout entier naturel n,

$$f_n'(x) > 0.$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	-2 $\nearrow$	$+\infty$

- $f_n(0) = 2\times 0 - 2 + \dfrac{\ln(0^2+1)}{n} = -2$.

d. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f_n(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α_n (pour renforcer le fait que cette valeur dépend du nombre n), sur $[0\,;+\infty[$.

e. $f_n(1) = 2\times 1 - 2 + \dfrac{\ln(1^2+1)}{n} = \dfrac{\ln(2)}{n} > 0$. Donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f_n(0)$ et $f_n(1)$.
Ainsi, $\alpha_n \in \,]0\,;1[$.

3 D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
& f_n\left(\alpha_n\right) = 0 \\
\iff\ & 2\alpha_n - 2 + \frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{n} = 0 \\
\iff\ & \frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{n} = 2 - 2\alpha_n \\
\iff\ & \boxed{\ln\left(\alpha_n^2+1\right) = 2n\left(1-\alpha_n\right)}
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}\left(\alpha_n\right) &= 2\alpha_n - 2 + \frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{n+1} \\
&= 2\alpha_n - 2 + \frac{2n\left(1-\alpha_n\right)}{n+1} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= -2(1-\alpha_n) + \frac{2n\left(1-\alpha_n\right)}{n+1} \\
&= (1-\alpha_n)\left[-2 + \frac{2n}{n+1}\right] \\
&= (1-\alpha_n)\left(\frac{-2n-2+2n}{n+1}\right) \\
&= \frac{-2(1-\alpha_n)}{n+1}
\end{aligned}$$

Or, $0 < \alpha_n < 1$ donc $1-\alpha_n > 0$. De plus, $n > 0$ donc $\dfrac{-2(1-\alpha_n)}{n+1} < 0$.

Ainsi, $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

4 **a.** À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$\alpha_1 \approx 0,77 \qquad ; \qquad \alpha_4 \approx 0,92 \qquad ; \qquad \alpha_{10} \approx 0,97.$$

b. La fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]0\,;1[$.
De plus, $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ donc l'image de α_n par f_{n+1} est négative, ce qui signifie que la solution à l'équation $f_{n+1}(x) = 0$ est supérieure à α_n.

Ainsi, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

La suite (α_n)est donc croissante.

c. On sait que $0 < \alpha_n < 1$ donc la suite (α_n) est majorée. De plus, elle est croissante.
Or, toute suite croissante et majorée converge.

Donc (α_n) converge.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 2x - 2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{\ln\left(x^2+1)\right)}{n}\right] = 0$.
Or, α_n représente la solution unique à l'équation $f_n(x) = 0$. Donc, si on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow x = \ell.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 2x - 2$$

donc $2\ell - 2 = 0$, soit $\ell = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n) = 1$.

Corrigé de l'exercice 4.25 page 163

1 Un programme possible est le suivant :

Code Python 4-14

```python
from math import log
u = 1
for n in range(50):
    u = log(1 + 1/u)
    print(u)
```

2 Les derniers termes affichés sont :

```
0.8064660055835747
0.8064659864474527
0.8064659995826947
0.8064659905665218
0.8064659967553208
0.8064659925072619
0.8064659954231757
```

On peut ainsi conjecturer que la suite converge vers une limite dont une valeur approchée est 0,806.

3 Montrons que $v_n \leqslant 1$ pour tout entier naturel n.

- Initialisation : $v_0 = u_0 = 1 \leqslant 1$.
- Hérédité : supposons que pour un entier k fixé, $v_k \leqslant 1$. Alors,

$$\begin{aligned} v_k \leqslant 1 &\iff u_{2k} \leqslant 1 \\ &\iff \frac{1}{u_{2k}} \geqslant 1 \\ &\iff 1 + \frac{1}{u_{2k}} \geqslant 2 \\ &\iff \ln\left(1 + \frac{1}{u_{2k}}\right) \geqslant \ln 2 \\ &\iff u_{2k+1} \geqslant \ln 2 \\ &\iff \frac{1}{u_{2k+1}} \leqslant \frac{1}{\ln 2} \\ &\iff 1 + \frac{1}{u_{2k+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_k \leqslant 1 &\iff \ln\left(1 + \frac{1}{u_{2k+1}}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{\ln 2}\right) \\ &\iff u_{2k+2} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{\ln 2}\right) < 1 \\ &\iff v_{k+1} \leqslant 1. \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.

  Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 1$.

4 Posons $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Alors, $f = \ln(u)$, avec $u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ainsi,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Inutile d'aller plus loin car $x > 0$ donc $-\frac{1}{x^2} < 0$ et $1 + \frac{1}{x} > 0$. Donc $f'(x) < 0$.
Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

5 Montrons que (v_n) est décroissante par récurrence.

- $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 \approx 0,89$ donc $v_1 < v_0$.
- Supposons que pour un entier k fixé, $v_{k+1} < v_k$.
  Alors, $u_{2(k+1)} < u_{2k}$ et donc $f(u_{2(k+1)}) > f(u_{2k})$ (car f est décroissante), soit :

$$u_{2k+3} > u_{2k+1}.$$

  Donc $f(u_{2k+3}) < f(u_{2k+1})$, soit $u_{2k+4} < u_{2k+2}$, ou encore : $v_{k+2} < v_{k+1}$.
  L'hérédité est donc vérifiée.

Ainsi, (v_n) est décroissante.

6 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant v_n$.

- **Initialisation :** $v_0 = 1$ et $w_0 \approx 0,69 \leqslant v_0$.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $w_k \leqslant v_k$.

$$\begin{aligned}
w_k \leqslant v_k &\iff u_{2k+1} \leqslant u_{2k} \\
&\iff f(u_{2k+1}) \geqslant f(u_{2k}) \quad \text{car } f \text{ est décroissante} \\
&\iff u_{2k+2} \geqslant u_{2k+1} \\
&\iff f(u_{2k+2}) \leqslant f(u_{2k+1}) \\
&\iff u_{2k+3} \leqslant u_{2k+2} \\
&\iff u_{2(k+1)+1} \leqslant u_{2(k+1)} \\
&\iff w_{k+1} \leqslant v_{k+1}.
\end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant v_n$.

7 On démontre facilement (par récurrence encore) que $u_n > 0$; en effet, $u_0 > 0$ et si $u_k > 0$ alors $1 + \dfrac{1}{u_k} > 1$ et donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_k}\right) > 0$, soit $u_{k+1} > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$0 < w_n \leqslant v_n < 1. \qquad (1)$$

(w_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge.
(v_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} (v_n) = \lim_{x\to+\infty} (u_{2n})$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} (w_n) = \lim_{x\to+\infty} (u_{2n+1})$$

donc (u_n), (v_n) et (w_n) ont la même limite. Notons-là ℓ.

La fonction ln étant continue sur $]0\,;+\infty[$,

$$\ell = \ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right).$$

Corrigé de l'exercice 4.26 page 164

Partie A

1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$.

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$.

2 $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

On sait que sur $\mathbb{R}_+^*$, $1 + \dfrac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.
Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

3 On a le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\|\| +\infty$	$\searrow 0$

Partie B

1 $g'(x) = f'(x) - 1$

$$= \frac{-1}{x^2+x} - 1$$

$$= \frac{-1-x^2-x}{x(x+1)}$$

$$\boxed{g'(x) = -\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}}$$

Or, le discriminant de x^2+x+1 étant $\Delta = -3 < 0$, ce polynôme est toujours strictement positif.
De plus, $x(x+1) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$; donc $g'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 g est strictement décroissante et continue sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.
De plus,

- $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - \frac{1}{2} \approx 0,6$;
- $g(1) = \ln 2 - 1 \approx -0,3$.

Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g(1)$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors une unique valeur α sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

$$g(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) - x = 0 \Longleftrightarrow f(x) = x.$$

Ainsi, α est aussi l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

Partie C

1 $v_0 = u_0 = 1$.

$$v_1 = u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) = f(f(1)) = f(\ln(2)) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(2)}\right) \approx 0,893.$$

$v_2 = u_4 = f(u_3) = f(f(u_2)) \approx f(f(0,893)) \approx f(0,751) \approx 0,846$.

2
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{2(n+1)} \\ &= u_{2n+2} \\ &= u_{N+2} \quad , \quad N = 2n \\ &= f(u_{N+1}) \\ &= f(f(u_N)) \end{aligned}$$
$$v_{n+1} = f(f(u_{2n}))$$

3 On pose $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : « $\frac{1}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation.**
  D'après la question 1, $\frac{1}{2} \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 1$.
  Par conséquent, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité.**
On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour un n fixé. Montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est aussi.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1 \\
\iff & \frac{1}{2} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n} \leqslant 1 \\
\iff & f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant f(u_{2n+2}) \geqslant f(u_{2n}) \leqslant f(1) \qquad \text{car } f \text{ est décroissante} \\
\iff & f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leqslant f\left(f(u_{2n+2})\right) \leqslant f\left(f(u_{2n})\right) \leqslant f(f(1))
\end{aligned}$$

Or, $v_{n+1} = f(f(u_{2n}))$ et donc $v_{n+1+1} = f(f(u_{2(n+1)}))$, soit $v_{n+2} = f(f(u_{2n+2}))$.

$$\iff f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant f(f(1))$$

Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(3)$ donc $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(3)}\right) \approx 0,65 > \frac{1}{2}$.

De plus, $f(1) = \ln(2)$ donc $f(f(1)) = \ln(1 + \frac{1}{\ln(2)}) \approx 0,89 < 1$.

$$\iff \frac{1}{2} \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

4 De la question précédente, on déduit que (v_n) est décroissante $(v_{n+1} \leqslant v_n)$ et minorée.
Or, *toute suite décroissante et minorée converge* d'après le théorème de convergence des suites monotones.

Donc, (v_n) converge.

5 $v_n = u_{2n}$ ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.
Notons ℓ cette limite. Alors, $\ell > 0$ d'après la question 3 de cette partie.
Or, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc :

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \\
\iff & \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1}) = f\left(\lim_{n\to+\infty} (u_n)\right) \qquad \text{car } f \text{ est continue} \\
\iff & \ell = f(\ell)
\end{aligned}$$

Or, nous avons montré que l'équation $f(x) = x$ admettait une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$: α.
Ainsi, $\ell = \alpha$.

La suite (v_n) converge donc vers α.

Partie D

1 La boucle « Tant que » a pour but de calculer les termes de la suite (v_n) ; en prenant 1 terme sur 2 de la suite (u_n), on obtient ceux de (v_n).
En ayant un terme $v_n = u_{2n}$, pour obtenir v_{n+1}, on doit calculer $f(v_n)$ (ligne 9) puis $f(f(v_n))$ (ligne 10), d'où les lignes 9 et 10 identiques.

2 On peut remplacer ces deux lignes par :

```
a ← ln(1+1/ln(1+1/a))
```

3 En Python, cet algorithme donne :

Code Python 4-15

```
from math import log
a, n, d = 1, 0, 1 # a = 1, n = 0 et d = 1
while d > 10**(-6):
    d = a
    a = log(1 + 1/a)
    a = log(1 + 1/a)
    n = n + 1
    d = d - a
print(a)
```

Ce programme renvoie la valeur : `0.8064664829440021`, ce qui nous permet de conclure que la valeur approchée de α à 10^{-6} près est :

$$\boxed{\alpha \approx 0,806466}$$

Corrigé de l'exercice 4.27 page 165

1 Le polynôme $2X^2 - 3X + 2$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0.$$

Donc l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses si l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution. Or,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x\Big[2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 2\Big] = 0 \\ &\iff 2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0 \text{ (car } x \neq 0) \\ &\iff 2X^2 - 3X + 2 = 0 \text{ en posant } X = \ln(x). \end{aligned}$$

Cette dernière équation n'admettant aucune solution, l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
Ainsi, $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2 Factorisons $f(x)$ par $\ln(x)$:

$$f(x) = x\ln(x)\left[2\ln(x) - 3 + \frac{2}{\ln(x)}\right].$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[\ln(x)\big] = +\infty$ donc, par produit des limites,

$$\lim_{x\to+\infty} \big[x\ln(x)\big] = +\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[2\ln(x)\big] = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\ln(x)}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{2}{X}\right) = 0$ donc, par somme des limites,

$$\lim_{x\to+\infty} \left[2\ln(x) - 3 + \frac{2}{\ln(x)}\right] = +\infty.$$

Ainsi, par produit des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \big[f(x)\big] = +\infty}$$

3 $f'(x) = 2\big(\ln(x)\big)^2 + \ln(x) - 1$.

a. Dérivons $f'(x)$.
La fonction $x \mapsto \big(\ln(x)\big)^2$ est de la forme u^2, avec $u(x) = \ln(x)$, donc sa dérivée est $2u'u$, soit $x \mapsto 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$ car $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'où :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x} \\ &= 4\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{x}\big(4\ln(x)+1\big)}$$

b. $f''(x) \geqslant 0 \iff 4\ln(x)+1 \geqslant 0$ car $\dfrac{1}{x} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$

$\iff \ln(x) \geqslant -\dfrac{1}{4}$

$\iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1/4}$.

On en déduit alors que :

- sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{-1/4}\right[$, $f''(x) < 0$ et donc que f est concave ;
- sur $\left]\mathrm{e}^{-1/4}\,;+\infty\right[$, $f''(x) > 0$ et donc que f est convexe ;
- $f''\left(\mathrm{e}^{-1/4}\right) = 0$ en changeant de signe donc que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse $x = \mathrm{e}^{-1/4}$.

c. L'abscisse de B est $\mathrm{e} > \mathrm{e}^{-1/4}$ donc T_B est comme toutes les tangentes à $\mathcal{C}_f$ sur $\left]\mathrm{e}^{-1/4}\,;+\infty\right[$ en dessous de $\mathcal{C}_f$ (car f est, sur cet intervalle, convexe).
Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est bien au-dessus de T_B sur $\left]\mathrm{e}^{-1/4}\,;+\infty\right[$, et donc sur $[1\,;+\infty[\; \subset \left]\mathrm{e}^{-1/4}\,;+\infty\right[$.

Corrigé de l'exercice 4.28 page 166

Partie A

1 Le programme dûment complété est le suivant :

Code Python 4-16

```python
def suite(k):
    L = []
    u = 5
    for i in range(k):
        L.append(u)
        u = 2 + log(u*u - 3)
    return L
```

2 D'après ce que renvoie `suite(9)`, on peut conjecturer que :

- (u_n) semble *croissante* car les nombres contenus dans la liste représentent les termes successifs de la suite et ils sont de plus en plus grands ;
- (u_n) semble *convergente* car ces nombres se rapprochent les uns des autres et semblent se rapprocher d'un nombre dont une valeur approchée est 5,163.

3 Dans la fonction `mystere(10000)` :

- dans la boucle `for`, l'instruction `range(n-1)` signifie que i prend ses valeurs de 0 à $n-2$ (n'oublions pas que `range(p)` désigne les valeurs de 0 à $p-1$) ;
- on parcourt donc la liste composée de tous les termes de u_0 à u_{n-2} ;
- on affecte la valeur 0 à la variable `c` (qui contenait initialement la valeur 1) si un terme est plus grand que son suivant ;
- comme la fonction renvoie la valeur 1, cela signifie que le test a échoué pour tous les termes et donc que la suite est *croissante*.

Le fait que « `mystere(10000)` » renvoie la valeur 1 ne contredit donc pas la conjecture selon laquelle la suite est croissante.

Partie B

1 $g = 2 + \ln(u)$, avec $u(x) = x^2 - 3$ et $u'(x) = 2x$ donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 + \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{2x}{x^2 - 3}. \end{aligned}$$

Or, sur $[2\,;+\infty[$, $x^2 - 3 > 0$ et $2x > 0$ donc $g'(x) > 0$.
Ainsi, g est strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.

2 **a.** Posons $(\mathcal{P}_n)$: $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

- **Initialisation.**
$u_0 = 5$ et $u_1 = 2 + \ln\left(u_0^2 - 3\right) = 2 + \ln(5^2 - 3) = 2 + \ln(22) \approx 5,1$.
Ainsi,
$$4 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6.$$
$(\mathcal{P}_0)$ est donc vraie.

- **Hérédité.**
Supposons que pour un entier naturel k fixé, $(\mathcal{P}_k)$ est vraie, c'est-à-dire :
$$4 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 6. \qquad \text{(HR)}$$
Montrons alors que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est aussi vraie, c'est-à-dire :
$$4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 6.$$
Partons de l'hypothèse de récurrence (HR) :
$$\begin{aligned} 4 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 6 &\Longrightarrow g(4) \leqslant g(u_k) \leqslant g(u_{k+1}) \leqslant g(6) \quad \text{car } g \text{ est croissante sur } [4\,;6] \\ &\Longrightarrow 2 + \ln(13) \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2 + \ln(33) \\ &\Longrightarrow 4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 6 \quad \text{car } 2 + \ln(13) \approx 4,56 \text{ et } 2 + \ln(33) \approx 5,5). \end{aligned}$$
L'hérédité est alors prouvée.

- **Conclusion.**
$(\mathcal{P}_0)$ est vraie et, pour un entier naturel $k \geqslant 0$, $(\mathcal{P}_k) \Rightarrow (\mathcal{P}_{k+1})$ donc, d'après le principe de récurrence,
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}_n) \text{ est vraie, soit : } 4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6.$$

b. Nous venons de montrer que (u_n) est croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée (car $un \leqslant 6$).
Ainsi, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

Partie C

1
- L'équation $f(x) = 0$ admet une solution évidente d'après le tableau de variations de la fonction f. En effet, $f(2) = 0$ donc $\alpha = 2$ est une solution.
- Sur $[2\,;3]$, f est strictement croissante et $f(2) = 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas d'autres solutions que $\alpha = 2$ sur cet intervalle.
- Sur $[3\,;+\infty[$,
  → f est continue et strictement décroissante ;
  → $f(3) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$ donc $0 \in f\big([3\,;+\infty[\big)$.

  Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $[3\,;+\infty[$.

- Nous avons déjà dit que $\alpha = 2$ dans la question précédente.
  À l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de l'autre solution à l'équation $f(x) = 0$: $\beta \approx 5,164$.

2 D'après la partie B,

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [4\,;6]$;
- $u_{n+1} = g(u_n)$, avec g continue sur $[4\,;6]$;
- (u_n) est convergente vers un nombre ℓ.

donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$, et donc :

$$\begin{aligned}
\ell = g(\ell) &\iff \ell = 2 + \ln(\ell^2 - 3)\\
&\iff 2 + \ln(\ell^2 - 3) - \ell = 0\\
&\iff f(\ell) = 0\\
&\iff \ell = \alpha = 2 \text{ ou } \ell = \beta \approx 5,164
\end{aligned}$$

Or, $\alpha \notin [4\,;6]$ et $\beta \in [4\,;6]$ donc $\ell = \beta$.

5 Fonctions trigonométriques

Dans ce chapitre

1 Fonctions sinus et cosinus

1 Parité

Définition 17

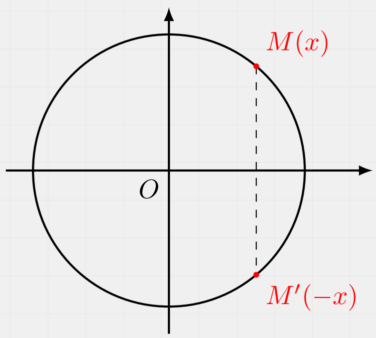
- On dit qu'une fonction est **paire** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout x dans $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit qu'une fonction est **impaire** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout x dans $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 30

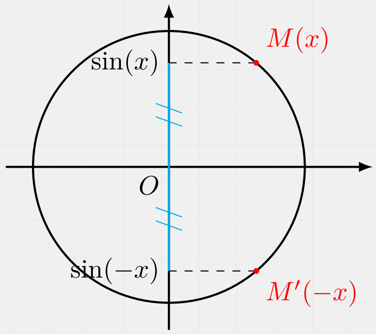
- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est paire.
- La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire.

Démonstration 9

- Fonction $x \mapsto \cos(x)$.
  Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
  De plus, nous avons :



  Ainsi, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est donc paire.
- Fonction $x \mapsto \sin(x)$.
  Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
  De plus, nous avons :



  Ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (car M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses).

2 Périodicité

Définition 18

On dit qu'une fonction f est ***T*-périodique** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout réel de $\mathcal{D}$,

$$f(x+T) = f(x).$$

Propriété 31

Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 2π-périodiques.

Démonstration 10

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π. Ainsi, les nombres x et $x+2\pi$ auront la même image sur le cercle trigonométrique, ce qui signifie que :

$$\cos(x) = \cos(x+2\pi) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sin(x+2\pi).$$

De plus, les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ (qui est centré en 0).
Donc $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 2π-périodiques.

Remarque 32

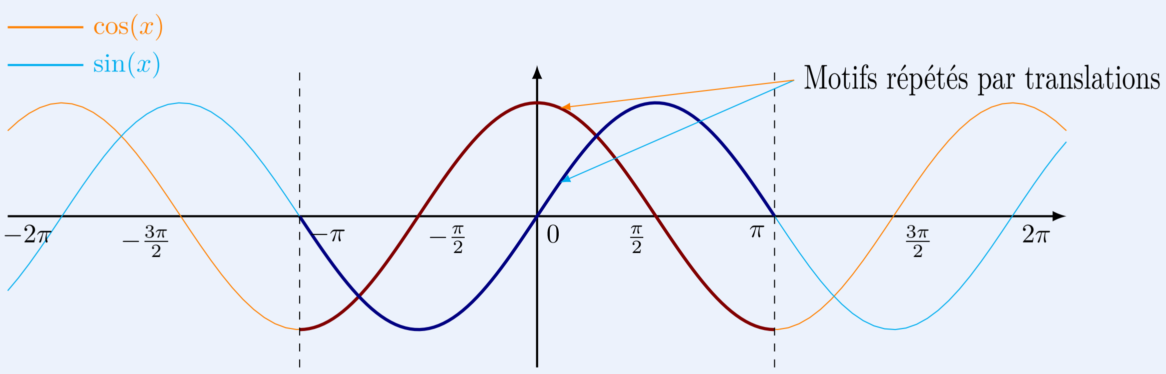
On peut aussi dire que les fonctions sont périodiques de période 2π.

3 Courbes représentatives

- Le fait de dire que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 2π-périodiques signifie que si on prend n'importe quel intervalle d'amplitude 2π, le motif de la courbe représentative trouvé sur cet intervalle pourra se répéter.
  On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, et déduire la totalité des courbes par translations de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2k\pi\\0\end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.
- Le fait de dire que $x \mapsto \cos(x)$ est paire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (car $f(-x) = f(x)$).
  De plus, le fait de dire que $x \mapsto \sin(x)$ est impaire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère (car $f(-x) = -f(x)$).

  On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, et déduire les courbes par symétries (axiale ou centrale).

Au final, les courbes représentatives sont les suivantes :



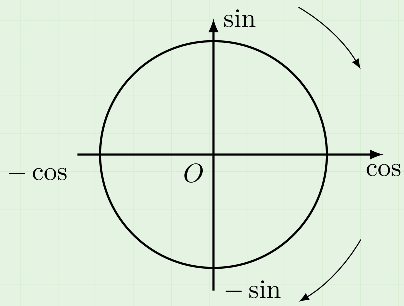
4 Dérivées

Propriété 32

- La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est la fonction $x \mapsto -\sin(x)$.
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

Remarque 33

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de cette formule est de dire que dériver revient à tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre :



Propriété 33

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos\left[u(x)\right]$ est :
$$x \mapsto -u'(x) \times \sin\left[u(x)\right].$$
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin\left[u(x)\right]$ est :
$$x \mapsto u'(x) \times \cos\left[u(x)\right].$$

Exemple 36

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos\left(\mathrm{e}^x\right)$. Alors,
$$f'(x) = -\mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^x\right).$$
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sin(-3x+5)$. Alors,
$$g'(x) = -3\cos(-3x+5).$$

5 Limites

Propriété 34

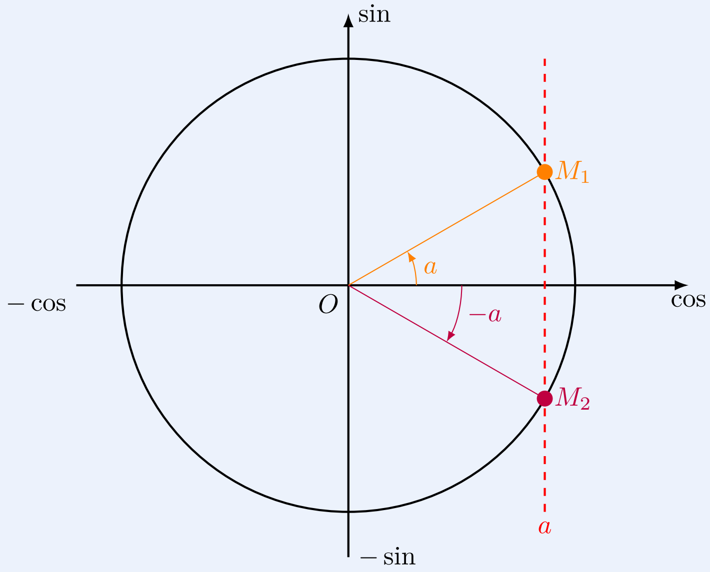
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right) = 0$

Démonstration 11

On utilise la règle de l'Hospital (vue dans un exercice du chapitre 3) ou un taux d'accroissement.

2 Équations et inéquations

1 Équations du type cos(x) = cos(a)



Propriété 35

L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$, notées :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 37

L'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour ensemble solution sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque 34

Si l'on souhaite les solutions sur $[0\,;2\pi]$ ou sur n'importe quel autre intervalle, il suffit de prendre toutes les valeurs de k pour lesquelles on obtient des valeurs dans l'intervalle.

Exemple 38

L'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour ensemble solution sur $[0\,;2\pi]$:

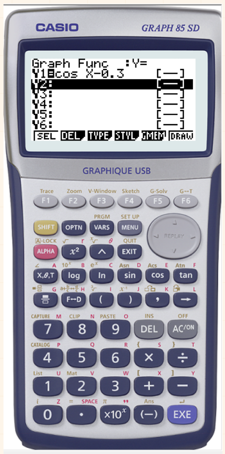
$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{11\pi}{6} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

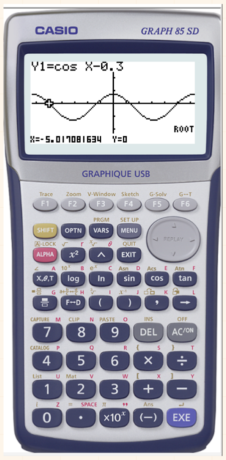
Si a n'est pas un angle de référence (ou un angle qui peut s'y ramener), on ne peut résoudre l'équation qu'en donnant des valeurs approchées, sauf dans certains cas où l'énoncé nous guide pour trouver des valeurs exactes.

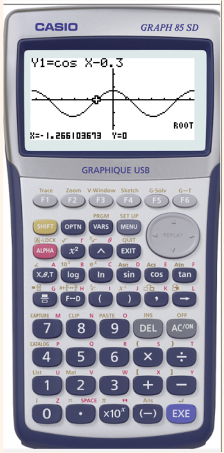
Exemple 39

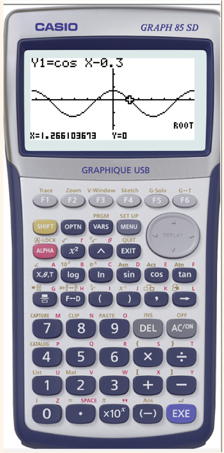
On souhaite résoudre l'équation $\cos(x) = 0,3$ sur $]-\pi\,;\pi]$.
On peut utiliser :

- *la calculatrice* : on entre la fonction $f(x) = \cos(x) - 0,3$, on trace la courbe puis on demande les racines (« ROOT ») [on adapte en fonction du type de la calculatrice].

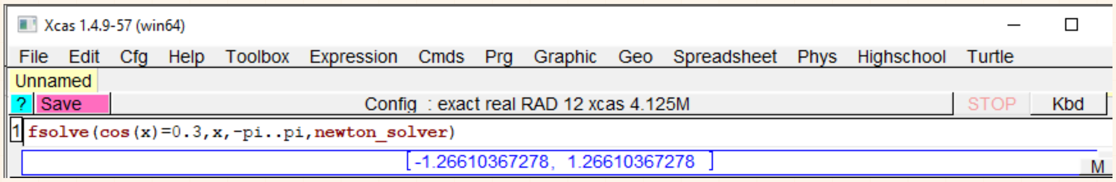








- *le logiciel Xcas* :



- *Python* :

Code Python 5-17

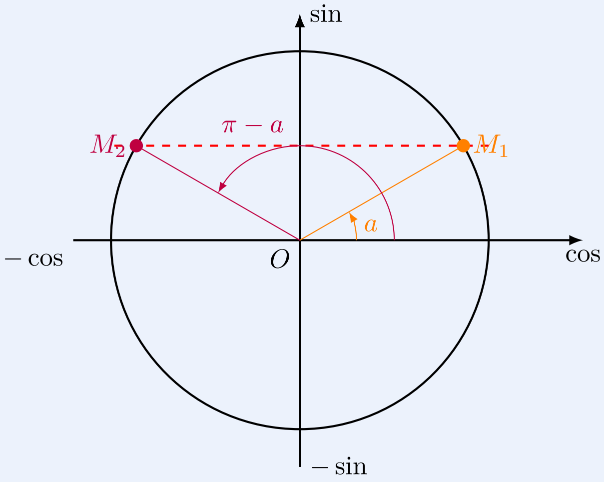
```python
from math import cos,pi
from scipy.optimize import bisect

f = lambda x : cos(x) - 0.3
a = bisect(f,-pi,0)

print(a)
```

On sait (par lecture graphique) qu'il y a 2 solutions opposées, donc trouver la solution négative (par exemple) suffit. On utilise alors la fonction `bisect(fonction, x0 , x1)` du module `scipy.optimize`, où `x0` et `x1` sont les bornes de l'intervalle dans lequel se trouve la solution de l'équation $f(x) = 0$.

2 Équation du type sin(x) = a



Propriété 36

L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ admet pour solutions sur $\mathbb{R}$:

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 40

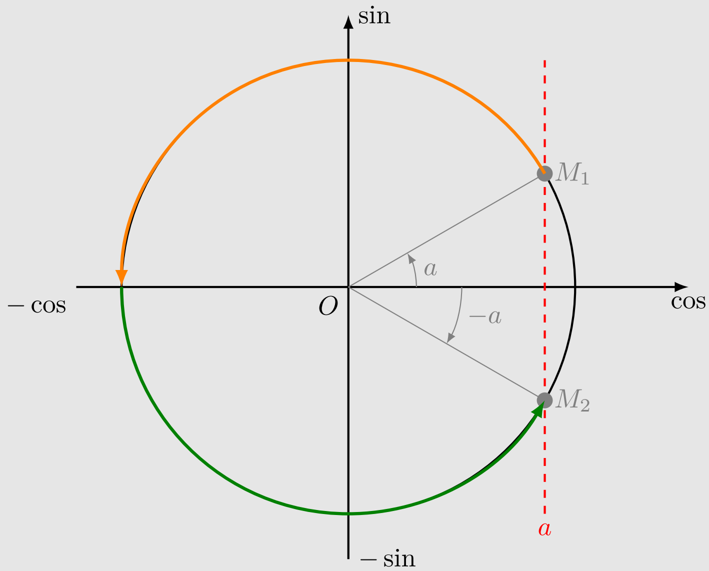
L'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ admet pour ensemble solution sur $[0\,;2\pi]$:

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right\}.$$

3 Inéquations du type cos(x) ⩽ cos(a) ou sin(x) ⩾ sin(a)

Methode 6

On place les points images des angles a et $-a$ sur le cercle trigonométrique, et on visualise les points du cercle dont le cosinus est inférieur ou égal à celui de a.



Exemple 41

On souhaite résoudre l'inéquation $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi\,;\pi]$.

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}\,;\pi\right].$$

5 Exercices types

Exercice type 19 ▶ parité et périodicité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

1 La fonction f est-elle paire ? Impaire ? Justifier.

2 Montrer que f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{5}$.

3 Donner alors un intervalle d'étude de f possible.

4 Déterminer la dérivée de f.

1 On calcule pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3\sin\left(5(-x) - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3\sin\left(-5x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

$f(-x) \neq f(x)$ donc f n'est pas paire.
$f(-x) \neq -f(x)$ donc f n'est pas impaire.

2 On calcule :

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) &= 3\sin\left[5 \times \left(x + \frac{2\pi}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right] \\ &= 3\sin\left(5x + 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien périodique de période $\dfrac{2\pi}{5}$.

3 f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{5}$ donc on peut l'étudier sur tout intervalle d'amplitude $\dfrac{2\pi}{5}$.

Un intervalle d'étude peut donc être $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{5}\right]$.

4 $f = 3\sin(u)$ avec $u(x) = 5x - \dfrac{\pi}{4}$ et $u'(x) = 5$ donc :

$$f' = 3 \times [u' \times \cos(u)]$$

soit :

$$f'(x) = 15\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice type 20 ▶ dérivées

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1 $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

2 $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

3 $h(x) = \cos^3(x)$

1 $f = 2uv$ avec $u(x) = \sin(x)$; $u'(x) = \cos(x)$
$v(x) = \cos(x)$; $v'(x) = -\sin(x)$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(u'v + v'u)(x) \\ &= 2\big[\cos^2(x) - \sin^2(x)\big] \\ &= 2\big[1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)\big] \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 2\big[1 - 2\sin^2(x)\big]}$$

2 $g = \sin(u)$ avec $u = \dfrac{1}{v}$, où $v(x) = x^2 + 1$.

Ainsi,

$$u'(x) = -\frac{v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = -\frac{2x}{x^2+1}$$

et donc :

$$g'(x) = u'(x) \times \cos\big[u(x)\big]$$

$$\boxed{g'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}$$

3 $h = u^3$, avec $u(x) = \cos(x)$ et $u'(x) = -\sin(x)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3 \times u'(x) \times u^2(x) \\ &= 3 \times \big(-\sin(x)\big) \times \cos^2(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)}$$

Exercice type 21 ▶ limite

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{3x}\right)$.

$\dfrac{\sin(4x)}{3x} = \dfrac{\sin(4x)}{4x} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{\sin(X)}{X}$ en posant $X = 4x$.

Or, $\displaystyle\lim_{X\to 0}\left(\frac{\sin(X)}{X}\right) = 1$ d'après le cours donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{3x}\right) = \frac{4}{3} \times \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{4x}\right) = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}.$$

Exercice type 22 ▶ équations

Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I donné :

1 $\cos(x)+1=\dfrac{1}{2}$, $I=[0\,;2\pi[$

2 $1+\sin(5x)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, $I=\left[-\dfrac{\pi}{5}\,;\dfrac{\pi}{5}\right]$

1 $$\begin{aligned}\cos(x)+1=\frac{1}{2} &\iff \cos(x)=\frac{1}{2}-1\\ &\iff \cos(x)=-\frac{1}{2}\\ &\iff x=\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\cos(x)+1=\dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi[$ est donc :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right\}}$$

2 $$\begin{aligned}1+\sin(5x)=\frac{2-\sqrt{3}}{2} &\iff \sin(5x)=\frac{2-\sqrt{3}}{2}-1\\ &\iff \sin(5x)=\frac{2-\sqrt{3}-2}{2}\\ &\iff \sin(5x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \sin(5x)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ &\iff \left(\begin{array}{l}5x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 5x=\pi-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+2k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}\\ &\iff \left(\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{2k\pi}{5}\\ \text{ou}\\ x=\dfrac{4\pi}{15}+\dfrac{2k\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

- $-\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\pi}{3}>\dfrac{\pi}{5}$ et $-\dfrac{\pi}{15}-\dfrac{2\pi}{5}=-\dfrac{7\pi}{15}<-\dfrac{\pi}{5}$;
- $\dfrac{4\pi}{15}+\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{2\pi}{3}>\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{4\pi}{15}-\dfrac{2\pi}{5}=-\dfrac{2\pi}{15}>-\dfrac{\pi}{5}$.

L'ensemble solution de l'équation $1+\sin(5x)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{5}\,;\dfrac{\pi}{5}\right]$ est alors :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{15}\ ;\ -\frac{2\pi}{15}\right\}}$$

Exercice type 23 ▶ inéquations

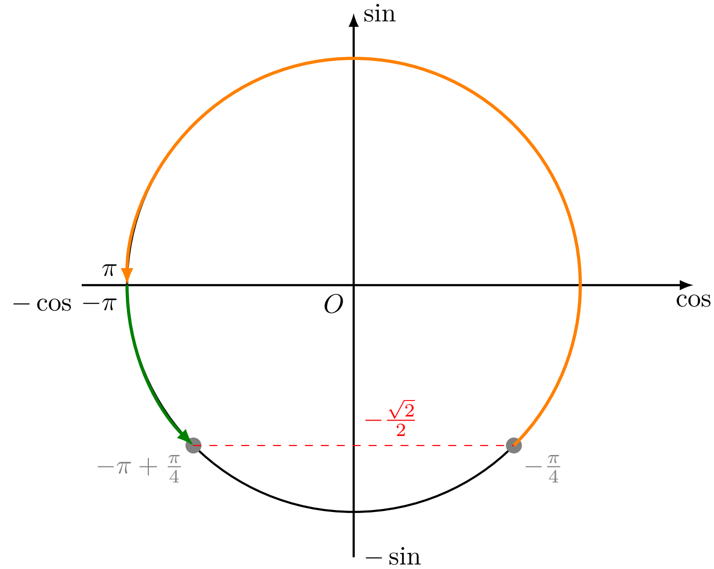
Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I donné :

1 $\sin(x) > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $I = [-\pi\,;\pi]$

2 $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$, $I = [0\,;2\pi]$

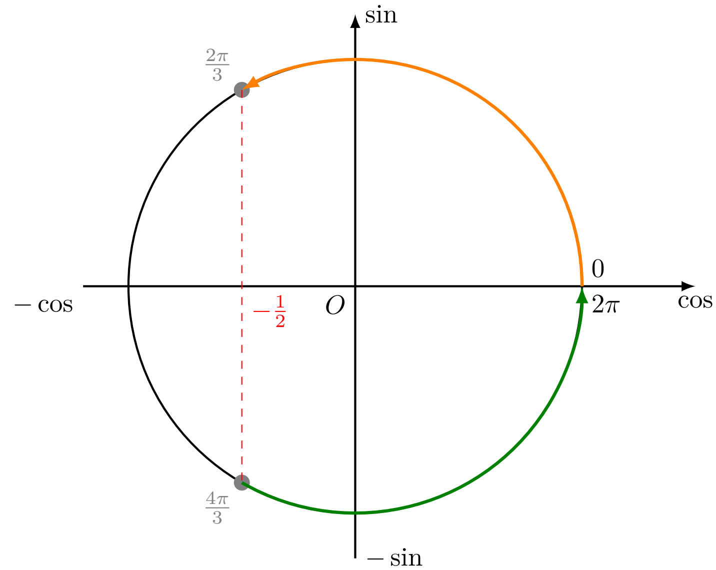
1 $\sin(x) > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
D'après le schéma, si $x \in [-\pi\,;\pi]$,

$$\sin(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \boxed{x \in \left[-\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4}\,;\pi\right]}$$



2 $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$.
D'après le schéma,

$$\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}\,;2\pi\right].$$



5 Exercices

Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 5.1 (équations trigonométriques)

Résoudre sur $[0\,;2\pi[$ les équations suivantes.

1 $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$

2 $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$

Solution page 225

Exercice 5.2 (équations trigonométriques)

Résoudre les équations suivantes sur $]-\pi;\pi]$:

1 $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2 $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution page 225

Exercice 5.3 (équation se ramenant au second degré)

1 Montrer que $\sqrt{16+8\sqrt{3}} = 2+2\sqrt{3}$.

2 Résoudre sur $[0\,;2\pi]$ l'équation :

$$4\cos^2(x) + 2\big(\sqrt{3}-1\big)\cos(x) - \sqrt{3} = 0.$$

Solution page 225

Exercice 5.4 (équation se ramenant au second degré)

On considère l'équation d'inconnue x suivante :

$$81^{\sin^2(x)} + 81^{\cos^2(x)} = 30. \qquad \text{(E)}$$

1 Résoudre l'équation :

$$v^2 - 30v + 81 = 0.$$

2 En déduire les solutions de (E) sur $[0\,;2\pi[$.

Solution page 226

Limites

Exercice 5.5 (avec le cosinus)

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(3x)-1}{3x}\right)$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(3x)-1}{x}\right)$

Solution page 227

Exercice 5.6 (avec le sinus)

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin(5x)}{5x} \right)$ **2** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3x}{\sin(3x)} \right)$ **3** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\sin(7x)} \right)$

Solution page 227

Étude de fonctions

Exercice 5.7 (calcul trigonométrique)

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x) - \sin(x)\big)^2.$$

Montrer que f est une fonction constante.

Solution page 227

Exercice 5.8 (étude d'une fonction)

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}.$$

1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2 Montrer que f est périodique.

3 Déterminer $f'(x)$, puis en déduire le sens de variations de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Solution page 228

Exercice 5.9 (parité et périodicité)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^3 x \cos(3x)$.
Montrer que f est π-périodique et impaire.

Solution page 228

Exercice 5.10 (parité et périodicité)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3 x \cos(3x).$$

Montrer que f est π-périodique et paire.

Solution page 229

Exercice 5.11 (en sciences physiques)

En sciences physiques, notamment en électricité ou en acoustique, on rencontre souvent des fonctions f de la forme :

$$f(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

où φ est appelé la *phase* et ω, la *pulsation*.
Montrer que pour tout réel t :

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0.$$

Exercice 5.12 (étude d'une fonction)

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire alors le sens de variations de f.

Solution page 229

Exercice 5.13 (étude d'une fonction)

On considère la fonction $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Montrer que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout réel x et en déduire les variations de la fonction f'.
3. Calculer $f'(0)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer alors que pour tout réel x, $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{1}{2}x^2$.
5. En considérant une autre fonction $g(x)$, montrer de la même façon que pour tout réel x, $\cos(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.
6. Donner un encadrement de $\cos\frac{\pi}{50}$. Sachant que $\frac{\pi^4}{150\ 000\ 000} < 10^{-6}$, que cela vous inspire-t-il pour la valeur approchée de $\cos\frac{\pi}{50}$ à 10^{-6} près ?

Solution page 230

Exercice 5.14 (avec une suite numérique et un soupçon de Python)

On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \cos u_n.$$

1. Écrire un programme Python permettant de calculer tous les termes jusqu'à u_{30}.
   On peut ainsi conjecturer que la suite converge.
2. Écrire un programme Python permettant de calculer tous les termes jusqu'à ce que la différence entre deux termes consécutifs devienne inférieure ou égale à 10^{-8}, en affichant l'indice de chaque terme.
3. La suite semble-t-elle monotone ?

On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{2n}.$$

4. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
5. Montrer que la fonction $f\ :\ x \mapsto \cos(\cos(x))$ est croissante sur $]0\,;1]$.
6. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < v_{n+1} < v_n \leqslant 1$.
7. Déduire alors que la suite converge. Donner alors une valeur approchée de sa limite à 10^{-6} près.

Solution page 231

Exercice 5.15 (pour aller plus loin)

On considère le programme Python suivant :

Code Python 5-20

```python
def factorielle(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorielle(n-1)

def sin(x,n):
    s = 0
    for k in range((n+1)//2):
        s += (-1)**k * x**(2*k+1) / factorielle(2*k+1)
    return s
```

On admet que la fonction `factorielle(n)` renvoie la valeur $n!$, c'est-à-dire le résultat de l'opération :

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

1 Implémentez ce programme et testez-le en appelant :

- `sin(0.5236,5)`
- `sin(0.7854,5)`
- `sin(0.7854,100)`

2 Calculez avec votre calculatrice $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{4}$, puis $\sin\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4}$. Comparez les résultats obtenus avec ceux de la question précédente. Qu'est-ce que cela vous inspire ?

3 Testez le programme avec `sin(2.0944,100)` $\left(\dfrac{2\pi}{3} \approx 2,0944\right)$.

Quelle conclusion peut-on faire ?

4 Testez le programme avec `sin(40,100)`. Que cela vous inspire-t-il ?

Solution page 232

Objectif bac

Exercice 5.16 (Amérique du Nord, sujet 1, 2024)

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 Calculer I_0.

2
- **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
- **c.** Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3
- **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

- **c.** Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4 **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.$$

5 On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

Code Python 5-22

```
1  from math import *
2
3  def seuil() :
4      n = 0
5      I = 2
6      ...
7          n = n + 1
8          I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
9
10     return n
```

Solution page 234

Exercice 5.17 (Centres étrangers, sujet 1, 2024)

On considère l'équation différentielle :

$$(E_0) : \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1 Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.

2 Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).
On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3 La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».

5 En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6 Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7 Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

Solution page 236

5 Corrigés

Corrigé de l'exercice 5.1 page 219

1 $\cos(x) = \dfrac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \quad \text{sur } [0\,;2\pi[.$$

L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right\}}$$

2 $\sin(x) = \dfrac{1}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{sur } [0\,;2\pi[.$$

L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right\}}$$

Corrigé de l'exercice 5.2 page 219

1 $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$$\iff x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} \quad \text{sur }]-\pi;\pi].$$

L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right\}}$$

2 $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\iff x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{sur }]-\pi;\pi].$$

L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right\}}$$

Corrigé de l'exercice 5.3 page 219

1 $\left(2+2\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 8\sqrt{3} + 4 \times 3$

$\quad = 16 + 8\sqrt{3}.$

Comme $2 + 2\sqrt{3} > 0$,

$$\left(2+2\sqrt{3}\right)^2 = 16 + 8\sqrt{3} \iff 2 + 2\sqrt{3} = \sqrt{16 + 8\sqrt{3}}.$$

2 Pour résoudre sur $[0\,;2\pi]$ l'équation :

$$4\cos^2(x) + 2\left(\sqrt{3} - 1\right)\cos(x) - \sqrt{3} = 0\,,$$

on pose :

$$X = \cos(x).$$

Ainsi, l'équation est équivalente à :

$$4X^2 + 2\left(\sqrt{3} - 1\right)X - \sqrt{3} = 0.$$

C'est une équation du second degré, dont le discriminant vaut :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[2\left(\sqrt{3} - 1\right)\right]^2 - 4 \times (-\sqrt{3}) \times 4 \\
&= 4(3 - 2\sqrt{3} + 1) + 16\sqrt{3} \\
&= 12 - 8\sqrt{3} + 4 + 16\sqrt{3} \\
&= 16 + 8\sqrt{3} \\
&= \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a deux solutions distinctes à notre équation :

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{-2\left(\sqrt{3} - 1\right) - \left(2 + 2\sqrt{3}\right)}{8} = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \\
X_2 &= \frac{-2\left(\sqrt{3} - 1\right) + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Si on se ramène à présent à x, l'inconnue de départ, on a :

$$\begin{cases} \cos(x_1) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x_2) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x_1 = \dfrac{7\pi}{6} \\ x_2 = \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } x_2 = \dfrac{5\pi}{3}. \end{cases}$$

L'ensemble solution de l'équation est alors :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\pi}{6} \ ; \ \frac{\pi}{3} \ ; \ \frac{5\pi}{3} \ ; \ \frac{7\pi}{6} \right\}}$$

Corrigé de l'exercice 5.4 page 219

1 Le discriminant de $v^2 - 30v + 81$ est : $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 1 \times 81 = 576 = 24^2$.

Donc l'équation $v^2 - 30v + 81 = 0$ admet deux solutions $v_1 = \dfrac{30 - 24}{2} = 3$ et $v_2 = 27$.

2 En posant $v = 81^{\sin^2(x)}$, et en tenant compte du fait que pour tout réel x, $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$,

$$\begin{aligned}
(E) &\iff v + \frac{81}{v} = 30 \\
&\iff v^2 + 81 = 30v \\
&\iff v^2 - 30v + 81 = 0 \\
&\iff v = 3 \text{ ou } v = 27 \\
&\iff \left(3^4\right)^{\sin^2(x)} = 3 \text{ ou } \left(3^4\right)^{\sin^2(x)} = 3^3 \\
&\iff 3^{4\sin^2(x)} = 3^1 \text{ ou } 3^{4\sin^2(x)} = 3^3 \\
&\iff 4\sin^2(x) = 1 \text{ ou } 4\sin^2(x) = 3 \\
&\iff \sin^2(x) = \frac{1}{4} \text{ ou } \sin^2(x) = \frac{3}{4} \\
&\iff \sin(x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $81^{\sin^2(x)} + 81^{\cos^2(x)} = 30$ sur $[0\,;2\pi[$ est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{11\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Corrigé de l'exercice 5.5 page 219

Nous allons nous appuyer sur le résultat du cours suivant : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(x)-1}{x}\right) = 0$.

1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(3x)-1}{3x}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\cos(y)-1}{y}\right) = 0$ (en ayant posé $y = 3x$).

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(3x)-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(3\times\dfrac{\cos(3x)-1}{3x}\right) = 3\times\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\cos(y)-1}{y}\right) = 0$ (en ayant posé $y = 3x$).

Corrigé de l'exercice 5.6 page 220

Pour cet exercice, nous allons nous appuyer sur le résultat du cours suivant : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = 1$.

1 En posant $y = 5x$, on voit que $\lim\limits_{x\to 0}(y) = 0$, d'où :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(5x)}{5x}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(y)}{y}\right) = 1.$$

2 D'après le même raisonnement que celui adopté à la question précédente, on peut écrire :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right) = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}}\right] = \frac{1}{1} = 1.$$

3 On a :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(7x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{7}\times\frac{7x}{\sin(7x)}\right) = \frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x}{\sin(7x)}\right).$$

D'après un raisonnement analogue à celui de la réponse à la question précédente, on peut écrire :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x}{\sin(7x)}\right) = 1$$

donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(7x)}\right) = \frac{1}{7}.$$

Corrigé de l'exercice 5.7 page 220

Développons $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \big(\cos(x)+\sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x)-\sin(x)\big)^2\\
&= \cos^2 x + \cancel{2\cos(x)\sin(x)} + \sin^2 x + \cos^2 x - \cancel{2\cos(x)\sin(x)} + \sin^2 x\\
&= 2(\cos^2 x + \sin^2 x)\\
&= 2\times 1\\
&= 2.
\end{aligned}$$

f est donc une fonction constante.

Corrigé de l'exercice 5.8 page 220

1 $f(x)$ est défini quand $1+\sin(x) \neq 0$.

Or, $1+\sin(x)=0 \iff \sin(x)=-1 \iff x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ainsi, le domaine de définition de f est $\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

2 On sait que $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$. Par conséquent, $f(x+2\pi)=f(x)$.
Ainsi, f est 2π-périodique.

3 f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x)=\cos(x)$ et $v(x)=1+\sin(x)$.

Ainsi, f' est de la forme $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, avec $u'(x)=-\sin(x)$ et $v'(x)=\cos(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\sin(x)(1+\sin(x))-\cos^2 x}{(1+\sin(x))^2}\\
&= \frac{-\sin(x)-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin(x))^2}\\
&= \frac{-\sin(x)-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+\sin(x))^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=-\frac{\sin(x)+1}{(1+\sin(x))^2}} \qquad \text{car } \cos^2 x+\sin^2 x=1 \text{ pour tout réel } x.$$

Or, pour tout réel $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$, $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$ donc $0\leqslant\sin(x)+1\leqslant 2$.

De plus, $(1+\sin(x))^2>0$ donc $f'(x)<0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Corrigé de l'exercice 5.9 page 220

- Montrons d'abord que f est π-périodique.

$$\begin{aligned}
f(x+\pi) &= \big[\sin(x+\pi)\big]^3\cos\big[3(x+\pi)\big]\\
&= \big[-\sin(x)\big]^3\cos(3x+3\pi)\\
&= -\sin^3 x\cos(3x+\pi)\\
&= -\sin^3 x\big[-\cos(3x)\big]\\
&= \sin^3 x\cos(3x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x+\pi)=f(x)}$$

La fonction f est donc π-périodique ; on peut donc restreindre l'intervalle d'étude de f à un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Montrons que f est impaire. Le domaine de définition de f est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \big[\sin(-x)\big]^3\cos(-3x)\\ &= \big[-\sin(x)\big]^3\cos(3x)\\ &= -\sin^3 x\cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

La fonction f est donc impaire ; on peut donc réduire l'intervalle d'étude précédent à sa moitié, donc à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Corrigé de l'exercice 5.10 page 220

- Montrons d'abord que f est π-périodique.

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \big[\cos(x+\pi)\big]^3\cos\big(3(x+\pi)\big)\\ &= \big[-\cos(x)\big]^3\cos(3x+3\pi)\\ &= -\cos^3 x\cos(3x+\pi)\\ &= -\cos^3 x\big(-\cos(3x)\big)\\ &= \cos^3 x\cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x+\pi) = f(x)}$$

  Donc f est π-périodique.

  On peut donc réduire l'intervalle d'étude à un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

- Montrons que f est paire. D'abord, le domaine de définition de f est centré en 0.

  De plus, $\begin{aligned} f(-x) &= \big[\cos(-x)\big]^3\cos(-3x)\\ &= \big[\cos(x)\big]^3\cos(3x)\\ &= \cos^3 x\cos(3x)\end{aligned}$

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

  Donc f est paire.

Corrigé de l'exercice 5.11 page 220

$f(t) = a\sin(\omega t+\varphi)$ donc :

$$f'(t) = a\times\omega\cos(\omega t+\varphi).$$

En effet, on sait que la dérivée de $x\mapsto\sin(x)$ est $x\mapsto\cos(x)$.
De plus, on sait que la dérivée de $f(at+b)$ est $af'(at+b)$.

Sur le même principe, on a alors :

$$f''(t) = a\omega\times\big(-\omega\sin(\omega t+\varphi)\big) = -a\omega^2\sin(\omega t+\varphi) = -\omega^2 f(t).$$

Ainsi,

$$f''(t)+\omega^2 f(t) = -\omega^2 f(t)+\omega^2 f(t) = 0.$$

Remarque 36

On dit alors que f est solution de l'équation $y''+\omega^2 y = 0$, équation dont l'inconnue est une fonction y. Quand une équation de ce type admet comme inconnue une fonction, mais aussi sa dérivée et/ou sa dérivée seconde, on parle d'**équation différentielle**. On parlera de ce type d'équations dans le chapitre 6.

Corrigé de l'exercice 5.12 page 222

1 f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$u(x) = \sin(x) + \cos(x)$ $\qquad$ $v(x) = \sin(x) - \cos(x)$

$u'(x) = \cos(x) - \sin(x)$ $\qquad$ $v'(x) = \cos(x) + \sin(x)$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos(x) - \sin(x))(\sin(x) - \cos(x)) - (\sin(x) + \cos(x))(\cos(x) + \sin(x))}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \\
&= \frac{{\color{red}-(\sin(x) - \cos(x))^2}{\color{blue}-(\sin(x) + \cos(x))^2}}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \\
&= \frac{{\color{red}-\sin^2 x + 2\sin(x)\cos(x) - \cos^2 x}{\color{blue}-\sin^2 x - 2\sin(x)\cos(x) - \cos^2 x}}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \\
&= \frac{-2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \\
&= \frac{-2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \\
&= \frac{-2}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \text{ car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1.
\end{aligned}$$

2 On en déduit que $f'(x) < 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$ (car $-2 < 0$ et $(\sin(x) - \cos(x))^2 > 0$).

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

Corrigé de l'exercice 5.13 page 222

1 $f'(x) = -\sin(x) + x$ et $f''(x) = -\cos(x) + 1$.

2 On sait que pour tout réel x,

$$-1 \leqslant -\cos(x) \leqslant 1$$

donc, en ajoutant 1 à chaque membre de cet encadrement, on a :

$$0 \leqslant f''(x) \leqslant 2.$$

Donc $f''(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

3 $f'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$. Or, f' est croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(0) = \cos 0 - 1 + \frac{1}{2} \times 0^2 = 1 - 1 + 0 = 0.$

4 Des variations de f, on déduit que $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, dont :

$$\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geqslant 0$$

soit :

$$\boxed{\cos(x) \geqslant 1 - \frac{1}{2}x^2}$$

5 Considérons la fonction $g(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$.

Alors, $g'(x) = -\sin(x) + x - \dfrac{1}{6}x^3$ et $g''(x) = -\cos(x) + 1 - \dfrac{1}{2}x^2 = -f(x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $g''(x) \leqslant 0$, ce qui signifie que g' est décroissante sur $\mathbb{R}$.
$g'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Par conséquent, $g(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que :

$$\cos(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

6 De ce qui vient d'être fait, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

En prenant $x = \dfrac{\pi}{50}$, cela donne :

$$1 - \frac{\pi^2}{5\ 000} \leqslant \cos\frac{\pi}{50} \leqslant 1 - \frac{\pi^2}{5\ 000} + \frac{\pi^4}{150\ 000\ 000}.$$

Puisque $\dfrac{\pi^4}{150\ 000\ 000} < 10^{-6}$, on peut alors considérer qu'une valeur approchée de $\cos\dfrac{\pi}{50}$ à 10^{-6} près est $1 - \dfrac{\pi^2}{5\ 000}$

Corrigé de l'exercice 5.14 page 222

1 Un programme Python possible est le suivant :

Code Python 5-24

```python
from math import cos
u = 1
for n in range(30):
    u = cos(u)
    print('n = {} et u = {}'.format(n,u))
```

```
n =  0  et u =  0.5403023058681398 (correspond à u(1))
n =  1  et u =  0.8575532158463933
n =  2  et u =  0.6542897904977792
[...]
n =  29  et u =  0.7390870426953322
n =  30  et u =  0.7390838469650002
```

2 Un programme Python possible est le suivant :

Code Python 5-25

```python
from math import cos
u,n = 1,0
while abs(u-cos(u)) > 10**(-8):
    u = cos(u)
    print('n = {} et u = {}'.format(n,u))
    n += 1
```

```
n =  0  et u =  0.5403023058681398
n =  1  et u =  0.8575532158463933
n =  2  et u =  0.6542897904977792
[...]
n =  42  et u =  0.7390851219886894
n =  43  et u =  0.7390851407774467
n =  44  et u =  0.7390851281211138
```

3 À la vue des termes calculés, la suite ne semble pas monotone.
En effet, $u_0 < u_1$, $u_1 > u_2$, $u_2 < u_3$, etc.

4 Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{2(n+1)} \\ &= u_{2n+2} \\ &= u_{2n+1+1} \\ &= \cos\left(u_{2n+1}\right) \\ &= \cos\left(\cos(u_{2n})\right) \\ \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = \cos\left(\cos(v_n)\right)}$$

5 $f(x) = \cos(\cos(x))$ donc $f'(x) = -\sin(x) \times \left[-\sin(\cos(x))\right] = \sin(x) \times \sin(\cos(x))$.
Sur $]0\,;1]$, $\sin(x) \geqslant 0$; de plus, $\cos(x) > 0$ donc $\sin(\cos(x)) > 0$. Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$.
La fonction f est donc croissante sur $]0\,;1]$.

6
- **Initialisation :** pour $n = 0$, $v_0 = 1$ et $v_1 \approx 0,86$ donc $0 < v_1 < v_0 \leqslant 1$.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $0 < v_{k+1} < v_k \leqslant 1$.
  Alors, $f(0) < f(v_{k+1}) < f(v_k) \leqslant f(1)$ car f est croissante sur $]0\,;1]$.
  Or, $f(0) = \cos(\cos 0) \approx 0,54 > 0$ et $f(1) = \cos(\cos 1) \approx 0,86 < 1$.
  Donc $0 < f(v_{k+1}) < f(v_k) \leqslant 1$, soit $0 < v_{k+2} < v_{k+1} \leqslant 1$.
  L'hérédité est alors vérifiée.

  Ainsi, pour tout entier naturel n, $0 < v_{n+1} < v_n \leqslant 1$.
- D'après ce qui vient d'être démontré, (v_n) est décroissante et minorée (par 0). Donc elle converge. Sa limite est donc le nombre ℓ tel que $\ell = f(\ell)$. Or, $v_n = u_{2n}$ donc la limite de (v_n) est celle de (u_n). D'après les valeurs données par les algorithmes précédents, on en déduit que $\ell \approx 0{,}739\,085$.

Corrigé de l'exercice 5.15 page 223

1 En testant le programme, nous avons successivement :

```
>>> sin(0.5236,5)
0.500003192986266

>>> sin(0.7854,5)
0.707144345044458

>>> sin(0.7854,100)
0.7071080798594735
```

2 Avec la calculatrice, on trouve que $\dfrac{\pi}{6} \approx 0,5236$, $\dfrac{\pi}{4} \approx 0,7854$. De plus, $\sin\dfrac{\pi}{6} = 0,5$ et $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071067811865476$.

On constate alors que l'on retrouve à peu près les mêmes valeurs que celles obtenues à la question 1.

On peut alors supposer que la fonction `sin(x,n)` renvoie la valeur de $\sin(x)$, l'argument « n » pouvant éventuellement servir pour affiner la précision de la valeur renvoyée.

3 On a :

```
>>> sin(2.0944,100)
0.8660229549706501
```

Or, $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660254037844386$. Cela nous conforte dans l'idée que nous avons émise précédemment : la fonction renvoie le sinus de la valeur x.

4 On a :

```
>>> sin(40,100)
-62.42184391235605
```

Un sinus étant toujours compris entre -1 et 1, ce dernier résultat ne doit pas nous inspirer quelque chose de positif... La fonction semble avoir ses limites.

Par curiosité, j'ai souhaité savoir à partir de quelle valeur entière de x la différence entre $\sin(x)$ et le résultat renvoyé par la fonction était supérieur à 1. J'ai dû pour cela renommer ma fonction en « `f(x,n)` » car j'ai importé la fonction sin du module `math` :

Code Python 5-26

```python
from math import sin

def factorielle(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorielle(n-1)

def f(x,n):
    s = 0
    for k in range((n+1)//2):
        s += (-1)**k * x**(2*k+1) / factorielle(2*k+1)
    return s

x = 0
while abs( f(x,100) - sin(x) ) < 1:
    x += 1

print("Pour x = {}, la fonction renvoie {}; or, sin({})={}.\nLa différence est :
    {}".format(x, f(x,100), x, sin(x), abs(sin(x)-f(x,100))))
```

Il affiche $x = 39$, avec une différence de 5,26 entre $\sin(39)$ et $f(39, 100)$. En modifiant légèrement ce dernier programme, on constate que pour $x < 30$, la différence est inférieure à 2×10^{-5} ; ceci nous pousse à constater que la fonction `f(x,100)` donne une très bonne approximation de $\sin(x)$ pour des valeurs inférieures à 30.

Corrigé de l'exercice 5.16 page 223

1 $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^0 \sin(x)\ \mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x$

$= \big[-\cos(x)\big]_0^{\pi}$

$= -\cos(\pi) - \big(-\cos(0)\big)$

$= -(-1) - (-1)$

$\boxed{I_0 = 2}$

2 **a.** Sur $[0\,;\pi]$, pour tout entier naturel n,

- $\mathrm{e}^{-nx} > 0$
- $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

donc $\mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \geqslant 0$.

Ainsi, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$.

b. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \Big(\mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\Big)\ \mathrm{d}x \ \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\big(\mathrm{e}^{-x} - 1\big)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Or, sur $[0\,;\pi]$,

- $\mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \geqslant 0$;
- $0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ donc $-1 < \mathrm{e}^{-x} - 1 \leqslant 0$.

Ainsi, $\mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\big(\mathrm{e}^{-x} - 1\big) \leqslant 0$ et donc,

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\big(\mathrm{e}^{-x} - 1\big)\ \mathrm{d}x \leqslant 0$$

soit :

$$\boxed{I_{n+1} - I_n \leqslant 0}$$

c. D'après les deux questions précédentes, (I_n) est minorée (par 0) et décroissante (car $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, soit $I_{n+1} \leqslant I_n$).

Ainsi, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (I_n) converge.

3 **a.** Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant \pi &\implies 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \\ &\implies 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \leqslant 1 \times \mathrm{e}^{-nx} \\ &\implies 0 \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\ \mathrm{d}x \\ &\implies \boxed{I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\ \mathrm{d}x} \end{aligned}$$

b. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\ \mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi}\\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} - \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-0}\right)\\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\ \mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}}$$

c. Des questions a. et b., on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

Or, pour tout réel $x \in [0\,;\pi]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-nx}\right) = 0$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\mathrm{e}^{-nx}\right) = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Et d'après le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (I_n) = 0}$$

4 **a.** Intégrons par parties de deux manières différentes I_n.

- **Première manière.**

  On pose :

  $$\begin{array}{lcl} u'(x) = \mathrm{e}^{-nx} & ; & u(x) = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = \sin(x) & ; & v'(x) = \cos(x) \end{array}$$

  Dans ce cas,

  $$\begin{aligned} I_n &= \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\ \mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi}\sin(\pi) + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-0}\sin(0) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

  $$\boxed{I_n = \frac{1}{n}J_n}$$

- **Deuxième méthode.**

  On pose :

  $$\begin{array}{lcl} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} & ; & u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) & ; & v(x) = -\cos(x) \end{array}$$

  Dans ce cas,

  $$\begin{aligned} I_n &= \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \left[-\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\ \mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{e}^{-n\pi}\cos(\pi) + \mathrm{e}^{-0}\cos(0) - n\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

  $$\boxed{I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n}$$

b. Des deux égalités précédentes, on déduit la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}J_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n &\iff \frac{1}{n}J_n + nJ_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi}\\ &\iff \left(\frac{1}{n}+n\right)J_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi}\\ &\iff \frac{n^2+1}{n}J_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi}\\ &\iff J_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi}\times\frac{n}{n^2+1}\\ &\iff J_n = \frac{n\left(1+\mathrm{e}^{-n\pi}\right)}{n^2+1}.\end{aligned}$$

Et donc :

$$I_n = \frac{1}{n}J_n = \frac{1}{\cancel{n}}\times\frac{\cancel{n}\left(1+\mathrm{e}^{-n\pi}\right)}{n^2+1} = \boxed{\frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}}$$

5 On souhaite calculer les termes de la suite (I_n) *tant que* $I_n \geqslant 0,1$ et s'arrêter dès que $I_n < 0,1$. On doit donc utiliser une boucle conditionnelle :

Code Python 5-27

```python
from math import *

def seuil() :
    n = 0
    I = 2
    while I >= 0.1:
        n = n + 1
        I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)

    return n
```

Corrigé de l'exercice 5.17 page 224

1 Soit $f(x) = k$ une fonction constante, définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E_0).
Alors,

$$f' = f$$

soit :

$$0 = k.$$

Ainsi, $f(x) = 0$.

L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est donc la fonction nulle.

2 D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions :

$$f(x) = C\mathrm{e}^{x}, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

3 Pour tout réel x, on a :

$$h'(x) = -2\sin(x)+\cos(x).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}h(x)-\cos(x)-3\sin(x) &= 2\cos(x)+\sin(x)-\cos(x)-3\sin(x)\\ &= \cos(x)-2\sin(x)\\ &= h'(x).\end{aligned}$$

Donc h est solution de l'équation différentielle (E).

4 Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
(f-h) \text{ est solution de } (E_0) &\iff (f-h)'(x) = (f-h)(x) \\
&\iff f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x) \\
&\iff f'(x) - \left[h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\right] = f(x) - h(x) \\
&\iff f'(x) \cancel{-h(x)} + \cos(x) + 3\sin(x) = f(x) \cancel{-h(x)} \\
& \text{ car } h \text{ est solution de } (E) \\
&\iff f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) \\
&\iff f \text{ est solution de } (E).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien l'équivalence :

$$f \text{ est solution de } (E) \iff f-h \text{ est solution de } (E_0).$$

5 D'après la question précédente, chercher les solutions f de (E) revient à chercher les solutions $(f-h)$ de (E_0). Or, d'après la question **3** :

$$(f-h)(x) = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On en déduit alors que :

$$f(x) = h(x) + Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}$$

Toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions :

$$\boxed{f(x) = 2\cos(x) + \sin(x) + Ce^x, \qquad C \in \mathbb{R}}$$

6 g est solution de l'équation différentielle (E) donc il existe un réel C tel que :

$$g(x) = Ce^x + 2\cos(x) + \sin(x).$$

De plus, $g(0) = 0$ donc $g(0) = Ce^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$.
D'où :

$$C \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0 \iff C = -2.$$

On a donc :

$$\boxed{g(x) = -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x)}$$

7 Calculons :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x \\
&= \left[-2e^x - \cos(x) + 2\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -2e^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-2e^0 - \cos(0) + 2\sin(0)\right) \\
&= -2e^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 - (-2 - 1 + 2 \times 0) \\
&= -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 5}$$

6

Équations différentielles

Dans ce chapitre

1 Introduction

1 Définition

Définition 19

On appelle *équation différentielle* toute équation où l'inconnue est une fonction et où l'inconnue est dérivée au moins une fois.

Remarque 37

L'inconnue est souvent notée y, mais ce n'est pas une généralité.

Exemple 42

- $y' = y + 2$ est une équation différentielle d'*ordre 1* (car la fonction est dérivée une fois).
  Résoudre cette équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions y dont la dérivée est égale à $y + 3$.
- $y'' + y' + y = x$ est une équation différentielle d'*ordre 2* (car la dérivée seconde intervient).

Remarque 38

Les équations différentielles dont l'ordre est strictement supérieur à 1 ne sont pas au programme de l'enseignement de spécialité de Terminale.

2 Domaines d'application

a Autres notations

Plutôt que d'écrire par exemple :

$$y' = y + 2$$

les physiciens aiment à écrire :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + 2.$$

Dans ce cas, y désigne une fonction dont la variable est t (très souvent, le *temps*).
« $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ » désigne alors la dérivée de $y(t)$ par rapport à la variable t.
On peut aussi voir la notation :

$$\dot{y}(t) = y(t) + 2.$$

Le point au-dessus de la fonction y signifie que l'on a dérivé une fois la fonction ; on mettra donc deux points pour la dérivée seconde) :

$$\ddot{y}\,(t) = \dot{y}(t) \iff \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \iff y'' = y'.$$

b Circuit RC en série (Sciences Physiques)

Lors de la charge d'un condensateur dans un circuit RC en série soumis à une tension constante E, l'équation différentielle régissant la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}.$$

À l'aide de ce cours, vous saurez trouver l'expression de $u_C(t)$.

c Oscillation simple non amortie (Sciences Physiques)

Les mouvements périodiques dont on néglige les effets de frottement qui vont le ralentir (comme l'allongement du ressort $x(t)$ à un temps t) peuvent être modélisés par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x(t)$$

C'est une équation différentielle du second ordre. On ne saura donc pas la résoudre en Terminale... mais les solutions sont les fonctions $x(t)$ telles que :

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad , \quad A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}.$$

d Équation de Malthus (SES)

La croissance d'une population, ou celle d'un capital à taux constant, peut être modélisée (selon le *modèle de Malthus*) par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP$$

où P est la population (ou le capital), t le temps, et k une constante positive.

2 Équations différentielles du type y' = ay

Définition 20

Soit a un nombre réel. Résoudre l'équation $y' = ay$ d'inconnue y signifie trouver toutes les fonctions y dont la dérivée est égale à ay.

Remarque 39

Une *différentielle* est, dans le vocabulaire scientifique, une dérivée. C'est la raison pour laquelle une équation où l'inconnue est une fonction qui est dérivée au moins une fois est qualifiée d'*équation différentielle*.

Exemple 43

1. $y' + y = 0$ est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -1$ car :

$$y' + y = 0 \iff y' = -y.$$

2. $y' = \frac{1}{2}y$ est aussi une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{2}$.

Propriété 37

L'équation :

$$y' = ay$$

admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque 40

Il existe donc une infinité de solutions, définies à une constante C près.

Exemple 44

L'équation différentielle $y' = -y$ admet pour solutions :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On peut facilement vérifier en calculant sa dérivée :

$$y'(x) = -C\mathrm{e}^{-x} = -y(x).$$

3 Équations différentielles du type y'=ay+b

Propriété 38

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$. L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions y telles que :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 45

L'équation différentielle $y' = 3y + 7$ admet pour solutions :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{3x} - \frac{7}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier en calculant sa dérivée :

$$y'(x) = 3C\mathrm{e}^{3x}$$

puis en calculant :

$$y'(x) - 3y(x) = 3C\mathrm{e}^{3x} - 3\left(C\mathrm{e}^{3x} - \frac{7}{3}\right)$$

$$y'(x) - 3y(x) = 3C\mathrm{e}^{3x} - 3C\mathrm{e}^{3x} + 3 \times \frac{7}{3}$$

$$y'(x) - 3y(x) = 7.$$

On a bien : $y' - 3y = 7$, soit $y' = 3y + 7$.

4 Équations différentielles du type y' = ay + f

Définition 21 (équation homogène associée)

Soit f une fonction. On appelle *équation homogène associée* à l'équation $y' = ay + f$ l'équation différentielle $y' = ay$.

Remarque 41

Si on note (E) l'équation $y' = ay + f$, on note (E_0) son équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation $y' = ay + f$, on utilise la méthode suivante :

Methode 7

- **On résout d'abord (E_0).**
  On trouve les solutions de l'équation homogène associée à (E) :
  $$y_0(x) = C\mathrm{e}^{ax}.$$
- **On trouve une solution particulière de (E).**
  On la note par exemple u ; dans ce cas, on a :
  $$u'(x) - au(x) = f(x).$$
- **On ajoute les solutions.**
  Les solutions de (E) sont alors :
  $$y(x) = y_0(x) + u(x).$$

Remarque 42

En Terminale, une solution particulière vous sera proposée la plupart du temps.

Exemple 46

On considère l'équation différentielle :
$$y' = -2y + x^2. \tag{E}$$

- **On résout l'équation homogène associée à (E).**
  $$y' = -2y \tag{E_0}$$
  admet pour solutions :
  $$y_0(x) = C\mathrm{e}^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
- **Solution particulière de (E).**
  On pose $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. On souhaite montrer que y_1 est une solution particulière de (E). On calcule pour cela sa dérivée :
  $$y_1'(x) = x - \frac{1}{2}.$$
  Ensuite, on calcule :
  $$\begin{aligned} -2y_1(x) + x^2 &= -2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + x^2 \\ &= -x^2 + x - \frac{1}{2} + x^2 \\ &= x - \frac{1}{2} \\ &= y_1'(x). \end{aligned}$$
  y_1 est donc bien solution de (E).
- **On conclut en ajoutant les deux résultats.**
  Les solutions de (E) sont donc :
  $$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

6 Exercices types

Exercice type 24 ▶ équation différentielle du type y' = ay

1 Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y

$$y' + 3y = 0.$$

2 Trouver la solution f dont l'image de 0 est égale à 3.

1 $y' + 3y = 0 \iff y' = -3y$

$$\iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-3x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}} \text{ (d'après le cours).}$$

2 On cherche la fonction $f(x) = C\mathrm{e}^{-3x}$ telle que $f(0) = 3$.

$$\begin{aligned} f(0) = 3 &\iff C\mathrm{e}^{-3\times 0} = 3 \\ &\iff C \times 1 = 3 \\ &\iff C = 3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = 3\mathrm{e}^{-3x}}$$

Exercice type 25 ▶ équation différentielle du type y' = ay + b

1 Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$y' - 5y = 1.$$

2 Trouver la solution f qui s'annule en 0.

1 $y' - 5y = 1 \iff y' = 5y + 1$

$$\iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{5} \quad , \quad C \in \mathbb{R}} \text{ (d'après le cours)}$$

2 On cherche la solution f telle que $f(0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff C\mathrm{e}^{5\times 0} - \frac{1}{5} = 0 \\ &\iff C \times 1 = \frac{1}{5} \\ &\iff C = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{5}}$$

Exercice type 26 ▶ équation différentielle du type y' = ay + f

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$y' = -2y + x \qquad \text{(E)}$$

1 Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E) :

$$y' = -2y \qquad (E_0)$$

2 Montrer que $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E).

3 En déduire les solutions de (E).

4 Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en 0.

1 D'après le cours, l'équation (E_0) : $y' = -2y$ admet pour solutions les fonctions :

$$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

2 Afin de vérifier que $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution de (E), on doit vérifier que $u'(x) = -2u(x) + x$.

$$u'(x) = \frac{1}{2}$$

et

$$\begin{aligned} -2u(x) + x &= -2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + x \\ &= -x + \frac{1}{2} + x \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u'(x) = -2u(x) + x.$$

Donc u est bien une solution de (E).

3 D'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + u(x) \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

soit :

$$\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

4 La solution f qui s'annule en 0 est telle que :

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff C\mathrm{e}^{0} + \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4} = 0 \\ &\iff C = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$$

6 Exercices

Équations différentielles du type y' = ay

Exercice 6.1

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = 5y$
2. $y' = -7y$
3. $y' = 12y$

Solution page 250

Exercice 6.2

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 4y = 0$
2. $y' - 2y = 0$
3. $y' + \frac{1}{3}y = 0$

Solution page 250

Exercice 6.3

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$y' + \alpha y = 0 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{E}$$

1. Résoudre (E).
2. Trouver la solution f de (E) telle que $f(1) = 1$.

Solution page 250

Équations différentielles du type y' = ay + b

Exercice 6.4

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = y + 1$
2. $2y' = 4y + 1$
3. $y' = -y + 2$

Solution page 250

Exercice 6.5

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 3y = -5$
2. $3y' + 2y = 1$
3. $y = y' + 3$

Solution page 251

Exercice 6.6

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$5y' + 2y = 7. \tag{E}$$

1 Résoudre (E).

2 Trouver la solution f de E telle que $f(-1) = 3$.

Solution page 251

Équations différentielles du type y' = ay + f

Exercice 6.7

On pose :

$$y' = 2y - x^3. \tag{E}$$

1 Montrer que $y_1(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{8}$ est une solution particulière de (E).

2 En déduire toutes les solutions de (E).

Solution page 251

Exercice 6.8

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + 5y = 12\cos(x) \tag{E}$$

1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y' + 5y = 0$.

2 **a.** On pose $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.
Trouver la valeur de a et b pour que f soit solution de (E).
b. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution page 252

Exercice 6.9

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = 7\sin(x) \tag{E}$$

1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y' - 2y = 0$.

2 **a.** On pose $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.
Trouver la valeur de a et b pour que f soit solution de (E).
b. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution page 252

Exercice 6.10 (prendre des initiatives)

Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 5y = x \tag{E}$$

Solution page 253

Exercice 6.11

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = x^2 \qquad \text{(E)}$$

1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) suivante :

$$y' - 2y = 0 \qquad (E_0)$$

2 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une solution particulière de (E).
Trouver a, b et c.

3 Résoudre (E).

Solution page 253

Exercice 6.12

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = x\mathrm{e}^x \qquad \text{(E)}$$

1 Résoudre l'équation homogène associée à (E) suivante :

$$y' - 2y = 0 \qquad (E_0)$$

2 Soient a et b deux réels, et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x.$$

a. Déterminer a et b pour que u soit solution de (E).
b. Montrer que v est solution de (E_0) si et seulement si $u + v$ est solution de (E).
c. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3 Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Solution page 254

Exercice 6.13 (changement de variable)

On considère l'équation différentielle :

$$u' = 3u - 0,005u^2 \qquad \text{(E)}$$

On considère les solutions u de (E) ne s'annulant pas. On pose alors $y = \dfrac{1}{u}$.

1 Montrer l'équivalence suivante :

$$u \text{ solution de } (E) \iff y' = -3y + 0,005.$$

2 En déduire les solutions de (E).

Solution page 255

Objectif bac

Exercice 6.14 (Extrait du sujet d'Amérique du nord 2025, sujet 1)

On considère (E) l'équation différentielle :

$$y + y' = (2x+3)\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1 Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par :

$$f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2 Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$y + y' = 0.$$

3 Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

Solution page 255

Exercice 6.15 (divers extraits de bac de 2024)

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

1 **Affirmation 1.** Soit (E) l'équation différentielle :

$$y' - 2y = -6x + 1.$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2 **Affirmation 2.** On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
La fonction f est une solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$xy' - y = x.$$

3 **Affirmation 3.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}.$$

La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}.$$

4 **Affirmation 4.** On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = -0,08y + \frac{q}{50} \qquad , \qquad \text{où } q \text{ est un réel positif.}$$

Alors, $f(x) = C\mathrm{e}^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solution page 256

Exercice 6.16 (Centres étrangers 2025, sujet 1)

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1): \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1 On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).

2 Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.

3 En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.
À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.
On a donc $p(0) = 30$.
On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p).$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1 Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle $(E_1): \quad y' + 0,48y = \dfrac{1}{250}$.

2 On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).
Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3 En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.

4 Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

5 Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.
On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Solution page 257

6 Corrigés

Corrigé de l'exercice 6.1 page 245

On utilise la formule du cours pour résoudre toutes ces équations.

1 $y' = 5y \iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{5x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

2 $y' = -7y \iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-7x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

3 $y' = 12y \iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{12x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

Corrigé de l'exercice 6.2 page 245

1 $y' + 4y = 0 \iff y' = -4y \iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-4x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

2 $y' - 2y = 0 \iff y' = 2y \iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{2x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

3 $y' + \frac{1}{3}y = 0 \iff y' = -\frac{1}{3}y \iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

Corrigé de l'exercice 6.3 page 245

1 D'après le cours,

$$\begin{aligned} y' + \alpha y = 0 &\iff y' = -\alpha y \\ &\iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-\alpha x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

2 On cherche la solution f telle que :

$$\begin{aligned} f(1) = 1 &\iff C\mathrm{e}^{-\alpha \times 1} = 1 \\ &\iff C = \mathrm{e}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha} \times \mathrm{e}^{-\alpha x}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{\alpha(1-x)}}$$

Corrigé de l'exercice 6.4 page 245

D'après le cours, on a :

1 $y' = y + 1 \iff y(x) = C\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{1} = \boxed{C\mathrm{e}^{x} - 1 \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

2 $2y' = 4y + 1 \iff y' = 2y + \frac{1}{2} \iff y(x) = C\mathrm{e}^{2x} - \frac{\frac{1}{2}}{2} = \boxed{C\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

3 $y' = -y + 2 \iff y(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \frac{2}{-1} = \boxed{C\mathrm{e}^{-x} + 2 \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$.

Corrigé de l'exercice 6.5 page 245

1 $y'+3y=-5 \iff y'=-3y-5 \iff y(x)=C\mathrm{e}^{-3x}-\dfrac{-5}{-3}=\boxed{C\mathrm{e}^{-3x}-\dfrac{5}{3}\quad,\quad C\in\mathbb{R}}$.

2 $3y'+2y=1 \iff y'=-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3} \iff y(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}-\dfrac{1/3}{-2/3}=\boxed{C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}+\dfrac{1}{2}\quad,\quad C\in\mathbb{R}}$.

3 $y=y'+3 \iff y'=y-3 \iff y(x)=C\mathrm{e}^{x}-\dfrac{-3}{1}=\boxed{C\mathrm{e}^{x}+3\quad,\quad C\in\mathbb{R}}$.

Corrigé de l'exercice 6.6 page 246

1 D'après le cours,

$$\begin{aligned}5y'+2y=7 &\iff y'=-\frac{2}{5}y+\frac{7}{5}\\ &\iff y(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x}-\frac{\frac{7}{5}}{-\frac{2}{5}}\quad,\quad C\in\mathbb{R}\\ &\iff \boxed{y(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x}+\frac{7}{2}\quad,\quad C\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

2 On cherche la solution f de (E) telle que :

$$\begin{aligned}f(-1)=3 &\iff C\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\times(-1)}+\frac{7}{2}=3\\ &\iff C\mathrm{e}^{\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}=3\\ &\iff C\mathrm{e}^{\frac{2}{5}}=3-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}\\ &\iff C=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}}\times\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}x}+\frac{7}{2}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\boxed{f(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}(x+1)}+\frac{7}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 6.7 page 246

1 $y_1(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{8}$ donc : $y_1'(x)=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}y_1'(x)-2y_1(x)&=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}-2\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}\right)\\ &=-x^3.\end{aligned}$$

Ainsi, $y_1'(x)=2y_1(x)-x^3$. La fonction y_1 est donc une solution de (E).

2 De la solution particulière $y_1(x)$, on déduit que l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x)=y_1(x)+y_0(x)$$

où $y_0(x)$ sont les solutions de l'équation homogène associée à (E), donc de la forme :

$$y_0(x)=C\mathrm{e}^{2x},\qquad C\in\mathbb{R}.$$

Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} + C\mathrm{e}^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}}$$

Corrigé de l'exercice 6.8 page 246

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions :

$$\boxed{y_0(x) = C\mathrm{e}^{-5x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

2 **a.** $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \Rightarrow f'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de (E)} &\iff f'(x) + 5f(x) = 12\cos(x)\\
&\iff -a\sin(x) + b\cos(x) + 5(a\cos(x) + b\sin(x)) = 12\cos(x)\\
&\iff (5a + b - 12)\cos(x) + (-a + 5b)\sin(x) = 0\\
&\iff \begin{cases} 5a + b = 12 \\ a = 5b \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 26b = 12 \\ a = 5b \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} b = \frac{6}{13} \\ a = \frac{30}{13} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \frac{30}{13}\cos(x) + \frac{6}{13}\sin(x) \text{ est une solution particulière de (E).}}$$

b. On déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions :

$$\boxed{y(x) = \frac{30}{13}\cos(x) + \frac{6}{13}\sin(x) + C\mathrm{e}^{-5x}, \ C \in \mathbb{R}}$$

Corrigé de l'exercice 6.9 page 246

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions :

$$\boxed{y_0(x) = C\mathrm{e}^{2x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

2 **a.** $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \Rightarrow f'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de (E)} &\iff f'(x) - 2f(x) = 7\sin(x)\\
&\iff -a\sin(x) + b\cos(x) - 2(a\cos(x) + b\sin(x)) = 7\sin(x)\\
&\iff (-2a + b)\cos(x) + (-a - 2b - 7)\sin(x) = 0\\
&\iff \begin{cases} -2a + b = 0 \\ -a - 2b = 7 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} b = 2a \\ -a - 2(2a) = 7 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} b = 2a \\ a = -\dfrac{7}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f \text{ solution de (E)} \iff \begin{cases} b = -\dfrac{14}{5} \\ a = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = -\frac{7}{5}\cos(x) - \frac{14}{5}\sin(x) \text{ est une solution particulière de (E).}}$$

b. On déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions :

$$\boxed{y(x) = -\frac{14}{5}\cos(x) - \frac{7}{5}\sin(x) + Ce^{2x},\ C \in \mathbb{R}}$$

Corrigé de l'exercice 6.10 page 246

- L'équation homogène associée (E_0) : $y' - 5y = 0$ admet pour solutions :

$$y_0(x) = Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- On cherche une solution particulière de (E) de la forme $u(x) = ax + b$ (car le second membre de (E) est une fonction affine). Ainsi,

$$\begin{aligned} u'(x) - 5u(x) = x &\iff a - 5(ax+b) = x \\ &\iff (-5a-1)x + (a-5b) = 0 \iff \begin{cases} -5a - 1 & = 0 \\ a - 5b = 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{25} \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, $u(x) = -\dfrac{1}{5}x - \dfrac{1}{25}$ est une solution particulière de (E).

- On en déduit alors que les solutions de (E) sont :

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Corrigé de l'exercice 6.11 page 247

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions les fonctions :

$$\boxed{y_0(x) = Ce^{2x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

2

$$\begin{aligned} & f(x) = ax^2 + bx + c \text{ est une solution particulière de (E)} \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = x^2 \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = x^2 \\ \iff & \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \iff a = -\frac{1}{2}, \quad b = a = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}b = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}}$ est une solution particulière de (E)

3 D'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\boxed{y(x) = f(x) + y_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Corrigé de l'exercice 6.12 page 247

1 D'après le cours, (E_0) a pour solutions les fonctions :

$$\boxed{y_0(x) = C\mathrm{e}^{2x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

2 **a.** $u'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = (ax+a+b)\mathrm{e}^x$.

$$\begin{aligned}
u \text{ solution de (E)} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ u' - 2u = x\mathrm{e}^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (ax+a+b)\mathrm{e}^x - 2(ax+b)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (ax-2ax+a+b-2b)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-ax+a-b)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \\
&\iff \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \\
&\iff a = -1 \text{ et } b = a = -1.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{u(x) = (-x-1)\mathrm{e}^x}$$

b.
$$\begin{aligned}
(u+v) \text{ solution de } (E) &\iff (u+v)' - 2(u+v) = x\mathrm{e}^x \\
&\iff \underbrace{(u'-2u)}_{=x\mathrm{e}^x} + (v'-2v) = x\mathrm{e}^x \\
&\iff v' - 2v = 0 \\
&\iff v \text{ solution de } (E_0).
\end{aligned}$$

c. D'après la question précédente, y est solution de (E) si et seulement si :

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

$$\boxed{y(x) = (-x-1)\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{2x}}$$

3 On souhaite que
$$\begin{aligned}
y(0) = 0 &\iff (-0-1)\mathrm{e}^0 + C\mathrm{e}^{2\times 0} = 0 \\
&\iff -1 + C = 0 \\
&\iff C = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la solution de (E) qui s'annule en 0 est la fonction :

$$\boxed{f(x) = (-x-1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}$$

Corrigé de l'exercice 6.13 page 247

1 Si $y = \dfrac{1}{u}$ alors $y' = -\dfrac{u'}{u^2}$ et alors $u' = -y'u^2$. Donc :

$$\begin{aligned}
u \text{ solution de (E)} &\iff u' = 3u - 0,005u^2 \\
&\iff -y'u^2 = 3 \times \frac{1}{y} - 0,005 \times \frac{1}{y^2} \\
&\iff -y' \times \frac{1}{y^2} = 3 \times \frac{1}{y} - 0,005 \times \frac{1}{y^2} \\
&\iff -y' = 3y - 0,005 \quad \text{(en multipliant par } y^2\text{)} \\
&\iff y' = -3y + 0,005.
\end{aligned}$$

2 L'équation différentielle $y' = -3y + 0,005$ est de la forme $y' = ay + b$, dont les solutions sont $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{0,005}{3} = \dfrac{1}{600}$; ainsi, ses solutions sont :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{600} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

On en déduit alors que l'équation différentielle (E) admet pour solutions les fonctions :

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{y(x)} = \frac{600}{600C\mathrm{e}^{-3x} + 1}}$$

Corrigé de l'exercice 6.14 page 248

1 Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
f_0'(x) &= (2x+3) \times \mathrm{e}^{-x} + \left(x^2 + 3x\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= \left(2x + 3 - x^2 - 3x\right) \mathrm{e}^{-x} \\
&= \left(-x^2 - x + 3\right) \mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Pour tout réel x, on a donc :

$$\begin{aligned}
f_0(x) + f_0'(x) &= \left(x^2 + 3x\right) \mathrm{e}^{-x} + \left(-x^2 - x + 3\right) \mathrm{e}^{-x} \\
&= \left(x^2 + 3x - x^2 - x + 3\right) \mathrm{e}^{-x} \\
&= (2x + 3)\, \mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

La fonction f_0 est donc une solution de l'équation différentielle (E).

2 $(E_0) : y + y' = 0 \iff y' = -y$.
D'après le cours, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

3 (E) est une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$, où f_0 est une solution particulière.
Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x} + f_0(x) \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$x \longmapsto \left(x^2 + 3x + C\right) \mathrm{e}^{-x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 6.15 page 248

1 $f(x) = e^{2x} - 6x + 1$ donc $f'(x) = 2e^{2x} - 6$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) - 2f(x) &= 2e^{2x} - 6 - 2\left(e^{2x} - 6x + 1\right) \\ &= 2e^{2x} - 6 - 2e^{2x} + 12x - 2 \\ &= 12x - 8 \\ &\neq -6x + 1. \end{aligned}$$

Donc f n'est pas solution de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x + 1$.

L'affirmation 1 est donc fausse.

2 $f(x) = x\ln(x) = u \times v$ avec $u = x$ et $v = \ln(x)$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors,

$$f'(x) = u'v + uv' = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= x \times \big(1 + \ln(x)\big) - x\ln(x) \\ &= x + x\ln(x) - x\ln(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

f est donc une solution de l'équation différentielle.

L'affirmation 2 est donc vraie.

3 $f(x) = 5xe^{-x}$ donc :

$$f'(x) = 5e^{-x} + 5x \times \left(-e^{-x}\right) = (5 - 5x)e^{-x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= (5 - 5x)e^{-x} + 5xe^{-x} \\ &= (5 - 5x + 5x)e^{-x} \\ &= 5e^{-x}. \end{aligned}$$

f est donc une solution de (E).

L'affirmation 3 est donc vraie.

4 L'équation (E) est de la forme $y' = ay + b$, où $a = -0,08$ et $b = \dfrac{q}{50}$. Ainsi, d'après le cours, les solutions de (E) sont de la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= Ce^{ax} - \frac{b}{a} \\ &= Ce^{-0,08x} - \frac{\frac{q}{50}}{-0,08} \\ &= Ce^{-0,08x} + \frac{q}{50 \times 0,08} \\ &= Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}. \end{aligned}$$

L'affirmation 4 est donc vraie.

Corrigé de l'exercice 6.16 page 249

Partie A

1 $h(t) = \dfrac{1}{120}$ donc $h'(t) = 0$. On a donc :

$$h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{250}.$$

La fonction h est donc une solution de l'équation différentielle (E_1).

2 Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$ sont, d'après le cours, les fonctions de la forme :

$$f_0(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

3 Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont, toujours d'après le cours, les fonctions de la forme :

$$f(t) = f_0(t) + h(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

Partie B

1
$$\begin{aligned}
p \text{ solution de } (E_2) &\Longrightarrow p' = \frac{1}{250}p(120 - p) \\
&\Longrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y}\left(120 - \frac{1}{y}\right) \\
&\Longrightarrow -\frac{y'}{y^2} \times y^2 = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y}\left(120 - \frac{1}{y}\right) \times y^2 \\
&\Longrightarrow -y' = \frac{1}{250}y\left(120 - \frac{1}{y}\right) \\
&\Longrightarrow -y' = \frac{1}{250}(120y - 1) \\
&\Longrightarrow y' = -\frac{120}{250}y + \frac{1}{250} \\
&\Longrightarrow y' = -0,48y + \frac{1}{250} \\
&\Longrightarrow y' + 0,48y = \frac{1}{250} \\
&\Longrightarrow y \text{ solution de } (E_1).
\end{aligned}$$

2 Avec la réciproque admise dans cette question, on a :

$$\begin{aligned}
p \text{ solution de } (E_2) &\Longleftrightarrow y \text{ solution de } (E_1) \\
&\Longleftrightarrow y(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120} \text{ d'après la partie A} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{p(t)} = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120} \\
&\Longleftrightarrow p(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \\
&\Longleftrightarrow p(t) = \frac{1}{\frac{120C\mathrm{e}^{-0,48t}+1}{120}} \\
&\Longleftrightarrow p(t) = \frac{120}{120C\mathrm{e}^{-0,48t} + 1} \\
&\Longleftrightarrow p(t) = \frac{120}{K\mathrm{e}^{-0,48t} + 1} \quad , \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3 $p(0)=30 \iff \dfrac{120}{K\mathrm{e}^{-0,48\times 0}+1}=30$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{120}{1+K}=30\\
&\iff \frac{1+K}{120}=\frac{1}{30}\\
&\iff 1+K=\frac{120}{30}=4\\
&\iff K=4-1=3.
\end{aligned}$$

4 On a : $\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}(-0,48t)=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{X}\right)=0\end{cases}$ donc, par composition,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-0,48t}\right)=0.$$

Donc, par produit et somme,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+3\mathrm{e}^{-0,48t}\right)=1.$$

Finalement, par quotient,

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\left[p(t)\right]=120}$$

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que la population de bactéries se rapprochera à longs termes vers 120 000.

5 $p(t)=60 \iff \dfrac{120}{3\mathrm{e}^{-0,48t}+1}=60$

$$\begin{aligned}
&\iff 120=60\times\left(3\mathrm{e}^{-0,48t}+1\right)\\
&\iff 2=3\mathrm{e}^{-0,48t}+1\\
&\iff \frac{1}{3}=\mathrm{e}^{-0,48t}\\
&\iff -0,48t=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln(3)\\
&\iff t=\frac{\ln(3)}{0,48}\approx 2,289
\end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus est de $2,289$ heures soit 2 heures et 17 minutes.

7 Primitives et intégration

Dans ce chapitre

1 Primitives

1 Introduction

Définition 22

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sur I sont appelées les *primitives* de f.

Une autre définition possible est la suivante :

Définition 23

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Les *primitives* de f sont les fonctions F telle que $F'(x) = f(x)$.

Exemple 47

1. Les primitives de $f(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
   En effet, si on dérive $F(x)$, on obtient : $F'(x) = \mathrm{e}^x = f(x)$.
2. Les primitives de $g(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $G\ :\ \sin(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$ car $G'(x) = g(x)$.

Remarque 43

Il y a une infinité de primitives ; on dit qu'elles sont définies *à une constante près* (que nous avons noté k dans les exemples précédents). Mais dès que l'on impose une condition sur une de leurs valeurs, il n'en existe plus qu'une. Cette condition est parfois appelée *condition initiale*. Par exemple, la primitive G de la fonction g définie par $g(x) = \cos(x)$ telle que $G(\pi) = 0$ est $G(x) = \sin(x)$.

Théorème 10

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

2 Primitives usuelles

Un tableau de dérivées usuelles donne, par lecture inverse, un tableau de primitives à connaître.

La fonction usuelle	Ses primitives
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$ si $-n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$	$x \mapsto \ln(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

3 Primitives et fonctions composées

Il est souvent possible de mettre en évidence la dérivée d'une fonction composée. Le tableau suivant regroupe les cas les plus courants (u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I).

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I.
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u \neq 0$ sur I.
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$x \mapsto f(ax+b) \quad a \neq 0$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)$	F primitive de u sur I.

Dans les exemples suivants, nous prenons $u(x) = x^2 + x + 1$.

Exemple 48

1. Une primitive de $f(x) = (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5$ est :

$$F(x) = \frac{1}{6}\left(x^2+x+1\right)^6.$$

2. Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ se trouve en mettant $f(x)$ sous la forme $f(x) = (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{-2}$.

On trouve alors :

$$F(x) = \frac{1}{-2+1}\left(x^2+x+1\right)^{-2+1} = -\frac{1}{x^2+x+1}.$$

3. Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ est :

$$F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}.$$

4. Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est :

$$F(x) = \ln\left(x^2+x+1\right).$$

5. Une primitive de $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}$ est :

$$F(x) = \mathrm{e}^{x^2+x+1}.$$

6. Une primitive de $f(x) = \sin(4x-5)$ est :

$$F(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x-5).$$

2 Intégration

1 Intégrale et aire

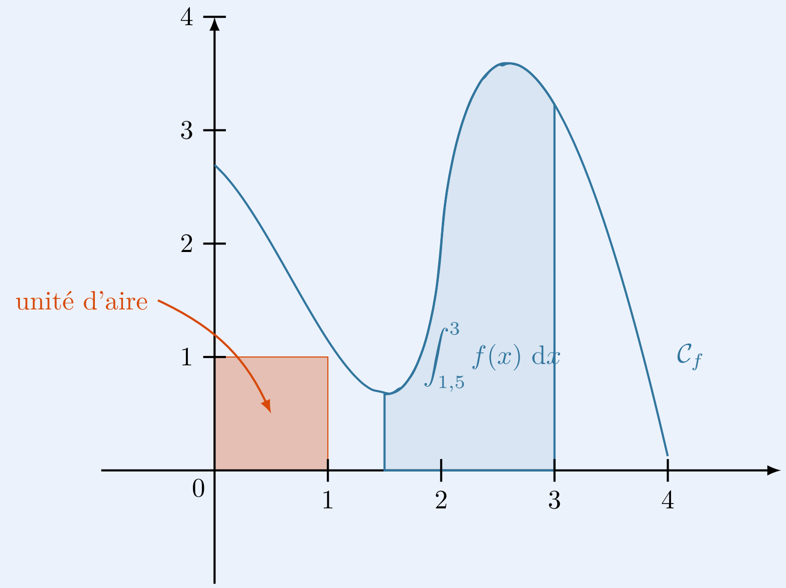
Définition 24 (unité d'aire)

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on appelle *unité d'aire* l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Définition 25 (intégrale)

Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un intervalle $[a\,;b]$, et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'*intégrale* de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$; elle est exprimée en unité d'aire (en abrégé : ua). On la note :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$



2 Propriétés de l'intégrale

Propriété 39 (intégrale d'une fonction négative)

Soit f une fonction à valeurs négatives sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b \left|f(x)\right|\ \mathrm{d}x.$$

Exemple 49

$$\int_0^1 \left(-x^2\right)\ \mathrm{d}x = -\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x.$$

Propriété 40 (relation de Chasles sur les intégrale)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels appartenant à I. Alors :

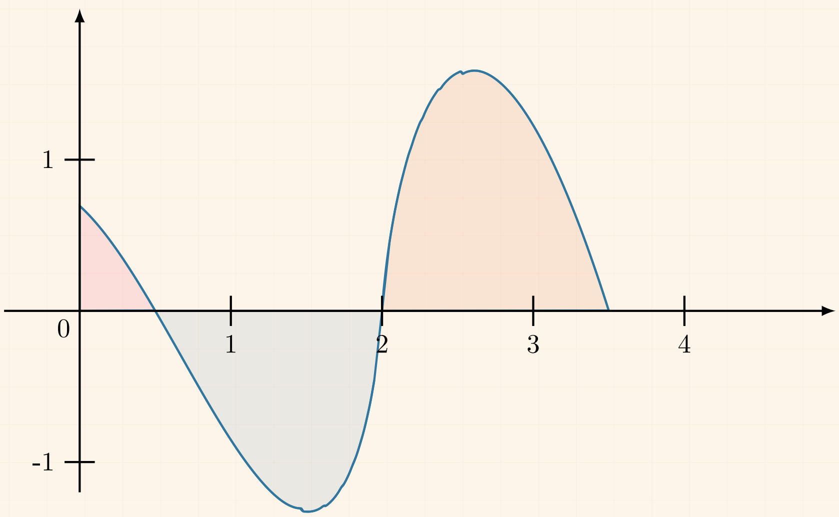
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ Attention 13

Il n'existe aucune condition d'ordre entre les réels a, b et c. La relation de Chasles n'impose pas d'avoir $a < b < c$.

Exemple 50

Quand la fonction f n'est pas de signe constant sur $[a\ ;\ b]$, on utilise la relation de Chasles pour déterminer son intégrale de a à b.



$$\int_0^{3,5} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x}_{>0} + \underbrace{\int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x}_{<0} + \underbrace{\int_2^{3,5} f(x)\,\mathrm{d}x}_{>0}.$$

L'intégrale désigne alors une *aire algébrique*, c'est-à-dire une aire avec un signe (positif ou négatif).

Sur cet exemple, il semble que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ car la somme de l'aire des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses semble supérieure à celle du domaine situé en dessous.

Propriété 41 (parité et périodicité)

- Si f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- Si f est paire, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Si f est périodique de période T, alors pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 51

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire et 2π-périodique donc :

$$\forall\ a \in \mathbb{R}, \quad \int_{-a}^{a} \sin(x)\ \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{a}^{a+2\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x = \int_{0}^{2\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x.$$

Propriété 42 (linéarité de l'intégrale)

Quelles que soient les fonctions f et g continues sur $[a\,;b]$, pour tous réels λ et μ :

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Exemple 52

$$\int_0^1 \left(3x^2 - 5x + 1\right)\ \mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x - 5\int_0^1 x\ \mathrm{d}x + \int_0^1 1\ \mathrm{d}x.$$

Propriété 43 (positivité de l'intégrale)

- Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 0$.

Exemple 53

Sur $[0\ ;\ 1]$, $x^2 \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x \geqslant 0$.

Propriété 44 (intégration des inégalités)

Si pour tout nombre réel x de $[a\,;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$, alors :

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Exemple 54

On sait que pour $x > 0$, $\ln(x) < x$ donc $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\ \mathrm{d}x < \int_1^2 x\ \mathrm{d}x$.

Propriété 45 (inversion des bornes)

$$\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Exemple 55

$$\int_5^3 x^2\ \mathrm{d}x = -\int_3^5 x^2\ \mathrm{d}x.$$

3 Calcul d'une intégrale

a Lien entre intégrale et primitive

Théorème 11

Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ alors la fonction F_a définie sur $[a\,;b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est la primitive de $f(x)$ qui s'annule en a.

Propriété 46

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, et soit F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarque 44

$F(b) - F(a)$ est aussi noté $\left[F(x)\right]_a^b$. On a alors :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b.$$

Exemple 56

On sait qu'une primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ donc :

$$\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}.$$

b Intégration par parties

Théorème 12

Soient u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a\,;b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)\ \mathrm{d}x = \Big[(uv)(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Exemple 57

On souhaite calculer :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \ln(x)\ \mathrm{d}x.$$

En posant $u'(x) = 1 \quad ; \quad u(x) = x$

$v(x) = \ln(x) \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$

le théorème donne :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} 1\times\ln(x)\ \mathrm{d}x &= \big[x\times\ln(x)\big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\times\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x\\ &= [\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - 1\ln 1] - \int_1^{\mathrm{e}} 1\ \mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e} - \big[x\big]_1^{\mathrm{e}}\\ &= \mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)\\ \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\ \mathrm{d}x &= 1.\end{aligned}$$

Remarque 45

L'intégration par parties est un outil très puissant. Si on s'inspire de l'exemple précédent, on peut écrire pour $a > 0$ et $x > 0$:

$$\int_a^x \ln(t)\ \mathrm{d}t = x\ln(x) - x - (a\ln a - a).$$

On peut alors conclure qu'une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$.

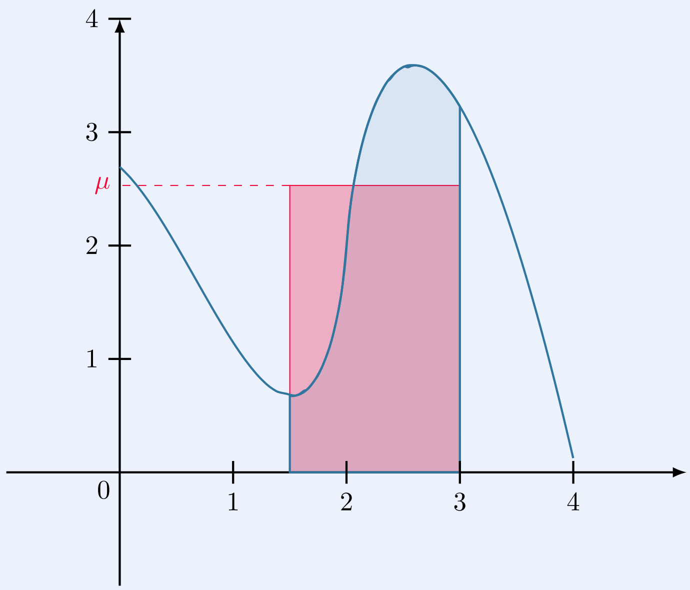
4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 26

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$. On appelle *valeur moyenne de* f le nombre μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Graphiquement, cette valeur correspond à la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que le domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur $[a\ ;\ b]$:



L'aire du rectangle rouge est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Propriété 47

Si f est une fonction T-périodique alors :

$$\mu = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 46

En sciences physiques, la *valeur efficace* est définie comme étant la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la fonction : $e = \sqrt{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$.

7 Exercices types

Exercice type 27 ► calculs de primitives : fonctions usuelles

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1 $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 7x - 1$ **2** $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{7}{\sqrt{x}}$ **3** $f(x) = 2\cos(x) + 3\sin(x)$

1 $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 7x - 1 \iff F(x) = 3 \times \dfrac{x^4}{4} + 5 \times \dfrac{x^3}{3} + 7 \times \dfrac{x^2}{2} - x + k$

$$\iff \boxed{F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x + k,\ k \in \mathbb{R}}$$

2 $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{7}{\sqrt{x}} = 3 \times \dfrac{1}{x} - 4 \times x^{-2} + 7 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Donc, $F(x) = 3 \times \ln(x) - 4 \times \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + 7 \times 2\sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R}$

$$\boxed{F(x) = 3\ln(x) + \frac{4}{x} + 14\sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R}}$$

3 $f(x) = 2\cos(x) + 3\sin(x) \iff \boxed{F(x) = 2\sin(x) - 3\cos(x)}$

Exercice type 28 ► calculs de primitives : fonctions avec u' et u

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1 $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^3$ **2** $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ **3** $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$

1 $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^3$ est de la forme $u' \times u^n$ avec :

$$u(x) = x^2 + x + 1, \quad u'(x) = 2x + 1, \quad n = 3.$$

Donc, une primitive de f est :

$$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(x^2+x+1)^{3+1}}{3+1} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F(x) = \frac{1}{4}(x^2+x+1)^4}$$

2 $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = (2x+1)(x^2+x+1)^{-2}$ est de la forme $u' \times u^n$ avec :

$$u(x) = x^2 + x + 1, \quad u'(x) = 2x + 1, \quad n = -2.$$

Donc, une primitive de f est :

$$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(x^2+x+1)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{(x^2+x+1)^{-1}}{-1} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F(x) = -\frac{1}{x^2+x+1}}$$

3 $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$ est de la forme $2 \times \dfrac{u'}{u}$ avec :

$$u(x) = x^2 + x + 1, \quad u'(x) = 2x + 1, \quad u(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Donc, une primitive de f est :

$$F(x) = 2\ln(u) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F(x) = 2\ln(x^2+x+1)}$$

Exercice type 29 ▶ calcul d'une intégrale

Calculer :

$$\int_0^1 (6x+3)e^{x^2+x+1}\,dx.$$

Posons $f(x) = (6x+3)e^{x^2+x+1} = 3(2x+1)e^{x^2+x+1}$. Alors, $f = 3u'e^u$ avec :

$$u(x) = x^2+x+1, \quad u'(x) = 2x+1.$$

Donc, une primitive de f est :

$$F(x) = 3e^u = 3e^{x^2+x+1}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 3e^3 - 3e^1 = \boxed{3e(e^2-1)}.$$

Exercice type 30 ▶ intégration par parties

Calculer :

$$I = \int_0^1 xe^x\,dx.$$

Posons :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x & \Longrightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Longrightarrow & v(x) = e^x \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (uv')(x)\,dx \\ &= \Big[(uv)(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (u'v)(x)\,dx \\ &= \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx \\ &= 1e^1 - 0e^0 - \Big[e^x\Big]_0^1 \\ &= e - (e^1 - e^0) \\ &= e - e + 1 \\ \boxed{I = 1} \end{aligned}$$

7 Exercices

Primitives

Exercice 7.1 (calculs de primitives usuelles)

Donner une primitive de chacune des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = 3x + 2$
3. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^5 + 8x^3 - 7x + 1$
4. $f(x) = -8x - 3$
5. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$
6. $f(x) = \dfrac{-5x}{x^2+1}$
7. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
8. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
9. $f(x) = \dfrac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+1}}$

Solution page 283

Exercice 7.2 (calculs de primitives avec coefficients)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1. $f(x) = 5(3x+1)^3$
2. $f(x) = \dfrac{5}{7\sqrt{2x+1}}$
3. $f(x) = \dfrac{-5}{4(3x+1)^3}$
4. $f(x) = \dfrac{7}{3x+1}$ pour $x > -\dfrac{1}{3}$

Solution page 283

Intégrales & primitives

Exercice 7.3 (calculs basiques d'intégrales)

Calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + x + 1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_3^5 \left(\mathrm{e}^x + x - 3\right)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(3x^3 - 2x\right)\,\mathrm{d}x$

Solution page 284

Exercice 7.4 (une intégrale avec le logarithme népérien)

1. Montrer que $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de $f(x) = \ln(x)$.
2. En déduire $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$

Solution page 285

Exercice 7.5 (décomposition en éléments simples)

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

1 Montrer que $\alpha = 1$ est une racine du polynôme $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

2 En déduire ses deux autres racines, que l'on note β et γ, $\beta < \gamma$.

3 Déterminer les réels A, B et C tels que $f(x) = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta} + \dfrac{C}{x-\gamma}$.

Aide : on pourra s'aider de $(x-\alpha)f(x)$, $(x-\beta)f(x)$ et $(x-\gamma)f(x)$.

4 En déduire la valeur de $\displaystyle\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution page 285

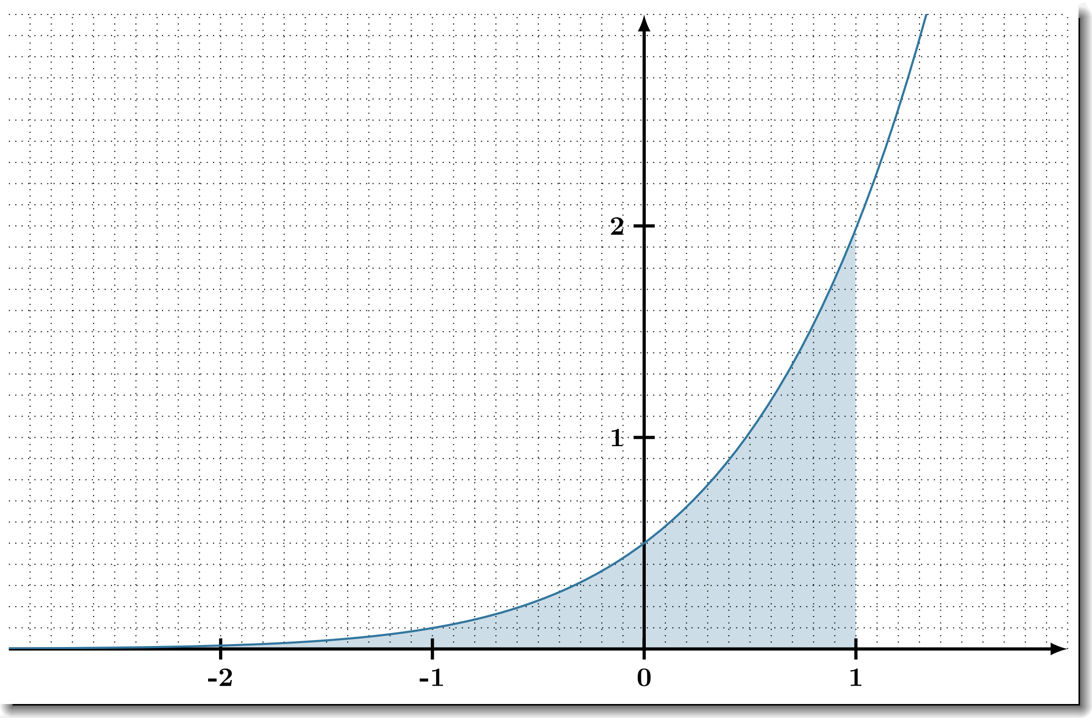
Intégrales & aires

Exercice 7.6 (lecture graphique et calcul)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Sa courbe représentative sur $[-3\,;2]$ est donnée ci-dessous :



1 À l'aide du quadrillage, donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ au dixième.

2 Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

3 En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près de $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

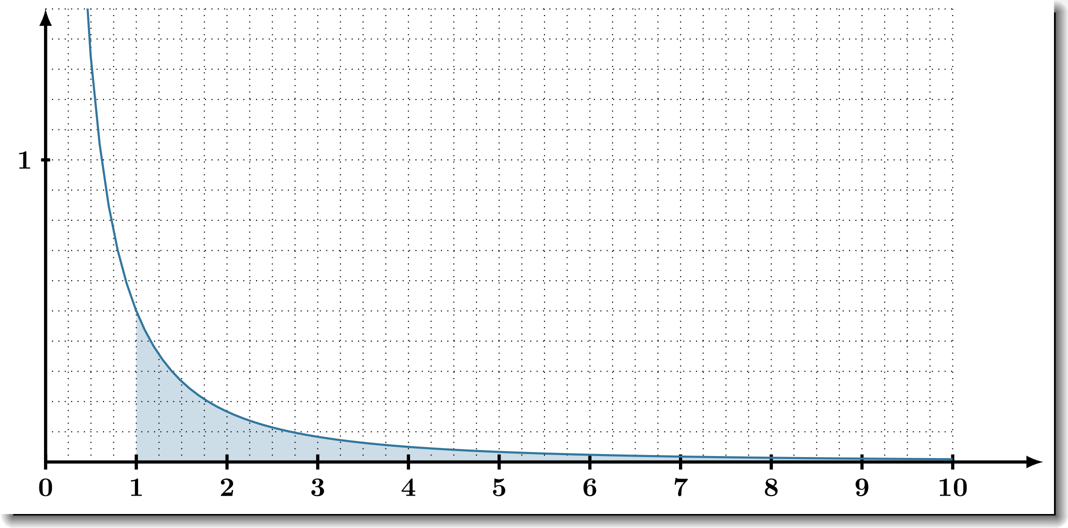
Solution page 287

Exercice 7.7 (lecture graphique et calcul)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Sa courbe représentative sur $[0\,;10]$ est donnée ci-dessous :



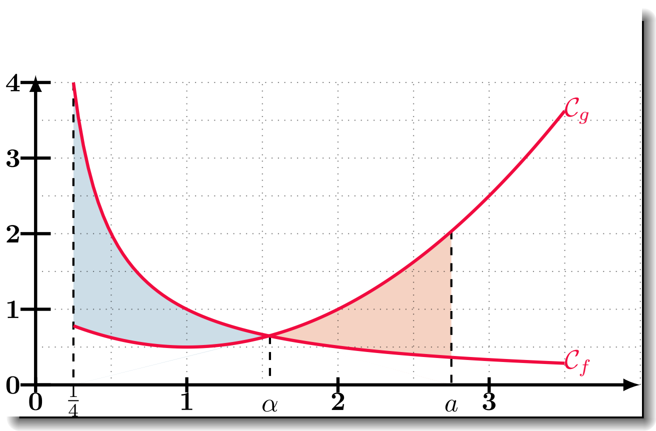
1 À l'aide du quadrillage, montrer que $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,5$.

2 Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

3 En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près de $\displaystyle\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution page 287

Exercice 7.8 (aire entre deux courbes)



On a représenté ci-contre les courbes représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 0,5x^2 - x + 1.$$

On a noté α l'abscisse de leur point d'intersection. L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de a telle que les deux aires colorées soient égales.

1 En vous aidant de la fonction $x \longmapsto 0,5x^3 - x^2 + x - 1$, prouver algébriquement l'existence de α, puis déterminer une valeur approchée de α au centième.

2 Déterminer alors une valeur approchée de a.

Solution page 288

Exercice 7.9 (approximation d'une aire)

L'objectif de cet exercice est de déterminer une approximation de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \big(\ln(1+x)\big)^2.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, avec pour unité graphique : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 10$ cm.

Partie A : étude des variations de la fonction

1. Déterminer la dérivée de f sur $[0\,;+\infty[$.
2. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
3. Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;1]$.
4. Calculer $f'(0)$. En déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie B : calcul de l'approximation de l'aire

On considère :

- Les points $A_k\left(\dfrac{k}{10}\,;0\right)$ pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$;
- Les rectangles R_k de base $[A_kA_{k+1}]$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k}{10}\right)$ pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 9$.

1. Sur le graphique précédent, dessiner les rectangles R_k, $0 \leqslant k \leqslant 9$.
2. Calculer la somme des aires des rectangles R_k pour k compris entre 0 et 9. On donnera le résultat en unité d'aire et en cm^2 à 10^{-3} près.
3. On suppose que la fonction F définie par :

$$F(x) = (x+1)\left[(\ln(x+1))^2 - 2\ln(x+1) + 2\right]$$

est une primitive de f sur $[0\,;1]$.
En déduire la valeur exacte, puis approchée à 10^{-3} près, de l'aire de $\mathcal{D}$.

Solution page 289

Exercice 7.10 (aire d'un demi-disque)

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que I représente l'aire d'un demi-disque, dont on donnera les caractéristiques, et calculer I.

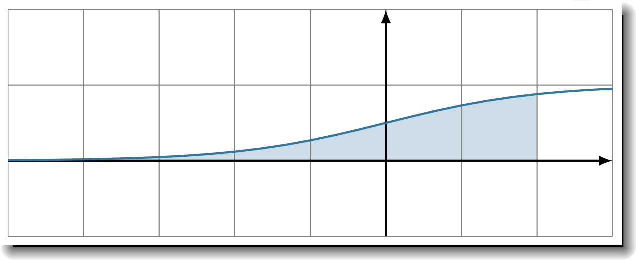
Solution page 290

Exercice 7.11 (prise d'initiative)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



On considère le domaine :

$$\mathcal{D} = \{M\,(x\,;y) \mid -5 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

représenté en bleu sur le schéma.

1 Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$ est égale à :

$$\mathcal{A} = 5 + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^5}\right).$$

2 On note $\mathcal{D}_t = \{M\,(x\,;y) \mid t \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, pour $t < 0$. Soit alors $\mathcal{A}(t)$ l'aire de $\mathcal{D}_t$. Déterminer $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathcal{A}(t)$.

Solution page 290

Intégrations par parties

Exercice 7.12 (pour s'entraîner)

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

1 $I = \displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$ **2** $K = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\ \mathrm{d}x$ **3** $L = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\big(\ln(x)\big)^2\ \mathrm{d}x$

Solution page 292

Exercice 7.13 (avec un sinus)

À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$.

Solution page 293

Exercice 7.14 (linéarité de l'intégrale)

1 En intégrant deux fois par parties, calculer :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x) \, \mathrm{d}x.$$

2 On note :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

On donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x).$$

a. Calculer $I + J$.

b. Calculer $I - J$.

c. En déduire I et J.

Solution page 293

Exercice 7.15 (trois IPP pour une intégrale)

Remarque 48

Dans cet exercice, on considèrera connue l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \qquad ; \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

1 Calculer $I + J$.

2 **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

b. On pose $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que :

$$K = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 4I - 2.$$

c. En déduire la valeur de I.

3 En déduire la valeur de J.

Solution page 294

Valeur moyenne

Exercice 7.16 (prix moyen d'une machine-outil)

Une machine-outil achetée neuve 10 000 € admet un prix de revente modélisé par la fonction f définie par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{-0,2x}$$

où $f(x)$ est exprimé en millier d'euros et x en années.

Déterminer le prix de revente moyen de cette machine sur 8 ans depuis sa date d'achat.

Solution page 296

Exercice 7.17 (population moyenne)

En prenant comme année de référence l'an 2000, le nombre d'habitants en fin d'année $2000+x$ d'une ville nouvelle est approché par la fonction :

$$f(x) = 18\mathrm{e}^{0,034x}, \quad \text{où } f(x) \text{ est exprimé en millier d'habitants.}$$

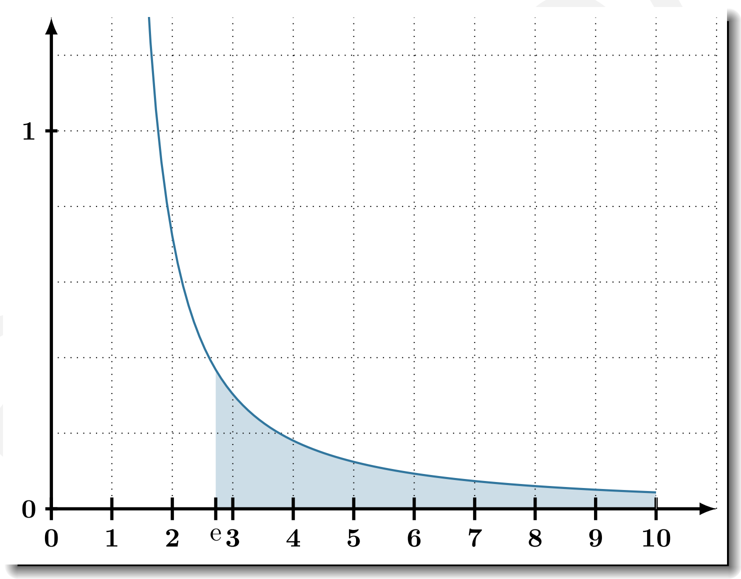
Déterminer la population moyenne de cette ville entre 2050 et 2080.

Solution page 296

Exercice 7.18

Soit la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

1. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{1+\ln(x)}{(x\ln(x))^2}$.
2. En déduire les variations de f sur $]1\,;+\infty[$.
3. En remarquant que $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$, calculer la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[\mathrm{e}\,;10]$.
4. Dessiner ci-dessous un rectangle dont l'aire est la même que celle représentée colorée.



Solution page 296

Suites et intégrales

Exercice 7.19

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_1^{\mathrm{e}} x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 Donner le sens de variations de (u_n).

2 **a.** Montrer que la fonction F_n définie par $F_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln(x) - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est une primitive de la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n \ln(x)$.

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Solution page 298

Exercice 7.20

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

1 **a.** Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0.

b. Exprimer $I_n + I_{n+1}$ pour tout entier naturel non nul n.

2 **a.** Montrer que (I_n) est croissante.

b. Montrer que pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x+1} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{nx}.$$

En déduire un encadrement de I_n.

3 En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{I_n}{\mathrm{e}^n}\right)$.

Solution page 298

Exercice 7.21

On considère les intégrales suivantes, définies pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

1 Calculer I_0 et J_0.

2 Soit n un entier naturel non nul.

a. On pose $F_n(x) = -\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)$.
Calculer $F_n'(x)$ et en déduire que :

$$nI_n - J_n = -\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}.$$

b. On pose $G_n(x) = -\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)$.
Calculer $G_n'(x)$ et en déduire que :

$$I_n + nJ_n = 1.$$

c. En déduire la valeur de I_n et J_n en fonction de n.

3 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n)$.

Solution page 300

Exercice 7.22

1 Montrer que pour tout entier naturel n supérieur à 1, on a :

$$\int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(t)\ \mathrm{d}t.$$

2 Montrer que la fonction L définie par $L(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.

3 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge et donner sa limite.

Solution page 301

Exercice 7.23

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\ \mathrm{d}x\ .$$

1 Pour tout entier naturel n, quel est le signe de I_n ?

2 Montrer que (I_n) est décroissante. Que peut-on alors en déduire ?

3 En écrivant $(\ln(x))^n$ sous la forme $x \times \dfrac{1}{x}(\ln(x))^n$ et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}.$$

4
- **a.** En considérant cette dernière relation de récurrence pour $n = 0$ et $n = 1$, montrer que $I_2 = I_0 - I_1$.
- **b.** Calculer I_0.
- **c.** Montrer que la fonction L définie par $L(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln. En déduire la valeur de I_1, puis celle de I_2.

Solution page 302

Exercice 7.24 (recherche)

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ sur laquelle se trouve le point $\mathrm{A}(-1\,;1)$ et le point M d'abscisse $x > -1$.
Déterminer une valeur approchée au millième de x pour laquelle l'aire du domaine compris entre la parabole et [AM] est égale à 1.

Solution page 304

Exercice 7.25

On considère la fonction ϕ définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\ \mathrm{d}t.$$

1 Justifier l'existence de ϕ.

2 Montrer que $\dfrac{1}{t(t+1)^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{(t+1)^2}$, où a, b et c sont trois réels que l'on précisera.

3 Soit $x \geqslant 1$.

a. Exprimer en fonction de x la valeur de $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)^2}$.

b. On pose $\Phi(t) = -\dfrac{\ln(t)}{2(t+1)^2}$.

Calculer $\Phi'(t)$ et en déduire une expression de $\phi(x)$ en fonction de x.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} = 0$.

En déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right).$$

Solution page 304

Exercice 7.26 (fonction logarithme)

Partie A

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1 Déterminer $P'(x)$, puis en déduire les variations de P sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;1\right[$.

3 En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x\left[(\ln(x))^2 + 1\right]}.$$

1 Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = -2\dfrac{(\ln(x))^3 + (\ln(x))^2 + \ln(x) - 1}{x^2\left[(\ln(x))^2 + 1\right]^2}$.

2 À l'aide de la partie A, montrer que $f'(x)$ est négatif sur $]\mathrm{e}^{\alpha}\,;+\infty[$.

3 Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4 Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ (on ne calculera pas $f(\alpha)$).

5 En remarquant que $f(x) = \dfrac{2\frac{\ln(x)}{x}}{(\ln(x))^2 + 1}$, déterminer une expression en fonction du réel t supérieur ou égal à 1 de l'intégrale : $I(t) = \displaystyle\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

6 Déterminer la valeur exacte puis approchée à 0,01 près de t tel que $I(t) = 1$.

Solution page 306

Exercice 7.27

On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

1 Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

2 **a.** Montrer qu'une primitive de $g(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ est $G(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

b. En déduire une primitive F de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3 On pose $I(t) = \int_0^t f(x)\ \mathrm{d}x$.

Montrer que $I(t) = \frac{\sin(t)-1}{\cos(t)} + 1$.

4 En déduire la valeur de $I = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} I(t)$.

Solution page 308

Objectif bac

Exercice 7.28 (Extrait du sujet du bac Amérique du nord 2025, sujet 1)

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \left(x^2+3x+2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1 Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2 On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2-x+1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3 Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4 On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2-5x-7\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.
Soit α un nombre réel positif.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$.

Solution page 309

Exercice 7.29 (Polynésie 2025, sujet 1)

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A : étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

1 **a.** On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = (n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

2 Justifier par le calcul que le point $\mathrm{A}\left(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

Partie B : étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0\,;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x.$$

1 Sur le graphique en ANNEXE (voir en fin d'énoncé page suivante), on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{100}$.

a. Donner une interprétation graphique de I_n.

b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2 Calculer I_0.

3 **a.** Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4 Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5 En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

6 **a.** Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6.a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante e.

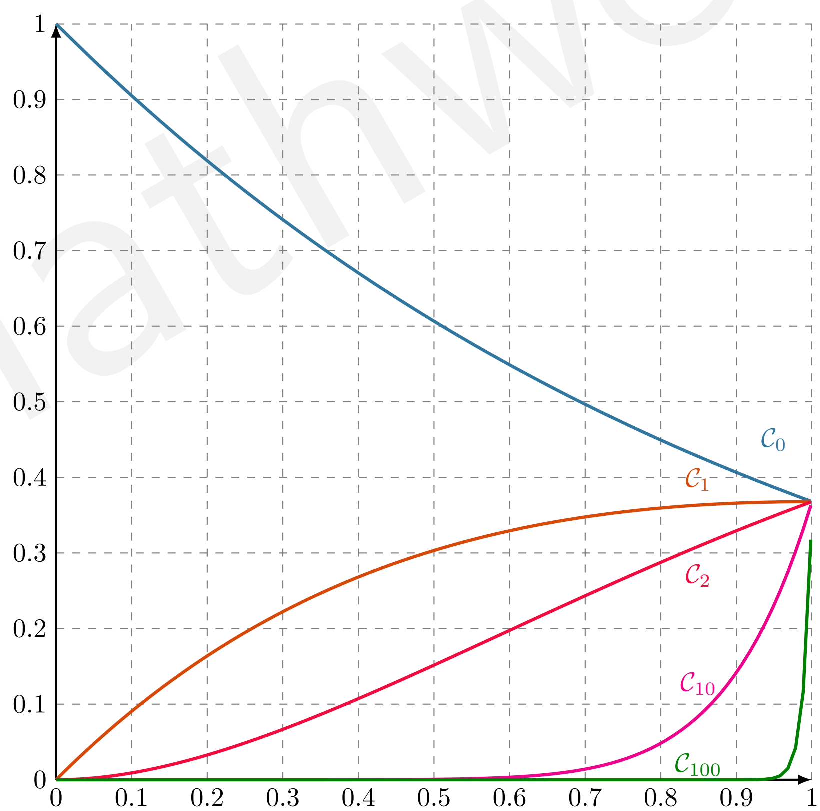
Code Python 7-28

```
# Les deux lignes suivantes n'étaient pas dans le sujet.
# Je les ai ajouté pour que vous puissiez exécuter le script chez vous.
from math import exp
e = exp(1)

def mystere(n):
    I = 1 - 1/e
    L = [I]
    for i in range(n):
        I = (i + 1)*I - 1/e
        L.append(I)
    return L
```

7 Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?

Annexe



Solution page 310

7 Corrigés

Corrigé de l'exercice 7.1 page 270

1 $\boxed{F(x) = 5x}$.

2 $F(x) = 3 \times \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ soit $\boxed{F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x}$.

3 $F(x) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6}x^6 + 8 \times \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{7}{2}x^2 + x$ soit $\boxed{F(x) = -\dfrac{1}{18}x^6 + 2x^4 - \dfrac{7}{2}x^2 + x}$.

4 $F(x) = -8 \times \dfrac{1}{2}x^2 - 3x$ soit $\boxed{F(x) = -4x^2 - 3x}$.

5 $\boxed{F(x) = x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 2x}$.

6 $f(x) = -\dfrac{5}{2} \times \dfrac{2x}{x^2+1} = -\dfrac{5}{2} \times \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ donc $\boxed{F(x) = -\dfrac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)}$.

7 $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}$.

8 $f(x) = -3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\boxed{F(x) = -3 \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{x}}$.

9 $f(x) = \dfrac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+1}} = 2 \times \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}} = 2 \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $u'(x) = 2x + 3$.

Donc $F(x) = 2 \times 2\sqrt{u(x)}$ soit $\boxed{F(x) = 4\sqrt{x^2+3x+1}}$.

Corrigé de l'exercice 7.2 page 270

1 $f(x) = 5(3x+1)^3$.

On pose $u = 3x + 1$. Alors, $u' = 3$. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$f(x) = 5 \times \frac{1}{3}u' \times u^3 = \frac{5}{3}u' \times u^3.$$

Une primitive de $u' \times u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ donc une primitive de f est :

$$F(x) = \frac{5}{3} \times \frac{(3x+1)^4}{4} \text{ soit } \boxed{F(x) = \frac{5}{12}(3x+1)^4}.$$

2 $f(x) = \dfrac{5}{7\sqrt{2x+1}}$.

Posons $u = 2x + 1$. Alors, $u' = 2$ et :

$$f(x) = \frac{5 \times \frac{1}{2}u'}{7\sqrt{u}} = \frac{5}{7} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ est $\sqrt{u}$. Une primitive de f est donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{5}{7}\sqrt{u}}.$$

3 $f(x)=\dfrac{-5}{4(3x+1)^3}$.

Posons $u=3x+1$. Alors, $u'=3$ et :

$$f(x)=\frac{-5\times\frac{1}{3}u'}{4u^3}=-\frac{5}{12}\times\frac{u'}{u^3}.$$

Une primitive de $\dfrac{u'}{u^3}=u'\times u^{-3}$ est $\dfrac{u^{-2}}{-2}$ donc une primitive de f est :

$$F(x)=-\frac{5}{12}\times\frac{(3x+1)^{-2}}{-2}=\frac{5}{24}\times\frac{1}{(3x+1)^2}\text{ soit }\boxed{F(x)=\frac{5}{24(3x+1)^2}}.$$

4 $f(x)=\dfrac{7}{3x+1}$.

Posons $u=3x+1$. Alors, $u'=3$ et :

$$f(x)=\frac{7\times\frac{1}{3}u'}{u}=\frac{7}{3}\times\frac{u'}{u}.$$

Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(u)$ (pour $u>0$) donc une primitive de f est :

$$\boxed{F(x)=\frac{7}{3}\ln(3x+1)}$$

Corrigé de l'exercice 7.3 page 270

1 Cherchons avant tout une primitive de $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x+1}$.

Si on pose $u(x)=\mathrm{e}^x+x+1$, alors $u'(x)=\mathrm{e}^x+1$ donc $f=\dfrac{u'}{u}$.

Par conséquent, une primitive de f est $F=\ln(u)$, soit :

$$F(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+x+1\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x+1}\,\mathrm{d}x&=F(1)-F(0)\\&=\ln(\mathrm{e}+2)-\ln(2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x+1}\,\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{\mathrm{e}+2}{2}\right)}$$

2 Une primitive de e^{ax+b} est :

$$f(x)=\mathrm{e}^{ax+b}\Longrightarrow F(x)=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}.$$

Ainsi, une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$ est $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1}$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x&=F(1)-F(0)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^3-\frac{1}{2}\mathrm{e}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^2-1\right)}$$

3 $\displaystyle\int_3^5 \left(\mathrm{e}^x + x - 3\right)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(3),\ \text{avec } F(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 - 3x$

$$= \left(\mathrm{e}^5 + \frac{25}{2} - 15\right) - \left(\mathrm{e}^3 + \frac{9}{2} - 9\right)$$

$$\boxed{\int_3^5 \left(\mathrm{e}^x + x - 3\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 + 2}$$

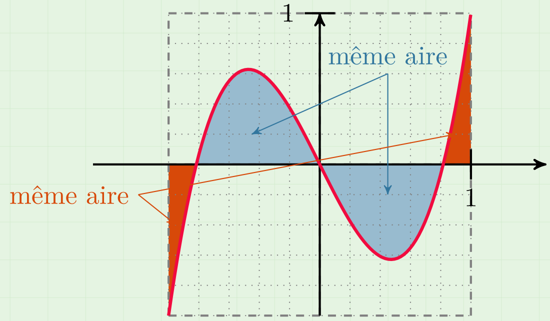
4 $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(3x^3 - 2x\right)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(-1),\ \text{avec } F(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^2$

$$= \frac{3}{4} - 1 - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 \left(3x^3 - 2x\right)\,\mathrm{d}x = 0}$$

Remarque 51

Il n'est pas incohérent de trouver une intégrale égale à 0. Cela signifie que sur l'intervalle considéré, la courbe représentative de la fonction est tantôt positive, tantôt négative, et que l'aire des parties sous l'axe des abscisses est égale à celle des parties au-dessus :



Corrigé de l'exercice 7.4 page 270

1 $F(x) = x\ln(x) - x$.
***F* est une primitive de *f* si $F' = f$.** On calcule donc $F'(x)$:

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x).$$

Ainsi, F est bien une primitive de f.

2 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = F(\mathrm{e}) - F(1)$

$$\begin{aligned} &= (\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e}) - (1\ln 1 - 1) \\ &= (\mathrm{e} \times 1 - \mathrm{e}) - (1 \times 0 - 1) \\ &= 0 - (-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = 1}$$

Corrigé de l'exercice 7.5 page 271

1 Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Alors, $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 0$.
Ainsi, $\alpha = 1$ est une racine de P.

2 De la question précédente, on peut conclure que $P(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$.

En développant, on a :

$$\begin{aligned}P(x) &= x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c\\ &= x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c.\end{aligned}$$

Par identification, on a alors :

$$\begin{cases} b-1 = -2 \\ c-b = -5 \\ -c = 6 \end{cases}$$

Soit $b = -1$ et $c = -6$. Ainsi, $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$.

Le discriminant du second facteur est $\Delta = 25$, d'où les racines suivantes :

$$\beta = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} = 3.$$

Les trois racines de P sont donc :

$$\boxed{\alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 3.}$$

3 Déterminons les réels A, B et C tels que :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}.$$

- $(x-1)f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)} = A + \dfrac{B(x-1)}{x+2} + \dfrac{C(x-1)}{x-3}$.

  Si $x = 1$, cela nous donne : $\boxed{\dfrac{1}{-6} = A}$.

- $(x+2)f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{A(x+2)}{x-1} + \dfrac{C(x+2)}{x-3}$.

  Si $x = -2$, cela nous donne : $\boxed{\dfrac{1}{15} = B}$.

- $(x-3)f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A(x-3)}{x-1} + \dfrac{B(x-3)}{x+2} + C$.

  Si $x = 3$, cela nous donne : $\boxed{\dfrac{1}{10} = C}$.

Ainsi :

$$\boxed{f(x) = \frac{-1}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{10(x-3)}}$$

4 On peut écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \dfrac{1}{30}\left(\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{5}{x-1}\right)$.

Ainsi, une primitive de $f(x)$ est :

$$F(x) = \frac{1}{30}\big[3\ln(x-3) + 2\ln(x+2) - 5\ln(x-1)\big].$$

$$\begin{aligned}\text{Donc, } \int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(5) - F(4)\\ &= \frac{1}{30}\big[3\ln(2) + 2\ln(7) - 5\ln(4)\big] - \frac{1}{30}\big[3\ln(1) + 2\ln(6) - 5\ln(3)\big]\\ &= \frac{1}{30}\big[3\ln(2) + 2\ln(7) - 10\ln(2) - 2\ln(2) - 2\ln(3) + 5\ln(3)\big]\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{30}\big[-9\ln(2) + 3\ln(3) + 2\ln(7)\big]}$$

Corrigé de l'exercice 7.6 page 271

1 On peut compter entre 138 et 140 petits carreaux dans le domaine colorié.
Or, 1 petit carreau correspond à $0,1 \times 0,1 = 0,01$ unité d'aire.

$140 \times 0,01 = 1,4$ donc on peut écrire que $\boxed{\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,4}$

2
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} &= \frac{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{1+\mathrm{e}^x} - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\\
&= f(x).
\end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(1) - F(-2),\ \text{avec } F(x) = \mathrm{e}^x - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\\
&= \mathrm{e}^1 - \ln\left(1+\mathrm{e}^1\right) - \left[\mathrm{e}^{-2} - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right)\right]\\
&= \mathrm{e} - \ln(1+\mathrm{e}) - \mathrm{e}^{-2} + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2} + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2}}{1+\mathrm{e}}\right)}$$

À la calculatrice, on trouve :

$$\boxed{\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,3966}$$

Corrigé de l'exercice 7.7 page 272

1 Un petit rectangle de la grille représente $0,25 \times 0,1 = 0,025$ unité d'aire.
Nous pouvons compter un peu plus de 20 de ces rectangles dans le domaine colorié, ce qui nous laisse à penser que celui-ci a une aire supérieure à $20 \times 0,025 = 0,5$ unité d'aire.
Ainsi,

$$\boxed{\int_{1}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,5}.$$

2
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} &= \frac{1+x}{x(x+1)} - \frac{x}{x(1+x)}\\
&= \frac{1+x-x}{x(x+1)}\\
&= f(x).
\end{aligned}$$
On obtient bien l'égalité :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}}$$

3
$$\begin{aligned}
\int_{1}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(10) - F(1),\ \text{avec } F(x) = \ln(x) - \ln(x+1)\\
&= \ln 10 - \ln 11 - (\ln 1 - \ln 2)\\
&= \ln 10 - \ln 11 + \ln 2\\
&\approx 0,5978.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.8 page 272

1 α est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{1}{x} = 0,5x^2 - x + 1 \\ &\iff 1 = 0,5x^3 - x^2 + x \qquad \text{(en multipliant par } x \neq 0) \\ &\iff 0,5x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Posons :

$$h(x) = 0,5x^3 - x^2 + x - 1.$$

Alors,

$$h'(x) = 1,5x^2 - 2x + 1.$$

Le discriminant de $h'(x)$ est :

$$\Delta = 4 - 6 = -2 < 0$$

donc $h'(x)$ est toujours du signe de « 1,5 », soit toujours positif.
Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
h est continue et croissante sur $[1\,;2]$; de plus, $h(1) = -0,5 < 0$ et $h(2) = 1 > 0$ donc $0 \in]h(1)\,;h(2)[$.
Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1\,;2]$. C'est cette valeur que l'on note α.
<u>On trouve à la calculatrice $\alpha \approx 1,54$.</u>

2 Sur $[0,25\,;\alpha]$, $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire à gauche correspond à $\displaystyle\int_{0,25}^{\alpha} \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x$. Posons :

$$u(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \big(0,5x^2 - x + 1\big) = \frac{1}{x} - 0,5x^2 + x - 1.$$

Une primitive de $u(x)$ est :

$$U(x) = \ln(x) - 0,5 \times \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x = \ln(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{0,25}^{\alpha} \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x &= U(\alpha) - U(0,25) \\ &\approx -0,53 - (-1,6) \\ &\approx 1,07. \end{aligned}$$

Sur $[\alpha\,;a]$, $g(x) \geqslant f(x)$ donc l'aire à droite correspond à $\displaystyle\int_{\alpha}^{a} \big[g(x) - f(x)\big]\,\mathrm{d}x$.
Une primitive de $g(x) - f(x)$ est $-U(x)$ ($U(x)$ ayant été calculée précédemment) donc :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{a} \big[g(x) - f(x)\big]\,\mathrm{d}x &= -U(a) - \big(-U(\alpha)\big) \\ &= -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 0,53 \end{aligned}$$

On cherche à déterminer a telle que $\displaystyle\int_{0,25}^{\alpha} \big[g(x) - f(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{a} \big[g(x) - f(x)\big]\,\mathrm{d}x$,c'est-à-dire telle que :

$$\begin{aligned} \int_{0,25}^{\alpha} \big[g(x) - f(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{a} \big[g(x) - f(x)\big]\,\mathrm{d}x &\iff -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 0,53 = 1,07 \\ &\iff -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 1,6 = 0. \end{aligned}$$

Bien sûr, il est hors de question de résoudre cette équation algébriquement. On prend donc la calculatrice et on lui demande d'afficher les valeurs (par pas de 0,01) de la fonction $x \longmapsto -\ln(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1,6$ à partir de $x = 2$ (par exemple) car on peut imaginer que $a > 2$ d'après la représentation graphique.
<u>On trouve alors que $a \approx 2,85$.</u>

Corrigé de l'exercice 7.9 page 273

Partie A : étude des variations de la fonction

1 f est de la forme u^2, avec $u(x) = \ln(x+1)$.
Donc $f' = 2u'u$, avec $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
D'où :

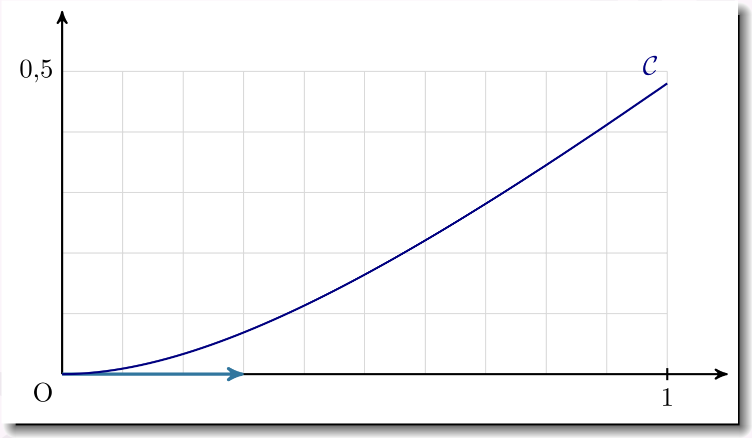
$$\boxed{f'(x) = \frac{2\ln(x+1)}{x+1}.}$$

2 Si $x \geqslant 0$, alors $x+1 \geqslant 1$ et donc $\ln(x+1) \geqslant 0$.
Ainsi, $f'(x)$ est strictement positive donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3 $f(0) = (\ln(0+1))^2 = 0$ et $f(1) = (\ln(1+1))^2 = (\ln 2)^2$. On a le tableau de variations suivant :

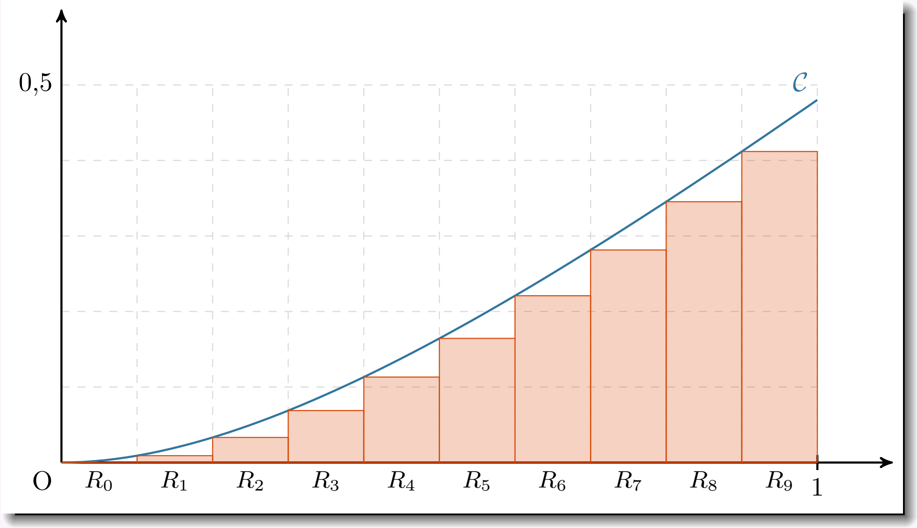
x	0		1
f	0	$\nearrow$	$(\ln 2)^2$

4 $f'(0) = \dfrac{2\ln(0+1)}{0+1} = 0$ donc la tangente à $\mathcal{C}$ en 0 est horizontale. Or, $f(0) = 0$ donc $\mathcal{T}$ est l'axe des abscisses.
À titre informatif, la courbe représentative de f ainsi que la tangente $\mathcal{T}$ sont représentées ci-dessous :



Partie B : Calcul de l'approximation de l'aire

1



2 L'aire du rectangle R_k est :

$$A_k = \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right),$$

où $\frac{1}{10}$ représente la mesure de la largeur et $f\left(\frac{k}{10}\right)$ sa longueur.
La somme des aires des rectangles est :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(f(0) + f(0,1) + \cdots + f(0,9)\right) \\ &\boxed{A \approx 0,165 \text{ u.a.}} \\ &\approx 0,165 \times 100 \text{ cm}^2 \\ &\boxed{A \approx 16,487 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

3 $$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(1) - F(0) \\ &= 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2 \\ &\approx 0,188. \end{aligned}$$

L'aire de $\mathcal{D}$ est donc égale à $2(\ln 2)^2 - 4\ln(2) + 4$ u.a., soit environ 0,188 u.a.

Corrigé de l'exercice 7.10 page 273

Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ définie sur $[0\,;4]$.

Considérons un point $M\,(x\,;y = f(x))$ sur la courbe représentative de f. Alors,

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4x - x^2}, y \geqslant 0 \\ y^2 &= 4x - x^2, y \geqslant 0 \\ 0 &= x^2 - 4x + y^2, y \geqslant 0 \\ 0 &= (x-2)^2 - 4 + y^2, y \geqslant 0 \\ 4 &= (x-2)^2 + y^2, y \geqslant 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation cartésienne est celle du demi-cercle de centre $A(2;0)$ et de rayon $r = 2$.

De plus, I représente l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses sur $[0\,;4]$, donc l'aire de ce demi-cercle.
Ainsi, $I = \frac{\pi r^2}{2}$ soit :

$$\boxed{I = 2\pi}$$

Corrigé de l'exercice 7.11 page 274

1 On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1+\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1 + \frac{u'(x)}{u(x)}, \text{ avec } u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-5}^{2} \left(1 + \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_{-5}^{2} \\
&= 2 + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right) - (-5) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{5}\right) \\
&= 7 + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2}}{1+\mathrm{e}^{5}}\right) \\
&= 7 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{\mathrm{e}^2}}{1+\mathrm{e}^{5}}\right) \\
&= 7 + \ln\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2}}{1+\mathrm{e}^{5}}\right) \\
&= 7 + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2} \times \frac{\mathrm{e}^2+1}{1+\mathrm{e}^{5}}\right) \\
&= 7 + \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)}_{=-2} + \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2+1}{1+\mathrm{e}^{5}}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 5 + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^5}\right)}$$

2 On a :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(t) &= \int_{t}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_{t}^{2} \\
&= 2 + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right) - t - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right) \\
&= (2-t) + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right) \\
&= (2-t) + \ln\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2}}{\frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t}}\right) \\
&= (2-t) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^2} \times \frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^t}\right) \\
&= (2-t) + \ln\frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^2} + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^t}\right) \\
&= (2-t) + t - 2 + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^t}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathcal{A}(t) = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^t}\right)}$$

$\lim\limits_{t\to-\infty} \left(\mathrm{e}^t\right) = 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty} \mathcal{A}(t) = \ln\left(1+\mathrm{e}^2\right)}$$

Corrigé de l'exercice 7.12 page 274

1 $I = \int_1^2 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Posons : $u(x) = \sqrt{x}$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$v'(x) = x \quad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

Alors,

$$\begin{aligned}
I &= [(uv)(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4}\frac{x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}(2)^2\sqrt{2} - \frac{1}{2}(1)^2\sqrt{1}\right) - \frac{1}{4}\int_1^2 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \\
I &= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}I \\
\frac{5}{4}I &= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \\
I &= \frac{4}{5}\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&\boxed{I = \frac{8\sqrt{2}-2}{5}}
\end{aligned}$$

2 $K = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$. Posons :

$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x \qquad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

Alors,

$$\begin{aligned}
K &= [(uv)(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 - 1) \\
&\boxed{K = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}}
\end{aligned}$$

3 $L = \int_1^{\mathrm{e}} x\big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$. Posons :

$u(x) = \big(\ln(x)\big)^2 \qquad u'(x) = 2\times\ln(x)\times\dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x \qquad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

Alors,

$$\begin{aligned}
L &= [(uv)(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\ln^2(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \underbrace{\int x\ln(x)\ \mathrm{d}x}_{=K} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{\mathrm{e}^2+1}{4} \\
&\boxed{L = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.13 page 274

$S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$. Posons : $u(x) = \sin(x) \qquad u'(x) = \cos(x)$
$v'(x) = \mathrm{e}^x \qquad v(x) = \mathrm{e}^x$

Alors,

$$S = \left[\sin(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x}_{=I}.$$

Calculons alors I en posant : $u(x) = \cos(x) \qquad u'(x) = -\sin(x)$
$v'(x) = \mathrm{e}^x \qquad v(x) = \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned}
I &= \left[\cos(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin(x)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\cos(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\cos(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + S.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
S &= \left[\sin(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\left[\cos(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + S\right) \\
S &= \left[\sin(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\cos(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - S \\
2S &= \left[\sin(x)\mathrm{e}^x - \cos(x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
S &= \frac{1}{2}\left[\big(\sin(x) - \cos(x)\big)\mathrm{e}^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
S &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right)}_{=0}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{(\sin 0 - \cos 0)}_{=-1}\mathrm{e}^0\right) \\
&\boxed{S = \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.14 page 275

1 Posons pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Alors :

$$u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad v'(x) = \cos(2x).$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur ce même intervalle. Donc, par intégration par parties, on a :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \underbrace{\left[x^2 \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x)\ \mathrm{d}x.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\ \mathrm{d}x$, il est nécessaire de procéder à une seconde intégration par parties. Posons :

$$s(x) = x \quad \text{et} \quad t(x) = \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Alors :

$$s'(x) = 1 \quad \text{et} \quad t'(x) = -\sin(2x).$$

Les fonctions s et t étant dérivables, à dérivée continue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a, par le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} K &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[x\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(2x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left[\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2 **a.** Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}.$$

On sait que pour tout x,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Donc, d'après **1**, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)\ \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

b. On en déduit que :

$$\boxed{I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad \boxed{J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}}.$$

Corrigé de l'exercice 7.15 page 275

1 Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \boxed{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1}.$$

2 **a.** Posons : $u(x) = \cos^2(x) \qquad u'(x) = -2\sin(x)\cos(x) = -\sin(2x)$

$v'(x) = \mathrm{e}^x \qquad v(x) = \mathrm{e}^x$

Alors,

$$I = \left[\cos^2(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(2x)e^x \, dx$$

$$\boxed{I = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x \, dx}$$

Remarque 52

De cette égalité, on peut déduire :

$$I + 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x \, dx.$$

b. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x \, dx$. On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin(2x) & u'(x) &= 2\cos(2x) \\ v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

À l'aide d'une IPP, on a :

$$\begin{aligned} K &= \left[\sin(2x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)e^x \, dx \\ &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)e^x \, dx. \end{aligned}$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos(2x) & u'(x) &= -2\sin(2x) \\ v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

Alors, on obtient à l'aide d'une seconde IPP :

$$\begin{aligned} K &= -2\left(\left[\cos(2x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x \, dx\right) \\ &= -2\left(-e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2(I+1)\right). \end{aligned}$$

En effet, d'après la question 2 a., on peut remplacer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^x \, dx$ par $I+1$ (voir remarque).
On obtient finalement :

$$K = 2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 - 4I - 4 \iff \boxed{K = 2e^{\frac{\pi}{2}} - 4I - 2}$$

c. On en déduit que :

$$I = -1 + 2e^{\frac{\pi}{2}} - 4I - 2$$

soit :

$$5I = 2e^{\frac{\pi}{2}} - 3$$

et donc :

$$\boxed{I = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}} - 3}{5}}$$

3 De l'égalité $I + J = e^{\pi/2} - 1$, on déduit :

$$J = e^{\pi/2} - 1 - \frac{2e^{\frac{\pi}{2}} - 3}{5} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{J = \frac{3e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{5}}$$

Corrigé de l'exercice 7.16 page 276

Le prix de revente moyen est donné par la valeur moyenne de f sur $[0\,;8]$:

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{8-0}\int_0^8 f(x)\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{8}\int_0^8 10\mathrm{e}^{-0,2x}\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{8}\big[F(8)-F(0)\big],\ \text{avec } F(x) = 10\times\left(\frac{1}{-0,2}\right)\mathrm{e}^{-0,2x} = -50\mathrm{e}^{-0,2x}\\
&= \frac{1}{8}\big[-50\mathrm{e}^{-0,2\times 8}-\big(-50\mathrm{e}^{-0,2\times 0}\big)\big]\\
&= -\frac{50}{8}\mathrm{e}^{-1,6}+\frac{50}{8}\\
&\approx 4,988.
\end{aligned}$$

On peut donc estimer à 4 988 € le prix moyen de revente de cette machine-outil sur 8 ans.

Corrigé de l'exercice 7.17 page 276

La population moyenne de la ville entre 2050 et 2080 est la valeur moyenne de f sur $[50\,;80]$:

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{80-50}\int_{50}^{80} 18\mathrm{e}^{0,034x}\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{30}\big[F(80)-F(50)\big],\ \text{avec } F(x) = 18\times\frac{1}{0,034}\mathrm{e}^{0,034x} = \frac{9\ 000}{17}\mathrm{e}^{0,034x}\\
&= \frac{1}{30}\times\frac{9\ 000}{17}\big[\mathrm{e}^{0,034\times 80}-\mathrm{e}^{0,034\times 50}\big]\\
&\approx 171,289.
\end{aligned}$$

On peut donc estimer à 171 289 le nombre moyen d'habitants de cette ville entre 2050 et 2080.

Corrigé de l'exercice 7.18 page 276

1 f est de la forme $f=\dfrac{1}{g}$, avec $g(x)=x\ln(x)$. Donc f' est de la forme $-\dfrac{g'}{g^2}$.

g est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned}
u(x) &= x & u'(x) &= 1\\
v(x) &= \ln(x) & v'(x) &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Donc g' est de la forme $u'v+uv'$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (u'v+uv')(x)\\
&= \ln(x)+x\times\frac{1}{x}\\
&= \ln(x)+1.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}}$$

2 $x>1$ donc $\ln(x)>\ln 1$, soit $\ln(x)>0$.

De plus, $(x\ln(x))^2>0$ donc $f'(x)<0$ sur $]1\,;+\infty[$.

On a alors le tableau suivant :

x	1	$+\infty$
f'	‖	$-$
f	‖	$\searrow$

3 $\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)} = f(x)$ donc f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$.
Par conséquent, une primitive de $f(x)$ est $F(x) = \ln\big[u(x)\big]$, soit :

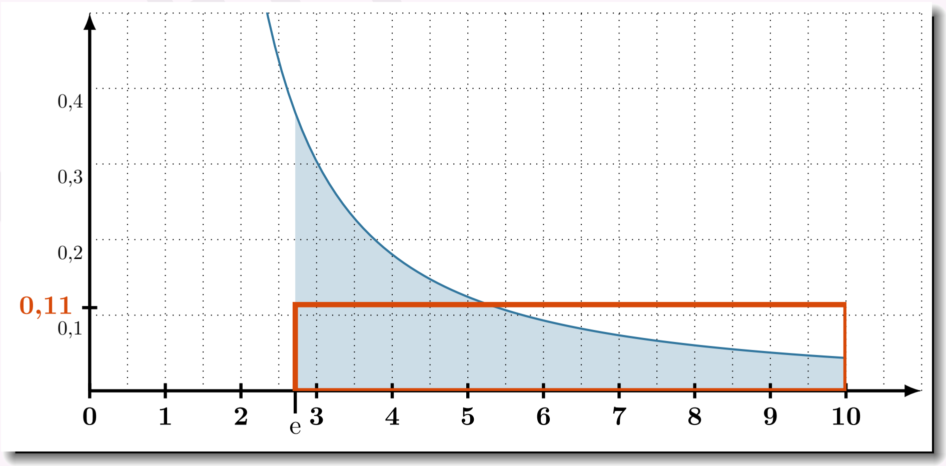
$$F(x) = \ln\big[\ln(x)\big].$$

Ainsi, la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[\mathrm{e}\,;10]$ est :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{10-\mathrm{e}}\int_{\mathrm{e}}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{10-\mathrm{e}}\big[F(10) - F(\mathrm{e})\big]\\ &= \frac{1}{10-\mathrm{e}}\Big[\ln(\ln 10) - \underbrace{\ln(\underbrace{\ln \mathrm{e}}_{=1})}_{=0}\Big]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mu = \frac{\ln(\ln 10)}{10-\mathrm{e}}}$$

4 La valeur moyenne correspond à la hauteur du rectangle dont l'aire est égale à celle du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur $[\mathrm{e}\,;10]$.
Ici, $\mu \approx 0,11$, d'où le rectangle suivant :



Corrigé de l'exercice 7.19 page 277

1 $$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \int_1^{\mathrm{e}} x^{n+1}\ln(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \left(x^{n+1}\ln(x) - x^n\ln(x)\right)\mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} (x-1)x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $x-1 \geqslant 0$, $x^n > 0$ et $\ln(x) \geqslant 0$ donc $(x-1)x^n\ln(x) \geqslant 0$.

Par conséquent, $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x-1)x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (par propriété du cours) et donc $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$.

Ainsi, (u_n) est croissante.

2 **a.** F_n est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad ; \quad u'(x) = x^n \\ v(x) &= \ln(x) - \frac{1}{n+1} \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} F_n'(x) &= (u'v+v'u)(x) \\ &= x^n\ln(x) - \frac{1}{n+1}x^n + \frac{1}{n+1}x^n \\ &= x^n\ln(x) \\ &= f_n(x). \end{aligned}$$

F_n est donc bien une primitive de f_n.

b. On déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned} u_n &= F_n(\mathrm{e}) - F_n(1) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1}\left(\ln\mathrm{e} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}\left(\ln 1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\boxed{u_n = \frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.20 page 277

1 **a.**

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(\mathrm{e}^x+1)\right]_0^1 = \ln(\mathrm{e}+1) - \ln 2.$

  Ainsi, $\boxed{I_1 = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)}$.

- $I_0 + I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = [x]_0^1.$

  Ainsi, $\boxed{I_0+I_1 = 1}$.

On en déduit alors : $I_0 = 1 - I_1$, soit $\boxed{I_0 = 1 - \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)}$.

b. $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{e^x + 1}\,dx.$

$$= \int_0^1 \frac{e^{nx}\left(e^x + 1\right)}{e^x + 1}\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{nx}\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\left[e^{nx}\right]_0^1$$

Ainsi, $\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}\left(e^n - 1\right)}$.

2 **a.** $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx}\left(e^x - 1\right)}{e^x + 1}\,dx.$

Or, sur $[0\,;1]$, on a :

$$\begin{cases} e^{nx} \geqslant 0 \\ e^x - 1 \geqslant 0 \\ e^x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ donc $\underline{(I_n) \text{ est croissante}}$.

b. $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1$ car $t \mapsto e^t$ est croissante

$$\iff 1 + 1 \leqslant e^x + 1 \leqslant e + 1$$

$$\iff \frac{1}{e+1} \leqslant \frac{1}{e^x + 1} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{e^{nx}}{e+1} \leqslant \frac{e^{nx}}{e^x + 1} \leqslant \frac{1}{2}e^{nx} \text{ car } e^{nx} > 0$$

$$\iff \frac{1}{e+1}\int_0^1 e^{nx}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1}\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}\,dx$$

$$\iff \boxed{\frac{e^n - 1}{n(e+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^n - 1}{2n}}$$

3 On sait (croissance comparée) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^n}{n}\right) = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^n - 1}{n(e+1)}\right) = +\infty$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^n - 1}{2n}\right) = +\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(I_n) = +\infty}.$$

De plus,

$$\frac{1 - e^{-n}}{n(e+1)} \leqslant I_n e^{-n} \leqslant \frac{1 - e^{-n}}{2n} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1 - e^{-n}}{n(e+1)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1 - e^{-n}}{2n}\right) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{I_n}{e^n}\right) = 0}$$

Corrigé de l'exercice 7.21 page 277

1 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ \mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos 0 - \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ \mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

2 **a.** $F_n'(x) = n\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) - \mathrm{e}^{-nx}\cos(x).$
Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n'(x)\ \mathrm{d}x = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\boxed{-\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}} = nI_n - J_n}$$

b. $G_n'(x) = n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x) + \mathrm{e}^{-nx}\sin(x).$
Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G_n'(x)\ \mathrm{d}x = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\boxed{1 = nJ_n + I_n}$$

c. On a :

$$\begin{cases} I_n & + & nJ_n & = & 1 & (E_1) \\ -nI_n & + & J_n & = & \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}} & (E_2) \end{cases}$$

En faisant $(E_1) - n(E_2)$, on a :

$$(1+n^2)I_n = 1 - n\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}$$

D'où :

$$\boxed{I_n = \frac{1 - n\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}}$$

De plus, en faisant $(E_2) + n(E_1)$, on a :

$$(1+n^2)J_n = \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}} + n\ ,$$

d'où :

$$\boxed{J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}}$$

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}\right) = 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(I_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+n^2}\right) = 0}$$

De même,

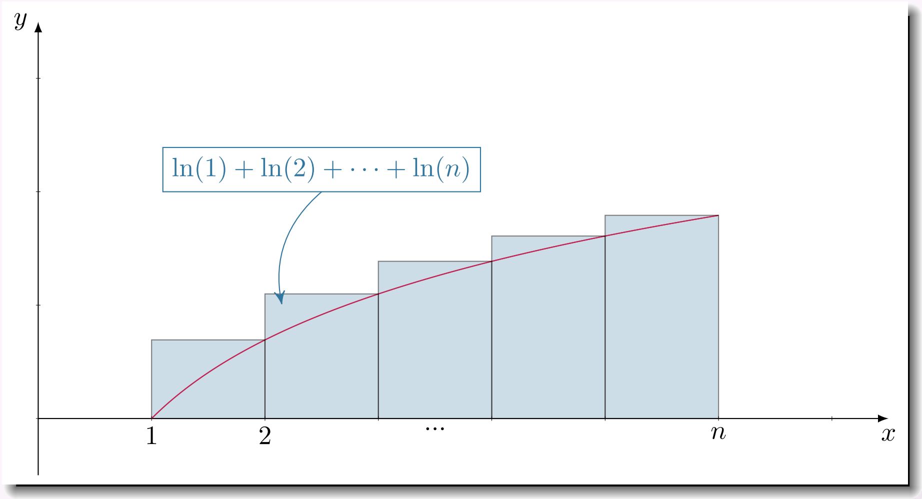
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(J_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}\right) = 0}$$

Corrigé de l'exercice 7.22 page 278

1 Dans un premier temps, remarquons que :

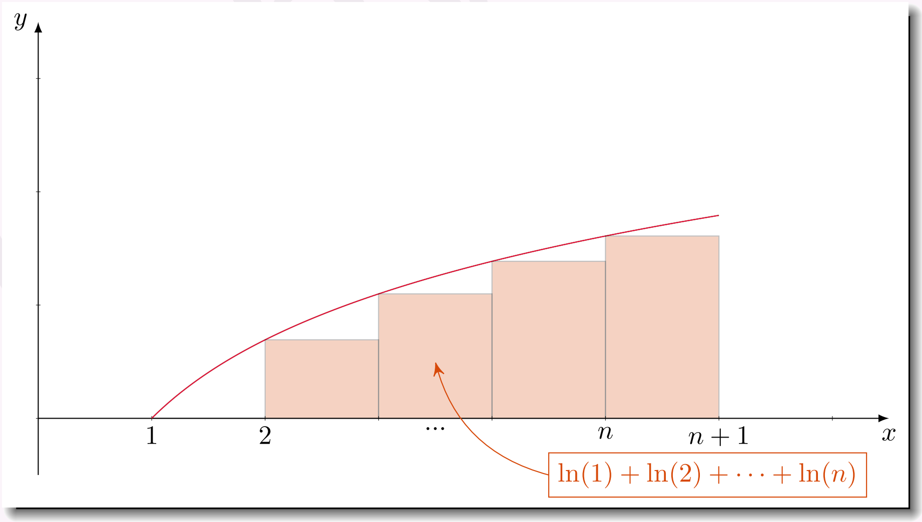
$$\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n-1) + \ln(n).$$

Traçons la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur $[1; +\infty[$ et traçons les rectangles de largeur 1 et de hauteur respective $\ln(k)$ et $\ln(k+1)$ pour k allant de 1 à n :



On voit ici que la somme des aires des rectangles est supérieure à l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, le point de coordonnées $(1; 0)$ et la droite d'équation $x = n$, ce qui se traduit par l'inégalité suivante :

$$\ln(n!) \geq \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t.$$



On voit ici que la somme des aires des rectangles est inférieure à l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, le point de coordonnées $(1 ; 0)$ et la droite d'équation $x = n$, ce qui se traduit par l'inégalité suivante :

$$\ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)\ \mathrm{d}t}$$

2 $L'(x) = \big(x\ln(x)\big)' - 1$

$$= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) .$$

Ainsi, $x \longmapsto x\ln(x) - x$ est bien une primitive de $x \longmapsto \ln(x)$.

3 De l'encadrement de la question **1** et du résultat obtenu à la question **2**, on déduit :

$$\frac{1}{\ln(n^n)} \int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\ln(n^n)} \int_1^{n+1} \ln(t)\ \mathrm{d}t.$$

Or,

$$\int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_1^n = n\ln(n) - n + 1$$

$$\int_1^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_1^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n$$

Donc :

$$\frac{n\ln(n) - n + 1}{n\ln(n)} \leqslant u_n \leqslant \frac{n\ln(n+1) + \ln(n+1) - n}{n\ln(n)}$$

$$1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\ln(n)}$$

Or :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 1}$$

Corrigé de l'exercice 7.23 page 278

1 Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $(\ln(x))^n \geqslant 0$ pour tout entier naturel n.

Ainsi, $\boxed{I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\ \mathrm{d}x \geqslant 0}$.

2 $I_{n+1} - I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^{n+1}\ \mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\ \mathrm{d}x$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left[(\ln(x))^{n+1} - (\ln(x))^n\right] \mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n(\ln(x) - 1)\ \mathrm{d}x .$$

Or, $1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \iff \ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(\mathrm{e})$

$$\iff 0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$$

$$\iff -1 \leqslant \ln(x) - 1 \leqslant 0$$

Ainsi, sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $(\ln(x))^n(\ln(x) - 1) \leqslant 0$ (car $(\ln(x))^n \geqslant 0$ sur cet intervalle), et donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

La suite (I_n) est donc décroissante.

3 Posons $u'(x) = \frac{1}{x}(\ln(x))^n$ et $v(x) = x$. Alors, $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ et par intégration par parties :

$$I_n = f(\mathrm{e}) - f(1) - \int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

avec $u(x) = \frac{(\ln(x))^{n+1}}{n+1}$, $v'(x) = 1$ et $f(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{n+1}x(\ln(x))^{n+1}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n+1} \times \mathrm{e} \times (\ln \mathrm{e})^{n+1} - \frac{1}{n+1} \times 1 \times (\ln 1)^{n+1} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{n+1}(\ln(x))^{n+1} \times 1\,\mathrm{d}x \\
I_n &= \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x \\
I_n &= \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant par $(n+1)$ chaque membre de cette dernière égalité, on obtient :

$$\boxed{(n+1)I_n + I_{n+1} = \mathrm{e}}$$

4 **a.** La relation de récurrence de la question précédente donne :

- pour $n = 0$: $I_0 + I_1 = \mathrm{e}$;
- pour $n = 1$: $2I_1 + I_2 = \mathrm{e}$.

Ainsi, $I_0 + I_1 = 2I_1 + I_2$, soit :

$$\boxed{I_0 - I_1 = I_2}$$

b. $$\begin{aligned}
I_0 &= \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^0\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x \\
&= \big[x\big]_1^{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

$\boxed{I_0 = \mathrm{e} - 1}$

c. $$\begin{aligned}
L'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\
&= \ln(x) + 1 - 1
\end{aligned}$$

$\boxed{L'(x) = \ln(x)}$

Donc L est bien une primitive de la fonction ln. On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= L(\mathrm{e}) - L(1) \\
&= \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} - 1\ln 1 + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 1}$$

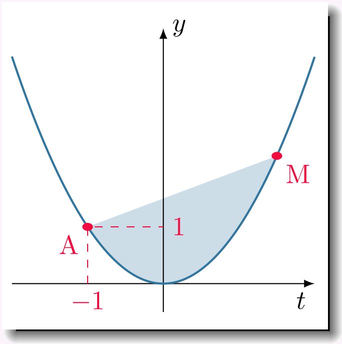
Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_2 &= I_0 - I_1 \\
&= \mathrm{e} - 1 - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_2 = \mathrm{e} - 2}$$

Corrigé de l'exercice 7.24 page 278

Avant tout, représentons le domaine en question :



$\mathrm{M}\big(x\,;x^2\big)$ et $\mathrm{A}(-1\,;1)$. La droite (AM) a pour équation $y = mt + p$ où :

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{x^2-1}{x+1}$$

et donc :

$$p = y_A - mx_A = 1 + \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{x^2+x}{x+1}.$$

Ainsi,

$$(\mathrm{AM}) \quad : \quad y = \frac{x^2-1}{x+1}t + \frac{x^2+x}{x+1}.$$

L'aire du domaine coloré est alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \int_{-1}^{x} \left(\frac{x^2-1}{x+1}t + \frac{x^2+x}{x+1} - t^2\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{x^2-1}{2(x+1)}t^2 + \frac{x^2+x}{x+1}t\right]_{-1}^{x}\\ &= \frac{1}{6}(x^3+3x^2+3x+1).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{A}(x) = 1 \iff x^3+3x^2+3x-5 = 0.$$

Posons :

$$f(x) = x^3+3x^2+3x-5.$$

Alors,

$$f'(x) = 3x^2+6x+3 = 3(x+1)^2 \geqslant 0.$$

f est donc croissante sur $\mathbb{R}$; comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation $f(x) = 0$.
À l'aide de la calculatrice (par exemple), on trouve : $x \approx 0,817$.

Ainsi, le domaine a une aire égale à 1 lorsque M a une abscisse d'à peu près 0,817.

Corrigé de l'exercice 7.25 page 278

1 La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^3}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur ce même intervalle, donc continue sur $[1\,;x]$, pour tout réel $x \geqslant 1$. Ainsi, ϕ est définie.

2 $$\frac{a}{t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1+t)^2}=\frac{a(1+t)^2+bt(1+t)+ct}{t(1+t)^2}$$
$$=\frac{a(t^2+2t+1)+bt+bt^2+ct}{t(1+t)^2}$$
$$=\frac{(a+b)t^2+(2a+b+c)t+a}{t(1+t)^2}.$$

Si l'on veut que cette dernière expression soit égale à $\frac{1}{t(1+t)^2}$, alors, on doit avoir :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Soit $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$ d'où :

$$\boxed{\frac{1}{t(1+t)^2}=\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}}$$

3 **a.** D'après ce qui précède, on a :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2}=\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}-\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}-\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$
$$=[\ln(t)]_1^x-[\ln(1+t)]_1^x-\left[-\frac{1}{1+t}\right]_1^x$$
$$=\ln(x)-\ln(x+1)+\ln 2+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}$$
$$=\boxed{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}+\ln 2-\frac{1}{2}}$$

b. $$\Phi'(t)=\frac{-\frac{1}{t}\times 2(t+1)^2+\ln(t)\times 4(t+1)}{4(t+1)^4}$$
$$=\frac{-2(t+1)^2+4(t+1)\ln(t)}{4t(t+1)^4}$$

$$\boxed{\Phi'(t)=\frac{\ln(t)}{(t+1)^3}-\frac{1}{2t(t+1)^2}}$$

On déduit alors :

$$\int_1^x \Phi'(t)\ \mathrm{d}t=\int_1^x \frac{\ln(t)}{(t+1)^3}\ \mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t(t+1)^2}\ \mathrm{d}t$$

$$\Phi(x)-\Phi(1)=\phi(x)-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}+\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{2x+2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\Phi(x)$$

$$\boxed{\phi(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{2x+2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{\ln(x)}{2(x+1)^2}}$$

c. On sait, par croissance comparée, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(1+x)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{x}{(x+1)^2} = 0$.

D'où, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{(x+1)^2} = 0}$.

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \phi(x) &= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{\ln(x)}{2(x+1)^2}\right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2x+2}\right)}_{=0} + \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.26 page 279

Partie A

1 P est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. Sa dérivée est :

$$P'(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

Le discriminant de $P'(x)$ est :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 24 = -20 < 0.$$

Donc $P'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que P est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

2 $P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{8} < 0$.
De plus, $P(1) = 2 > 0$.

Or, P est dérivable (donc continue) et strictement croissant sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;1\right[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;1\right[$.

3 D'après les questions précédentes, on peut dire :

- $P(X) < 0$ sur $]-\infty\,;\alpha[$.
- $P(X) > 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

1 f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Sa dérivée est :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \left[x\left((\ln(x))^2 + 1\right)\right] - 2\ln(x)\left[(\ln(x))^2 + 1 + x\left(2\frac{\ln(x)}{x}\right)\right]}{x^2\left((\ln(x))^2+1\right)^2} \\ &= \frac{2(\ln(x))^2 + 2 - 2(\ln(x))^3 - 2\ln(x) - 4(\ln(x))^2}{x^2\left((\ln(x))^2+1\right)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = -2\frac{(\ln(x))^3 + (\ln(x))^2 + \ln(x) - 1}{x^2\left((\ln(x))^2+1\right)^2}}$$

2 D'après la question précédente, nous pouvons dire que :

$$f'(x) = -2\frac{P(\ln(x))}{x^2\left((\ln(x))^2+1\right)^2}\ ,$$

où P est le polynôme défini dans la partie A. Donc $f'(x)$ est du signe contraire de $P(\ln(x))$.
Or, nous avons dit que $P(x) > 0$ pour $x > \alpha$. Ainsi, $P(\ln(x)) > 0$ pour $\ln(x) > \alpha$, soit $x > \mathrm{e}^{\alpha}$.
Ainsi, $\underline{f'(x) < 0 \text{ pour } x > \mathrm{e}^{\alpha}}$.

3 $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x\left((\ln(x))^2+1\right)} = \dfrac{2}{x\ln(x) + \frac{x}{\ln(x)}}$ pour $x \neq 1$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0^-$.
Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

4 Nous avons le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

5 On remarque que $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = (\ln(x))^2 + 1 > 0$ et donc $u'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$.
Ainsi, une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est $F(x) = \ln\left((\ln(x))^2+1\right)$. Donc :

$$I(t) = \int_1^t f(x)\ \mathrm{d}x = F(t) - F(1) = \ln\left((\ln(t))^2+1\right)$$

6 $I(t) = 1 \iff \ln\left((\ln(t))^2+1\right) = 1$

$\iff (\ln(t))^1 + 1 = \mathrm{e}$

$\iff (\ln(t))^2 = \mathrm{e} - 1.$

On a alors :

$$\ln(t) = \sqrt{\mathrm{e}-1} \qquad \text{ou} \qquad \ln(t) = -\sqrt{\mathrm{e}-1}\ ,$$

soit :

$$t = \mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{e}-1}} \qquad \text{ou} \qquad t = \mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{e}-1}}.$$

Or, par hypothèse, $t \geqslant 1$ donc $t \neq \mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{e}-1}}$.
Ainsi, $\underline{t = \mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{e}-1}} \approx 3,7}$.

Corrigé de l'exercice 7.27 page 280

1 Pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+\sin(x)}\\
&= \frac{1}{1+\sin(x)}\times\frac{1-\sin(x)}{1-\sin(x)}\\
&= \frac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)}\\
&= \frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}.}$$

2 **a.** Soit $U(x)=\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Alors,

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \frac{\big(\sin(x)\big)'\cos(x)-\sin(x)\big(\cos(x)\big)'}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}=g(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, $U(x)$ est bien une primitive de $u(x)$.

b. Une primitive de $h : x\mapsto \dfrac{-\sin(x)}{\cos^2(x)}$ est $H : x\mapsto -\dfrac{1}{\cos(x)}$ car :

$$h=\frac{u'}{u^2}\qquad\text{avec}\qquad u : x\mapsto\cos(x)\text{ et }u' : x\mapsto -\sin(x).$$

Ainsi, une primitive de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ est :

$$F(x)=U(x)-\frac{1}{\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\frac{1}{\cos(x)}$$

soit :

$$\boxed{F(x)=\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)}}$$

3 D'après ce qui a été écrit précédemment,

$$I(t)=F(t)-F(0)=\frac{\sin(t)-1}{\cos(t)}-\frac{\sin(0)-1}{\cos(0)}=\frac{\sin(t)-1}{\cos(t)}+1.$$

4 Écrivons :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(t)-1}{\cos(t)} &= \frac{\sin(t)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(t)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin(t)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t-\frac{\pi}{2}}\times\frac{t-\frac{\pi}{2}}{\cos(t)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Par définition du nombre dérivé,

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(t)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t-\frac{\pi}{2}}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t - \frac{\pi}{2}} \right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \text{ donc } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{t - \frac{\pi}{2}}{\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) = -1.$$

Ainsi, par produit,

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t) - 1}{\cos(t)} \right) = 0 \times (-1) = 0.$$

On en déduit alors que :

$$\boxed{I = 1}$$

Corrigé de l'exercice 7.28 page 280

1 $f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right) \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 3\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^x\right) = +\infty$ donc, par inverse, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$.

De plus, on sait d'après le cours (croissances comparées) que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

Ainsi, par produit et par somme,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 3\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x} \right) = 0}$$

2 **a.** $f = u \times v$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 2$; $u'(x) = 2x + 3$
$v(x) = \mathrm{e}^{-x}$; $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

Donc, pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= (2x+3)\,\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2 + 3x + 2\right)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \left(2x + 3 - x^2 - 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}}$$

b. $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré $-x^2 - x + 1$, dont le discriminant est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 1 + 4 = 5 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Le coefficient dominant est négatif ; on en déduit donc :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

3 $0 \in \left]x_1 \,;\, x_2\right[$ et $f(x) = 2$ donc d'après les variations de la fonction f, $f(x) > 0$ (en effet, elle est croissante à partir de $x = 0$ puis décroissante de limite 0).

4 La fonction f est positive sur l'intervalle $]0\,;+\infty]$, et donc sur $[0\,;\alpha]$.
L'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$ est donc égale à $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha)&=\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\Big[F(x)\Big]_0^\alpha\\&=F(\alpha)-F(0)\\&=\left(-\alpha^2-5\alpha-7\right)\mathrm{e}^{-\alpha}+7.\end{aligned}$$

L'aire cherchée est égale à $\left(-\alpha^2-5\alpha-7\right)\mathrm{e}^{-\alpha}+7$ unités d'aire.

Corrigé de l'exercice 7.29 page 281

Partie A

1 **a.** $f_n=u\times v$ avec : $u(x)=x^n$; $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$
$u'(x)=nx^{n-1}$; $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

Ainsi, sur $[0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}f_n'(x)&=(u'v+v'u)(x)\\&=nx^{n-1}\times\mathrm{e}^{-x}+x^n\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)=\left(nx^{n-1}-x^n\right)\mathrm{e}^{-x}\\&=\left(n\times x^{n-1}-x\times x^{n-1}\right)\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

$$\boxed{f_n'(x)=(n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}$$

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall\, x\in[0\,;+\infty[,\quad \mathrm{e}^{-x}>0.$$

Sur $[0\,;+\infty[$, $x^{n-1}\geqslant 0$.
Ainsi, $f_n'(x)$ est du signe de $(n-x)$.

$$n-x>0\iff n>x,$$

donc $f_n'(x)>0$ sur $[0\,;n[$, et donc, sur cet intervalle, f_n est strictement croissante. Il en découle que f_n est strictement décroissante sur $]n\,;+\infty[$.
De plus,

- $f_n(0)=0^n\times\mathrm{e}^{-0}=0$.
- $f_n(n)=n^n\times\mathrm{e}^{-n}=n^n\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}=\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
- $f_n(x)=\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$ et, d'après le cours (croissances comparées), $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}\right)=0$ pour tout entier naturel n non nul.

2 Pour n entier naturel non nul,

$$f_n(1)=1^n\times\mathrm{e}^{-1}=1\times\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

Le point de coordonnées $\left(1\,;\mathrm{e}^{-1}\right)$ appartient donc à la courbe $\mathcal{C}_n$.

Partie B

1 **a.** La fonction f_0 est à valeurs positives sur $[0;1]$, donc I_0 correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_0$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x=0$ et $x=1$.

b. I_n représente l'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. Cette surface semble décroître à mesure que n augmente jusqu'à disparaître.

On conjecture alors que la limite de I_n est nulle.

2
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= \left(-\mathrm{e}^{-1}\right)-\left(-\mathrm{e}^{-0}\right) \\ &= -\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{0} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = 1-\mathrm{e}^{-1}}$$

3 **a.** Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} x\in[0\,;1] &\iff 0\leqslant x\leqslant 1 \\ &\iff 0\times x^n\leqslant x\times x^n\leqslant 1\times x^n, \qquad \text{car } x^n\geqslant 0 \\ &\iff \boxed{0\leqslant x^{n+1}\leqslant x^n} \end{aligned}$$

b. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} n\in\mathbb{N},\ x\in[0\,;1] &\iff 0\leqslant x^{n+1}\leqslant x^n \\ &\iff 0\leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^n\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{car } \mathrm{e}^{-x}>0 \\ &\iff 0\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x) \\ &\iff \int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &\iff \boxed{0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n} \end{aligned}$$

4 D'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

- $0\leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est minorée par 0 ;
- $I_{n+1}\leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est décroissante.

La suite est donc décroissante et minorée (par 0). D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est donc convergente, vers une limite ℓ supérieure ou égale à 0.

5 Soit n un entier naturel n.

On pose : $u(x)=x^{n+1}$; $u'(x)=(n+1)x^n$

$v(x)=-\mathrm{e}^{-x}$; $v'(x)=\mathrm{e}^{-x}$

Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 u(x)\times v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x)\times v(x)\Big]_0^1-\int_0^1 u'(x)\times v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x^{n+1}\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(-1^{n+1}\times\mathrm{e}^{-1}\right)-\left(-0^{n+1}\times\mathrm{e}^{-0}\right)+(n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité)} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_{n+1}=(n+1)I_n-\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

6 **a.** Supposons que la limite ℓ est strictement supérieure à zéro.
Alors, par limite du produit, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n = +\infty.$$

Puis, par limite de la somme :

$$\lim_{n\to+\infty}\left((n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = +\infty.$$

Or, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On en déduit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty}(I_{n+1}) = +\infty,$$

La suite (I_n) est donc divergente de limite $+\infty$, ce qui est contradictoire avec le résultat trouvé précédemment (question 4) qui stipule que (I_n) converge.

b. Nous avons démontré (question 4) que la limite de (I_n) est un nombre $\ell \geqslant 0$. Ensuite, nous avons supposé que $\ell \neq 0$ (questions 6.a.), ce qui nous menait à une contradiction.
Ce raisonnement (par l'absurde) montre alors que $\ell = 0$.

7 Que fait `mystere(100)` ?
Quand on entre dans la fonction, on stocke dans la variable `I` la valeur de I_0, et on initialise la variable `L` comme une liste contenant I_0.
Ensuite, on exécute la boucle itérative « `for i in range(100)` » : la variable `i` va prendre les valeurs entières 0, 1, 2, ... jusqu'à $100 - 1 = 99$.
On va donc exécuter 100 fois les instructions contenues dans cette boucle :

- dans un premier temps, on calcule le terme suivant de la suite (I_n). Lors de la première exécution ($i = 0$), on a : `I = (0+1)*I - 1/e` qui signifie que le nouveau terme est égal à 1 fois l'ancien terme (celui déjà stocké dans `I`) auquel on enlève $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Cela se traduit mathématiquement par : $I_1 = I_0 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$(relation de récurrence obtenue à la question 5) ;
- on ajoute ensuite la valeur trouvée à la liste `L`. Ainsi, lors de la première exécution, `L` contient I_0 et I_1.

La dernière valeur de `i` étant « 99 », la dernière valeur de `I` sera I_{100} (car pour $i = 0$, on a calculé I_1, pour $i = 1$, on calcule I_2, ...).

L'appel de `mystère(100)` renvoie donc la liste des 101 premiers termes de la suite (de I_0 à I_{100}).

Remarque 53

Si on a la curiosité de voir ce que fait réellement ce programme, on obtient :

```
>>> mystere(20)
[0.6321205588285577, 0.26424111765711533, 0.16060279414278833, 0.11392894125692266,
 0.08783632385624829, 0.07130217810979911, 0.059933627487352314, 0.05165595124002387,
 0.045368168748748605, 0.04043407756729511, 0.03646133450150879, 0.033195238345154365,
 0.03046341897041005, 0.028145005443888316, 0.026150635042994086, 0.024380084473468955,
 0.022201910404060943, 0.009553035697593693, -0.19592479861475587, -4.090450614851804,
 -82.17689173820752]
```

Les dernières valeurs sont *négatives* (donc incohérentes dans le cadre de notre exercice).
Cela s'explique par le fait que la représentation des nombres réels en informatique (comme le nombre e) n'est pas parfaite et les erreurs d'approximation s'accumulent jusqu'à donner des résultats totalement faux.

8

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Dans ce chapitre

1 Droites dans l'espace

1 Caractérisation

Propriété 48

Toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace est définie par un point A et un vecteur $\vec{u}$.
On dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite.
$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

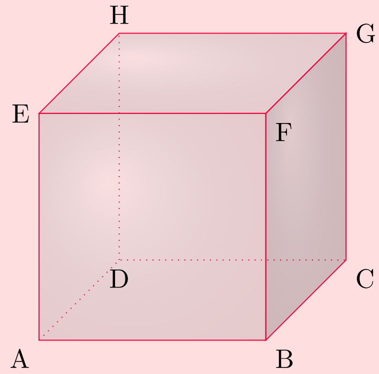
2 Droites parallèles

Définition 27

- Deux vecteurs de l'espace sont dits *colinéaires* s'ils ont la même direction.
- Deux droites de l'espace sont dites *parallèles* si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Attention 14

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas nécessairement parallèles.



Dans le cube ci-dessus par exemple, les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles bien qu'elles ne se coupent pas.

2 Plans dans l'espace

1 Combinaison linéaire de deux vecteurs

Définition 28 (combinaison linéaire de vecteurs)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{w}$ est une *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

2 Caractérisation d'un plan dans l'espace

Propriété 49

Tout plan de l'espace est défini par un point A et un couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}, \vec{v})$.
On dit que le plan est dirigé par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque 54

Pour tout point M du plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 29

Soit un plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

- $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé une *base* du plan.
- $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé un *repère* du plan.

3 Plans parallèles

Définition 30

Soient deux plans de l'espace $\mathcal{P}_1$, dirigé par $(\vec{u_1}, \vec{v_1})$, et $\mathcal{P}_2$, dirigé par $(\vec{u_2}, \vec{v_2})$.

$$\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont parallèles} \iff \vec{u_2} \text{ et } \vec{v_2} \text{ sont deux combinaisons linéaires de } \vec{u}_1 \text{ et } \vec{v}_1.$$

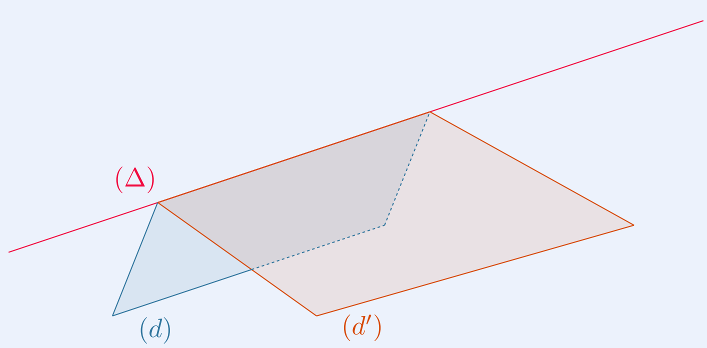
Propriété 50

Soient deux plans parallèles de l'espace $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Si $\mathcal{P}$ est un plan coupant $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ alors l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ est une droite parallèle à l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$.

4 Plans sécants

Théorème 13 (du toit)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans.
Soient $(d) \subset \mathcal{P}$ et $(d') \subset \mathcal{P}'$ telles que $(d)//(d')$.
Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite (Δ) alors $(\Delta)//(d)$ et $(\Delta)//(d')$.



3 Coplanarité et repère de l'espace

1 Coplanarité

Définition 31 (vecteurs coplanaires)

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non deux à deux colinéaires sont dits *coplanaires* si l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

Remarque 55

Si deux des trois vecteurs sont colinéaires alors les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires.

Définition 32 (droites et points coplanaires)

Deux droites sont dites *coplanaires* si elles appartiennent à un même plan.
Trois points sont dits *coplanaires* s'ils appartiennent au même plan.

Propriété 51

Deux droites parallèles sont nécessairement coplanaires.
Deux droites sécantes sont nécessairement coplanaires.

2 Repère de l'espace

Propriété 52

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace il existe un triplet unique de réels $(a\ ;b\ ;c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Définition 33

Un repère de l'espace est défini par un point A et un triplet de 3 vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Propriété 53

Dans le repère $(A\ ;\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels $(x\ ;y\ ;z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Définition 34 (coordonnées d'un point et d'un vecteur de l'espace)

Dans le repère $(A\ ;\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ alors $(x; y; z)$ constitue les coordonnées du point M, mais aussi du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans ce repère.

Les calculs sur les coordonnées dans l'espace se font comme les calculs sur les coordonnées dans le plan.

4 Représentations paramétriques de droites

L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A\ ;y_A\ ;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(a\ ;b\ ;c)$.

Théorème 14

$$M(x;y;z)\in\mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

C'est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Attention 15

Cette représentation paramétrique n'est pas unique et dépend du vecteur directeur et du point choisi sur la droite !

Exemple 58

La droite caractérisée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-t \\ z = 5+7t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

passe par le point $A(-1;2;5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}$.

Remarque 56 (point d'intersection de deux droites)

Les deux droites (d) et (d'), qui ont pour représentations paramétriques respectives celles données ci-dessous, sont-elles sécantes ?

$$(d) : \begin{cases} x = -1+t \\ y = 6+2t \\ z = -2-4t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad ; \quad (d') : \begin{cases} x = 4-3t' \\ y = 16-5t' \\ z = -22+t' \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}$$

Notons I l'éventuel point d'intersection de ces droites. Alors,

$$\exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x_I = -1+t \\ y_I = 6+2t \\ z_I = -2-4t \end{cases} \quad \text{et} \quad \exists t'\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x_I = 4-3t' \\ y_I = 16-5t' \\ z_I = -22+t' \end{cases}.$$

Il faut donc voir si le système $\begin{cases} -1+t = 4-3t' \\ 6+2t = 16-5t' \\ -2-4t = -22+t' \end{cases}$ admet une solution.

Pour le savoir, il faut prendre uniquement deux équations sur les trois :

$$\begin{cases} -1+t = 4-3t' \\ 6+2t = 16-5t' \end{cases} \iff \begin{cases} t+3t' = 5 \\ 2t+5t' = 10 \end{cases}$$

et résoudre le système ; on trouve ici : $t=5$ et $t'=0$.

On doit ensuite vérifier que la troisième équation est vérifiée pour ces valeurs :

$$-2-4t = -22+t' \iff -2-4\times 5 = -22+0 \iff -22=-22.$$

C'est donc ici le cas. Par conséquent, les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est obtenu par exemple en prenant $t'=0$ dans la représentation paramétrique de (d') : il s'agit du point de coordonnées $(4;16;-22)$.

8 Exercices types

Exercice type 31 ▶ montrer qu'un point appartient à un plan

Soit $ABCD$ un tétraèdre quelconque.
On considère le point M défini par l'égalité vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}.$$

Montrer que M appartient au plan (ABC).

Methode 8

Pour montrer qu'un point M appartient à un plan (ABC), on peut montrer que $\overrightarrow{AM}$ (ou $\overrightarrow{BM}$, ou $\overrightarrow{CM}$) est une *combinaison linéaire* de deux vecteurs *non colinéaires* de ce plan (par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).

Le point M étant défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$, nous allons montrer que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).
Pour cela, nous allons utiliser la *relation de Chasles* (très utilisée en géométrie dans l'espace).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\\
&= 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) + \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\right)\\
&\text{(l'idée est de passer par le point } A \text{ pour ne faire apparaître que des vecteurs } \overrightarrow{AM})\\
\overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AM}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\\
\iff\ &-\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\\
\iff\ &\boxed{\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AM}$ étant une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), M appartient à (ABC).

Remarque 57

Montrer que trois vecteurs sont coplanaires repose sur la même méthode.

Exercice type 32 ▶ trouver une représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, on considère les points $A\,(-1\,;2\,;-3)$ et $B\,(4\,;-1\,;2)$
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

On détermine avant tout les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix}$.

D'après le cours, une représentation paramétrique de (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = x_A + tx_{\overrightarrow{AB}}\\ y = y_A + ty_{\overrightarrow{AB}}\\ z = z_A + tz_{\overrightarrow{AB}}\end{cases},\quad t\in\mathbb{R} \iff \boxed{\begin{cases} x = -1+5t\\ y = 2-3t\\ z = -3+5t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.}$$

Exercice type 33 ▶ position relative de deux droites

On considère les droites (d) et (Δ) de représentations paramétriques suivantes :

$$(d)\ :\ \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (\Delta)\ :\ \begin{cases} x = 2 - k \\ y = -1 + 3k \\ z = -6 + k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la position relative des droites (d) et (Δ).

Methode 9

Déterminer la position relative de deux droites revient à voir si elles sont parallèles, sécantes ou ni parallèles ni sécantes.

- (d) et (Δ) sont-elles parallèles ?

  Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (coefficients du paramètre t).

  Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (coefficients du paramètre k).

  Afin de voir si les droites sont parallèles, on doit voir si les vecteurs directeurs sont colinéaires. On peut alors regarder le rapport de deux des coordonnées :

  $$\frac{-3}{-1} \neq \frac{2}{3}.$$

  Le rapport des abscisses étant différent de celui des ordonnées, les vecteurs ne sont pas colinéaires.

  Remarque 58

  Si ces rapports avaient été égaux, il aurait fallu calculer celui des cotes (des z).
  Si tous les rapports sont égaux, les vecteurs sont colinéaires.

  Conclusion : (d) et (Δ) ne sont pas parallèles.

- (d) et (Δ) sont-elles sécantes ?
  Pour le vérifier, on cherche s'il existe deux paramètres t et k tels que :

  $$\begin{cases} 5 - 3t = 2 - k \\ 4 + 2t = -1 + 3k \\ -1 - t = -6 + k \end{cases} \iff \begin{cases} k - 3t = -3 & (L_1) \\ -3k + 2t = -5 & (L_2) \\ -k - t = -5 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} k - 3t = -3 & (L_1) \\ -3k + 2t = -5 & (L_2) \\ -4t = -8 & (L_3) \leftarrow (L_1) + (L_3) \end{cases}$$

  $$\iff \begin{cases} (L_3) \iff t = 2 \\ (L_1) \iff k = -3 + 3t = -3 + 6 = 3 \end{cases}$$

  Il existe donc bien deux paramètres ($t = 2$ et $k = 3$) qui donnent les mêmes coordonnées.
  Ainsi, (d) et (Δ) sont sécantes.

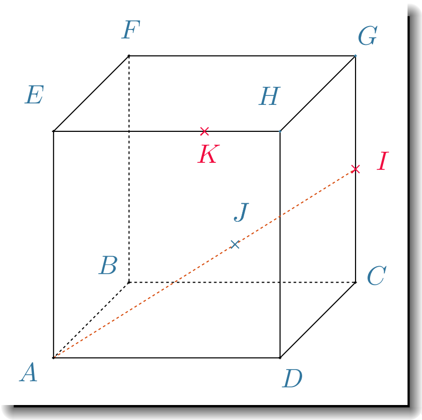
  Pour trouver les coordonnées de ce point d'intersection, il suffit de remplacer t par 2 dans la représentation paramétrique de (d) (ou k par 3 dans celle de (Δ)).
  On trouve :

  $$\begin{cases} x = 5 - 3 \times 2 = 5 - 6 = -1 \\ y = 4 + 2 \times 2 = 4 + 4 = 8 \\ z = -1 - 2 = -3 \end{cases} \implies \text{Le point d'intersection a pour coordonnées } (-1\,;8\,;-3).$$

8 Exercices

Vecteurs, droites et plans

Exercice 8.1 (combinaison linéaire de vecteurs)



On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

Soit I le milieu de [GC], soit J le point défini par :

$$\overrightarrow{AJ} = x\overrightarrow{AI} \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

et soit K le point défini par :

$$\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}.$$

1 Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2 Exprimer $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

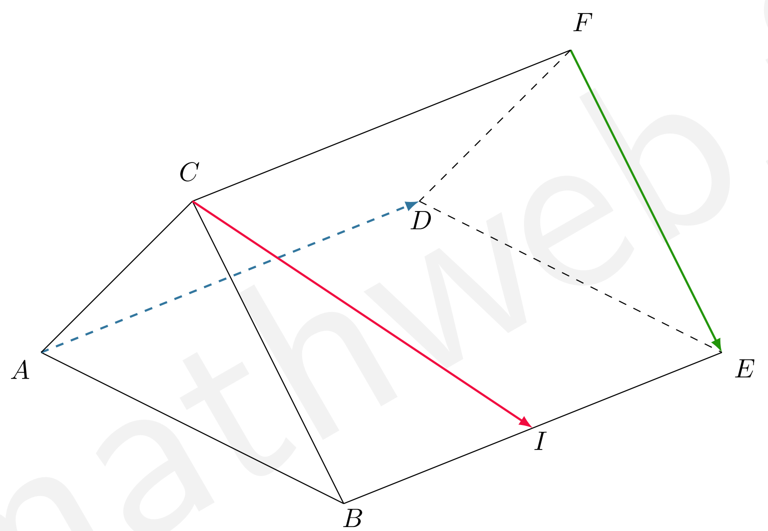
3 Exprimer $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

4 Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Solution page 324

Exercice 8.2

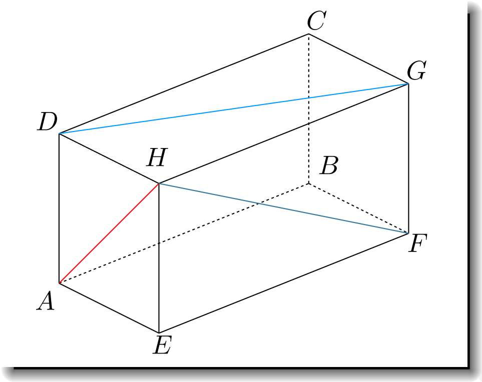
On considère un prisme $ABCDEF$. Soit I le milieu de $[BE]$.



Montrer que $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Solution page 324

Exercice 8.3 (parallélisme)



$ABCDEFGH$ est un pavé droit.

Démontrer que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.

Solution page 325

Exercice 8.4 (vecteurs coplanaires)

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On définit le point E par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}.$$

Montrer que $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Solution page 325

Représentations paramétriques de droites

Exercice 8.5 (représentations paramétriques de droites)

Dans chacune des questions suivantes, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1 $A(0;2;-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ **2** $A(-3;1;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ **3** $A(2;-3;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

Solution page 325

Exercice 8.6 (droites confondues)

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) \quad : \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}t \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \qquad (\mathcal{D}_2) \quad : \quad \begin{cases} x = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}t' \\ y = t' \\ z = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont confondues.

Solution page 326

Exercice 8.7 (droites sécantes)

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) \quad : \quad \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 7 + 4t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\mathcal{D}_2) \quad : \quad \begin{cases} x = -8 - 3t' \\ y = 5 + t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont sécantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection.

Solution page 326

Exercice 8.8 (position relative de deux droites)

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

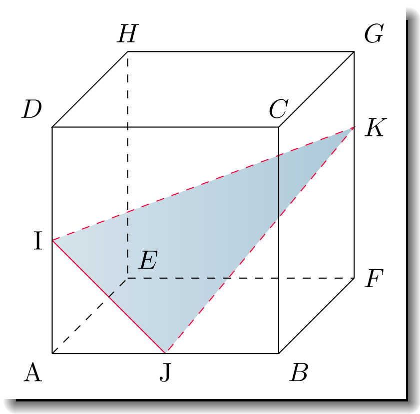
$$(\mathcal{D}_1) \quad : \quad \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\mathcal{D}_2) \quad : \quad \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -4 - 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}\,.$$

Sont-elles parallèles ? Sont-elles sécantes ?

Solution page 327

Exercice 8.9 (base)

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AB]$.
On définit les points K et L par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF} \qquad ; \qquad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$$

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ forment une base du plan (IJK).
2. Montrer que $\overrightarrow{IL}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
   Interpréter ce résultat.
3. Le milieu de $[AG]$ appartient-il au plan (IJK) ? Justifier.

Solution page 327

Exercice 8.10 (dans un tétraèdre)

$ABCD$ est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CD]$.
E et F sont deux points définis par les égalités :

$$-2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0} \qquad ; \qquad -2\overrightarrow{FA}+3\overrightarrow{FC}=\vec{0}.$$

1 Démontrer que les points E, F, I, J sont coplanaires.

2 La droite (AD) coupe le plan (EFI) en K.

a. Démontrer que les points E, I, K sont alignés et que les points F, J, K le sont aussi.

b. Démontrer que $\overrightarrow{AK}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.

Solution page 328

8 Corrigés

Corrigé de l'exercice 8.1 page 320

1 $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI}$ (relation de Chasles)

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}$$

2 $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ}$ (relation de Chasles)

$$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AI}$$

$$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{CJ} = (x-1)\overrightarrow{AB} + (x-1)\overrightarrow{AD} + \frac{x}{2}\overrightarrow{AE}}$$

3 $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AJ}$ (relation de Chasles)

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + x\overrightarrow{AI}$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + x\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{KJ} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AB} + \left(\frac{x}{2} - 1\right)\overrightarrow{AE}}$$

4 $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HK}$

$$\boxed{\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$$

Remarque 60

Il n'y a pas qu'une seule façon d'utiliser la relation de Chasles pour décomposer un vecteur. Selon le « chemin » que l'on emprunte, le raisonnement peut être plus ou moins long.

Corrigé de l'exercice 8.2 page 320

Nous allons exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AD}$ comme des combinaisons linéaires de mêmes vecteurs.

- $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.
- $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB}$.
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$.

On remarque alors que :

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

$\overrightarrow{CI}$ étant une combinaison linéaire de $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AD}$, et que ces deux derniers ne sont pas colinéaires, on peut en déduire que $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Corrigé de l'exercice 8.3 page 321

Montrons que les deux plans sont dirigés par le même couple de vecteurs.
D'après la relation de Chasles :

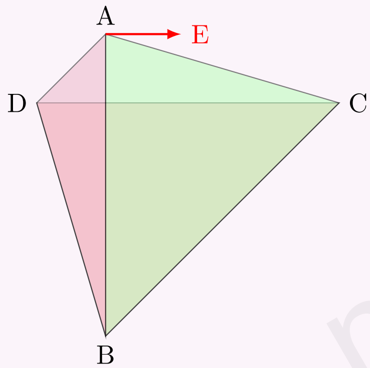
$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}.$$

$ABCDEFGH$ est un pavé droit donc $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$, et finalement :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}.$$

On montre de même que $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$.
Par leur position sur le pavé, les points A, H et F ne sont pas alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (AHF). De même, les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$ dirigent le plan (BDG). Les deux plans étant dirigés par le même couple de vecteurs, ces plans sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 8.4 page 321



$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} - 4\overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{EC} - 3\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AD}$ est donc une combinaison linéaire de $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AE}$, qui ne sont pas colinéaires, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

Corrigé de l'exercice 8.5 page 321

Nous savons qu'une représentation paramétrique de droite passant par le point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + at\\ y = y_A + bt\\ z = z_A + ct\end{cases},t\in\mathbb{R}$$

On a alors :

1 $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -t\\ y = 2 + 2t\\ z = -1 - t\end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$

2 $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -3\\ y = 1 - 2t\\ z = 5 + 3t\end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$

3 $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 2 + t\\ y = -3 + 2t\\ z = 4 - 3t\end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$

Corrigé de l'exercice 8.6 page 321

D'après leurs représentations paramétriques,

- $(\mathcal{D}_1)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3/2\\5/4\\1\end{pmatrix}$,
- $(\mathcal{D}_2)$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}6/5\\1\\4/5\end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{v} = \dfrac{4}{5}\vec{u}$ donc les vecteurs sont colinéaires, ce qui signifie que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont parallèles.
De plus, le point $A\left(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{4}\,;0\right) \in (\mathcal{D}_1)$.
Vérifions que $A \in (\mathcal{D}_2)$.
Pour cela, vérifions que ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de $(\mathcal{D}_2)$:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}t' \\ -\frac{1}{4} = t' \\ 0 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t' \end{cases} \quad \Rightarrow t' = -\frac{1}{4}.$$

On trouve une valeur de t' et une seule ; par conséquent, $A \in (\mathcal{D}_2)$, ce qui signifie alors que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont confondues.

Corrigé de l'exercice 8.7 page 322

Utilisons la méthode du cours pour montrer que les droites sont sécantes. Montrons que le système :

$$\begin{cases} -2 + 3t = -8 - 3t' \\ 1 - 2t = 5 + t' \\ 7 + 4t = -1 + 2t' \end{cases}$$

admet une unique solution. Pour cela, considérons le système formé uniquement des deux premières équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2 + 3t = -8 - 3t' \\ 1 - 2t = 5 + t' \end{cases} &\iff \begin{cases} 3t + 3t' = -6 \\ -2t - t' = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t + t' = -2 \\ t' = -2t - 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t - 2t - 4 = -2 \\ t' = -2t - 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = -2 \\ t' = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La troisième équation donne alors :

$$7 + 4t = -1 + 2t' \iff 7 + 4 \times (-2) = -1 + 2 \times 0 \iff -1 = -1.$$

Cette dernière égalité étant vraie, $t = -2$ et $t' = 0$ sont les solutions du système. Les deux droites sont alors sécantes et leur point d'intersection est obtenu en replaçant par exemple t' par 0 dans la représentation paramétrique de $(\mathcal{D}_2)$: $I\,(-8\,;5\,;-1)$.

Corrigé de l'exercice 8.8 page 322

- *Les droites sont-elles parallèles ?*
  Pour le savoir, il faut regarder si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
  Le vecteur directeur de $(\mathcal{D}_1)$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\1\\-3\end{pmatrix}$ et celui de $(\mathcal{D}_2)$ est $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.
$$\frac{-5}{1} \neq \frac{1}{-2}$$
  donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

- *Les droites sont-elles sécantes ?*
  Pour le savoir, nous devons résoudre le système :
$$\begin{cases} 2-5t = 5+t' \\ -1+t = -4-2t' \\ 4-3t = 1+t' \end{cases}$$
  Si on ne considère que les deux premières équations, on a :
$$\begin{cases} 2-5t = 5+t' \\ -1+t = -4-2t' \end{cases} \iff \begin{cases} 5t+t' = -3 \\ t+2t' = -3 \end{cases}$$
$$\iff t = -\frac{1}{3}, \quad t' = -\frac{4}{3}.$$
  La troisième équation donne alors :
$$4-3t = 1+t' \iff 4+1 = 1-\frac{4}{3} \iff 5 = -\frac{1}{3}.$$
  Cette dernière égalité étant fausse, le système n'admet aucune solution et donc les droites ne sont pas sécantes.

Corrigé de l'exercice 8.9 page 322

1 I et J sont sur le plan (ABC) alors que K n'y est pas. Ainsi, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une base du plan passant par ces trois points, le plan (IJK).

2 Une façon de faire est d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ (par exemple).

- $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$

Si $\overrightarrow{IL}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ alors :
$$\begin{aligned}
& \exists\,(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}, \quad \overrightarrow{IL} = \lambda\overrightarrow{IJ} + \mu\overrightarrow{IK} \\
\iff & \exists\,(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \lambda\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) + \mu\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \\
\iff & \exists\,(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2}\lambda+\mu\right)\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AE} + \left(-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\mu\right)\overrightarrow{AD} \\
\iff & \exists\,(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}, \quad \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lambda + \mu \\ 1 = \mu \\ \dfrac{3}{4} = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\mu \end{cases}
\end{aligned}$$
(les coefficients des vecteurs doivent être égaux un à un)

On trouve alors $\mu = 1$ et par suite, $\lambda = -1$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{IL} = -\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}}$$

$\overrightarrow{IL}$ est donc bien une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
On peut alors conclure que le point L est sur le plan (IJK).

3 Notons M le milieu de $[AG]$. Regardons s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{IM} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK} \\ \iff & \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = a\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) + b\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \\ \iff & \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b \\ \frac{1}{2} = b \\ 0 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b \end{cases} \\ \iff & b = \frac{1}{2},\ a = 0,\ 0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

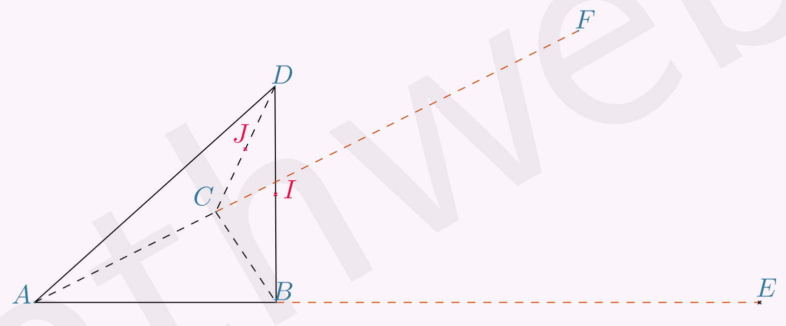
$\overrightarrow{IM}$ n'est donc pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, donc $M \notin (IJK)$.

Corrigé de l'exercice 8.10 page 323

Avant tout, un schéma peut aider. Pour cela, il faudra savoir comment construire les points E et F :

$$\begin{aligned} -2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0} &\iff -2\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA}\right) + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{BA} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} \\ -2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FC} = \vec{0} &\iff -2\left(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CA}\right) + 3\overrightarrow{FC} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{FC} - 2\overrightarrow{CA} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

On a alors la figure suivante.



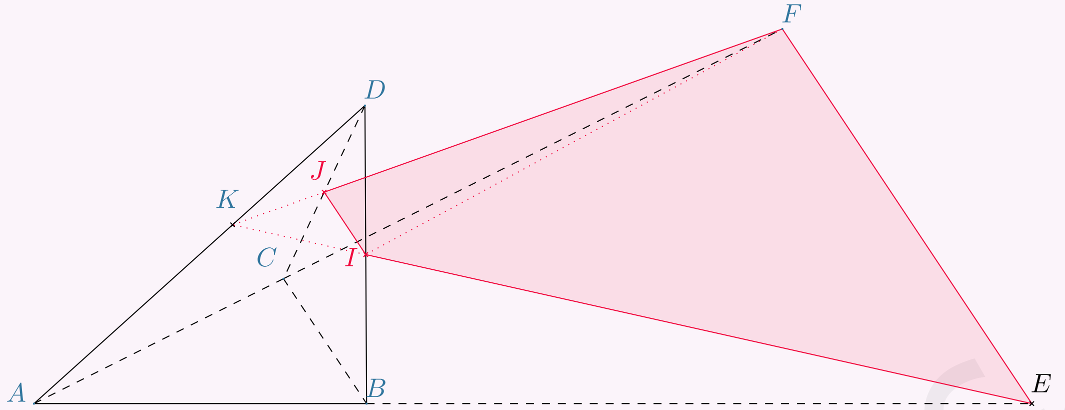
1 Des égalités vectorielles précédentes, on peut conclure :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} \\ &= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \\ &= 3\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Donc $(EF) \mathbin{//} (BC)$.

Or, $(BC) \mathbin{//} (IJ)$ donc $(IJ) \mathbin{//} (EF)$.
Les quatre points I, J, B et C sont donc coplanaires.

2 **a.** Complétons la figure :



D'après la question précédente, E, F, I et J sont coplanaires donc $J \in (EFI)$. La droite (FJ) est donc contenue dans le plan (EFI).

Or, (FJ) est incluse dans le plan (ACD) ; ainsi, son intersection avec (AD) – le point K – l'est aussi. Les points F, J et K sont donc alignés.

De même, E, I et K sont alignés.

b. Plaçons-nous dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$, où :

$$B(1;0;0) \quad ; \quad D(0;0;1) \quad ; \quad C(0;1;0) \quad ; \quad E(3;0;0) \quad ; \quad F(0;3;0)$$

$$I\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}; \frac{z_B + z_D}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad J\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

- **La droite (JF).**

  Un vecteur directeur est $\overrightarrow{JF}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-1/2 \\ 0-1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

  Une représentation paramétrique est donc :

$$(JF) \quad : \quad \begin{cases} x = 0 + t \times 0 \\ y = 3 + \frac{5}{2}t \\ z = 0 - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

  soit :

$$(JF) \quad : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + \frac{5}{2}t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

- **La droite (EI).**

  Un coefficient directeur est $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} 3-1/2 \\ 0-0 \\ 0-1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

  Une représentation paramétrique est donc :

$$(EI) \quad : \quad \begin{cases} x = 3 + \frac{5}{2}t' \\ y = 0 + t' \times 0 \\ z = 0 - \frac{1}{2}t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}$$

  soit :

$$(EI) \quad : \quad \begin{cases} x = 3 + \frac{5}{2}t' \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}t' \end{cases} \quad , \quad t' \in \mathbb{R}$$

$K \in (EI)$ et $K \in (JF)$ donc :

$$\begin{cases} x_K = 0 = 3 + \frac{5}{2}t' \\ y_K = 3 + \frac{5}{2}t = 0 \\ z_K = -\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}t' \end{cases} \iff t' = -\frac{6}{5} = t$$

On en déduit alors les coordonnées de K en utilisant par exemple la représentation paramétrique de (EI) :

$$K\left(0; 0; \frac{3}{5}\right).$$

Ce qui signifie que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.

9

Orthogonalité et distances dans l'espace

Dans ce chapitre

1 Produit scalaire dans l'espace

1 Définition

Le produit scalaire a été défini en classe de 1^{re} dans le plan.
Sa définition ainsi que les propriétés restent inchangées dans l'espace.

Définition 35

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).$$

2 Propriétés algébriques

Propriété 54 (projeté orthogonal)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Soient A, B et C trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Alors,

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ si $0 \leqslant \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$ si $\dfrac{\pi}{2} < \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \leqslant \pi$.

Propriété 55 (symétrie, distributivité, bilinéarité et identités remarquables)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, et pour tous réels λ et μ

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (propriété de symétrie)
- $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité)
- $\left(\lambda\vec{u}\right) \cdot \left(\mu\vec{v}\right) = \lambda\mu\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$ (bilinéarité)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Propriété 56 (formules de polarisation)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

Propriété 57 (formule analytique du produit scalaire)

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,, \vec{k}\right)$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Exemple 59 (produit scalaire)

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1\times 3 + 2\times 5 + 1\times(-7) = -3 + 10 - 7 = 0.$$

2 Orthogonalité dans l'espace

1 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition 36

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Dans l'exemple 59 précédent, les vecteurs sont orthogonaux.

2 Orthogonalité de deux droites

Définition 37

Soient (d), dont un vecteur directeur est $\vec{u}$, et (d'), dont un vecteur directeur est $\vec{v}$, deux droites de l'espace.
On dit que les droites sont *orthogonales* si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Propriété 58

- Deux droites (d) et (d') de l'espace sont orthogonales si et seulement s'il existe une droite (Δ) parallèle à (d) et perpendiculaire à (d').
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

3 Orthogonalité d'un plan et d'une droite

Définition 38

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et soit (d) une droite de l'espace, de vecteur directeur $\vec{n}$.
On dira que (d) est *orthogonale* à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{u} = \vec{n}\cdot\vec{v} = 0$.

Propriété 59

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Définition 39 (vecteur normal)

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace.
On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si, pour tout vecteur $\vec{p}$ de $\mathcal{P}$, $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$.

4 Orthogonalité de deux plans

Définition 40

Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace.
On dit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont orthogonaux si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Propriété 60

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.

Propriété 61

Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$.

$$\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0.$$

Remarque 61

Cette dernière propriété sera très utilisée pour démontrer l'orthogonalité de deux plans.

3 Équations cartésiennes d'un plan

1 Définition

Propriété 62

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,, \vec{k}\right)$.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace, il existe un réel d tel que :

$$M \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0, \quad \text{où } d \in \mathbb{R}.$$

Définition 41

« $ax + by + cz + d = 0$ » est appelée une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2 Distance d'un point à un plan

Définition 42 (projeté orthogonal d'un point sur un plan)

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soit A un point de l'espace.
Le *projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$* est l'unique point H de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$.

Propriété 63

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soient A un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.

$$\forall M \in \mathcal{P}, \qquad AM \geqslant AH.$$

Définition 43 (distance d'un point à un plan)

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soient A un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.
AH est appelée la *distance de A à $\mathcal{P}$*, et on peut noter :

$$\mathrm{d}\big(A;\mathcal{P}\big) = AH.$$

3 Intersection d'une droite et d'un plan

Methode 10

On considère :

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $5x + y - z + 3 = 0$;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $\mathrm{A}(0\,;1\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

On souhaite trouver les coordonnées du point d'intersection I de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

1 On vérifie d'abord que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un point.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$; donc,

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 5\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 3 = 2 \neq 0$$

$\mathcal{D}$ n'est donc pas parallèle à $\mathcal{P}$: il y a donc un point unique d'intersection.

2 Déterminons les coordonnées de I.

La représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Étant donné que I appartient à $\mathcal{D}$, il existe un réel k tel que I a pour coordonnées $(k\,;1\,;3k+3)$.
En substituant les valeurs de x, y et z en fonction de k dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on a :

$$5k + 1 - (3 + 3k) + 3 = 0 \iff 2k + 1 = 0 \iff k = -\frac{1}{2}.$$

Finalement, on a :

$$I\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{3}{2}\right).$$

4 Distances

1 Distance entre deux points

Propriété 64

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$. Soient deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. La distance entre A et B est donnée par l'égalité :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

2 Distance d'un point à un plan

Propriété 65

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.
Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, et soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ un point quelconque de l'espace.
La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d\,(\mathrm{A}\,;\mathcal{P})=\frac{|\;ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d\;|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Démonstration 12

Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Alors, (AH) est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc admet pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan, soit $\vec{u}\,(a\,;b\,;c)$ et donc (AH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=x_\mathrm{A}+at\\ y=y_\mathrm{A}+bt\\ z=z_\mathrm{A}+ct\end{cases}\quad,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

H étant le point d'intersection de cette droite et de $\mathcal{P}$, on a :

$$a\,(x_\mathrm{A}+at)+b\,(y_\mathrm{A}+bt)+c\,(z_\mathrm{A}+ct)+d=0\ ,\ \text{soit : } t=-\frac{ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d}{a^2+b^2+c^2}.$$

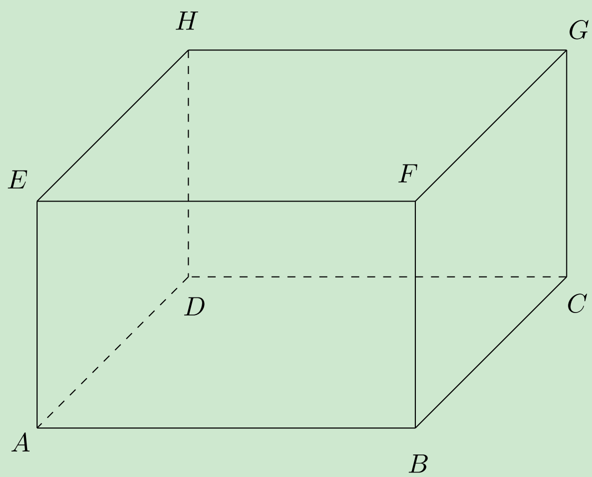
On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AH}^2&=(x_\mathrm{H}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{H}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{H}-z_\mathrm{A})^2\\
\mathrm{AH}^2&=\left(-a\frac{ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2+\left(-b\frac{ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2+\left(-c\frac{ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\\
\mathrm{AH}^2&=\left(a^2+b^2+c^2\right)\frac{(ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\\
\mathrm{AH}^2&=\frac{(ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d)^2}{a^2+b^2+c^2}\\
\mathrm{AH}&=\frac{|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}$$

Exercice type 34 ▶ utiliser le produit scalaire dans l'espace

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que :

$$AB = 7 \quad , \quad AD = 5 \quad , \quad AE = 4.$$



1 Calculer $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FG}$.
Que peut-on en déduire ?

2 Calculer $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{HC}$.

3 Calculer $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HB}$.

Methode 11

Comme dans le plan, calculer un produit scalaire dans un tel contexte (quand on dispose d'un polyèdre – ici, un pavé droit) nécessite très souvent l'utilisation de la relation de Chasles. On doit donc très souvent décomposer les deux vecteurs en suivant les arêtes du polyèdre.

1
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FG} &= \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}\right) \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

En effet,

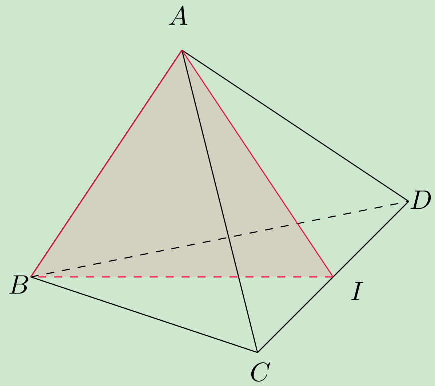
- (EF) et (FG) sont orthogonales (car $EFGH$ est un rectangle), donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$,
- (FB) et (FG) sont orthogonales (car $FBCG$ est un rectangle), donc $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$.

2
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{HC} &= \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}\right) \\ &= \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GC} \\ &= DC \times HG + 0 + 0 - CG^2 \text{ (car } \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{HG} \text{ sont colinéaires de même sens et } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{GC}) \\ &= 49 - 16 \\ &= 33.\end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HB} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + 0 + AB^2 - \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CB} + 0 \\ &= 0 + 0 + AB^2 - BF^2 + 0 + 0 \\ &= 7^2 - 4^2 \\ &= 33.\end{aligned}$$

Exercice type 35 ► montrer que deux droites sont orthogonales

$ABCD$ est un tétraèdre régulier. Le point I est le milieu du segment $[CD]$.



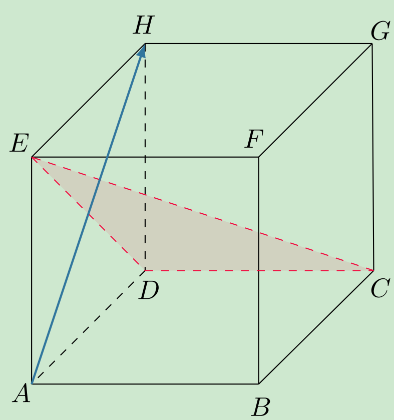
1 Montrer que (CD) est orthogonale au plan (ABI).

2 En déduire que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.

1 Le tétraèdre $ABCD$ est régulier donc les triangles ACD et BCD sont équilatéraux.
I est le milieu de $[CD]$ donc $(CD) \perp (AI)$ et $(CD) \perp (BI)$.
De plus, (BI) et (AI) sont sécantes.
Ainsi, (CD) est orthogonale à deux droites sécantes d'un même plan (ABI). Elle est donc orthogonale au plan lui-même.

2 (AB) est une droite du plan (ABI) et (CD) est orthogonale au plan (ABI).
(CD) est donc orthogonale à toute droite de (ABI), en particulier (AB).

Exercice type 36 ► vecteur normal à un plan



On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.

Montrer que $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan (CDE).

$ADHE$ est un carré donc ses diagonales se coupent perpendiculairement. Ainsi, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux.

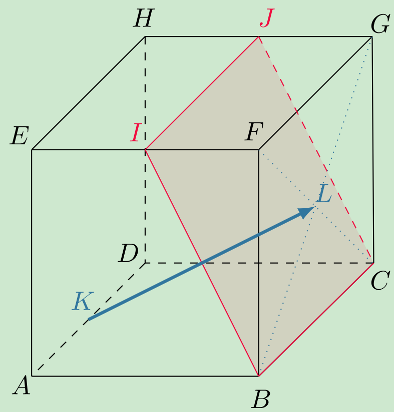
De plus,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DC} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= 0 + 0 \text{ (car } ADCB \text{ et } DCGH \text{ sont des carrés)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{ED}$. Ces deux derniers vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une base du plan (CDE).

On en déduit alors que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal au plan (CDE) et donc qu'il est un vecteur normal à ce plan.

Exercice type 37 ▶ distance d'un point à un plan



$ABCDEFGH$ est un cube. K est le milieu de $[AD]$. I et J sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[GH]$.
L est le centre du carré $BCGF$.

1 Montrer que $\overrightarrow{KL}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

2 On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Donner les coordonnées des points K et L.
Donner alors une représentation paramétrique de la droite (KL).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCI).

c. En déduire la distance de K au plan (BCI).

1
$$\begin{aligned}\overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}.\end{aligned}$$

Ainsi,

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{BI} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}\right)\\ &= \cancel{-\frac{1}{2}AB^2} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA} + \cancel{\frac{1}{2}BF^2} \text{ car } AB = BF\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}\\ &= 0 \text{ car } \overrightarrow{BF} \text{ et } \overrightarrow{BA} \text{ sont orthogonaux.}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\right)\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= 0 \text{ car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BF} \text{ sont orthogonaux à } \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{KL}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$, deux vecteurs non colinéaires, donc formant une base du plan (BCI).
$\overrightarrow{KL}$ est donc normal au plan (BCI).

2 **a.**
- $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $K\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.
- $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ donc $L\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}1-0\\1/2-1/2\\1/2-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (KL) est donc :

$$(KL)\ :\ \begin{cases}x = x_K + x_{\overrightarrow{KL}}t\\ y = y_K + y_{\overrightarrow{KL}}t\\ z = z_K + z_{\overrightarrow{KL}}t\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases}x = t\\ y = \frac{1}{2}\\ z = \frac{1}{2}t\end{cases}\quad , \quad t\in\mathbb{R}.$$

b. $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCI) donc une équation cartésienne de (BCI) est de la forme :

$$1x+0y+\frac{1}{2}z+d=0.$$

$B\in(BCI)$ donc $x_B+\dfrac{1}{2}z_B+d=0$, soit $d=-x_B-\dfrac{1}{2}z_B=-1$.
Une équation cartésienne du plan (BCI) est donc :

$$x+\frac{1}{2}z-1=0.$$

c. D'après la formule du cours,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\big(K;(BCI)\big)&=\frac{\mid x_K+\frac{1}{2}z_K-1\mid}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\\&=\frac{\mid 0+0-1\mid}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\\&=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\\&=\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

9 Exercices

Exercice 9.1 (plans orthogonaux)

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
Pour chaque question, dire si $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont orthogonaux

1 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

3 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$

Solution page 346

Exercice 9.2 (distance d'un point à un plan)

Pour chacune des questions suivantes, calculer la distance entre le point A et le plan $(\mathcal{P})$.

1 $(\mathcal{P})\ :\ -3x + 5y + z = 1\,;\ A(-3; 2; 1)$.

2 $(\mathcal{P})\ :\ 5x - y + 3z - 2 = 0\,;\ A(2; 2; -2)$.

Solution page 346

Exercice 9.3 (intersection d'une droite et d'un plan)

Donner les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

et du plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $2x - 3y + z = 2$.

Solution page 347

Exercice 9.4 (plans orthogonaux)

On considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$(\mathcal{P}_1)\ :\ 3x + t^2 y + (1 - t)z - 5 = 0 \qquad ; \qquad (\mathcal{P}_2)\ :\ t^2 x + (1 + t)y - 3z + 1 = 0,$$

où t est un réel.
Déterminer les valeurs éventuelles de t pour lesquelles les deux plans sont orthogonaux.

Solution page 347

Exercice 9.5 (alignement, représentation paramétrique d'une droite)

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points suivants :

$$A(2;-1;0) \quad ; \quad B(-1;1;1) \quad C(3;-2;-1)$$

1 Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

2 Déterminer alors une représentation paramétrique du plan (ABC).

3 Soit $E(0;-1;1)$.

a. Vérifier que E n'appartient pas au plan (ABC).

b. On considère la droite passant par E et orthogonale au plan (ABC). On pose $H(a;b;c)$ son point d'intersection avec le plan (ABC).
Déterminer les valeurs de a, b et c.

c. Déterminer alors une équation paramétrique de la droite (EH).

Solution page 348

Exercice 9.6 (équation cartésienne de plans)

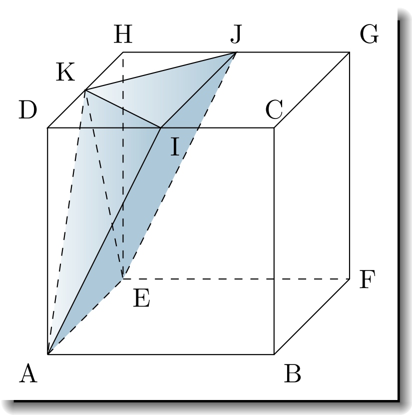
1 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(1;-2;3)$ et parallèle au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $2x+5y-3z=7$.

2 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1;-1;1)$ et orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x+y-z=1$.

Solution page 350

Exercice 9.7 (pyramide dans un cube)

Soit $ABCDEFGH$ un cube comme représenté ci-dessous.



On place les points I, J et K respectivement au milieu des côtés $[DC]$, $[GH]$ et $[DH]$. On fixe le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1 Montrer que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (AEJ).

2 En déduire une équation cartésienne du plan (AEJ).

3 On admet que la distance du point K au plan (AEJ) est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
En déduire le volume de la pyramide $AEJIK$.

4 Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, perpendiculaire au plan (AEJ) et passant par K.
En déduire les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (AEJ).

Solution page 350

Exercice 9.8 (plan médiateur)

On appelle *plan médiateur* d'un segment $[AB]$ le plan passant par son milieu de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
On considère les deux points $A\,(-1\,;3\,;1)$ et $B\,(3\,;5\,;-3)$.

1 Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

2 En déduire une équation cartésienne du plan médiateur.

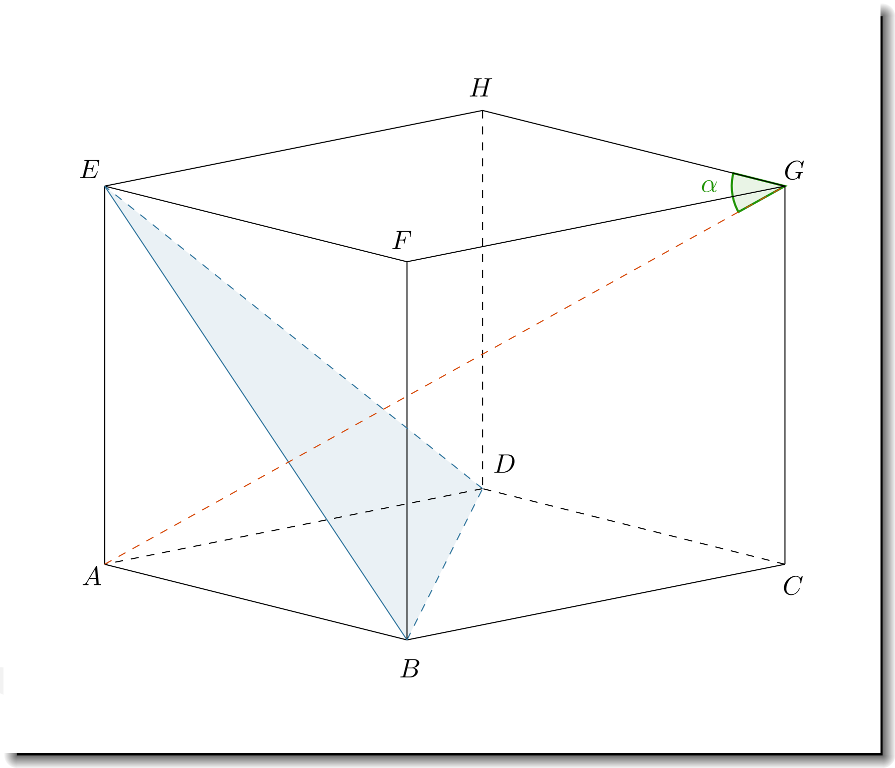
3 **a.** On considère un point M sur ce plan. Montrer que $AM = BM$.

b. Réciproquement, montrer que si M est un point de l'espace tel que $AM = BM$ alors M est sur le plan médiateur de $[AB]$.

Solution page 351

Exercice 9.9 (prendre des initiatives)

On considère le cube $ABCDEFGH$ suivant, dont la mesure d'une arête est considérée comme unité. On note $\alpha = \widehat{\text{AGH}}$.



1 (AG) est-elle orthogonale au plan (BDE) ?

2 Déterminer une mesure de α au degré près.

Solution page 353

Objectif bac

Exercice 9.10 (extrait du bac Métropole 2022, sujet 1)

Dans l'espace rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,, \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;1\,;3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 2+2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1 **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

b. Montrer que le point $B\,(-1\,;3\,;0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

2 On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,; \frac{19}{9}\,; \frac{16}{9}\right)$.

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3 Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point $B\,(-1\,;3\,;0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4 On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\dfrac{8}{9}$.

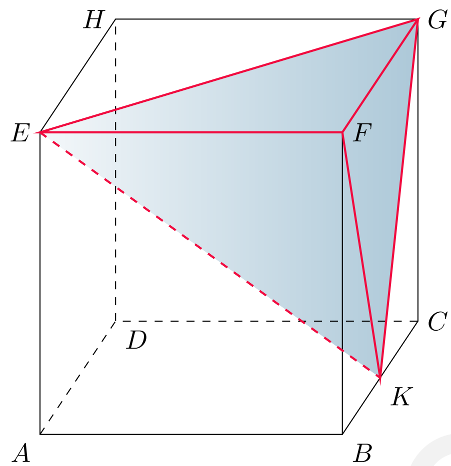
Calculer l'aire du triangle ACH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Solution page 353

Exercice 9.11 (extrait du bac Métropole 2022, sujet 2)

On considère un cube $ABCDEFGH$ et on appelle K le milieu du segment $[BC]$.
On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre $EFGK$.



On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\,;\frac{4}{9}\,;\frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre $EFGK$ est égal à $\dfrac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment $[EG]$, M milieu du segment $[EK]$ et N milieu du segment $[GK]$. Déterminer le volume du tétraèdre $FPMN$.

Solution page 355

9 Corrigés

Corrigé de l'exercice 9.1 page 341

1 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

Un vecteur normal à $(\mathcal{P}_1)$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$, et un vecteur normal à $(\mathcal{P}_2)$ est $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times(-1) + (-1)\times 3 + 1\times 2 = -4 \neq 0.$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas orthogonaux ; les plans ne le sont donc pas non plus.

2 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

Un vecteur normal à $(\mathcal{P}_1)$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, et un vecteur normal à $(\mathcal{P}_2)$ est $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 2 + 1\times(-3) + 1\times 1 = 0.$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux ; les plans le sont donc aussi.

3 $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$

Un vecteur normal à $(\mathcal{P}_1)$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$, et un vecteur normal à $(\mathcal{P}_2)$ est $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 2 + (-2)\times(-3) + 3\times(-3) = 1 \neq 0.$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas orthogonaux ; les plans ne le sont donc pas non plus.

Corrigé de l'exercice 9.2 page 341

1 $(\mathcal{P})\ :\ -3x + 5y + z = 1\,;\ A(-3;2;1)$.

$$d\,(\mathrm{A}\,;\,\mathcal{P}) = \frac{|\,ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|\,-3\times(-3) + 5\times 2 + 1 - 1\,|}{\sqrt{(-3)^2+5^2+1^2}}$$

$$\boxed{d\,(\mathrm{A}\,;\,\mathcal{P}) = \frac{19}{\sqrt{35}}}$$

2 $(\mathcal{P})\ :\ 5x - y + 3z - 2 = 0\,;\ A(2;2;-2)$.

$$\begin{aligned} d\,(\mathrm{A}\,;\,\mathcal{P}) &= \frac{|\,ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|\,5\times 2 - 2 + 3\times(-2) - 2\,|}{\sqrt{5^2+(-1)^2+(3)^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{d\,(\mathrm{A}\,;\,\mathcal{P}) = 0}$$

Cela signifie donc que $A \in (\mathcal{P})$, ce qui n'est pas difficile à vérifier en injectant directement les coordonnées de A dans l'équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ (c'est le numérateur), et en trouvant 0.

Corrigé de l'exercice 9.3 page 341

Notons $I(x_I;y_I;z_I)$ l'éventuel point d'intersection de la droite et du plan.

Alors,

$$I \in (d) \iff \begin{cases} x_I = 1+2t \\ y_I = -2+t \\ z_I = -2+3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

et :

$$\begin{aligned} I \in (\mathcal{P}) &\iff 2x_I - 3y_I + z_I = 2 \\ &\iff 2(1+2t) - 3(-2+t) + (-2+3t) = 2 \\ &\iff 2+4t+6-3t-2+3t = 2 \\ &\iff 4t = -4 \\ &\iff t = -1. \end{aligned}$$

En remplaçant t par -1 dans le système (1), on a :

$$I \in (d) \iff \begin{cases} x_I = -1 \\ y_I = -3 \\ z_I = -5 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{I\,(-1\,;-3\,;-5)}$.

Corrigé de l'exercice 9.4 page 341

On sait que deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Un vecteur normal à $(\mathcal{P}_1)$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ t^2 \\ 1-t \end{pmatrix}$;

Un vecteur normal à $(\mathcal{P}_2)$ est $\vec{v}\begin{pmatrix} t^2 \\ 1+t \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= 3t^2 + t^2(1+t) - 3(1-t) \\ &= t^3 + 4t^2 + 3t - 3. \end{aligned}$$

Posons alors :

$$f(t) = t^3 + 4t^2 + 3t - 3.$$

f est continue, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une valeur de t_0 pour laquelle $f(t_0) = 0$. Étudions les variations de f :

$$f'(t) = 3t^2 + 8t + 3.$$

$f'(t)$ est donc un trinôme de degré 2, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\times 3\times 3 = 64 - 36 = 28.$$

$f'(t)$ admet donc deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{28}}{6} = \frac{-4-\sqrt{7}}{3}$$

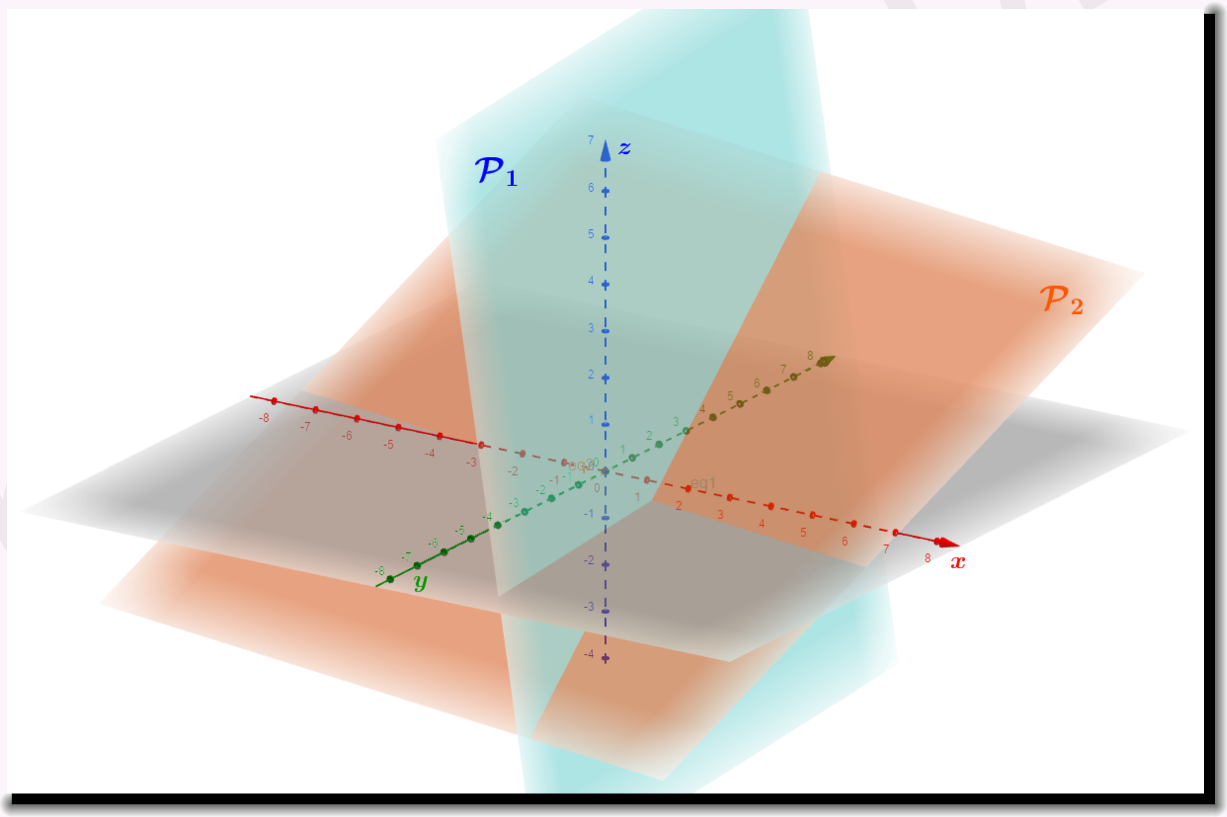
et

$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{28}}{6} = \frac{-4+\sqrt{7}}{3}.$$

On en déduit alors le tableau suivant :

t	$-\infty$		$\dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}$		$\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-0,9$	$\searrow$	$-3,6$	$\nearrow$	$+\infty$

Des valeurs de ce tableau, on déduit qu'il existe une unique solution à l'équation $f(t)=0$, supérieure à $\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}$.
À l'aide de la calculatrice (par exemple), on arrive à une valeur approchée : $t_0 \approx 0,547$.
Avec cette valeur, les plans sont ainsi :



Corrigé de l'exercice 9.5 page 342

1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\1-(-1)\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{-1}{2}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc ils forment une base de ce plan. De plus, $A \in (ABC)$ donc une représentation paramétrique du plan (ABC) est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 2 - 3t + t' \\ y = -1 + 2t - t' \\ z = t - t' \end{array}\right. \quad , \quad (t\,;t') \in \mathbb{R}^2}$$

3 $E(0; -1; 1)$.

a. Si $E \in (ABC)$ alors il existe deux réels t et t' tels que :

$$\left\{\begin{array}{r} 0 = 2 - 3t + t' \\ -1 = -1 + 2t - t' \\ 1 = t - t' \end{array}\right. \qquad \text{soit} \qquad \left\{\begin{array}{r} t' = 3t - 2 \\ 2t = t' \\ 1 = t - t' \end{array}\right.$$

Des 1re et 2e équations, on déduit que :

$$3t - 2 = 2t \qquad \text{soit} \qquad t = 2$$

et donc

$$t' = 2 \times 2 = 4.$$

La 3e équation donne alors :

$$1 = 2 - 4\,,$$

On arrive alors à une égalité fausse, donc il n'existe pas de réels t et t' tels que les coordonnées de E satisfont la représentation paramétrique de (ABC) que nous avons donnée à la question précédente. Ainsi, E n'appartient pas au plan (ABC).

b. Par définition, (EH) est orthogonale au plan (ABC) donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EH} = \vec{0} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -3a + 2b + c + 1 = 0 \\ a - b - c = 0 \end{array}\right.$$

Or, $H \in (ABC)$ donc il existe deux réels t et t' pour lesquels :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2 - 3t + t' \\ b = -1 + 2t - t' \\ c = t - t' \end{array}\right.$$

Le système précédent devient alors :

$$\left\{\begin{array}{l} -3(2 - 3t + t') + 2(-1 + 2t - t') + (t - t') + 1 = 0 \\ (2 - 3t + t') - (-1 + 2t - t') - (t - t') = 0 \end{array}\right. \qquad \text{soit} \qquad \left\{\begin{array}{l} 14t - 6t' = 7 \\ -2t + t' = -1 \end{array}\right.$$

On trouve alors $t = \dfrac{1}{2}$ et $t' = 0$, d'où :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 + 1 = 0 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \text{et donc } \boxed{H\left(\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}\right)}$$

c. $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de (EH) est (en prenant les coordonnées de E) :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}k \\ y = -1 + k \\ z = 1 - \frac{1}{2}k \end{array}\right. \quad , \quad k \in \mathbb{R}}$$

Corrigé de l'exercice 9.6 page 342

1 Notons $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point $A(1;-2;3)$ et parallèle au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $2x+5y-3z=7$.
Son équation cartésienne vérifie :

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0$$

soit :

$$a - 2b + 3c + d = 0. \tag{1}$$

On sait de plus que $(\mathcal{Q})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$ donc leurs vecteurs normaux sont colinéaires :

$$\exists\, k \in \mathbb{R}^*,\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 2k \\ b = 5k \\ c = -3k \end{cases}.$$

En remplaçant a, b et c dans l'équation (1), on a :

$$2k - 2(5k) + 3(-3k) + d = 0$$

soit $d = 17k$.
En prenant par exemple $k = 1$, on a alors :

$$\boxed{(\mathcal{Q})\ :\ 2x + 5y - 3z + 17 = 0.}$$

2 Notons $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point $A(-1;-1;1)$ et orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x+y-z=1$.
Son équation cartésienne vérifie :

$$ax_A + by_B + cz_B + d = 0$$

soit :

$$-a - b + c + d = 0. \tag{1}$$

Les deux plans sont orthogonaux donc leurs vecteurs normaux le sont aussi :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a + b - c = 0 \iff c = a + b.$$

L'équation (1) devient alors $d = 0$.
Une équation cartésienne de $(\mathcal{Q})$ est donc, par exemple en prenant $a = b = 1$ et $c = a + b = 2$:

$$\boxed{(\mathcal{Q})\ :\ x + y + 2z = 0}$$

Corrigé de l'exercice 9.7 page 342

1 Les vecteurs $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et A, E et I appartiennent au plan (AEJ).
De plus, $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \times 1 + 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 0 = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \times 0 = 0$.
Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AI}$; donc $\vec{u}$ est normal au plan (AEJ).

2 L'équation cartésienne du plan (AEJ) est de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. Ainsi :

$$(AEJ) : x - \frac{1}{2}y + d = 0.$$

De plus, $A \in (AEJ)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation d'où : $d = 0$. On a alors :

$$\boxed{(AEJ) : x - \frac{1}{2}y = 0}$$

3 Le volume de la pyramide $AEJIK$ est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base (ici $AEJI$) et h la hauteur (celle que nous avons calculé dans la question précédente). Donc :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times AE \times AI \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{6}}$$

4 Nous savons qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_K + at \\ y = y_K + bt \\ z = z_K + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

où $K(x_K ; y_K, z_K) \in \mathcal{D}$ et où $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Ainsi :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Nommons H le pied de la hauteur de la pyramide $AEJIK$ issue du sommet K. Alors, $H \in \mathcal{D}$ et $H \in (AEJ)$, ce qui se traduit de façon analytique de la façon suivante (on remplace x par t et y par $1 - \frac{1}{2}t$ dans l'équation cartésienne de (AEJ)) :

$$t - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}t\right) = 0.$$

On trouve alors :

$$t = \frac{2}{5}.$$

D'où :

$$\begin{cases} x_H = \frac{2}{5} \\ y_H = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \\ z_H = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{H\left(\frac{2}{5} ; \frac{4}{5} ; \frac{1}{2}\right)}$$

Corrigé de l'exercice 9.8 page 343

1 $A\,(-1\,;3\,;1)$ et $B\,(3\,;5\,;-3)$. Le milieu I de $[AB]$ a donc pour coordonnées :

$$I\left(\frac{-1+3}{2} ; \frac{3+5}{2} ; \frac{1+(-3)}{2}\right), \text{ soit } \boxed{I\,(1\,;4\,;-1)}$$

2 Une équation cartésienne du plan médiateur $(\mathcal{P})$ est de la forme :

$$(\mathcal{P}) \;:\; ax + by + cz + d = 0$$

où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est normal au plan médiateur, donc :

$$(\mathcal{P}) \; : \; 4x + 2y - 4z + d = 0.$$

De plus, $I \in (\mathcal{P})$ donc :

$$4x_I + 2y_I - 4z_I + d = 0 \iff d = -16.$$

Finalement,

$$(\mathcal{P}) \; : \; 4x + 2y - 4z - 16 = 0$$

que l'on peut aussi écrire (en divisant tous les coefficients par 2) :

$$\boxed{(\mathcal{P}) \; : \; 2x + y - 2z - 8 = 0}$$

3 **a.** Soit $M(x; y; z) \in (\mathcal{P})$. Alors, d'après l'équation cartésienne donnée précédemment :

$$y = 2z - 2x + 8.$$

- $$\begin{aligned} AM^2 &= (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 \\ &= (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \\ &= (x+1)^2 + (2z - 2x + 8 - 3)^2 + (z-1)^2 \\ &= (x+1)^2 + (2z - 2x + 5)^2 + (z-1)^2 \\ &= 5x^2 + 5z^2 - 18x + 18z - 8xz + 27. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} BM^2 &= (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 \\ &= (x-3)^2 + (2z - 2x + 8 - 5)^2 + (z+3)^2 \\ &= (x-3)^2 + (2z - 2x + 3)^2 + (z+3)^2 \\ &= 5x^2 + 5z^2 - 18x + 18z - 8xz + 27. \end{aligned}$$

On a alors $AM^2 = BM^2$, donc $AM = BM$.

b. Supposons que $MA = MB$. Alors,

$$\begin{aligned} MA^2 = MB^2 &\iff MA^2 - MB^2 = 0 \\ &\iff \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0 \\ &\iff \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0 \\ &\iff \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}\right) = 0 \\ &\iff 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux. Or, $(\mathcal{P})$ est le plan passant par I est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ donc (MI) est incluse dans $(\mathcal{P})$. M appartient donc à $(\mathcal{P})$.

Remarque 63

Des deux dernières questions, on peut conclure l'équivalence :

$$M \in (\mathcal{P}) \text{ plan médiateur de } [AB] \iff MA = MB.$$

Autrement dit, le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

Corrigé de l'exercice 9.9 page 343

Pour cet exercice, nous allons nous placer dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1 $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

De plus, $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan (BDE).

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BE} = 1\times(-1)+1\times 0+1\times 1 = 0$;
$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = 1\times(-1)+1\times 1+1\times 0 = 0$.
Ainsi, $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs d'une base du plan (BDE) ; il est donc orthogonal à tous vecteurs de ce plan.
(AG) est donc orthogonale au plan (BDE).

2 $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GH} = (-1)\times(-1)+(-1)\times 0+(-1)\times 0 = 1.$$

De plus,

$$\underbrace{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GH}}_{=1} = GA\times GH\times\cos(\alpha) = \sqrt{3}\times 1\times\cos(\alpha).$$

Ainsi,

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 55°.$$

Corrigé de l'exercice 9.10 page 344

1 **a.** D'après sa représentation paramétrique, un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}$$

b. Remplaçons x, y et z par les coordonnées de B dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases}-1 = 1+2t\\3 = 2-t\\0 = 2+2t\end{cases}$$

On trouve avec $t=-1$. Il existe donc bien un paramètre t qui donne les coordonnées de B, donc $B\in\mathcal{D}$.

c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\3-1\\0-3\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = 0\times 2+2\times(-1)+(-3)\times 2 = -2-6 = -8.$$

2 **a.** Par construction, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, vecteur directeur de $\mathcal{D}$, est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Donc, d'après le cours, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est :

$$2x-y+2z+d=0 \qquad , \qquad d\in\mathbb{R}.$$

De plus, $A \in \mathcal{P}$ donc ses coordonnées vérifient cette équation :

$$2x_A - y_A + 2z_A + d = 0 \iff -2 - 1 + 6 + d = 0 \iff d = -3.$$

Finalement, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est bien :

$$2x - y + 2z - 3 = 0.$$

b. $H \in \mathcal{D}$ donc $H\,(1 + 2t\,; 2 - t\,; 2 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.
De plus, $H \in \mathcal{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne précédente :

$$2x_H - y_H + 2z_H - 3 = 0 \iff 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0 \iff t = -\frac{1}{9}.$$

Par conséquent, $H\left(1 - \frac{2}{9}\,; 2 + \frac{1}{9}\,; 2 - \frac{2}{9}\right)$, soit $H\left(\frac{7}{9}\,; \frac{19}{9}\,; \frac{16}{9}\right)$.

c. $AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{9} + 1\right)^2 + \left(\frac{19}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 3\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{53}{9}}$$

$$\boxed{AH = \frac{\sqrt{53}}{3}}$$

3 **a.** H et B sont deux points de la droite $\mathcal{D}$; par conséquent, $\overrightarrow{HB}$ est colinéaire à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$, donc à $\vec{u}$.
Ainsi, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. $\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \iff \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k\vec{u} \cdot \vec{u}$

$$\iff \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k\vec{u}^2$$

$$\iff \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k\|\vec{u}\|^2$$

$$\iff k = \frac{\overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

c. À la question 1.c, nous avions trouvé : $\overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = -8$. Ainsi,

$$k = \frac{-8}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{-8}{9}.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \iff \begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ 0 - z_H \end{pmatrix} = -\frac{8}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -1 - x_H & = -\frac{16}{9} \\ 3 - y_H & = \frac{8}{9} \\ -z_H & = -\frac{16}{9} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_H & = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} \\ y_H & = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9} \\ z_H & = \frac{16}{9} \end{cases}$$

4 Dans le tétraèdre $ABCH$, on peut considérer que ACH est une base et que la hauteur relative est (BH) car B et H sont sur $\mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc au plan (AHC).
Ainsi, si $\mathcal{B}$ représente l'aire du triangle ACH et $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre $ABCH$,

$$\mathcal{B} = \frac{3\mathcal{V}}{BH}.$$

Or, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{7}{9}+1\\ \frac{19}{9}-3\\ \frac{16}{9}\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{16}{9}\\ -\frac{8}{9}\\ \frac{16}{9}\end{pmatrix}$.
Ainsi, $BH=\sqrt{2\times\left(\frac{16}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2}=\frac{8}{3}$.
D'où :

$$\mathcal{B}=\frac{3\times\frac{8}{9}}{\frac{8}{3}}=1.$$

L'aire de ACH est donc égale à 1 unité d'aire.

Corrigé de l'exercice 9.11 page 345

1 Par lectures graphiques, on a :

- $\overrightarrow{AE}=0\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AE}$ donc $E\,(0\,;0\,;1)$;
- $\overrightarrow{AF}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AE}$ donc $F\,(1\,;0\,;1)$;
- $\overrightarrow{AG}=1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AE}$ donc $G\,(1\,;1\,;1)$;
- $\overrightarrow{AK}=1\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+0\overrightarrow{AE}$ donc $K\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

2 $\vec{n}$ est orthogonal au plan (EGK) si et seulement si il l'est à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

- $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=1\times 2+1\times(-2)+0\times 1=2-2=0$;
- $\overrightarrow{KG}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=0\times 2+\frac{1}{2}\times(-2)+1\times 1=-1+1=0$.

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{KG}$, non colinéaires donc formant une base du plan (EKG). Il est donc normal à ce dernier plan.

3 D'après la question précédente, et d'après le cours, une équation du plan (EKG) est :

$$2x-2y+1z+d=0\qquad,\qquad d\in\mathbb{R}$$

car $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est normal à ce plan.
De plus, $E\in(EGK)$ sont ses coordonnées doivent vérifier l'équation :

$$2x_E-2y_E+z_E+d=0\iff d=-1.$$

Finalement, une équation cartésienne du plan (EGK) est donc bien :

$$2x-2y+z-1=0.$$

4 Une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F est de la forme :

$$\begin{cases}x=x_F+at\\ y=y_F+bt\\ z=z_F+ct\end{cases}\qquad,\qquad t\in\mathbb{R}$$

où $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).
Comme (d) est orthogonale au plan (EGK), un vecteur directeur est aussi un vecteur normal au plan. On peut donc prendre $\vec{u}=\vec{n}$.
Finalement, on trouve :

$$\boxed{(d)\quad:\quad\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2t\\ z=1+t\end{cases}\qquad,\qquad t\in\mathbb{R}}$$

5 Le point L est l'intersection de (d) et du plan (EGK).

- $L \in (d) \iff L\,(1+2t\,;-2t\,;1+t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- $L \in (EGK) \iff 2(1+2t) - 2(-2t) + (1+t) - 1 = 0 \iff t = -\dfrac{2}{9}$.

Par conséquent, $L\left(\dfrac{5}{9}\,;\dfrac{4}{9}\,;\dfrac{7}{9}\right)$.

6 $\overrightarrow{LF}\begin{pmatrix}\frac{5}{9}-1\\ \frac{4}{9}-0\\ \frac{7}{9}-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LF}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{4}{9}\\ -\frac{2}{9}\end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$LF = \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{2}{3}.$$

7 L'aire du triangle EFG est égale à :

$$\mathcal{B} = \frac{EF \times FG}{2} = \frac{1}{2}.$$

La distance qui sépare le point K du plan (EFG) est égale à BF, donc à 1.
Ainsi, le volume du tétraèdre $EFGK$ est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

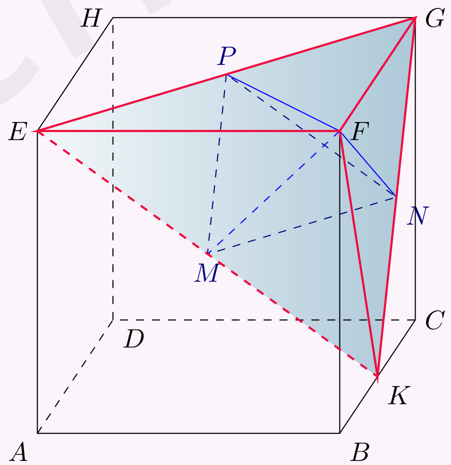
8 Le volume du tétraèdre $EFGK$ est aussi égal à :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B}_{EGK} \times FL.$$

Donc,

$$\mathcal{B}_{EGK} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

9 Plaçons les nouveaux points pour mieux y voir :



Ainsi, PMN est une réduction de EGK de facteur $\dfrac{1}{2}$ donc :

$$\mathcal{B}_{PMN} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \mathcal{B}_{EGK}$$

et donc le volume du tétraèdre $PMNF$ est :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}.$$

10 Combinatoire et dénombrements

Dans ce chapitre

1 Principes de base

La *combinatoire* est la partie des mathématiques qui permet d'étudier les diverses configurations de sous-ensembles d'éléments d'un ensemble fini.

Les *dénombrements* permettent d'énumérer le nombre de configurations possibles de ces sous-ensembles.

1 Cardinal d'un ensemble

Définition 44

Le *cardinal* d'un ensemble A est le nombre d'éléments contenus dans A.
On le note :

$$\mathrm{Card}(A).$$

Exemple 60

Si A désigne l'ensemble des cartes qui constituent un jeu de 32 cartes alors $\mathrm{Card}(A) = 32$.

Définition 45

On dit qu'un ensemble A est *fini* si $\mathrm{Card}(A)$ est un entier naturel.

2 Principe additif

Propriété 66

Soient A et B deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire n'ayant aucun élément commun, tels que $\mathrm{Card}(A) = n$ et $\mathrm{Card}(B) = m$. Alors, le nombre de façons de prendre un élément dans A <u>ou</u> un élément dans B est égal à $n + m$.

Exemple 61

Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.
Je peux donc y choisir un livre de $20 + 10 = 30$ façons différentes.

3 Principe multiplicatif

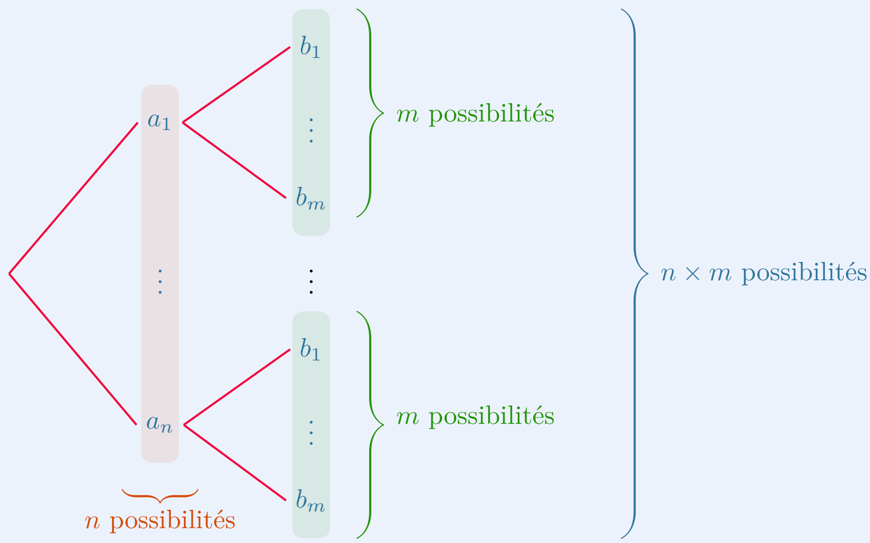
Propriété 67

Soient A et B deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(A) = n$ et $\mathrm{Card}(B) = m$.
Le nombre de façons de prendre un élément dans A <u>et</u> un élément dans B est égal à $n \times m$.

Exemple 62

Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.
Je souhaite prendre un livre de chaque sorte. Il y a donc $20 \times 10 = 200$ possibilités.

Le principe multiplicatif peut se représenter sous la forme d'un *arbre des possibilités* :



On peut aussi considérer un tableau à n colonnes et m lignes : il comporte $n \times m$ cellules.

2 Dénombrement

1 Factorielle

Définition 46

La factorielle d'un nombre entier n est le nombre :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Exemple 63

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$

2 Permutation

Définition 47

Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.
Une *permutation* de E est une liste *ordonnée* (l'ordre compte) composé des n éléments de E contenant une fois chacun des éléments de E.

Exemple 64

Si $E = \{1; 2; 3\}$ alors $F = (2; 3; 1)$ est une permutation de E.

Remarque 64

E est une permutation de E.

Propriété 68

Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

3 p-uplet (ou p-liste)

Définition 48

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et soit E un ensemble à n éléments.
Un *p-uplet* (ou une *p-liste*) de E est une liste *ordonnée* de p éléments pris parmi les n éléments de E.

Exemple 65

Un digicode à 4 chiffres est un 4-uplet de l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
Le 4-uplet (1 ;1 ;1 ;0) est différent du 4-uplet (0 ;1 ;1 ;1).

Propriété 69

Le nombre de p-uplets pris dans un ensemble à n éléments est égal à n^p.

Exemple 66

Il y a $10^4 = 10\ 000$ possibilités pour un digicode composé de 4 chiffres.

4 Arrangement

Définition 49

Soient n et p deux entiers naturels non nul, et soit E un ensemble à n éléments.
Un *arrangement* de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts.

Exemple 67

Le podium d'une course à 20 participants est un arrangement constitué du premier arrivé, puis du deuxième et enfin du troisième.

Propriété 70

Le nombre d'arrangements de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

Exemple 68

$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\ 840$.

Il y a donc 6 840 podiums possibles pour une course à 20 participants.

5 Combinaison

Définition 50

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$, et soit E un ensemble à n éléments.
Une *combinaison* de p éléments de E est un ensemble *non ordonné* à p éléments distincts pris parmi les n éléments de E.

Exemple 69

Sur un jeu de 32 cartes, une main de 5 cartes est une combinaison.

Propriété 71

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.$$

Exemple 70

$\binom{32}{5} = \dfrac{32 \times 31 \times \cdots \times (32-5+1)}{5!} = 201\ 376.$
Il y a donc 201 376 mains de 5 cartes possibles sur un jeu de 32 cartes.

Propriété 72

Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$ et $n \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Propriété 73 (relation de Pascal)

Pour tous entiers naturel n et p tels que $p \leqslant n$ et $n \neq 0$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

De la propriété 73, on déduit un tableau regroupant les différentes valeurs de $\binom{n}{p}$ suivant les valeurs de n et p : c'est le *triangle de Pascal.*

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Début du triangle de Pascal

Pour construire et afficher un triangle de Pascal, on peut utiliser le programme Python suivant :

Code Python 10-29

```
def trianglePascal(n):
    T = [[0] * (n+1) for p in range(n+1)]
    for n in range(n+1):
        if n == 0:
            T[n][0] = 1
        else:
            for k in range(n+1):
                if k == 0:
                    T[n][0] = 1
                else:
                    T[n][k] = T[n-1][k-1] + T[n-1][k]
    return T


T = trianglePascal(15)

for i in range(len(T)):
    print(T[i][:i+1])
```

Pour résumer, on retiendra le tableau suivant :

	Ordre	Modèle	Exemples	Formules
Permutation	oui	tirage sans remise	anagramme	$n!$
p-liste	oui	tirage avec remise	digicode	n^p
Arrangement A_n^p	oui	tirage sans remise	podium d'une course	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$
Combinaison $\dbinom{n}{p}$	non	tirage sans remise	main dans un jeu de cartes	$\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

10 Exercices types

Exercice type 38 ► principes additifs et multiplicatifs

Pour chacune des questions suivantes, indiquer le principe de dénombrement à utiliser et effectuer le calcul.

1 La carte d'un restaurant propose 5 entrées différentes, 4 plats et 3 desserts.

a. Luc n'a pas le temps de faire un repas complet : il prend soit une entrée, soit un plat, soit un dessert. Combien de choix a-t-il ?

b. Virginie a le temps de prendre une entrée, un plat et un dessert.
Combien de menus différents peut-elle composer ?

2 Dans une classe de 35 élèves, 20 étudient l'allemand, 15 l'espagnol et 8 aucune de ces deux langues.
Combien d'élèves étudient l'allemand et l'espagnol ?

1 **a.** On utilise ici le principe additif : Luc choisit une entrée <u>ou</u> un plat <u>ou</u> un dessert. Il a donc :

$$5 + 4 + 3 = 12 \text{ choix possibles.}$$

b. Un menu est un produit cartésien des ensembles { entrées }, { plats } et { desserts }. Il y a donc :

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ menus possibles.}$$

2 L'ensemble de la classe est un ensemble C.
Les élèves faisant allemand constituent un ensemble A.
Les élèves faisant espagnol constituent un ensemble E.
Les élèves ne faisant ni allemand ni espagnol constituent un ensemble R.
On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Card}(C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cap E) + \text{Card}(R) \\ 35 &= 20 + 15 - \text{Card}(A \cap E) + 8 \\ \Rightarrow \text{Card}(A \cap E) &= 35 - 35 + 8 = 8. \end{aligned}$$

Exercice type 39 ► reconnaître le modèle combinatoire

1 Un code secret pour un coffre-fort est composé de 4 chiffres, chacun pouvant être de 0 à 9.
Combien de codes différents peut-on créer ?

2 Cinq amis (Alice, Bob, Charles, David, Ève) veulent s'asseoir sur un banc de 5 places.
Combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir ?

3 Dans une course de 10 athlètes, seuls les 3 premiers seront récompensés.
Combien de podiums différents peut-on obtenir ?

4 Un professeur doit choisir 3 élèves parmi 25 pour former un groupe de travail.
Combien de groupes différents peut-il former ?

1 Le code secret est un 4-uplet d'un ensemble à 10 éléments (10 chiffres).
Il y a donc $10^4 = 10\ 000$ codes possibles.

2 Il s'agit ici d'une permutation d'un ensemble à 5 éléments. Il y a donc $5! = 120$ possibilités.

3 Il s'agit ici d'un arrangement de 3 éléments d'un ensemble à 10 éléments.
Il y a donc $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ podiums possibles.

4 L'ordre ne compte pas ici, donc il s'agit d'une combinaison de 3 éléments dans un ensemble à 25 éléments.
Il y a donc $\binom{25}{3} = 2\ 300$ groupes possibles.

10 Exercices

Principe additif et principe multiplicatif

Exercice 10.1 (l'imprimeur)

Un imprimeur doit imprimer des calendriers pour une même société tous les ans. Afin de réduire ses coûts, il décide de créer tous les modèles possibles la même année.

1. Combien de pages différentes doit-il confectionner pour le mois de janvier ?
2. Combien de pages différentes doit-il confectionner pour le mois de février ?

Solution page 371

Exercice 10.2 (au restaurant)

Un restaurant propose à sa carte un menu où il faut choisir une entrée, un plat et un dessert.
Sont proposés trois entrées, six plats et 2 desserts.
Combien de repas différents peut-on constituer ?

Solution page 371

Exercice 10.3 (dans la bibliothèque)

Dans la bibliothèque de Gaspard, il y a 20 polars, 7 livres sur l'art et 5 livres sur les routards.
Il souhaite ne prendre que deux livres de catégories différentes.
Combien de possibilités a-t-il ?

Solution page 371

Exercice 10.4 (coordonnées aléatoires)

Voici un programme Python qui permet de choisir au hasard les coordonnées d'un point dans le plan muni d'un repère :

Code Python 10-30

```python
from random import randint
x = randint(-10,10) # nombre entier aléatoire compris entre -10 et 10 inclus
y = randint(-10,10)
```

Combien de coordonnées peut-on obtenir ?

Solution page 371

Exercice 10.5 (nombres à 6 chiffres)

1. Combien y a-t-il de nombres entiers à 6 chiffres ?
2. Combien de nombres entiers à 6 chiffres comportent des chiffres tous distincts ?
3. Combien existe-t-il de nombres entiers à 6 chiffres dont les chiffres consécutifs sont de parité différente ?

Solution page 371

Arrangements, permutations, combinaisons et p-uplets

Exercice 10.6 (QCM)

Dans chacune des questions suivantes, quatre propositions de réponses sont faites, dont une seule est exacte. Laquelle ?

1 Ludwig a pris quarante-cinq photos de son voyage en Allemagne et veut en imprimer cinq pour les mettre dans un cadre. Le nombre de possibilités de cadres pouvant être obtenu est :

a. 5^{45} **b.** 45^5 **c.** $\binom{45}{5}$ **d.** A_{45}^5

2 D'une urne contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50, on en extrait dix sans les remettre. On note les numéros ainsi obtenus sur un papier de sorte à avoir une suite. Le nombre de suites possibles est :

a. 10^{50} **b.** 50^{10} **c.** $\binom{50}{10}$ **d.** A_{50}^{10}

3 Dans le jeu télévisé « Des chiffres et des lettres », on demande huit fois aux candidats de choisir au hasard s'il veulent une voyelle ou une consonne. Le nombre de « mots » possibles à l'issue de ces huit choix est :

a. $26!$ **b.** 26^8 **c.** $\binom{26}{8}$ **d.** A_{26}^8

4 Le nombre d'anagrammes du mot « STYLO » est :

a. $5!$ **b.** 5^5 **c.** $\binom{26}{5}$ **d.** A_{26}^5

Solution page 372

Exercice 10.7 (nombres de nombres binaires)

Un *octet* est une suite de huit chiffres (appelés *bits*), chacun pris dans l'ensemble $\{0;1\}$, comme par exemple : 01101001.
Combien y a-t-il d'octets différents ?

Solution page 372

Exercice 10.8 (mots de passe)

Sur une plateforme numérique interne d'une société, on impose aux salariés la composition de leur mot de passe : il faut que ce dernier comporte :

- une lettre non accentuée prise dans l'alphabet latin (comportant 26 lettres), en majuscules ou minuscules ;
- un symbole parmi : « \$ », « # », « & », « ? » et « ! » ;
- un chiffre compris entre 0 et 9 (inclus).

Le mot de passe est donc composé de trois caractères (comme : « Z#0 »).
Combien de mots de passe peuvent ainsi être créés ?

Solution page 372

Exercice 10.9 (tournoi sportif)

Lors d'un tournoi sportif, 12 équipes doivent affronter une fois les 11 autres.
Combien de matches doit-on organiser ?

Solution page 372

Exercice 10.10 (mains d'un jeu de cartes)

Un joueur dispose de cinq cartes prises parmi 52. On dit que c'est une *main* de cinq cartes.

1. Combien de mains existent-il ?
2. Combien de mains ayant exactement un Roi existent-t-il ?
3. Combien de mains ayant exactement 2 Piques existent-il ?
4. Combien de mains ayant exactement 2 Piques et 1 Cœur existent-il ?

Solution page 373

Exercice 10.11 (s'asseoir sur les chaises)

Quatre garçons et trois filles doivent s'asseoir en ligne sur sept chaises.

1. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir ?
2. Même question si les garçons et les filles doivent rester groupés.
3. Même question si les garçons et les filles doivent être disposés de façon alternée.

Solution page 373

Exercice 10.12 (le congrès des gens polis)

Chaque année, l'association des gens polis de Paris organise un congrès et comme chaque année, tous les participants doivent se serrer la main qu'une seule fois.
Cette année, il y a 50 participants.
Combien de poignées de mains vont être données ?

Solution page 373

Exercice 10.13 (le clavier à neuf touches)

Un clavier comporte neuf touches : 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B et C.
Un *code* obtenu à l'aide de ce clavier est une suite d'une lettre et de trois chiffres.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre « 1 » ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre « 1 » ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Solution page 374

Exercice 10.14 (nombre de mots)

Un programme permet de générer un mot de 1 à 10 lettres en choisissant aléatoirement chacune des lettres dans un alphabet comportant 26.

Déterminer un ordre de grandeur du nombre de mots possibles.

Solution page 374

Exercice 10.15 (réponses possibles à un QCM)

Un QCM est composé de 20 questions. Chacune d'elles propose 4 réponses possibles, dont une seule est correcte. Un · e élève répond au hasard à toutes les questions.

1. Combien y a-t-il de façons de répondre à ce QCM ?
2. Combien y a-t-il de possibilités où exactement 5 réponses sont correctes ?
3. Combien y a-t-il de possibilités où au moins 10 réponses sont correctes ?
4. Quelle est alors la probabilité d'avoir au moins 10 bonnes réponses en répondant au hasard à chacune des questions de ce QCM ?

Solution page 375

Exercice 10.16 (les groupes d'échecs)

Roméo et Juliette sont dans une équipe d'échecs composée de 15 personnes (dont elles).
Pour participer à un grand concours, un groupe de 6 personnes doit être formé.

1. Combien de groupes différents peut-on former ?
2. Combien de groupes contenant Roméo et Juliette peut-on former ?
3. Combien de groupes ne contenant que Roméo ou que Juliette peut-on former ?

Solution page 375

Exercice 10.17 (le jeu du Tarot)

Un jeu de tarot contient 78 cartes :

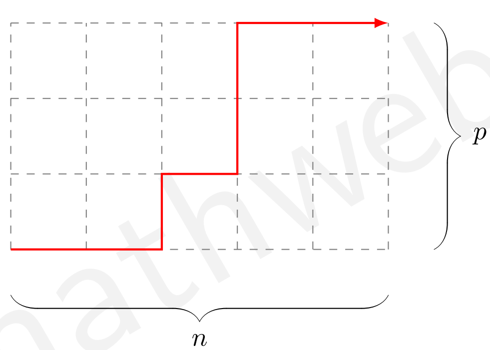
- 21 atouts,
- la carte que l'on appelle l'*excuse*,
- 14 cartes de chacune des 4 couleurs (cœur, pique, trèfle et carreau).

1. Combien de tirages simultanés de six cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant deux atouts et quatre trèfles ?
2. Combien de tirages simultanés de six cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant exactement un atout et au moins trois as ?

Solution page 375

Exercice 10.18 (une puce sur une grille)

Une puce se trouve sur une grille $n \times p$ en bas à gauche et compte rejoindre le point le plus à droite en haut en utilisant un chemin de distance minimale (donc de longueur $n + p$).



Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Solution page 376

Exercice 10.19 (alternance entre pairs et impairs)

Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire *successivement sans remise*.
Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair ?

Solution page 376

Exercice 10.20 (n urnes)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n dont chacune peut accueillir autant de boules que l'on veut.
De combien de manières peut-on y ranger p boules indiscernables ?

Solution page 376

Exercice 10.21 (formule de Vandermonde)

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

On pourra pour cela considérer $(x+1)^{2n}$ et son développement.

Solution page 377

Exercice 10.22 (anagrammes)

1. Combien d'anagrammes y a-t-il au mot « ABYME » ?
2. Combien d'anagrammes différentes y a-t-il au mot « NAPPE » ?
3. Combien d'anagrammes différentes y a-t-il au mot « KAYAK » ?
4. Combien d'anagrammes différentes y a-t-il au mot « UBUESQUE » ?

Solution page 377

Exercice 10.23 (nombre d'atomes)

On estime à 10^{79} le nombre d'atomes dans l'Univers visible.
Combien de cartes différentes devrait avoir un jeu pour que le nombre de permutations possibles dépasse cette valeur ? *Conseil :* n'ayez pas peur de prendre des initiatives !

Solution page 378

Exercice 10.24 (constituer des groupes)

1. De combien de façons peut-on partager 12 personnes en trois groupes, un groupe de 2 et deux groupes de 5 ?
2. Même question avec trois groupes de 4 personnes.

Solution page 379

Objectif bac

Exercice 10.25 (Extraits de divers sujets 2025)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1 Soient E et F les ensembles : $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ et $F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
Affirmation 1 : il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F.

2 Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.
On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.
Affirmation 2 : il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

3 Lorsqu'une personne achète son billet en ligne, un code de validation lui est envoyé par SMS afin qu'elle confirme son achat.
Ce code est généré de façon aléatoire et est constitué de 4 chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.
Affirmation 3 : le nombre de codes différents pouvant être générés est 5 040.

4 Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l' autre équipe.
Affirmation 4 : 47 poignées de mains ont été échangées.

5 Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.
Affirmation 5 : il y a 4 896 possibilités de distribuer ces prix.

6 Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.
Affirmation 6 : il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

7 Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.
Exemple : le mot BAC possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.
Affirmation 7 : le mot EULER possède 120 anagrammes.

Solution page 380

Exercice 10.26 (Extrait du sujet 2 d'Afrique du sud, novembre 2025)

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs non nuls compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi :

$$\{-30; -29; -28; \dots; -1; 1; \dots; 28; 29; 30\}.$$

Il comporte 60 éléments.
On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c.

1 Combien de couples $(a\,;c)$ différents peut-on ainsi obtenir ?

On considère l'événement :

$$M : \text{« l'équation } ax^2 + 2x + c = 0 \text{ possède deux solutions réelles distinctes »},$$

où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2 Montrer que l'événement M a lieu si et seulement si $ac < 1$.

3 Expliquer pourquoi l'événement contraire $\overline{\mathrm{M}}$ comporte 1 740 issues.

4 Quelle est la probabilité de l'événement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

Solution page 381

Exercice 10.27 (événement d'une entreprise)

Une entreprise organise un événement où 8 personnes sont invitées, dont 4 hommes et 4 femmes. On cherche à former des groupes et des équipes pour différentes activités.

Partie A : formation d'un groupe

1. Combien de manières différentes peut-on former un groupe de 5 personnes parmi les 8 personnes invitées, sans distinction de sexe ?
2. Combien de manières différentes peut-on former un groupe de 5 personnes qui contient exactement 3 hommes et 2 femmes ?

Partie B : ordre et sélection

Lors d'un jeu, 3 personnes sont sélectionnées parmi les 8 invitées et elles doivent être classées en fonction de leur performance.

1. Combien de façons différentes peut-on choisir et classer ces 3 personnes ?
2. Dans combien de cas le classement est composé de 2 femmes et 1 homme ?

Partie C : organisation d'une activité

Pour une autre activité, 3 personnes sont tirées au sort parmi les 8 invités, mais cette fois l'ordre dans lequel elles sont choisies importe.

1. Combien de listes ordonnées (p-uplets) de 3 personnes peut-on former parmi les 8 invités ?
2. Quelle est la probabilité que les 3 personnes choisies soient toutes des femmes ?

Partie D : cas pratique

L'organisateur veut constituer une équipe de 4 personnes, mais avec certaines contraintes :

- L'équipe doit comporter au moins une femme.
- L'ordre n'a pas d'importance dans la composition de cette équipe.

Combien de façons différentes peut-il former une telle équipe ?

Solution page 382

Exercice 10.28 (regroupement de personnes)

Les habitants d'un village sont classés en trois catégories différentes, notées A, B et C.
On constitue un groupe de 12 personnes prises au hasard sur un total de 30 personnes qui ont bien voulu se réunir. Dans le groupe de 30 personnes,

- 7 sont de la catégorie A,
- 15 sont de la catégorie B,
- 8 sont de la catégorie C.

1. Combien de groupes de 12 personnes peut-on constituer parmi les 30 personnes qui se sont réunies ?
2. Combien de groupes de 12 personnes peut-on former avec une seule personne de la catégorie A et cinq personnes de la catégorie C ?

Solution page 383

10 Corrigés

Corrigé de l'exercice 10.1 page 364

1 Le mois de janvier peut commencer par « Lundi », « Mardi », ... ou « Dimanche », soit 7 possibilités.
L'imprimeur doit donc imprimer 7 pages différentes pour le mois de janvier.

2 Le mois de février comporte 28 ou 29 jours ; il y a donc deux types de pages à créer :

- pour les mois à 28 jours, il doit créer 7 pages différentes (car le mois peut commencer par 7 jours différents) ;
- pour les mois à 29 jours, il doit aussi créer 7 pages différentes.

Finalement, il doit créer $7 + 7 = 14$ pages différentes.

Corrigé de l'exercice 10.2 page 364

Il y a 3 entrées possibles, 6 plats possibles et 2 desserts possibles, donc il y a $3 \times 6 \times 2 = 36$ repas différents.

Corrigé de l'exercice 10.3 page 364

On utilise le principe multiplicatif pour chaque couple possible (où l'ordre ne compte pas).

- Il y a $20 \times 7 = 140$ possibilités pour les couples polars/art ;
- Il y a $20 \times 5 = 100$ possibilités pour les couples polars/routards ;
- Il y a $7 \times 5 = 35$ possibilités pour les couples art/routards.

Ensuite, on applique le principe additif : on a le choix entre les couples polars/art *ou* polars/routards *ou* art/routards, ce qui fait : $140 + 100 + 35$ possibilités.

> **⚠ Attention 17**
>
> Le mot « OU » correspond à une addition ;
> Le mot « ET » correspond à une multiplication.

Corrigé de l'exercice 10.4 page 364

Ce programme choisit au hasard un nombre entier entre -10 et 10 (inclus). Il y a donc 21 possibilités pour x et pour y.
Le nombre total de possibilités est donc $21 \times 21 = 441$.

Corrigé de l'exercice 10.5 page 364

1 De 100 000 à 999 999, il y a $9 \times 10^5 = 900\ 000$ nombres.
Il y a en effet 9 possibilités (de 1 à 9) pour le premier chiffre, puis 10 possibilités (de 0 à 9) pour les 5 autres chiffres.

2 On souhaite que les 6 chiffres soient tous distincts.
Il y a 9 choix possibles pour le premier chiffre (de 1 à 9), puis 9 choix possibles pour le deuxième chiffre (de 0 à 9 sans le chiffre choisi en premier), puis 8 choix possibles pour le 3^{e} chiffre, etc.
D'après le principe multiplicatif, il y a donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136\ 080$ nombres possibles.

3
- Si le premier chiffre est pair : on a le choix entre 2, 4, 6 ou 8, donc 4 possibilités.
  Pour le deuxième chiffre, on a le choix entre 1, 3, 5, 7 ou 9, donc 5 possibilités.
  Pour le troisième chiffre, on a le choix entre 0, 2, 4, 6 ou 8, soit 5 possibilités.
  etc.
  Il y a donc $4 \times 5^5 = 12\ 500$ nombres possibles.

- Si le premier chiffre est impair : on a le choix en 1, 3, 5, 7 et 9, donc 5 possibilités.
  Pour les 5 autres chiffres, on a aussi le choix entre 5 chiffres.
  Il y a donc $5^6 = 15\ 625$ nombres possibles.

Ainsi, en tout, il y a $12\ 500 + 15\ 625 = 28\ 125$ nombres possibles.

Corrigé de l'exercice 10.6 page 365

1 **Réponse (c)**. En effet, on choisit 5 éléments d'un ensemble de 45 éléments et l'ordre ne compte pas. Le nombre de sous-groupes de 5 éléments possibles est donc $\binom{45}{5}$.

2 **Réponse (d)**. En effet, on choisit 10 éléments d'un ensemble de 50 éléments et l'ordre compte. Il s'agit donc d'un arrangement. Le nombre de sous-groupe de 10 éléments possibles est donc A_{50}^{10}.

3 **Réponse (b)**. En effet, il y a 26 possibilités pour la première lettre, puis 26 pour la deuxième, etc. jusqu'à 26 possibilités pour la huitième. Il y a donc 26^8 possibilités d'issues. Les issues sont des 8-uplets.

Autre solution plus intuitive : on peut énumérer tous les cas.

- **0 voyelle et 8 consonnes :** il y a 20^6 possibilités.
- **1 voyelle et 7 consonnes :** $6^1 \times 20^7 \times \binom{8}{1}$ (le coefficient binomial est là pour dire que l'on peut mettre la voyelle en 8 positions différentes) ;
- **2 voyelles et 6 consonnes :** $6^2 \times 20^6 \times \binom{8}{2}$;
- $\vdots$
- **8 voyelles et 0 consonne :** $6^8 \times 20^0 \times \binom{8}{8}$.

Le nombre total de possibilités est donc la somme :

$$\sum_{k=0}^{8} 6^k \times 20^{8-k} \times \binom{8}{k} = (6+20)^8$$

d'après la formule du binôme de Newton. On arrive au même résultat que précédemment, à savoir 26^8.

4 **Réponse (a)**. Il s'agit de compter le nombre d'anagrammes d'un mot où chaque lettre n'apparaît qu'une seule fois, donc il y en a $n!$, où n est le nombre de lettres (donc ici : $5!$).

Corrigé de l'exercice 10.7 page 365

Un octet est composé de huit bits et il y a deux possibilités pour un bit : 0 ou 1.
Il y a donc $2^8 = 256$ octets possibles.

Corrigé de l'exercice 10.8 page 365

Il y a $2 \times 26 = 52$ lettres possibles (si on compte les majuscules et les minuscules).
Ensuite, il y a 5 possibilités pour le symbole et enfin, 10 possibilités pour le chiffre pris parmi les dix disponibles.
Il y a donc $52 \times 5 \times 10 = 2\ 600$ possibilités pour un « mot » de trois caractères.
Il faut ensuite dénombrer les permutations du mot : il y en a $3! = 6$.

Ainsi, il y a $6 \times 2\ 600 = 15\ 600$ mots de passe possibles.

Corrigé de l'exercice 10.9 page 365

L'équipe 1 doit affronter 11 équipes ; il y a donc 11 matches à prévoir pour cette équipe.
L'équipe 2 doit affronter 10 équipes en plus de l'équipe 1 déjà comptée précédemment : 10 matches.
L'équipe 3 doit affronter 9 équipes en plus des équipes 1 et 2 déjà comptées : 9 matches.
Etc.

On voit alors que l'on doit prévoir $11 + 10 + 9 + \cdots + 1 = \dfrac{11 \times 12}{2} = 66$ matches.

Autre façon de voir : il faut constituer des sous-ensembles de 2 équipes prises parmi les 12 : il y a $\dbinom{12}{2} = 66$ façons de procéder.

Corrigé de l'exercice 10.10 page 366

1 On choisit 5 cartes parmi 52 et l'ordre ne compte pas. Il s'agit donc ici d'une combinaison.
Il y a donc $\dbinom{52}{5} = \dfrac{52!}{5!(52-5)!} = 2\ 598\ 960$ mains possibles.

2 On impose dans cette question le fait qu'il y ait un Roi. Comme l'ordre ne compte pas, on peut considérer que la première est un Roi (il y a 4 choix possibles car il y a 4 Rois dans un jeu de cartes). Nous voulons exactement un Roi ; par conséquent, il ne faut pas qu'il y en ait parmi les autres cartes : on choisit donc 4 cartes parmi les $52 - 4 = 48$ cartes qui ne sont pas des Rois.
Ainsi, il y a $4 \times \dbinom{48}{4} = 778\ 320$ mains comportant exactement un Roi.

3 Nous souhaitons ici exactement deux Piques. Comme l'ordre ne compte pas, on peut considérer que ce sont les deux premières cartes. Il y a $52 \div 4 = 13$ Piques donc il y a $\dbinom{13}{2}$ possibilités pour ces deux cartes. Pour les 3 autres cartes, il faut les choisir parmi les $52 - 13 = 39$ cartes restantes qui ne sont pas des Piques.
Ainsi, il y a $\dbinom{13}{2} \times \dbinom{39}{3} = 712\ 842$ mains possibles contenant exactement 2 Piques.

4 Nous souhaitons ici 2 Piques et 1 Cœur. Selon le même principe que celui utilisé dans la question précédente, on peut dire que le nombre de mains comportant exactement 2 Piques et 1 Cœur est égal à :

$$\underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{2 Piques}} \times \underbrace{\binom{13}{1}}_{\text{1 Cœur}} \times \underbrace{\binom{26}{2}}_{\text{2 autres}} = 329\ 550.$$

Corrigé de l'exercice 10.11 page 366

1 Il y a 7 personnes à permuter donc il y a $7! = 5\ 040$ façons de s'asseoir.

2 Il y a deux groupes (filles et garçons), donc 2 façons de les disposer. Dans le groupe des filles, il y a $3!$ façons de les disposer et dans le groupe des garçons, il y en a $4!$.
Il y a donc $2 \times 3! \times 4! = 288$ façons de s'asseoir.

3 Dans cette question, deux garçons ne peuvent pas être à côté, et deux filles non plus.
Imaginons que les chaises soient numérotées de 1 à 7. Supposons que les garçons s'assoient sur les chaises avec un numéro impair : il y a $4!$ façons de les disposer. De même, il y a $3!$ façons de disposer les filles sur les chaises dont le numéro est pair.
Au final, il y a $4! \times 3! = 144$ façons de les asseoir.

Corrigé de l'exercice 10.12 page 366

Il y a deux façons de raisonner pour cet exercice.

- *Raisonnement combinatoire.*
  Le nombre de poignées de mains est égal au nombre de sous-ensembles à deux éléments que l'on peut former dans un ensemble à 50 d'éléments, à savoir $\dbinom{50}{2} = 1\ 225$.
  Il y a donc 1 225 poignées de mains.

- *Analyse numérique.*
Le premier participant peut serrer la main à 49 personnes. Ensuite, le deuxième peut serrer la main aux 48 personnes restantes. Le troisième peut serrer la main aux 47 autres, etc. jusqu'aux deux dernières personnes qui ne peuvent donner qu'une poignée de mains.
Il y a donc $49 + 48 + 47 + \cdots + 2 + 1$ poignées de mains possibles. Or,
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Il y a donc $\dfrac{49 \times 50}{2} = 1\ 225$ poignées de mains.

Corrigé de l'exercice 10.13 page 366

1 Il y a 3 lettres possibles pour la première entrée (le premier caractère du code) et on a le choix entre 6 chiffres pour chacun des 3 chiffres suivants.
Il y a donc $3 \times 6^3 = 648$ codes possibles.

2 Il y a toujours 3 lettres possibles pour la première entrée, puis 5 choix possibles pour chacun des 3 autres entrées.
Il y a donc $3 \times 5^3 = 375$ codes sans « 1 ».

3 Il y a encore 3 lettres possibles pour la première entrée. Ensuite, on peut raisonner par contradiction : nous avons vu aux questions précédentes qu'il existe 375 codes sans le chiffre « 1 » et qu'il y a 648 codes possibles.
Il y a donc $648 - 375 = 273$ codes ayant au moins un chiffre « 1 ».

4 Il y a 3 lettres possibles pour la première entrée, et il faut compter le nombre d'arrangements de 3 éléments pris parmi 6 pour avoir un code où tous les chiffres sont distincts (l'ordre compte et on peut assimiler ceci à un tirage sans remise, ce qui justifie que c'est bien un arrangement).
Il y a donc $3 \times A_6^3 = 3 \times \dfrac{6!}{3!} = 360$ codes possibles où tous les chiffres sont distincts.

5 Ici encore, on raisonne par contradiction : le contraire de l'événement « le code comporte au moins deux chiffres identiques » et l'événement : « le code comporte des chiffres distincts ».
Il y a donc $648 - 360 = 288$ codes comportant au moins deux chiffres identiques.

Corrigé de l'exercice 10.14 page 366

- Si le mot généré ne contient qu'une lettre alors il y a 26 possibilités.
- Si le mot contient deux lettres alors il y a 26^2 possibilités.
- Si le mot contient trois lettres alors il y a 26^3 possibilités.
- $\vdots$
- Si le mot contient dix lettres alors il y a 26^{10} possibilités.

Ainsi, le nombre total de mots possibles est :
$$26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{10}.$$
Pour rappel, si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors :
$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$
La somme que nous souhaitons calculer est la somme des premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 26$ et de raison $q = 26$. Ainsi,
$$\begin{aligned} 26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{10} &= 26 \times \frac{26^{10} - 1}{26 - 1} \\ &\approx 1,5 \times 10^{14}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10.15 page 367

1 Il y a 4 façons de répondre pour chacune des 20 questions. C'est un 20-uplet sur un ensemble à 4 éléments (les 4 propositions).
Donc il y a $4^{20} = 1\ 099\ 511\ 627\ 776$ façons de répondre à ce QCM.

2 Dans cette question, il ne doit y avoir que 5 bonnes réponses ; celles-ci peuvent être en n'importe quelles positions parmi les 20 questions. Il y a donc $\binom{20}{5}$ possibilités pour ces 5 réponses correctes.

Les 15 autres questions doivent être fausses ; il y a donc 3 choix possibles pour chacune des 15 questions restantes, soit 3^{15} possibilités.

D'après le principe multiplicatif, il y a alors $\binom{20}{5} \times 3^{15}$ façons de répondre pour avoir 5 bonnes réponses.

3 D'après ce que nous avons dit à la question précédente, il y a $\binom{20}{k} \times 3^{20-k}$ façons de répondre pour avoir k bonnes réponses.
D'après le principe additif, le nombre de façons de répondre afin d'avoir au moins 10 bonnes réponses est égal à :

$$\sum_{k=10}^{20} \binom{20}{k} \times 3^{20-k} = 15\ 244\ 087\ 642.$$

4 La probabilité d'avoir au moins 10 bonnes réponses en répondant au hasard à chacune des questions de ce QCM est donc égale à :

$$\frac{15\ 244\ 087\ 642}{1\ 099\ 511\ 627\ 776} \approx 0,014.$$

Corrigé de l'exercice 10.16 page 367

1 On doit ici constituer un groupe de 6 personnes prises parmi les 15 ; c'est donc une combinaison. Il y a donc $\binom{15}{6} = 5\ 005$ groupes possibles.

2 Roméo et Juliette doivent nécessairement être dans le groupe, donc cela revient à constituer un groupe de 4 élèves (en plus de Roméo et Juliette) parmi les $15 - 2 = 13$ élèves restants.
Il y a donc $\binom{13}{4} = 715$ groupes possibles.

3 On ne souhaite ici dénombrer que les groupes ne contenant que Roméo et les groupes ne contenant que Juliette.
Pour les groupes ne contenant que Roméo ou Juliette, il y en a $\binom{2}{1} = 2$. Il y a ensuite $\binom{13}{5}$ façons de placer les 13 autres personnes. Il y a donc $\binom{2}{1} \times \binom{13}{5} = 2\ 574$ groupes ne contenant que Roméo ou que Juliette.

Corrigé de l'exercice 10.17 page 367

1 **Deux atouts et quatre trèfles.**

Ici, nous sommes dans un schéma classique : il y a $\binom{21}{2}$ possibilités de choisir deux atouts et $\binom{14}{4}$ possibilités de choisir quatre trèfles.
il y a donc :

$$\binom{21}{2} \times \binom{14}{4} = 210\ 210$$

tirages possibles.

2 Exactement un atout et au moins trois as.

- *Nombre de tirages contenant exactement un atout et exactement 3 as :*

$$\binom{21}{1}\times\binom{4}{3}\binom{78-21-4}{2}=115\ 752.$$

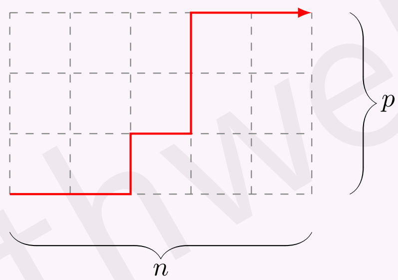
- *Nombre de tirages contenant exactement un atout et exactement 4 as :*

$$\binom{21}{1}\times\binom{4}{4}\binom{78-21-4}{1}=1\ 113.$$

Il y a donc $115\ 752+1\ 113=116\ 865$ tirages correspondant à ce que l'on veut.

Corrigé de l'exercice 10.18 page 367

Symbolisons par « D » le mouvement de la puce qui consiste à se déplacer vers la droite d'une unité, et par « H » le déplacement d'une unité vers le haut.
Le mouvement final est donc représenté par une succession de $n+p$ « D » et « H », comme par exemple : « DDHDHHDD » pour représenter le déplacement donné en exemple :



La question revient donc à trouver le nombre d'anagrammes de ce « mot » de $n+p$ lettres.
D'après la méthode donnée dans le corrigé de l'exercice 10.13, il y en a :

$$\frac{(n+p)\,!}{n\,!p\,!}.$$

Corrigé de l'exercice 10.19 page 368

- **Tirages dont la première boule porte un numéro pair.**
  Il y a n nombres pairs donc il y a n tirages commençant par un nombre pair.
  Il y a ensuite n nombres impairs possibles pour le deuxième numéro.
  Pour le troisième numéro, on a le choix entre $(n-1)$ nombres pairs ; idem pour le quatrième.
  etc.
  Il y a donc $n\,!\times n\,!$ tirages dont le premier numéro est pair.
- **Tirages dont la première boule porte un numéro impair.**
  Le raisonnement est le même que précédemment : il y a $n\,!\times n\,!$ tirages dont le premier numéro est impair.
- Par conséquent, il y a $2\big(n\,!\big)^2$ tirages possibles.

Corrigé de l'exercice 10.20 page 368

Notons u_k le nombre de boules dans l'urne k, $1\leqslant k\leqslant n$.
Décidons alors de représenter les situations possibles par le mot :

$$\underbrace{B\ldots B}_{u_1\text{ lettres }B}\ S\ \underbrace{B\ldots B}_{u_2\text{ lettres }B}\ S\cdots S\ \underbrace{B\ldots B}_{u_n\text{ lettres }B}$$

La lettre « B » désigne une boule et « S » désigne une séparation entre les urnes pour bien les distinguer.

On code les répartitions par un mot de longueur $p+n-1$ contenant :

- p lettres « B » ;
- $n-1$ lettres « S ».

La réponse est donc :

$$\binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p-1}{n-1} = \frac{(n+p-1)\,!}{p\,!(p-1)\,!}.$$

Corrigé de l'exercice 10.21 page 368

D'après la formule du binôme de Newton :

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

Ainsi, le coefficient de degré n du développement de $(x+1)^{2n}$ est égal à $\displaystyle\binom{2n}{n}$.

Nous pouvons aussi écrire :

$$(x+1)^{2n} = \left((x+1)^n\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)^2.$$

Ainsi, le coefficient de degré n du développement de $(x+1)^{2n}$ est égal à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

Or, $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Donc ce coefficient vaut finalement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

D'où l'égalité demandée.

Remarque 68

Par un raisonnement analogue, on peut aussi montrer l'égalité suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n}{k} = \binom{3n}{n}.$$

Corrigé de l'exercice 10.22 page 368

1 Le mot « ABYME » contient cinq lettres distinctes. Le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de permutations de ces cinq lettres.
Il y a donc $5! = 120$ anagrammes au mot « ABYME ».

2 Le mot « NAPPE » contient cinq lettres, mais elles ne sont pas toutes distinctes : il y a quatre lettres distinctes.
Ainsi, parmi les 120 permutations, il y en a qui sont identiques. Comme il y a deux lettres identiques, il y aura deux fois les mêmes permutations (par exemple « P_1P_2NAE » et « P_2P_1NAE » donnent l'anagramme « PPNAE »). Il faut donc diviser par 2 le nombre de permutations.
Il y a donc $\dfrac{5!}{2} = 60$ anagrammes différentes au mot « NAPPE ».

3 Le mot « KAYAK » comporte cinq lettres dont trois sont distinctes.
Selon le même principe expliqué à la question précédente, il faut diviser les 120 permutations par 2 (car il y a deux « K ») et encore par 2 (car il y a deux « A »).
Il y a donc $\dfrac{5!}{2\times 2} = 30$ anagrammes différentes au mot « KAYAK ».

4 Le mot « UBUESQUE » comporte huit lettres dont deux sont répétées : le « U » est présent trois fois et le

« E » l'est deux fois. S'il faut diviser le nombre de permutations par 2 (car il y a deux « E »), il ne suffit pas de diviser encore par 3 car il y a trois « U ». En effet, il faut diviser par $3! = 6$.
Pour mieux comprendre ceci, on peut prendre l'exemple du mot « AAAB » qui admet théoriquement $4! = 4 \times 3 \times 2$ permutations et qui admet pour anagrammes : « AAAB », « AABA », « ABAA » et « BAAA ». Il y en a donc $4 = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = \dfrac{4!}{3!}$.

Ainsi, il y a $\dfrac{8!}{2 \times 3!} = 3\,360$ anagrammes différentes au mot « UBUESQUE ».

Methode 13 (non officiellement au programme)

Si un mot de n lettres comporte k lettres identiques, il y a $\dfrac{n!}{k!}$ anagrammes différentes de ce mot.

S'il comporte k lettres identiques et p autres lettres identiques différentes des premières alors il y a $\dfrac{n!}{k! \times p!}$ anagrammes différentes.

Remarque 69

On peut raisonner différemment en disant que trouver une anagramme du mot revient à :

- placer 3 lettres « U » parmi les 8 positions possibles : il y a $\binom{8}{3}$ possibilités ;
- placer 2 lettres « E » parmi les $8 - 3 = 5$ positions restantes : il y a $\binom{5}{2}$ possibilités ;
- trouver le nombre d'anagrammes sur les $5 - 2 = 3$ lettres restantes : il y a $3!$ possibilités.

On arrive alors à $\dbinom{8}{3} \times \dbinom{5}{2} \times 3! = 3\,360$ anagrammes différentes.

Corrigé de l'exercice 10.23 page 368

Notons n le nombre de cartes différentes. Le nombre de permutations est alors égal à $n!$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :

$$n! \geqslant 10^{79}.$$

Pour résoudre cette inéquation, on peut faire appel au logarithme népérien :

$$\begin{aligned} n! \geqslant 10^{79} &\iff \ln(n!) \geqslant \ln\left(10^{79}\right) \\ &\iff \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) \geqslant 79\ln(10). \end{aligned}$$

On peut alors faire appel à un programme Python pour déterminer la première valeur de n pour laquelle l'inégalité est vraie.

Code Python 10-33

```python
from math import log
n = 1
s = 0
while s < 79*log(10):
    n += 1
    s += log(n)
print(n)
```

Ce programme affiche la valeur « 59 ».

Il faut donc que le jeu comporte 59 cartes différentes pour que le nombre de permutations dépasse le nombre d'atomes dans l'Univers visible.

Si vous n'avez pas encore vu la notion de logarithme népérien, le programme suivant affiche aussi « 59 » :

Code Python 10-34

```python
f,n = 1,1
while f < 10**79:
    n += 1
    f *= n
print(n)
```

Remarque 70

Remplacez « 79 » par « 1 000 » dans les deux programmes et vous verrez pourquoi le premier est plus intéressant...
Spoiler alert : le second risque de prendre pas mal de temps, même avec un bon processeur !

Corrigé de l'exercice 10.24 page 368

1 Avant de traiter l'exercice, on peut prendre l'exemple d'un groupe de 4 personnes, notées a, b, c et d. Si on veut constituer deux groupes de deux personnes, on a les possibilités page suivante.

Groupe 1	Groupe 2
a avec b	c avec d
a avec c	b avec d
a avec d	b avec c

Il y a seulement 3 possibilités alors que nos calculs nous pousseraient peut-être à dire qu'il y en a $\binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 6$ (on choisit 2 personnes parmi les 4 pour constituer le premier groupe et pour le second, on en choisit 2 parmi les deux restantes). Avec cette dernière méthode, il faut comprendre que l'on considère que les cas « Groupe 1 : a avec b, Groupe 2 : c avec d » et « Groupe 1 : c avec d, Groupe 2 : a avec b » sont distincts alors que non. Il faut donc diviser par deux le nombre de possibilités trouvées par cette méthode.

Revenons maintenant à notre exercice : il y a $\binom{12}{2}$ façons de constituer un groupe de 2 personnes prises parmi les 12, puis $\binom{10}{5}$ façons de constituer un autre groupe de 5 personnes prises parmi les 10 restantes, et enfin une seule façon de constituer le dernier groupe de 5 personnes.

Le nombre total de groupes possibles est donc : $\dfrac{\dbinom{12}{2} \times \dbinom{10}{5}}{2} = 8\ 316$.

2 Pour cette question encore, prenons un cas simple. Considérons un groupe de 6 personnes, notées a, b, c, d, e et f, que l'on souhaite partager en groupes de 2. Les différents groupes possibles sont donnés dans le tableau suivant :

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
a avec b	c avec d	e avec f
	c avec e	d avec f
	c avec f	d avec e
a avec c	b avec d	e avec f
	b avec e	d avec f
	b avec f	d avec e

$\vdots$

$\downarrow$

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
a avec d	b avec c	e avec f
	b avec e	c avec f
	b avec f	c avec e
a avec e	b avec c	d avec f
	b avec d	c avec f
	b avec f	c avec d
a avec f	b avec c	d avec e
	b avec d	c avec e
	b avec e	c avec d

Nous avons mis en rouge les groupes distincts : il y en a 15. Or, avec une méthode de dénombrement « classique », on obtiendrait :

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 90 \text{ groupes possibles.}$$

Le nombre de groupes possibles est donc égal à :

$$\frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{6} = \frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{3!}.$$

Revenons maintenant à notre exercice : nous voulons constituer 3 groupes de 4 personnes, ce qui nous amène au calcul suivant :

$$\frac{\binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4}}{3!} = 5\ 775.$$

Il y a donc 5 775 groupes possibles.

Corrigé de l'exercice 10.25 page 369

1 Il y a 7 éléments dans E, donc il y a $7 \times 6 \times 5 = 210$ 3-uplets d'éléments *distincts* de E.

Il y a 10 éléments dans F donc il y a $\binom{10}{4} = 210$ combinaisons à 4 éléments de F.

Finalement, l'affirmation 1 est fausse.

2 On souhaite ici constituer un groupe de 3 filles (prises parmi 18) et de 3 garçons (pris parmi 14). L'ordre ne compte pas donc le nombre d'équipes est :

$$\binom{3}{18} \times \binom{14}{3} = 297\ 024.$$

L'affirmation 2 est donc vraie.

3 Le code à 4 chiffres doit comporter 4 chiffres distincts, le premier chiffre étant différent de 0. On a donc le choix entre :

- 9 chiffres pour le premier (de 1 à 9) ;
- 9 chiffres pour le deuxième (0 et les 8 autres qu'il reste si on exclut le premier choisi) ;
- 8 chiffres pour le troisième (en excluant les deux qui ont été choisis pour le premier et le deuxième chiffre du code) ;
- 7 chiffres pour le quatrième.

Le nombre de codes possibles est donc :

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\ 536.$$

L'affirmation 3 est donc fausse.

4 Chaque joueur de l'équipe ayant 22 joueurs serre la main de chaque joueur de l'autre équipe (avec 25 joueurs). Il s'agit donc d'un *produit cartésien.*

Il y a donc $22 \times 25 = 550$ poignées de mains.

<u>L'affirmation 4 est donc fausse.</u>

5 On cherche ici non pas un *podium* mais un groupe de 3 personnes parmi les 18 concurrents. Il y a donc

$$\binom{18}{3} = 816$$

groupes possibles.

<u>L'affirmation 5 est donc fausse.</u>

6 On impose ici que Jacques fasse partie du podium. Il reste donc 2 places. On cherche donc un arrangement à deux éléments dans un ensemble à seulement 6 éléments (le groupe total auquel on enlève Jacques). Il y a donc :

$$6 \times 5 = 30$$

possibilités.

Mais il nous reste à placer Jacques, et il y a $\binom{3}{1} = 3$ manières de le placer.

Finalement, il y a $30 \times 3 = 90$ podiums possibles.

<u>L'affirmation 6 est donc vraie.</u>

7 Une anagramme du mot EULER est une permutation : il y en aurait $5\,!$ si l'on distinguait les deux « E », ce qui n'est pas le cas. On les compte donc deux fois en prenant $5\,!$ anagrammes.

Finalement, il y a $\dfrac{5!}{2} = 60$ anagrammes au mot EULER.

<u>L'affirmation 7 est donc fausse.</u>

Corrigé de l'exercice 10.26 page 369

1 On a le choix entre 60 entiers pour le premier nombre a.

Il n'y a pas de remise (donc $a \neq c$) ; il y a donc 59 choix possibles pour c.

<u>Il y a donc $60 \times 59 = 3\,540$ couples différents.</u>

2 L'équation a deux racines réelles distinctes si et seulement si le discriminant est supérieur à zéro :

$$\Delta = 4 - 4ac > 0 \iff 4(1 - ac) > 0 \iff 1 - ac > 0 \iff ac < 1.$$

3 $\overline{\mathrm{M}} \iff ac \geqslant 1.$

Il faut donc trouver le nombre de couples vérifiant $ac \geqslant 1$, mais en fait $ac > 1$ puisque l'on ne peut avoir $(-1\,;-1)$ ni $(1\,;1)$.

Si l'on choisit en premier un entier négatif (30 choix), le second terme sera choisi dans les 29 entiers négatifs restant, soit $30 \times 29 = 870$ couples.

Il en est de même si les deux termes choisis sont positifs.

L'événement $\overline{M}$ sera réalisé pour $870 + 870 = 1\,740$ couples.

4 D'après le résultat précédent, l'événement M sera réalisé pour $3\,540 - 1\,740 = 1\,800$ couples.

Donc :

$$p(M) = \frac{1\,800}{3\,540} = \frac{30}{59} \approx 0{,}51.$$

Corrigé de l'exercice 10.27 page 370

Partie A

1 On cherche à former un groupe de 5 personnes parmi 8, sans distinction de sexe. Le nombre de combinaisons possibles est donné par : $\binom{8}{5} = 56$.

Il y a donc 56 façons de former ce groupe.

2 Pour former un groupe de 5 personnes comprenant exactement 3 hommes et 2 femmes, on doit d'abord choisir 3 hommes parmi les 4, puis 2 femmes parmi les 4 :

$$\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24.$$

Il y a donc 24 façons de former ce groupe.

Partie B

1 Si l'on doit choisir et classer 3 personnes parmi les 8 invités, le nombre d'arrangements est donné par :

$$8 \times 7 \times 6 = 336.$$

Il y a donc 336 façons de choisir et de classer ces 3 personnes.

2 Pour classer 2 femmes et 1 homme, on doit d'abord choisir 2 femmes parmi les 4, puis 1 homme parmi les 4, et enfin les classer. Le nombre total de possibilités est donc :

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times 3\,! = 6 \times 4 \times 6 = 144.$$

Il y a donc 144 façons de former et classer ce groupe.

Partie C

1 Il s'agit ici d'un tirage sans remise ordonné, donc d'un arrangement

$$8 \times 7 \times 6 = 336.$$

Il y a donc 336 listes ordonnées possibles.

2 Le nombre de 3-uplets où les 3 personnes sont des femmes est :

$$4 \times 3 \times 2 = 24.$$

La probabilité que les 3 personnes choisies soient des femmes est donc :

$$\frac{24}{336} = \frac{1}{14}.$$

Partie D

On doit former une équipe de 4 personnes parmi les 8, avec au moins une femme. Le nombre total de combinaisons pour former une équipe de 4 personnes parmi 8 est :

$$\binom{8}{4} = 70.$$

Le nombre de combinaisons ne contenant que des hommes (choisir 4 hommes parmi 4) est : 1.
Le nombre de façons de former une équipe avec au moins une femme est donc :

$$70 - 1 = 69.$$

Corrigé de l'exercice 10.28 page 370

1 *Combien de groupes de 12 personnes peut-on constituer parmi les 30 personnes qui se sont réunies ?*

On doit constituer des groupes de 12 personnes *parmi* les 30 présentes. L'ordre de ces personnes ne compte pas et il n'y a pas de répétitions possibles. Il s'agit donc ici d'une combinaison (sur le même modèle que les mains d'une carte).

Il y a donc $\binom{30}{12} = 86\ 493\ 225$ groupes possibles.

2 *Combien de groupes de 12 personnes peut-on former avec une seule personne de la catégorie A et cinq personnes de la catégorie C ?*

Nous devons choisir 1 personne (parmi les 7 de la catégorie A), puis 5 personnes (parmi les 8 de la catégorie C), puis 6 personnes (parmi les 15 de la catégorie B).
Il y a donc :

$$\binom{7}{1} \times \binom{8}{5} \times \binom{15}{6} = 1\ 961\ 960 \text{ possibilités.}$$

11 Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

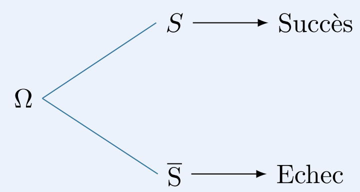
Dans ce chapitre

1 Succession d'épreuves indépendantes

1 Épreuve de Bernoulli

Définition 51

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire où seules 2 issues sont possibles : le *succès* (S) et l'*échec* ($\overline{\text{S}}$).



Exemple 71

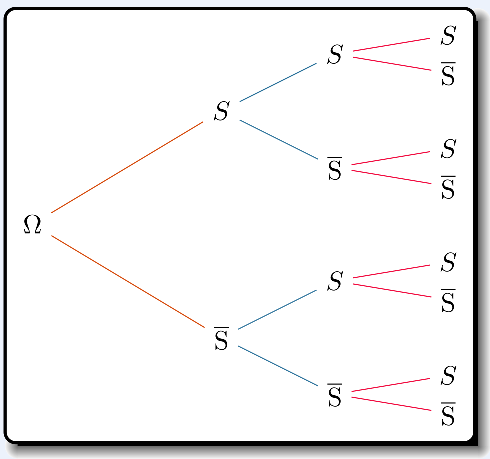
1. Sur une chaîne de production de smartphones, on en choisit un au hasard. L'épreuve consistant à regarder s'il est défectueux est une épreuve de Bernoulli : il est défectueux (S) ou non défectueux ($\overline{\text{S}}$).
2. Dans une trousse, on choisit au hasard un stylo. L'épreuve consistant à regarder s'il est rouge est une épreuve de Bernoulli : soit il l'est (S), soit il ne l'est pas ($\overline{\text{S}}$).

2 Schéma de Bernoulli

Définition 52

On répète n fois une même épreuve de Bernoulli dans les mêmes conditions (on dit : *de façon indépendante*). Cette succession d'épreuves est appelée un **schéma de Bernoulli**.

On représente un schéma de Bernoulli de la manière suivante :



Exemple de 3 successions d'épreuves de Bernoulli

2 Loi Binomiale

1 Loi de Bernoulli

Définition 53

On considère une épreuve de Bernoulli dont le succès est de probabilité p.
On note X la variable aléatoire représentant l'issue de cette épreuve : $X(\Omega) = \{0; 1\}$.
La loi de probabilité de X est appelée *loi de Bernoulli* et est donnée par le tableau suivant :

$X = k$	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Remarque 71

L'épreuve de Bernoulli et la loi de Bernoulli tirent leur nom du mathématicien Jacques Bernoulli (1654 – 1705).

2 Loi binomiale

Définition 54

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p. On répète n fois de façon indépendante cette épreuve, et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de succès à l'issue de cette succession d'épreuves.
On dit que la loi de probabilité de X est la **loi binomiale** de paramètres n et p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)$.

À l'issue de ces n épreuves, X peut valoir 0, 1, 2, ... jusqu'à n :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; \cdots; n-1; n\}$$

Propriété 74 (nombre de chemins à k succès)

Si on répète n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli alors il y a $\binom{n}{k}$ chemins comportant exactement k succès.

En effet, on regarde combien de « mots » de n lettres (prises dans l'alphabet $\{\mathrm{S}\,;\overline{\mathrm{S}}\}$) comportent exactement k lettres « S » : l'ordre compte et les lettres peuvent se répéter. Il s'agit donc d'une combinaison, d'où un nombre égal à $\binom{n}{k}$.

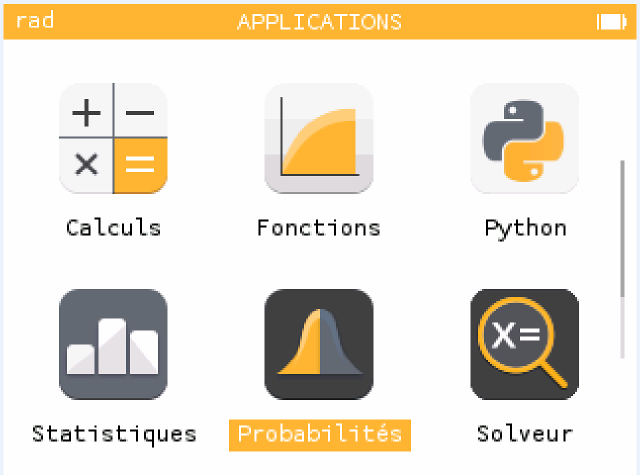
Propriété 75 (formule de Bernoulli)

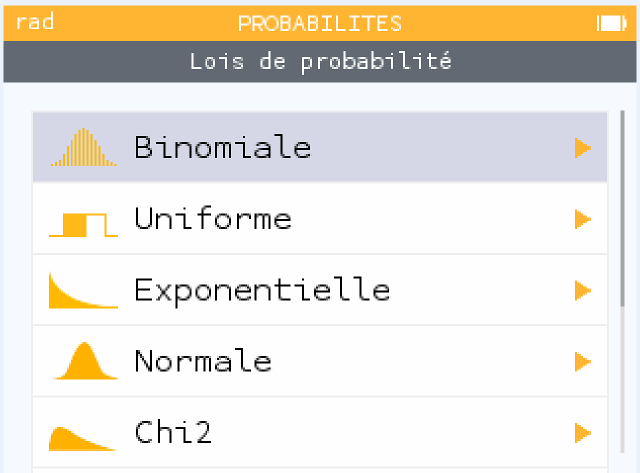
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)$.
Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n,

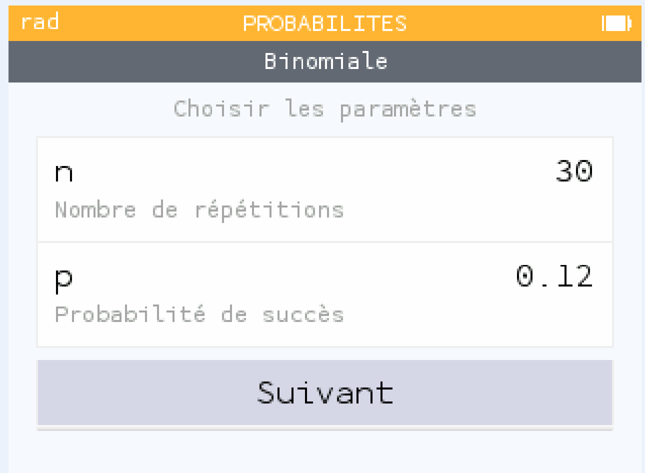
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dans la pratique, les calculatrices permettent de donner une valeur approchée de $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} = k\right)$ très facilement.

Par exemple, sur la Numworks, pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(30\,;0,12)$:

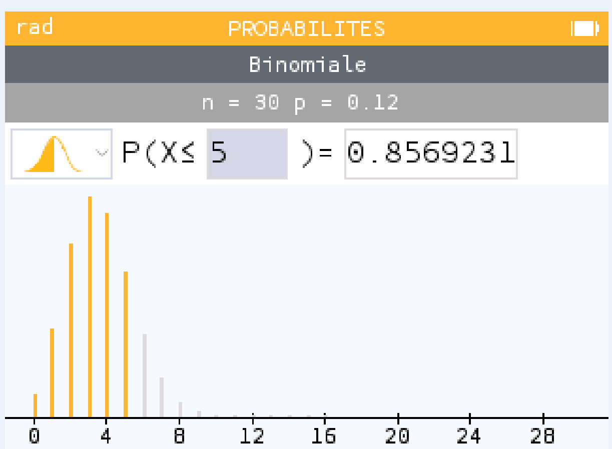




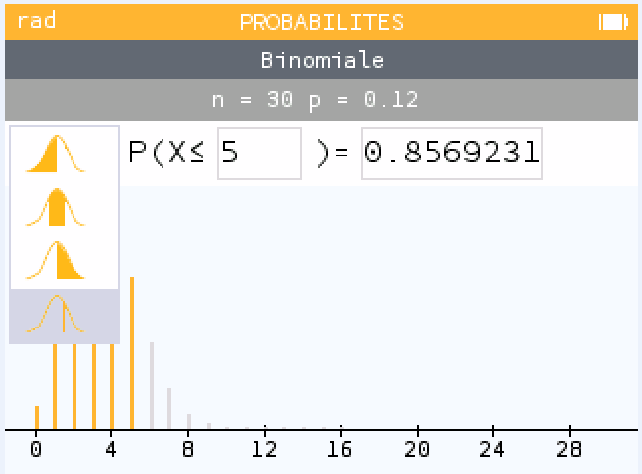


En cliquant sur « Suivant », on peut calculer par exemple :

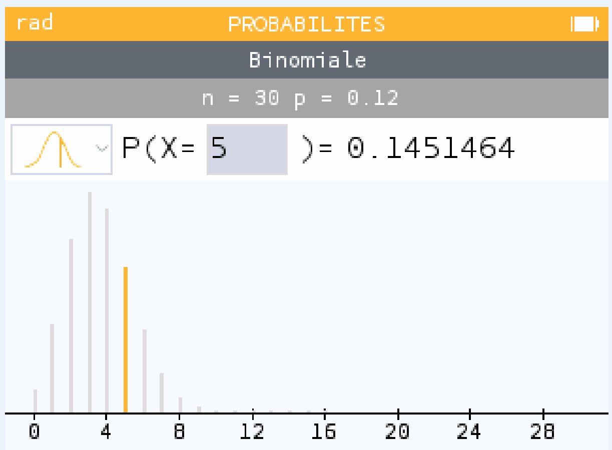
- $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 5)$:



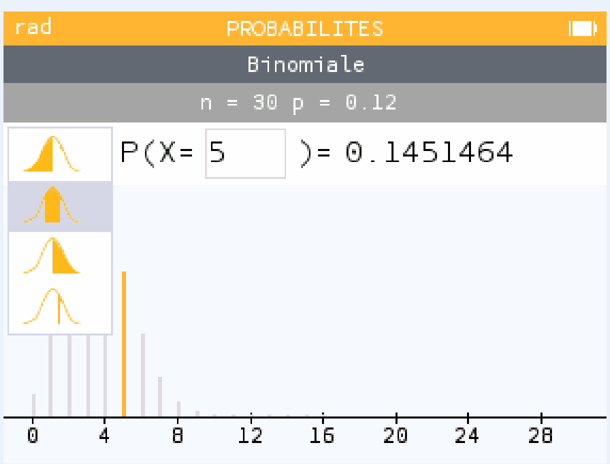
Mais en bougeant le curseur vers la gauche et en cliquant sur l'icône, puis en descendant tout en bas :

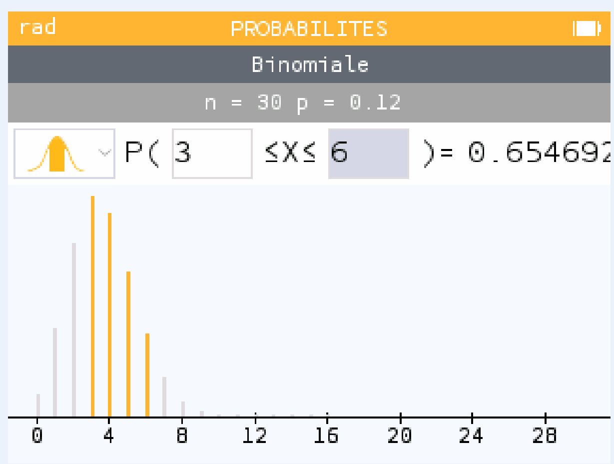


- on peut calculer par exemple $\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)$:



- En sélectionnant, parmi les choix proposés en cliquant sur l'icône à gauche, le deuxième en partant du haut, on peut calculer par exemple $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$:





Propriété 76 (espérance, variance et écart-type)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\,(n\,;p)$. Alors,

- son espérance mathématique est :
$$\mathbb{E}\,(\mathrm{X}) = n \times p;$$
- sa variance mathématique est :
$$\mathbb{V}\,(\mathrm{X}) = n \times p \times (1-p);$$
- son écart-type est :
$$\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}.$$

Exemple 72

Dans une urne, il y a 7 boules bleues et 3 rouges.
On choisit au hasard une boule de cette urne puis on la remet, et on répète cette expérience 10 fois de façon indépendante.
La probabilité de choisir une boule bleue lors d'un tirage est $p = 0,7$.
Si X représente le nombre de boules bleues obtenues à l'issue de ces 10 tirages au sort, alors X suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ et son espérance est :
$$E(X) = 10 \times 0,7 = 7.$$

3 Simulation de la planche de Galton en Python

Je vous encourage à regarder la page de mon site :

https://www.mathweb.fr/euclide/simulation-de-la-planche-de-galton-en-python/

11 Exercices types

Exercice type 40 ► reconnaître une succession d'épreuves indépendantes

On dispose d'une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher : 7 rouges et 3 jaunes.
On effectue un tirage aléatoire de 5 boules de cette urne, et on regarde leur couleur.
Parmi les méthodes suivantes, quelle est celle qui correspond à une succession d'épreuves indépendantes ?

- Méthode A : on tire 5 boules simultanément.
- Méthode B : on tire 5 boules les unes après les autres sans les remettre.
- Méthode C : on tire 5 boules les unes après les autres en les remettant au fur et à mesure.

Il s'agit de la méthode C : en effet, en choisissant une boule et en la remettant, on conserve l'univers (constitué des 10 boules de l'urne).
L'épreuve de Bernoulli qui est répétée 5 fois de manière indépendante est ici :

« On tire une boule de l'urne et on regarde sa couleur. »

Exercice type 41 ► justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale

On dispose d'une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher : 7 rouges et 3 jaunes.
On effectue un tirage aléatoire avec remise de 5 boules de cette urne, et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules jaunes obtenues à l'issue de cette expérience.

1 Quelle est la loi de probabilité de X ?

2 Calculer $P(X = 3)$.

3 Calculer $P(X \geqslant 1)$.

4 Dans cette question, on tire n boules (et non plus 5).
Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,999$.

1 L'expérience consistant à tirer une boule au hasard dans l'urne est une expérience de Bernoulli (deux issues : la boule est jaune ou elle ne l'est pas) dont la probabilité d'un succès est $p = \dfrac{3}{10}$ (car il y a 3 boules jaunes sur les 10 boules de l'urne).
Elle est répétée de manière indépendante donc l'expérience globale est un schéma de Bernoulli.
Ainsi, la variable aléatoire X représentant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$.

2 $P(X = 3) = \dbinom{5}{3} \times 0,3^3 \times (1 - 0,3)^{5-3} = 0{,}132\ 3$.

3 $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,3)^5 = 1 - 0,7^5 = 0{,}831\ 93$.

4 $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,7^n$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } P(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\iff 1 - 0,7^n \geqslant 0,999 \\
&\iff 0,7^n \leqslant 0,001 \\
&\iff \ln\left(0,7^n\right) \leqslant \ln(0,001) \\
&\iff n \times \ln(0,7) \leqslant \ln(0,001) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,7)} \text{ (car } 0 < 0,7 < 1 \text{ donc } \ln(0,7) < 0) \\
&\iff n \geqslant 19,36.
\end{aligned}$$

Le premier entier n tel que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,999$ est donc $n = 20$.

11 Exercices

Exercice 11.1 (QCM)

Pour chaque question, donner la bonne réponse parmi les propositions faites.

1 L'espérance mathématique de la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$ est :

a. $0,02$ **b.** $0,2$ **c.** 2 **d.** 20

2 La variance de la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,15$ est :

a. 3 **b.** $2,55$ **c.** 17 **d.** $0,1275$

Solution page 398

Exercice 11.2 (tirage dans une urne)

Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules vertes. On tire successivement au hasard et de façon indépendante 5 boules de cette urne en les remettant dans l'urne après avoir regardé leur couleur.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules bleues tirées à la fin de cette expérience.

1 Décrire X (donner la valeurs possibles de X).

2 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

3 Calculer alors :

a. $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0)$ **b.** $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3)$ **c.** $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 1)$

Solution page 398

Exercice 11.3 (au tennis)

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6. Ils décident de jouer trois matches dans l'année (les résultats des matches sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.
Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matches gagnés par Benjamin et D la variable aléatoire correspondant à la dépense de Benjamin.

1 Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer D en fonction de X et en déduire les valeurs possibles de D.

2 Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 € est 0,432.

3 Calculer l'espérance de dépense en fin d'année de Benjamin.

Solution page 398

Exercice 11.4 (jeu radiodiffusé)

Lors d'un jeu radiodiffusé, on estime que le candidat, quelle que soit la question posée, a deux chances sur trois de donner la bonne réponse. Il gagne 50 euros par réponse exacte.
L'animateur du jeu lui pose successivement cinq questions.

1. Calculer la probabilité que le candidat ait cinq bonnes réponses.
2. Quelle est la probabilité que le candidat gagne 250 euros ?
3. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses exactes au bout des cinq questions. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier la réponse.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y qui compte le gain total du joueur.
5. Calculer l'espérance de gain du joueur.

Solution page 399

Exercice 11.5 (lancers d'une pièce)

Un joueur lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Chaque fois que le joueur obtient Face, il gagne 2 points, sinon il perd 1 point.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.

Solution page 399

Exercice 11.6 (quel drone choisir ?)

Un drone A est muni de deux moteurs et un drone B est doté de quatre moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne. Les pannes surviennent de façon indépendante.
Chaque drone arrive à destination si et seulement si strictement moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne.
Quel drone doit-on choisir (en fonction de la valeur de p) ?

Solution page 400

Exercice 11.7 (chaîne de fabrication)

Le responsable de fabrication de l'usine ELECTOP est chargé de contrôler une chaîne de production fabriquant un composant électronique. Sur 10 000 composants pris au hasard, il constate que 7 sont défectueux. Il suppose donc que la probabilité d'avoir un composant défectueux fabriqué par cette chaîne de production est égale à 0,000 7.
Le mois suivant, il choisit au hasard sur cette chaîne de production 20 composants.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de composants défectueux.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2)$.

Solution page 400

Exercice 11.8 (trajet à vélo)

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h. Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.

Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps (en minute) mis par l'élève pour aller au lycée.

1. Déterminer la loi de probabilités de X.
2. Exprimer T en fonction de X.
3. Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\mathrm{T})$ de T et interpréter ce résultat.
4. L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   Calculer la probabilité que l'élève soit en retard au lycée.

Solution page 400

Exercice 11.9 (dans un hôpital)

Dans un hôpital, lors d'une pandémie d'une maladie appelée « STAS-3 », 63 % des patients qui arrivent aux urgences présentent les symptômes de cette maladie, dont 78 % sont réellement atteints par la STAS-3.
Parmi les autres patients, 7 % s'avèrent atteints de cette maladie.

On choisit au hasard parmi tous les patients du service des urgences une personne.
On note :

- S l'événement : « la personne choisie présente des symptômes de la STAS-3 »,
- M l'événement : « la personne est réellement atteinte de la STAS-3 ».

1. Construire un arbre de probabilités représentant cette situation.
2. Quelle est la probabilité que la personne choisie présente des symptômes de la STAS-3 et soit réellement atteinte de cette maladie ?
3. Montrer que la probabilité que la personne choisie soit réellement atteinte de la STAS-3 est égale à 0,5173.
4. La personne choisie n'est pas atteinte de la STAS-3. Quelle est la probabilité qu'elle ait présenté des symptômes lors de son arrivée aux urgences.

L'hôpital reçoit 100 € de prime pour chaque patient atteint de la STAS-3 en plus de 100 000 € de forfait pour faire face à cette pandémie. On choisit au hasard 20 personnes aux urgences. Il y a tellement de personnes que l'on peut assimiler ceci à un tirage aléatoire avec remise. On note :

- X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes réellement atteintes par la STAS-3,
- G la variable aléatoire qui représente la prime gagnée par l'hôpital.

5. Quelle est la loi de probabilité de X ?
6. Exprimer G en fonction de X. Calculer alors la prime moyenne que pourrait recevoir l'hôpital sur ces 20 patients.
7. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant 5)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant 10)$. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.
8. Déterminer le premier entier k pour lequel $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant k)\geqslant 0,95$.

Solution page 401

Approfondissements

Exercice 11.10 (avec une suite et une dérivée)

Le jeu des petits chevaux nécessite un dé. Dans ce jeu, un joueur doit faire un « 6 » pour sortir de son enclos et commencer la partie. Tant qu'il n'a pas fait de « 6 », il continue de lancer le dé (à tour de rôle avec les autres joueurs) jusqu'à ce qu'il en obtienne un.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers de dé jusqu'à obtention d'un « 6 ».

1 Déterminer la probabilité pour que le joueur obtienne un « 6 » au premier lancer. En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)$.

2 Déterminer la probabilité pour que le joueur obtienne un « 6 » au second lancer. En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$.

3 Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel k, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\times\dfrac{1}{6}$.

4 On pose $u_n=\mathrm{P}(\mathrm{X}=n)$. et $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$.

- **a.** Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- **b.** En déduire une expression simplifiée de S_n.
- **c.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$.

5 On admet que l'espérance mathématique de X est $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$.

On pose alors $f_k(x)=x^k$, où $k\in\mathbb{N}^*$, et $F_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$.

- **a.** Calculer $f_k'(x)$, la dérivée de $f_k(x)$, en fonction de k.
- **b.** En déduire que $F_n'(x)=\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ pour tout $x\neq 1$.

  On admettra que $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n=0$.
- **c.** En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

Solution page 402

Exercice 11.11 (simulation d'une variable aléatoire)

Lors d'un jeu, le gain d'un joueur quelconque est modélisé par la variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité ci-dessous :

$X = k$	-20	0	5	100
$P(X = k)$	0,78	0,09	0,07	0,06

1 Vérifier que l'espérance mathématique de X est $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = -9,25$ et que son écart-type est $\sigma(X) \approx 28,78$.

2 On considère la fonction Python suivante :

Code Python 11-35

```python
from random import random
# random() retourne un nombre pseudo-aléatoire dans [0;1[

def simul():
    x = random()
    if x <= 0.78:
        return -20
    elif x > 0.78 and x <= 0.87:
        return 0
    elif x > 0.87 and x <= 0.94:
        return 5
    else:
        return 100
```

Expliquer en quoi cette fonction simule la variable aléatoire X.

3 On considère fonction Python suivante :

Code Python 11-36

```python
def echantillon(n):
    L = [ ]
    for _ in range(n):
        L.append( simul() )

    return sum(L)/n
```

Expliquer à quoi correspond `echantillon(n)` pour un n assez grand dans le cadre de cet exercice.

Solution page 404

Exercice 11.12 (problème de surréservation)

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.
Soit a un réel strictement positif.

1 Écrire une fonction Python `seuil(n,p,a)` retournant le premier entier k tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} > k) \leqslant a$.

Pour cela, on dispose d'un module Python nommé « probastat », que l'on pourra télécharger sur la page :

https://www.mathweb.fr/euclide/2021/04/09/probabilites-et-python-au-lycee-loi-binomiale-et-variables-aleatoires/

et de son *objet* « binom », grâce auquel on peut définir une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, et de sa méthode « proba_cdf(k) » qui permet de calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k)$.

```
>>> from probastat import binom
>>> X = binom(50,0.42)
>>> X.proba_cdf(10)
0.0008877309619108356
```

Cela signifie que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 10) \approx 8,877 \times 10^{-4}$.

2 Une compagnie aérienne, dont on taira le nom pour ne pas ternir sa réputation, a l'habitude de vendre plus de billets que de places dans un avion.
L'avion X555 comporte 300 places. On note n le nombre de billets d'avion vendus, nombre pouvant être supérieur à 300.
On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de clients ayant acheté un billet et se présentant au guichet lors de l'embarquement. On suppose que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0,9)$.
À l'aide de la fonction Python précédente, déterminer le plus petit entier n tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 300) \leqslant 0,05$.

Solution page 405

Exercice 11.13 (loi géométrique)

On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'épreuves de Bernoulli de paramètre p nécessaires pour obtenir le premier succès.
On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p.

1 Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = p(1-p)^{k-1}$, pour tout entier $k \geqslant 1$.

2 On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Déterminer alors l'espérance mathématique de X.

3 Dans un urne sont mises 15 boules rouges et 5 boules noires, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule de cette urne en la remettant tant que la boule choisie n'est pas noire.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules tirées à l'issue de cette expérience.
Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et en donner une interprétation.

Solution page 406

Objectif bac

Exercice 11.14 (Extrait du sujet 2 d'Asie, juin 2025)

Pendant une épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'île de La Réunion est de 0,36.
On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.
Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'événement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à 0,99. Expliquer la démarche.

Solution page 407

Exercice 11.15 (Extrait du sujet 2 des Centres étrangers, juin 2025)

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre.
On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis.
   On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Solution page 407

Exercice 11.16 (Extrait du sujet 1 de Polynésie, juin 2025)

On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.
On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.
On admet que la probabilité de choisir un enfant atteint d'une allergie alimentaire est égale à 0,09.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire ?
   Arrondir le résultat à 10^{-4}.

Solution page 407

11 Corrigés

Corrigé de l'exercice 11.1 page 391

1 Réponse **(c)**. D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ alors $E(X) = np$.
Donc ici, $E(X) = 10 \times 0,2 = 2$.

2 Réponse **(b)**. D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ alors $V(X) = np(1-p)$.
Donc ici, $V(X) = 20 \times 0,15 \times (1 - 0,15) = 2,55$.

Corrigé de l'exercice 11.2 page 391

1 X $= \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$. En effet, sur 5 tirages successifs avec remise de la boule tirée, on peut n'avoir aucune boule bleue comme en avoir 1, 2, 3, 4 ou 5.

2 L'expérience consistant à choisir au hasard une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est S : « avoir une boule bleue », dont la probabilité est $p = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
Ainsi, si l'on répète de façon indépendante 5 fois cette expérience, cela constitue un schéma de Bernoulli ; ainsi, la variable aléatoire représentant le nombre de succès obtenus à l'issue de ce schéma suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;0,3)$.

3 $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(5\,;0,3)$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $p = 0,3$. Ainsi :

a. $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \dbinom{5}{0} \times 0,3^0 \times (1 - 0,3)^{5-0} = 1 \times 1 \times 0,7^5 = 0{,}168\ 07$.

b. $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) = \dbinom{5}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^2 = 0{,}132\ 3$.

c. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0{,}168\ 07 = 0{,}831\ 93$.

Corrigé de l'exercice 11.3 page 391

1 X $= \{0\,;1\,;2\,;3\}$.
$\mathrm{D} = 20(3 - \mathrm{X})$ donc D $= \{0\,;20\,;40\,;60\}$.

2
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{D} = 40) &= \mathrm{P}(60 - 20\mathrm{X} = 40)\\
&= \mathrm{P}(-20\mathrm{X} = -20)\\
&= \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1)\\
&= \binom{3}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^2\\
&= 0,432.
\end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{D}) &= \mathbb{E}(60\text{-}20\mathrm{X})\\
&= 60 - 20\mathbb{E}(\mathrm{X}) \text{ par linéarité de l'espérance}\\
&= 60 - 20 \times (3 \times 0,4)\\
&= 36.
\end{aligned}$$
Benjamin peut donc s'attendre à dépenser en moyenne 36 € par an.

Corrigé de l'exercice 11.4 page 392

1 Le jeu est une succession de 5 expériences identiques et indépendantes.
« Donner cinq bonnes réponses » correspond à la liste de cinq résultats « Donner la bonne réponse », et a donc pour probabilité :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}.$$

2 Le candidat gagne 250 euros lorsqu'il a cinq bonnes réponses, donc la probabilité qu'il gagne 250 euros est :

$$\frac{32}{243}.$$

3 Chaque question correspond à une épreuve de Bernoulli dont le succès est « Donner la bonne réponse », et a pour probabilité $\frac{2}{3}$.

Comme il y a 5 répétitions indépendantes, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5\,;\frac{2}{3}\right)$.

4 Comme chaque réponse exacte fait gagner 50 euros, si on note y_i les valeurs prises par Y, on a $y_i = 50x_i$. Connaissant la loi de X, on en déduit la loi de Y dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	0	50	100	150	200	250
$P(X = x_i)$ $P(Y = y_i)$	$\binom{5}{0}\frac{1}{3^5}$	$\binom{5}{1}\frac{2}{3^5}$	$\binom{5}{2}\frac{2^2}{3^5}$	$\binom{5}{3}\frac{2^3}{3^5}$	$\binom{5}{4}\frac{2^4}{3^5}$	$\binom{5}{5}\frac{2^5}{3^5}$
Valeurs approchées	0,004	0,041	0,165	0,329	0,329	0,132

5 Pour calculer l'espérance de Y, on peut prendre les valeurs numériques du tableau et appliquer la formule, mais il est plus rapide de constater que comme $y_i = 50x_i$, alors :

$$p_1y_1 + \cdots + p_5y_5 = 50(p_1x_1 + \cdots + p_5x_5) = 50E(X).$$

Or, on sait que si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, son espérance vaut np. Par conséquent,

$$E(Y) = 50 \times 5 \times \frac{2}{3} = \frac{500}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 11.5 page 392

Le lancer d'une pièce équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre $0,5$ dont le succès est « Obtenir Face ». Si on répète le lancer trois fois, de façon indépendantes, la variable Y qui donne le nombre de fois y_i où Face est obtenu suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0,5)$.

En notant x_i les valeurs de la variable aléatoire X, on peut dresser le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$\binom{3}{0}0,5^3$	$\binom{3}{1}0,5^3$	$\binom{3}{2}0,5^3$	$\binom{3}{3}0,5^3$
x_i	-3	0	3	6
$P(X = x_i)$	$0,125$	$0,375$	$0,375$	$0,125$

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = -3 \times 0,125 + 3 \times 0,375 + 6 \times 0,125 = 1,5.$$

Corrigé de l'exercice 11.6 page 392

Le nombre de pannes $X_{\{A/B\}}$ est une variable aléatoire suivant une loi binomiale car « les pannes surviennent de façon indépendante ».

- **Drone A :** $X_A \hookrightarrow \mathcal{B}(2\,;p)$ (car il y a 2 moteurs).
  La probabilité qu'il y ait strictement moins de la moitié de ses moteurs qui tombe en panne est :
  $$P_A = P(X_A = 0) = (1-p)^2.$$
- **Drone B :** $X_B \hookrightarrow \mathcal{B}(4\,;p)$ (car il y a 4 moteurs).
  La probabilité qu'il y ait strictement moins de la moitié de ses moteurs qui tombe en panne est :
  $$P_B = P(X_A \leqslant 1) = P(X_B = 0) + P(X_B = 1) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 = (1-p)^3(1+3p).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_B - P_A &= (1-p)^3(1+3p) - (1-p)^2 \\ &= (1-p)^2\big[(1-p)(1+3p) - 1\big] \\ &= (1-p)^2 p(2-3p). \end{aligned}$$

$P_B - P_A$ est du signe de $2-3p$ donc :

- $P_B - P_A > 0 \iff p < \dfrac{2}{3}$, auquel cas le drone B doit être choisi ;
- $P_B - P_A < 0 \iff p > \dfrac{2}{3}$, auquel cas le drone A doit être choisi ;
- si $p = \dfrac{2}{3}$, le choix du drone est indifférent.

Corrigé de l'exercice 11.7 page 392

1 L'expérience consistant à choisir au hasard un composant électronique est une épreuve de Bernoulli dont le succès est : « le composant est défectueux » et donc la probabilité est $p = 0{,}000\,7$.
Ainsi, répéter 20 fois de façon indépendante cette expérience constitue un schéma de Bernoulli et le nombre de succès obtenus est représenté par une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}000\,7)$.

2
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) &= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 1) \\ &= 1 - \big(\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1)\big) \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \times 0{,}000\,7^0 \times (1-0{,}000\,7)^{20} + \binom{20}{1} \times 0{,}000\,7^1 \times (1-0{,}000\,7)^{19}\right] \\ &\approx 1 - (0{,}986\,092\,710\,141 + 0{,}013\,814\,968\,419\,9) \\ &\approx 0{,}000\,09. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 11.8 page 393

1 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6\,;\dfrac{2}{3}\right)$. En effet, l'expérience consistant à arriver à un feu tricolore et à regarder sa couleur est une épreuve de Bernoulli dont le succès est ici S : « le feu est vert » et dont la probabilité est égale à $\dfrac{2}{3}$ d'après l'énoncé.

2 Sans feu tricolore, le temps nécessaire pour parcourir 3 km avec une vitesse de 15 km/h est $60 \div 5 = 12$ minutes (en effet, si on fait 15 km en 60 minutes, 3 km seront faits en $\frac{1}{5}$ de 60 minutes).
À ces 12 minutes, il faut ajouter 1,5 minute par feu rouge ou orange. La variable aléatoire représentant le nombre de feux rouges ou oranges est $(6 - \mathrm{X})$ donc :
$$\mathrm{T} = 12 + 1,5(6-\mathrm{X}) \qquad \text{soit :} \qquad \mathrm{T} = 21 - 1,5\mathrm{X}.$$

3 D'après une propriété du cours, $\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \mathbb{E}(21-1{,}5\mathrm{X}) = 21 - 1,5\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

Or, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$. Ainsi, $\mathbb{E}(\mathrm{T}) = 21 - 1,5 \times 4$, soit $\mathbb{E}(\mathrm{T}) = 15$.

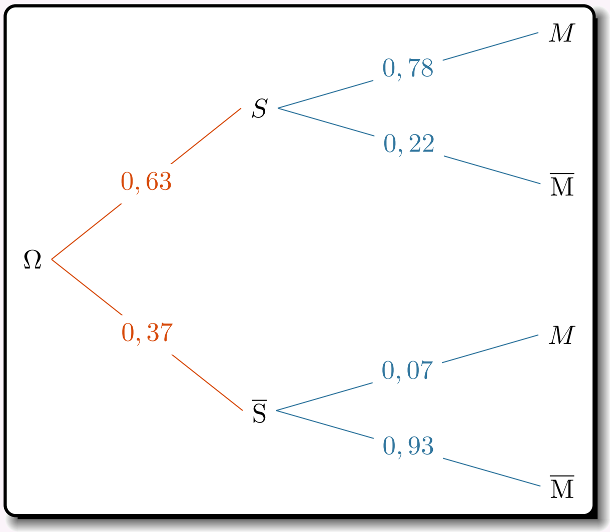
L'élève peut donc s'attendre à arriver au lycée 15 minutes en moyenne après son départ.

4 On cherche $\mathrm{P}(\mathrm{T} > 17)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{T} > 17) &= \mathrm{P}(21 - 1,5\mathrm{X} > 17) \\
&= \mathrm{P}(-1,5\mathrm{X} > 17 - 21) \\
&= \mathrm{P}(-1,5\mathrm{X} > -4) \\
&= \mathrm{P}\left(\mathrm{X} < \frac{4}{1,5}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\mathrm{X} < \frac{8}{3}\right) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 2) \quad \text{car X est un nombre entier} \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) \\
&= \frac{73}{729} \approx 0,1.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 11.9 page 393

1 L'arbre représentant la situation est le suivant :



2 On nous demande ici de calculer $P(S \cap M)$:

$$\begin{aligned}
P(S \cap M) &= P(S) \times \mathrm{P_S}(\mathrm{M}) \\
&= 0,63 \times 0,78 \\
\end{aligned}$$
$$\boxed{P(S \cap M) = 0,4914}$$

3 On a :

$$\begin{aligned}
P(M) &= P(S \cap M) + P(\overline{\mathrm{S}} \cap M) \\
&= 0,4914 + 0,37 \times 0,07
\end{aligned}$$
$$\boxed{P(M) = 0,5173}$$

La probabilité pour que la personne choisie au hasard soit réellement atteinte de la STAS-3 est donc de 0,5173.

4 $P_{\overline{M}}(S) = \dfrac{P\left(S \cap \overline{M}\right)}{P\left(\overline{M}\right)}$

$= \dfrac{0,63 \times 0,22}{1 - 0,5173}$

$\boxed{P_{\overline{M}}(S) \approx 0,2871}$

5 L'épreuve consistant à regarder si une personne est réellement atteinte de la STAS-3 est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est 0,5173 (calculée à la question précédente).

On répète ici de manière indépendante 20 fois cette épreuve donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5173$.

6 D'après l'énoncé, $G = 100\ 000 + 100X$. En effet, l'hôpital reçoit 100 000 € quel que soit le nombre de personne atteinte de la STAS-3, auxquels s'ajoutent 100 € par personnes atteintes, soit $100X$ €.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(G) =& E(100\ 000 + 100X) \\ &= 100\ 000 + 100E(X) \text{ (par linéarité de l'espérance mathématique)} \\ &= 100\ 000 + 100 \times (20 \times 0,5173) \\ &= 101\ 034{,}6 \end{aligned}$$

L'hôpital peut alors espérer recevoir 101 034,60 € sur ces 20 personnes.

7 À la calculatrice, on a :

- $P(X = 5) \approx 0,0103$.
- $P(X \leqslant 5) \approx 0,0141$.
- $P(X \geqslant 10) \approx 0,6478$.

8 Pour déterminer le premier entier k pour lequel $P(X \leqslant k) \geqslant 0,95$, on peut calculer pour commencer :

$$P(X \leqslant 10) \approx 0,5263.$$

On prend $k = 10$ car il y a en tout 20 patients. On voit que la probabilité n'est pas supérieure à 0,95 ; on peut alors prendre $k = 15$ (à mi-chemin entre 10 et 20) :

$$P(X \leqslant 15) \approx 0,9970 \geqslant 0,95.$$

On prend alors $k = 14$:

$$P(X \leqslant 14) \approx 0,9703 \geqslant 0,95.$$

On prend alors $k = 13$:

$$P(X \leqslant 13) \approx 0,9222 < 0,95.$$

<u>Le premier entier k pour lequel $P(X \leqslant k) \geqslant 0,95$ est donc $k = 14$.</u>

Corrigé de l'exercice 11.10 page 394

1 La probabilité d'obtenir un « 6 » au premier lancer est $\dfrac{1}{6}$ (en supposant que le dé est équilibré). Donc $P(X = 1) = \dfrac{1}{6}$.

2 Obtenir un « 6 » au second lancer sous-entend que l'on a obtenu une autre face que « 6 » au premier lancer, de probabilité $1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

La probabilité d'obtenir un « 6 » au second lancer est donc égale à $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{36}$.

Ainsi, $P(X = 2) = \dfrac{5}{36}$.

3 Obtenir un « 6 » au k-ième lancer signifie avoir obtenu $(k-1)$ autres faces que « 6 » avant, dont la probabilité est égale à $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$.

Ainsi, $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$.

4 **a.** $u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{1}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}} \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{6}$ et de premier terme $u_1 = \frac{1}{6}$.

b. D'après le cours, la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est égale à :

$$1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes dans la somme}}}{1 - \text{raison}}.$$

S_n représente la somme des n premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ donc :

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

c. $0 < \frac{5}{6} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

5 **a.** $f_k(x) = x^k$ donc $f_k'(x) = kx^{k-1}$.

b.
$$\begin{aligned}F_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \\ &= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \\ &= x\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right) \\ &= x \times \frac{1 - x^n}{1 - x} \\ &= \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}\end{aligned}$$

Donc $F_n'(x) = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}\right)'$.

$F_n(x)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $F_n' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = x - x^{n+1}$ donc $u'(x) = 1 - (n+1)x^n$;

$v(x) = 1 - x$ donc $v'(x) = -1$.

On a alors :

$$F_n'(x) = \frac{\left[1-(n+1)x^n\right](1-x)-(-1)\left(x-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{1-(n+1)x^n - x + (n+1)x^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$
$$\boxed{F_n'(x) = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}}$$

c. $F_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

Donc : $F_n'\left(\dfrac{5}{6}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

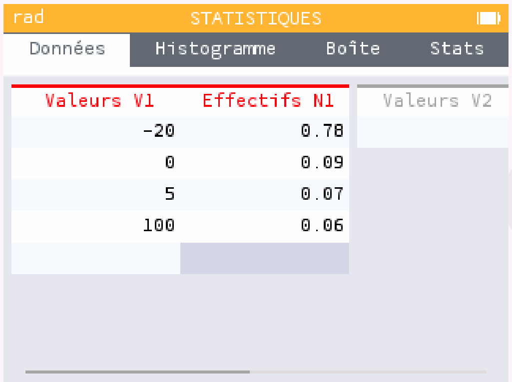
$$= \frac{1-\frac{5}{6}-(n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{(1-\frac{5}{6})^2} \text{ (d'après la question précédente)}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}-(n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{\frac{1}{36}}$$

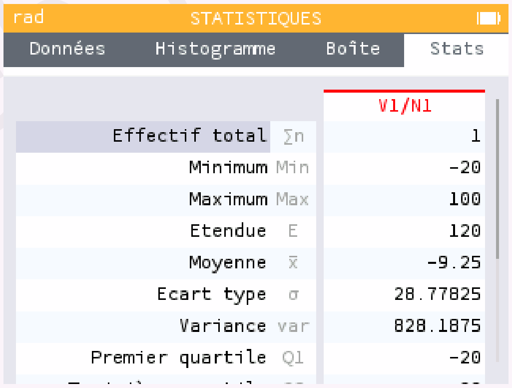
Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n'\left(\frac{5}{6}\right) = 36.$

Donc $\mathbb{E}\,(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\times 36 = 6.$

Corrigé de l'exercice 11.11 page 395

1 À l'aide de la calculatrice, en entrant les données de la loi de probabilité de X dans le menu « Statistiques », on trouve bien les valeurs données dans l'énoncé. Sur la Numworks, par exemple, cela donne :





2 Dans la fonction proposée, la variable `x` contient un nombre pseudo-aléatoire compris entre 0 et 1, qui peut donc représenter une probabilité.

Dans cette fonction Python, on effectue un test sur la valeur contenue dans `x` :

- si $x \in [0\,;0,78]$, la fonction retourne « -20 », c'est-à-dire la valeur de X pour laquelle $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=-20\right)=0,78$;
- si $x \in]0,78\,;0,78+0,09]$, la fonction retourne « 0 », c'est-à-dire la valeur de X pour laquelle $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=0\right)=0,09$;
- si $x \in]0,78+0,09\,;0,78+0,09+0,07]$, la fonction retourne « 5 », c'est-à-dire la valeur de X pour laquelle $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=5\right)=0,07$;
- si $x \in [0,78+0,09+0,07\,;0,78+0,09+0,07+0,06]$, la fonction retourne « 100 », c'est-à-dire la valeur de X pour laquelle $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=100\right)=0,06$.

C'est pourquoi cette fonction Python simule bien notre variable aléatoire X.

C'est comme si on devait choisir un point sur le segment $[0\,;1]$ partagé ainsi :

3 La fonction Python `echantillon(n)` prend un nombre entier n comme argument et appelle n fois la fonction `simul()` définie précédemment. Elle met tous les résultats dans une liste `L`.

La boucle étant finie, elle retourne « `sum(L)/n` », c'est-à-dire la moyenne de toutes les valeurs contenues dans `L`.

Pour un n assez grand, cette fonction retourne donc une valeur se rapprochant de l'espérance mathématique de X.

Par exemple, on obtient :

```
>>> echantillon(10**7)
-9.2495405
```

Corrigé de l'exercice 11.12 page 396

1 Avant toute chose, notons que : $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}>k\right)\leqslant a \iff \mathrm{P}\left(\mathrm{X}\leqslant k\right)\geqslant 1-a$.

Cela va m'être utile pour ma fonction Python.

En effet, à l'aide du super module *probastat*, on peut définir notre fonction ainsi :

Code Python 11-39

```python
from probastat import binom
def seuil(n,p,a):
    X = binom(n,p)
    k = 0
    while X.proba_cdf(k) < 1-a:
        k = k + 1
    return k
```

Par exemple,

```
>>> seuil(50,0.42,0.95)
15
```

2 Il faut ici déterminer le plus petit entier n tel que `seuil(n,0.9,0.05)` $\geqslant 300$.

Code Python 11-40

```python
n = 300
while seuil(n,0.9,0.05) < 300:
    n = n + 1

print(n)
```

On trouve alors $n = 324$. C'est-à-dire que pour 324 billets vendus, la probabilité pour que le nombre de clients se présentant à l'embarquement soit strictement supérieur à 300 est inférieure à 0,05, soit 5%.

Corrigé de l'exercice 11.13 page 396

1 Soit k un entier naturel compris entre 1 et n.
L'événement « $X = k$ » est obtenu si $k-1$ épreuves se sont terminées par un échec, de probabilité $1-p$, et que la k-ième épreuve s'est terminée par un succès.
D'après le principe multiplicatif, on a alors :

$$P(X=k) = \underbrace{(1-p)\times(1-p)\times\cdots\times(1-p)}_{(k-1)\text{ facteurs}} \times p = p(1-p)^{k-1}.$$

2
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times P(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}\\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}\\
&= p \times \frac{1}{\left[1-(1-p)\right]^2} \qquad \text{car } \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\\
&= p \times \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = \frac{1}{p}}$$

Remarque 73

Nous manipulons ici une somme infinie car il se peut que le succès n'arrive jamais, et donc que le nombre d'épreuves soit infini.

3 X suit clairement une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{5}{20} = 0,25$.

Donc $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = \dfrac{1}{p} = 4$. Cela signifie qu'il faudra choisir en moyenne 4 boules pour obtenir finalement une noire.

Corrigé de l'exercice 11.14 page 397

On cherche ici à résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0,99 \\
&\iff 1 - (1-p)^n \geqslant 0,99 \\
&\iff 1 - (1-0,36)^n \geqslant 0,99 \\
&\iff 1 - 0,64^n \geqslant 0,99 \\
&\iff 0,64^n \leqslant 0,01 \\
&\iff n\ln(0,64) \leqslant \ln(0,01) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \text{ car } \ln(0,64) < 0 \\
&\iff n \geqslant 10,32.
\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de 11 individus, la probabilité de l'événement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à 0,99.

Corrigé de l'exercice 11.15 page 397

1 X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,01$. En effet, on répète de manière indépendante 250 fois l'expérience consistant à regarder si un caractère est mal transmis, dont la probabilité du succès est $p = 0,01$ d'après l'énoncé.

2 $P(X = 0) = \binom{250}{0} \times 0,01^0 \times (1 - 0,01)^{250-0} = 0,99^{250} \approx 0,081.$

3 On calcule $P(X > 16) = P(X \geqslant 17)$.
Avec la calculatrice, on trouve :
$$P(X \geqslant 17) \approx 1,04 \times 10^{-9},$$
ce qui est en effet négligeable.

Corrigé de l'exercice 11.16 page 397

1 On répète 100 fois de manière indépendante l'expérience de Bernoulli consistant à regarder si un enfant est atteint d'allergie alimentaire, dont la probabilité du succès est $p = 0,09$.
Ainsi, X (qui représente le nombre de succès à l'issue de cette succession d'épreuves indépendantes) suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,09$.

2 La probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire est :
$$P(X \geqslant 10) \approx 0{,}412\ 5.$$

12 Loi des grands nombres

Dans ce chapitre

1 Transformation de variables aléatoires

1 Transformation affine

Définition 55 (rappels sur l'espérance mathématique)

Soit $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ une variable aléatoire discrète telle que $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = p_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
L'espérance mathématique de X est le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i.$$

Exemple 73

X est une variable aléatoire de loi de probabilité :

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Alors, $E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \cdots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$

$\boxed{E(X) = 7}$

Définition 56 (transformation affine)

Soit $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ une variable aléatoire discrète, et soient a et b deux réels.
La variable aléatoire Y définie par $Y = aX + b$ est la variable qui prend les valeurs $y_i = ax_i + b$, pour tout entier i compris entre 1 et n inclus.

Propriété 77 (espérance et variance d'une transformation affine)

Soit $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ une variable aléatoire discrète, et soient a et b deux réels.

- L'espérance de $Y = aX + b$ est : $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}(\mathrm{aX+b}) = a\mathbb{E}(\mathrm{X}) + b$.
- La variance de Y est : $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \mathbb{V}(\mathrm{aX+b}) = a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

Exemple 74

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,; 0,25)$.
Soit $Y = 3X + 0,7$. Alors,

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = 3\mathbb{E}(\mathrm{X}) + 0,7 = 3 \times (20 \times 0,25) + 0,7 = 15,7.$$
$$\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = 3^2\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 9 \times \big(20 \times 0,25 \times (1 - 0,25)\big) = 33,75.$$

2 Somme de deux variables aléatoires

Définition 57 (somme de deux variables aléatoires)

Soient $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $Y = \{y_j\}_{1 \leqslant j \leqslant p}$ deux variables aléatoires.
On définit la somme de ces deux variables aléatoires comme étant la variable aléatoire :

$$X + Y = \{x_i + y_j\}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}.$$

Exemple 75

Si $X = \{1; 2\}$ et $Y = \{-1; 0; 1\}$ alors les différentes sommes possibles des valeurs sont :
$1 + (-1) = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 2$, $2 + (-1) = 1$, $2 + 0 = 2$, $2 + 1 = 3$ donc :

$$X + Y = \{0; 1; 2; 3\}.$$

Propriété 78

Soient X et Y deux variables aléatoires.
L'espérance de la variable aléatoire $X + Y$ est :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Exemple 76

Xavier et Yvonne vont au restaurant. Xavier hésite de façon équiprobable entre les menus à 18 €, 24 € et 36 €.
Yvonne hésite, quant à elle, de façon équiprobable entre les menus à 24 € et 36 €.
On note X et Y les variables aléatoires représentant le prix du menu choisi respectivement par Xavier et Yvonne.
Alors, $X = \{18; 24; 36\}$ et $Y = \{24; 36\}$. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3} \times 18 + \frac{1}{3} \times 24 + \frac{1}{3} \times 36 \\ &= 6 + 8 + 12 \\ &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2} \times 24 + \frac{1}{2} \times 36 \\ &= 12 + 18 \\ &= 30. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 26 + 30 = 56.$$

On peut ainsi dire que le prix moyen de la facture de ce repas est 56 €.

Définition 58 (variables aléatoires indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires.
X et Y sont indépendantes si :

$$P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Propriété 79

Soient X et Y deux variables aléatoires *indépendantes*.
La variance de la variable aléatoire $X + Y$ est :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

2 Inégalités de concentration

1 Inégalité de Markov

Théorème 15 (inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie, et à valeurs positives. Alors :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration 13

Notons :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k).$$

On peut couper cette somme en deux sommes : la première comportant toutes les valeurs de X inférieures strictement à a et la seconde comportant les valeurs de X supérieures ou égales à a, ce qui donne :

$$E(X) = \sum_{x_k \geqslant a} x_k P(X = x_k) \quad + \quad \sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k).$$

On sait que $X \geqslant 0$, ce qui signifie que pour tout entier k compris entre 1 et n, $x_k \geqslant 0$.
De plus, une probabilité est toujours supérieure ou égale à 0.
Ainsi, pour tout entier $k \in [1; n]$, $x_k P(X = x_k) \geqslant 0$, ce qui implique que :

$$\sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k) \geqslant 0.$$

On déduit que :

$$E(X) \geqslant \sum_{x_k \geqslant a} x_k P(X = x_k).$$

Or, dans cette somme, $x_k \geqslant a$, ce qui implique :

$$E(X) \geqslant \sum_{x_k \geqslant a} a P(X = x_k)$$

soit :

$$E(X) \geqslant a \sum_{x_k \geqslant a} P(X = x_k).$$

De plus, par définition :

$$\sum_{x_k \geqslant a} P(X = x_k) = P(X \geqslant a)$$

ce qui implique alors :

$$E(X) \geqslant a P(X \geqslant a).$$

On en déduit alors, en divisant par $a \neq 0$:

$$\frac{E(X)}{a} \geqslant P(X \geqslant a).$$

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 16 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(X)$.
Quel que soit le réel $\delta > 0$,

$$P\big(\,|\,X-\mu\,|\;\geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Démonstration 14

On considère la variable $Y = \big[X - E(X)\big]^2$.
Par définition, Y est une variable aléatoire à valeurs positives et :

$$E(Y) = E\big[(X-E(X))^2\big] = V(X).$$

L'inégalité de Markov appliquée à Y donne alors :

$$\begin{aligned} &\forall\, a > 0, \qquad P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a} \\ \iff &\forall\, a > 0, \qquad P\Big(\big(X - E(X)\big)^2 \geqslant a\Big) \leqslant \frac{V(X)}{a}. \end{aligned}$$

Posons alors $a = \delta^2$ avec $\delta > 0$. On obtient alors :

$$\forall\, \delta > 0, \qquad P\Big(\big(X - E(X)\big)^2 \geqslant \delta^2\Big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Or,

$$\big(X - E(X)\big)^2 \geqslant \delta^2 \iff \big|X - E(X)\big| \geqslant \delta$$

car $\delta > 0$. Cela donne alors :

$$\forall\, \delta > 0, \qquad P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \delta\Big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

De ce théorème (fondamental), on peut notamment conclure que pour une variable aléatoire quelconque X d'écart-type σ et d'espérance μ :

$$P\big(\,|\,X-\mu\,|\;\geqslant 2\sigma\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2}$$

soit :

$$P\big(\,|\,X-\mu\,|\;\geqslant 2\sigma\big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Cela signifie alors que la probabilité que X s'écarte de sa moyenne d'au moins 2σ est inférieure à 0,25.

Remarque 74

Par simulation (manuelle ou informatique), on s'aperçoit en fait que cette probabilité est très souvent majorée par 0,05.

3 Loi des grands nombres

1 Cas général

Définition 59 (moyenne empirique variables aléatoires indépendantes)

Soient X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes. On pose alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

M_n est appelée la *moyenne empirique* des variables X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Propriété 80

Soient $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes ayant toutes la même loi d'espérance μ et de variance $\mathbb{V}\,(\mathrm{X})$. Alors,

$$\forall\, \delta > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\,(\mathrm{X})}{n\delta^2}.$$

Démonstration 15

On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} E(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n}\left[E(X_1) + \cdots + E(X_n)\right] \\ &= \frac{1}{n}(\mu + \cdots + \mu) = \frac{1}{n} \times n\mu \\ E(M_n) &= \mu. \end{aligned}$$

De plus, comme les X_k sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} V(M_n) &= V\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}\left[V(X_1) + \cdots + V(X_n)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{V}\,(\mathrm{X}) + \cdots + \mathbb{V}\,(\mathrm{X})\right) \\ &= \frac{\mathbb{V}\,(\mathrm{X})}{n}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$P\big(\,|\, M_n - \mu \,|\, \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}\,(\mathrm{X})}{n\delta^2}.$$

2 Loi des grands nombres

Théorème 17 (théorème de Khintchine, ou *loi des grands nombres*)

Soient X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ. Alors, pour tout réel $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) = 0.$$

Démonstration 16

C'est une conséquence de la propriété précédente.

3 Cas de variables aléatoires suivant la même loi binomiale

Propriété 81

Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p (c'est-à-dire que $P(X_i = 1) = p$).

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

Alors,

$$\forall\, \delta > 0, \qquad P\big(\,|\,S_n - np\,|\,\geqslant \delta\big) \leqslant \frac{np(1-p)}{\delta^2}.$$

$$P\big(\,|\,M_n - p\,|\,\geqslant \delta\big) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2}.$$

Exemple 77

On lance 100 fois un dé équilibré, à quatre faces de couleurs différentes. On note X_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) qui vaut :

- 1 si la face obtenue lors du lancer i est rouge ;
- 0 sinon.

Ainsi,

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

On note S_{100} le nombre de faces rouges obtenues à l'issue de ces 100 lancers.
On a alors :

$$\forall\, \delta > 0, \qquad P\big(\,|\,S_{100} - 100 \times 0,25\,|\,\geqslant \delta\big) \leqslant \frac{100 \times 0,25 \times 0,75}{\delta^2}$$

soit :

$$\forall\, \delta > 0, \qquad P\big(\,|\,S_{100} - 25\,|\,\geqslant \delta\big) \leqslant \frac{18,75}{\delta^2}.$$

En prenant par exemple $\delta = 5$, cela donne :

$$P\big(\,|\,S_{100} - 25\,|\,\geqslant 5\big) \leqslant \frac{18,75}{25} = 0,75.$$

D'où :

$$1 - P(20 < S_{100} < 30) \leqslant 0,75$$

et donc :

$$P(21 \leqslant S_{100} \leqslant 29) \geqslant 0,25.$$

12 Exercices types

Exercice type 42 ▶ transformation affine

Chaque jour, Louis emprunte un trajet pour aller de son domicile au lycée qui compte 7 feux tricolores.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de feux tricolores qui sont à l'orange ou au rouge rencontrés sur son trajet.
On admet que $E(X) = 3,6$ et $V(X) = 2,5$.
Si tous les feux sont au vert, Louis met 35 minutes à vélo.
On note T la variable aléatoire représentant le temps (en minutes) total du trajet.
On admet qu'en moyenne, chaque feu orange ou rouge lui fait perdre 30 secondes.

1 Exprimer T en fonction de X.

2 En déduire $\mathbb{E}\left(\mathrm{T}\right)$ ainsi que $\mathbb{V}\left(\mathrm{T}\right)$.

1 $T = 35 + 0,5X$. En effet, aux 35 minutes (quand tous les feux sont au vert), il faut ajouter 30 secondes autant de fois qu'il arrive à un feu orange ou rouge.

2 On déduit alors, par linéarité de l'espérance, que :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{T}\right) = \mathbb{E}\left(35{+}0{,}5\mathrm{X}\right) = 35 + 0,5\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = 35 \times 0,5 \times 3,6 = 36,8.$$

De plus,

$$\mathbb{V}\left(\mathrm{T}\right) = 0,5^2\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right) = 0,25 \times 2,5 = 0,625.$$

Exercice type 43 ▶ inégalités de concentration

Soit X une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 10.

1 Donner une majoration de la probabilité $P(\mid X - 50 \mid \ \geqslant 10)$.

2 En déduire une minoration de $P(41 \leqslant X \leqslant 59)$.

1 On utilise très souvent l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour donner une majoration d'une probabilité du type $P(\mid X - \mu \mid \ \geqslant \delta)$. Cela donne ici :

$$\forall\, \delta > 0, \qquad P(\mid X - 50 \mid \ \geqslant \delta) \leqslant \frac{10}{\delta^2}.$$

La question suggère que l'on prenne $\delta = 10$, ce qui donne :

$$P(\mid X - 50 \mid \ \geqslant 10) \leqslant \frac{10}{100} \qquad \text{soit} \qquad P(\mid X - 50 \mid \ \geqslant 10) \leqslant 0,1.$$

2 On déduit de la majoration précédente que :

$$\begin{aligned} P(\mid X - 50 \mid \ \geqslant 10) \leqslant 0,1 &\iff 1 - P(\mid X - 50 \mid \ < 10) \leqslant 0,1 \\ &\iff P(40 < X < 60) \geqslant 1 - 0,1 \\ &\iff P(41 \leqslant X \leqslant 59) \geqslant 0,9. \end{aligned}$$

12 Exercices

Somme de variables aléatoires

Exercice 12.1 (la base)

On considère 5 variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant 5}$ suivant toutes la loi binomiale $\mathcal{B}(1\ 000\,;0,75)$.
Soit la variable aléatoire $S_5 = X_1 + X_2 + \cdots + X_5$.
Calculer l'espérance de S_5.

Solution page 422

Exercice 12.2 (en boulangerie)

Dans les boulangeries de la chaîne « Obonpin », les baguettes sont de temps en temps un peu trop cuites... À vrai dire, elles le sont avec une probabilité de 0,07.
Un contrôleur de la marque « Obonpin » rend visite à 20 boulangeries d'un même département et vérifie 30 baguettes dans chacune d'elles. On suppose que dans chaque boulangerie, le nombre de baguettes réalisées est suffisamment grand pour assimiler ceci à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de baguettes un peu trop cuites à l'issue de ce contrôle.

Déterminer l'espérance mathématique de X, ainsi que sa variance et son écart-type.

Solution page 422

Exercice 12.3 (le jeu télévisé)

Un jeu télévisé est composé de deux manches :

- **Première manche :** le ou la candidat · e choisit d'ouvrir une des trois portes identiques qui se trouvent devant lui ou elle. Derrière chaque porte se trouve un panneau indiquant le montant gagné : « 0 € », « 100 € » ou « 500 € ».

  On notera X la variable aléatoire représentant le gain de cette première manche.
- **Seconde manche :** le ou la candidat · e fait tourner une roue partagée en plusieurs secteurs angulaires. Chacun des secteurs correspond à une somme : « 0 € », « 100 € », « 200 € », « 500 € » et « 1 000 € ».

  Ici, les secteurs ont une surface telle que la probabilité de gagner x € est égale à $\dfrac{10}{x}$, pour $x \neq 0$, la probabilité de gagner 0 € étant ce qui reste.

  On notera Y la variable aléatoire représentant le gain de cette seconde manche.

On note $Z = X + Y$ le gain à l'issue de ces deux manches, X et Y étant indépendantes.

Calculer le gain moyen d'un · e candidat · e à ce jeu.

Solution page 422

Exercice 12.4 (trajet pour aller travailler)

Chaque jour de la semaine, Hubert prend le train pour aller travailler. Selon les statistiques réalisées sur sa ligne,

- la probabilité que le train ait 5 minutes de retard est égale à la moitié de celle qu'il ait aucun retard ;
- la probabilité que le train ait 2 minutes de retard est égale au triple de celle qu'il ait 7 minutes de retard ;
- la probabilité qu'il ait 7 minutes de retard est égale au cinquième de celle qu'il n'ait aucun retard.

On suppose qu'il n'y a pas d'autres cas possibles.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de minutes de retard du train d'Hubert un jour pris au hasard.

1. Déterminer la loi de probabilité X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer le retard moyen du train d'Hubert sur un échantillon de 20 jours ouvrés (donc sur un mois).

Solution page 422

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 12.5 (vrai ou faux ?)

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = 9$ à valeurs positives.
   Alors, selon l'inégalité de Markov, $P(X \geqslant 10) \leqslant \dfrac{1}{10}$.
2. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = 7$ et de variance $\sigma^2 = 9$.
   Alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P\big(\,|\,X - 7\,|\, \geqslant 18\big) < 0,028$.

Solution page 423

Exercice 12.6 (dé équilibré)

On jette 3 600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Solution page 423

Exercice 12.7 (pièces d'une usine)

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. À l'aide de l'inégalité de Markov, majorer la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces.
2. On sait, de plus, que la variance de la production hebdomadaire est de 25. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité que la production de la semaine suivante soit comprise entre 41 et 59.

Solution page 424

Exercice 12.8 (particules émise par une substance radioactive)

Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps Δt. Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps Δt est de 10^3. On suppose que X suit une loi d'espérance et de variance égales à 100.
Donner une majoration de la probabilité que X atteigne au moins 900.

Solution page 424

Exercice 12.9 (entreprise de télécommunication)

Une entreprise de télécommunications souhaite estimer la proportion de clients satisfaits de leur service. Elle sait que la probabilité qu'un client soit satisfait est de 70 %. L'entreprise interroge un échantillon de 100 clients.

Déterminez une borne supérieure de la probabilité que le nombre de clients satisfaits dans l'échantillon s'écarte de plus de 10 unités de la moyenne.

Solution page 424

Exercice 12.10 (composants électroniques)

Une entreprise de fabrication de composants électroniques sait que la probabilité qu'un composant soit défectueux est de 5 %. L'entreprise teste un lot de 200 composants.

Déterminer une minoration de la probabilité que le nombre de composants défectueux dans le lot soit compris entre 5 et 15.

Solution page 425

Exercice 12.11 (trouver un nombre de lancers de dé)

On lance de manière indépendante n fois un dé équilibré à six faces.
Déterminer une valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir entre 0 et $\dfrac{n}{3}$ fois le nombre « 1 » soit supérieure à $0,99$.

Solution page 425

Exercice 12.12 (dé équilibré)

Un dé équilibré à six faces est lancé n fois.

1. On note M_n la variable aléatoire moyenne des résultats des n lancers.
Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}(M_n)$.
2. Déterminer le plus petit nombre entier n tel que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que :

$$P(\,|\,M_n - 3,5\,|\, \geqslant 0,4) \leqslant 0,1.$$

3. Interpréter la valeur de n déterminée dans le contexte de l'exercice.

Solution page 426

Exercice 12.13 (usine de vis)

Une usine fabrique des vis dont la longueur (en mm) est modélisée par une variable aléatoire X d'espérance $\mu = 50$ mm et d'écart-type $\sigma = 2$ mm.
On prélève un échantillon de $n = 100$ vis, et on note M_n la longueur moyenne de cet échantillon.
À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer qu'avec une probabilité d'au moins 75 %, la longueur moyenne de l'échantillon ne s'écarte pas de plus de $0,4$ mm de la valeur cible 50 mm.

Solution page 427

Exercice 12.14

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $E(X) = \mu$ et une variance $V(X) = \sigma^2$. Soit $a > 0$.

1. Soit $\lambda \geqslant 0$. Démontrer que $P(X - \mu \geqslant a) = P(X - \mu + \lambda \geqslant a + \lambda)$.
2. Vérifier que $E\big((X - \mu + \lambda)^2\big) = \sigma^2 + \lambda^2$.
3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}$.

   Aide : on pourra utiliser le fait que $P(Z \geqslant \alpha) \leqslant P(Z^2 \geqslant \alpha^2)$ pour toute variable aléatoire Z.
4. En déduire que $P\big(\,|\,X - \mu\,|\, \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$.
5. Pour quelles valeurs de a obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Solution page 427

Loi des grands nombres

Exercice 12.15 (dans une urne)

On dispose d'une urne dans laquelle sont mises 7 boules rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule de cette urne et on la remet dans l'urne ; si la boule choisie est noire, on gagne 1 point. Sinon, on ne gagne pas de point.
On note M_n le gain moyen de points après n répétitions indépendantes de cette expérience.
Déterminer une valeur de n pour laquelle la probabilité que la différence entre M_n et 0,3 soit supérieure à $0,1$ est inférieure ou égale à $0,5$.

Solution page 428

Exercice 12.16 (marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ définie de la façon suivante : on part de 0 et, à chaque étape,

- on a une probabilité p de faire un pas vers la droite ;
- on a une probabilité $1 - p$ de faire un pas vers la gauche.

Autrement dit, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = 1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X_n = -1) = 1 - p.$$

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Que représente S_n dans le contexte de cet exercice ?
2. Exprimer, en fonction de p, $E(X_k)$.
3. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{S_n}{n}\right)$? Comment interpréter ce résultat ?

Solution page 429

Exercice 12.17 (dans un urne)

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement avec remise des boules de cette urne. À partir de combien de tirages est-on sûrs à 95% que la proportion de boules rouges tirées est dans l'intervalle $]0,35; 0,45[$?

Solution page 429

Exercice 12.18 (usine et pièces mécaniques)

Une usine produit des pièces mécaniques. Le poids moyen d'une pièce est de 100 grammes, et la variance du poids est de 16 grammes^2 (l'écart-type est donc de 4 grammes). On prélève un échantillon de 50 pièces.

Déterminer une majoration de la probabilité que la moyenne des poids des pièces dans l'échantillon s'écarte de plus de 0.6 grammes de la moyenne théorique (100 grammes).

Solution page 430

Exercice 12.19 (dé à 6 faces)

On lance n fois un dé à 6 faces et on regarde la fréquence d'obtention de la face « 6 ».
Que peut-on dire de cette fréquence quand n devient grand ?

Solution page 430

Objectif bac

Exercice 12.20 (extrait du bac Métropole 2024)

Lorsqu'une personne commande un article sur internet, on considère que le temps de livraison est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 où :

- T_1 représente le nombre entier de jours pour l'acheminement de l'article de l'entrepôt de stockage vers la plateforme de distribution ;
- T_2 représente le nombre de jours pour l'acheminement de l'article de la plateforme vers le domicile du client.

On estime que T_1 et T_2 sont indépendantes et que :

- $E(T_1) = 4$ et $V(T_1) = 2$;
- $E(T_2) = 3$ et $V(T_2) = 1$.

1 Déterminer l'espérance $\mathbb{E}\,(\mathrm{T})$ ainsi que sa variance $\mathbb{V}\,(\mathrm{T})$.

2 Un client passe une commande sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son article entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{3}$.

Solution page 430

Exercice 12.21 (Extrait du sujet 1 d'Asie 2025)

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test *de fabrication* et un test *de sécurité*.
On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif.
On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.
On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à $0,95$.
Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$.

1 Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.

2 Dans cette question, on pose $n = 150$.

a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P\left(S_{150} = 145\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

3 Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.
On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n.

a. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et que $V(F_n) = \dfrac{0,0475}{n}$.

b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à $0,96$.

Solution page 431

Exercice 12.22 (Extrait du sujet 1 de Polynésie, septembre 2025)

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée.
On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1 Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,747$.

2 Calculer $P(X \geqslant 6)$. Interpréter ce résultat.

3 Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

4 Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22,53$ et $V(Y) = 9,81$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

a. Exprimer Z en fonction de X et Y. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

Solution page 432

12 Corrigés

Corrigé de l'exercice 12.1 page 416

D'après la propriété **??** sur la somme des variables aléatoires indépendantes,

$$E(S_5) = \sum_{k=1}^{5} E(X_k).$$

Or, pour tout entier k compris entre 1 et 5,

$$E(X_k) = 1\ 000 \times 0,75 = 750.$$

Par conséquent, $E(S_5) = 5 \times 750 = 3\ 750$.

Corrigé de l'exercice 12.2 page 416

Notons Y_k la variable aléatoire représentant le nombre de baguettes un peu trop cuites dans la boulangerie k, pour k entier compris entre 1 et 20.
Alors Y_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30\,;0,07)$ car le contrôleur vérifie dans chaque boulangerie 30 baguettes (on suppose ici que l'on peut assimiler cette vérification à un tirage aléatoire avec remise car le nombre de baguettes est supposé assez grand).
$E(Y_k) = 30 \times 0,07 = 2,1$, $V(Y_k) = 30 \times 0,07 \times (1 - 0,07) = 1,953$ et $\sigma(Y_k) = \sqrt{1,953} \approx 1,397$.

Ainsi, $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{20} Y_k$ et donc, d'après la propriété sur la somme de variables aléatoires indépendantes :

- $E(X) = 20 \times E(Y_1) = 20 \times 2,1 = 42\,;$
- $V(X) = 20 \times V(Y_1) = 20 \times 1,953 = 39,06\,;$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 6,25.$

Corrigé de l'exercice 12.3 page 416

- $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = \dfrac{0 + 100 + 500}{3} = 200.$
- $\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}\right) = 100 \times \dfrac{10}{100} + 200 \times \dfrac{10}{200} + 500 \times \dfrac{10}{500} + 1\ 000 \times \dfrac{10}{1\ 000} = 40.$

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) + \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}\right) = 240.$$

Ainsi, le gain moyen d'un · e candidat · e est 240 €.

Corrigé de l'exercice 12.4 page 417

1 Notons $x = \mathrm{P}\left(\mathrm{X} = 0\right)$. La loi de probabilité de X est :

$X = k$	0	2	5	7
$P(X = k)$	x	$\frac{3}{5}x$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{5}x$

La somme des probabilités est égale à 1 donc :

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}x = 1 \iff \frac{23}{10}x = 1$$
$$\iff x = \frac{10}{23}.$$

D'où :

$X=k$	0	2	5	7
$P(X=k)$	$\frac{10}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{2}{23}$

2 $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 2\times\dfrac{6}{23} + 5\times\dfrac{5}{23} + 7\times\dfrac{2}{23} = \dfrac{51}{23}$.

3 Notons X_k la variable aléatoire représentant le nombre de minutes de retard du train d'Hubert le jour k, $1 \leqslant k \leqslant 20$.

Posons alors : $M_{20} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}}{20}$. Alors,

$$\begin{aligned} E(M_{20}) &= \frac{E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{20})}{20} \\ &= \frac{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{20})}{20} \\ &= \frac{20\times\frac{51}{23}}{20} \\ &= \frac{51}{23} \\ &\approx 2,22. \end{aligned}$$

Ainsi, le retard moyen du train d'Hubert sur les 20 jours est d'environ 2 min 13 s.

Corrigé de l'exercice 12.5 page 417

1 *Faux*. Selon l'inégalité de Markov, $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$, ce qui donne dans notre cas :

$$P(X \geqslant 10) \leqslant \frac{9}{10}.$$

2 *Vrai*. En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P\big(\,|\,X - E(X)\,|\, \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$$

ce qui donne dans notre cas :

$$P\big(\,|\,X-7\,|\, \geqslant 18\big) \leqslant \frac{9}{18^2}$$

soit :

$$P\big(\,|\,X-7\,|\, \geqslant 18\big) \leqslant \frac{1}{36} < 0,028.$$

Corrigé de l'exercice 12.6 page 417

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit une loi binomiale de paramètres 3 600 et $\dfrac{1}{6}$. On sait donc que :

$$E(S) = 600 \qquad \text{et} \qquad V(S) = 500.$$

De plus,

$$480 < S < 720 \iff -120 < S - 600 < 120 \iff |\,S-600\,| < 120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$P(\,|\,S-600\,|\, \geqslant 120) \leqslant \frac{500}{120^2} \leqslant 0,035.$$

On en déduit que :

$$P(480 < S < 720) \geqslant 1 - 0,035$$

soit :

$$P(480 < S < 720) \geqslant 0,965.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3 600 lancers est supérieure à 0,96.

Corrigé de l'exercice 12.7 page 417

1 Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces sortant de l'usine en l'espace d'une semaine.
D'après l'inégalité de Markov,

$$P(X > 75) \leqslant \frac{50}{75}$$

soit :

$$P(X > 75) \leqslant 0,67.$$

2 On souhaite une minoration de :

$$P(41 \leqslant X \leqslant 59) = P(50 - 9 \leqslant X \leqslant 50 + 9) = P(\mid X - 50 \mid \leqslant 9).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne :

$$P\big(\mid X - 50 \mid \geqslant 10\big) \leqslant \frac{25}{10^2}$$

soit :

$$P\big(\mid X - 50 \mid \geqslant 10\big) \leqslant 0,25.$$

On en déduit alors que :

$$1 - P\big(\mid X - 50 \mid < 10\big) \leqslant 0,25$$

et donc :

$$P\big(\mid X - 50 \mid \leqslant 9\big) \geqslant 0,75.$$

La probabilité pour que la production de la semaine suivante soit comprise entre 41 et 59 est donc au moins de 75%.

Corrigé de l'exercice 12.8 page 418

Pour que X atteigne 900, il faut que que $\mid X - 100 \mid \geqslant 800$. En effet, $X \geqslant 0$ donc $\mid X - 100 \mid \geqslant 800 \iff X \geqslant 900$.
On utilise donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 800$:

$$P(\mid X - 100 \mid \geqslant 800) \leqslant \frac{100}{800^2} \leqslant 0{,}015\ 625.$$

Ainsi, $P(X \geqslant 900) \leqslant 0{,}015\ 625$.

Corrigé de l'exercice 12.9 page 418

Posons X la variable aléatoire représentant le nombre de clients satisfaits sur les 100 clients contactés.
Alors, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,7$.

Son espérance est alors $\mathbb{E}\,(\mathrm{X}) = np = 70$ et sa variance est $\mathbb{V}\,(\mathrm{X}) = np(1-p) = 21$.

Le théorème de Bienaymé-Tchebychev nous donne alors :

$$\forall\, \delta > 0, \quad P(\mid X - 70 \mid \geqslant \delta) \leqslant \frac{21}{\delta^2}.$$

On souhaite déterminer une borne supérieure de la probabilité que le nombre de clients satisfaits dans l'échantillon s'écarte de plus de 10 unités de la moyenne, donc prenons $\delta = 11$:

$$P(\mid X - 70 \mid \geqslant 11) \leqslant \frac{21}{121} \leqslant 0,173.$$

Corrigé de l'exercice 12.10 page 418

Posons X la variable aléatoire représentant le nombre de composants défectueux sur les 200 testés.
Alors, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,05$.
Ainsi, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = np = 10$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = np(1-p) = 9,5$.

Le théorème de Bienaymé-Tchebychev nous dit alors :

$$\forall \delta > 0, \quad P(\mid X - 10 \mid \geqslant \delta) \leqslant \frac{9,5}{\delta^2}.$$

On veut déterminer une minoration de la probabilité que le nombre de composants défectueux dans le lot soit compris entre 5 et 15 (soit $10-5$ et $10+5$).
On va donc prendre $\delta = 6$:

$$\begin{aligned} P(\mid X - 10 \mid \geqslant 6) \leqslant \frac{9,5}{6^2} &\iff 1 - P(\mid X - 10 \mid < 6) \leqslant \frac{9,5}{36} \\ &\iff P(\mid X - 10 \mid \leqslant 5) \geqslant 1 - \frac{9,5}{36} \geqslant 0,736. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 12.11 page 418

Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de « 1 » obtenus.
X suit alors la loi $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{6}\right)$ et a donc une espérance égale à $\frac{n}{6}$ et une variance égale à $np(1-p) = \frac{5n}{36}$.
On nous demande ici de trouver un entier n tel que :

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant 0,99.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\begin{aligned} &\forall \delta > 0,\ P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{5n}{36\delta^2} \\ &\iff P\left[\left(X - \frac{n}{6} \leqslant -\delta\right) \cup \left(X - \frac{n}{6} \geqslant \delta\right)\right] \leqslant \frac{5n}{36\delta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, \quad &\iff 1 - P\left(-\delta \leqslant X - \frac{n}{6} \leqslant \delta\right) \leqslant \frac{5n}{36\delta^2} \\ &\iff P\left(-\delta \leqslant X - \frac{n}{6} \leqslant \delta\right) \geqslant 1 - \frac{5n}{36\delta^2}. \end{aligned}$$

On aimerait arriver à une inégalité avec $P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right)$; cela nous pousse à prendre $\delta = \frac{n}{6}$ pour obtenir :

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant 1 - \frac{5}{n}.$$

Ainsi, il suffit de choisir un n tel que :

$$1 - \frac{5}{n} \geqslant 0,99 \iff n \geqslant 500.$$

Nous sommes donc assurés que pour $n \geqslant 500$, notre probabilité est supérieure à $0,99$.

Remarque 77

Ce raisonnement nous assure que la probabilité est supérieure à 0,99 pour $n \geqslant 500$ sans affirmer que 500 est la valeur minimale. Pour avoir une valeur minimale, on peut écrire un programme Python (par exemple) qui calcule cette probabilité en partant de $n = 500$ et en baissant cette valeur jusqu'à obtenir une probabilité inférieure à 0,99.

Code Python 12-42

```python
from scipy.stats import binom
n = 500
while binom.cdf(n//3, n, 1/6) >= 0.99:
    print('n = {} ; proba = {}'.format(n,binom.cdf(n//3, n, 1/6)))
    n -= 1
```

Ce programme nous donne comme dernière valeur de n, donc comme valeur minimale de n : $n = 33$. Autant dire que nous en sommes loin avec l'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff...

Corrigé de l'exercice 12.12 page 418

1 Notons X_i la variable aléatoire représentant le nombre obtenu au lancer i, avec $1 \leqslant i \leqslant n$.
Il y a équiprobabilité à chaque lancer car le dé est équilibré.
Donc la loi de probabilité de X_i est :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 6, \quad P(X_i = k) = \frac{1}{6}.$$

Alors,

$$\mathbb{E}\left(X_i\right) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \times \frac{6\times(6+1)}{2} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

et

$$\mathbb{V}\left(X_i\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\left(x_i - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) = \frac{1}{n} \times n\mathbb{E}\left(X_i\right) = \frac{7}{2}$$

et, puisque les X_i sont toutes indépendantes,

$$\mathbb{V}\left(M_n\right) = \frac{1}{n^2} \times n\mathbb{V}\left(X_i\right) = \frac{35}{12n}.$$

2 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n donne :

$$\forall\, \delta > 0, \quad P(\mid M_n - \mathbb{E}\left(M_n\right) \mid \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(M_n\right)}{\delta^2}.$$

En prenant $\delta = 0,4$, cela donne :

$$P(\mid M_n - 3,5 \mid \geqslant 0,4) \leqslant \frac{35}{12n \times 0,4^2}$$

soit :

$$P(\mid M_n - 3,5 \mid \geqslant 0,4) \leqslant \frac{35}{1,92n}.$$

On souhaite que cette probabilité soit inférieure ou égale à 0,1, donc il suffit de choisir n tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{35}{1,92n} \leqslant 0,1 &\iff 35 \leqslant 0,1 \times 1,92n \\
&\iff n \geqslant \frac{35}{0,192} \\
&\iff n \geqslant 183.
\end{aligned}$$

3 Si l'on effectue 183 lancers ou plus, alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit que la probabilité que la moyenne des résultats s'écarte de 3,5 de plus de 0,40 est inférieure ou égale à 10 %.

Autrement dit, avec au moins 183 lancers, on a au moins 90 % de chances que la moyenne empirique soit dans l'intervalle $[3,1\,;3,9]$.

Corrigé de l'exercice 12.13 page 418

Les vis sont supposées indépendantes et identiquement distribuées, donc :

$$\mathbb{E}\left(M_n\right)=\mu=50 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left(M_n\right)=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{4}{100}=0,04.$$

L'événement $\{49,6<M_n<50,4\}$ s'écrit $\{\,|\,M_n-50\,|\,<0,4\}$.
On applique l'inégalité avec $\delta=0,4$:

$$\begin{aligned}P(49,6<M_n<50,4) &\geqslant 1-\frac{\mathbb{V}\left(M_n\right)}{\delta^2}\\ &\geqslant 1-\frac{0,04}{(0,4)^2}\\ &\geqslant 1-\frac{0,04}{0,16}\\ &\geqslant 0,75.\end{aligned}$$

Cela signifie que, quel que soit l'échantillon prélevé, il y a au moins 75 % de chances que la moyenne des 100 vis mesurées soit comprise entre 49,6 mm et 50,4 mm, c'est-à-dire à moins de 0,4 mm de la valeur cible de 50 mm.

Corrigé de l'exercice 12.14 page 419

1 On a :

$$X-\mu\geqslant a \iff X-\mu+\lambda\geqslant a+\lambda$$

donc la probabilité des deux événements $(X-\mu\geqslant a)$ et $(X-\mu+\lambda\geqslant a+\lambda)$ sont égales.

2 Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}E\big((X-\mu+\lambda)^2\big) &= E\big((X-\mu)^2+2(X-\mu)\lambda+\lambda^2\big)\\ &= \underbrace{E\big((X-\mu)^2\big)}_{=V(X)}+2\lambda\underbrace{E(X-\mu)}_{=0}+\lambda^2\\ &=\sigma^2+\lambda^2.\end{aligned}$$

3 Dans un premier temps, on a :

$$P(X-\mu\geqslant a)=P(X-\mu+\lambda\geqslant a+\lambda).$$

Or,

$$P(X-\mu+\lambda\geqslant a+\lambda)\leqslant P\big((X-\mu+\lambda)^2\geqslant(a+\lambda)^2\big).$$

Ainsi,

$$P(X-\mu\geqslant a)\leqslant P\big((X-\mu+\lambda)^2\geqslant(a+\lambda)^2\big).$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X-\mu+\lambda)^2$, on obtient :

$$P\big((X-\mu+\lambda)^2\geqslant(a+\lambda)^2\big)\leqslant\frac{E\big[(X-\mu+\lambda)^2\big]}{(a+\lambda)^2}.$$

Ainsi,

$$P(X-\mu\geqslant a)\leqslant\frac{E\big[(X-\mu+\lambda)^2\big]}{(a+\lambda)^2}$$

d'où :

$$P(X-\mu\geqslant a)\leqslant\frac{\sigma^2+\lambda^2}{(a+\lambda)^2}.$$

4 Posons $f(\lambda)=\dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{(a+\lambda)^2}$, avec $\lambda \geqslant 0$.
Sa dérivée vaut :

$$f'(\lambda)=2\frac{a\lambda-\sigma^2}{(a+\lambda)^3}.$$

On en déduit que $f'(\lambda)>0 \iff \lambda>\dfrac{\sigma^2}{a}$.
Notamment, f admet un minimum en $\lambda=\dfrac{\sigma^2}{a}$, et ce minimum vaut $\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$.
Ainsi,

$$P(X-\mu\geqslant a)\leqslant\frac{\sigma^2+\lambda^2}{(a+\lambda)^2}\leqslant\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}.$$

On peut écrire :

$$\big(\,|\,X-\mu\,|\,\geqslant a\big)=\big(X-\mu\geqslant a\big)\cup\big(\mu-X\geqslant a\big).$$

Les deux événements $\big(X-\mu\geqslant a\big)$ et $\big(\mu-X\geqslant a\big)$ étant disjoints,

$$P\big(\,|\,X-\mu\,|\,\geqslant a\big)=P\big(X-\mu\geqslant a\big)+P\big(\mu-X\geqslant a\big).$$

À l'aide de la question précédente, appliquée à $X-\mu$ et à $\mu-X$, on obtient :

$$P\big(\,|\,X-\mu\,|\,\geqslant a\big)\leqslant\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}+\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$$

soit :

$$P\big(\,|\,X-\mu\,|\,\geqslant a\big)\leqslant\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+a^2}.$$

5 Cette dernière inégalité est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si :

$$\begin{aligned}\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+a^2}<\frac{\sigma^2}{a^2}&\iff\frac{2}{\sigma^2+a^2}<\frac{1}{a^2}\\&\iff\frac{\sigma^2+a^2}{2}>a^2\\&\iff\frac{\sigma^2+a^2}{2}>\frac{2a^2}{2}\\&\iff\sigma^2>a^2\\&\iff a<\sigma \text{ car } a \text{ et } \sigma \text{ sont positifs.}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 12.15 page 419

On cherche un entier n tel que :

$$P\big(\,|\,M_n-0,3\,|\,\geqslant 0,1\big)\leqslant 0,5.$$

Notons X_k le nombre de points gagnés au k-ième tirage, $1\leqslant k\leqslant n$.

X_k suit la loi de Bernoulli de probabilité $p=\dfrac{3}{10}=0,3$ et de variance $\sigma^2=0,3\times(1-0,3)=0,21$.
De plus, par définition, les X_k sont indépendantes donc on peut utiliser la propriété du cours sur l'inégalité de concentration sur la moyenne :

$$P\left(|M_n-0,3|\geqslant 0,1\right)\leqslant\frac{0,21}{0,1^2n}.$$

On souhaite que $P(|M_n - 0,3| \geqslant 0,1) \leqslant 0,5$ donc il suffit de choisir n tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{0,21}{0,1^2 n} \leqslant 0,5 &\iff \frac{0,1^2 n}{0,21} \geqslant \frac{1}{0,5} \\
&\iff 0,1^2 n \geqslant \frac{1}{0,5} \times 0,21 \\
&\iff n \geqslant \frac{1}{0,5} \times \frac{0,21}{0,1^2} \\
&\iff n \geqslant 42.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 12.16 page 419

1 Regardons les premières valeurs de S_n :

- $S_1 \in \{-1; 1\}$ car X_1 ne peut prendre pour valeurs que -1 ou 1 ;
- $S_2 \in \{-1-1; -1+1; 1-1; 1+1\}$ soit $S_2 \in \{-2; 0; 2\}$;
- $S_3 \in \{-3; -1; 1; 3\}$.

On s'aperçoit que S_n est la position à laquelle nous nous trouvons dans $\mathbb{Z}$ à la fin de l'étape n.

2 $\mu = E(X_k) = 1 \times P(X_k = 1) + (-1) \times P(X_k = -1) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$.

3 $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et d'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres),

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) = 0.$$

Autrement dit, quand le nombre de pas devient très grand, la moyenne $\dfrac{S_n}{n}$ se rapproche de $2p - 1$.

Corrigé de l'exercice 12.17 page 419

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, considérons l'événement :

« une boule rouge est tirée lors du k-ième tirage ».

Notons alors X_k la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges obtenues lors du k-ième tirage. X_k soit la loi de Bernoulli de probabilité $\dfrac{2}{5}$, a pour espérance $\mu = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et pour variance $\sigma^2 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = 0,24$.

La proportion de boules rouges obtenues après n tirages est $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

On cherche donc la première valeur de n à partir de laquelle :

$$P(\,|\,M_n - 0,4\,|\, < 0,05) \geqslant 0,95 \iff P(\,|\,M_n - 0,4\,|\, \geqslant 0,05) \leqslant 0,05.$$

La propriété du cours sur l'inégalité de concentration sur la moyenne nous dit que, pour $\delta = 0,05$:

$$P(\,|\,M_n - 0,4\,|\, \geqslant 0,05) \leqslant \frac{0,24}{0,0025n}.$$

Une valeur de n satisfaisante est donc la plus petit valeur de n telle que :

$$\begin{aligned}
\frac{0,24}{0,0025n} \leqslant 0,05 &\iff \frac{0,0025n}{0,24} \geqslant \frac{1}{0,05} \\
&\iff 0,0025n \geqslant \frac{0,24}{0,05} \\
&\iff n \geqslant \frac{0,24}{0,05 \times 0,0025} \\
&\iff n \geqslant 1\ 920.
\end{aligned}$$

Ce dernier résultat nous assure à 95% que la proportion de boules rouges tirées se trouve dans l'intervalle $]0,35;0,45[$.

Remarque 78

Si l'on effectue des simulations de cette expérience, on peut se rendre compte que l'on obtient une proportion dans l'intervalle pour des valeurs de n plus petites. Il est donc important de se souvenir que l'inégalité de concentration nous assure une valeur de n adéquate mais qu'elle n'est pas toujours minimale.

Corrigé de l'exercice 12.18 page 420

Notons X_k la masse de la pièce contrôlée numéro k, où $1 \leqslant k \leqslant 50$ puisque l'on prélève 50 pièces. On a d'après l'énoncé $\mathbb{E}(X_k) = 100$ et $\mathbb{V}(X_k) = 16$.

La propriété du cours sur l'inégalité de concentration sur la moyenne donne :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_{50}}{50} - 100\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{16}{50 \times \delta^2}.$$

On prend ici $\delta = 0,6$ car on nous demande de déterminer une majoration de la probabilité que la moyenne des poids des pièces dans l'échantillon s'écarte de plus de 0.6 grammes de la moyenne théorique. Cela donne :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_{50}}{50} - 100\right| \geqslant 0,6\right) \leqslant \frac{16}{50 \times 0,6^2} \leqslant 0,89.$$

Corrigé de l'exercice 12.19 page 420

D'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres), si on note pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{cases} X_k = 1 & \text{si on obtient un « 6 »} \\ X_k = 0 & \text{Si on n'obtient pas un « 6 »} \end{cases}$$

où les X_k sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{6}$ et donc d'espérance $\mu = \frac{1}{6}$, on peut écrire pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) = 0$$

ce qui signifie que la fréquence $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ se rapprochera de $\mu = \dfrac{1}{6}$ quand n deviendra de plus en plus grand.

Corrigé de l'exercice 12.20 page 420

1
- Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \mathbb{E}(T_1 + T_2) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2) = 4 + 3 = 7$;
- De plus, T_1 et T_2 sont indépendantes donc $\mathbb{V}(\mathrm{T}) = \mathbb{V}(T_1) + \mathbb{V}(T_2) = 2 + 1 = 3$.

2 Nous cherchons ici à démontrer que :

$$\begin{aligned} P(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant \frac{2}{3} &\iff P(7-2 \leqslant T \leqslant 7+2) \geqslant \frac{2}{3} \\ &\iff P(\,|\,T - 7\,|\, \leqslant 2) \geqslant \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned} &\forall\,\delta > 0, \quad P(\,|\,T - \mathbb{E}(\mathrm{T})\,|\, \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{T})}{\delta^2} \\ \iff &\forall\,\delta > 0, \quad P(\,|\,T - 7\,|\, \geqslant \delta) \leqslant \frac{3}{\delta^2} \end{aligned}$$

En prenant alors $\delta = 3$, on a :

$$\begin{aligned}
& P(\,|\,T-7\,|\; \geqslant 3) \leqslant \frac{3}{3^2} \\
\iff & 1 - P(\,|\,T-7\,|\; < 3) \leqslant \frac{1}{3} \\
\iff & 1 - P(\,|\,T-7\,|\; \leqslant 2) \leqslant \frac{1}{3} \quad \text{car } |\,T-7\,| \text{ est entier} \\
\iff & P(\,|\,T-7\,|\; \leqslant 2) \geqslant 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 12.21 page 420

1 S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$ donc :

$$E\left(S_n\right) = n \times p = 0,95n \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n.$$

2 Dans cette question, on pose $n = 150$.

a. $$\begin{aligned} P\left(S_{150} = 145\right) &= \binom{150}{145} \times 0,95^{145} \times 0,05^{150-145} \\ &= 591\ 600\ 030 \times 0,95^{145} \times 0,05^5 \\ &\approx 0,109. \end{aligned}$$

Dans le contexte de l'exercice, dans environ 10,9% des cas, 145 jouets sur les 150 du lot réussissent le test de fabrication.

b. 94 % des jouets de ce lot correspondent à 141 jouets.
À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$P\left(S_{150} \geqslant 141\right) \approx 0,781.$$

La probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication vaut environ $0,781$.

3 Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

a. D'après les propriétés sur l'espérance d'une somme de variables aléatoires :

$$E\big(F_n\big) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E\left(S_n\right)}{n} = \frac{0,95n}{n} = 0,95.$$

D'après les propriétés sur la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes :

$$V\left(F_n\right) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V\left(S_n\right)}{n^2} = \frac{0,0475n}{n^2} = \frac{0,0475}{n}.$$

b. On souhaite déterminer une valeur de n pour laquelle :

$$\begin{aligned}
P(I) \geqslant 0,96 &\iff P(0,93 < F_n < 0,97 \geqslant 0,96 \\
&\iff 1 - P(\,|\,F_n - 0,95\,|\; \geqslant 0,02) \geqslant 0,96 \\
&\iff P(\,|\,F_n - 0,95\,|\; \geqslant 0,02) \leqslant 0,04.
\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall\, \delta > 0, \quad P(\,|\,F_n - E(F_n)\,|\; \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(F_n)}{\delta^2}.$$

En prenant $\delta = 0,02$, cela donne :

$$P(\,|\,F_n - 0,95\,|\; \geqslant 0,02) \leqslant \frac{0,0475}{4 \times 10^{-4} n} = \frac{118,75}{n}.$$

Ainsi, pour que $P(\,|\,F_n - 0,95\,|\; \geqslant 0,02) \leqslant 0,04$, il suffit de prendre n tel que :

$$\frac{118,75}{n} \leqslant 0,04 \iff n \geqslant \frac{118,75}{0,04} \iff n \geqslant 2\ 968{,}75.$$

Ainsi, à partir de 2 969 jouets prélevés, la probabilité de l'événement I est supérieure ou égale à $0,96$.

Corrigé de l'exercice 12.22 page 421

1 L'expérience consistant à choisir un candidat est une épreuve de Bernoulli, dont la probabilité du succès (obtenir le permis dès la première fois) est $p = 0,747$.

On réalise 10 fois cette expérience et on suppose que les épreuves aléatoires sont indépendantes.

Donc la variable aléatoire X, donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative, suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,747$.

2 $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5)$.

À la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0,082$ donc $P(X \geqslant 6) \approx 0,918$.

On peut donc estimer à $91,8\,\%$ le pourcentage de chances que sur 10 candidats, au moins 6 obtiennent le permis dès leur première tentative.

3 $E(X) = np = 10 \times 0,747 = 7,47$.

$V(X) = np\,(1-p) = 10 \times 0,747 \times 0,253 \approx 1,890$.

4 **a.** D'après l'énoncé, $Z = X + Y$.

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 7,47 + 22,53 = 30.$$

Les variables X et Y sont indépendantes, donc :

$$V(Z) = V(X) + V(Y) \approx 1,89 + 9,81 = 11,7.$$

b. La variable aléatoire Z a pour espérance $E(Z)$ et pour variance $V(Z)$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\forall\,\delta > 0, \qquad P(\,|\,Z - E(Z)\,|\, \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(Z)}{\delta^2}.$$

soit ici :

$$\forall\,\delta > 0, \qquad P(\,|\,Z - 30\,|\, \geqslant \delta) \leqslant \frac{11,7}{\delta^2}.$$

On cherche la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats reçus, soit :

$$20 \leqslant Z \leqslant 40 \iff -10 \leqslant Z - 30 \leqslant 10 \iff |\,Z - 30\,| \leqslant 10.$$

Pour $\delta = 10$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

$$P(\,|\,Z - 30\,|\, \geqslant 10) \leqslant \frac{11,7}{10^2}$$

soit :

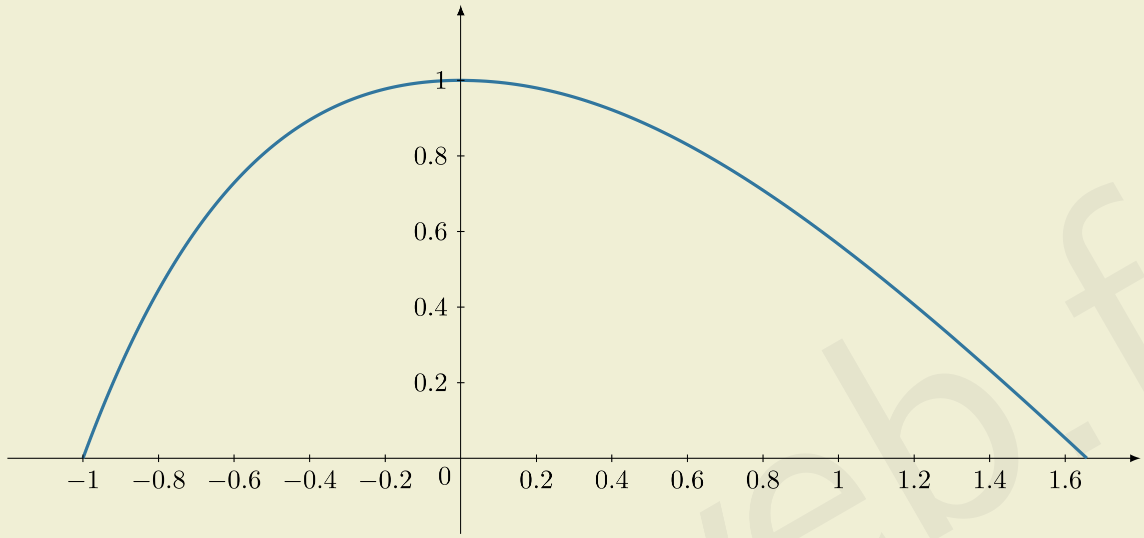
$$P(\,|\,Z - 30\,|\, \geqslant 10) \leqslant 0,117.$$

La probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est donc inférieure à 0,12.

Bac blanc 01

Exercice 13.1 (5 points)

Une entreprise souhaite construire un bâtiment dont le profil a la forme représentée dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ ci-dessous, dont l'unité graphique représente 50 mètres.



Pour cela, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{pour } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 + \ln(2) - \ln\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) & \text{pour } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Partie A : étude de la fonction f

1 Vérifier que f est continue en 0.

2 **a.** Montrer que sur $[0\,;+\infty[$, la dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}.$$

b. En déduire que f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;+\infty[$. On la notera α.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

3 On admet que $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$ sur $]-1\,;0[$.
Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left[f'(x)\right]$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[f'(x)\right]$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B : calcul d'aire

L'entreprise désire connaître la surface latérale du bâtiment. Cela revient à déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-1\,;\alpha]$.

1 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$.

2 Afin d'obtenir un encadrement de l'aire sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$, on utilise le programme suivant, écrit en Python :

Code Python 13-43

```python
from math import exp, log

def f(x):
    return 1+log(2)-log(exp(x)+exp(-x))

def rectangleSup(n):
    base = 1.65745/n
    x = 0
    A = 0
    while x < 1.65745:
        A = A + base * f(x)
        x = x + base
    return A

def rectangleInf(n):
    base = 1.65745/n
    x = base
    A = 0
    while x < 1.65745:
        A = A + base * f(x)
        x = x + base
    return A

print([rectangleInf(100), rectangleSup(100)])
```

On rappelle que la fonction Python `log` renvoie le *logarithme népérien*.

Expliquer le principe de ce programme.

3 Ce programme affiche :

```
[1.0312009233909132, 1.047775423390913]
```

Justifier qu'un encadrement de la surface latérale du bâtiment est :

$$4\,374\ \mathrm{m}^2 \leqslant \text{aire latérale du bâtiment} \leqslant 4\,415\ \mathrm{m}^2.$$

Solution page 438

Exercice 13.2 (5 points)

On note $f(t)$ la température (en °C) à l'intérieur d'une serre à l'instant $t \geqslant 0$ (en heures).
Un scientifique suppose que f vérifie l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' = (y - t + 1)^2$$

avec la condition initiale $f(0) = 2$.

1 On pose $u = y - t + 1$ et :

$$(E'): \quad u' = u^2 - 1.$$

Montrer l'équivalence suivante :

$$y \text{ est solution de } (E) \iff u \text{ est solution de } (E').$$

2 Vérifier que les fonctions constantes $u(t) = 1$ et $u(t) = -1$ sont solutions de (E').
À quelles solutions de (E) correspondent-elles ?

3 Soit u une solution de (E') telle que $u \neq 1$ et $u \neq -1$.

a. Justifier qu'on peut écrire :

$$\frac{u'}{u^2 - 1} = 1.$$

b. Trouver les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{a}{u - 1} + \frac{b}{u + 1}.$$

c. En déduire une primitive de $\dfrac{u'}{u^2 - 1}$, puis montrer qu'on obtient après résolution :

$$u(t) = \frac{1 + Ce^{2t}}{1 - Ce^{2t}} \qquad \text{ou} \qquad u(t) = \frac{1 - Ce^{2t}}{1 + Ce^{2t}}$$

où C est une constante réelle non nulle.

4 En déduire l'expression générale de $f(t)$.
Déterminer la constante C grâce à $f(0) = 2$, puis donner l'expression explicite de $f(t)$ et préciser son domaine de définition.

5 On admet que f est strictement croissante sur son domaine de définition.
Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{t \to \frac{\ln(2)}{2} \\ t < \frac{\ln(2)}{2}}} \big[f(t)\big]$.
En déduire que cette modélisation est peu cohérente.

6 La *loi de Newton* permet d'opter pour un autre modèle.
On suppose que la température f vérifie l'équation :

$$(E_N): \qquad f' = -k(f - T_{\text{ext}})$$

où T_{ext} est la température extérieure, et k un paramètre strictement positif.
En prenant $T_{\text{ext}} = 20$ °C et $k = 0,6$, donner l'expression de $f(t)$.

Solution page 441

Exercice 13.3 (6 points)

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

On appelle :

- E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
- E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;
- E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

Partie A : succession de trois parties

1 Dresser un arbre de probabilités représentant la situation.

2 Montrer que $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=2\right)=0,031$.
On admettra pour la suite de l'exercice la loi de probabilité de X suivante :

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002

3 Calculer l'espérance de X.
On admet que la variance de X est $\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right)=0,289$.

Partie B : succession de n parties dépendantes

Dans cette partie, on suppose que le joueur joue n parties, n étant un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- E_n l'événement : « le joueur perd la n-ième partie »,
- $\overline{E_n}$ l'événement contraire de E_n,
- p_n la probabilité de l'événement E_n.

1 Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n\cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n}\cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

2 En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1}=0,05p_n+0,05$.

3 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n=p_n-\frac{1}{19}.$$

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.
c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie C : succession de n parties indépendantes

Dans cette partie, on suppose que le joueur joue n parties de manière **indépendante**, chacune avec une probabilité de défaite égale à $\dfrac{1}{19}$.
On note S_n le nombre de défaites parmi ces n parties. On admet que la variable aléatoire S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{19}$.

1 Exprimer l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ en fonction de n.

2 On note $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ la fréquence de défaites observée sur n parties.

a. Montrer que l'espérance de F_n est $\mathbb{E}(F_n) = \dfrac{1}{19}$ et que sa variance est $\mathbb{V}(F_n) = \dfrac{18}{361\,n}$.

b. À l'aide du théorème de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{19}\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \frac{7\ 200}{361n}.$$

3 Déterminer la valeur minimale de n pour que l'on puisse garantir que :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{19}\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant 0,01.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte du jeu.

Solution page 444

Exercice 13.4 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.

1 On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{P}\ :\ -x + 2y + z = 3$$

et la droite (d) de représentation paramétrique :

$$(d)\ :\ \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad ,\quad t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 : (d) coupe $\mathcal{P}$ en $I\,(-7\,;-5\,;6)$.

2 On considère 17 points de l'espace A_1, A_2, ..., A_{17} que l'on souhaite relier les uns aux autres par un segment.
Affirmation 2 : nous devons tracer 289 segments.

3 On donne : $A_1\,(5\,;-2\,;6)$.

Affirmation 3 : la distance de A_1 à $\mathcal{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

4 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{3}{2}(1 - r^n) \qquad \text{avec } r = \sqrt{2} - 1.$$

Affirmation 4 : les points de coordonnées $(u_n\,;u_{n+1}\,;u_{n+2})$ appartiennent tous à $\mathcal{P}$.

Solution page 446

Corrigés

Corrigé de l'exercice 13.1 page 433

Partie A : étude de la fonction f

1 Nous avons d'une part :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left[f(x)\right] = \lim_{x\to 0} \left[(x+1)\mathrm{e}^{-x}\right] = (0+1)\mathrm{e}^{0} = 1.$$

D'autre part,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[f(x)\right] = \lim_{x\to 0} \left[1+\ln(2)-\ln\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\right] = 1+\ln(2)-\ln\left(\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{0}\right) = 1+\ln(2)-\ln(2) = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left[f(x)\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[f(x)\right].$$

<u>La fonction f est donc continue en 0.</u>

2 **a.** Sur $[0\,;+\infty[$,

$$f(x) = 1+\ln(2)-\ln\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right) = 1+\ln(2)-\ln\left[u(x)\right]$$

avec :

$$u(x) = \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{donc} \qquad u'(x) = \mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}} \\ &= \frac{\cancel{\mathrm{e}^{-x}}\left(1-\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{x}\right)}{\cancel{\mathrm{e}^{-x}}\left(1+\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{x}\right)} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}}$$

b. Sur $[0\,;+\infty[$, $1+\mathrm{e}^{2x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-\mathrm{e}^{2x}$.

$$1-\mathrm{e}^{2x}\geqslant 0 \iff 1\geqslant \mathrm{e}^{2x} \iff \ln(1)\geqslant 2x \iff x\leqslant 0.$$

Ainsi, sur $[0\,;+\infty[$, $f'(x)\leqslant 0$.

$$f'(x)=0 \iff x=0.$$

<u>Donc, sur $]0\,;+\infty[$, f est strictement décroissante.</u>

c. On calcule :

$$f(2) = 1 + \ln(2) - \ln\left(e^2 + e^{-2}\right) \approx -0,32 < 0.$$

Ainsi, sur $[0\,;2]$,

- f est strictement décroissante et continue ;
- $f(0) = 1$ et $f(2) < 0$ donc $f(2) < 0 < f(0)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans $[0\,;2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus, sur $]2\,;+\infty[$, f étant strictement décroissante avec $f(2) < 0$, $f(x) < 0$ donc $f(x)$ ne s'annule pas sur cet intervalle.

Par conséquent, sur $[0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution : α.
À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$\boxed{\alpha \approx 1{,}657\ 45}$$

3 D'une part, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left[f'(x)\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(-xe^{-x}\right) = 0.$$

Cela signifie graphiquement que le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en 0 (à gauche) est nul, donc que la tangente est horizontale.

D'autre part,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left[f'(x)\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

Cela signifie graphiquement que le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en 0 (à droite) est nul, donc que la tangente est aussi horizontale.

Donc, en 0, la courbe admet à droite et à gauche une tangente horizontale.

Partie B : calcul d'aire

1 $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)e^{-x}\,dx.$

Posons alors : $u(x) = x+1 \qquad u'(x) = 1$

$\qquad\qquad v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$

Alors, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} f(x)\,dx &= \Big[u(x)\times v(x)\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} u'(x)\times v(x)\,dx\\
&= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-x}\,dx\\
&= -(0+1)e^{-0} - \left(-(-1+1)e^{-(-1)}\right) + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx\\
&= -1 - 0 + \Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^{0}\\
&= -1 + (-e^0 + e^{-(-1)})
\end{aligned}$$

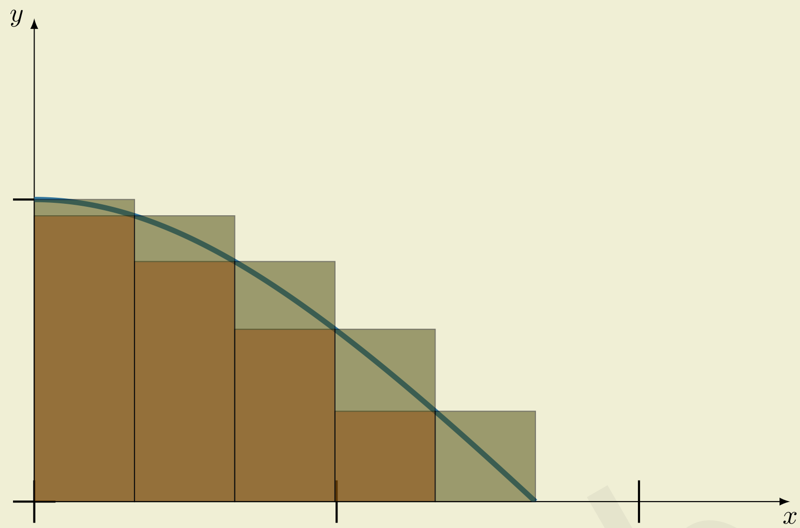
$$\boxed{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = e - 2}$$

2

- Lignes 3-4 : on définit une fonction Python « `f(x)` » qui renvoie l'image du nombre x par la fonction f.
- Lignes 6-16 : la fonction Python « `rectangleSup(n)` » renvoie l'aire totale des rectangles de hauteur $f\left(k\times\dfrac{\alpha}{n}\right)$, pour k entier compris entre 0 et $n-1$.

- Lignes 15-22 : la fonction Python « `rectangleInf(n)` » renvoie l'aire totale des rectangles de hauteur $f\left(k \times \frac{\alpha}{n}\right)$, pour k entier compris entre 1 et n.

Cela représente la *méthode des rectangles.*



3 Le programme affiche un intervalle dont la borne inférieure est la somme des aires des rectangles qui sont sous la courbe et dont la borne supérieure est la somme des aires des rectangles qui sont au-dessus de la courbe. Ainsi, $\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$ est dans cet intervalle.

Ce qu'affiche le programme est donc un encadrement de $\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.

On en déduit alors que :

$$1,0312 \leqslant \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1,0478.$$

Or,

$$\int_{-1}^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

donc :

$$\mathrm{e} - 2 + 1,0312 \leqslant \int_{-1}^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e} - 2 + 1,0478$$

soit :

$$1,7495 \leqslant \int_{-1}^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1,7661.$$

N'oublions pas maintenant les unités : une unité graphique représente 50 mètres (d'après l'énoncé) donc une unité d'aire représente $50 \times 50 = 2\ 500\mathrm{m}^2$.
Ainsi, un encadrement de l'aire latérale (en m^2) du bâtiment est :

$$1,7495 \times 2\ 500 \leqslant \int_{-1}^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1,7661 \times 2\ 500$$

soit :

$$4\ 373{,}75\ \mathrm{m}^2 \leqslant \int_{-1}^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4\ 415{,}25\ \mathrm{m}^2.$$

soit, en arrondissant au mètre carré près :

$$4\ 374\ \mathrm{m}^2 \leqslant \int_{-1}^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4\ 415\ \mathrm{m}^2.$$

Corrigé de l'exercice 13.2 page 435

1 On pose $u = y - t + 1$ donc $y = u + t - 1$. Alors,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Longrightarrow y' = (y - t + 1)^2 \\ &\Longrightarrow (u + t - 1)' = (u + t - 1 - 1 + 1)^2 \\ &\Longrightarrow u' + 1 = u^2 \\ &\Longrightarrow u' = u^2 - 1 \\ &\Longrightarrow u \text{ est solution de } (E'). \end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} u \text{ est solution de } (E') &\Longrightarrow y' = u' + 1 \text{ avec } y = u + t - 1 \\ &\Longrightarrow y' = (u^2 - 1) + 1 \text{ car } u' = u^2 - 1 \\ &\Longrightarrow y' = u^2 = (y - t + 1)^2 \\ &\Longrightarrow y \text{ est solution de } (E). \end{aligned}$$

Finalement, on a bien l'équivalence :

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E) \iff u \text{ est solution de } (E')}$$

2 Si $u(t) = 1$ alors $u'(x) = 0$ et on a bien $u'(t) = 0 = 1^2 - 1 = u(t)^2 - 1$.
Si $u(t) = -1$ alors $u'(x) = 0$ et on a bien $u'(t) = 0 = (-1)^2 - 1 = u(t)^2 - 1$.
Ainsi, les fonctions $u(t) = 1$ et $u(t) = -1$ sont bien solutions de (E').

- Si $u(t) = 1$ alors $y(t) = 1 + t - 1 = t$. On vérifie que $y(t) = t$ est bien solution de (E) :
$$y'(t) = 1 = \big(t - t + 1\big)^2 = (1)^2.$$
L'égalité est vraie donc $y(t) = t$ est une solution de (E).
- Si $u(t) = -1$ alors $y(t) = -1 + t - 1 = t - 2$. On vérifie que $y(t) = t - 2$ est bien solution de (E) :
$$y'(t) = 1 = \big(t - 2 - t + 1\big)^2 = (-1)^2.$$
L'égalité est vraie donc $y(t) = t - 2$ est une solution de (E).

3 **a.** Si $u(t) \neq 1$ et $u(t) \neq -1$, alors :

$$(E') : \qquad u' = u^2 - 1 \iff \frac{u'}{u^2 - 1} = 1$$

car le dénominateur est une fonction non nulle.

b. $$\begin{aligned} \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} &= \frac{a(u+1) + b(u-1)}{(u-1)(u+1)} \\ &= \frac{au + a + bu - b}{u^2 - 1} \\ &= \frac{(a+b)u + (a-b)}{u^2 - 1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} &\iff \frac{1}{u^2-1} = \frac{(a+b)u + (a-b)}{u^2-1} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases} \\ &\iff a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{u+1}}$$

c. De la question précédente, on déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{u'(t)}{u^2(t)-1}=1 &\iff \frac{1}{2}\left(\frac{u'(t)}{u(t)-1}-\frac{u'(t)}{u(t)+1}\right)=1\\
&\iff \frac{u'(t)}{u(t)-1}-\frac{u'(t)}{u(t)+1}=2\\
&\iff \ln\left|u(t)-1\right|-\ln\left|u(t)+1\right|=2t+K,\ K\in\mathbb{R}\\
&\iff \ln\left|\frac{u(t)-1}{u(t)+1}\right|=2t+K,\ K\in\mathbb{R}\\
&\iff \left|\frac{u(t)-1}{u(t)+1}\right|=C\mathrm{e}^{2t},\ C=\mathrm{e}^K\in\mathbb{R}\\
&\iff \begin{cases}\dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}=C\mathrm{e}^{2t} & \text{si } \dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}>0\\ -\dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}=C\mathrm{e}^{2t} & \text{si } \dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}<0\end{cases},\ C=\mathrm{e}^K\in\mathbb{R}^*\\
&\iff \begin{cases}u(t)-1=C\mathrm{e}^{2t}\big(u(t)+1\big) & \text{si } \dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}>0\\ 1-u(t)=C\mathrm{e}^{2t}\big(1+u(t)\big) & \text{si } \dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}<0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}u(t)-C\mathrm{e}^{2t}u(t)=C\mathrm{e}^{2t}+1 & \text{si } \dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}>0\\ 1-C\mathrm{e}^{2t}=u(t)+C\mathrm{e}^{2t}u(t) & \text{si } \dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}<0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\big(1-C\mathrm{e}^{2t}\big)u(t)=C\mathrm{e}^{2t}+1 & \text{si } \dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}>0\\ \big(1+C\mathrm{e}^{2t}\big)u(t)=1-C\mathrm{e}^{2t} & \text{si } \dfrac{u(t)-1}{u(t)+1}<0\end{cases}\\
&\iff \boxed{u(t)=\frac{1+C\mathrm{e}^{2t}}{1-C\mathrm{e}^{2t}} \text{ ou } u(t)=\frac{1-C\mathrm{e}^{2t}}{1+C\mathrm{e}^{2t}}}
\end{aligned}$$

4 De la question 1, on déduit que :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de (E)} &\iff u(t)=f(t)-t+1=\frac{1+C\mathrm{e}^{2t}}{1-C\mathrm{e}^{2t}}\\
&\iff f(t)=\frac{1+C\mathrm{e}^{2t}}{1-C\mathrm{e}^{2t}}+t-1 \text{ ou } f(t)=\frac{1-C\mathrm{e}^{2t}}{1+C\mathrm{e}^{2t}}+t-1.
\end{aligned}$$

On sait que $f(0)=2$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1+C\mathrm{e}^{2\times 0}}{1-C\mathrm{e}^{2\times 0}}+0-1=2 &\iff \frac{1+C}{1-C}=3\\
&\iff 1+C=3-3C\\
&\iff 4C=2\\
&\iff C=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{1-C\mathrm{e}^{2\times 0}}{1+C\mathrm{e}^{2\times 0}}+0-1=2 &\iff \frac{1-C}{1+C}=3\\
&\iff 1-C=3+3C\\
&\iff 4C=-2\\
&\iff C=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas,

$$f(t)=\frac{1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}}+t-1$$

soit :

$$\boxed{f(t)=\frac{2+\mathrm{e}^{2t}}{2-\mathrm{e}^{2t}}+t-1}$$

f est définie pour tout réel t tel que :

$$2-\mathrm{e}^{2t}\neq 0 \iff \mathrm{e}^{2t}\neq 2 \iff 2t\neq \ln(2) \iff t\neq \frac{1}{2}\ln(2).$$

Or, $t\geqslant 0$ dans le contexte de notre exercice.
Le domaine de définition de f est donc $\left[0\,;\frac{\ln(2)}{2}\right[\cup\left]\frac{\ln(2)}{2}\,;+\infty\right[$.

5 $\lim\limits_{\substack{t\to\frac{\ln(2)}{2}\\ t<\frac{\ln(2)}{2}}}\left(2-\mathrm{e}^{2t}\right)=0^+$ car $t<\dfrac{\ln(2)}{2}$

$$\begin{aligned}&\iff 2t<\ln(2)\\ &\iff \mathrm{e}^{2t}<2\\ &\iff -\mathrm{e}^{2t}>-2\\ &\iff 2-\mathrm{e}^{2t}>0\end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{t\to\frac{\ln(2)}{2}}\left(2+\mathrm{e}^{2t}\right)=4$ donc, par limite des quotients,

$$\lim_{\substack{t\to\frac{\ln(2)}{2}\\ t<\frac{\ln(2)}{2}}}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{2t}}{2-\mathrm{e}^{2t}}\right)=+\infty.$$

De surcroît,

$$\lim_{t\to\frac{\ln(2)}{2}}\left(t-1\right)=\frac{\ln(2)}{2}-1$$

donc, par somme des limites,

$$\lim_{\substack{t\to\left[f(t)\right]\\ t<\frac{\ln(2)}{2}}}=+\infty.$$

Dans le contexte de notre exercice, cela signifie qu'avec ce modèle, la température de la serre augmenterait à l'infini au fur et à mesure que le temps se rapprocherait de $t=\dfrac{\ln(2)}{2}\approx 0,35$ soit près de 21 minutes.
Ce modèle semble donc peu représentatif de la réalité et donc peu adapté à ce que l'on souhaite modéliser.

6 f est la solution de l'équation :

$$y'=-0,6y+0,6\times 20 \iff y'=-0,6y+12$$

telle que $f(0)=2$.
D'après le cours, les solutions générales de (E_N) sont :

$$y(t)=C\mathrm{e}^{-0,6t}-\frac{12}{-0,6}=C\mathrm{e}^{-0,6t}+20,\quad C\in\mathbb{R}.$$

De plus,

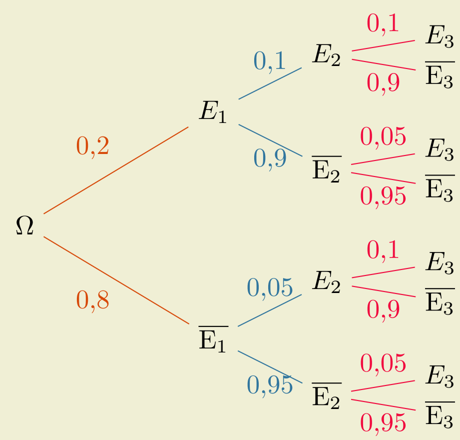
$$f(0)=2 \iff C\mathrm{e}^{-0,6\times 0}+20=2 \iff C=-18.$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{f(t)=20-18\mathrm{e}^{-0,6t}}$$

Corrigé de l'exercice 13.3 page 436

1 L'arbre représentant la situation est le suivant :



2
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=2\right) &= P(E_1\cap E_2\cap \overline{\mathrm{E_3}})+P(E_1\cap \overline{\mathrm{E_2}}\cap E_3)+P(\overline{\mathrm{E_1}}\cap E_2\cap E_3)\\
&=(0,2\times 0,1\times 0,9)+(0,2\times 0,9\times 0,05)+(0,8\times 0,05\times 0,1)\\
&=0,031.
\end{aligned}$$

3 L'espérance de X est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) &= \sum_{i=1}^{4} x_i P(X=x_i)\\
&= 1\times 0,245+2\times 0,031+3\times 0,002
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)=0,313}$$

Partie B

1

- $$\begin{aligned}P(E_n\cap E_{n+1}) &= P(E_n)\times P_{E_n}(E_{n+1})\\ &= \underline{p_n\times 0,1}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}P(\overline{E_n}\cap E_{n+1}) &= P(\overline{E_n})\times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})\\ &=(1-p_n)\times 0,05\\ &= \underline{0,05-0,05p_n}.\end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(E_{n+1})\\
&= P(E_n\cap E_{n+1})+P(\overline{E_n}\cap E_{n+1})\\
&= 0,1p_n+0,05-0,05p_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_{n+1}=0,05p_n+0,05}$$

3
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1}-\frac{1}{19}\\
&= 0,05p_n+0,05-\frac{1}{19}\\
&= \frac{1}{20}p_n+\frac{1}{20}-\frac{1}{19}\\
&= \frac{1}{20}p_n-\frac{1}{20\times 19}\\
&= \frac{1}{20}\left(p_n-\frac{1}{19}\right)\\
&= 0,05u_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,05$ et de premier terme :

$$u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}.$$

4 On déduit que :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1}$$

et donc :

$$p_n = u_n + \frac{1}{19} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p_n = \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1} + \frac{1}{19}}$$

5 $0 < 0,05 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(0,05^n\right) = 0$. Ainsi, par somme des limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (p_n) = \frac{1}{19}}$$

Partie C

1 S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{19}$ donc, d'après le cours,

- L'espérance de S_n est :

$$\mathbb{E}(S_n) = n \times p = \frac{n}{19};$$

- Sa variance est :

$$\mathbb{V}(S_n) = n \times p \times (1-p) = \frac{n}{19} \times \frac{18}{19} = \frac{18n}{361}.$$

2 **a.**
- L'espérance de F_n est :

$$\mathbb{E}(F_n) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{19} = \frac{1}{19}.$$

- Sa variance est :

$$\mathbb{V}(F_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \times \frac{18n}{361} = \frac{18}{361n}.$$

b. D'après le théorème de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall\, \delta > 0,\ P\left(\ |\ F_n - \mathbb{E}(F_n)\ |\ \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(F_n)}{\delta^2}$$

donc, en prenant $\delta = 0,05$, on obtient :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{19}\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \frac{18}{361n \times 0,05^2}$$

soit :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{19}\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \frac{7\ 200}{361n}.$$

3 Pour garantir que $P\left(\left|F_n - \frac{1}{19}\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant 0,01$, d'après la question précédente, il suffit de prendre :

$$\begin{aligned}
\frac{7\ 200}{361n} \leqslant 0,01 &\iff \frac{361n}{7\ 200} \geqslant 100 \\
&\iff 361n \geqslant 720\ 000 \\
&\iff n \geqslant \frac{720\ 000}{361} \\
&\iff n \geqslant 1\ 995.
\end{aligned}$$

Cela signifie, dans le contexte de notre exercice, que le joueur doit faire au moins 1 995 parties pour que la probabilité que la fréquence de ses défaites s'écarte d'au moins 0,05 de sa moyenne soit inférieure à 0,01.

Corrigé de l'exercice 13.4 page 437

1 On remplace x, y et z par respectivement $1+2t$, $-1+t$ et $2-t$ dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ donnée dans l'énoncé :

$$-(1+2t)+2(-1+t)+(2-t)=3 \iff t=-4.$$

Le plan et la droite sont donc sécants. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on remplace t par -4 dans la représentation paramétrique de (d) donnée dans l'énoncé :

$$\begin{cases} x=1+2(-4)=1-8=-7 \\ y=-1+(-4)=-5 \\ z=2-(-4)=6 \end{cases}$$

Le point $I\,(-7\,;-5\,;6)$ est le point d'intersection de (d) et $\mathcal{P}$.

<u>L'affirmation 1 est donc vraie.</u>

2 Des segments sont en fait des couples de points pris parmi les 17 points. Le nombre total de segments est donc égal à :

$$\binom{17}{2}=136.$$

Il y a donc 136 segments qui relient les 17 points.
<u>L'affirmation est donc fausse.</u>

3 D'après le cours, la distance de $A_1\,(5\,;-2\,;6)$ au plan $\mathcal{P}\,:\,-x+2y+z=3$ est :

$$\frac{|\,-1\times 5+2\times(-2)+6-3\,|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$$

<u>L'affirmation 3 est donc fausse.</u>

4 Pour vérifier si les points de coordonnées $(u_n\,;u_{n+1}\,;u_{n+2})$ appartiennent à $\mathcal{P}$, on peut vérifier si :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ -u_n+2u_{n+1}+u_{n+2}=3.$$

On calcule donc :

$$\begin{aligned} -u_n+2u_{n+1}+u_{n+2} &= -\frac{3}{2}(1-r^n)+2\left[\frac{3}{2}(1-r^{n+1})\right]+\frac{3}{2}(1-r^{n+2}) \\ &= -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}r^n+3-3r\times r^n+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}r^2r^n \\ &= -\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}+r^n\left(\frac{3}{2}-3r-\frac{3}{2}r^2\right) \end{aligned}$$

(on constate que $r^2=3-2\sqrt{2}=1-2(\sqrt{2}-1)=1-2r$)

$$\begin{aligned} &= 3+r^n\underbrace{\left(\frac{3}{2}-3r-\frac{3}{2}(1-2r)\right)}_{=0} \text{ car } r^2=1-2r \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, points de coordonnées $(u_n\,;u_{n+1}\,;u_{n+2})$ appartiennent à $\mathcal{P}$.

<u>L'affirmation 4 est donc vraie.</u>

Bac blanc 02

Exercice 13.5 (5 points)

Une population de bactéries évolue de la manière suivante : à chaque génération, chaque bactérie se divise, mais une partie meurt à cause d'un antibiotique.
On désigne par u_n le nombre de bactéries (en millier) dans la population au bout de n heures, et on modélise cette suite à l'aide de la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{2u_n + 1}.$$

On considère qu'au début, il y a 2 000 bactéries. Donc, $u_0 = 2$.

1 Calculer u_1 et u_2.

2 Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 2 - \frac{3}{2u_n + 1}.$$

3 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 2.$$

4 En déduire que la suite (u_n) converge.

5 Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 0,5}.$$

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. On précisera alors sa raison et son premier terme.
b. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.
c. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Solution page 451

Exercice 13.6 (5 points)

Une serre agricole est hermétiquement fermée pendant la nuit. Le matin, à $t = 0$, on active le système de ventilation. Un capteur mesure la concentration en CO_2 dans l'air brassé.
On modélise la concentration en CO_2 (en grammes par mètre cube) au bout de t heures par la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par :

$$f(t) = 6t\mathrm{e}^{-t}.$$

1 Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2 Montrer que, pour tout réel $t \in [0\,;5]$:

$$f'(t) = 6(1-t)\mathrm{e}^{-t}.$$

3 Dresser alors le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.

4 Déterminer la concentration maximale en CO_2 atteinte dans la serre.
On donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

5 On admet que la dérivée seconde de $f(t)$ est $f''(t) = 6(t-2)\mathrm{e}^{-t}$.
Étudier la convexité de f sur $[0\,;5]$.
On précisera, s'il y a lieu, les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de f, en interprétant ce point d'inflexion dans le contexte de l'exercice.

6 **a.** En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. En déduire la concentration moyenne μ en CO_2 à laquelle les plantes sont exposées durant les 5 heures de ventilation.
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

7 **a.** Compléter le programme (écrit en Python) suivant afin qu'il retourne le temps qui s'est écoulé avant que la concentration de CO_2 redevienne inférieure à 50 % de la concentration maximale.

Code Python 13-44

```python
# on importe la fonction exponentielle
from math import exp

Cmax = 6 * exp(-1)
t = 1
C = ...

while C ...:
    t = t + 0.01
    C = ...

print(t)
```

b. Ce programme affiche la valeur : « `2.68` ».
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution page 453

Exercice 13.7 (5 points)

Une entreprise de cybersécurité étudie la robustesse des mots de passe utilisés par ses employés.
Les mots de passe sont composés à partir des dix chiffres $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ et des 26 lettres majuscules de l'alphabet.
Un mot de passe est dit **fort** s'il contient au moins un chiffre parmi $\{8, 9\}$.

Partie A : dénombrement

Dans cette partie, on s'intéresse aux différentes façons de constituer des codes d'accès ou des mots de passe.

1 Un mot de passe est une suite ordonnée de 6 caractères, les répétitions étant autorisées.
Combien de mots de passe différents peut-on former ?

2 Un code d'accès temporaire est une suite ordonnée de 6 caractères tous distincts.
Combien de codes d'accès différents peut-on former ?

3 Un administrateur doit créer un code de validation en plaçant dans un ordre aléatoire les chiffres 1, 2, 3 et 4, chacun utilisé exactement une fois.
Combien de codes de validation différents sont possibles ?

4 Pour tester le nouveau système de sécurité, l'entreprise demande à 10 de ses 50 salariés de l'utiliser afin de voir leurs réactions.
Combien de groupes différents peut-on former ?

Partie B : probabilités

Dans cette partie, on arrondira les probabilités à 10^{-4} près si besoin.

Un employé crée un mot de passe en choisissant aléatoirement et de façon indépendante 8 chiffres parmi $\{0, 1, \ldots, 9\}$, les répétitions étant autorisées.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de chiffres parmi $\{8, 9\}$ dans ce mot de passe.

1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2 Calculer $P(X = 0)$ et interpréter ce résultat.

3 Donner la formule qui permet de calculer $P(X = 1)$, puis en déterminer sa valeur.

4 En déduire $P(X \geqslant 2)$ et interpréter dans le contexte de l'exercice.

5 Calculer l'espérance $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et la variance $\mathbb{V}(\mathrm{X})$. Interpréter $\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

Partie C : concentration

Un auditeur en sécurité analyse n mots de passe d'employés, choisis indépendamment.
On suppose que chaque mot de passe a une probabilité $p = 0,2$ d'être fort.
On note :

- X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème mot de passe est fort, et 0 sinon, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$;
- $F_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ la proportion de mots de passe forts parmi les n analysés.

1 Exprimer $\mathbb{E}(F_n)$ en fonction de n et justifier que $\mathbb{V}(F_n) = \dfrac{0,16}{n}$.

2 En déduire, à l'aide du théorème de Bienaymé-Tchebychev, une majoration de $P(\,|\,F_n - 0,2\,|\, \geqslant 0,1)$ en fonction de n.

3 Déterminer le nombre minimal de mots de passe n que l'auditeur doit analyser pour garantir que :

$$P(|F_n - 0{,}2| \geqslant 0,1) \leqslant 0,01.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution page 454

Exercice 13.8 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.

On considère le tétraèdre $ABCD$ de sommets :

$$A(0\,;\,0\,;\,0),\quad B(6\,;\,0\,;\,0),\quad C(0\,;\,6\,;\,0),\quad D(0\,;\,0\,;\,6).$$

On considère de plus le point $H\,(8\,;8\,;8)$.

1. **Affirmation 1 :** le plan (BCD) a pour équation cartésienne $x + y + z = 3$.
2. **Affirmation 2 :** une représentation paramétrique de la droite (AD) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 6t \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. **Affirmation 3 :** la droite (AH) coupe le plan (BCD) au point $G\,(2\,;2\,;2)$.
4. **Affirmation 4 :** les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
5. **Affirmation 5 :** la distance du point A au plan (BCD) est égale à $2\sqrt{3}$.

Solution page 456

Corrigé de l'exercice 13.5 page 447

1 Calcul de u_1 et u_2.

- $u_1 = \dfrac{4\times 2-1}{2\times 2+1} = \dfrac{7}{5}$.
- $u_2 = \dfrac{4\times\frac{7}{5}-1}{2\times\frac{7}{5}+1} = \dfrac{\frac{28}{5}-1}{\frac{14}{5}+1} = \dfrac{\frac{23}{5}}{\frac{19}{5}} = \dfrac{23}{19}$.

2 Pour tout entier naturel n,

$$4u_n - 1 = 2(2u_n+1) - 3,$$

donc :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n-1}{2u_n+1} = \frac{2(2u_n+1)-3}{2u_n+1} = 2 - \frac{3}{2u_n+1}.$$

3 Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 2$ ».

- **Initialisation.**
  Pour $n=0$: $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{7}{5}$. On a bien $1 \leqslant \dfrac{7}{5} < 2 \leqslant 2$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.**
  Supposons que $1 \leqslant u_{k+1} < u_k \leqslant 2$ pour un certain entier $k \geqslant 0$.
  Montrons que $1 \leqslant u_{k+2} < u_{k+1} \leqslant 2$.

  D'après la question 2, $u_{k+2} = 2 - \dfrac{3}{2u_{k+1}+1}$.
  Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
1 \leqslant u_{k+1} < u_k \leqslant 2 &\Longrightarrow 2 \leqslant 2u_{k+1} < 2u_k < 4\\
&\Longrightarrow 3 \leqslant 2u_{k+1}+1 < 2u_k+1 \leqslant 5\\
&\Longrightarrow 1 \geqslant \frac{3}{2u_{k+1}+1} > \frac{3}{2u_k+1} \geqslant \frac{3}{5}\\
&\Longrightarrow -1 \leqslant -\frac{3}{2u_{k+1}+1} < -\frac{3}{2u_k+1} \leqslant -\frac{3}{5}\\
&\Longrightarrow 1 \leqslant 2-\frac{3}{2u_{k+1}+1} < 2-\frac{3}{2u_k+1} \leqslant \frac{7}{5}\\
&\Longrightarrow 1 \leqslant u_{k+2} < u_{k+1} \leqslant 2
\end{aligned}$$

- **Conclusion.**
  $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, pour un entier $k \geqslant 0$, $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

4 La suite (u_n) est décroissante et minorée (d'après la question précédente). Donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 1$.

5 On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \frac{1}{2}}$ pour tout entier naturel n.

a. Calculons v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-\frac{1}{2}} = \frac{\dfrac{4u_n-1}{2u_n+1}-1}{\dfrac{4u_n-1}{2u_n+1}-\dfrac{1}{2}}.$$

Numérateur :
$$\frac{4u_n-1}{2u_n+1}-1=\frac{4u_n-1-(2u_n+1)}{2u_n+1}=\frac{2u_n-2}{2u_n+1}=\frac{2(u_n-1)}{2u_n+1}.$$
Dénominateur :
$$\frac{4u_n-1}{2u_n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2(4u_n-1)-(2u_n+1)}{2(2u_n+1)}=\frac{6u_n-3}{2(2u_n+1)}=\frac{3(2u_n-1)}{2(2u_n+1)}.$$
Donc :
$$\begin{aligned}v_{n+1}&=\frac{2(u_n-1)}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{2\cancel{(2u_n+1)}}{3(2u_n-1)}\\&=\frac{2\times 2(u_n-1)}{3(2u_n-1)}\\&=\frac{2}{3}\times\frac{2(u_n-1)}{2\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}\\&=\frac{2}{3}\times\frac{u_n-1}{u_n-\frac{1}{2}}\\&=\frac{2}{3}v_n.\end{aligned}$$
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q=\dfrac{2}{3}$.
Son premier terme est :
$$v_0=\frac{u_0-1}{u_0-\frac{1}{2}}=\frac{2-1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

b. (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=\dfrac{2}{3}$, donc :
$$v_n=v_0\times q^n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$
On a :
$$\begin{aligned}v_n=\frac{u_n-1}{u_n-\frac{1}{2}}&\iff v_n\left(u_n-\frac{1}{2}\right)=u_n-1\\&\iff u_nv_n-\frac{1}{2}v_n=u_n-1\\&\iff u_nv_n-u_n=\frac{1}{2}v_n-1\\&\iff u_n(v_n-1)=\frac{1}{2}v_n-1\\&\iff u_n=\frac{\frac{1}{2}v_n-1}{v_n-1}\\&\iff u_n=\frac{v_n-2}{2(v_n-1)}.\end{aligned}$$
En substituant $v_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$, on a :
$$\boxed{u_n=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-2}{2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)}}.$$

c. $0<\dfrac{2}{3}<1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\frac{0-2}{2(0-1)}=\frac{-2}{-2}=1$.
Interprétation : la population de bactéries tend vers 1 (millier), soit 1 000 bactéries. L'antibiotique ne détruit pas complètement la colonie, mais régule sa taille vers un seuil d'équilibre de 1 000 bactéries.

Corrigé de l'exercice 13.6 page 448

1 On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t\mathrm{e}^{-t}\right)=0$ (croissances comparées), donc :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=6\times 0=0.$$

Interprétation : à long terme, la concentration en CO_2 tend vers 0. La ventilation finit par évacuer complètement le dioxyde de carbone accumulé dans la serre.

2 La fonction f est le produit de $u(t)=6t$ et $v(t)=\mathrm{e}^{-t}$, avec $u'(t)=6$ et $v'(t)=-\mathrm{e}^{-t}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(t)&=u'(t)v(t)+u(t)v'(t)\\ &=6\mathrm{e}^{-t}+6t\times\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\\ &=6\mathrm{e}^{-t}(1-t)\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t)=6(1-t)\mathrm{e}^{-t}}$$

3 $\mathrm{e}^{-t}>0$ pour tout t, le signe de $f'(t)$ est donc celui de $(1-t)$. D'où le tableau suivant :

t	0		1		5
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$6\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$30\mathrm{e}^{-5}$

On calcule les valeurs aux bornes et au maximum :

$$f(0)=0,\qquad f(1)=6\mathrm{e}^{-1},\qquad f(5)=30\mathrm{e}^{-5}.$$

4 D'après le tableau de variations, f atteint son maximum en $t=1$:

$$f(1)=6\mathrm{e}^{-1}\approx 2{,}21\ \mathrm{g/m^3}.$$

La concentration maximale en CO_2 dans la serre est d'environ $\mathbf{2,21\ g/m^3}$, atteinte 1 heure après l'activation de la ventilation.

5 Pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-t}>0$ donc le signe de $f''(t)$ est celui de $(t-2)$:

- $f''(t)<0$ pour $t\in[0\,;2[$: la fonction est **concave**.
- $f''(t)>0$ pour $t\in]2\,;5]$: la fonction est **convexe**.
- $f''(t)=0$ pour $t=2$.

f'' s'annule en changeant de signe en $t=2$, donc la courbe représentative de f admet un point d'inflexion en $t=2$.
Ses coordonnées sont :

$$(2\,;f(2))=\left(2\,;12\mathrm{e}^{-2}\right).$$

Interprétation : en $t=2$, soit 2 heures après l'activation de la ventilation, la concentration décroît le plus rapidement. C'est le moment où le système de ventilation est le plus efficace pour évacuer le CO_2.

6 **a.** On pose :

$$u(t)=6t\quad\text{et}\quad v'(t)=\mathrm{e}^{-t},$$

d'où :

$$u'(t)=6\quad\text{et}\quad v(t)=-\mathrm{e}^{-t}.$$

Par intégration par parties :

$$\int_0^5 6t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\Big[-6t\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^5-\int_0^5 6\times\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t=\Big[-6t\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^5+\int_0^5 6\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On calcule chaque terme :

$$\Big[-6t\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^5 = -30\mathrm{e}^{-5} - 0 = -30\mathrm{e}^{-5},$$

$$\int_0^5 6\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-6\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^5 = -6\mathrm{e}^{-5} + 6.$$

Donc :

$$\int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = -30\mathrm{e}^{-5} + (-6\mathrm{e}^{-5} + 6) = 6 - 36\mathrm{e}^{-5}.$$

b. La concentration moyenne sur $[0\,;5]$ est :

$$\mu = \frac{1}{5}\int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{6-36\mathrm{e}^{-5}}{5} \approx \frac{5{,}76}{5} \approx 1{,}15 \text{ g/m}^3.$$

Interprétation : durant les 5 heures de ventilation, les plantes sont exposées en moyenne à une concentration de CO_2 d'environ 1,15 g/m^3.

7 **a.** On cherche le premier instant $t > 1$ (après le maximum) où $f(t) < 0,5 \times C_{\max} = \dfrac{3}{\mathrm{e}}$.

Le programme dûment complété est le suivant :

Code Python 13-46

```python
from math import exp

Cmax = 6 * exp(-1)
t = 1
C = 6*t*exp(-t)

while C >= 0.5*Cmax:
    t = t + 0.01
    C = 6*t*exp(-t)

print(t)
```

b. Le programme affiche $2,68 = 2$ h $+ 0,68 \times 60$ min ≈ 2 h 41 min.

Interprétation : environ 2 heures 41 minutes après le début de la ventilation, la concentration en CO_2 est redescendue à la moitié de sa valeur maximale.

Corrigé de l'exercice 13.7 page 449

Partie A : dénombrement

1 Un mot de passe est ici un 6-uplet d'un ensemble à 36 éléments. En effet, chacun des 36 caractères peut être choisi pour les 6 qui composent le mot de passe.
Il y a donc 36^6 mots de passe possibles.

2 Un code d'accès temporaire est ici un arrangement de 6 caractères dans un ensemble à 36 éléments.
Il y a donc $A_{36}^6 = 36 \times 35 \times \cdots \times 31 = 1\,402\,410\,240$ codes d'accès.

3 Un code de validation est ici une permutation de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.
Il y a donc $4! = 24$ codes de validation différents possibles.

4 Un groupe de 10 personnes prises parmi 50 est une combinaison (l'ordre ne compte pas dans un tel groupe).
Il y a donc $\dbinom{50}{10} = 10\,272\,278\,170$ groupes différents possibles.

Partie B : probabilités

1 On répète *8 fois* de façon *indépendante* l'expérience consistant à regarder si un chiffre du mot de passe est dans l'ensemble $\{8{,}9\}$, épreuve de Bernoulli de probabilité $\dfrac{2}{10} = 0,2$.
Ainsi, le nombre X de succès à l'issue de ces 8 successions d'épreuves est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,2$.

2 $P(X = 0)$ est la probabilité qu'il n'y ait aucun chiffre de l'ensemble $\{8{,}9\}$.
Ainsi,

$$\boxed{P(X = 0) = (1-p)^8 = 0,8^8 \approx 0{,}167\ 8}$$

3 La formule de Bernoulli nous permet de calculer :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{8}{1} \times p^1 \times (1-p)^{8-1} \\ &= 8 \times 0,2 \times 0,8^7 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X = 1) \approx 0{,}335\ 5}$$

4 La mention « en déduire » nous incite à ne pas utiliser la calculatrice directement pour calculer cette probabilité.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X \leqslant 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &\approx 1 - 0{,}167\ 8 - 0{,}335\ 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geqslant 2) \approx 0{,}496\ 7}$$

5 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8\,;0,2\right)$ donc son espérance est :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = n \times p = 8 \times 0,2 \iff \boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = 1,6}$$

et sa variance est :

$$\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right) = n \times p \times (1-p) = 8 \times 0,2 \times 0,8 \iff \boxed{\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right) = 1,28}$$

Il y a donc en moyenne 1,6 chiffre qui sont soit 8, soit 9 dans un mot de passe.

Partie C : concentration

1 L'espérance de F_n est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(F_n\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) \\ &= \frac{1}{n} \times n\mathbb{E}\left(X_1\right) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= \mathbb{E}\left(X_1\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(F_n\right) = 0,2}$$

Sa variance est alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left(F_n\right) &= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \times n\mathbb{V}\left(X_1\right) \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{\mathbb{V}\left(X_1\right)}{n} \\ &= \frac{0,2 \times 0,8}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}\left(F_n\right) = \frac{0,16}{n}}$$

2 Le théorème de Bienaymé-Tchebychev stipule que :

$$\forall\,\delta > 0,\ \ P(\ |\ X - \mathbb{E}\,(\mathrm{X})\ \ |\ \ \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}\,(\mathrm{X})}{\delta^2}.$$

En prenant $X = F_n$ et $\delta = 0,1$, cela donne :

$$P(\ |\ F_n - 0,2\ |\ \ \geqslant 0,1) \leqslant \frac{0,16}{n \times 0,1^2}$$

soit :

$$\boxed{P(\ |\ F_n - 0,2\ |\ \ \geqslant 0,1) \leqslant \frac{16}{n}}$$

3 Pour garantir que $P(|F_n - 0,2| \geqslant 0,1) \leqslant 0,01$, il suffit de choisir n tel que :

$$\begin{aligned} \frac{16}{n} \leqslant 10^{-2} &\iff \frac{n}{16} \geqslant 10^2 \\ &\iff n \geqslant 100 \times 16 \\ &\iff \boxed{n \geqslant 1\ 600} \end{aligned}$$

Ainsi, en analysant au moins 1 600 mots de passe, l'auditeur peut affirmer avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99 que la proportion observée de mots de passe forts est comprise entre 0,1 et 0,3.

Corrigé de l'exercice 13.8 page 450

1 Il suffit de voir si les coordonnées des points B, C et D vérifient l'équation donnée. On voit assez rapidement que :

$$x_B + y_B + z_B = 6 \neq 3.$$

B n'appartient donc pas au plan d'équation $x + y + z = 3$.

L'affirmation 1 est donc fausse.

2 La droite (AD) passe par $A(0\,;\,0\,;\,0)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$. La représentation paramétrique donnée est donc bien une représentation de (AD)

L'affirmation 2 est donc vraie.

3 $x_G + y_G + z_G = 2 + 2 + 2 = 6$ donc $G \in (BCD)$.
De plus, de manière immédiate, une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases},\ \ k \in \mathbb{R}.$$

Donc $G \in (AH)$.
G est donc l'intersection de la droite (AH) et du plan (BCD)

L'affirmation 3 est donc vraie.

4 On détermine des représentations paramétriques des droites (AB) et (CD).

Droite (AB) : passe par $A(0\,;\,0\,;\,0)$, direction $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 6s \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. , \quad s \in \mathbb{R}.$$

Droite (CD) : passe par $C(0\,;\,6\,;\,0)$, direction $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 6 - 6t \\ z = 6t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.
Si elles étaient sécantes, il existerait $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{ll} (i) & 6s = 0 \\ (ii) & 0 = 6 - 6t \\ (iii) & 0 = 6t \end{array}\right.$$

De (i) : $s = 0$.
De (ii) : $t = 1$.
De (iii) : $t = 0$.

Les équations (ii) et (iii) sont incompatibles : le système n'a pas de solution.
Les droites (AB) et (CD) ne sont ni parallèles ni sécantes.

L'affirmation 4 est donc fausse.

5 Le plan (BCD) a pour équation $x + y + z = 6$, soit $x + y + z - 6 = 0$.
La distance d'un point $P(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ à un plan $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$\delta = \frac{|\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d\ |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Avec $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $a = b = c = 1$ et $d = -6$:

$$\delta = \frac{|\ 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 6\ |}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

L'affirmation 5 est donc vraie.

Bac blanc 03

Exercice 13.9 (5 points)

Un sondage est réalisé à la sortie d'un lycée. La question suivante est posée à chaque élève :

« Avez-vous apprécié votre journée de cours ? »

Les résultats de ce sondage montrent que 350 élèves sur les 500 interrogés ont répondu « Oui », et parmi eux, $\dfrac{9}{10}$ affirment aimer leurs enseignants, contre $\dfrac{1}{5}$ de ceux qui ont répondu « Non ».

On interroge au hasard un élève à la sortie de ce même lycée un mois plus tard. On note :

- O l'événement : « l'élève interrogé a aimé son journée » ;
- A l'événement : « l'élève interrogé aime ses enseignants ».

Les questions suivantes n'étant pas guidées, vous veillerez à développer vos réponses.

1 Montrer que $P(A) = 0,69$.

2 On choisit au hasard et de manière indépendante 20 élèves à la sortie de ce lycée. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves appréciant leurs enseignants.

a. Calculer l'espérance et la variance de X.

b. Calculer $P(X \geqslant 10)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

3 On considère maintenant un échantillon de taille n (où n est un entier naturel non nul) d'élèves interrogés de manière indépendante.

On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves aimant leurs enseignants dans cet échantillon.

a. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev , déterminer en fonction de n un intervalle I_n tel que $P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) \geqslant 0,95$.

b. Application : pour $n = 100$, calculer explicitement l'intervalle I_{100} et interpréter le résultat dans le contexte du sondage.

Solution page 462

Exercice 13.10 (4 points)

À la suite d'un incident dans une centrale nucléaire, un élément radioactif est introduit dans un cours d'eau. Des mesures sont effectuées à partir du moment de l'incident.
On modélise le taux de radioactivité (en becquerels par litre, Bq/L) au bout de t jours par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = (2+t)\mathrm{e}^{-t/3}.$$

Les autorités considèrent que l'eau est potable lorsque le taux de radioactivité est strictement inférieur à 1 Bq/L.

1 Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2 Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et interpréter ce résultat.

3 **a.** Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = \frac{1-t}{3}\,\mathrm{e}^{-t/3}.$$

b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations complet de f.

c. Justifier que l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution notée α sur $]6\,;7[$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

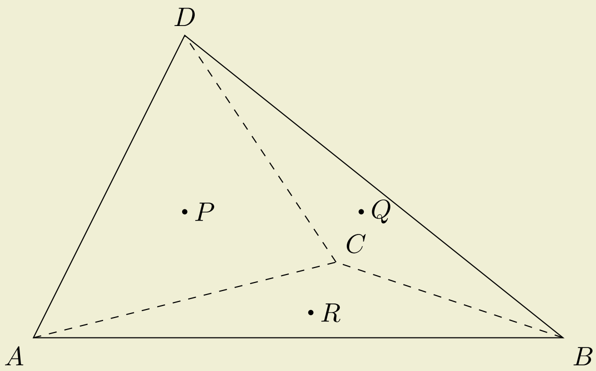
4 On admet que $f''(t) = \dfrac{t-4}{9}\,\mathrm{e}^{-t/3}$ pour tout $t \geqslant 0$.

Étudier la convexité de f sur $[0\,;+\infty[$. On précisera les éventuels points d'inflexion ainsi que leur interprétation dans le contexte de l'exercice.

Solution page 464

Exercice 13.11 (5 points)

Un architecte souhaite concevoir un bâtiment tétraédrique. Il considère ensuite le centre de gravité des faces ACD, BCD et ABC qu'il nomme respectivement P, Q et R. Il le modélise par le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dans lequel :

- $B\,(6\,;0\,;0)$
- $C\,(4\,;3\,;0)$
- $D\,(2\,;2\,;4)$

On admet que :

$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = \vec{0}$$

1 Montrer que les coordonnées de Q sont $\left(4\,;\frac{5}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.

On admet que $P\left(2\,;\frac{5}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$ et $R\left(\frac{10}{3}\,;1\,;0\right)$.

2 Une équation du plan (ABD) est : $2y - z = 0$.
Montrer que le plan (PQR) est parallèle au plan (ABD).

3 Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (DR) est :

$$(DR) \quad : \quad \begin{cases} x = 2 + \frac{4}{3}t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - 4t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

4 On admet que (BP) et (AQ) ont les représentations paramétriques suivantes :

$$(BP) : \begin{cases} x = 6 + 4k \\ y = -\frac{5}{3}k \\ z = -\frac{4}{3}k \end{cases}, \; k \in \mathbb{R} \qquad ; \qquad (AQ) : \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \frac{5}{3}\lambda \\ z = \frac{4}{3}\lambda \end{cases}$$

Montrer que (DR), (AQ) et (BP) sont concourantes en un point que l'on nommera G et dont on donnera les coordonnées.

5 Montrer que la distance du point G au plan (ABD) est égale à $\frac{\sqrt{5}}{20}$.

Solution page 465

Exercice 13.12 (6 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_n = \int_n^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

1 En posant $v(t) = \ln(t)$ et $u'(t) = 1$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1.$$

2 **a.** Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [n\,;\,n+1]$:

$$\ln(n) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(n+1).$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ln(n) \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1).$$

3 **a.** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Déterminer la limite de (u_n).

4 **a.** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}.$$

b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = 1$.

c. En déduire la limite de $\dfrac{u_n}{\ln(n)}$.

Que peut-on dire du comportement de u_n par rapport à $\ln(n)$?

5 Donner une expression explicite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de n.

6 On considère le programme suivant, écrit en Python :

Code Python 13-47

```python
# on importe la fonction log (logarithme népérien)
from math import log

n = 1
u = 2*log(2)-1
d = abs( u - log(n) )

while d >= 0.001:
    n = n+1
    u = (n+1)*log(n+1)-n*log(n)-1
    d = abs( u - log(n) )

print(n)
```

Il affiche la valeur « 500 ».

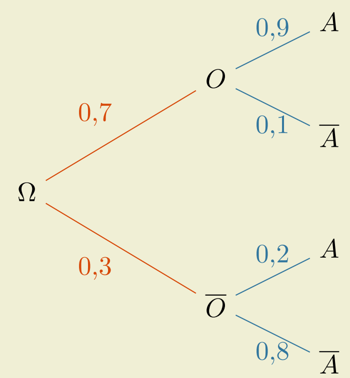
Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.

Solution page 467

Corrigés

Corrigé de l'exercice 13.9 page 458

1 L'arbre représentant la situation est le suivant :



Pour réaliser cet arbre, on a considéré que la probabilité de l'événement O est égale à la fréquence des élèves qui ont répondu « Oui » à la question du sondage, soit :

$$P(O) = \frac{350}{500} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(O \cap A) + P(\overline{O} \cap A) \text{ car } O \text{ et } \overline{O} \text{ forment une partition de l'univers} \\ &= P(O) \times P_O(A) + P(\overline{O}) \times P_{\overline{O}}(A) \\ &= 0,7 \times 0,9 + 0,3 \times 0,2 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = 0,69}$$

2 L'expérience consistant à voir si un élève aime ses enseignants, expérience de Bernoulli de probabilité $p = P(A) = 0,69$, est répétée de manière indépendante 20 fois.
Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,69$.

a. On en déduit alors que $\mathbb{E}(X) = n \times p = 20 \times 0,69$, d'où :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 13,8}$$

De plus, la variance est :

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 20 \times 0,69 \times (1 - 0,69) \implies \boxed{\mathbb{V}(X) = 4,278}$$

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve ensuite :

$$\boxed{P(X \geqslant 10) \approx 0,978}$$

3 **a.** Le théorème de Bienaymé-Tchebychev stipule que :

$$\forall\,\delta>0,\quad P\left(\left|\frac{X_n}{n}-\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right)\right|\geqslant\delta\right)\leqslant\frac{\mathbb{V}\left(\dfrac{X_n}{n}\right)}{\delta^2}$$

D'après ce qui précède, $\mathbb{E}\,(X_n)=0,69n$ et $\mathbb{V}\,(X_n)=0,2139n$ donc, par linéarité de l'espérance et propriété de la variance,

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{0,69n}{n}=0,69\qquad\text{et}\qquad\mathbb{V}\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{0,2139n}{n^2}=\frac{0,2139}{n}.$$

On a alors :

$$\forall\,\delta>0,\quad P\left(\left|\frac{X_n}{n}-0,69\right|\geqslant\delta\right)\leqslant\frac{0,2139}{\delta^2 n}$$

d'où :

$$\forall\,\delta>0,\quad 1-P\left(\left|\frac{X_n}{n}-0,69\right|<\delta\right)\leqslant\frac{0,2139}{\delta^2 n}.$$

On en déduit alors :

$$\forall\,\delta>0,\quad P\left(\left|\frac{X_n}{n}-0,69\right|<\delta\right)\geqslant 1-\frac{0,2139}{\delta^2 n}.\qquad (*)$$

Ainsi, en choisissant n tel que $1-\dfrac{0,2139}{\delta n}\geqslant 0,95$, on se dirigera vers une solution à notre problème.

$$\begin{aligned}1-\frac{0,2139}{\delta^2 n}\geqslant 0,95 &\iff \frac{0,2139}{\delta^2 n}\leqslant 0,05\\ &\iff \frac{\delta^2 n}{0,2139}\geqslant\frac{1}{0,05}\\ &\iff \frac{\delta^2 n}{0,2139}\geqslant 20\\ &\iff \delta^2 n\geqslant 20\times 0,2139\\ &\iff \delta^2\geqslant\frac{4,278}{n}\\ &\iff \delta\geqslant\sqrt{\frac{4,278}{n}}.\end{aligned}$$

On peut alors prendre $\delta=\sqrt{\dfrac{4,278}{n}}$, et l'inégalité $(*)$ donne :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-0,69\right|<\sqrt{\frac{4,278}{n}}\right))\geqslant 0,95$$

ce qui se traduit par :

$$P\left(-\sqrt{\frac{4,278}{n}}<\frac{X_n}{n}-0,69<\sqrt{\frac{4,278}{n}}\right)\geqslant 0,95$$

ou encore

$$P\left(0,69-\sqrt{\frac{4,278}{n}}<\frac{X_n}{n}<0,69+\sqrt{\frac{4,278}{n}}\right)\geqslant 0,95.$$

Ainsi, un intervalle I_n possible est :

$$\boxed{I_n=\left]0,69-\sqrt{\frac{4,278}{n}}\,;0,69+\sqrt{\frac{4,278}{n}}\right[}$$

b. En prenant $n=100$, on trouve $I_n=]0,4832\,;0,8968[$. Ainsi, Avec une probabilité d'au moins 0,95, la proportion d'élèves aimant leurs enseignants dans un échantillon de 100 élèves se situe entre 48,32% et 89,68%.

Corrigé de l'exercice 13.10 page 459

1 $f(0) = (2+0)\mathrm{e}^{-0/3} = 2$.
Cela signifie qu'à l'instant où l'élément radioactif est introduit dans l'eau, le taux de becquerels par litre est égal à 2 Bq/L.

2 $f(t) = 2\mathrm{e}^{-t/3} + t\mathrm{e}^{-t/3} = 2\mathrm{e}^{-t/3} + 3 \times \dfrac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t/3} = 2\mathrm{e}^{-t/3} + 3 \times \dfrac{\frac{1}{3}t}{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t}}$.

Or, $\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{3}\right) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{T\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{T}\right) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(2\mathrm{e}^{-t-3}\right) = 0$

et

$\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{T}{\mathrm{e}^{T}}\right) = 0$ (croissances comparées) donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}t}{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t}}\right) = 0$.

Ainsi, par somme et produit de limites,

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0}$$

3 **a.** $f = u \times v$ avec $u(t) = 2+t \qquad v(t) = \mathrm{e}^{-t/3}$

$$u'(t) = 1 \qquad v'(t) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t/3}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(t) &= (u'v + v'u)(t) \\ &= 1 \times \mathrm{e}^{-t/3} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t/3} \times (2+t) \\ &= \left[1 - \frac{1}{3}(2+t)\right]\mathrm{e}^{-t/3} \\ &= \left[\frac{3-2-t}{3}\right]\mathrm{e}^{-t/3} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t) = \frac{1-t}{3}\mathrm{e}^{-t/3}}$$

b. Pour tout réel t positif, $\mathrm{e}^{-t/3} > 0$ et $3 > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1-t$. Or,

$$1 - t \geqslant 0 \iff t \leqslant 1.$$

De plus,

$$f(1) = 3\mathrm{e}^{-1/3}.$$

On en déduit le tableau suivant :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$3\mathrm{e}^{-1/3}$	$\searrow$	0

c. Sur $]6\,;7[$,

- f est continue et strictement décroissante ;
- $f(6) = 8\mathrm{e}^{-2} \approx 1,08$ et $f(7) = 9\mathrm{e}^{-7/2} \approx 0,27$ donc $1 \in]f(7)\,; f(6)[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]6\,;7[$ tel que $f(\alpha) = 1$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 6,38$.
Cela signifie qu'après 6,38 jours (soit à peu près 6 jours et 9 heures), l'eau redevient potable.

4 $f''(t) = \dfrac{t-4}{9}\mathrm{e}^{-t/3}$.
Pour tout réel t positif, $\mathrm{e}^{-t/3} > 0$ et $3 > 0$ donc $f''(t)$ est du signe de $t-4$. Ainsi,

- pour $0 \leqslant t < 4$, $f''(t) < 0$ donc f est *concave* ;
- pour $t > 4$, $f''(t) > 0$ donc f est convexe ;
- en $t = 4$, la courbe représentative de f admet un point d'inflexion.

En $t = 4$, la dérivée f' atteint donc son minimum : c'est le moment où la vitesse de décroissance du taux est la plus grande. Concrètement, c'est le quatrième jour après l'incident que le taux de radioactivité baisse le plus vite. Avant ce jour, bien que le taux diminue, la décroissance ralentit ; après ce jour, la décroissance s'accélère à nouveau.

Corrigé de l'exercice 13.11 page 460

1 $$\begin{aligned}\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}=\vec{0} &\iff (\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AD})=\vec{0}\\ &\iff 3\overrightarrow{QA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\\ &\iff 3\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$3\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}x_B+x_C+x_D\\ y_B+y_C+y_D\\ z_B+z_C+z_D\end{pmatrix} \text{ soit } 3\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}6+4+2\\ 0+3+2\\ 0+0+4\end{pmatrix} \text{ et donc} 3\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}12\\ 5\\ 4\end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que :

$$\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}\frac{12}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}4\\ \frac{5}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}}$$

Les coordonnées de G sont donc $\left(4\,;\frac{5}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.

2 Une équation du plan (ABD) est : $2y - z = 0$.

Donc un vecteur normal au plan (ABD) est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}4-2\\ \frac{5}{3}-\frac{5}{3}\\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Donc :

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0\times 2 + 2\times 0 - 1\times 0 = 0.$$

  Ainsi, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux.

- $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}\frac{10}{3}-2\\ 1-\frac{5}{3}\\ 0-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ -\frac{4}{3}\end{pmatrix}$. Donc :

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PR} = 0\times\frac{4}{3} + 2\times\left(-\frac{2}{3}\right) - 1\times\left(-\frac{4}{3}\right) = 0.$$

  Ainsi, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont orthogonaux.

De plus, $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ ne sont pas colinéaires, ce qui permet d'affirmer que $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)$ est une base du plan (PQR).

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à toute combinaison linéaires de $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$, et donc à tout vecteur du plan (PQR), et donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (PQR).

Or, si deux plans distincts ont un même vecteur normal, ils sont parallèles.
Ainsi, (PQR) et (ABD) sont parallèles.

3 $\overrightarrow{DR}\begin{pmatrix}\frac{10}{3}-2\\1-2\\0-4\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DR}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-1\\-4\end{pmatrix}$. Ainsi, comme $D\in(DR)$, une représentation paramétrique de (DR) est :

$$\begin{cases}x=x_D+x_{\overrightarrow{DR}}t\\y=y_D+y_{\overrightarrow{DR}}t\\z=z_D+z_{\overrightarrow{DR}}t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\iff\boxed{\begin{cases}x=2+\frac{4}{3}t\\y=2-t\\z=4-4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}}$$

4
- Intersection de (DR) et (AQ) : on résout le système suivant, formé à partir des représentations paramétriques des deux droites.

$$\begin{cases}2+\frac{4}{3}t=4\lambda\\2-t=\frac{5}{3}\lambda\\4-4t=\frac{4}{3}\lambda\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}t & (1)\\\lambda=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}t & (2)\\\lambda=3-3t & (3)\end{cases}$$

De (2) et (3), on déduit :

$$\frac{6}{5}-\frac{3}{5}t=3-3t\iff\frac{6}{5}-3=\frac{3}{5}t-3t\iff\frac{9}{5}=\frac{12}{5}t\iff t=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

De (1) et (2), on déduit :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}t=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}t\iff\frac{1}{3}t+\frac{3}{5}t=\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\iff\frac{14}{15}t=\frac{7}{10}\iff t=\frac{7}{10}\times\frac{15}{14}=\frac{3}{4}.$$

Le système admet bien une unique solution : $t=\frac{3}{4}$ et le λ qui correspond, à savoir $\lambda=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$.

- Intersection de (AQ) et (BP) :

$$\begin{cases}2+\frac{4}{3}t=6+4k & \times 3\\2-t=-\frac{5}{3}k & \times 3\\4-4t=-\frac{4}{3}k & \times\frac{3}{4}\end{cases}\iff\begin{cases}4t-12k=12 & (1)\\3t-5k=6 & (2)\\3t-k=3 & (3)\end{cases}$$

$(3)-(2)\iff 4k=-3\iff k=-\frac{3}{4}$.

$(3)\implies 3t=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\implies t=\frac{3}{4}$.

Alors, $(1)\implies 4\times\frac{3}{4}-12\times\left(-\frac{3}{4}\right)=12\implies 3+9=12$, ce qui est vrai.

Le système admet donc une unique solution : $t=k=\frac{3}{4}$.

Ainsi, les droites (AQ), (BP) et (DR) sont concourantes en un point G de coordonnées (en prenant $\lambda=\frac{3}{4}$ dans la représentation paramétrique de (AQ)) :

$$G\left(4\times\frac{3}{4};\frac{5}{3}\times\frac{3}{4};\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\right)\iff\boxed{G\left(3;\frac{5}{4};1\right)}$$

5 La distance du point G au plan (ABD), d'équation cartésienne $2y-z=0$ est donnée par la formule :

$$d\big(G;(ABD)\big)=\frac{|\,y_G-z_G\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{4}-1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4\times 5}=\frac{\sqrt{5}}{20}.$$

Corrigé de l'exercice 13.12 page 461

1 $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} u'(t) \times v(t)\ \mathrm{d}t$ avec :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}$$

Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} u_n &= \Big[u(t) \times v(t)\Big]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} u(t) \times v'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \Big[t\ln(t)\Big]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} t \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - \int_n^{n+1} 1\ \mathrm{d}t \\ &= (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - \Big[t\Big]_n^{n+1} \\ &= (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - \big((n+1) - n\big) \\ &= (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - n - 1 + n \end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1}$$

2 **a.** La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ donc sur tout intervalle de la forme $[n\,;n+1]$, avec entier naturel non nul. Ainsi,

$$n \leqslant t \leqslant n+1 \iff \boxed{\ln(n) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(n+1)}$$

b. De l'encadrement précédent, on déduit :

$$\begin{aligned} &\int_n^{n+1} \ln(n)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \ln(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \ln(n+1)\ \mathrm{d}t \\ \iff &\Big[\ln(n)t\Big]_n^{n+1} \leqslant u_n \leqslant \Big[\ln(n+1)t\Big]_n^{n+1} \\ \iff &\ln(n)(n+1-n) \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1)(n+1-n) \\ \iff &\boxed{\ln(n) \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1)} \end{aligned}$$

3 **a.** Pour tout entier naturel n non nul, d'après la question précédente :

- $\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$
- $u_n \leqslant \ln(n+1)$

Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \ln(n+1) \leqslant u_{n+1}.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

b. Toujours d'après l'encadrement précédent,

$$u_n \geqslant \ln(n).$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln(n)) = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty}$$

4 **a.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$ donc, de l'encadrement démontré à la question **2.b.**,

$$\ln(n) \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1) \iff \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

soit :

$$\boxed{1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}}$$

b. $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln(n)\right] = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = 1}$.

c. D'après l'encadrement trouvé à la question **4.a.** et le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right) = 1}$$

De cette limite, on peut conclure qu'au voisinage de $+\infty$, u_n tend vers l'infini de la même manière que $\ln(n)$.

5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n = \int_1^2 \ln(t)\ \mathrm{d}t + \int_2^3 \ln(t)\ \mathrm{d}t + \cdots + \int_{n-1}^{n} \ln(t)\ \mathrm{d}t + \int_n^{n+1} \ln(t)\ \mathrm{d}t$

$\displaystyle = \int_1^{n+1} \ln(t)\ \mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles sur les intégrales

$= \left[t\ln(t) - t\right]_1^{n+1}$ d'après ce qui a été fait à la question **1**

$= (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 1\ln(1) + 1$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_n = (n+1)\ln(n+1) - n}$$

6 Le résultat donné par le programme Python nous permet de conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(u_n - \ln(n)\big) = 0$ et que la différence entre u_n et $\ln(n)$ est inférieure à 10^{-3} à partir de $n = 500$.

Cette conjecture complète le résultat trouvé à la question **4.c.** qui stipule que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right) = 1$, qui ne veut pas exactement dire la même chose.

En effet, on peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1$ sans pour autant avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}(h_n - \ln(n)) = 0$, mais c'est hors-programme (prendre par exemple $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$, où on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{h_n}{\ln(n)}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(h_n - \ln(n)) \approx 0,5772$, la *constante d'Euler*).