Baccalauréat Série ES Amérique du Nord, 29 mai 2017

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Sujet

Stéphane PASQUET

5 juin 2017

Exercice 1 (4 points) - Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple où l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée.
   On a alors :

   a. $f'(x) = 0$ **b.** $f'(x) = \ln(x)$
   c. $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - x$

2. Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2$ appartiennent à l'intervalle :

   a. $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{\ln 3}{\ln(5,7)}\right]$ **b.** $\left]-\infty\ ;\ \ln\left(\frac{0,5}{0,95}\right)\right]$
   c. $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}\right]$ **d.** $\left[\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}\ ;\ +\infty\right[$

3. Une entreprise fabrique des tubes métalliques de longueur 2 m.
   Un tube métallique est considéré comme étant dans la norme si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1 000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme.
   L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3}, est :

   a. $[0,922\ ;\ 0,986]$ **b.** $[0,947\ ;\ 0,961]$
   c. $[1,98\ ;\ 2,02]$ **d.** $[0,953\ ;\ 0,955]$

4. Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de $0,8$. Les tirs sont supposés indépendants.
   Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

   a. 0,512 **b.** 2,4
   c. 0,262 144 **d.** 0,081 92

Exercice 2 (5 points) - Commun à tous les candidats

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.
Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016+n$, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1. a. Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
   b. Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.
3. Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant \ldots$ faire
L6		n prend la valeur ....
L7		U prend la valeur ....
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher ....

4. a. On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
   Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de n	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

   b. Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.
5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n = 23\,600 \times 1,04^n + 3\,900$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (5 points)

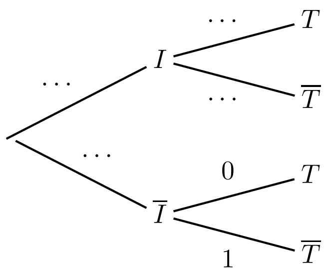
Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie cœliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population. On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.
On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ $66,6$ millions d'habitants au 1er janvier 2016.
On considère les événements :

- I : « la personne choisie est intolérante au gluten » ;
- T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :

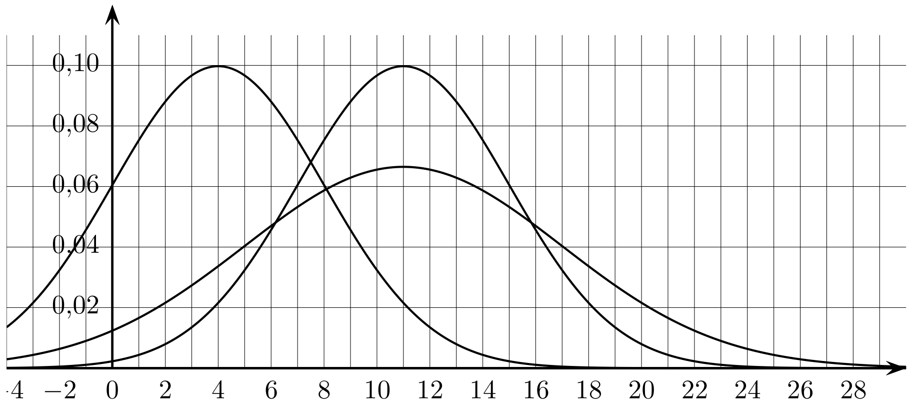


2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
3. Montrer que $p(T) = 0,002$.

Partie B

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.
On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.
On admet que la loi de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

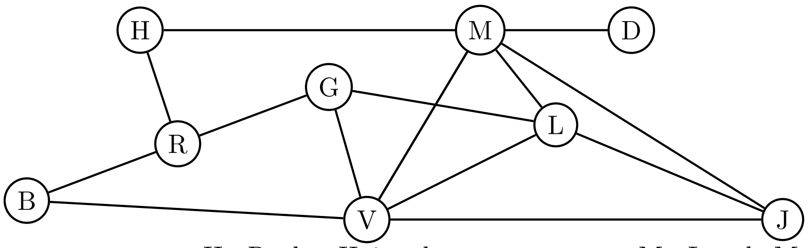
1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
2. Calculer $p(X \leqslant 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0,84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.



Exercice 3 (4 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés.
Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :

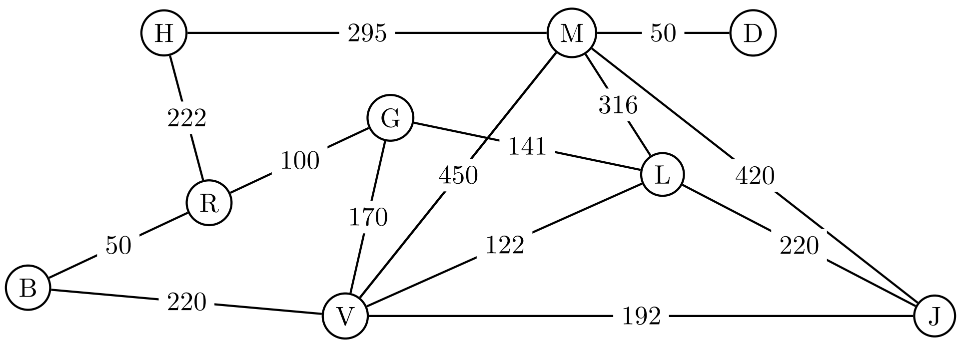


B : Le lagon bleu. H : Rocher Hvitserkur. M : Lac de Myvatn.
D : Chute d'eau de Dettifoss. J : Lagune glacière de Jôkulsarlôn. R : Capitale Reykjavik.
G : Geyser de Geysir. L : Massif du Landmannalaugar. V : Ville de Vik.

1. Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.
   a. Déterminer l'ordre du graphe.
   b. Déterminer si le graphe est connexe.
   c. Déterminer si le graphe est complet.
2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.
3. On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

   a. Il manque certains coefficients de la matrice M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.
   b. Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.
4. Sur le graphe pondéré ci-dessous, on a indiqué sur les arêtes les distances en kilomètre entre les différents lieux :



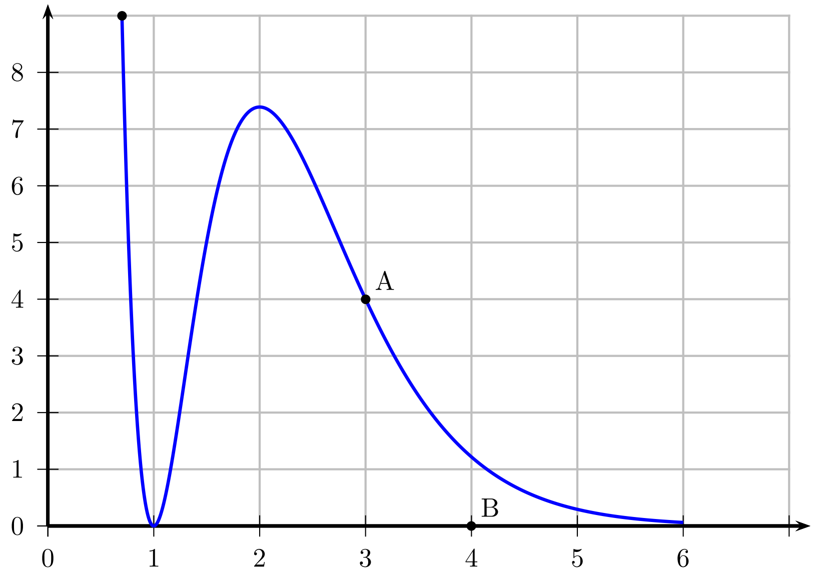
Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Lagon bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss).
Préciser alors le trajet à emprunter.

Exercice 4 (6 points) - Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$; on suppose que f est dérivable.

Partie A : Étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points A$(3\,;\,4)$ et B$(4\,;\,0)$. Déterminer $f'(3)$.
2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$.

Partie B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-2x+6}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7\,;6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$.
   On ne demande pas de calculer les ordonnées.
3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x\hat{\ }2 + 6x - 4) * \mathrm{e}\hat{\ }(-2x + 6)$ $\to f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\to g(x) = -16x\mathrm{e}^{-2x+6} + 4x^2\mathrm{e}^{-2x+6} + 14\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\to 2\mathrm{e}^{-2x+6}\left(2x^2 - 8x + 7\right)$
L4	Résoudre$[g(x) = 0]$ $\to \left\{x = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\ ;\ x = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L5	$F(x) :=$ Primitive$[f(x)]$ $\to F(x) = \dfrac{1}{4}\left(-2x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$

   a. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.
   b. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.
   c. On pose $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1}.

Corrigé

Stéphane PASQUET

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

5 juin 2017

Exercice 1 (4 points) - Commun à tous les candidats

1. Réponse (b). $f(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.
2. Réponse (d). En effet, on a : $$\begin{aligned} 6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2 &\iff 0,95^n \leqslant \frac{3}{6} \\ &\iff \ln(0,95^n) \leqslant \ln\frac{1}{2} \\ &\iff n\ln(0,95) \leqslant \ln(0,5) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \text{ car } 0 < 0,95 < 1 \text{ donc } \ln(0,95) < 0 \end{aligned}$$
3. Réponse (b).
4. Réponse (d). On calcule $P(X = 3)$ pour X suivant la loi binomiale avec $n = 6$ et $p = 0,8$.

Exercice 2 (5 points) - Commun à tous les candidats

1. a. $27\,500 - 150 = 27\,350$ est le nombre d'étudiants en juin 2017.
   b. $27\,350 \times 1,04 = 28\,444$ est le nombre d'étudiants en septembre 2017.
2. $u_{n+1} = (u_n - 150) \times 1,04 = 1,04u_n - 150 \times 1,04 = 1,04u_n - 156$.
3. Ob a :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant 33\,000$ faire
L6		n prend la valeur $n + 1$
L7		U prend la valeur $1,04U - 156$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher $2016 + n$

4. a. On a :

n	0	1	2	3	4	5	6
U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

   b. L'algorithme affiche alors : $2016 + 6 = 2022$.
5. a. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3\,900 \\ &= 1,04u_n - 156 - 3\,900 \\ &= 1,04u_n - 4\,056 \\ &= 1,04\left(u_n - \frac{4\,056}{1,04}\right) \\ &= 1,04(u_n - 3\,900) \\ &= 1,04v_n. \end{aligned}$$

(v_n) est donc géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 3\,900 = 27\,500 - 3\,900 = 23\,600.$$

b. $v_n = u_n - 3\,900$ donc $u_n = v_n + 3\,900$, soit :

$$u_n = v_0 \times q^n + 3\,900 = 23\,600 \times 1,04^n + 3\,900.$$

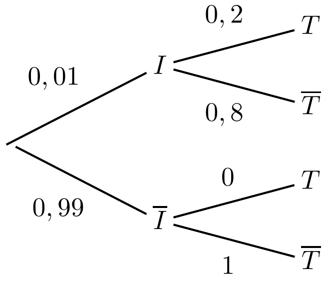
c. $1,04 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,04^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Ainsi, le nombre d'étudiants ne cessera d'augmenter au fil des années.

Exercice 3 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Partie A

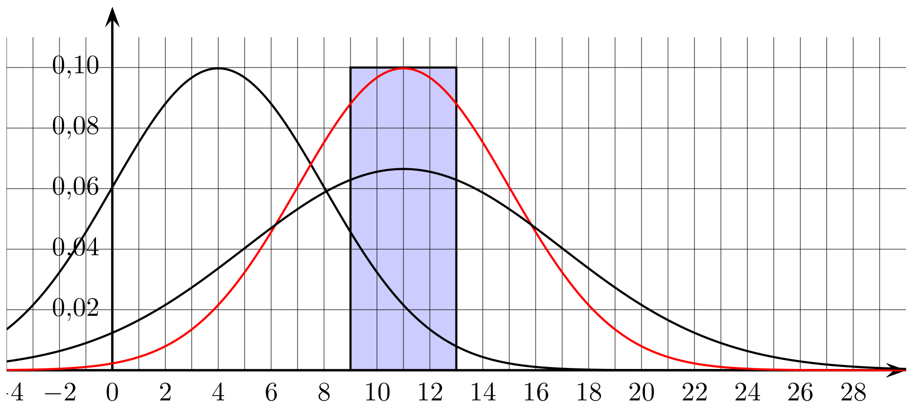
1. On a l'arbre complété suivant :



2. $P(I \cap \overline{T}) = 0,01 \times 0,8 = 0,008$.
3. $P(T) = 0,01 \times 0,2 + 0,99 \times 0 = 0,002$.

Partie B

1. $P(9 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0,383$.
2. $P(X \leqslant 6) \approx 0,106$.
3. $P(X \leqslant a) = 0,84$ donc $a \approx 15$.
   Cela signifie que la probabilité pour que 15 ans se passent avant de diagnostiquer la maladie est 0,84.
4. On regarde d'abord la ou les courbes symétriques par rapport à $x = 11$ (car $\mu = 11$). Ensuite, on considère que $P(9 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0,383$ donc on compte le nombre de « carreaux » sous les courbes entre 9 et 13. Il y en a 19 pour la courbe en rouge. Sachant qu'un carreaux équivaut à 0,02, cela nous fait : $19 \times 0,02 = 0,38$, ce qui correspond bien à notre probabilité.



Exercice 3 (4 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Il y a 9 sommets donc l'ordre de ce graphe est 9.
   b. Il n'y a pas de points isolés, donc le graphe est connexe.
   c. Tous les sommets ne sont pas adjacents deux à deux (par exemple, D n'est pas relier directement à A) donc le graphe n'est pas complet.
2. On souhaite savoir ici si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Sommets	B	R	H	G	V	M	L	D	J
Degrés	2	3	2	3	5	4	4	1	3

Il y a plus de deux sommets de degré impair, donc d'après le théorème d'Euler, le graphe n'admet pas de chaîne eulérienne.

3. a. La matrice est nécessairement symétrique donc la partie manquante est la symétrique de la partie haut-droit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   b. Le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice M^4 donne le nombre de chemins de longueur 4 pour relier les sommets de position i et j.
   Ainsi, il y a 3 chemins de longueur 4 pour relier B à D.
4. Exécutons l'algorithme de Dijkstra :

B	G	H	J	L	M	R	V	D
0 , B	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	50 , B	220 , B	$+\infty$
	150 , R	272 , R	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	50 , B	220 , B	$+\infty$
	150 , R	272 , R	$+\infty$	291 , G	$+\infty$		220 , B	$+\infty$
		272 , R	412 , V	291 , G	670 , V		220 , B	$+\infty$
		272 , R	412 , V	291 , G	567 , H			$+\infty$
			412 , V	291 , G	567 , H			$+\infty$
			412 , V		567 , H			$+\infty$
					567 , H			617 , M

Le chemin le plus court est BRHMD de longueur 617.

Exercice 4 (6 points) - Commun à tous les candidats

Partie A

1. $f'(3) = \dfrac{y_B y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{4-3} = -4.$
2.

x	$0,7$		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

1. $f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1)\big(-2\mathrm{e}^{-2x+6}\big)$
$= (2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2)\mathrm{e}^{-2x+6}$
$= (-2x^2 + 6x - 4)\mathrm{e}^{-2x+6}.$
2. $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 6x - 4$ (car $\mathrm{e}^{-2x+6} > 0$), de discriminant :

$$\Delta = 36 - 4 \times 2 \times 4 = 36 - 32 = 4.$$

Alors, $x_1 = \dfrac{-6-2}{-4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6+2}{-4} = 1$, d'où le tableau suivant :

x	$0,7$		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

3. a. f concave $\iff f''(x) < 0$.
La dérivée seconde est donnée par la fonction g : $g(x) = 2(2x^2 - 8x + 7)\mathrm{e}^{-2x+6}$ d'après le logiciel (ligne L3). $g(x)$ est du signe de $2x^2 - 8x + 7$, dont les racines sont données en L4. Le polynôme est négatif entre les racines donc la fonction f est concave sur $\left[\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

   b. La courbe admet deux points d'inflexion car $f''(x)$ s'annule en changeant de signes deux fois : pour $x = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et pour $x = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}$.

   c. $I = F(5) - F(3)$, où F est donnée en ligne L5.

$$I = \left[\frac{1}{4}(-2 \times 5^2 + 2 \times 5 - 1)\mathrm{e}^{-2\times 5+6}\right] - \left[\frac{1}{4}(-2 \times 3^2 + 2 \times 3 - 1)\mathrm{e}^{-2\times 3+6}\right]$$
$$= -\frac{41}{4}\mathrm{e}^{-4} + \frac{13}{4}$$
$$\approx 3,1.$$