Baccalauréat Série ES Amérique du nord, mai 2016

Sujet

Stéphane PASQUET

8 juin 2016

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Exercice 1 (5 points) - Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

À une sortie d'autoroute, la gare de péage comporte trois voies.
Une étude statistique a montré que :

- 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche, réservée aux abonnés ; un automobiliste empruntant cette voie franchit toujours le péage en moins de 10 secondes ;
- 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre, réservée au paiement par carte bancaire ; parmi ces derniers, 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ;
- les autres automobilistes empruntent la voie de droite en utilisant un autre moyen de paiement (pièces ou billets).

On choisit un automobiliste au hasard et on considère les événements suivants :

- G : « l'automobiliste emprunte la voie de gauche » ;
- C : « l'automobiliste emprunte la voie du centre » ;
- D : « l'automobiliste emprunte la voie de droite » ;
- T : « l'automobiliste franchit le péage en moins de 10 secondes ».

On note $\overline{T}$ l'événement contraire de l'événement T.

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
   Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité $P(C \cap T)$.
3. L'étude a aussi montré que 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes.
   a. Justifier que $P(D \cap T) = 0,03$.
   b. Calculer la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes.

Partie B

Quelques kilomètres avant la sortie de l'autoroute, un radar automatique enregistre la vitesse de chaque automobiliste. On considère la variable aléatoire V qui, à chaque automobiliste, associe sa vitesse exprimée en km.h^{-1}.
On admet que V suit la loi normale d'espérance $\mu = 120$ et d'écart-type $\sigma = 7,5$.

1. Déterminer la probabilité $P(120 < V < 130)$. On arrondira le résultat au millième.
2. Une contravention est envoyée à l'automobiliste lorsque sa vitesse est supérieure ou égale à 138 km.h^{-1}.
   Déterminer la probabilité qu'un automobiliste soit sanctionné. On arrondira le résultat au millième.

Exercice 2 (5 points) - Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Une société propose un service d'abonnement pour jeux vidéo sur téléphone mobile.
Le 1er janvier 2016, on compte 4 000 abonnés.
À partir de cette date, les dirigeants de la société ont constaté que d'un mois sur l'autre, 8 % des anciens joueurs se désabonnent mais que, par ailleurs, 8 000 nouvelles personnes s'abonnent.

1. Calculer le nombre d'abonnés à la date du 1er février 2016.
   Pour la suite de l'exercice, on modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre de milliers d'abonnés au bout de n mois après le 1er janvier 2016.
   La suite (u_n) est donc définie par :
   $$u_0 = 4 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,92u_n + 8.$$
2. On considère l'algorithme suivant :

Variables
N est un nombre entier naturel
U est un nombre réel
Traitement
U prend la valeur 4
N prend la valeur 0
Tant que $U < 40$
U prend la valeur $0,92 \times U + 8$
N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

   a. Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.
      Les valeurs de U seront arrondies au dixième.

Valeur de U	4	...	...
Valeur de N	0	...	...
Condition $U < 40$	vraie	...	...

b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 100$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,92$ et calculer son premier terme v_0.

   b. Donner l'expression de v_n en fonction de n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 100 - 96 \times 0,92^n$.

4. En résolvant une inéquation, déterminer la date (année et mois) à partir de laquelle le nombre d'abonnés devient supérieur à 70 000.

Exercice 2 (5 points) - Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement.
Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.
Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
Pour tout nombre entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version papier l'année $2010 + n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version numérique l'année $2010 + n$;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, où le sommet A représente l'état « abonné à la version papier » et B l'état « abonné à la version numérique ».

   b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A, B des sommets.

   c. Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 0,1a_n + 0,94b_n.$$

Le directeur du groupe de presse souhaite visualiser l'évolution des deux types d'abonnements. Pour cela, on lui propose les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1

```
Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
   a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
   b prend la valeur 0,1 × a + 0,94 × b
   Afficher a et b
Fin Pour
```

Algorithme 2

```
Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
   c prend la valeur a
   a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
   b prend la valeur 0,1 × c + 0,94 × b
   Afficher a et b
Fin Pour
```

Sachant qu'un seul des algorithmes proposés permet de répondre au souhait du directeur, préciser lequel en justifiant la réponse.

3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.
   b. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 0,375$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et calculer u_0.
   c. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$.
4. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50 %.

Exercice 3 (4 points) - Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

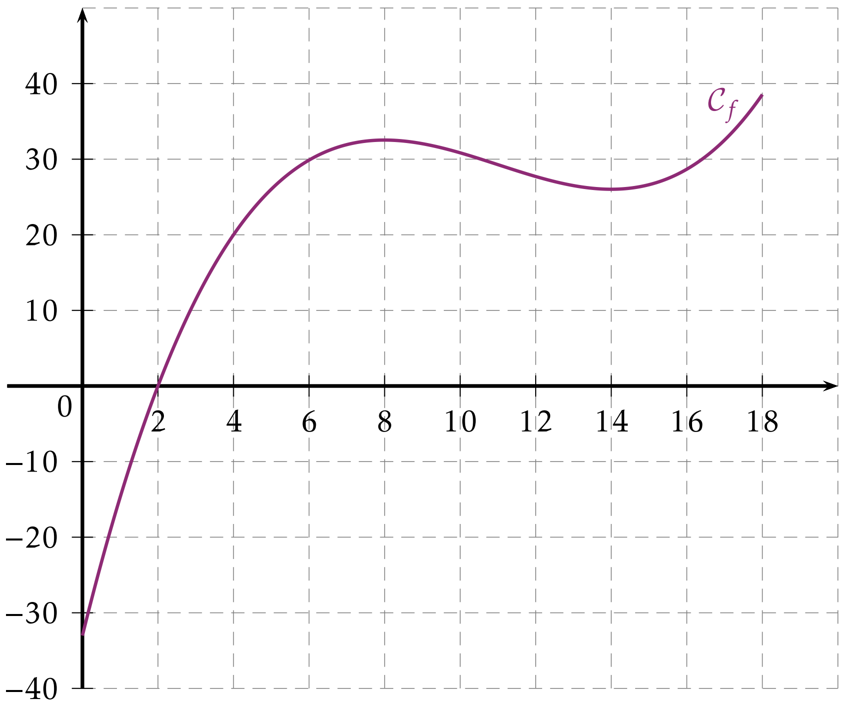
1. On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[10;50]$. La probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[15;20]$ est :

   a. $\dfrac{5}{50}$ b. $\dfrac{1}{8}$ c. $\dfrac{1}{40}$ d. $\dfrac{1}{5}$

2. Le prix d'un produit est passé de 200 € à 100 €.
   Cette évolution correspond à deux baisses successives et identiques d'environ :

   a. 50 % b. 25 % c. 29 % d. 71 %

3. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0\,;18]$.



On peut affirmer que :

a. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[0\,;2]$.
b. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[8\,;12]$.
c. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[0\,;2]$.
d. Toutes les primitives de la fonction $f$sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[8\,;12]$.

4. Lors d'un sondage, 53,5% des personnes interrogées ont déclaré qu'elles voteront pour le candidat A aux prochaines élections. L'intervalle de confiance au seuil de 95% donné par l'institut de sondage est [51%;56%]. Le nombre de personnes qui ont été interrogées est alors :

a. 40 b. 400 c. 1 600 d. 6 400

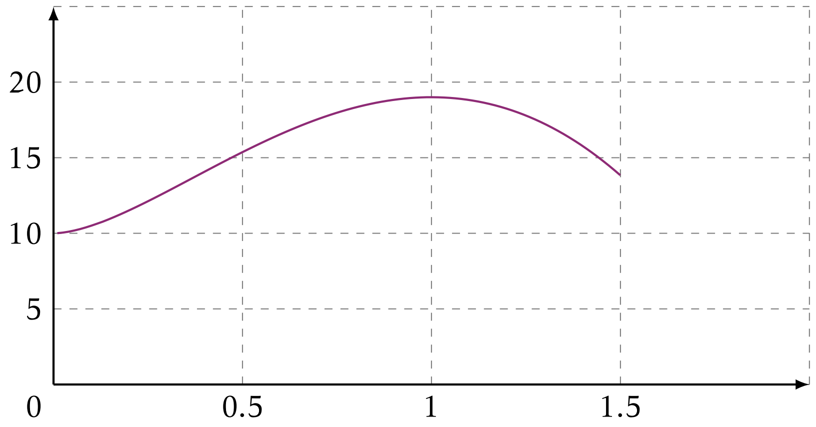
Exercice 4 (6 points) - Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1,5]$ par :

$$f(x) = 9x^2(1-2\ln x)+10.$$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



1. a. Montrer que $f'(x) = -36x\ln x$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;1,5]$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;1,5]$.
   c. Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;1,5]$.
2. On admet que $f''(x) = -36\ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;1,5]$.
   Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.
3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;1,5]$ par :

$$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3\ln x.$$

   a. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;1,5]$.
   b. Calculer $\displaystyle\int_1^{1,5} f(x)\,\text{d}x$.
   On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B : application économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une société est cotée en bourse depuis un an et demi.
Le prix de l'action depuis un an et demi est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre d'années écoulées depuis l'introduction en bourse et $f(x)$ représente le prix de l'action, exprimé en euros.
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1 :
« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur. »

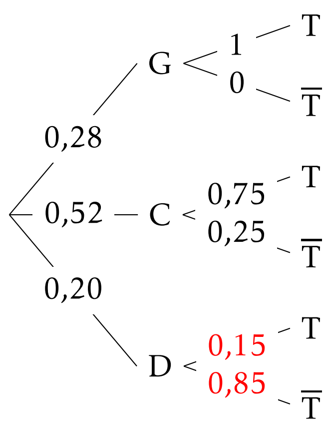
Proposition 2 :
« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 €. »

Corrigé

Exercice 1

Partie A

1. L'arbre de probabilités est le suivant : (les deux probabilités en rouge ont été trouvées ultérieurement)



2. $P(P \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,52 \times 0,75 = \underline{0,39}$.
3. L'énoncé nous dit que $P(T) = 0,7$.
   a. D'après la formule des probabilités totales,
   $$P(T) = P(G \cap T) + P(C \cap T) + P(D \cap T)$$
   soit :
   $$0,7 = 0,28 \times 1 + 0,39 + P(D \cap T)$$
   donc :
   $$P(D \cap T) = 0,7 - 0,39 - 0,28 = \underline{0,03}.$$
   b. On cherche :
   $$P_D(T) = \frac{P(D \cap T)}{P(D)} = \frac{0,03}{0,2} = 0,15.$$
   Ainsi, la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes est égale à 0,15.

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $P(120 < V < 130) \approx 0,409$.
2. On cherche : $P(V \geqslant 138) \approx 0,008$ (il faut ici entrer en borne inférieure : 138 et en borne supérieure : 10^99).

Exercice 2 (non Spé.)

1. Le nombre initial d'abonnés est 4 000.
   8 % se désabonnent, ce qui donne : $4000 \times (1 - 0,08) = 4000 \times 0,92 = 3680$.
   8 000 nouvelles inscriptions se font donc au 1er février, il y aura $3680 + 8000 = 11680$ abonnés.
2. a. Le tableau rempli est :

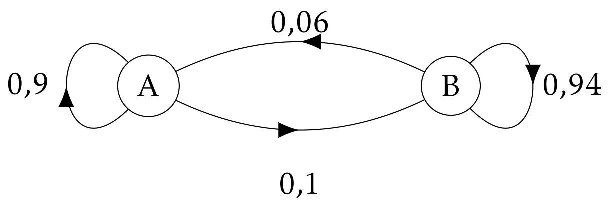
Valeur de U	4	11,7	18,7	25,2	31,2	36,7	41,8
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition $U < 40$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

   b. La valeur affichée par l'algorithme est donc $N = 6$: c'est le rang du premier mois où le nombre d'abonnés dépassera 40 000.
3. a.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 100 \\ &= 0,92u_n + 8 - 100 \\ &= 0,92u_n - 92 \\ &= 0,92\left(u_n - \frac{92}{0,92}\right) \\ &= 0,92(u_n - 100) \end{aligned}$$
   $v_{n+1} = 0,92v_n$.
   <u>Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $q = 0,92$.</u>
   Son premier terme est : $v_0 = u_0 - 100 = 4 - 100$, soit $\underline{v_0 = -96}$.

   b. (v_n) étant une suite géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$ donc ici,
$$\boxed{v_n = -96 \times 0,92^n}$$
   c. On sait que $v_n = u_n - 100$, donc $u_n = v_n + 100$, soit :
$$\boxed{u_n = -96 \times 0,92^n + 100}$$
   d'après la question précédente.
4. On cherche le premier entier n tel que $u_n \geqslant 70$.
$$\begin{aligned} u_n \geqslant 70 &\iff -96 \times 0,92^n + 100 \geqslant 70 \\ &\iff -96 \times 0,92^n \geqslant 70 - 100 \\ &\iff -96 \times 0,92^n \geqslant -30 \\ &\iff 0,92^n \leqslant \frac{-30}{-96} \\ &\iff \ln(0,92^n) \leqslant \ln\left(\frac{30}{96}\right) \\ &\iff n \ln 0,92 \leqslant -1,163 \\ &\iff n \geqslant \frac{-1,163}{\ln 0,92} \quad \text{(on n'oublie pas que } \ln 0,92 < 0 \text{ car } 0 < 0,92 < 1\text{)} \\ &\iff n \geqslant 13,9 \end{aligned}$$
   <u>Ainsi, c'est à partir du 14e mois que le nombre d'abonnés sera supérieur à 70 000.</u>

Exercice 2 (Spé.)

1. a. Le graphe est le suivant :



b. La matrice de transition est :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}}$$

c. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0,9 + 0 \times 0,06 & 1 \times 0,1 + 0 \times 0,94 \end{pmatrix}$

<u>On obtient bien : $P_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.</u>

2. L'algorithme à retenir est le l'algorithme 2.
En effet, dans le premier, dans la boucle, pour calculer a_{n+1}, on entre l'instruction : « a prend la valeur $0,9 \times a + 0,06 \times b$ », ce qui signifie que $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$.
Or, la ligne suivante utilise la lettre a pour désigner a_n, ce qui n'est pas correct car à cette étape, a désigne a_{n+1}. Il faut donc une lettre intermédiaire pour désigner a_n, ce que fait la lettre c dans l'algorithme 2.

3. a. On sait que $a_n + n_n = 1$, donc $b_n = 1 - a_n$.
Ainsi, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06(1 - a_n) = 0,9a_n + 0,06 - 0,06a_n = 0,84a_n + 0,06$.

b. $$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,375 \\ &= 0,84a_n + 0,06 - 0,375 \\ &= 0,84a_n - 0,315 \\ &= 0,84\left(a_n - \frac{0,315}{0,84}\right) \\ &= 0,84(a_n - 0,375) \end{aligned}$$
$u_{n+1} = 0,84u_n$.
Par conséquent, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,84$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 0,375 = 1 - 0,375$ soit $u_0 = 0,625$.

c. (u_n)est géométrique donc $u_n = u_0 \times q^n$ soit $u_n = 0,625 \times 0,84^n$.
Or, $u_n = a_n - 0,375$ donc $a_n = u_n + 0,375 = 0,625 \times 0,84^n + 0,375$.

4. On cherche le premier entier n tel que $a_n < 0,5$

$$\begin{aligned}
a_n < 0,5 &\iff 0,625 \times 0,84^n + 0,375 < 0,5\\
&\iff 0,625 \times 0,84^n < 0,5 - 0,375\\
&\iff 0,625 \times 0,84^n < 0,125\\
&\iff 0,84^n < \frac{0,125}{0,625}\\
&\iff 0,84^n < 0,2\\
&\iff \ln\left(0,84^n\right) < \ln 0,2\\
&\iff n \ln 0,84 < \ln 0,2\\
&\iff n > \frac{\ln 0,2}{\ln 0,84}\\
&\iff n > 9,23
\end{aligned}$$

Ainsi, c'est à partir de la 10e année que la proportion d'abonnés à la version papier du magazine sera inférieure à 50 %.

Exercice 3

1. Réponse b. En effet, on reconnaît ici une loi uniforme donc on calcule : $\dfrac{20-15}{50-10} = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$.
2. Réponse c. On cherche x tel que $200 \times (1-x)^2 = 100$, soit $(1-x)^2 = 0,5$, ou encore $1 - x = \sqrt{0,5}$ et donc $x = 1 - \sqrt{0,5} \approx 0,2929$, ce qui correspond à un pourcentage de $29,29$ %.
3. Réponse d. Le signe de f (qui est la dérivée de ses primitives) donne les variations de ses primitives.
   Sur $[8\,;12]$, on voit que $f(x) > 0$ donc ses primitives sont croissantes sur cet intervalle.
4. Réponse c. Un intervalle de confiance au seuil de 95 % est de la forme $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où ici $f = 0,535$.

   La borne inférieure doit être égale à 0,51 donc il faut que $0,535 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,51$. En testant les valeurs proposées, on trouve $n = 1\,600$. C'est plus rapide que de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
0,535 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,51 &\iff \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,535 - 0,51\\
&\iff \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,025\\
&\iff \sqrt{n} = \frac{1}{0,025} = 40\\
&\iff n = 40^2\\
&\iff n = 1\,600.
\end{aligned}$$

Exercice 4

Partie A

1. a. f est de la forme $uv + 10$ donc $f' = u'v + uv' + 0$ avec :
$u(x) = 9x^2 \qquad v(x) = 1 - 2\ln x$
$u'(x) = 18x \qquad v'(x) = -\dfrac{2}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 18x \times (1 - 2\ln x) + 9x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right) \\ &= 18x - 36x\ln x - \frac{18x^2}{x} \\ &= 18x - 36x\ln x - 18x \end{aligned}$$
$$\boxed{f'(x) = -36x\ln x}$$

b. Sur $]0\,;1,5]$, $x > 0$ et $36 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$.
Or, on sait que $\ln x > 0$ si $x > 1$ donc :
- $f'(x) > 0$ sur $]0\,;1[$;
- $f'(x) < 0$ sur $]1\,;1,5]$.

c. On en déduit que :
- f est croissante sur $]0\,;1[$;
- f est décroissante sur $]1\,;1,5]$

2. La courbe de f admet un point d'inflexion si $f''(x)$ change de signe.

$$\begin{aligned} -36\ln x - 36 > 0 &\iff -36\ln x > 36 \\ &\iff \ln x < -1 \\ &\iff x < \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $f''(x)$ change de signe en $x = \mathrm{e}^{-1}$ donc la courbe de f admet bien un point d'inflexion en e^{-1}.

3. a. Il faut dériver $F(x)$ et trouver $f(x)$ en n'oubliant pas que $6x^3\ln x$ est un produit (de la forme uv).

$$\begin{aligned} F'(x) &= 10 \times 1 + 5 \times 3x^2 - \left[6 \times 3x^2\ln x + 6x^3 \times \frac{1}{x}\right] \\ &= 10 + 15x^2 - 18x^2\ln x - 6x^2 \\ &= 9x^2 - 18x^2\ln x + 10 \\ &= 9x^2(1 - 2\ln x) + 10 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

<u>Donc F est bien une primitive de f.</u>

b. $F(1,5) = 15 + 5 \times 1,5^3 - 6 \times 1,5^3\ln 1,5 \approx 23,66$.
$F(1) = 15$
Donc $\displaystyle\int_1^{1,5} f(x)\,\mathrm{d}x = F(1,5) - F(1) \approx 8,66$.

Partie B

Affirmation 1 : vraie.
Au cours des 6 derniers mois, on est sur l'intervalle $[1\,;1,5]$.
$f(1) = 19$ et $f(1,5) \approx 13,83$.
Un quart de 19 est $\dfrac{19}{4} = 4,75$ et $19 - 4,75 = 14,25$. De plus, $f(1,5) < 14,25$ donc l'action a bien perdu plus d'un quart de sa valeur au cours des six derniers mois.

Affirmation 2 : fausse.
La valeur moyenne de l'action sur les six derniers mois est la valeur moyenne de la fonction f :

$$\mu = \frac{1}{1,5-1}\int_1^{1,5} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{0,5} \times 8,66 = 17,32 > 17.$$