Baccalauréat Série ES
Liban, 5 juin 2017

Stéphane PASQUET

Disponible sur http://www.mathweb.fr

9 juin 2017

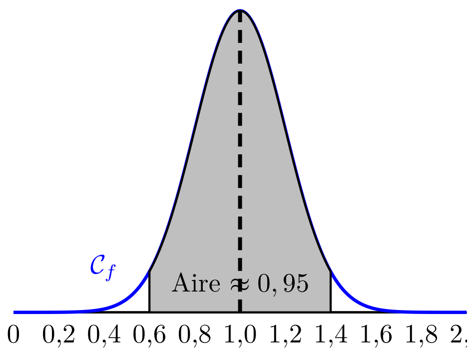
Exercice 1 (3 points) - Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{x}$.
   La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ est :

   a. 2 b. $\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ c. $\dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$ d. $\dfrac{-2}{\mathrm{e}-1}$

2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction de densité f associée à la variable X.



   a. L'espérance de X est $0,4$.
   b. L'espérance de X est $0,95$.
   c. L'écart-type de X est environ $0,4$.
   d. L'écart-type de X est environ $0,2$.

3. À l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. L'hypermarché affirme que 15 % des tickets à gratter sont gagnants, c'est-à-dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.
   Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.
   On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

   a. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est [0,051 ; 0,249], les bornes étant arrondies au millième.

b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est [0,100 ; 0,200], les bornes étant arrondies au millième.

c. La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\frac{50}{500}$.

d. Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

Exercice 2 (6 points) - Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : l'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2.
En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012.
   Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement ? Justifier la réponse.
2. Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à $0,1$.

Partie B : étude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005 + n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 10$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,98$. Préciser son premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 31 \times (0,98)^n + 10$.
4. a. Calculer la limite de la suite (u_n).
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO_2, par rapport à l'année 2005.
   a. Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme.

```
1    Variables
2       U est du type nombre
3       n est du type nombre entier
4    Début Algorithme
5       U prend la valeur 41
6       n prend la valeur 0
7       Tant que (......) faire
8          Début Tant que
9          U prend la valeur ...
10         n prend la valeur n + 1
11         Fin Tant que
12      Afficher n
13   Fin Algorithme
```

   b. L'algorithme affiche 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Les parties A et B sont indépendantes

Notations :
Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A et $p(A)$ la probabilité de l'événement A.
Si A et B sont deux événements, on note $p_B(A)$ la probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé.

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième

Une agence Pôle Emploi étudie l'ensemble des demandeurs d'emploi selon deux critères, le sexe et l'expérience professionnelle.
Cette étude montre que :

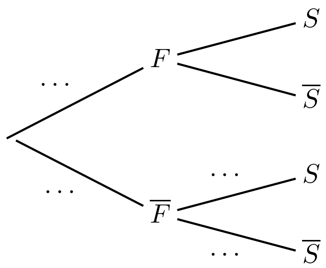
- 52 % des demandeurs d'emploi sont des femmes et 48 % sont des hommes ;
- 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience et les autres sont avec expérience ;
- parmi les hommes qui sont demandeurs d'emploi, on sait que 17,5 % sont sans expérience.

Partie A

On prélève au hasard la fiche d'un demandeur d'emploi de cette agence. On note :

- S : l'événement « le demandeur d'emploi est sans expérience » ;
- F : l'événement « le demandeur d'emploi est une femme ».

1. Préciser $p(S)$ et $p_{\overline{F}}(S)$.
2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.



3. Démontrer que $p\left(\overline{F} \cap S\right) = 0,084$. Interpréter le résultat.
4. La fiche prélevée est celle d'un demandeur d'emploi sans expérience. Calculer la probabilité pour que ce soit un homme.
5. Sachant que la fiche prélevée est celle d'une femme, calculer la probabilité que ce soit la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience.

Partie B

La responsable de l'agence décide de faire le point avec cinq demandeurs d'emploi qui sont suivis dans son agence. Pour cela, elle prélève cinq fiches au hasard. On admet que le nombre de demandeurs d'emplois dans son agence est suffisamment grand pour assimiler cette situation à un tirage avec remise.
En justifiant la démarche, calculer la probabilité que, parmi les cinq fiches tirées au hasard, il y ait au moins une fiche de demandeur d'emploi sans expérience.

Exercice 3 (5 points) - Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.
En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.
On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.
On estime que, chaque année :

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.

On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo :

- A est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Alpha » ;
- B est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Bravo ».

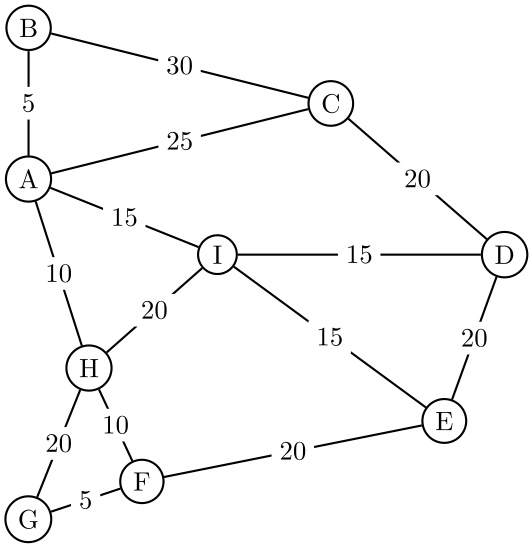
1. Dessiner ce graphe probabiliste.
   On admet que la matrice de transition de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est : $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$.
   On note pour tout entier naturel n :
   - a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année $2015 + n$;
   - b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année $2015 + n$.

   On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.
2. Donner a_0 et b_0.
3. Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.
4. Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme. On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des abonnés.
   a. Montrer que les nombres x et y sont solutions du système $\left\{ \begin{array}{lcl} 0,12x - 0,14y & = & 0 \\ x + y & = & 1. \end{array} \right.$
   b. Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.
   c. Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.

Partie B

Un opérateur français doit développer son réseau de fibre optique dans la région des stations de ski notées A, B, C, D, E, F, G, H, I à l'approche de la saison touristique. À ce jour, seule la station C est reliée au réseau national de fibre optique.
Le coût des tronçons du réseau de fibre optique varie selon le relief des montagnes et des vallées.
L'opérateur a mené une étude afin de déterminer son plan de déploiement.
Dans le graphe ci-dessous :

- les sommets représentent les stations de ski ;
- les arêtes représentent les différents tronçons qu'il est possible de déployer ;
- le poids de chaque arête correspond au coût associé, en milliers d'euros.



1. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.
2. Déterminer, en milliers d'euros, le coût de ce tracé.

Exercice 4 (6 points) - Commun à tous les candidats

Les deux parties sont liées

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = \frac{1}{0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, on a

$$f'(x) = \frac{100\mathrm{e}^{-x}}{\left(0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}\right)^2}.$$

   On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

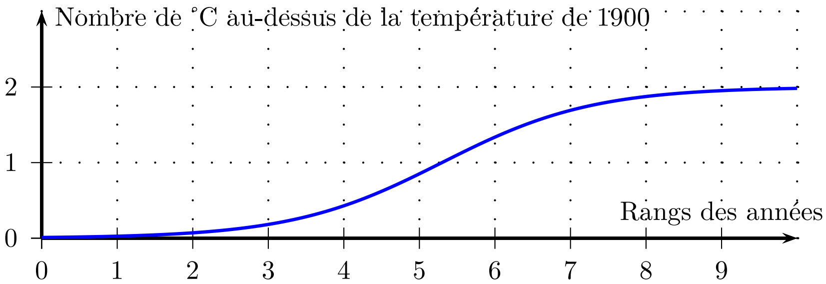
$$f''(x) = \frac{100\mathrm{e}^{-x}\left(100\mathrm{e}^{-x} - 0,5\right)}{\left(0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}\right)^3}.$$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, l'inéquation $100\mathrm{e}^{-x} - 0,5 \geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation $x \leqslant -\ln(0,005)$.
   b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
   Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.
4. En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Partie B

Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universel sur le climat, appelé accord de Paris, signé par 195 pays.
Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2°C la température de l'année 1900.
Dans cette partie, on modélise, par la fonction f de la partie A, une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion.
Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 1925 correspond à 1.
Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrés Celsius au-dessus de la température de 1900.



1. a. Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.

   b. En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

2. a. En utilisant la partie A, déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point I d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. Arrondir le résultat à l'unité.

   b. Calculer, pour cette année-là, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900.

3. On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsius. On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f'.

   a. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la température terrestre diminuera ? Justifier la réponse.

   b. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera ? Justifier la réponse.

4. Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de 1,5°C la température de l'année 1900.

   Déterminer l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.

Corrigé

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Stéphane PASQUET

9 juin 2017

Exercice 1 (3 points) - Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

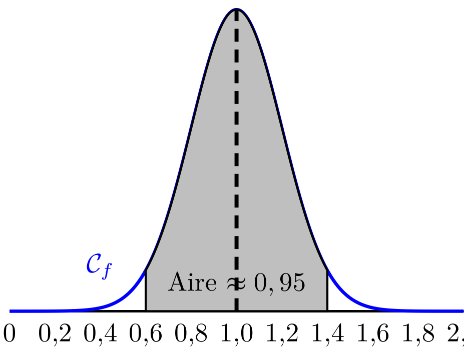
1. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2}{x}$.
   La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ est :

   a. 2 b. $\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ c. $\dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$ d. $\dfrac{-2}{\mathrm{e}-1}$

   Réponse (c). En effet, une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $G(x)=\ln(x)$ donc, la valeur moyenne de g sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ est :

   $$\mu=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\times 2\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\mathrm{e}-1}\big[G(\mathrm{e})-G(1)\big]=\frac{2}{\mathrm{e}-1}\times\big[\ln(\mathrm{e})-\ln(1)\big]=\frac{2}{\mathrm{e}-1}\times(1-0)=\frac{2}{\mathrm{e}-1}$$

2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction de densité f associée à la variable X.



   a. L'espérance de X est $0,4$.
   b. L'espérance de X est $0,95$.
   c. L'écart-type de X est environ $0,4$.
   d. L'écart-type de X est environ $0,2$.

   Réponse (d). En effet, d'après le cours,

   $$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0,95$$

> donc $0,4 = 2\sigma$, soit $\sigma = 0,2$.

3. À l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. L'hypermarché affirme que 15 % des tickets à gratter sont gagnants, c'est-à-dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.
   Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.
   On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.
   a. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est [0,051 ; 0,249], les bornes étant arrondies au millième.
   b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est [0,100 ; 0,200], les bornes étant arrondies au millième.
   c. La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\dfrac{50}{500}$.
   d. Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

> **Réponse (a).** L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est :
>
> $$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,15 - \sqrt{\frac{0,15\times 0,85}{50}}\,;0,15 - \sqrt{\frac{0,15\times 0,85}{50}}\right]$$
> $$\approx [0,051025\,;0,248975].$$
>
> Il est à noter que la réponse (d) est fausse car ici, il aurait fallu calculer un intervalle de confiance ; or, pour cela, il faut que $nf \geqslant 5$ et ici, $n = 50$ et $f = \dfrac{2}{50}$ donc $nf = 2 < 5$.

Exercice 2 (6 points) - Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : l'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2.
En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012.
   Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement ? Justifier la réponse.

> $\dfrac{559-486}{559} \times 100 \approx 13,06\%$.
> On peut donc affirmer que la France respectait déjà cet engagement en 2011.

2. Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0, 1.

> Notons x la production de CO_2 en 2010. Alors,
>
> $$x\left(1 - \frac{5,6}{100}\right) = 486 \qquad \text{soit} \qquad x = \frac{486}{0,944} \approx 514,8.$$
>
> Ainsi, en 2010, la France émettait 514,8 mégatonnes de CO_2.

Partie B : étude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005 + n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.

> $u_0 = 41$ car il y a eu 41 000 T de CO_2 émis en 2005 (u_n est exprimé en millier...).
> Il y a eu 2 % de pertes de 2005 à 2006 : $u_0 \times 0,98 = 40,18$. Auxquels s'ajoutent 200 tonnes, soit 0,2 millier de tonne :
> $$u_1 = 40,18 + 0,2 = 40,38.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.

> u_n est multiplié par 0,98 car d'une année à l'autre, il y a 2 % de pertes de CO_2 ; à cela s'ajoutent les 0,2 milliers de tonnes de CO_2. Cela donne bien $u_{n+1} = 0,98u_n + 0,2$.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 10$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,98$. Préciser son premier terme.

> $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \\ &= 0,98u_n + 0,2 - 10 \\ &= 0,98u_n - 9,8 \\ &= 0,98\left(u_n - \frac{9,8}{0,98}\right) \quad \text{(on factorise par le coefficient de } u_n\text{)} \\ &= 0,98(u_n - 10) \\ &= 0,98v_n. \end{aligned}$$
> (v_n) est donc géométrique de raison 0,98 et de premier terme :
> $$v_0 = u_0 - 10 = 41 - 10 = 31.$$

   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

> (v_n) est géométrique donc :
> $$v_n = v_0 \times q^n = 31 \times 0,98^n.$$

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 31 \times (0,98)^n + 10$.

> $v_n = u_n - 10$ donc :
> $$u_n = v_n + 10 = 31 \times 0,98^n + 10.$$

4. a. Calculer la limite de la suite (u_n).

> On sait, d'après le cours, que si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,98^n = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.

   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

On peut alors dire qu'à longs termes, les émissions de CO_2 de la France se rapprocheront de 10 mégatonnes.

5. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO_2, par rapport à l'année 2005.

   a. Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme.

```
1    Variables
2      U est du type nombre
3      n est du type nombre entier
4    Début Algorithme
5      U prend la valeur 41
6      n prend la valeur 0
7      Tant que (......) faire
8        Début Tant que
9        U prend la valeur ...
10       n prend la valeur n + 1
11       Fin Tant que
12     Afficher n
13   Fin Algorithme
```

On souhaite calculer les premiers termes de la suite (u_n) tant qu'ils sont supérieurs à la moitié de la valeur initiale, à savoir la moitié de 41, soit 40,5. D'où l'algorithme suivant :

```
1    Variables
2      U est du type nombre
3      n est du type nombre entier
4    Début Algorithme
5      U prend la valeur 41
6      n prend la valeur 0
7      Tant que (U ⩾ 20,5) faire
8        Début Tant que
9        U prend la valeur 0,98 × U + 0,2
10       n prend la valeur n + 1
11       Fin Tant que
12     Afficher n
13   Fin Algorithme
```

   b. L'algorithme affiche 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

La valeur de n correspond au nombre d'années après 2005 à attendre avant que la consommation soit réduite de moitié.
Ainsi, c'est en $2005+54 = 2059$ que la consommation de CO_2 sera inférieure à 20,5 mégatonnes.

Exercice 3 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Les parties A et B sont indépendantes

Notations :
Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A et $p(A)$ la probabilité de l'événement A.
Si A et B sont deux événements, on note $p_B(A)$ la probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé.

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième

Une agence Pôle Emploi étudie l'ensemble des demandeurs d'emploi selon deux critères, le sexe et l'expérience professionnelle.
Cette étude montre que :

- 52 % des demandeurs d'emploi sont des femmes et 48 % sont des hommes ;
- 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience et les autres sont avec expérience ;
- parmi les hommes qui sont demandeurs d'emploi, on sait que 17,5 % sont sans expérience.

Partie A

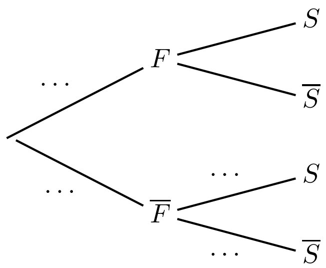
On prélève au hasard la fiche d'un demandeur d'emploi de cette agence. On note :

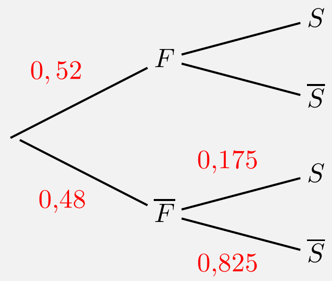
- S : l'événement « le demandeur d'emploi est sans expérience » ;
- F : l'événement « le demandeur d'emploi est une femme ».

1. Préciser $p(S)$ et $p_{\overline{F}}(S)$.

> D'après l'énoncé, $p(S) = 0,18$ et $p_{\overline{F}}(S) = 0,175$.

2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.



> 
>

3. Démontrer que $p\left(\overline{F} \cap S\right) = 0,084$. Interpréter le résultat.

> On sait que :
> $$p(\overline{F} \cap S) = 0,48 \times 0,175 = 0,084.$$
> Ceci signifie qu'il y a 8,4% d'hommes sans expérience sur l'ensemble des demandeurs d'emploi.

4. La fiche prélevée est celle d'un demandeur d'emploi sans expérience. Calculer la probabilité pour que ce soit un homme.

$$p_S(\overline{F}) = \frac{p(\overline{F} \cap S}{p(S)} = \frac{0,084}{0,18} \approx 0,467.$$

5. Sachant que la fiche prélevée est celle d'une femme, calculer la probabilité que ce soit la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience.

On sait que :

$$p(S) = p(F \cap S) + p(\overline{F} \cap S)$$

donc :

$$0,18 = p(F \cap S) + 0,084 \qquad \text{soit} \qquad p(F \cap S) = 0,18 - 0,084 = 0,096.$$

Ainsi,

$$p_F(S) = \frac{0,096}{0,52} \approx 0,185.$$

Partie B

La responsable de l'agence décide de faire le point avec cinq demandeurs d'emploi qui sont suivis dans son agence. Pour cela, elle prélève cinq fiches au hasard. On admet que le nombre de demandeurs d'emplois dans son agence est suffisamment grand pour assimiler cette situation à un tirage avec remise.
En justifiant la démarche, calculer la probabilité que, parmi les cinq fiches tirées au hasard, il y ait au moins une fiche de demandeur d'emploi sans expérience.

Notons X la variable aléatoire représentant le nombres de demandeurs d'emploi sans expérience parmi les 5 personnes prises au hasard. X soit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = p(S) = 0,18$. Alors,

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,18)^5 = 1 - 0,82^5 \approx 0,629.$$

Exercice 3 (5 points) - Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

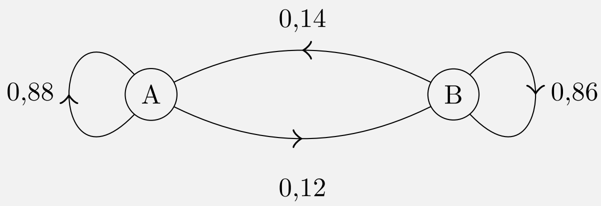
Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.
En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.
On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.
On estime que, chaque année :

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.

On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo :

- A est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Alpha » ;
- B est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Bravo ».

1. Dessiner ce graphe probabiliste.

> On a le graphe suivant :
>
> 
>

On admet que la matrice de transition de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est : $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$.
On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année $2015 + n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année $2015 + n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.

2. Donner a_0 et b_0.

> D'après l'énoncé, $a_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.
> Alors,
> $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,362 & 0,638 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

> On a :
> $$P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,4418 & 0,5582 \end{pmatrix}$$
> Ainsi, en $2015 + 3 = 2018$, il y aura bien 44,2 % d'abonnés chez l'opérateur Alpha.

4. Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme. On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des abonnés.

   a. Montrer que les nombres x et y sont solutions du système $\left\{ \begin{array}{lcl} 0,12x - 0,14y & = & 0 \\ x + y & = & 1. \end{array} \right.$

x et y sont deux probabilités dont la somme doit être égale à 1 car nous ne considérons pas d'autres opérateurs ; donc $\boxed{x+y=1}$. De plus, l'état stable est défini par l'égalité :

$$P = PM \qquad \text{donc} \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88x + 0,14y & 0,12x + 0,86y \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad \begin{cases} x = 0,88x + 0,14y \\ y = 0,12x + 0,86y \end{cases}$$

En mettant x et y à droite des signes « = », on obtient :

$$\begin{cases} 0 = (0,88-1)x + 0,14y \\ 0 = 0,12x + (0,86-1)y \end{cases}$$

La deuxième équation donne :

$$\boxed{0,12x - 0,14y = 0}$$

Les deux équations encadrées donnent bien le système demandé.

b. Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.

Le système s'écrit de façon matricielle ainsi :

$$AX = B \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0,12 & -0,14 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$X = A^{-1}B \approx \begin{pmatrix} 0,538 \\ 0,462 \end{pmatrix}$$

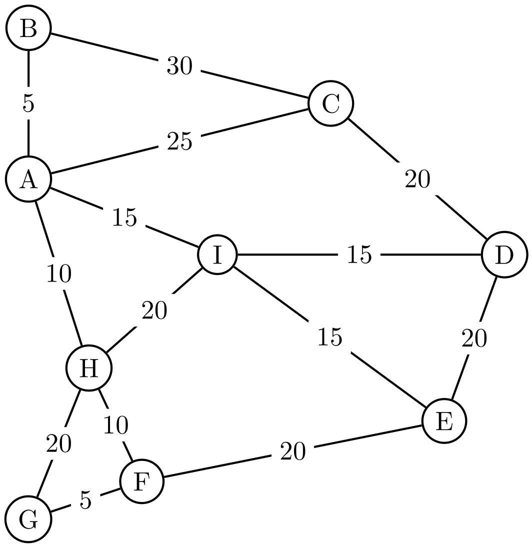
c. Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.

De la question précédente, on déduit qu'à longs termes, 53,8 % des abonnés seront chez Alpha, et 46,2 % seront chez Bravo.

Partie B

Un opérateur français doit développer son réseau de fibre optique dans la région des stations de ski notées A, B, C, D, E, F, G, H, I à l'approche de la saison touristique. À ce jour, seule la station C est reliée au réseau national de fibre optique.
Le coût des tronçons du réseau de fibre optique varie selon le relief des montagnes et des vallées.
L'opérateur a mené une étude afin de déterminer son plan de déploiement.
Dans le graphe ci-dessous :

- les sommets représentent les stations de ski ;
- les arêtes représentent les différents tronçons qu'il est possible de déployer ;
- le poids de chaque arête correspond au coût associé, en milliers d'euros.



1. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.

C	A	B	D	E	F	H	I	G
0 , C	25 , C	30 , C	20 , C	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	25 , C	30 , C	20 , C	40 , D	$+\infty$	$+\infty$	35 , D	$+\infty$
	25 , C	30 , C		40 , D	$+\infty$	35 , A	35 , D	$+\infty$
		30 , C		40 , D	$+\infty$	35 , A	35 , D	$+\infty$
				40 , D	45 , H	35 , A	35 , D	55 , H
				40 , D	45 , H		35 , D	55 , H
				40 , D	45 , H			55 , H
					45 , H			50 , F

Le chemin le plus court est CAHFG de longueur 50.

2. Déterminer, en milliers d'euros, le coût de ce tracé.

D'après l'algorithme de Dijkstra, le coût du tracé est égal à 50 milliers d'euros.

Exercice 4 (6 points) - Commun à tous les candidats

Les deux parties sont liées

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = \frac{1}{0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, on a

$$f'(x) = \frac{100\mathrm{e}^{-x}}{(0,5 + 100\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

f est de la forme $\dfrac{1}{u}$, avec $u(x) = 0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}$, donc $f' = -\dfrac{u'}{u}$, avec $u'(x) = -100\mathrm{e}^{-x}$.
On a donc bien $f'(x) = \dfrac{100\mathrm{e}^{-x}}{0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{100\mathrm{e}^{-x}\left(100\mathrm{e}^{-x} - 0,5\right)}{\left(0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}\right)^3}.$$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, l'inéquation $100\mathrm{e}^{-x} - 0,5 \geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation $x \leqslant -\ln(0,005)$.

$$\begin{aligned}
100\mathrm{e}^{-x} - 0,5 \geqslant 0 &\iff 100\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0,5\\
&\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{0,5}{100}\\
&\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0,005\\
&\iff \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \geqslant \ln(0,005)\\
&\iff -x \geqslant \ln(0,005)\\
&\iff x \leqslant -\ln(0,005)
\end{aligned}$$

b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

$f''(x)$ est du signe de $100\mathrm{e}^{-x} - 0,5$ car $100\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $0,5 + 100\mathrm{e}^{-x} > 0$ (une exponentielle étant toujours strictement positive). D'où le tableau suivant :

x	0		$-\ln(0,005)$		10
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

3. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

La dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = -\ln(0,005)$ donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse $-\ln(0,005)$.

4. En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

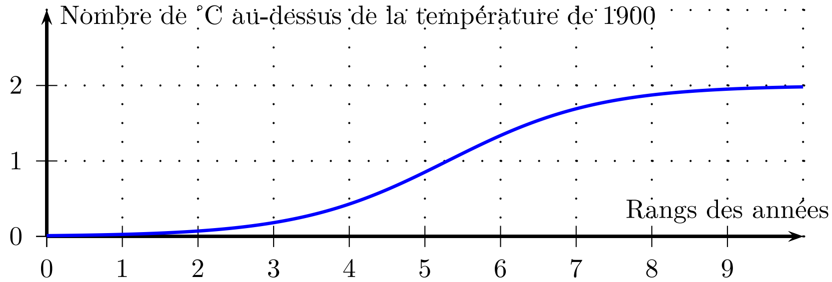
f est concave quand $f''(x) < 0$ donc sur $[-\ln(0,005)\,;10]$.

Partie B

Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universel sur le climat, appelé accord de Paris, signé par 195 pays.
Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2°C la température de l'année 1900.
Dans cette partie, on modélise, par la fonction f de la partie A, une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion.
Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 1925 correspond à 1.

Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrés Celsius au-dessus de la température de 1900.



1. a. Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.

> $f(10) = \dfrac{1}{0,5+100\mathrm{e}^{-10}} \approx 1,98$.

   b. En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

> $f(10) < 2$ et $1900+10\times 25 = 1900+250 = 2150$ donc en 2150, avec ce modèle, l'augmentation de la température sera à peu prés égale à 1,98°C. L'objectif de Paris sera donc respecté.

2. a. En utilisant la partie A, déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point I d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. Arrondir le résultat à l'unité.

> $x_I = -\ln 0,005 \approx 5,3$, $5,3\times 25 \approx 132,5$ et $1900+132,5 = 2032,5$.
> L'année du point d'inflexion est donc 2032.

   b. Calculer, pour cette année-là, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900.

> $f(-\ln 0,005) = \dfrac{1}{0,5+100\mathrm{e}^{\ln 0,005}} = \dfrac{1}{0,5+5} \approx 0,18$.
> L'augmentation de température sera égal à 0,18°C.

3. On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsius. On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f'.

   a. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la température terrestre diminuera ? Justifier la réponse.

> La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;10]$ donc $f'(x) > 0$ sur cet intervalle. Il est donc faux de dire que la température terrestre.

   b. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera ? Justifier la réponse.

> Après le point d'inflexion, les tangentes à la courbe voient leur coefficient directeur décroître, ce qui signifie en effet que la vitesse d'augmentation de température décroît.
> Il est donc vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera.

4. Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de 1,5°C la température de l'année 1900.
Déterminer l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.

$$
\begin{aligned}
f(x) \leqslant 1,5 &\iff \frac{1}{0,5+100\mathrm{e}^{-x}} \leqslant 1,5 \\
&\iff 0,5+100\mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{1,5} \\
&\iff 100\mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{1,5} - 0,5 \\
&\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{\frac{1}{1,5}-0,5}{100} \\
&\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{\frac{1}{1,5}-0,5}{100}\right) \\
&\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{\frac{1}{1,5}-0,5}{100}\right) \\
&\iff x \leqslant 6,39
\end{aligned}
$$

$6,39 \times 25 = 159,225$ et $1900 + 159,225 = 2059,225$.
C'est donc au cours de l'année 2059 que la température terrestre atteindra le seuil de 1,5°C.