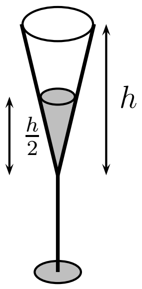
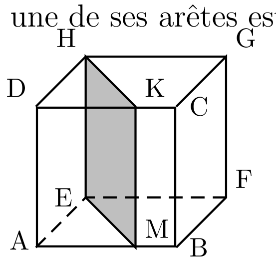
SUJET CENTRES ETRANGERS 2013

Stéphane PASQUET
http://www.mathweb.fr

La présentation et la rédaction sont notées sur 4 points.

Exercice 1 (6 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque ligne du tableau, trois réponses sont proposées, mais une seule est exacte. Toute réponse exacte vaut 1 point. Toute réponse inexacte ou toute absence de réponse n'enlève pas de point. Pour chacune des questions, on indiquera sur sa feuille le numéro de la question et la réponse choisie.

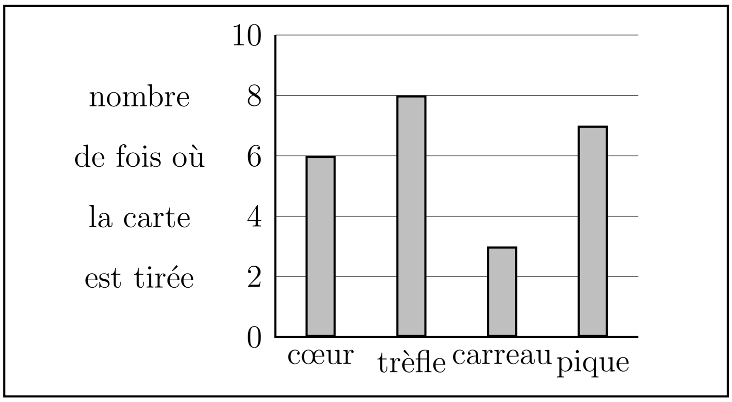
		réponse A	réponse B	réponse C
1	Les solutions de l'équation $(x+7)(2x-7)=0$ sont	-7 et $3,5$	7 et $-3,5$	-7 et 5
2	La (ou les) solution(s) de l'inéquation $-2(x+7) \leqslant -16$ est (sont)	tous les nombres inférieurs ou égaux à 1	tous les nombres supérieurs ou égaux à 1	1
3	La forme développée de $(7x-5)^2$ est	$49x^2-25$	$49x^2-70x+25$	$49x^2-70x-25$
4	La forme factorisée de $9-64x^2$ est	$-55x^2$	$(3-8x)^2$	$(3-8x)(3+8x)$
5	 Le liquide remplit-il à moitié le verre ?	oui	non, c'est moins de la moitié	non, c'est plus de la moitié
6	La section KMEH du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à une de ses arêtes est 	un parallélogramme non rectangle	un carré	un rectangle

Exercice 2 (4 points)

On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard une carte dans un jeu bien mélangé de 32 cartes (il y a 4 « familles » cœur, trèfle, carreau et pique et on a 8 cœurs, 8 trèfles, 8 carreaux et 8 piques).
On relève pour la carte tirée la « famille » (trèfle, carreau, cœur ou pique) puis on remet la carte dans le jeu et on mélange.
On note A l'événement : « la carte tirée est un trèfle ».

1 Quelle est la probabilité de l'événement A ?

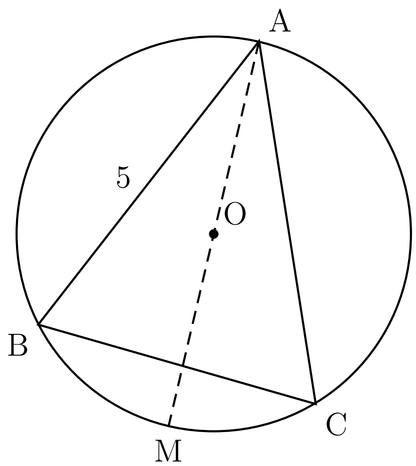
2 On répète 24 fois l'expérience aléatoire ci-dessus. La représentation graphique ci-dessous donne la répartition des couleurs obtenues lors des vingt-quatre premiers tirages :



Calculer la fréquence d'une carte de la « famille » cœur et d'une carte de la « famille » trèfle.

3 On reproduit la même expérience qu'à la question 2. Arthur mise sur une carte de la « famille » cœur et Julie mise sur une carte de la « famille » trèfle.
Est-ce que l'un d'entre deux a plus de chance que l'autre de gagner ?

Exercice 3 (6 points)



On considère un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 50° et AB est égal à 5 cm.
On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
La droite (OA) coupe ce cercle, noté $(\mathcal{C})$, en un autre point M.

1 Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAM}$? Aucune justification n'est demandée.

2 Quelle est la nature du triangle BAM ? Justifier.

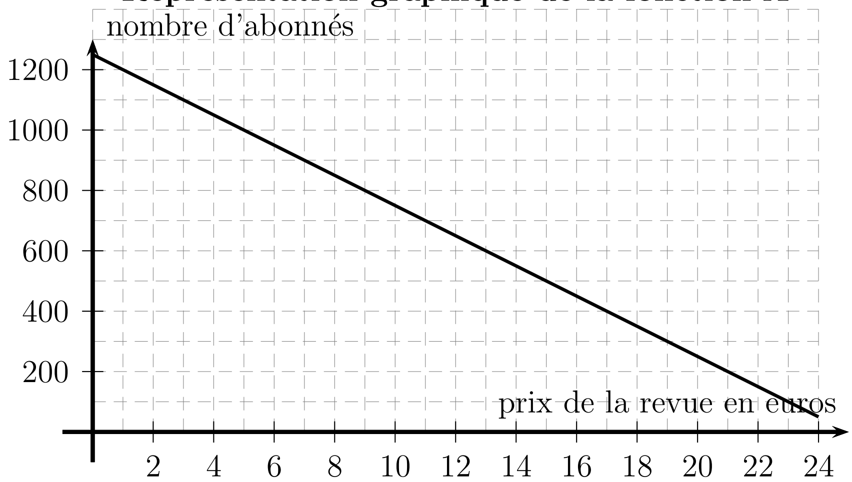
3 Calculer la longueur AM et en donner un arrondi au dixième de centimètre près.

4 La droite (BO) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un autre point K. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BKC}$?
Justifier.

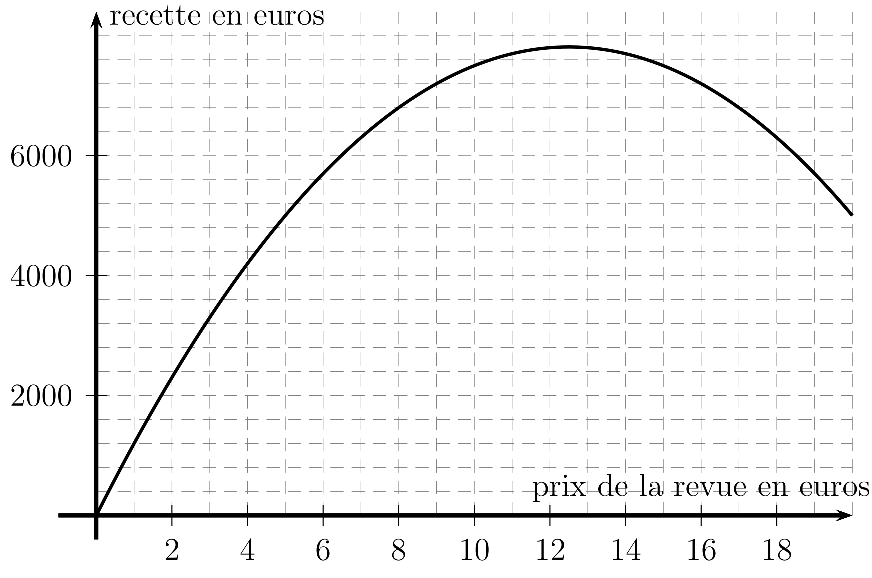
Exercice 4 (7 points)

Le nombre d'abonnés à une revue dépend du prix de la revue.
Pour un prix x compris entre 0 et 20 €, le nombre d'abonnés est donné par la fonction A telle que : $A(x) = -50x + 1\,250$.
La recette, c'est-à-dire le montant perçu par l'éditeur de cette revue, est donnée par la fonction R telle que : $R(x) = -50x^2 + 1\,250x$.

Représentation graphique de la fonction *A*



Représentation graphique de la fonction *R*



1 Le nombre d'abonnés est-il proportionnel au prix de la revue ? Justifier.

2 Vérifier, par le calcul, que $A(10) = 750$ et interpréter concrètement ce résultat.

3 La fonction R est-elle affine ? Justifier.

4 Déterminer graphiquement pour quel prix la recette de l'éditeur est maximale.

5 Déterminer graphiquement les antécédents de $6\,800$ par R.

6 Lorsque la revue coûte 5 euros, déterminer le nombre d'abonnés et la recette.

Exercice 5 (4 points)

Année	SMIC
2011	9,40
2010	9,00
2009	8,82
2008	8,63
2007	8,44
2006	8,27
2005	8,03
2004	7,61
2003	7,19
2002	6,83
2001	6,67

On considère la série statistique donnant le SMIC[a] horaire brut en euros de 2001 à 2011 (source : INSEE).

1 Quelle est l'étendue de cette série ? Interpréter ce résultat.

2 Quelle est la médiane ?

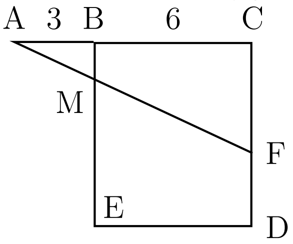
3 Paul remarque qu'entre 2001 et 2002, l'augmentation du SMIC horaire brut est de 16 centimes alors qu'entre 2007 et 2008, elle est de 19 centimes.
Il affirme que « le pourcentage d'augmentation en 2012 est supérieur à celui pratiqué entre 2001 et 2002 ».
A-t-il raison ?

a. SMIC : salaire minimum interprofessionnel de croissance

Exercice 6 (4 points)

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la figure ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur.



BCDE est un carré de 6 cm de côté.
Les points A, B et C sont alignés et AB = 3 cm.
F est un point du segment [CD].
La droite (AF) coupe le segment [BE] en M.
Déterminer la longueur CF par calcul ou par construction pour que les longueurs BM et FD soient égales.

Exercice 7 (5 points)

On peut lire au sujet d'un médicament :
« Chez les enfants (12 mois à 17 ans), la posologie doit être établie en fonction de la surface corporelle du patient [voir formule de Mosteller]. »
« Une dose de charge unique de 70 mg par mètre carré (sans dépasser 70 mg par jour) devra être administrée »

Pour calculer la surface corporelle en m^2 on utilise la formule suivante :

Formule de Mosteller : Surface corporelle en m^2 $= \sqrt{\dfrac{\text{taille (en cm)} \times \text{masse (en kg)}}{3\,600}}$.

On considère les informations ci-dessous :

Patient	Âge	Taille (m)	Masse (kg)	Dose administrée
Lou	5 ans	1,05	17,5	50 mg
Joé	15 ans	1,50	50	100 mg

1 La posologie a-t-elle été respectée pour Joé ? Justifier la réponse.

2 Vérifier que la surface corporelle de Lou est environ de $0,71$ m^2.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

3 La posologie a-t-elle été respectée pour Lou ? Justifier la réponse

CORRECTION

Exercice 1 (6 points)

1 Réponse A.

2 Réponse B. On peut tester l'inégalité pour $x = 0$ et obtenir $-14 \leqslant -16$, qui est faux. Donc « 0 » ne fait pas partie des solutions.

3 Réponse B.

4 Réponse C.

5 Réponse B. Le volume du liquide est le huitième du volume total.

6 Réponse C.

Exercice 2 (4 points)

1 Il y a autant de cartes dans chaque famille et il y a 4 familles différentes.
Ainsi, la probabilité d'obtenir un trèfle est égale à $\frac{1}{4}$.

2 6 « cœur » ont été tirés sur 24 ; donc la fréquence d'une carte de la famille cœur est égale à $\frac{6}{24}$, soit $\frac{1}{4}$.
De même, la fréquence d'une carte de la famille trèfle est $\frac{8}{24}$, soit $\frac{1}{3}$.

3 Question déroutante ... Il ne faut pas se baser sur les statistiques obtenues précédemment pour prévoir ce qui va se passer. Ce n'est pas parce que plus de « trèfle » ont été obtenus lors de la 1$^{\text{re}}$ expérience que cela en sera ainsi pour la 2$^{\text{e}}$.
En théorie, chaque famille a la même probabilité d'être choisie.
Donc Arthur et Julie ont la même chance de gagner.

Exercice 3 (6 points)

1 BAC est isocèle en A et (AO) semble être la bissectrice de $\widehat{\text{BAC}}$. De plus, $\frac{50}{2} = 25$.
Ainsi, $\widehat{\textbf{BAM}} = \mathbf{25°}$.

2 [AM] est un diamètre du cercle (C) ; de plus, B est sur (C).
Or, tout triangle inscrit dans un cercle dont un côté co¨incide avec un diamètre est rectangle.
Ainsi, BAM est un triangle rectangle en B.

3 Dans le triangle rectangle BAM,

$$\cos\widehat{\text{BAM}} = \frac{\text{BA}}{\text{AM}}$$

Donc,

$$\cos 25° = \frac{5}{\text{AM}}$$

Et donc,

$$\text{AM} = \frac{5}{\cos 25°} \approx 5,5$$

Ainsi, AM mesure environ 5,5 cm.

4 Les angles $\widehat{\text{BAC}}$ et $\widehat{\text{BKC}}$ sont inscrits dans (C) et interceptent l'arc $\widehat{BC}$. Ils ont donc la même mesure.
Ainsi, $\widehat{\mathbf{BKC}} = \mathbf{25°}$.

Exercice 4 (7 points)

1 La droite représentant la fonction donnant le nombre d'abonnés en fonction du prix de la revue ne passe pas par l'origine du repère.
Ainsi, le nombre d'abonnés n'est pas proportionnel au prix de la revue.

2 $$\begin{aligned} A(10) &= -50 \times 10 + 1\,250 \\ &= -500 + 1\,250 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A(10) = 750}$.

Ce la signifie que si la revue coûte 10 €, il y aura 750 abonnés.

3 La fonction R n'est pas affine car sa représentation n'est pas une droite.

4 Sur le graphique, le maximum de la courbe est atteint pour $x = 12,5$.
Donc, pour 12,5 €, la recette est maximale.

5 Les antécédents de 6 800 par la fonction R sont $x = 8$ et $x = 17$.
En effet, une graduation en ordonnée correspond à 400 abonnés (car 5 graduations correspondent à 2 000 abonnés).

6 Pour $x = 5$, $R(5) = -50 \times 5^2 + 1\,250 \times 5$ et $A(5) = -50 \times 5 + 1\,250$.

$$\begin{aligned} R(5) &= -1\,250 + 6\,250 & A(5) &= -250 + 1\,250 \\ &= 5\,000 & &= 1\,000 \end{aligned}$$

Ainsi, quand la revue coûte 5 €, il y a 1 000 abonnés et la recette est 5 000 €.

Exercice 5 (4 points)

1 L'étendue de cette série est :

$$e = 9,40 - 6,67 = 2,73$$

Le SMIC a donc augmenté de 2,73 €.

2 La médiane est la 6ᵉ valeur de la série car c'est elle qui partage la série en deux séries de même effectif.
Donc la médiane est 8,27.

3 Cette question n'a aucun sens ! Donc, il est impossible d'y répondre ...

Exercice 6 (4 points)

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\text{BM}}{\text{CF}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}}.$$

Donc :

$$\frac{\text{BM}}{6 - \text{FD}} = \frac{3}{9}.$$

Or, on veut que BM = FD. D'où :

$$\frac{\text{BM}}{6 - \text{BM}} = \frac{1}{3},$$

Soit :

$$3\text{BM} = 6 - \text{BM}.$$

On en déduit alors :

$$4\text{BM} = 6$$

ou encore :

$$\text{BM} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

De plus,

$$\text{CF} = 6 - \text{FD} = 6 - 1,5 = 4,5.$$

Ainsi, la longueur de CF doit être 4,5 cm pour que BM et FD soient égales.

Exercice 7 (5 points)

1 La posologie stipule que l'on ne doit pas dépasser 70 mg. Or, Joé a reçu 100 mg.
Donc la posologie n'a pas été respectée.

2 La surface corporelle de Lou est :

$$\sqrt{\frac{105 \times 17,5}{3\,600}} \approx \sqrt{0{,}510\,417}$$
$$=\approx 0,71.$$

3 70 mg pour 1 m^2 sachant que pour Lou, la surface corporelle est 0,71 m^2.

$$0,71 \times 70 \approx 49,7$$

Cependant, 0,71 est une valeur approchée !
Si on calcule sans valeur approchée jusqu'à la fin, on a :

$$70 \times \sqrt{\frac{105 \times 17,5}{3\,600}} \approx 50,01$$

Donc la posologie a bien été respectée pour Lou.