Exercice 1

Dans cet exercice, tous les résultats portant sur les probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Une association de consommateurs mène une enquête sur la durée de vie d'un aspirateur. Elle note x la probabilité qu'un aspirateur de cette marque fonctionne plus de trois ans.
On pose T la durée de vie d'un tel aspirateur, exprimée en années. On admet que T suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est encore inconnue.
On note $f(x)$ la probabilité pour qu'un de ces aspirateurs tombe en panne avant cinq ans sachant qu'il a fonctionné correctement au moins trois ans, pour $x \in [0\,;1]$.

Partie A

1. Montrer que $f(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{5}{3}\ln(x)}}{x}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0,2$.
   Interprétez ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on prend $x = 0,716$.

1. Montrer que $\lambda \approx 0,111$.
2. Calculer la durée de vie moyenne d'un tel aspirateur.
   Le résultat sera arrondi au mois près.
3. Ces aspirateurs sont garantis trois ans.
   Un revendeur propose à ses clients une extension de garantie de deux ans sur ces aspirateurs.
   Un client estime qu'il est préférable de la prendre si la probabilité que l'aspirateur tombe en panne au cours des deux années qui suivent la garantie initiale est au moins égale à 0,25.
   Doit-il prendre cette extension de garantie ?

Partie C

L'association de consommateurs prélève un échantillon de 500 aspirateurs dans divers points de vente.
On note D la variable aléatoire représentant la durée de vie d'un aspirateur, exprimée en mois. On admet ici que D suit la loi normale de moyenne 108 et d'écart-type σ.

1. Déterminer la valeur de σ, arrondie à l'unité, telle que $P(D \geqslant 36) = 0,716$.

On prendra par la suite $\sigma = 254$.

2. Calculer $P(D \geqslant 60)$.
   Interpréter ce dernier résultat dans le contexte de l'exercice.
3. L'association constate que 277 aspirateurs ne sont pas tombés en panne avant la cinquième année après leur achat.
   On suppose que la probabilité qu'un aspirateur ait une durée de vie supérieure ou égale à cinq ans est égale à 0,575.
   (a) Calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % des fréquences d'aspirateurs ayant fonctionnés au moins cinq années.
   (b) Calculer la fréquence des aspirateurs ayant fonctionnés au moins cinq années sur l'échantillon pris par l'association.
   Que peut-on alors en conclure ?

Corrigé

Partie A

1. $P(T \geqslant 3) = x$ et $f(x) = \mathrm{P}_{(\mathrm{T} \leqslant 5)}\left((\mathrm{T} \geqslant 3)\right)$