**Exercice** **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. Dans ce qui suit, $z$ désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

**Affirmation 1 :** L'équation $z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1)$ a pour solution $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

**Affirmation 2 :** Pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

**Affirmation 3 :** Un point M d'affixe $z$ tel que $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

**Affirmation 4 :** L'équation $z^5 + z - \mathrm{i} + 1 = 0$ admet une solution réelle.

**Exercice** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

**Partie A : établir une inégalité**

Sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on définit la fonction $f$ par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0~;~+\infty[$, $\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

**Partie B : application à l'étude d'une suite**

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général $u_n$ est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $u_2$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $\quad u_n \geqslant 0$.
   **b.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel $n$, $\quad u_n \leqslant 1$.
   **c.** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.
3. On note $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$ et on admet que $\ell = f(\ell)$, où $f$ est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de $\ell$.
4. **a.** Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel $p$ donné, permet de déterminer le plus petit rang $N$ à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n)$ sont inférieurs à $10^{-p}$.
   **b.** Déterminer le plus petit entier naturel $n$ à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n)$ sont inférieurs à $10^{-15}$. [1]

**Exercice** **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par

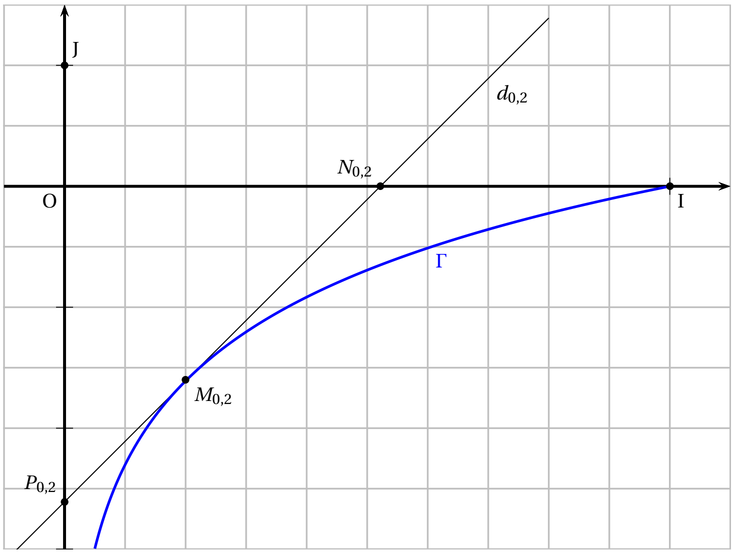
$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

   **a.** Déterminer une expression de la fonction dérivée de $f$ et vérifier que pour tout $x \in ]0~;~1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.
   **b.** Étudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction $f$ en 0 est nulle).

1. La plupart des calculatrices et même des tableurs sont incapables de traiter cette question donnant même des résultats faux. Elle peut être sautée.

On note $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.
Soit $a$ un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note $M_a$ le point de la courbe $\Gamma$ d'abscisse $a$ et $d_a$ la tangente à la courbe $\Gamma$ au point $M_a$. Cette droite $d_a$ coupe l'axe des abscisses au point $N_a$ et l'axe des ordonnées au point $P_a$.
On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{O}N_aP_a$ quand le réel $a$ varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

**2.** Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.




**a.** Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

**b.** Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

**c.** Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel $a$ de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle $\mathrm{O}N_aP_a$ en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

**3.** À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de $a$ l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

**Exercice** **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité 2 cm. On appelle $f$ la fonction qui, à tout point $M$, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

**1.** On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

**a.** Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A$'$ image du point A par la fonction $f$.

**b.** Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B$'$ image du point B par la fonction $f$.

**c.** Sur la copie, placer les points A, B, A$'$ et B$'$ dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
Pour les points B et B$'$, on laissera les traits de construction apparents.

**2.** Soit $r$ un réel strictement positif et $\theta$ un réel. On considère le complexe $z$ défini par $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

**a.** Montrer que $z' = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.

**b.** Est-il vrai que si un point $M$, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image $M'$ par la fonction $f$ est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

**3.** Soit le cercle $\Gamma$ de centre K d'affixe $z_{\mathrm{K}} = -\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

**a.** Montrer qu'une équation cartésienne du cercle $\Gamma$ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

**b.** Soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de $z'$ en fonction de $x$ et $y$.

**c.** Soit $M$ un point, distinct de O, du cercle $\Gamma$. Montrer que l'image $M'$ du point $M$ par la fonction $f$ appartient à la droite d'équation $x = 1$.

**Exercice** **5 points**

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

— à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$ ;

— si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$ ;

— si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $R_n$ l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la $n$-ième semaine ».

**1.** **a.** Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements $R_1$ et $R_2$.

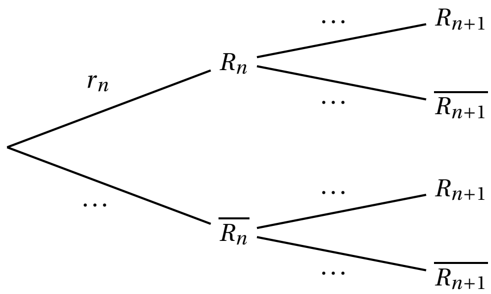
**b.** Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

**c.** Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.

**d.** Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
On arrondira le résultat à $10^{-3}$.

**2.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $r_n$ la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la $n$-ième semaine. On a alors $r_n = p\left(R_n\right)$.

**a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :




**b.** Justifier que pour tout entier naturel $n$ non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

**c.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

**d.** Calculer la limite de la suite $\left(r_n\right)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**EXERCICE** **3 points**

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)$ définie par la donnée de son premier terme $u_1$ et, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

**Partie A**

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans $U$ une valeur de $u_1$ il calcule les termes de la suite $(u_n)$ de $u_2$ à $u_{13}$.

```
Pour N allant de 1 à 12
    U ←
Fin Pour
```

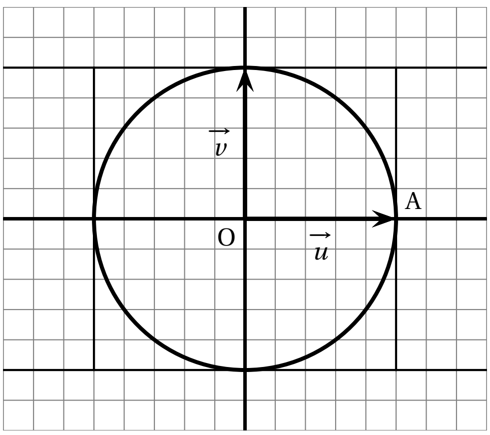
3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
Voici les valeurs obtenues.

| Pour $u_1 = 0,7$ | Pour $u_1 = 0,8$ |
|---|---|
| 0,4 | 0,6 |
| 0,2 | 0,8 |
| $-0,2$ | 2,2 |
| $-2$ | 10 |
| $-13$ | 59 |
| $-92$ | 412 |
| $-737$ | 3 295 |
| $-6\,634$ | 29 654 |
| $-66\,341$ | 296 539 |
| $-729\,752$ | 3 261 928 |
| $-8\,757\,025$ | 39 143 135 |
| $-113\,841\,326$ | 508 860 754 |

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$ ? Et si $u_1 = 0,8$ ?

**EXERCICE** **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes $z$ non nuls tels que les points d'affixes 1, $z^2$ et $\dfrac{1}{z}$ soient alignés.
Sur le graphique suivant, le point A a pour affixe 1.



**Partie A : étude d'exemples**

1. **Un premier exemple**
Dans cette question, on pose $z = \text{i}$.
   a. Donner la forme algébrique des nombres complexes $z^2$ et $\dfrac{1}{z}$.
   b. Placer les points $N_1$ d'affixe $z^2$, et $P_1$ d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
   On remarque que dans ce cas les points A, $N_1$ et $P_1$ ne sont pas alignés.
2. **Une équation**
Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue $z$ : $z^2 + z + 1 = 0$.
3. **Un deuxième exemple**
Dans cette question, on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de $z$, puis celles des nombres complexes $z^2$ et $\dfrac{1}{z}$.
   b. Placer les points $N_2$ d'affixe $z^2$ et $P_2$, d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
   On remarque que dans, ce cas les points A, $N_2$ et $P_2$ sont alignés.

**Partie B**

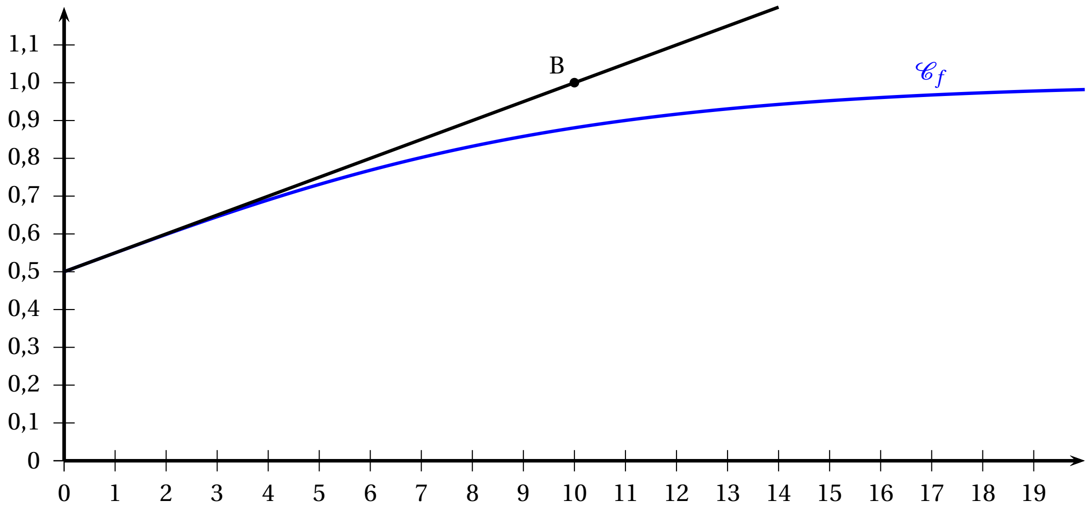
Soit $z$ un nombre complexe non nul.
On note $N$ le point d'affixe $z^2$ et $P$ le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :
$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$
2. On rappelle que si, $\overrightarrow{U}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{U}}$ et $z_{\overrightarrow{V}}$, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel $k$ tel que $z_{\overrightarrow{V}} = kz_{\overrightarrow{U}}$.
En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, $N$ et $P$ définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.
3. On pose $z = x + \text{i}y$, où $x$ et $y$ désignent des nombres réels.
Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \text{i}(2xy + y)$.
4. a. Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, $N$ et $P$ soient alignés.
   b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

**EXERCICE** **6 points**

**Partie A**

Soit $a$ et $b$ des nombres réels. On considère une fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{a}{1 + \text{e}^{-bx}}.$$
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).




1. Justifier que $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer $b$.

**Partie B**

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction $p$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel $x$ représente le temps écoulé, en année, depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après $x$ années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1$^{\text{er}}$ janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction $p$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   **b.** Calculer la limite de la fonction $p$ en $+\infty$.
   **c.** Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
   Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

**EXERCICE** **4 points**

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

*Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère le nombre complexe $c = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives $c^2$ et $\dfrac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1 :**
   Le nombre $c$ peut s'écrire $c = \dfrac{1}{4}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
2. **Affirmation 2 :**
   Pour tout entier naturel $n$, $c^{3n}$ est un nombre réel.
3. **Affirmation 3 :**
   Les points O, S et T sont alignés.
4. **Affirmation 4 :**
   Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$|c| + \left|c^2\right| + \ldots + \left|c^n\right| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

**EXERCICE** **6 points**

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match.
On dispose des informations suivantes :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements :

- $M$ : « le téléspectateur a regardé le match » ;
- $E$ : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note $x$ la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Déterminer la probabilité de $M \cap E$.
3. **a.** Vérifier que $p(E) = 0,44x + 0,14$.
   **b.** En déduire la valeur de $x$.
4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, qu'il ait regardé le match ?

**Exercice** **6 points**

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée $M$.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

*Les parties* A *et* B *sont indépendantes.*

**Partie A**

Dans cette partie, pour tout entier naturel $n$, on note $T_n$ la température du café à l'instant $n$, avec $T_n$ exprimé en degré Celsius et $n$ en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques $n$ et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où $k$ est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite $(T_n)$ ?
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel $n$ : $u_n = T_n - 10$.
   **a.** Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme $u_0$.
   **b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   **c.** Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
        T ← 0,8T + 2
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

   **a.** Au début, on affecte la valeur 80 à la variable $T$ et la valeur 0 à la variable $n$.
   Quelle valeur numérique contient la variable $n$ à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   **b.** Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

**Partie B**

Dans cette partie, pour tout réel $t$ positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant $t$, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et $t$ en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que $\theta$ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel $t$ de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction $\theta$ dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel $t$ de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.
   **a.** Si $\theta$ est une telle fonction, on pose pour tout $t$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.
   Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel $t$ de cet intervalle, $f'(t) = 0$.
   **b.** En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.
   En déduire, pour tout $t$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.
   **c.** Vérifier que la fonction $\theta$ trouvée en **b.** est solution du problème.
2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction $g$ dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif $t$, et que, pour tout $t$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ :

   $$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

   Une personne aime boire son café à 40 °C.
   Montrer qu'il existe un unique réel $t_0$ dans $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
   Donner la valeur de $t_0$ arrondie à la seconde.

**Exercice** **2 points**

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.
En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.
On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- $F$ l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- $H$ l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- $B$ l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements $F$ et $B$.
2. **a.** Montrer que $P(F \cap B) = 0{,}506$.
   **b.** En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.
3. Calculer $P_H\left(\overline{B}\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Exercice** **5 points**

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $(E)$ à l'inconnue $z$ :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = 0 \quad (E).$$

   **a.** Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation $(E)$.
   **b.** Vérifier que, pour tout nombre complexe $z$, on a :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = (z + 2\mathrm{i})\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right).$$

   **c.** Résoudre l'équation $(E)$ dans l'ensemble des nombres complexes.
   **d.** Écrire les solutions de l'équation $(E)$ sous forme exponentielle.

*Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine* O.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2\mathrm{i}$, $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   **a.** Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
   **b.** Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.
   **c.** On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe $z_{\mathrm{L}}$ du point L tel que AODL soit un parallélogramme.
3. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
   **a.** Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives $z$ et $z'$.
   Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.
   **b.** À l'aide de la question **3. a.**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

## Exercice 4 points

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation $(E)$ : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de $(E)$.
On note O le point d'affixe 0.
**Affirmation 1 :** Le triangle OAB est équilatéral.
2. On note $u$ le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + \text{i}$ et on note $\overline{u}$ son conjugué.
**Affirmation 2 :** $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}$
3. Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère la fonction $f_n$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :
$$f_n(x) = x\,\text{e}^{-nx+1}.$$
**Affirmation 3 :** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ admet un maximum.
4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)\,\text{e}^{-x}$.
**Affirmation 4 :** La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.
5. Soit $A$ un nombre réel strictement positif.
On considère l'algorithme ci-contre.
On suppose que la variable $I$ contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.
**Affirmation 5 :** $15\ln(2) \leqslant \ln(A) \leqslant 16\ln(2)$

```
I ← 0
Tant que 2^I ⩽ A
    I ← I + 1
Fin Tant que
```

**Exercice** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

*Les parties* A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*
Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

### Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.
Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.
On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite $(T_n)$ qui, à tout entier naturel $n$, associe le taux de disponibilité des ressources $n$ années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0,9$.
Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel $n$, on a : $T_{n+1} = T_n - 0,1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2. On définit la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.
Ainsi, la suite $(T_n)$ vérifie pour tout entier naturel $n$, $T_{n+1} = f(T_n)$.
   **a.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   **b.** Montrer que pour tout $n$ entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.
   **c.** La suite $(T_n)$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.
   **d.** Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

**Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution**

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.
Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction $P$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $P(t) = \dfrac{1\,000}{0,4+3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}$ où $t$ est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où $P'$ est la fonction dérivée de $P$ puis étudier le signe de $P'(t)$ pour $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction $P$ en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction $P$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;\,+\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à $10^{-1}$ près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

**Exercice** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

*Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.*
*Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.*

1. On considère le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   **Affirmation 1** : Le nombre complexe $z^2$ est un réel positif.
   **Affirmation 2** : L'argument du nombre complexe $z^{2019}$ vaut 0 modulo $2\pi$.

Dans ce qui suit, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$.

   **Affirmation 3** : Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

3. À tout point $M$ d'affixe $z$ du plan complexe, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \overline{z}(1 - z).$$

   **Affirmation 4** : Il existe une infinité de points $M$ confondus avec leur point image $M'$.