

Edition 2022

mathématiques

Spécialité 1ère

Stéphane Pasquet



**Avec
programmes
Python**

Sommaire

Analyse et Algèbre

1 Le second degré	2
2 Dérivation et ses applications	60
3 Suites numériques	121
4 La fonction exponentielle	201

Géométrie

5 Trigonométrie	244
6 Produit scalaire	278
7 Applications du produit scalaire	319

Probabilités

8 Probabilités conditionnelles	370
9 Variables aléatoires	409

☞ 232 exercices entièrement corrigés

Préface

Le nouveau programme 2019 est à l'origine d'un bouleversement au lycée. Est apparue, entre autres, la spécialité Mathématiques. Ce livre vous présente un cours des différentes notions à voir en classe de 1^{re}, ainsi qu'une multitude d'exercices, tous corrigés avec le plus de pédagogie possible.

Il peut convenir :

- aux élèves désirant avoir des ressources corrigées,
- aux parents souhaitant aider leurs enfants,
- aux enseignant·e·s cherchant des sujets à proposer à leurs élèves.

Le programme est structuré autour de trois grands thèmes :

- algèbre et analyse;
- géométrie;
- probabilités.

Vous constaterez que l'accent est toutefois mis sur l'analyse. En effet, la géométrie élémentaire a été vue dans les classes antérieures; ainsi, le programme de 1^{re} se concentre essentiellement sur le nouvel outil que constitue le *produit scalaire* (pour ce qui est de la géométrie).

Le programme insiste sur le côté historique; j'ai pris la décision de ne pas trop insister dessus car de multiples sites Internet traitent cet aspect.

Mise à jour 2022 : cet ouvrage a été modifié et corrigé par rapport à la version 2021. Vous trouverez notamment quelques exercices corrigés en vidéo en plus du corrigé écrit présenté dans ce livre : un lien Youtube vous dirigera directement vers la vidéo.

À la fin de chaque chapitre, je vous propose quelques exercices « spécimens ». Ils sont tirés de la banque de données des exercices initialement prévus pour être proposés en fin d'année aux élèves souhaitant abandonner la spécialité Mathématiques en Terminale. Aujourd'hui, ils sont présentés uniquement aux élèves des écoles privées hors-contrat et aux candidats libres.

Mais ces exercices sont l'occasion de faire un bilan réaliste du niveau de l'élève : ils ne sont pas très compliqués, mais ils abordent les aspects à maîtriser en fin de 1^{re}.

Ce livre est exclusivement téléchargeable sur le site <https://www.mathweb.fr>. Malgré ma vigilance, il se peut que quelques coquilles se soient glissées dans cet ouvrage; si vous en détectez, n'hésitez pas à m'en faire part en prenant contact avec moi par le biais de ce site internet.

Enfin, je précise que ce document ne ressemble en rien à celui qui est édité en version papier aux éditions Nathan (et dont je suis l'un des co-auteurs).

Très bonne lecture!

Stéphane Pasquet.

Protection du livre : ce livre est soumis aux droits d'auteur. Vous n'avez pas le droit de le reproduire ou de reproduire son contenu à des fins de distributions (commerciales ou non). Les fichiers sources sont vendus sur <https://www.mathweb.fr> mais sont destinés uniquement à reproduire une partie de l'ouvrage (quelques énoncés) à des fins pédagogiques. Le non respect de ce dernier point entraînerait systématiquement un dépôt de plainte.

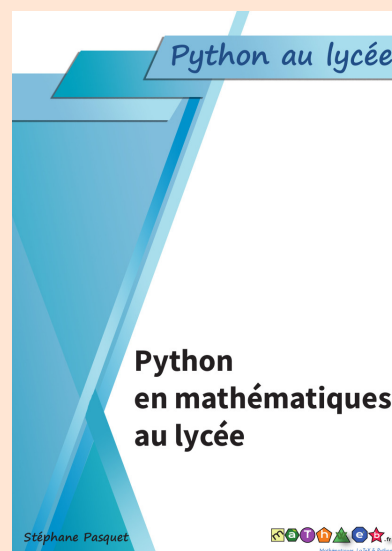
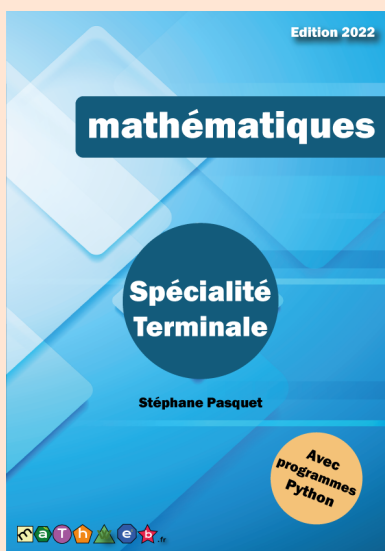
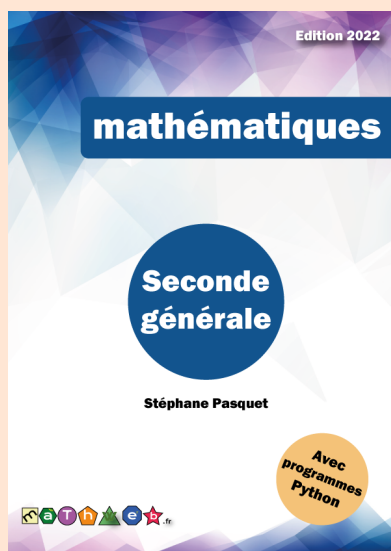
Dernière date d'édition : 20 août 2022.



Cours de mathématiques et Python par webcam.

<https://courspasquet.fr>

Aussi disponible sur <https://mathweb.fr>





Analyse

& algèbre

Fibonacci

Le second degré



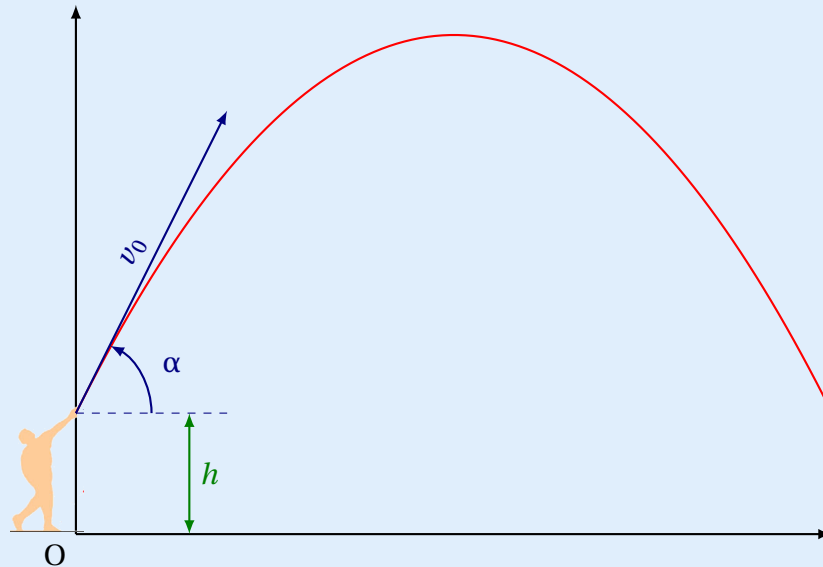
Plan du chapitre

I	Introduction et motivation	3
1	Trajectoire d'un objet lancé avec un angle	3
2	Définition	4
II	Forme canonique	4
1	Définition	4
2	Sens de variation	5
III	Racines éventuelles	5
1	Définition	5
2	Existence de racines	5
a	Résultat préliminaire	5
b	Discriminant	6
c	Trouver les racines éventuelles	6
IV	Factorisation et signe d'un polynôme de degré 2	8
1	Factorisation	8
2	Signe d'un polynôme de degré 2	9
V	Somme et produit des racines	10
1	Premiers résultats	10
2	Exploiter la somme et le produit des racines	11
VI	L'essentiel	12
	Enoncés	13
	Corrigés des exercices	26

I - Introduction et motivation

I.1 - Trajectoire d'un objet lancé avec un angle

Imaginons l'expérience suivante : on lance un objet quelconque à partir d'une hauteur h par rapport au sol, avec un angle α par rapport à l'horizontale, et ce avec une vitesse initiale v_0 . Le tout est rapporté à un repère, comme représenté ci-dessous :



Les lois de la mécanique newtonienne nous permettent de dire que l'équation de la trajectoire (en rouge) est :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x + h,$$

où $g \approx 9,81$ sur Terre.

Si on souhaite connaître :

- le point culminant de la trajectoire,
- l'endroit où va tomber l'objet,

ou avoir d'autres informations sur cette trajectoire, il serait intéressant de savoir étudier les fonctions de la même forme, c'est-à-dire de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre.

1.2 - Définition

Définition 1

On appelle **polynôme du second degré**, ou **polynôme de degré 2**, les polynômes de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

où a , b et c sont trois nombres réels.

Exemple 1

1 $P_1(x) = 3x^2 - 5x + 2$ est un polynôme de degré 2 avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.

2 $P_2(x) = -8x^2 + 4x - 7$ est un polynôme de degré 2 avec $a = -8$, $b = 4$ et $c = -7$.

II - Forme canonique

II.1 - Définition

Définition 2

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2.

On appelle **forme canonique** de P la forme suivante :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Exemple 2

Considérons le polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

Alors,

$$\alpha = -\frac{-5}{2 \times 3} = \frac{5}{12}$$

et donc :

$$\beta = P\left(\frac{5}{12}\right) = 3\left(\frac{5}{12}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{12}\right) + 2 = \frac{7}{16}.$$

Ainsi, la forme canonique de $P(x)$ est :

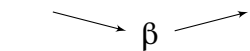
$$P(x) = 3\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{7}{16}.$$

II . 2 - Sens de variation

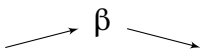
Propriété 1

Soit $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ la forme canonique d'un polynôme de degré 2.

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P(x)$			

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P(x)$			

III - Racines éventuelles

III . 1 - Définition

Définition 3

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle **racines** de $P(x)$ les nombres x_i tels que $P(x_i) = 0$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exemple 3

1 $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$. $x = 1$ est une racine de $P(x)$ car $P(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 0$.

2 $Q(x) = x^2 + x - 6$. $x = -3$ est une racine de $Q(x)$ car $Q(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$.

III . 2 - Existence de racines

III . 2 . a - Résultat préliminaire

Propriété 2

Pour tous réels x et m ,

$$x^2 + mx = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}.$$

Démonstration 1

Développons à l'aide de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} &= x^2 + 2 \times \frac{m}{2} \times x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} \\
&= x^2 + mx + \frac{\cancel{m^2}}{4} - \frac{\cancel{m^2}}{4} \\
&= x^2 + mx.
\end{aligned}$$

L'égalité est ainsi démontrée.

III • 2 • B - Discriminant

Considérons un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] && \text{d'après la propriété 2} \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] && \text{en mettant au même dénominateur les deux dernières fractions}
\end{aligned}$$

Cette dernière écriture nous pousse à considérer la définition suivante.

Définition 4

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On appelle **discriminant** de $P(x)$ le nombre Δ (lire « delta ») défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemple 4

On considère le polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1.$$

III • 2 • c - Trouver les racines éventuelles

Nous cherchons à résoudre l'équation :

$$P(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$

d'après l'écriture trouvée précédemment. Comme $a \neq 0$, cette équation est équivalente à :

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (\text{E})$$

On voit alors que trois cas sont possibles :

- **Cas où $\Delta < 0$.** L'équation (E) n'a pas de solution car un carré n'est jamais strictement négatif.
- **Cas où $\Delta = 0$.** L'équation (E) est alors équivalente à :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

soit :

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

car $Y^2 = 0 \iff Y = 0$, en posant ici $Y = x + \frac{b}{2a}$.

Ainsi,

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- **Cas où $\Delta > 0$.** L'équation (E) est alors équivalente à :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

de la forme $A^2 - B^2 = 0$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

factorisation : $(A - B)(A + B) = 0$

$$\iff x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\iff x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De cette étude, on en déduit la propriété suivante :

Propriété 3

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, de discriminant Δ .

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ n'a pas de racine.
- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ a une racine (dite « double ») :

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$, $P(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque 1

Dans le cas où $\Delta > 0$, on dit que x_1 est l'**expression conjuguée** de x_2 , et réciproquement.

Exemple 5 (nombre de racines)

1 $P_1(x) = x^2 + x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

Donc $P(x)$ n'a pas de racine.

2 $P_2(x) = 4x^2 + 4x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_2 = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0.$$

Donc $P(x)$ a une racine :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 4} = -\frac{1}{2}.$$

3 $P_3(x) = 2x^2 - 5x - 3$. Son discriminant est :

$$\Delta_3 = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0.$$

Donc $P(x)$ a deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3. \end{aligned}$$

IV - Factorisation et signe d'un polynôme de degré 2

IV.1 - Factorisation

Propriété 4 (factorisation)

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ .

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ ne se factorise pas sur \mathbb{R} .
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2$.
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines de $P(x)$.

Exemple 6

- 1 $P_1(x) = x^2 + x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

Donc $P(x)$ ne se factorise pas sur \mathbb{R} .

- 2 $P_2(x) = 4x^2 + 4x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_2 = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0.$$

Donc $P(x)$ a une racine :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 4} = -\frac{1}{2},$$

et donc :

$$P(x) = 4 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2$$

- 3 $P_3(x) = 2x^2 - 5x - 3$. $P(x)$ a deux racines distinctes : $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 3$ d'après les calculs menés dans les exemples 5.

Donc :

$$P(x) = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 3)$$

que l'on peut aussi écrire, en développant $2 \left(x + \frac{1}{2} \right)$:

$$P(x) = (2x + 1)(x - 3)$$

IV. 2 - Signe d'un polynôme de degré 2

La propriété suivante est une conséquence de la factorisation d'un polynôme de degré 2.

Propriété 5

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ .

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ est du signe de a sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$\text{sgn}(a)$	

- Si $\Delta = 0$ alors $P(x)$ est du signe de a , sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$ où il s'annule.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$

- Si $\Delta > 0$ alors $P(x)$ est du signe opposé de a entre les racines, et du signe de a ailleurs.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
P(x)	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	0	$\text{sgn}(a)$

Exemple 7

Reprenons l'exemple où $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$, dont les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 3. Alors,

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
P(x)	+	0	-	0	+

V - Somme et produit des racines

V.1 - Premiers résultats

Propriété 6

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, dont le discriminant est supposé strictement positif.

On note alors x_1 et x_2 les deux racines de $P(x)$.

Alors,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration 2

D'après la propriété 4, si $\Delta > 0$,

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

En développant le dernier membre de ces égalités, on obtient :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)$$

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Cette dernière égalité étant vraie pour toutes les valeurs de x , cela signifie que les coefficients sont égaux entre eux :

$$b = -a(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad c = ax_1x_2,$$

c'est-à-dire :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

V. 2 - Exploiter la somme et le produit des racines

Propriété 7 (somme et produit des racines)

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels.

Posons :

$$S = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2.$$

Alors, x_1 et x_2 sont les racines du polynôme :

$$x^2 - Sx + P.$$

Démonstration 3

Posons $f(x) = x^2 - Sx + P$, avec $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(x_1) &= x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 x_2 \\ &= x_1^2 - x_1^2 - x_2 x_1 + x_1 x_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc x_1 est une racine de $f(x)$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(x_2) &= x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 x_2 \\ &= x_2^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc x_2 est une racine de $f(x)$.

Remarque 2 (pour les futur.e.s expert.e.s)

Si on pose $S(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ et $P(x_1, x_2) = x_1 x_2$, alors remarquez que :

$$S(x_1, x_2) = S(x_2, x_1) \quad \text{et} \quad P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1).$$

On dit ici que les fonctions S et P sont **symétriques** en x_1 et x_2 .

Exemple 8 (trouver les dimensions d'un rectangle)

Un champ rectangulaire a une aire égale à 7 560 m² et un périmètre de 354 m.
Quelles sont les dimensions de ce champ ?

Notons x_1 et x_2 les dimensions de ce champ.

Son aire vaut 7 560 donc $x_1 x_2 = 7 560$.

Son périmètre vaut 354 donc $2(x_1 + x_2) = 354$, soit $x_1 + x_2 = 177$.

D'après la propriété 7, x_1 et x_2 sont les racines du polynôme :

$$x^2 - 177x + 7560$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = (-177)^2 - 4 \times 7560 = 1089.$$

Ainsi,

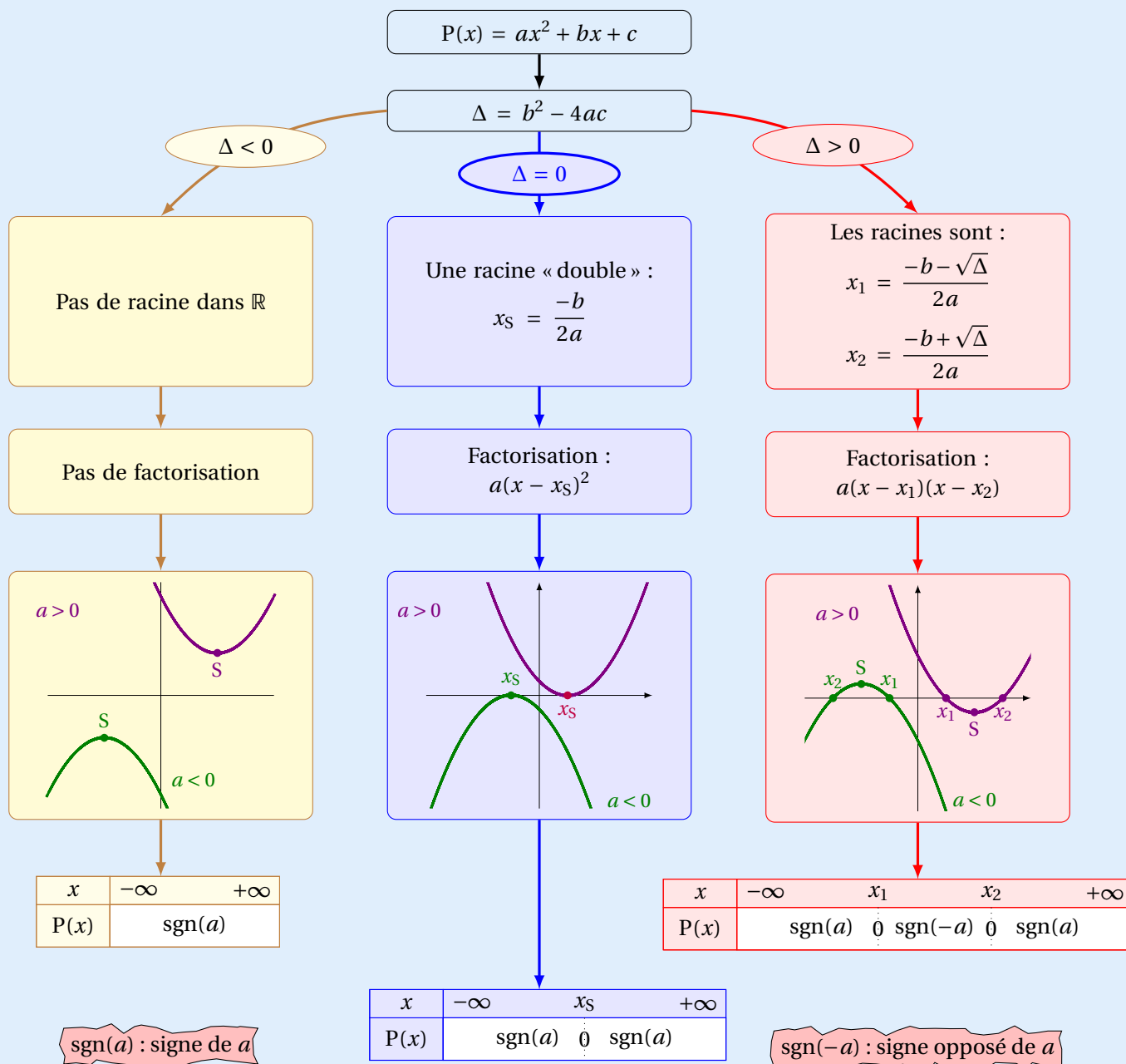
$$x_1 = \frac{177 - \sqrt{1089}}{2} = 72$$

et

$$x_1 = \frac{177 + \sqrt{1089}}{2} = 105.$$

Les dimensions du champ sont donc 105 m et 72 m.

VI - L'essentiel



Calcul de racines et équations

Exercice 1.1 (discriminant et racines)

Pour chacun des trinômes suivants, calculer le discriminant et ses éventuelles racines.

1 $x^2 - 2x + 1$

4 $x^2 + x + 1$

7 $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$

2 $x^2 - 3x + 2$

5 $3x^2 - 5x + 1$

8 $3x^2 - 8x + 2$

3 $-x^2 + 3x - 2$

6 $-2x^2 - 5x + 3$

9 $-5x^2 + 4x + 3$

Solution page 26

Exercice 1.2 (équations se ramenant au second degré)

Résoudre les équations suivantes :

1 $\sqrt{x+1} = 2x - 3$

2 $\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5$

3 $\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$

Solution page 27

Exercice 1.3 (équations avec changement de variable)

Résoudre les équations suivantes :

1 $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$

3 $\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$

2 $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$

4 $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 2 = 0$

Solution page 29

Exercice 1.4 (pour les futur.e.s expert.e.s)

On souhaite résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) suivante :

$$4x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$$

1 On pose $\Delta = 20 + 8\sqrt{6}$ et on suppose que $\Delta = (a + b\sqrt{6})^2$.

a. Montrer que $a^2 + 6b^2 = 20$ et $ab = 4$.

b. En déduire que $a^4 - 20a^2 + 96 = 0$.

c. Trouver alors a et b et en déduire $\sqrt{\Delta}$.

2 En déduire les solutions de (E).

Solution page 30

Avec paramètre : un peu de recherche

Exercice 1.5

On considère le trinôme $x^2 + mx + p$, où m et p sont deux réels.

À quelles conditions sur m et p ce trinôme admet au moins une racine ?

Solution page 32

Exercice 1.6

Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, le polynôme :

$$P(x) = (k+1)x^2 + 2kx + (k-1)$$

admet toujours deux racines distinctes.

Solution page 32

Exercice 1.7

On considère le trinôme suivant :

$$(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3).$$

Pour quelles valeurs de m a-t-il une racine double ?

Calculer alors cette racine.

Solution page 32

Exercice 1.8

On considère l'équation suivante :

$$(4m+1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m admet-elle des solutions distinctes ?

Solution page 33

Exercice 1.9

On considère l'équation :

$$(2m+1)x^2 + (m-1)x + (m+4)(m-1) = 0. \quad (E_m)$$

- 1** Pour $m = 0$, donner les solutions de (E_0) .
- 2** Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle une unique solution ?
- 3** Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle $x = 1$ pour solution ?

Solution page 33

Factorisations

Exercice 1.10 (polynôme de degré 3)

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$.

- 1 Vérifier que $x = -2$ est une racine de P .
- 2 Factoriser alors $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x + 2)Q(x)$, où Q est un trinôme de degré 2.
- 3 Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Solution page 35

Exercice 1.11 (polynôme de degré 4)

On considère le polynôme $P(x) = 10x^4 - 29x^3 - 34x^2 + 107x - 42$.

- 1 Calculer $P(3)$ et $P(-2)$.
- 2 En déduire que $P(x) = A(x) \times B(x)$, où A et B sont deux polynômes de degré 2 que l'on déterminera.
- 3 En déduire les racines de P .

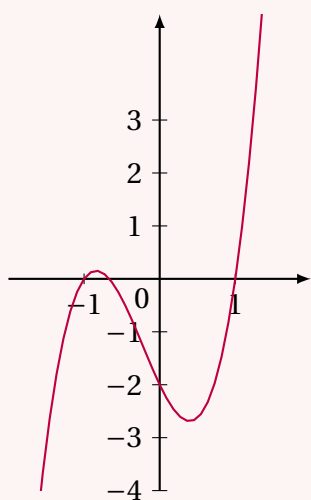
Solution page 36

Exercice 1.12 (trouver la bonne courbe)

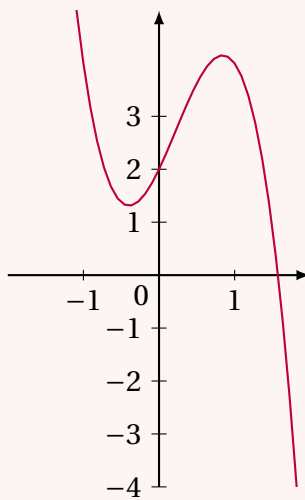
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2.$$

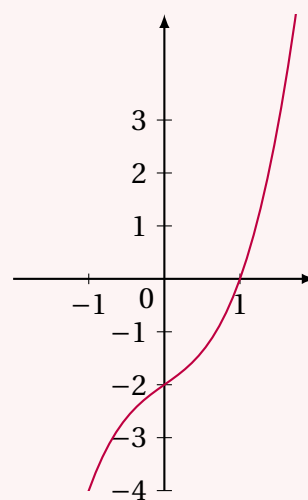
- 1 Montrer que $f(1) = 0$.
- 2 En déduire une factorisation de $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
- 3 En déduire la courbe représentative de f parmi les trois proposées ci-dessous.



a



b



c

Solution page 36

Inéquations

Exercice 1.13 (résolution d'inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $x^2 + x + 1 < 0$

2 $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$

3 $-x^2 + 3x - 2 > 0$

4 $-5x^2 - 9x + 3 \leq 0$

5 $3x^2 - 7x + 10 \geq 0$

6 $4x^2 - 20x + 25 > 0$

7 $\frac{1-4x}{x^2-3x+2} \geq 0$

8 $(2x-3)(-2x^2+5x+3) < 0$

Solution page 37

Exercice 1.14 (inéquation-quotient)

Résoudre l'inéquation : $\frac{7x-10}{5x-17} \geq \frac{25(x+2)}{10x^2-49x+51}$.

Solution page 39

Exercice 1.15 (inéquations-quotients, le retour)

Résoudre les inéquations suivantes :

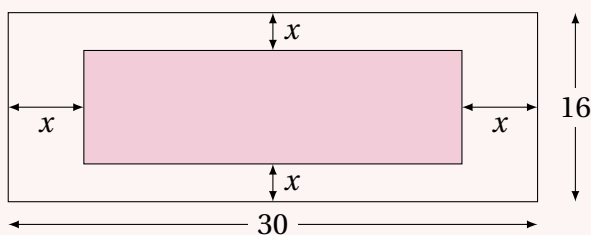
1 $\frac{5x^2-3x-2}{x^2+x+1} < 0$

2 $\frac{-3x^2-5x+2}{x^2+x-6} < 0$

Solution page 40

Exercices de recherche

Exercice 1.16 (deux aires égales)



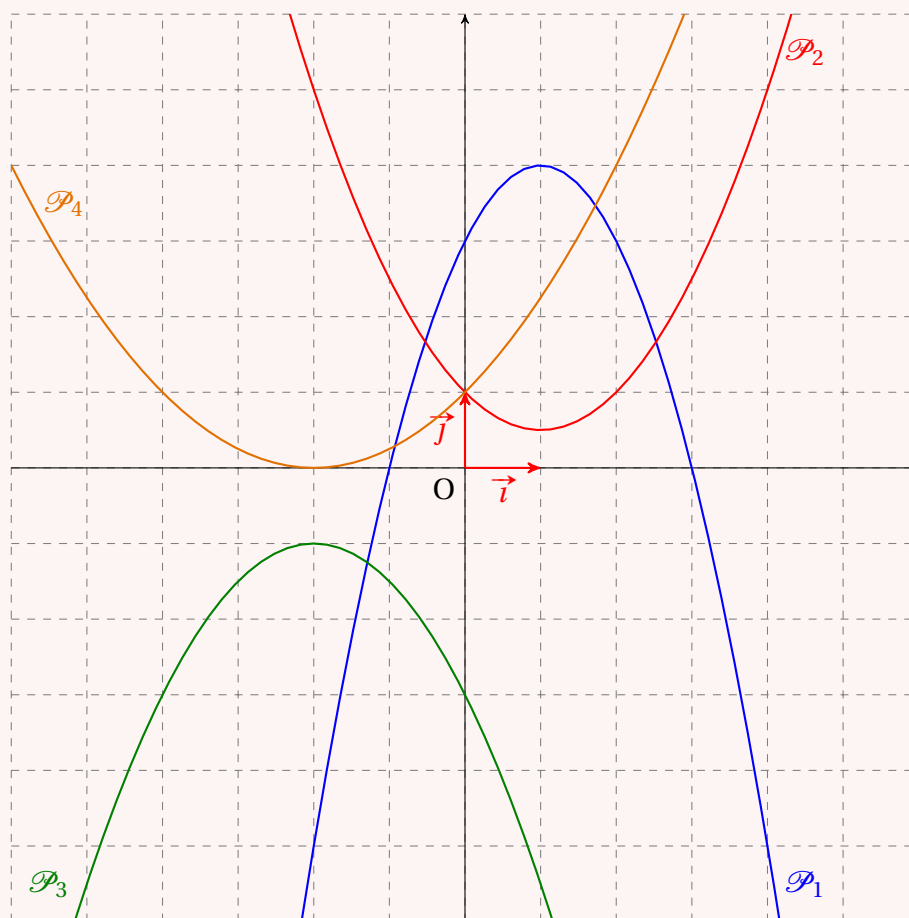
Déterminer x de sorte que l'aire de la partie blanche de la figure ci-dessus soit égale à celle du rectangle plein.

Solution page 42

Exercice 1.17 (à chaque courbe son polynôme)

Nous avons tracé dans le repère ci-dessous des paraboles.

Retrouver les trinômes (sous la forme développée) correspondant à chacune d'elles.



Solution page 42

Exercice 1.18 (trouver deux nombres)

Deux entiers naturels ont pour différence 7, et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43. Trouver ces deux nombres.

Solution page 44

Exercice 1.19 (réunion de Noël)

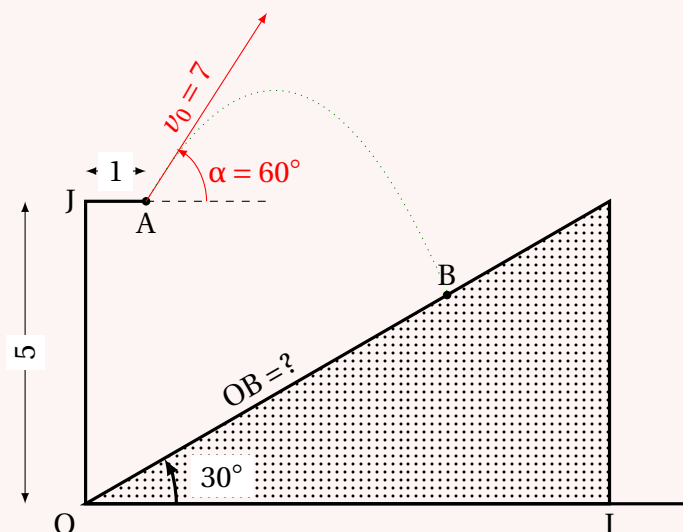
Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël. Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.

Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il?

Solution page 44

Exercice 1.20 (le saut)

Une structure est schématisée ci-dessous. Une personne se met au point A et doit sauter afin d'arriver au point B. Toutes les unités sont exprimées en mètres.



D'après les lois de la physique, si on se place dans le repère d'axes (OI) et (OJ) d'unités 1, la trajectoire de la personne est donnée par l'équation suivante :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}(x-1)^2 + \tan(\alpha)(x-1) + y_0$$

où :

- g est l'accélération de la pesanteur. Sur Terre, on considère que $g \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- v_0 est la vitesse initiale à laquelle se lance la personne ;
- α est l'angle que forme la tangente à la parabole avec l'horizontale ;
- y_0 est la hauteur à partir de laquelle la personne se lance.

On cherche à déterminer la longueur OB.

1 Montrez que l'équation de la parabole représentant la trajectoire est :

$$y = \frac{1}{49} \left[-20x^2 + (40 + 49\sqrt{3})x + 225 - 49\sqrt{3} \right].$$

2 Justifiez que l'équation de la droite (OB) est :

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

3 Montrez que l'abscisse du point B vérifie l'équation :

$$-20\sqrt{3}x^2 + (40\sqrt{3} + 98)x + 225\sqrt{3} - 147 = 0$$

4 En déduire une valeur approchée de l'abscisse de B, puis une valeur approchée de la longueur OB à 10^{-2} près.

Solution page 45

Exercice 1.21 (le joueur de tennis)

Un joueur de tennis se trouve à 9 m du filet et renvoie la balle à $h = 50$ cm du sol avec un angle de $\alpha = 20^\circ$ avec l'horizontale. En fonction de sa position délicate, on estime sa vitesse de frappe à $v_0 = 20$ km/h.

Sachant que la hauteur du filet est 91,4 cm et que la trajectoire de la balle est donnée par la formule :

$$y = -\frac{1}{2} \times \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \tan \alpha + h,$$

où :

- $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,
- v_0 est la vitesse initiale (exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$),
- α est l'angle de la trajectoire avec l'horizontale,
- h est la hauteur initiale (exprimée en mètre),

La balle dépassera-t-elle le filet?

Si tel n'est pas le cas, quelle vitesse aurait-il fallu donner à la balle en la frappant?

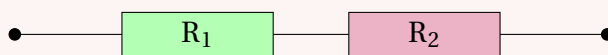
Solution page 46

Exercice 1.22 (un peu de sciences physiques)

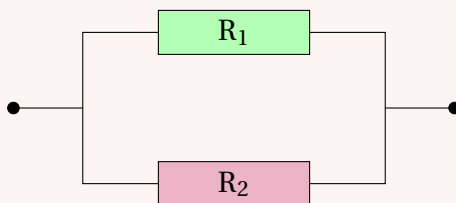
On dispose de deux conducteurs de résistances R_1 et R_2 .

Si on les monte en série (figure 1), on obtient un dipôle ohmique de résistance $r = R_1 + R_2$.

Si on les monte en parallèle (figure 2), on obtient un dipôle ohmique de résistance R telle que $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.



En série – Figure 1



En parallèle – Figure 2

1 On sait que $r = 10 \Omega$ et $R = 2 \Omega$.

Trouvez R_1 et R_2 .

2 Reprenez la question précédente avec $r = 4 \Omega$ et $R = 1 \Omega$.

3 On connaît r et R .

Montrez que l'on peut alors calculer R_1 et R_2 à la seule condition que $r \geq 4R$.

Solution page 47

Exercice 1.23 (vers le nombre d'or)

- 1 Résoudre l'équation $x^2 = 1 + x$.
On notera φ la solution positive.
- 2 Que vaut $N = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$?

Solution page 48

Exercice 1.24 (pour les futur.e.s expert.e.s)

On pose :

$$A = \sqrt{33 + 20\sqrt{2}}.$$

On cherche à écrire A sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont deux entiers relatifs.

- 1 Développer $(a + b\sqrt{2})^2$.
- 2 Montrer alors que :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 33 \\ ab = 10 \end{cases}$$

- 3 Calculer alors a et b .
- 4 S'inspirer de ce qui vient d'être fait pour trouver une formule permettant de calculer a et b tels que :

$$\sqrt{p + q\sqrt{n}} = a + b\sqrt{n} \quad ; \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Solution page 48

Exercice 1.25 (famille de paraboles)

On considère une famille de paraboles \mathcal{P}_k d'équation $y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 1$, où $k \in \mathbb{N}$.

On note S_k le sommet de \mathcal{P}_k .

Montrer que tous les S_k sont alignés.

Solution page 50

Exercice 1.26 (un triangle équilatéral)

On considère un triangle de côtés de mesures respectives a , b et c telles que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

Montrer que ce triangle est équilatéral.

Indication : on pourra partir de l'égalité donnée, puis s'en inspirer pour poser une fonction trinôme de degré 2 d'inconnue a par exemple.

Solution page 51

Exercice 1.27 (trouver deux coefficients)

L'équation $x^2 - sx + t = 0$ admet deux solutions notées a et b .

De plus, l'équation :

$$x^2 - s^2x + st = 0$$

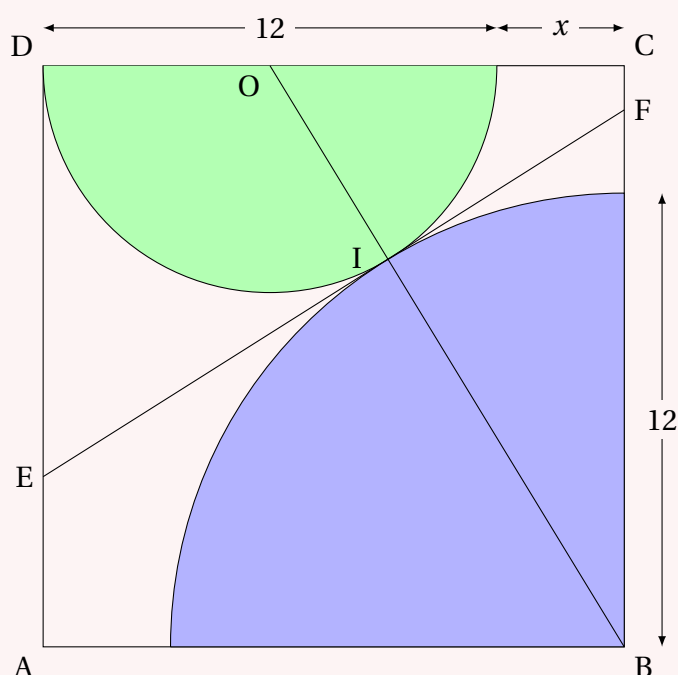
admet pour solutions les nombres $a + 1$ et $b + 1$.

Que vaut s et t ?

Solution page 51

Exercice 1.28

On considère un carré dans lequel se trouvent un demi-disque (vert) et un quart de disque (bleu) tangents, comme indiqués sur la figure ci-dessous :



(EF) est tangente aux deux parties de disques. O est le centre du demi-disque vert. On note I le point d'intersection de (OB) et (EF).

Déterminer l'aire de ABCD.

Solution page 52

Exercice 1.29 (intersection)

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = mx - 4$, où m est un nombre réel.

Déterminer les valeurs de m telles que \mathcal{D} et \mathcal{C} aient exactement deux points d'intersection.

Solution page 53

Exercice 1.30

Soient a et b deux nombres réels positifs tels que :

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 183 \\ b\sqrt{a} + a\sqrt{b} = 182 \end{cases}$$

L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b .

Posons $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$.

- 1 Justifier que $\begin{cases} x^3 + y^3 = 183 \\ xy(x+y) = 182 \end{cases}$
- 2 Donner la forme développée de $(x+y)^3$, puis en déduire que $x+y=9$ et que $xy = \frac{182}{9}$.
- 3 En déduire les valeurs de x et y , puis de a et b .

Solution page 54

Exercice 1.31 (pour les futur.e.s expert.e.s)

On souhaite résoudre dans \mathbb{R} l'équation : (E) : $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.

On pose alors $t = x - 8$ et on admet l'égalité suivante : $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

On précise que $\sqrt[3]{x}$ est le nombre réel y tel que $y^3 = x$.

- 1 Montrer l'équivalence suivante : (E) $\iff \sqrt[3]{t-8} + \sqrt[3]{t+8} = \sqrt[3]{t}$.
- 2 Montrer alors l'équivalence suivante : (E) $\iff 3\sqrt[3]{t(t^2-64)} = -t$.
- 3 En déduire l'équivalence suivante : (E) $\iff 7x^2 - 112x + 16 = 0$.
- 4 En déduire les solutions de (E).

Solution page 55

Python

Exercice 1.32 (interpréter un programme)

Voici un programme Python :

```
1 F = []
2 for x in range(-10,11):
3     F.append(-3*x*x+2*x+7)
4 print(F)
```

Code Python 1-1

- 1 Qu'affiche ce programme?
- 2 Compléter ce programme sans le modifier afin d'afficher le tableau de valeurs de la fonction $g : x \mapsto f(x-5)$ sur l'intervalle $[-10; 10]$ à partir des valeurs de $f(x)$.

Solution page 56

Exercice 1.33 (compléter un programme)

On considère la fonction Python suivante :

Code Python 1-3

```
1 def racines(a,b,c):
2     delta = ...
3     if ... : return None
4     elif ... : return -b / (2*a)
5     else:
6         return (-b-delta**0.5)/(2*a) , (-b+delta**0.5)/(2*a)
```

Compléter cette fonction pour qu'elle renvoie les éventuelles racines d'un polynôme $ax^2 + bx + c$.

Solution page 57

Exercices Faire le point sur ce chapitre

Ce QCM est composé de questions issues de sujets de la banque de données de l'Éducation Nationale. Vous devez impérativement maîtriser ce genre de questions pour poursuivre l'enseignement de spécialité sereinement.

Exercice 1.34 (QCM)

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Les questions sont indépendantes.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

- 1** Soit a , b et c trois réels tels que $a \neq 0$ et soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

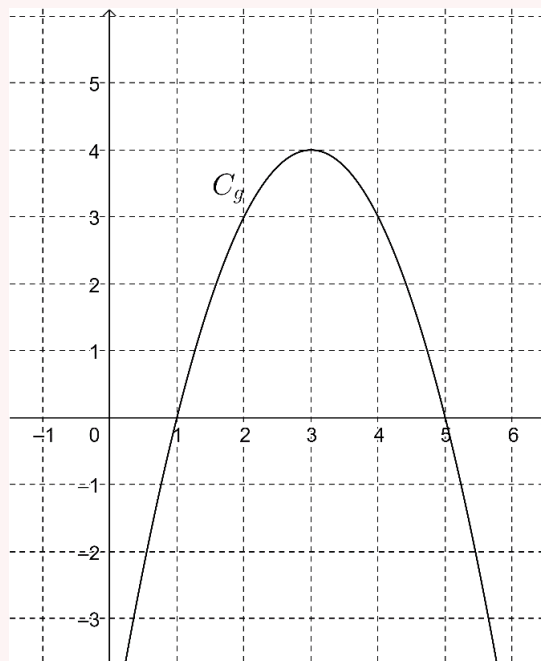
$$g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soit Δ son discriminant.

La représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.

Alors on peut affirmer que :

- a. $a > 0$ et $\Delta > 0$.
- b. $a > 0$ et $\Delta < 0$.
- c. $a < 0$ et $\Delta > 0$.
- d. $a < 0$ et $\Delta < 0$.



2 Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0,5(x-2)^2 - 8$?

a. $0,5x^2 - 2x - 6$.

c. $0,5(x+10)(x-6)$.

b. $0,5(x-6)(x+2)$.

d. $0,5(x-10)(x+6)$.

3 L'équation $2x^4 - 5x^2 + 3 = x^2 - 1$:

a. n'admet aucune solution réelle.

c. admet deux solutions distinctes.

b. admet une unique solution.

d. admet quatre solutions distinctes.

4 L'équation $3x^2 + y^2 + 9x + 6 = y^2$ n'est pas équivalente à l'équation :

a. $x^2 + 3x + 2 = 0$.

c. $2y^2 + 3x^2 + 9x + 6 = 0$.

b. $(x+1)(x+2) = 0$.

d. $3x^2 + 9x + 6 = 0$.

5 L'ensemble des solutions de l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : -x^2 - 2x + 8 > 0$ est :

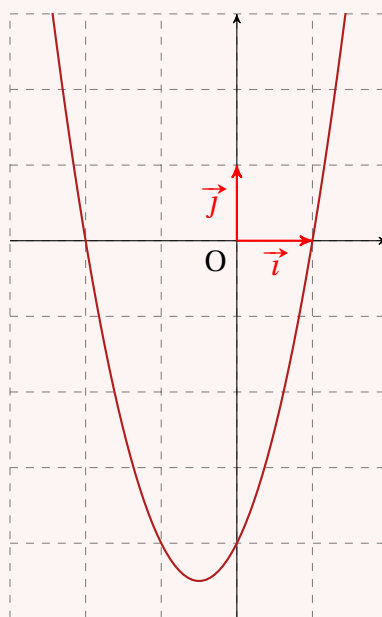
a. $[-4; 2]$.

c. $] -\infty; -4] \cup]2; +\infty[$.

b. $] -4; 2[$.

d. $\{-4; 2\}$.

6 Soit f une fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



Pour tout réel x , une expression de $f(x)$ est :

a. $x^2 + x - 2$.

b. $-x^2 - 4$.

c. $2x^2 + 2x - 4$.

d. $-3x^2 - 3x + 6$.

7 Combien y-a-t-il de fonctions polynômes du second degré qui s'annulent en 1 et en 3?

a. 0.

b. 1 seule.

c. 2.

d. Une infinité.

8 Dans un repère orthonormé, la parabole d'équation $y = 3x^2 - 9x + 5$ a pour sommet le point S et pour axe de symétrie la droite (d) . Les coordonnées de S et l'équation de (d) sont :

a. $S\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ et $(d) : x = \frac{3}{2}$.

c. $S(3;5)$ et $(d) : x = 3$.

b. $S\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ et $(d) : y = -\frac{7}{4}$.

d. $S(3;5)$ et $(d) : y = 5$.

9 Une fonction polynôme du second degré :

a. est nécessairement de signe constant sur \mathbb{R} .

b. n'est jamais de signe constant sur \mathbb{R} .

c. est nécessairement positive sur \mathbb{R} .

d. peut être ou non de signe constant sur \mathbb{R} .

10 Dans le plan muni d'un repère, les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto 15x^2 + 10x - 1$ et $x \mapsto 19x^2 - 22x + 10$ ont :

a. aucun point d'intersection.

c. deux points d'intersection.

b. un seul point d'intersection.

d. quatre points d'intersection.

Solution page 57

Remarque 5

Le second degré est un outil qui intervient dans de nombreux thèmes, que ce soit en mathématiques comme dans d'autres disciplines (sciences physiques, S.V.T. ou économie par exemple).

Vous trouverez donc des questions sur le second degré dans des QCM ou dans des exercices portant sur d'autres notions que vous verrez cette année.

Corrigé de l'exercice 1.1 page 13

1 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ (c'est une identité remarquable).

Par conséquent, $\Delta = 0$ et sa racine double est $\alpha = 1$.

2 $x^2 - 3x + 2$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$

3 $-x^2 + 3x - 2$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 1.$$

4 $x^2 + x + 1$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$

$\Delta < 0$ donc le trinôme n'a aucune racine.

5 $3x^2 - 5x + 1$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 25 - 12 = 13.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 3} = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}.$$

6 $-2x^2 - 5x + 3$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \frac{5 - 7}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5 + 7}{-4} = -3.$$

7 $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 16 = 16 - 16 = 0.$$

Donc le trinôme a une racine double :

$$\alpha = -\frac{-4}{2 \times \frac{1}{4}} = 8.$$

8 $3x^2 - 8x + 2.$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 64 - 24 = 40.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-(-8) - \sqrt{40}}{2 \times 3} = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{4 + \sqrt{10}}{6}.$$

9 $-5x^2 + 4x + 3.$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-5) \times 3 = 16 + 60 = 76.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-4 - \sqrt{76}}{2 \times (-5)} = \frac{-4 - 2\sqrt{19}}{-10} = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2 - \sqrt{19}}{5}.$$

Corrigé de l'exercice 1.2 page 13

1 Le domaine de validité de l'équation :

$$\sqrt{x+1} = 2x-3$$

est l'ensemble des valeurs de x telles que :

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}$$

soit :

$$x \geq \frac{3}{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} = 2x-3 &\iff x+1 = (2x-3)^2 \\ &\iff x+1 = 4x^2 - 12x + 9 \\ &\iff 4x^2 - 13x + 8 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $4x^2 - 13x + 8$ est :

$$\Delta = 169 - 128 = 41.$$

Les solutions de l'équation sont donc potentiellement :

$$\alpha = \frac{13 - \sqrt{41}}{8} \approx 0,82 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{13 + \sqrt{41}}{8} \approx 2,43.$$

Comme $\alpha < \frac{3}{2}$ et $\beta \geq \frac{3}{2}$, l'ensemble solution de l'équation est :

$$S = \left\{ \frac{13 + \sqrt{41}}{8} \right\}$$

2 Le domaine de validité de l'équation :

$$\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5$$

est l'ensemble des valeurs de x telles que :

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ 2x - 5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{soit : } x \geq 2\sqrt{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5 &\iff x^2 - 8 = (2x - 5)^2 \\ &\iff x^2 - 8 = 4x^2 - 20x + 25 \\ &\iff 3x^2 - 20x + 33 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $3x^2 - 20x + 33$ est : $\Delta = 400 - 396 = 4$, donc il y a deux solutions potentielles :

$$\alpha = \frac{20 - 2}{6} = 3 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{11}{3}.$$

$\alpha > 2\sqrt{2}$ et $\beta > 2\sqrt{2}$ donc l'ensemble solution de l'équation est :

$$S = \left\{ 3; \frac{11}{3} \right\}$$

3 Le domaine de validité de l'équation :

$$\sqrt{2x - 1} = 1 - 2x$$

est l'ensemble des valeurs de x telles que :

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } x = \frac{1}{2}.$$

Donc nul besoin d'aller plus loin; l'ensemble solution de l'équation $\sqrt{2x - 1} = 1 - 2x$ est :

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Corrigé de l'exercice 1.3 page 13

1 $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$. On pose $X = \sqrt{x}$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$X^2 - 5X + 4 = 0,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 25 - 16 = 9.$$

Donc les solutions de l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Les solutions de l'équation $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ doivent donc vérifier :

$$\sqrt{x_1} = 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_2} = 4,$$

d'où :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 16.$$

D'où :

$$S = \{1; 16\}$$

2 $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$. On pose $X = x^2$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$-X^2 + 3X - 2 = 0,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 9 - 8 = 1.$$

Les solutions de l'équation $-X^2 + 3X - 2 = 0$ sont donc :

$$X_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1.$$

Les solutions de l'équation $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ sont donc x_1 et x_2 tels que :

$$x_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_2^2 = 2,$$

soit :

$$x_1 = 1 \text{ ou } x_1 = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{2} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{2}.$$

L'ensemble solution de l'équation $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ est donc :

$$S = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$$

3 $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 2 = 0$. On pose $X = x^2 - 3x + 1$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

dont les solutions évidentes sont $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$.

- $X_1 = 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 1 \iff x(x - 3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3.$

- $X_2 = 2 \iff x^2 - 3x + 1 = 2 \iff x^2 - 3x - 1 = 0$. Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = 9 + 4 = 13$ donc les solutions sont :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 2 = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 0; 3; \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

- 4** $\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$. On pose $X = \frac{1}{x}$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$6X^2 + X - 2 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 49 = 7^2.$$

Les solutions de l'équation $6X^2 + X - 2 = 0$ sont donc :

$$X_1 = \frac{-1 - 7}{2 \times 6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + 7}{12} = \frac{1}{2}.$$

- $X_1 = -\frac{2}{3}$ et $X_1 = \frac{1}{x_1}$ donc $x_1 = \frac{1}{X_1} = -\frac{3}{2}$;
- $X_2 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{1}{x_2}$ donc $x_2 = \frac{1}{X_2} = 2$.

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2}; 2 \right\}$$

Corrigé de l'exercice 1.4 page 13

1 a. $\Delta = 20 + 8\sqrt{6}$

$$\iff (a + b\sqrt{6})^2 = 20 + 8\sqrt{6}$$

$$\iff a^2 + 2ab\sqrt{6} + 6b^2 = 20 + 8\sqrt{6}$$

$$\iff a^2 + 6b^2 + 2ab\sqrt{6} = 20 + 8\sqrt{6}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 + 6b^2 = 20 \\ 2ab = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 + 6b^2 = 20 \\ ab = 4 \end{cases}$$

b. $ab = 4$ donc $b = \frac{4}{a}$. La première équation donne alors :

$$\begin{aligned} a^2 + 6b^2 = 20 &\iff a^2 + \left(\frac{4}{a}\right)^2 = 20 \\ &\iff a^2 + 6 \times \frac{16}{a^2} = 20 \\ &\iff a^4 + 96 = 20a^2 \\ &\iff \boxed{a^4 - 20a^2 + 96 = 0} \end{aligned}$$

c. On pose $A = a^2$; l'équation $a^4 - 20a^2 + 96 = 0$ est équivalente à :

$$A^2 - 20A + 96 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta' = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 96 = 16 = 4^2.$$

L'équation $A^2 - 20A + 96 = 0$ admet donc deux solutions :

$$A_1 = \frac{20-4}{2} = 8 = a_1^2 \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{20+4}{2} = 12 = a_2^2.$$

Ainsi, $a_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ou $a_1 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$, et $a_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ou $a_2 = -2\sqrt{3}$.

Faisons le choix de prendre $a = 2\sqrt{2}$; alors $b = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Dans ce cas, $a + b\sqrt{6} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Or, $[2(\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 = 4(2 + 3 + 2\sqrt{6}) = 20 + 8\sqrt{6} = \Delta$.

Ainsi, $\boxed{\sqrt{\Delta} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$.

2 Le discriminant de $4x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6}$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= [2(\sqrt{3} - \sqrt{2})]^2 - 4 \times 4 \times (-\sqrt{6}) \\ &= 4(3 + 2 - 2\sqrt{6}) + 16\sqrt{6} \\ &= \boxed{20 + 8\sqrt{16}}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 4} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 4} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}}$$

Corrigé de l'exercice 1.5 page 14

On sait qu'un trinôme admet au moins une racine lorsque son discriminant Δ est positif ou nul.

Ici,

$$\Delta = m^2 - 4p.$$

Il faut donc que :

$$m^2 \geq 4p$$

pour que le trinôme ait au moins une racine.

Corrigé de l'exercice 1.6 page 14

Le discriminant de :

$$P(x) = (k+1)x^2 + 2kx + (k-1)$$

est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (2k)^2 - 4 \times (k+1) \times (k-1) \\ &= 4k^2 - 4(k^2 - 1) \\ &= 4 > 0.\end{aligned}$$

Donc P admet toujours deux racines, quelle que soit la valeur de k .

Corrigé de l'exercice 1.7 page 14

📺 Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo en cliquant ici.

Le trinôme admet une racine double si $\Delta = 0$. Or,

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= [2(3m+1)]^2 - 4 \times (m+3) \times (m+3) \\ &= 4(3m+1)^2 - 4(m+3)^2 \\ &= 4 \left[\underbrace{(3m+1)^2}_{=A^2} - \underbrace{(m+3)^2}_{=B^2} \right] & A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \\ &= 4[(3m+1) - (m+3)][(3m+1) + (m+3)] \\ &= 4(3m+1-m-3)(3m+1+m+3) \\ &= 4(2m-2)(4m+4)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\iff 4(2m-2)(4m+4) = 0 \\ &\iff 2m-2 = 0 \quad \text{ou} \quad 4m+4 = 0 \quad (\text{théorème du produit nul}) \\ &\iff 2m = 2 \quad \text{ou} \quad 4m = -4 \\ &\iff m = 1 \quad \text{ou} \quad m = -1.\end{aligned}$$

Par conséquent, le trinôme admet une racine double pour $m = 1$ ou $m = -1$.

Dans un tel cas, la racine double est égale à :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2(3m+1)}{2(m+3)} = -\frac{3m+1}{m+3}.$$

Ainsi,

- pour $m = 1$, la racine double vaut $\alpha = \frac{3 \times 1 + 1}{1 + 3} = -1$,
- pour $m = -1$, la racine double vaut $\alpha = -\frac{3 \times (-1) + 1}{-1 + 3} = 1$.

Corrigé de l'exercice 1.8 page 14

L'équation admet deux solutions distinctes uniquement si $\Delta > 0$. Or,

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4m)^2 - 4 \times (4m+1) \times (m-3) \\ &= 16m^2 - 4(4m+1)(m-3) \\ &= 16m^2 - 4(4m^2 - 12m + m - 3) \\ &= 16m^2 - 4(4m^2 - 11m - 3) \\ &= 16m^2 - 16m^2 + 44m + 12 \\ &= 44m + 12.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\iff 44m + 12 > 0 \\ &\iff 44m > -12 \\ &\iff m > \frac{-12}{44} \\ &\iff m > -\frac{3}{11}.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation admet deux solutions distinctes pour $m > -\frac{3}{11}$.

Corrigé de l'exercice 1.9 page 14

1 Pour $m = 0$, on a :

$$(E_0) \quad : \quad x^2 - x - 4 = 0$$

Le discriminant du polynôme $x^2 - x - 4$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4) \\ &= 1 + 16 \\ &= 17.\end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions à l'équation (E_0) qui sont :

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

L'ensemble solution de (E_0) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

- 2** L'équation (E_m) admet une unique solution lorsque le discriminant du membre de gauche est égal à 0. Ce discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (m-1)^2 - 4(2m+1)(m+4)(m-1) \\ &= (m-1)[(m-1) - 4(2m+1)(m+4)] \\ &= (m-1)[m-1 - 4(2m^2 + 8m + m + 4)] \\ &= (m-1)(m-1 - 8m^2 - 36m - 16) \\ &= (m-1)(-8m^2 - 35m - 17). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\iff m-1 = 0 \quad \text{ou} \quad -8m^2 - 35m - 17 = 0 \\ &\iff m = 1 \quad \text{ou} \quad 8m^2 + 35m + 17 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $8m^2 + 35m + 17$ est :

$$\delta = 35^2 - 4 \times 8 \times 17 = 681,$$

donc ce polynôme admet deux racines :

$$m_1 = \frac{-35 - \sqrt{681}}{16} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-35 + \sqrt{681}}{16}.$$

Ainsi, l'équation (E_m) admet une unique solution pour trois valeurs de m :

$$m = 1 \quad ; \quad m = \frac{-35 - \sqrt{681}}{16} \quad ; \quad m = \frac{-35 + \sqrt{681}}{16}.$$

- 3** (E_m) admet 1 pour solution si, en remplaçant x par 1 dans l'équation, l'égalité est vérifiée :

$$\begin{aligned} 1 \text{ est solution de } (E_m) &\iff (2m+1) \times 1^2 + (m-1) \times 1 + (m+4)(m-1) = 0 \\ &\iff 2m+1 + m-1 + m^2 - m + 4m - 4 = 0 \\ &\iff m^2 + 6m - 4 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $m^2 + 6m - 4$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \times 1 \times (-4) \\ &= 36 + 16 \\ &= 52.\end{aligned}$$

Il existe donc deux solutions à l'équation $m^2 + 6m - 4 = 0$:

$$m_1 = \frac{-6 - \sqrt{52}}{2} = -3 - \sqrt{13} \quad \text{et} \quad m_2 = -3 + \sqrt{13}.$$

Ainsi, $x = 1$ est solution de l'équation (E_m) pour $m = -3 + \sqrt{13}$ et pour $m = -3 - \sqrt{13}$.

Corrigé de l'exercice 1.10 page 15

1
$$\begin{aligned}P(-2) &= 2 \times (-2)^3 + 7 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 2 \\ &= -16 + 28 - 14 + 2 \\ &= -30 + 30 \\ &= 0.\end{aligned}$$

$P(-2) = 0$ donc $x = -2$ est une racine de P .

2
$$\begin{aligned}P(x) &= (x+2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c\end{aligned}$$

Ainsi, on souhaite que, pour tout réel x :

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c.$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} 2 = a \\ 7 = b + 2a \\ 7 = c + 2b \\ 2 = 2c \end{cases}$$

On en déduit que $a = 2$ et $c = 1$. Par suite, à l'aide de la troisième équation (par exemple), on trouve $b = 3$.

Finalement, on obtient :

$$P(x) = (x+2)(2x^2 + 3x + 1)$$

3 $P(x) = 0 \iff x+2=0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 + 3x + 1 = 0.$

Le discriminant de $2x^2 + 3x + 1 = 0$ est $\Delta = 9 - 8 = 1$ donc il admet deux racines :

$$\alpha = \frac{-3-1}{4} = -1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, l'ensemble solution de l'équation $P(x) = 0$ est :

$$S = \left\{ -2; -1; -\frac{1}{2} \right\}$$

Corrigé de l'exercice 1.11 page 15

1 $P(3) = 0$ et $P(-2) = 0$.

2 On en déduit que $P(x) = (x-3)(x+2)(ax^2+bx+c)$, soit $P(x) = (x^2-x-6)(ax^2+bx+c)$.

$$\begin{aligned}(x^2-x-6)(ax^2+bx+c) &= ax^4+bx^3+cx^2-ax^3-bx^2-cx-6ax^2-6bx-6c \\ &= ax^4+(b-a)x^3+(c-b-6a)x^2+(-c-6b)x-6c \\ &= 10x^4-29x^3-34x^2+107x-42\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} a &= 10 \\ b-a &= -29 \\ c-b-6a &= -34 \\ -c-6b &= 107 \\ -6c &= -42 \end{cases}$$

On en déduit que $a = 10$ et $c = 7$, puis que $b = -29 + a = -19$.

Finalement, $P(x) = (x^2-x-6)(10x^2-19x+7)$.

3 Le discriminant du polynôme $10x^2-19x+7$ est :

$$\Delta = (-19)^2 - 4 \times 10 \times 7 = 81 = 9^2.$$

Ses deux racines sont alors :

$$x_1 = \frac{19-9}{20} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{19+9}{20} = \frac{7}{5}.$$

Les racines de P sont donc : $-2, 3, \frac{7}{5}$ et $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 1.12 page 15

1 $f(1) = 3 \times 1^3 + 2 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 3 + 2 - 3 - 2 = 0$.

2 $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$
 $= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$

Ainsi, pour tout réel x :

$$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) \iff 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$\iff \begin{cases} a &= 3 \\ b-a &= 2 \\ c-b &= -3 \\ -c &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$$

On a alors :

$$f(x) = (x-1)(3x^2 + 5x + 2).$$

- 3** $f(1) = 0$ donc \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en $x = 1$. On peut donc éliminer la courbe b .

De plus, le discriminant de $3x^2 + 5x + 2$ est :

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0,$$

donc ce polynôme admet 2 racines distinctes, ce qui signifie que \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en 3 points distincts.

Ainsi, la courbe a est celle qui représente la fonction f .

Corrigé de l'exercice 1.13 page 16

- 1** $x^2 + x + 1 < 0$.

Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc le trinôme est du signe du coefficient de x^2 , soit « 1 » ici, donc positif.

L'ensemble solution est donc :

$$S = \emptyset$$

- 2** $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$

Le discriminant de $2x^2 - 5x + 3$ est $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines : $\alpha = \frac{5-1}{4} = 1$

$$\text{et } \beta = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ entre ses racines, donc $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$ pour $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

$$S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

- 3** $-x^2 + 3x - 2 > 0$

Le discriminant de $-x^2 + 3x - 2$ est $\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$ donc il admet deux racines distinctes : $\alpha = \frac{-3-1}{-2} = 2$ et $\beta = \frac{-3+1}{-2} = 1$.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ entre ses racines donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S =]1; 2[$$

4 $-5x^2 - 9x + 3 \leq 0$.

Le discriminant de $-5x^2 - 9x + 3$ est $\Delta = 81 - 4 \times (-5) \times 3 = 21$ donc il admet deux racines : $\alpha = \frac{9 - \sqrt{21}}{-10} = \frac{-9 + \sqrt{21}}{10}$ et $\beta = \frac{-9 - \sqrt{21}}{10}$.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a (donc négatif) à l'extérieur des racines, donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S = \left] -\infty; \frac{-9 + \sqrt{21}}{10} \right] \cup \left[\frac{-9 - \sqrt{21}}{10}; +\infty \right[$$

5 $3x^2 - 7x + 10 \geq 0$

Le discriminant de $3x^2 - 7x + 10$ est $\Delta = 49 - 4 \times 3 \times 10 = -71 < 0$ donc il est toujours du signe de « 3 », donc positif. L'ensemble solution est donc :

$$S = \mathbb{R}$$

6 $4x^2 - 20x + 25 > 0$

Le discriminant de $4x^2 - 20x + 25$ est $\Delta = 400 - 4 \times 4 \times 25 = 0$. Par conséquent, il est du signe de « 4 » (donc positif) tout le temps sauf en sa racine $\alpha = -\frac{-20}{2 \times 4} = \frac{5}{2}$ (où il est nul). Par conséquent, l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

7 $\frac{1-4x}{x^2-3x+2} \geq 0$

Le discriminant de $x^2 - 3x + 2$ est $\Delta = 9 - 8 = 1$. Par conséquent, il admet deux racines distinctes $\alpha = \frac{3-1}{2} = 1$ et $\beta = \frac{3+1}{2} = 2$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	1	2	$+\infty$
$1-4x$	+	0	-	-	-
x^2-3x+2	+		+	0	-
$\frac{1-4x}{x^2-3x+2}$	+	0	-	+	-

L'ensemble solution de l'inéquation est alors :

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{4} \right] \cup]1; 2[$$

8 $(2x-3)(-2x^2+5x+3) < 0$

Le discriminant de $-2x^2 + 5x + 3$ est $\Delta = 25 + 24 = 49$ donc il admet deux racines : $\alpha = \frac{-5-7}{-4} = 3$ et $\beta = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$			
$2x - 3$		-	-	0	+	+		
$-2x^2 + 5x + 3$		-	0	+	+	0	-	
$(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3)$		+	0	-	0	+	0	-

L'ensemble solution de l'inéquation est alors :

$$S = \left] -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[\cup]3; +\infty[$$

Corrigé de l'exercice 1.14 page 16

Avant toute chose, on cherche le domaine de validité de l'inéquation.

Cette inéquation existe lorsque :

$$\begin{cases} 5x - 17 \neq 0 \\ 10x^2 - 49x + 51 \neq 0 \end{cases}$$

Le discriminant du polynôme $10x^2 - 49x + 51$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-49)^2 - 4 \times 10 \times 51 \\ &= 361 \\ &= 19^2 > 0 \end{aligned}$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-49) - 19}{2 \times 10} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{49 + 19}{20} = \frac{17}{5}.$$

Il peut donc se factoriser sous la forme :

$$\begin{aligned} 10x^2 - 49x + 51 &= 10 \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{17}{5} \right) \\ &= 5 \times 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{17}{5} \right) \\ &= 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) \times 5 \left(x - \frac{17}{5} \right) \\ &= (2x - 3)(5x - 17). \end{aligned}$$

Cette factorisation va être importante pour la résolution de l'inéquation.

Le domaine de validité de l'inéquation est donc $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}; \frac{17}{5} \right\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{7x-10}{5x-17} &\geq \frac{25(x+2)}{10x^2-49x+51} \iff \frac{7x-10}{5x-17} - \frac{25(x+2)}{10x^2-49x+51} \geq 0 \\
&\iff \frac{7x-10}{5x-17} - \frac{25(x+2)}{(2x-3)(5x-17)} \geq 0 \\
&\iff \frac{(7x-10)(2x-3)}{(5x-17)(2x-3)} - \frac{25(x+2)}{(2x-3)(5x-17)} \geq 0 \\
&\iff \frac{14x^2-21x-20x+30-25x-50}{10x^2-49x+51} \geq 0 \\
&\iff \frac{14x^2-66x-20}{10x^2-49x+51} \geq 0 \\
&\iff \frac{2(7x^2-33x-10)}{10x^2-49x+51} \geq 0
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $7x^2 - 33x - 10$ est :

$$\begin{aligned}
\Delta' &= (-33)^2 - 4 \times 7 \times (-10) \\
&= 1369 \\
&= 37^2 > 0.
\end{aligned}$$

Donc il admet deux racines distinctes : $\alpha = \frac{-(-33) - 37}{2 \times 7} = -\frac{2}{7}$ et $\beta = \frac{33+37}{14} = 5$.

En utilisant la propriété du signe d'un trinôme du second degré, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{7}$	3	$\frac{17}{5}$	5	$+\infty$	
$7x^2 - 33x - 10$	+	0	-	-	-	0	+
$10x^2 - 49x + 51$	+		+	0	-	0	+
$\frac{2(7x^2 - 33x - 10)}{10x^2 - 49x + 51}$	+	0	-	+	-	0	+

Ainsi, $S = \left] -\infty; -\frac{2}{7} \right] \cup \left] \frac{3}{2}; \frac{17}{5} \right[\cup [5; +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 1.15 page 16

1 On recherche d'abord les valeurs interdites, donc les valeurs de x pour lesquelles :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$

$\Delta < 0$ donc le dénominateur n'admet aucune racine; il ne s'annule donc pas.

Il n'y a donc pas de valeurs interdites; par conséquent, le domaine de définition de l'inéquation est : \mathbb{R} .

2 Recherche des racines du numérateur : $5x^2 - 3x - 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 9 + 40 = 49.$$

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 7}{10} = -\frac{2}{5}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 7}{10} = 1.$$

3 On déduit alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	1	$+\infty$	
$5x^2-3x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$
x^2+x+1	$+$		$+$		$+$
$\frac{5x^2-3x-2}{x^2+x+1}$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc :

$$S = \left] -\frac{2}{5}; 1 \right[$$

4 On cherche avant tout les valeurs interdites, donc les valeurs de x pour lesquelles :

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0.$$

Donc il y a deux valeurs interdites :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2.$$

Le domaine de définition de l'inéquation est donc : $\mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

5 On cherche maintenant les racines du numérateur : $-3x^2 - 5x + 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 49.$$

Il y a donc deux racines :

$$x_3 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{49}}{-6} = \frac{1}{3}$$

et

$$x_4 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{49}}{-6} = -2.$$

6 On construit le tableau de signes de la fraction :

x	$-\infty$	-3	-2	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$-3x^2 - 5x + 2$	-	-	0	+	0	-
$x^2 + x - 6$	+	0	-	-	-	0
$\frac{-3x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$	-	+	0	-	0	+

L'ensemble solution est donc :

$$S =]-\infty; -3[\cup]-2; \frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[$$

Corrigé de l'exercice 1.16 page 16

Notons \mathcal{A} l'aire du « grand rectangle » à l'intérieur duquel se trouve le rectangle plein, dont l'aire sera notée \mathcal{A}' .

$\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ désignera donc l'aire de la partie blanche.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} - \mathcal{A}' &= 30 \times 16 - (30 - 2x)(16 - 2x) \\ &= 480 - (480 - 60x - 32x + 4x^2) \\ &= 92x - 4x^2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'aire de la partie blanche est égale à celle du rectangle intérieur si :

$$\begin{aligned}92x - 4x^2 &= 480 - 92x + 4x^2 \iff 8x^2 - 184x + 480 = 0 \\ &\iff x^2 - 23x + 60 = 0 \quad (\text{en divisant les deux membres par } 8)\end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - 23x + 60$ est :

$$\Delta = (-23)^2 - 4 \times 60 = 289 = 17^2$$

donc les solutions de l'équation $x^2 - 23x + 60 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{23 - 17}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{23 + 17}{2} = 20.$$

Or, $0 \leq x \leq 8$ car la largeur du rectangle extérieur est égale à 16 et que x ne peut excéder sa moitié.

Ainsi, pour $x = 3$, l'aire de la partie blanche est égale à celle du rectangle intérieur.

Corrigé de l'exercice 1.17 page 17

- Pour \mathcal{P}_1 .

On voit que ses deux racines sont $\alpha = -1$ et $\beta = 3$.

Par conséquent, le trinôme est de la forme $f_1(x) = a(x + 1)(x - 3)$.

Le sommet de la parabole est le point de coordonnées (1;4) donc $f_1(1) = 4$. Ainsi,

$$a(1+1)(1-3) = 4 \iff -4a = 4 \iff a = -1.$$

On a donc :

$$f_1(x) = -(x+1)(x-4) \quad \text{soit} \quad \boxed{f_1(x) = -x^2 + 3x + 4}$$

• Pour \mathcal{P}_2 .

On voit que le trinôme n'a pas de racines car la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Posons $f_2(x) = ax^2 + bx + c$.

→ La parabole passe par le point de coordonnées (0;1) donc $f_2(0) = 1$, soit $c = 1$.

→ La parabole passe par le point de coordonnées (2;1) donc $f_2(2) = 1$, soit $a \times 2^2 + 2b + 1 = 1$, soit $4a + 2b = 0$ ou encore $b = -2a$.

On peut alors écrire : $f_2(x) = ax^2 - 2ax + 1$.

→ La parabole passe par le point de coordonnées (4;5) donc $f_2(4) = 5$, soit $16a - 8a + 1 = 5$, ou encore $8a = 4$. Donc $a = \frac{1}{2}$

On en déduit alors que $a = \frac{1}{2}$, $b = -2 \times \frac{1}{2} = -1$ et $c = 1$. Donc :

$$\boxed{f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1}$$

• Pour \mathcal{P}_3 .

Posons $f_3(x) = ax^2 + bx + c$.

→ $A(0; -3) \in \mathcal{P}_3 \implies c = -3$.

→ $B(-4; -3) \in \mathcal{P}_3 \implies 16a - 4b - 3 = -3$, soit $4a = b$. Donc $f_3(x) = ax^2 + 4ax - 3$.

→ $C(-2; -1) \in \mathcal{P}_3 \implies 4a - 8a - 3 = -1$, soit $-4a = 2$ d'où $a = -\frac{1}{2}$.

On en déduit :

$$\boxed{f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3}$$

• Pour \mathcal{P}_4 .

L'axe des abscisses est tangent à la parabole donc $f_4(x) = a(x - \alpha)^2$. L'unique racine étant -2, on a $f_4(x) = a(x + 2)^2$.

De plus, $f_4(0) = 1$ et $f_4(0) = 4a$ donc $a = \frac{1}{4}$. Finalement, on a :

$$\boxed{f_4(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1}$$

Corrigé de l'exercice 1.18 page 17

Notons x et y les deux nombres. On sait alors d'après l'énoncé que :

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ xy - (x + y) = 43 \end{cases}$$

La première équation nous donne :

$$x = 7 + y$$

donc en remplaçant x par cette dernière expression dans la seconde équation, on a :

$$\begin{aligned} (7 + y)y - (7 + y + y) &= 43 \iff 7y + y^2 - 7 - 2y = 43 \\ &\iff y^2 + 5y - 50 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $y^2 + 5y - 50$ est :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-50) = 25 + 200 = 225 = 15^2$$

donc deux valeurs sont possibles pour y :

$$y_1 = \frac{-5 - 15}{2} = -10 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-5 + 15}{2} = 5.$$

Or, $y \in \mathbb{N}$ donc $y \neq -10$; seule $y = 5$ est une valeur possible.

On en déduit alors que $x = 7 + y = 7 + 5 = 12$.

Les deux nombres sont donc 5 et 12.

Corrigé de l'exercice 1.19 page 17

Notons x le nombre total de personnes.

Une personne offre 3 cadeaux à $(x - 1)$ personnes donc :

$$3x(x - 1) = 468$$

soit :

$$x(x - 1) = 156$$

ou encore :

$$x^2 - x - 156 = 0.$$

Le discriminant de $x^2 - x - 156$ est :

$$\Delta = (-1)^2 + 4 \times 1 \times 156 = 625 = 25^2.$$

Il y a donc deux racines :

$$\alpha = \frac{-(-1) - 25}{2} = -12 < 0 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 + 25}{2} = 13 > 0.$$

Il n'y a donc qu'une solution à notre problème : il y a 13 personnes.

Corrigé de l'exercice 1.20 page 18

- 1 Il suffit ici de remplacer les lettres par leur valeur; cela donne :

$$\begin{aligned}y &= -\frac{10}{2 \times 7^2 \times (\cos 60^\circ)^2} (x-1)^2 + \tan 60^\circ (x-1) + 5 \\&= -\frac{5}{49 \times (0,5)^2} (x-1)^2 + \sqrt{3}(x-1) + 5 \\&\boxed{y = \frac{1}{49} (-20x^2 + (49\sqrt{3} + 40)x + 225 - 49\sqrt{3})}\end{aligned}$$

- 2 La droite (OB) fait un angle de 30° avec l'axe des abscisses et passe par l'origine du repère considéré : O; par conséquent, son équation est :

$$y = \tan 60^\circ x$$

c'est-à-dire :

$$y = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} x$$

soit :

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{3}} x}.$$

- 3 B est le point d'intersection de la droite (OB) et de la parabole; ainsi :

$$\begin{cases} y_B = \frac{1}{49} (-20x_B^2 + (49\sqrt{3} + 40)x_B + 225 - 49\sqrt{3}) \\ y_B = \frac{1}{\sqrt{3}} x_B \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{49} (-20x_B^2 + (49\sqrt{3} + 40)x_B + 225 - 49\sqrt{3}) &= \frac{1}{\sqrt{3}} x_B \\ \Leftrightarrow -20x_B^2 + (49\sqrt{3} + 40)x_B + 225 - 49\sqrt{3} &= \frac{49}{\sqrt{3}} x_B \\ \Leftrightarrow -20\sqrt{3}x_B^2 + (49\sqrt{3} + 40)\sqrt{3}x_B + (225 - 49\sqrt{3})\sqrt{3} &= 49x_B \\ \Leftrightarrow -20\sqrt{3}x_B^2 + (147 + 40\sqrt{3})x_B + (225\sqrt{3} - 147) &= 49x_B \\ \Leftrightarrow -20\sqrt{3}x_B^2 + (147 - 49 + 40\sqrt{3})x_B + (225\sqrt{3} - 147) &= 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{-20\sqrt{3}x_B^2 + (98 + 40\sqrt{3})x_B + (225\sqrt{3} - 147) &= 0}\end{aligned}$$

- 4 Pour trouver x_B , il suffit donc de résoudre l'équation :

$$-20\sqrt{3}x^2 + (98 + 40\sqrt{3})x + 225\sqrt{3} - 147 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = (98 + 40\sqrt{3})^2 - 4 \times (-20\sqrt{3}) \times (225\sqrt{3} - 147) = 68404 - 3920\sqrt{3}$$

et donc les racines sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-98 - 40\sqrt{3} - \sqrt{68404 - 3920\sqrt{3}}}{-40\sqrt{3}} \approx 5,997$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-98 - 40\sqrt{3} + \sqrt{68404 - 3920\sqrt{3}}}{-40\sqrt{3}} \approx -1,168.$$

$x_2 < 0$ donc ne peut pas convenir.

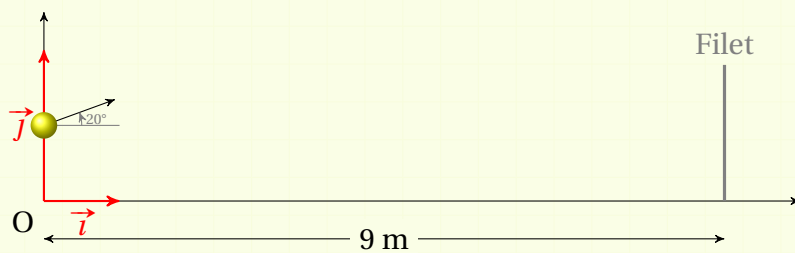
Ainsi, $x_B \approx 5,997$. Il en résulte alors que :

$$y_B = \frac{1}{\sqrt{3}} x_B \approx 6,92.$$

On en déduit :

$$OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} \approx \sqrt{5,997^2 + 6,92^2} \approx \underline{9,16}.$$

Corrigé de l'exercice 1.21 page 19



On convertit : $20 \text{ km/h} = \frac{20000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \approx 5,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En remplaçant les lettres dans la formule donnée, on a :

$$y = -\frac{1}{2} \times \frac{9,81}{(5,56 \times \cos 20^\circ)^2} x^2 + x \tan 20^\circ + 0,5,$$

soit :

$$y = -0,179687471x^2 + 0,363970234x + 0,5.$$

Le sommet de la parabole a pour abscisse :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0,363970234}{2 \times (-0,179687471)} \approx 1.$$

Donc, au sommet de sa trajectoire, la balle n'aura pas encore atteint le filet.

En prenant $x = 9$, on obtient :

$$y \approx -10,8$$

ce qui signifie que la balle aura touché le sol avant 9 mètres.

Le joueur a donc perdu.

Cherchons la vitesse minimale v (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) à donner à la balle lors de la frappe pour quelle franchisse le filet.

La fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{5,554\,786\,596}{v^2}x^2 + 0,363\,970\,234x + 0,5$$

représente la hauteur (en mètre) de la balle en fonction de sa position x .

On veut que $f(9) > 0,914$, soit :

$$-\frac{5,554\,786\,596}{v^2} \times 9^2 + 0,363\,970\,234 \times 9 + 0,5 > 0,914$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{-449,955}{v^2} + 2,862 > 0 &\Rightarrow \frac{-449,955}{v^2} > -2,862 \\ &\Rightarrow \frac{1}{v^2} < \frac{-2,862}{-449,955} \\ &\Rightarrow v^2 > \frac{449,955}{2,862} \\ &\Rightarrow v^2 > 157,217 \\ &\Rightarrow v > \sqrt{157,217} \\ &\Leftrightarrow v > 12,54 \end{aligned}$$

La vitesse à donner doit donc être supérieure à $12,54 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (soit à peu près 45 km/h).

Corrigé de l'exercice 1.22 page 19

1 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ donc $R = \frac{R_1 R_2}{r}$, ce qui donne :

$$2 = \frac{R_1 R_2}{10} \quad \text{soit :} \quad R_1 R_2 = 20.$$

D'après le cours, on sait que $P = R_1 R_2 = 20$ et $S = R_1 + R_2 = 10$ et donc que R_1 et R_2 sont racines du trinôme :

$$x^2 - Sx + P \quad \text{soit :} \quad x^2 - 10x + 20,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 20 = 100 - 80 = 20.$$

Les deux racines sont donc :

$$R_1 = \frac{10 - \sqrt{20}}{2} = 5 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad R_2 = 5 + \sqrt{5}.$$

2 On a d'une part :

$$R = \frac{R_1 R_2}{r} \Leftrightarrow 1 = \frac{R_1 R_2}{4} \Leftrightarrow P = R_1 R_2 = 4$$

et d'autre part $S = R_1 + R_2 = 4$.

Le trinôme $x^2 - Sx + P = x^2 - 4x + 4$ a pour discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

On peut donc dire que $R_1 = R_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$.

- 3** Nous l'avons vu, on ne peut calculer R_1 et R_2 que lorsque le discriminant de $x^2 - Sx + P$ est supérieur ou égal à 0, soit lorsque :

$$S^2 - 4P \geq 0$$

donc :

$$r^2 - 4rR \geq 0$$

ou encore :

$$r(r - 4R) \geq 0.$$

Or, $r \neq 0$ donc cette dernière inéquation donne, en simplifiant par r :

$$r \geq 4R.$$

Corrigé de l'exercice 1.23 page 20

- 1** L'équation est équivalente à

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Le discriminant du trinôme est :

$$\Delta = 5$$

donc les solutions de l'équation sont :

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- 2** On a :

$$N^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + N.$$

Donc N est solution de l'équation de la question 1.

Comme $N > 0$, on en déduit que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 1.24 page 20

- 1** $(a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$.

- 2** Si $A = a + b\sqrt{2} = \sqrt{33 + 20\sqrt{2}}$, alors $A^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 33 + 20\sqrt{2}$.

Par identification du coefficient de $\sqrt{2}$ et du nombre entier, on a :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 33 \\ 2ab = 20 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 33 \\ ab = 10 \end{cases}$$

3 De la seconde équation du système précédent, on peut déduire :

$$b = \frac{10}{a}$$

et en remplaçant b par cette valeur dans la première équation, on obtient :

$$a^2 + \frac{200}{a^2} = 33$$

soit :

$$a^4 - 33a^2 + 200 = 0.$$

En posant $X = a^2$, on arrive à :

$$X^2 - 33X + 200 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = (-33)^2 - 800 = 289 = 17^2.$$

Les deux solutions de $X^2 - 33X + 200 = 0$ sont alors :

$$X_1 = \frac{33+17}{2} = 25 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{33-17}{2} = 8.$$

Donc les solutions de $a^4 - 33a^2 + 200 = 0$ sont a_1 et a_2 tels que :

$$a_1^2 = 25 \quad \text{et} \quad a_2^2 = 8$$

soit :

$$a_1 = 5 \text{ ou } a_1 = -5 \quad \text{et} \quad a_2 = 2\sqrt{2} \text{ ou } a_2 = -2\sqrt{2}.$$

Or, $a \in \mathbb{Z}$ donc $a = 5$ ou $a = -5$.

- Si $a = 5$, alors $b = \frac{10}{5} = 2$ et $A = 5 + 2\sqrt{2}$;
- Si $a = -5$, alors $b = -2$ et $A = -5 - 2\sqrt{2} < 0$, ce qui n'est pas possible car $A > 0$.

Ainsi,

$$\boxed{\sqrt{33 + 20\sqrt{2}} = 5 + 2\sqrt{2}}$$

4 Posons $A = \sqrt{p + q\sqrt{n}}$. Alors, $A^2 = p + q\sqrt{n}$ d'où :

$$\begin{cases} a^2 + nb^2 = p \\ b = \frac{q}{2a} \end{cases}$$

La première équation devient alors :

$$a^2 + \frac{nq^2}{4a^2} = p$$

ou encore :

$$a^4 - 4pa^2 + nq^2 = 0.$$

ou encore :

$$X^2 - 4pX + nq^2 \quad \text{en posant } X = a^2.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 16p^2 - 4nq^2 = 4(4p^2 - nq^2).$$

Première condition d'existence : il faut que $4p^2 - nq^2 \geq 0$ pour pouvoir transformer l'écriture de A.

Dans ce cas, les deux solutions X_1 et X_2 sont :

$$X_1 = \frac{4p - 2\sqrt{4p^2 - nq^2}}{2} = 2p - \sqrt{4p^2 - nq^2} \quad \text{et} \quad X_2 = 2p + \sqrt{4p^2 - nq^2}.$$

Deuxième condition : il faut que $2p - \sqrt{4p^2 - nq^2} \geq 0$ et $2p + \sqrt{4p^2 - nq^2} \geq 0$.

Dans ce cas,

$$a_1 = \pm \sqrt{2p - \sqrt{4p^2 - nq^2}} \quad \text{et} \quad a_2 = \pm \sqrt{2p + \sqrt{4p^2 - nq^2}}.$$

Or, $a \in \mathbb{Z}$ donc :

3^e condition : il faut que $\sqrt{2p - \sqrt{4p^2 - nq^2}} \in \mathbb{N}$ ou que $\sqrt{2p + \sqrt{4p^2 - nq^2}} \in \mathbb{N}$.

On a alors :

$$a = \pm \sqrt{2p \pm \sqrt{4p^2 - nq^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{q}{\pm 2\sqrt{2p \pm \sqrt{4p^2 - nq^2}}}.$$

Corrigé de l'exercice 1.25 page 20

- **Méthode 1 : utilisation des formules du cours.** On sait que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour sommet S d'abscisse $-\frac{b}{2a}$.

Donc l'abscisse de S_k est : $x_k = -\frac{-2k}{2} = k$.

L'ordonnée est obtenue en remplaçant x par x_k dans l'équation de la parabole :

$$y_k = k^2 - 2k \times k + k^2 + 2k + 1 = 2k + 1.$$

Donc $y_k = 2x_k + 1$, ce qui signifie que S_k est sur la droite d'équation $y = 2x + 1$. Ils sont donc alignés.

- **Méthode 2 : forme canonique.** L'équation de \mathcal{P}_k est :

$$y = (x - k)^2 + 2k + 1.$$

Cette dernière écriture est la forme canonique de l'équation de \mathcal{P}_k , qui nous dit que son sommet a pour coordonnées $(k; 2k + 1)$.

Comme l'ordonnée de S_k est égale au double de son abscisse augmenté de 1, ils appartiennent tous à la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Les sommets sont donc bien tous alignés.

- **Méthode 3 : utilisation des vecteurs.** On utilise la forme canonique précédente pour voir que $S_k(k; 2k + 1)$, et donc $S_{k+1}(k + 1; 2(k + 1) + 1) = (k + 1; 2k + 3)$.

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{S_k S_{k+1}} = \begin{pmatrix} (k+1) - k \\ (2k+3) - (2k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, quelle que soit la valeur de k , $\overrightarrow{S_k S_{k+1}}$ a toujours les mêmes coordonnées; donc, par exemple, $\overrightarrow{S_k S_{k+1}} = \overrightarrow{S_{k+1} S_{k+2}}$, ce qui signifie que tous les points S_k , S_{k+1} et S_{k+2} sont alignés. Comme ce résultat est valable pour toutes les valeurs de k , cela signifie que tous les points S_k sont alignés.

Corrigé de l'exercice 1.26 page 20

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \iff a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc = 0.$$

Posons alors $f(a) = a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc$.

L'équation $f(a) = 0$ admet au moins une solution car le triangle existe donc le discriminant de $f(a)$ est supérieur ou égal à 0.

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(b+c)]^2 - 4 \times 1 \times (b^2 + c^2 - bc) \\ &= b^2 + 2bc + c^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4bc \\ &= 6bc - 3(b^2 + c^2) \\ &= -3(b^2 - 2bc + c^2) \\ &= -3(b-c)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta \leq 0$. Or, on sait que $\Delta \geq 0$ donc $\Delta = 0$, ce qui signifie que $b = c$.

Il n'y a qu'une solution à l'équation $f(a) = 0$ donnée par : $-\frac{-(b+c)}{2} = \frac{2b}{2} = b$ (car $b = c$).

Enfin, on a $a = b = c$. Le triangle est donc équilatéral.

Corrigé de l'exercice 1.27 page 21

On sait que si a et b sont solutions d'une équation polynomiale de degré 2 alors, ils sont aussi solutions de l'équation :

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0.$$

Comme a et b sont solutions de l'équation :

$$x^2 - sx + t = 0,$$

on a :

$$\begin{cases} a + b = s \\ ab = t \end{cases}$$

De même, comme $a + 1$ et $b + 1$ sont solutions de l'équation :

$$x^2 - s^2x + st = 0,$$

on a :

$$\begin{cases} (a+1) + (b+1) = s^2 \\ (a+1)(b+1) = st \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a + b + 2 = s^2 \\ ab + a + b + 1 = st \end{cases}$$

Comme $a + b = s$ et $ab = t$ (d'après le premier système), on obtient :

$$\begin{cases} s^2 - s - 2 = 0 \\ t + s + 1 = st \end{cases}$$

L'équation :

$$s^2 - s - 2 = 0$$

a pour solutions :

$$s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = 2 \end{cases}$$

- Si $s = -1$, alors l'équation $t + s + 1 = st$ devient :

$$t = -t \quad \text{soit :} \quad t = 0$$

Dans ce cas, le couple solution demandé est : $(s; t) = (-1; 0), t \in \mathbb{R}$.

- Si $s = 2$, alors l'équation $t + s + 1 = st$ devient :

$$t + 3 = 2t \quad \text{soit} \quad t = 3$$

Dans ce cas, le couple solution demandé est : $(s; t) = (2; 3), t \in \mathbb{R}$.

Remarque 6

Si on vérifie nos résultats, on voit dans un premier temps que le couple $(-1; 0)$ donne pour la première équation : $x^2 + x = 0$ (qui admet pour solutions 0 et -1) et donne pour la seconde équation : $x^2 - x = 0$ (qui admet 0 et 1 pour solutions, et qui sont bien les successeurs de -1 et 0).

En revanche, pour le couple $(2; 3)$, la première équation donne : $x^2 - 2x + 3 = 0$, de discriminant négatif. Il n'y a donc pas de solutions... dans l'ensemble des réels! Car en effet, elle admet quand-même des solutions, mais dans un ensemble plus « grand » que celui des nombres réels : l'ensemble des nombres *complexes* (que vous verrez l'année prochaine).

Corrigé de l'exercice 1.28 page 21

OI = 6 et IB = 12 donc OB = 18.

Dans le triangle OCB, rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} (6+x)^2 + (12+x)^2 &= 18^2 \iff 2x^2 + 36x - 144 = 0 \\ &\iff x^2 + 18x - 72 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $x^2 + 18x - 72$ est :

$$\Delta = 18^2 - 4 \times (-72) = 612 > 0$$

donc il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{612}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-18 + \sqrt{612}}{2}$$

soit :

$$x_1 = -9 - 3\sqrt{17} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 3\sqrt{17} - 9 > 0.$$

Seule la racine positive nous intéresse car x est une longueur.

Ainsi, $x = 3\sqrt{17} - 9$.

L'aire de ABCD est donc égale à

$$(12 + 3\sqrt{17} - 9)^2 = 162 + 18\sqrt{17}.$$

Corrigé de l'exercice 1.29 page 21

L'existence de points d'intersection entre \mathcal{D} et \mathcal{C} est conditionnée par le fait que l'équation $f(x) = mx - 4$ aient deux solutions. En effet, si on note $A(x; f(x))$ un point de \mathcal{C} et $B(x; mx - 4)$ un point de \mathcal{D} , A et B sont confondus si leurs ordonnées sont égales, donc si $f(x) = mx - 4$.

$$\begin{aligned} f(x) = mx - 4 &\iff 2x^2 - 5x + 1 = mx - 4 \\ &\iff 2x^2 - 5x - mx + 1 + 4 = 0 \\ &\iff 2x^2 - (m+5)x + 5 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation admet deux solutions si $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\iff (m+5)^2 - 4 \times 2 \times 5 > 0 \\ &\iff m^2 + 10m + 25 - 40 > 0 \\ &\iff m^2 + 10m - 15 > 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $m^2 + 10m - 15$ est :

$$\Delta' = 100 - 4 \times (-15) = 160$$

donc il admet deux racines m_1 et m_2 :

$$m_1 = \frac{-10 - \sqrt{160}}{2} = -5 - 2\sqrt{10}$$

et sa conjuguée :

$$m_2 = -5 + 2\sqrt{10}.$$

On a alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	m_1	m_2	$+\infty$	
$m^2 + 10m - 15$	+	0	-	0	+

Ainsi, $\Delta' > 0$, et donc \mathcal{C} et \mathcal{D} admettent deux points d'intersection, si :

$$m \in]-\infty; -5 - 2\sqrt{10}[\cup]-5 + 2\sqrt{10}; +\infty[.$$

Corrigé de l'exercice 1.30 page 22

1 En posant $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$, on a $a = x^2$ et $b = y^2$, et donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} &= 183 \\ b\sqrt{a} + a\sqrt{b} &= 182 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2x + y^2y &= 183 \\ y^2x + x^2y &= 182 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 &= 183 \\ yyx + xxy &= 182 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 &= 183 \\ y(xy) + x(xy) &= 182 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 &= 183 \\ xy(x + y) &= 182 \end{cases} \end{aligned}$$

2 La forme développée de $(x + y)^3$ est :

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y)(x + y)^2 \\ &= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 + y^3 \\ \boxed{(x + y)^3} &= \boxed{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3} \\ &= (x^3 + y^3) + 3(x^2y + xy^2) \\ &= (x^3 + y^3) + 3xy(x + y) \\ &= 183 + 3 \times 182 \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= 729 \\ (x + y)^3 &= 9^3. \end{aligned}$$

Ainsi, $x + y = 9$.

De l'égalité « $xy(x + y) = 182$ » et du fait que $x + y = 9$, on déduit que $\boxed{xy = \frac{182}{9}}$.

3 On sait que si $S = x + y$ et $P = xy$ alors x et y sont racines du polynôme $X^2 - SX + P$.

Ici, $S = 9$ et $P = \frac{182}{9}$ donc x et y sont les racines de $X^2 - 9X + \frac{182}{9}$, dont le discriminant est :

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times \frac{182}{9} = \frac{1}{9}.$$

Les racines sont alors égales à $x = \frac{182 - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{13}{3}$ et $y = \frac{182 + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{14}{3}$.

On en déduit alors que $a = x^2 = \frac{169}{9}$ et $b = y^2 = \frac{196}{9}$.

Corrigé de l'exercice 1.31 page 22

- 1** On pose $t = x - 8$, donc $x = t + 8$; nous pouvons donc remplacer x par $t + 8$ dans (E) :

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8} \iff \sqrt[3]{t+8} + \sqrt[3]{t-8} = \sqrt[3]{t}$$

- 2** Élevons les deux membres de cette dernière équation au cube à l'aide de la formule :

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

où $a = \sqrt[3]{t-8}$ et $b = \sqrt[3]{t+8}$:

$$\begin{aligned} \text{(E)} &\iff (\sqrt[3]{t+8} + \sqrt[3]{t-8})^3 = (\sqrt[3]{t})^3 \\ &\iff (t+8) + (t-8) + 3\sqrt[3]{t+8} \times \sqrt[3]{t-8} \times (\sqrt[3]{t+8} + \sqrt[3]{t-8}) = t \\ &\iff 2t + 3\sqrt[3]{(t+8)(t-8)}(\sqrt[3]{t+8} + \sqrt[3]{t-8}) = t \\ &\iff 3\sqrt[3]{t^2-64}(\sqrt[3]{t+8} + \sqrt[3]{t-8}) = -t \end{aligned}$$

Or, d'après (E), $\sqrt[3]{t+8} + \sqrt[3]{t-8} = \sqrt[3]{t}$, d'où :

$$\begin{aligned} \text{(E)} &\iff 3\sqrt[3]{t^2-64} \times \sqrt[3]{t} = -t \\ &\iff 3\sqrt[3]{t(t^2-64)} = -t \end{aligned}$$

En élevant à nouveau au cube les deux membres de cette dernière équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{(E)} &\iff 3^3 t(t^2-64) = (-t)^3 \\ &\iff 27t(t^2-64) = -t^3 \\ &\iff 27(t^2-64) = -t^2, \quad t \neq 0 \\ &\iff 27t^2 - 1728 = -t^2, \quad t \neq 0 \\ &\iff 28t^2 - 1728 = 0, \quad t \neq 0 \\ &\iff 28(x-8)^2 - 1728 = 0, \quad x \neq 8 \\ &\iff 28(x^2 - 16x + 64) - 1728 = 0, \quad x \neq 8 \\ &\iff 28x^2 - 448x + 64 = 0, \quad x \neq 0 \\ &\iff 7x^2 - 112x + 32 = 0, \quad x \neq 0 \text{ (en simplifiant par 4)} \end{aligned}$$

- 3** Le discriminant de $7x^2 - 112x + 32$ est :

$$\Delta = (-112)^2 - 4 \times 7 \times 32 = 12096 = (24\sqrt{21})^2 > 0$$

donc il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-112) - 24\sqrt{21}}{14} = \frac{56 - 12\sqrt{21}}{7}$$

et sa racine conjuguée :

$$x_2 = \frac{56 + 12\sqrt{21}}{7}.$$

Ainsi, l'équation (E) x_1 et x_2 comme solutions.

De plus, n'oublions pas que nous avons exclu le cas où $x = 8$; il faut donc vérifier si $x = 8$ est solution ou pas : sachant que $\sqrt[3]{8} = 2$, et donc que $\sqrt[3]{-8} = -2$,

$$(E) \iff 2 + (-2) = 0$$

Cette dernière égalité est vraie, donc 8 est solution de (E). L'ensemble solution de (E) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ 8; \frac{56 - 12\sqrt{21}}{7}; \frac{56 + 12\sqrt{21}}{7} \right\}$$

Corrigé de l'exercice 1.32 page 22

- 1 Ce programme affiche le tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 10]$.

Attention 2



N'oubliez pas que l'instruction `range(a, b)` parcourt l'intervalle $[a; b - 1]$.

- 2 $g(x) = f(x - 5)$
- $$\begin{aligned} &= -3(x - 5)^2 + 2(x - 5) + 7 \\ &= -3(x^2 - 10x + 25) + 2x - 10 + 7 \\ &= (-3x^2 + 2x + 7) + 30x - 75 - 10 \\ &= f(x) + 30x - 85. \end{aligned}$$

Il est ici nécessaire d'exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$ afin de pouvoir utiliser la liste F contenant les valeurs de $f(x)$.

À l'aide de cette dernière expression, on peut alors compléter le programme ainsi :

Code Python 1-6

```
1 G = []
2 i = 0
3
4 for x in range(-10, 11):
5     G.append( F[i] + 30*x - 85)
6     i += 1
7
8 print(G)
```

Il est ici nécessaire d'introduire la variable i qui sert à savoir à chaque passage dans la boucle la valeur à prendre dans la liste F . L'instruction « $i += 1$ » sert à *incrémenter* cette variable, c'est-à-dire à lui ajouter 1 à chaque passage (on peut aussi écrire « $i = i + 1$ »).

Corrigé de l'exercice 1.33 page 23

La fonction complétée est la suivante :

Code Python 1-7

```
1 def racines(a,b,c):
2     delta = b*b - 4*a*c
3     if delta < 0:
4         return None
5     elif delta == 0:
6         return -b / (2*a)
7     else:
8         return (-b-delta**0.5)/(2*a) , (-b+delta**0.5)/(2*a)
```

Remarque 7

Il existe un module qui permet de trouver les racines de n'importe quel polynôme, y compris d'un polynôme de degré 2 :

Code Python 1-8

```
1 from sympy import Symbol
2 from sympy.solvers import solve
3 x = Symbol('x')
4
5 def racines(a,b,c):
6     return solve(a*x*x+b*x+c , x)
```

```
>>> racines(1,-3,2)
[1,2]
```

```
>>> racines(1,-7,2)
[7/2 - sqrt(41)/2, sqrt(41)/2 + 7/2]
```

Corrigé de l'exercice 1.34 page 23

- 1 Réponse **c**. En effet, la parabole possède des branches orientées vers le bas, donc $a < 0$, et coupe deux fois l'axe des abscisses (donc $g(x)$ a deux racines distinctes, ce qui signifie que $\Delta > 0$).
- 2 Réponse **b**. En effet,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,5(x-2)^2 - 8 \\ &= 0,5 \left[(x-2)^2 - \frac{8}{0,5} \right] \\ &= 0,5[(x-2)^2 - 16] \\ &= 0,5[(x-2)^2 - 4^2] \\ &= 0,5[(x-2-4)(x-2+4)] \\ &= 0,5(x-6)(x+2). \end{aligned}$$

3 Réponse **d**. En effet,

$$\begin{aligned}2x^4 - 5x^2 + 3 = x^2 - 1 &\iff 2x^4 - 6x^2 + 3 = 0 \\&\iff 2X^2 - 6X + 3 = 0, \quad \text{avec } X = x^2\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $2X^2 - 6X + 3$ est :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 36 - 24 = 12 > 0$$

donc $2X^2 - 6X + 3$ admet deux racines :

$$X_1 = x_1^2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{4} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} > 0$$

et

$$X_2 = x_2^2 = \frac{6 + \sqrt{12}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} > 0$$

donc :

$$x_1 = \sqrt{X_1} \text{ ou } x_1 = -\sqrt{X_1}$$

et

$$x_2 = \sqrt{X_2} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{X_2}.$$

Il y a donc bien quatre solutions à l'équation.

4 Réponse **c**. En effet,

$$\begin{aligned}3x^2 + y^2 + 9x + 6 = y^2 &\iff 3x^2 + y^2 + 9x + 6 - y^2 = y^2 - y^2 \\&\iff 3x^2 + 9x + 6 = 0 && \text{(réponse d)} \\&\iff 3(x^2 + 3x + 2) = 0 \\&\iff x^2 + 3x + 2 = 0 && \text{(réponse a)} \\&\iff (x + 1)(x + 2) = 0 && \text{(réponse b)}\end{aligned}$$

5 Réponse **b**. En effet, le discriminant du polynôme $-x^2 - 2x + 8$ est :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 4 + 32 = 36 > 0$$

donc il est positif (du signe opposé à -1 , coefficient de x^2) entre les racines -4 et 2 . L'inégalité étant *stricte*, les crochets sont ouverts.

6 Réponse **c**. On peut procéder par élimination :

- les branches de la parabole sont dirigées vers le haut, donc le coefficient de x^2 est positif, ce qui élimine les réponses **b** et **d** ;
- la parabole coupe l'axe des ordonnées en $y = -4$ donc $f(0) = -4$, ce qui élimine la réponse **a**. Il ne reste donc plus que la réponse **c**.

7 Réponse **d**. En effet, une fonction polynôme du second degré qui s'annule en 1 et en 3 s'écrit sous la forme $f(x) = a(x-1)(x-3)$, $a \in \mathbb{R}$. Comme il y a une infinité de nombres réels a , il y a aussi une infinité de fonctions $f(x)$.

- 8** Réponse **a**. En effet, l'abscisse du sommet est $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-9}{6} = \frac{3}{2}$. On peut donc éliminer les propositions *c* et *d*.

De plus, un axe de symétrie d'une parabole est toujours de la forme $x = -\frac{b}{2a}$, on peut donc éliminer la réponse *b*.

- 9** Réponse **d**. Une fonction polynôme du second degré peut être ou non de signe constant sur \mathbb{R} . Tout dépend du signe de son discriminant.

- 10** Réponse **c**. Pour savoir combien de points d'intersection les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto 15x^2 + 10x - 1$ et $x \mapsto 19x^2 - 22x + 10$ ont, il faut résoudre l'équation :

$$(19x^2 - 22x + 10) - (15x^2 + 10x - 1) = 0 \iff 4x^2 - 32x + 11 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $4x^2 - 32x + 11$ est :

$$\Delta = (-32)^2 - 4 \times 4 \times 11 = 848 > 0$$

donc l'équation admet deux solutions. Il y a donc deux points d'intersection.

Dérivation et ses applications

Plan du chapitre

I	Première approche historique	61
II	Nombre dérivé	62
1	Approche géométrique	62
2	Définition et exemples fondamentaux	64
3	Interprétations du nombre dérivé	66
III	Équation de la tangente	67
1	Définition	67
2	Équation	67
IV	Fonction dérivée	68
1	Définition	68
2	Dérivées de référence	68
3	Dérivée d'une fonction composée	69
V	Fonction valeur absolue	69
1	Définition (rappel de Seconde)	69
2	Courbe représentative	70
3	Dérivée	70
VI	Opérations sur les dérivées	71
VII	Applications de la dérivation	73
1	Variation d'une fonction	73
2	Extremum local	74
3	Méthode de Newton	74
	Enoncés	77
	Corrigés des exercices	90

I - Première Approche historique

Archimède

Archimède de Syracuse (–287 – –212) était un savant grec. Il semblerait qu'il fût le premier à se pencher sur la notion de *tangente* à une courbe, une droite qui « frôle » une courbe et la touche en un seul point.

Torricelli

Plusieurs siècles plus tard, l'italien Torricelli (1608 – 1646) et le français Roberval (1602 – 1675) continuèrent les travaux d'Archimède et apportèrent ainsi les premières notions sérieuses du calcul dit *infinitésimal*.

Pierre de Fermat

Le mathématicien français Pierre de Fermat (vers 1610 – 1665), surnommé le « prince des amateurs » car les mathématiques étaient pour lui plus un passe-temps qu'un métier, décrit ensuite la tangente comme la position limite d'une sécante à une courbe. C'est la définition qu'on utilise aujourd'hui (voir paragraphe II).

René Descartes

René Descartes (1596 – 1650), souvent très dur envers Fermat, critiquera le manque de rigueur de ce dernier ce qui pousse Fermat à clarifier et à étendre sa méthode.

En Angleterre : Wallis, Gregory, Barrow et Newton

Les méthodes analytiques de Descartes et de Fermat ont beaucoup de succès en Angleterre et sont donc reprises par John Wallis (1616 – 1707) et James Gregory (1638 – 1675). Ceci pousse le mathématicien Issac Barrow (1630 – 1677), le prédécesseur d'Isaac Newton (1643 – 1727) à la chaire de mathématiques de l'université de Cambridge à développer une méthode des tangentes par le calcul, très proche de celle actuellement utilisée. Il expose cette méthode dans ses cours.

Puis les mathématiciens anglais Newton (1643 – 1727) et allemand Leibniz (1646 – 1716), indépendamment l'un de l'autre, inventent des procédés algorithmiques, ce qui tend à faire de l'analyse dite *infinitésimale* une branche autonome des mathématiques. Newton publie en 1736 sa méthode la plus célèbre, la *méthode des fluxions et des suites infinies*.

Blaise Pascal

C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du XVII^e siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Le marquis de l'Hospital contribuera à diffuser le calcul différentiel de Leibniz à la fin du XVII^e siècle grâce à son livre sur l'analyse des infiniment petits. Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.

Néanmoins cette théorie tout juste éclore n'est pas encore, à l'époque, pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit introduite par Newton, qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable.

Jean le Rond d'Alembert

C'est au XVIII^e siècle que Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

Joseph-Louis Lagrange

C'est au mathématicien français Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x . C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

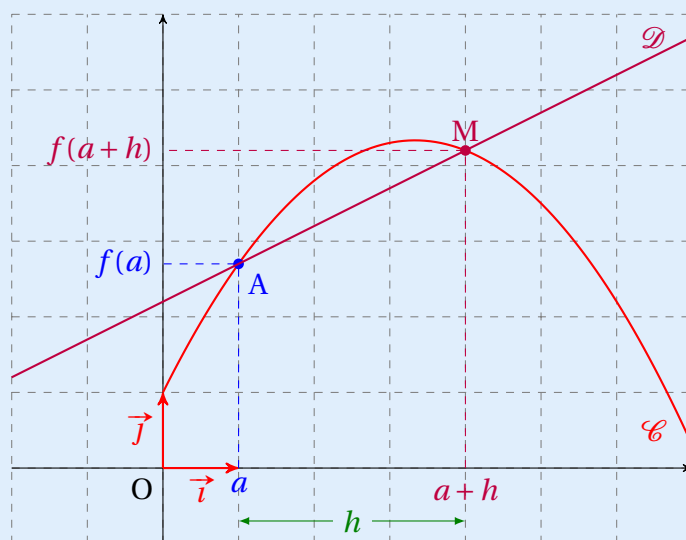
Source : math93.com.

II - Nombre dérivé

II.1 - Approche géométrique

Considérons la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f , et un point $A(a; f(a))$.

Considérons ensuite un point $M(a+h; f(a+h))$ où $h \in \mathbb{R}$, et la droite \mathcal{D} passant par A et M

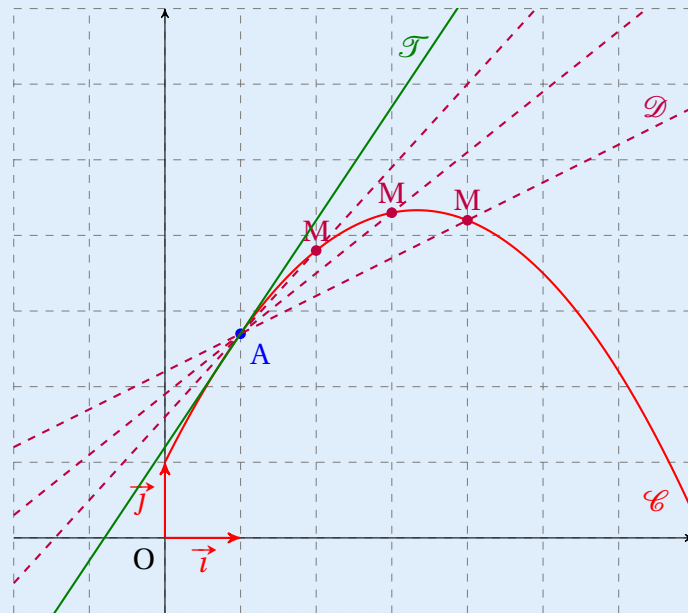


\mathcal{D} est appelée la **sécante** à \mathcal{C} passant par A et M.

Le coefficient directeur de cette sécante est appelé le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$; d'après la formule vue en classe de Seconde, il est égal à :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si M se rapproche de A, c'est-à-dire si h se rapproche de 0, alors la droite \mathcal{D} se rapproche d'une droite \mathcal{T} (en vert ci-dessous) qui « frôle » \mathcal{C} et qui la touche au point A.



Ainsi, le taux d'accroissement de f entre a à $a + h$ se rapproche du coefficient directeur de \mathcal{T} . On dit que la *limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0* est égal au coefficient directeur de \mathcal{T} , et on note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{coefficient directeur de } \mathcal{T}.$$

En prenant $f(x) = -0,3x^2 + 2x + 1$, on peut alors écrire un programme (en Python par exemple) qui écrit les coefficients directeurs successifs de \mathcal{D} quand h se rapproche de 0 :

Code Python 2-9

```
1 def f(x):
2     return -0.3*x*x+2*x+1
3
4 def coef(a):
5     h = a
6     while (h > 0):
7         m = ( f(a+h) - f(a) ) / h
8         print('h =', h, ', ', 'm =', m)
9         h = h - 0.01
10
11 coef(1)
```

```
...
h = 0.039999999999999925 ,
m = 1.3879999999999993
h = 0.029999999999999925 ,
m = 1.3909999999999993
h = 0.0199999999999999248 ,
m = 1.39399999999999921
h = 0.0099999999999999247 ,
m = 1.39699999999999758
```

II. 2 - Définition et exemples fondamentaux

Définition

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

On définit le **nombre dérivé de f en a** comme étant le nombre noté $f'(a)$ tel que :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemples fondamentaux

Exemple 9 (la fonction carré)

Posons $f(x) = x^2$, et calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, où a est un nombre quelconque et $h > 0$:

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} \\ &= 2a + h.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a + 0 = 2a.$$

Quelle que soit la valeur de a , le nombre dérivé de x^2 en a est $f'(a) = 2a$.

Exemple 10 (la fonction cube)

Posons $f(x) = x^3$, et calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, où a est un nombre quelconque et $h > 0$:

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{\cancel{a^3} + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - \cancel{a^3}}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(3a^2 + 3ah + h^2)}{\cancel{h}} \\ &= 3a^2 + 3ah + h^2 + h.\end{aligned}$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2 + h) = 3a^2.$$

Quelle que soit la valeur de a , le nombre dérivé de x^3 en a est $f'(a) = 3a^2$.

Exemple 11 (la fonction racine carrée)

Posons $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\&= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\&= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\&= \frac{(\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\&= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\&= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\&= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Quelle que soit la valeur de a , le nombre dérivé de \sqrt{x} en a est $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Exemple 12 (la fonction inverse)

Posons $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\&= \frac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)}}{h} \\&= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\&= -\frac{h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} \\&= -\frac{1}{a(a+h)}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a(a+h)} \right) = -\frac{1}{a^2}.$$

Quelle que soit la valeur de a , le nombre dérivé de $\frac{1}{x}$ en a est $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

II. 3 - Interprétations du nombre dérivé

En physique

Imaginons un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale.

La distance qu'il parcourt en t secondes est égale à $d(t) = 5t^2$.

Sa vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est :

$$v = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$$

car $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$. On peut aussi noter :

$$d = \frac{\Delta d}{\Delta t},$$

« Δ » désignant ici la variation (et non le discriminant).

La **vitesse instantanée** est la vitesse à un instant donné. Ainsi, la vitesse instantanée à l'instant t peut être vue comme étant égale à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}$, donc égale à $v'(t)$.

Le nombre dérivé peut donc être perçu comme une vitesse instantanée. En liaison avec la notation $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ (pour le taux d'accroissement), on peut aussi noter :

$$v'(t) = \frac{dd(t)}{dt}.$$

En économie

On définit le **coût marginal de production** comme le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite. Si C représente le coût total, on note C_m le coût marginal associé.

Le coût marginal sert à évaluer s'il est rentable d'accepter une commande supplémentaire.

On peut alors exprimer le coût marginal par :

$$C_m(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}.$$

On s'aperçoit que le coût marginal n'est rien d'autre que le nombre dérivé du coût total.

III - Équation de la tangente

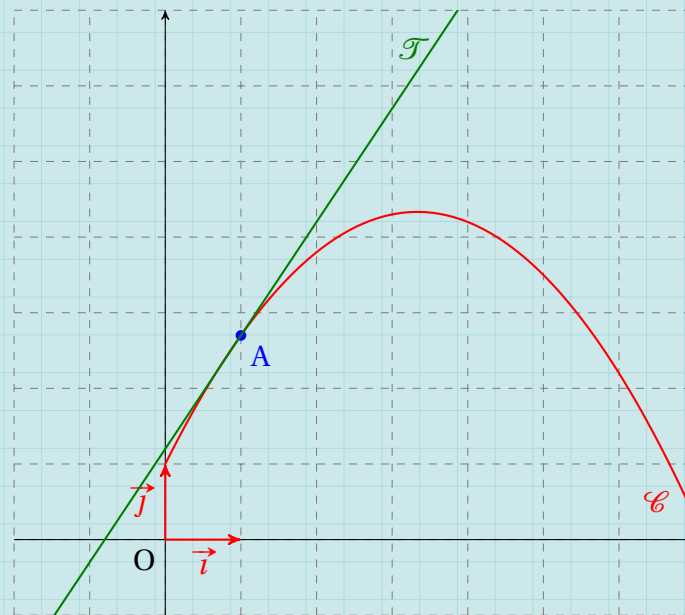
III . 1 - Définition

Définition 6

Soit \mathcal{C} la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

On appelle **tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a** la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a; f(a))$.

Exemple 13



\mathcal{T} est ici la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

III . 2 - Équation

Propriété 8

Soit \mathcal{C} la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Démonstration 4

Par définition, le coefficient de la tangente est $f'(a)$ donc l'équation réduite de la tangente est de la forme :

$$y = f'(a)x + p.$$

On sait de plus que le point de coordonnées $(a; f(a))$ est sur \mathcal{C} donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

donc :

$$p = f(a) - af'(a).$$

Ainsi, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

soit, en factorisant une partie du second membre par $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

IV - Fonction dérivée

IV.1 - Définition

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On définit la **fonction dérivée de f** comme étant la fonction :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x .

Si $f'(x)$ est définie sur un intervalle J inclus dans I alors on dit que f est **dérivable sur J** .

IV.2 - Dérivées de référence

Propriété 9

D'après les exemples 9, 10, 11 et 12, on peut écrire :

1 Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$ sur \mathbb{R} .

2 Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ sur \mathbb{R} .

3 Si $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$ (la fonction n'est pas dérivable en 0).

4 Si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

De plus,

5 Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

IV.3 - Dérivée d'une fonction composée

Propriété 10

Soit la fonction $x \mapsto g(ax + b)$, où a et b sont deux nombres réels.
Alors, sa fonction dérivée est :

$$x \mapsto ag'(ax + b).$$

Exemple 14

1 $f(x) = \sqrt{-5x + 20}$, définie sur $]-\infty; 4]$.

Ici, $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = g(-5x + 20)$.

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ donc } f'(x) = -5g'(-5x + 20) \text{ soit :}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{-5x + 20}}, \text{ définie sur }]-\infty; 4[.$$

2 $f(x) = \frac{1}{4x + 12}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Ici, $g(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = g(4x + 12)$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ donc } f'(x) = 4g'(4x + 12) \text{ soit :}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{(4x + 12)^2}, \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

V - Fonction valeur absolue

V.1 - Définition (rappel de Seconde)

Définition 8

Pour tout réel x , on définit la **valeur absolue de x** , et on note $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 15

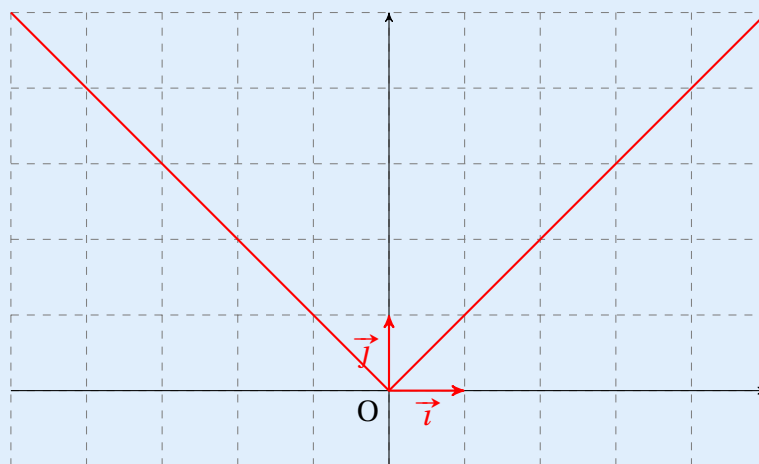
1 $|-5| = 5$ car $-5 < 0$.

2 $|3| = 3$ car $3 \geq 0$.

3 $|0| = 0$.

4 $|\pi| = \pi$ car $\pi \geq 0$.

V.2 - Courbe représentative



V.3 - Dérivée

Propriété 11

Soit $f(x) = |x|$. Alors,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et $f'(0)$ n'existe pas.

Remarque 8

On dit que la fonction n'est pas dérivable en 0.

Démonstration 5

D'après la relation $(x^n)' = nx^{n-1}$, on sait que la dérivée de $x \mapsto x$ est $x \mapsto 1$, et celle de $x \mapsto -x$ est $x \mapsto -1$.

Or, si $x < 0$, $|x| = -x$ donc sur $]-\infty; 0[$, la dérivée de $x \mapsto |x|$ est celle de $x \mapsto -x$, c'est-à-dire $x \mapsto -1$.

De plus, si $x > 0$, $|x| = x$ donc sur $]0; +\infty[$, la dérivée de $x \mapsto |x|$ est celle de $x \mapsto x$, c'est-à-dire $x \mapsto 1$.

Le nombre dérivé de $x \mapsto |x|$ à gauche de 0 est donc égal à -1 alors que celui à droite de 0 vaut 1. Ainsi, en 0, il n'y a pas le même nombre dérivé à gauche et à droite : $f'(0)$ n'existe donc pas.

VI - Opérations sur les dérivées

Propriété 12 (formules usuelles)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

1 $(ku)' = ku'$

2 $(u + v)' = u' + v'$.

3 $(u - v)' = u' - v'$.

4 $(uv)' = u'v + uv'$.

5 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 16 (produit d'un nombre et d'une fonction)

$f(x) = 3x^2$. On pose alors $u(x) = x^2$ et $k = 3$. Comme $u'(x) = 2x$, on a :

$$f'(x) = 3 \times 2x = 6x.$$

Exemple 17 (somme)

$f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 1$. Pour calculer $f'(x)$, on calcule la dérivée de chaque terme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3)' + (5x^2)' + (3x)' + (1)' \\ &= 4 \times 3x^2 + 5 \times 2x + 3 \times 1 + 0 \\ &= 12x^2 + 10x + 3. \end{aligned}$$

Exemple 18 (différence)

$f(x) = 8x^5 - 5x^2$. Pour calculer $f'(x)$, on calcule la dérivée de chaque terme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x^5)' - (5x^2)' \\ &= 8 \times 5x^4 - 5 \times 2x \\ &= 40x^4 - 10x. \end{aligned}$$

Exemple 19 (produit de deux fonctions)

$f(x) = (3x + 1)\sqrt{2x + 5}$. On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= 3x + 1 \\ u'(x) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{2x + 5} \\ v'(x) &= \frac{2}{2\sqrt{2x + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 5}} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3 \times \sqrt{2x+5} + (3x+1) \times \frac{1}{\sqrt{2x+5}} \\&= 3\sqrt{2x+5} + \frac{3x+1}{\sqrt{2x+5}} \\&= \frac{3\sqrt{2x+5} \times \sqrt{2x+5} + (3x+1)}{\sqrt{2x+5}} \\&= \frac{3(2x+5) + 3x+1}{\sqrt{2x+5}} \\&= \frac{9x+16}{\sqrt{2x+5}}.\end{aligned}$$

Exemple 20 (quotient de deux fonctions)

$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x+3}$. On pose :

$$\begin{aligned}u(x) &= 3x^2 - 5x + 2 \\u'(x) &= 6x - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x) &= x + 3 \\v'(x) &= 1\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(6x-5) \times (x+3) - (3x^2-5x+2) \times 1}{(x+3)^2} \\&= \frac{6x^2 + 18x - 5x - 15 - 3x^2 + 5x - 2}{(x+3)^2} \\&= \frac{3x^2 + 18x - 17}{(x+3)^2}.\end{aligned}$$

Remarque 9

On ne développe pratiquement jamais le carré au dénominateur ; nous verrons que cela à une utilité dans le paragraphe « Applications de la dérivation ».

Démonstration 6 (du point 4 de la propriété 12)

Calculons le taux d'accroissement de la fonction uv en a :

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \\&= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\&= \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a) - u(a+h)v(a) + u(a+h)v(a+h)}{h}\end{aligned}$$

(On a ici fait apparaître $u(a+h)v(a)$)

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{[u(a+h) - u(a)]v(a) + u(a+h)[v(a+h) - v(a)]}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a) + u(a+h) \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) = u(a).$$

Ainsi,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$

Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

VII - Applications de la dérivation

VII.1 - Variation d'une fonction

Propriété 13

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est strictement croissante sur $I \iff f'(x) > 0$ pour tout x de I .
- f est strictement décroissante sur $I \iff f'(x) < 0$ pour tout x de I .

Conséquence : pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.

Exemple 21

Soit $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

Sa dérivée est : $f'(x) = 9x^2 - 10x + 4$. C'est un polynôme de degré 2, dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 9 \times 4 = -44 < 0.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe du coefficient de x^2 , c'est-à-dire ici positif.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

VII. 2 - Extremum local

Définition 9

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

On dit que f admet un **extremum local** en a si $f'(a) = 0$ et si, pour $h \neq 0$, $f'(a-h)$ et $f'(a+h)$ n'ont pas le même signe.

Cet extremum local peut être :

- un **minimum** si $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{pour } x < a \\ f'(x) > 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$;
- un **maximum** si $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{pour } x < a \\ f'(x) < 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$.

Exemple 22

Considérons la fonction $f(x) = -2x^3 - 20x^2 + x + 2$.

Sa dérivée est : $f'(x) = -6x^2 - 40x + 1$, dont le discriminant est :

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 1624 > 0.$$

$f'(x)$ admet donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-20 + \sqrt{406}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-20 - \sqrt{406}}{6}.$$

On déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-20-\sqrt{406}}{6}$	$\frac{-20+\sqrt{406}}{6}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	<div><div></div><div><div><div>$f(x_2)$</div><div>$f(x_1)$</div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div></div></div>				

$f(x_2)$
est un minimum local.

$f(x_1)$
est un maximum local.

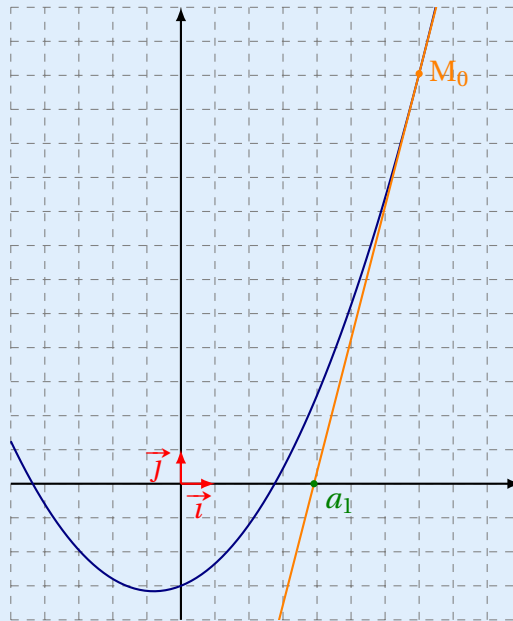
VII. 3 - Méthode de Newton

La méthode de Newton est un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée d'une solution à une équation du type $f(x) = 0$.

Voyons à travers un exemple son principe. Considérons la fonction f définie par :

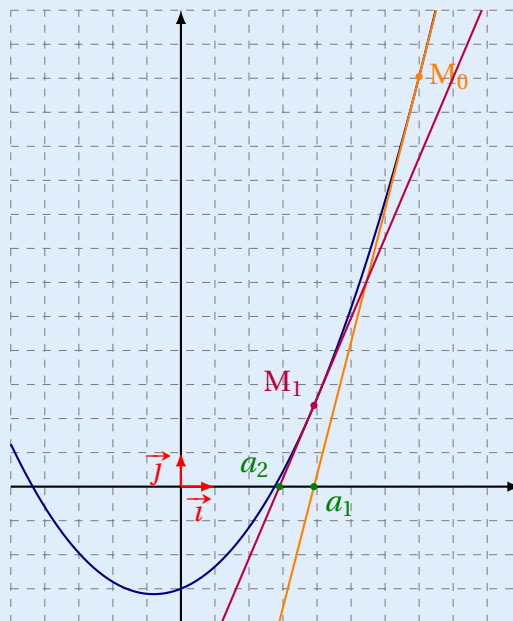
$$f(x) = 0,25x^2 + 0,4x - 3$$

dont la courbe représentative est donnée page suivante.



Prenons un point M_0 sur cette courbe dont l'abscisse x_0 est supérieure à 3, et traçons la tangente à la courbe en ce point : elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_1 .

Maintenant, prenons le point M_1 de coordonnées $(a_1; f(a_1))$, puis traçons la tangente à la courbe en M_1 : elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_2 , comme l'illustre le schéma suivant.



On continue ainsi de façon analogue, et on peut remarquer que les nombres a_1, a_2, a_3, \dots ainsi obtenus se rapprochent de l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. De plus, cela semble se rapprocher très vite; cela laisse à supposer que cette méthode est plutôt bonne pour trouver une valeur approchée de la solution positive à l'équation $f(x) = 0 \dots$

Cette méthode, qui consiste à faire plusieurs fois la même chose mais pour avec des valeurs qui changent, nous pousse à écrire un algorithme calculant les valeurs successives a_0, a_1, \dots

Mais avant cela, nous avons besoin de *formaliser* le problème.

Formalisation

Supposons connu la valeur de a_n ; alors $M_{n+1}(a_n; f(a_n))$.

L'équation de la tangente à la courbe au point M_{n+1} sera alors :

$$y = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n).$$

a_{n+1} est donc la solution de l'équation :

$$0 = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n).$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} 0 = f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) + f(a_n) &\iff -f(a_n) = f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) \\ &\iff -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_{n+1} - a_n \\ &\iff \boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}} \end{aligned}$$

Algorithme

Nous avons désormais une égalité qui permet de calculer a_{n+1} à partir de a_n ; nous pouvons donc écrire un algorithme qui calcule une série de valeurs à partir de la simple valeur de a_0 correspondant à l'abscisse du point M_0 :

```
a prend la valeur 7 (abscisse de  $M_0$ )
Pour i allant de 1 à 10:
    a prend la valeur  $a - f(a)/f'(a)$ 
Fin du Pour
Afficher a
```

```
a = 2.7552777669262354
```

Code Python 2-10

```
1 def f(x):
2     return 0.25*x*x+0.4*x-3
3
4 def g(x):
5     return 0.5*x+0.4
6
7 a = 7
8 for i in range(10):
9     a = a - f(a)/g(a)
10 print('a = ',a)
```

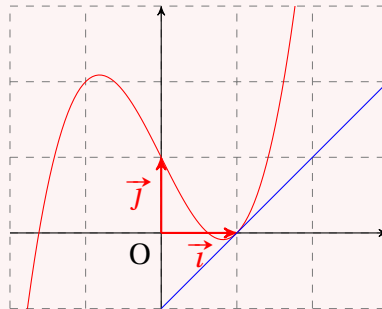

Nombre dérivé et tangente

Exercice 2.1 (lectures graphiques)

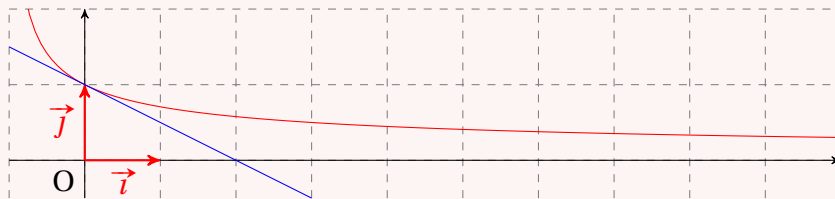
Pour chacune des questions suivantes, on donne la représentation graphique d'une fonction f (en rouge) et la tangente à cette représentation au point d'abscisse a .

Déterminer graphiquement $f'(a)$, puis écrire l'équation réduite de la tangente tracée.

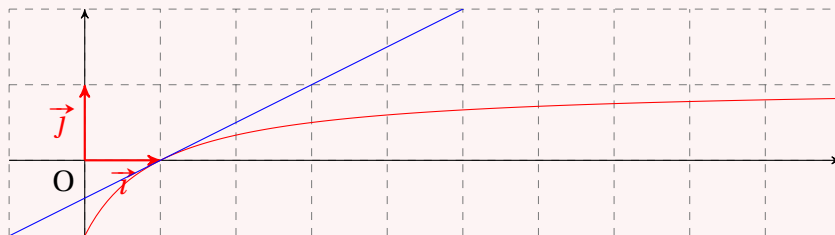
1 $a = 1$.



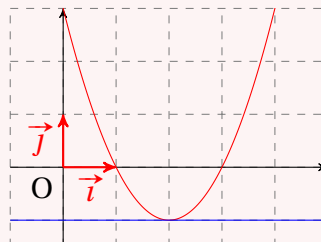
2 $a = 0$.



3 $a = 1$.



4 $a = 2$.



Solution page 90

Exercice 2.2 (calcul avec taux d'accroissement)

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(a)$ puis trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

1 $f(x) = x^2, a = 2$

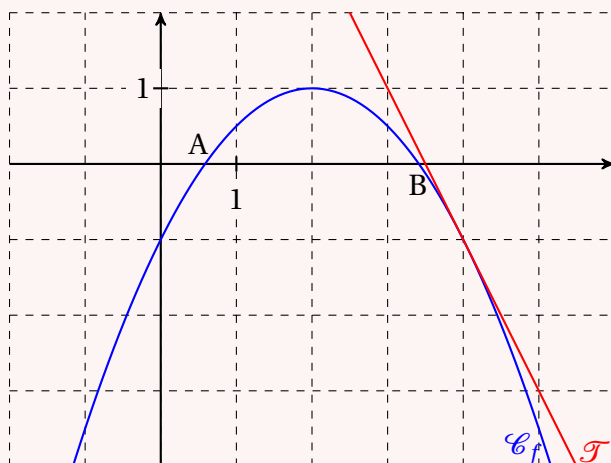
3 $f(x) = x^2 - 2x + 3, a = -1$

2 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$

4 $f(x) = \sqrt{x}, a = 4$

Solution page 91

Exercice 2.3 (lectures graphiques et raisonnement)



La courbe ci-dessus représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- 1 Lire graphiquement les valeurs : $f(0)$; $f(2)$; $f'(2)$; $f(4)$; $f'(4)$.
- 2 Déterminer les valeurs de a , b et c à l'aide des valeurs trouvées précédemment.
- 3 Calculer l'abscisse des points A et B.

Solution page 93

Exercice 2.4 (trouver des coefficients)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a , b , c et d sont quatre nombres réels.

On sait que :

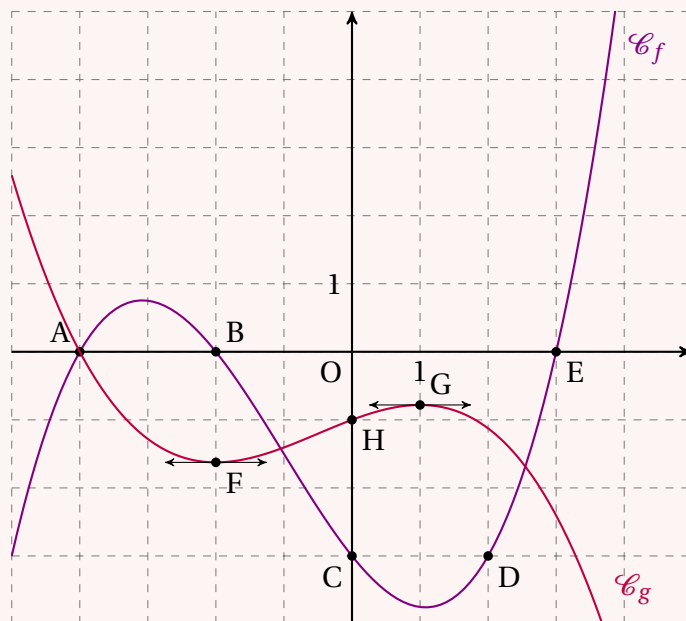
- le point A(1 ; -1) appartient à \mathcal{C}_f ;
- la tangente à \mathcal{C}_f au point A a pour équation : $y = -2x + 1$;
- \mathcal{C}_f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 ;
- $f'(0) = -5$

Déterminer les valeurs de a , b , c et d à l'aide de ces informations.

Solution page 94

Exercice 2.5 (d'après les courbes)

On considère les fonctions f et g dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



On sait que :

- les fonctions f et g sont des polynômes de degré 3;
- \mathcal{C}_f passe par les points A, B, C, D et E;
- \mathcal{C}_g passe par les points A et H;
- les tangentes à \mathcal{C}_g aux points d'abscisse -2 et 1 sont horizontales.

- 1 À l'aide des informations ci-dessous, déterminer l'expression factorisée de $f(x)$.
- 2 À l'aide des informations ci-dessous, déterminer une expression de $g(x)$.
- 3 Trouver les abscisses des points d'intersection des deux courbes par le calcul.

Solution page 95

Calculs de dérivées

Exercice 2.6 (sommes et différences)

Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer $f'(x)$.

1 $f(x) = 3x - 1$

2 $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$

3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

4 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

5 $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$

6 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$

Solution page 96

Exercice 2.7 (produits et quotients)

Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer $f'(x)$.

1 $f(x) = 2x\sqrt{x}$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}$

2 $f(x) = \frac{3x - 1}{4x + 5}$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

Solution page 96

Exercice 2.8 (sens de variations)

Pour chacune des fonctions f et g ,

- trouver son domaine de définition;
- trouver sa dérivée;
- trouver son sens de variations sur son domaine de définition;
- donner le signe de la fonction sur son domaine de définition.

1 $f(x) = (3x + 2)\sqrt{x}$

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

Solution page 98

Exercice 2.9 (sens de variations)

Pour chacune des fonctions suivantes,

- donner son domaine de définition;
- trouver sa dérivée;
- en déduire ses variations sur son domaine de définition.

1 $f(x) = \frac{3x - 4}{5x - 2}$

2 $g(x) = \frac{5x - 3}{x^2 - x - 2}$

3 $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

Solution page 100

Exercice 2.10 (en économie)

L'entreprise KIHARNAK fabrique de la poudre de fée dont tout le monde pourrait se passer et qui pourtant a un succès fou.

Son coût de production est donné par la fonction $C(q) = q^3 - 2q^2 + 10q + 150$, où q représente la quantité (en tonne) de poudre.

On définit le *coût unitaire*, ou *coût moyen*, par la fonction $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$.

On rappelle que le coût marginal est la fonction définie par : $C_m(q) = C'(q)$.

Dans cet exercice, il ne faudra pas hésiter à prendre des initiatives en s'aidant éventuellement de la calculatrice ou d'un quelconque autre instrument informatique.

- 1** Donner l'expression de $CM(q)$, puis celle de $C_m(q)$.

- 2 Étudier les variations de CM, puis donner la quantité q pour laquelle le coût moyen est minimal. Quel est alors ce coût?
- 3 Résoudre l'équation $CM(q) = C_m(q)$. Que peut-on constater?

Solution page 102

Exercice 2.11 (étude d'une fonction)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 1}$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

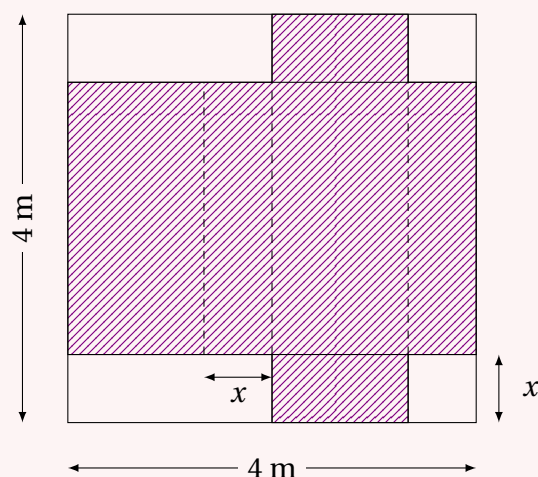
- 1 Montrer que la dérivée de la fonction f est donnée par : $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3 - x^2)}{2(x^2 + 1)^2}$.
- 2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$, puis en déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
- 3 Déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

Solution page 103

Optimisation

Exercice 2.12 (volume optimal d'une boîte)

On souhaite construire une boîte parallélépipédique à partir d'un carton carré de 4 mètres de côté, comme l'illustre le schéma suivant :



La partie hachurée correspond à la partie du carton qui va être pliée (aux pointillés) pour obtenir la boîte.

- 1 Montrer que le volume de la boîte est égal à $f(x) = 2x(2 - x)^2$.
- 2 Étudier les variations de f , puis en déduire la valeur de x (arrondie au centimètre près) pour laquelle le volume de la boîte est optimal.

Solution page 104

Exercice 2.13 (volume d'une casserole)

Une casserole peut être assimilée à un cylindre avec une seule base (le fond). On note R le rayon du disque constituant la base et h la hauteur du cylindre.



- 1 Montrer que la surface de la casserole est donnée par la fonction $f(R) = \pi R^2 + \frac{2V}{R}$, où V est le volume de la casserole.
- 2 Montrer alors que la surface est minimale quand la hauteur de la casserole est égale au rayon de la base.

Solution page 105

Exercice 2.14 (bénéfice maximal)

Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, ...) et d'autre part, les coûts variables (salaires, ingrédients, ...) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.

On estime que la fonction de coût total de cette entreprise (exprimé en dizaine d'euros) pour une journée est donnée par la fonction :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20.$$

On suppose que cette entreprise ne peut pas fabriquer plus de 800 pizzas par jour.

Cette entreprise vend une pizza 7,50 €. On note B la fonction qui donne le bénéfice quotidien de l'entreprise en fonction de q lots fabriqués et vendus.

- 1 Étudier les variations de C sur l'intervalle $[1; 20]$.
- 2 Exprimer en fonction de q le bénéfice $B(q)$ de cette entreprise (en dizaine d'euros).
- 3 Étudier les variations de B sur $[0; 20]$.

En déduire le nombre de lots de pizzas qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice ?

Solution page 106

Exercice 2.15 (Optimisation d'un bénéfice)

Une entreprise fabrique des fils de cuivre. Pour q tonnes fabriquées, le coût de production (exprimé en dizaine d'euros) est donné par :

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 16q^2 + 266q + 10.$$

Les contraintes de production ne permettent pas de produire plus de 40 tonnes par jour.

Le coût moyen de production est obtenu par l'expression :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} \quad \text{pour } q \in]0; 40].$$

Le coût marginal est le coût supplémentaire engendré par la production d'une tonne supplémentaire. On l'assimile à la dérivée du coût de production :

$$C_m(q) = C'(q).$$

Chaque tonne fabriquée est vendue 3 000 euros.

- 1** **a.** Déterminer l'expression du coût marginal $C_m(q)$.
b. En déduire les variations du coût total $C(q)$ sur $[0; 40]$.

- 2** **a.** Déterminer l'expression du coût moyen $C_M(q)$.
b. Montrer que :

$$C'_M(q) = \frac{2q^3 - 48q^2 - 30}{3q^2}.$$

On admettra que $C'_M(q) \leq 0$ sur $[0; q_0]$ et $C'_M(q) \geq 0$ sur $[q_0; 40]$, avec $q_0 \approx 24,026$.

- c.** Donner les variations de C_M sur $]0; 40]$.
d. Calculer une valeur approchée à l'unité de $C_M(q_0)$ et de $C_m(q_0)$. Que peut-on constater?

- 3** **a.** Montrer que le bénéfice quotidien de l'entreprise est donné par l'expression :

$$B(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 16q^2 + 34q - 10.$$

- b.** Trouver les variations de B sur $[0; 40]$.
c. Pour quelle production (arrondie à l'entier le plus proche) le bénéfice est-il maximal? Quelle est alors sa valeur?

Solution page 107

Exercice 2.16 (bénéfice maximal)

Un artisan fabrique de la confiture qu'il vend à un grossiste. Le coût de fabrication quotidien, en euros, de x kilogrammes de confiture est donné par la fonction :

$$C(x) = 0,01x^3 - 3,4x + 100.$$

Chaque kilogramme de confiture est vendu 14 euros.

Il estime qu'il ne peut pas fabriquer plus de 40 kilogrammes par jour.

1 Exprimer en fonction de x la recette quotidienne $R(x)$ de x kilogrammes de confiture vendus.

2 Montrer que le bénéfice quotidien de l'artisan pour x kilogrammes est donné par la fonction :

$$B(x) = -0,01x^3 + 17,4x - 100.$$

3 Calculer $B'(x)$.

4 Quelle quantité de confiture doit-il vendre afin d'obtenir un bénéfice maximal?

Solution page 108

Exercice 2.17 (coût de production et bénéfice)

Une entreprise fabrique et vend des radiateurs.

Elle estime que le coût de production mensuel de q radiateurs est donné par la fonction :

$$C(q) = 10 + 0,1q + \frac{250}{q}, \text{ exprimé en millier d'euros.}$$

Le coût moyen de production est donné par la fonction :

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q}, \text{ exprimé en millier d'euros.}$$

L'entreprise estime de plus que le nombre de radiateurs qu'elle peut fabriquer par mois est compris entre 10 et 100.

Le prix de vente d'un radiateur est fixé à 350 €.

1 Montrer que la dérivée de $C(q)$ est :

$$C'(q) = \frac{q^2 - 2500}{10q^2}.$$

2 Étudier les variations de la fonction C , et en déduire le nombre de radiateurs que l'entreprise peut fabriquer pour que son coût de production soit minimal.

On notera q_0 cette quantité.

3 Montrer que la dérivée de $CM(q)$ est :

$$CM'(q) = -\frac{10q + 500}{q^3}.$$

4 Pour quelle quantité q de radiateurs fabriqués le coût moyen de production est-il minimal? Comparer cette quantité à q_0 .

- 5** On note $B(q)$ le bénéfice, exprimé en millier d'euros, engendré par la vente de q radiateurs.

a. Montrer que $B(q) = 0,25q - 10 - \frac{250}{q}$.

- b.** Calculer $B(q_0)$ et $B(100)$.

Quelle quantité de radiateurs cette entreprise doit-elle fabriquer pour avoir un bénéfice maximal?

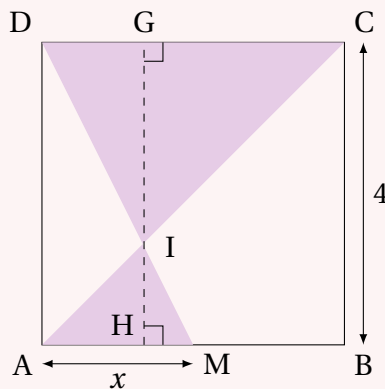
Solution page 109

Exercice 2.18 (dimensions d'un enclos)

Georges-Henri a trouvé un grillage long de 28 mètres. Il a alors l'idée de construire un enclos rectangulaire pour ses poules. Il souhaite que cet enclos ait la plus grande aire possible. Donner les dimensions de cet enclos.

Solution page 111

Exercice 2.19 (optimisation d'une aire)



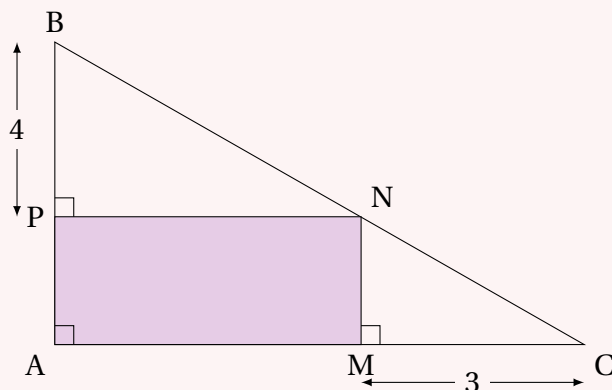
ABCD est un carré de côté 4, et M est un point de $[AB]$.
Déterminer la position de M pour que l'aire coloriée soit minimale.

Pour cela, on pourra s'aider des indications et des points portés sur le schéma ci-dessus.

Solution page 111

Exercice 2.20 (minimisation d'une aire)

On considère la figure suivante, où N est un point du segment $[BC]$, P un point de $[AB]$ et M un point de $[AC]$:

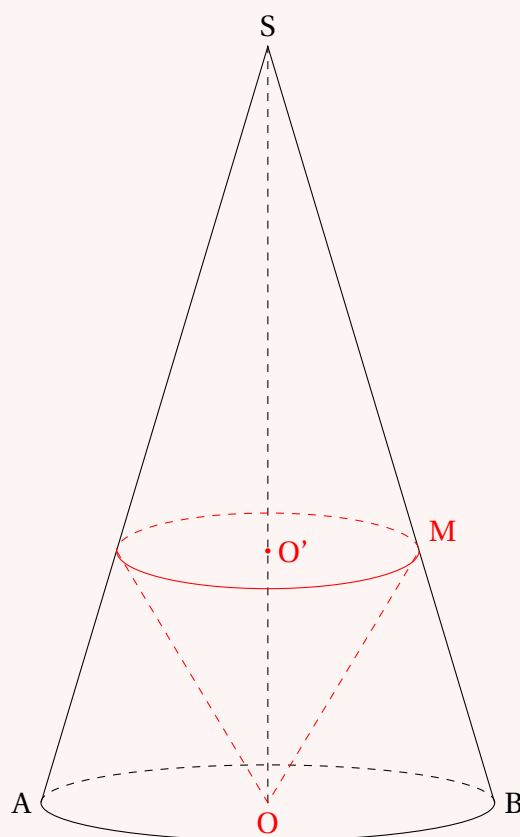


- 1 Montrer que l'aire du rectangle $AMNP$ est égale à 12.
- 2 Pour quelles valeurs de AM et AP l'aire du triangle ABC est-elle minimale?

Solution page 112

Exercice 2.21 (volume optimal d'un cône)

On considère la figure suivante :



On donne :

- $SO = 10$ cm.
- $OB = 3$ cm.
- M est un point mobile sur $[SB]$ tel que $MB = x$ cm.

On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du cône de sommet O est optimal. Pour cela, répondre aux questions suivantes :

- 1 Calculer SB .
- 2 Déterminer en fonction de x le rayon de la base ainsi que la hauteur OO' du cône de sommet O .
- 3 En notant $f(x)$ le volume du cône de sommet O , montrer que :

$$f(x) = \frac{30\pi}{109\sqrt{109}} x(\sqrt{109} - x)^2.$$

- 4 Conclure.

Solution page 114

Exercices spécimens

Les exercices spécimens sont des exercices vous permettant de tester votre niveau exigible pour un devoir surveillé par exemple.

Exercice 2.22 (polynôme de degré 3)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1 On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} . Déterminer l'expression de $f'(x)$.
- 2 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $3x^2 + 14x + 1 > 0$.
- 3 En déduire le tableau de variations de la fonction f .
- 4 Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
- 5 Justifier que 1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.
- 6 Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = (x - 1)(x^2 + 8x + 19)$.
- 7 Étudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur \mathbb{R} .

Solution page 115

Exercice 2.23

Soit f la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1 On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
Donner l'expression de $f'(x)$, pour tout nombre réel x .
- 2 On note (T) la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 . Donner l'équation réduite de la tangente (T).
- 3 Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x^3 - 4x + 1$.
On note \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans le même repère que la courbe \mathcal{C}_f .
 - a. Montrer que pour tout nombre réel x ,

$$f(x) - g(x) = -5x^2 + 4x + 1.$$

- b. Étudier sur \mathbb{R} le signe de $f(x) - g(x)$.
- c. En déduire pour quelles valeurs de x la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de la courbe \mathcal{C}_g .

Solution page 117

Exercice 2.24

Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour. Le coût moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros, pour x milliers de pièces produites, est donné par la fonction f définie pour tout réel $x \in [1; 5]$ par :

$$f(x) = \frac{0,5x^3 - 3x^2 + x + 16}{x}.$$

- 1 Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.
- 2 On admet que f est dérivable sur $[1; 5]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel $x \in [1; 5]$,

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}.$$

- 3 Vérifier que, pour tout réel x ,

$$x^3 - 3x^2 - 16 = (x - 4)(x^2 + x + 4).$$

- 4 En déduire le tableau de variation de f sur $[1; 5]$.
- 5 Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

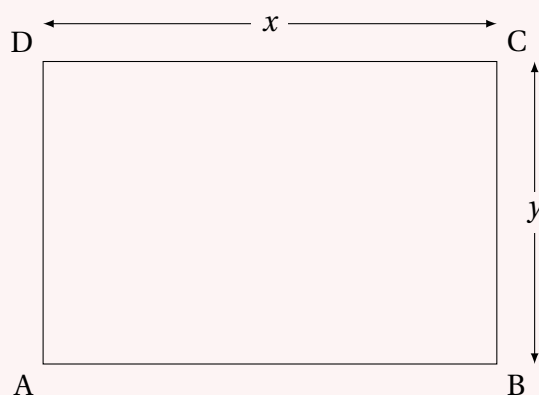
Solution page 118

Exercice 2.25

Dans cet exercice, les distances sont exprimées en mètres.

On considère un rectangle ABCD d'aire 49 m^2 tel que $DC = x$ et $BC = y$.

On admet que les nombres x et y sont strictement positifs.



On souhaite déterminer les dimensions x et y pour que le périmètre de ce rectangle soit minimal.

- 1** a. Montrer que le périmètre, en mètres, du rectangle ABCD est égal à $2x + \frac{98}{x}$.
b. Calculer ce périmètre pour $x = 10$.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{98}{x}$.

On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

- 2** Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2x^2 - 98}{x^2}$.
- 3** Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- 4** En déduire les dimensions du rectangle d'aire 49 m^2 dont le périmètre est minimal.

Solution page 119

Corrigé de l'exercice 2.1 page 77

Dans cet exercice, il faut avoir en tête que le nombre dérivé d'une fonction en un point a est le coefficient directeur de la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

Il faut donc, pour chaque question, regarder la tangente à la courbe tracée en rouge au point d'abscisse a donné.

- 1** Ici, la tangente a pour coefficient directeur 1. Donc $f'(1) = 1$.

Ainsi, la tangente tracée a pour équation réduite :

$$y = x - 1$$

(N'oublions pas que dans l'équation d'une droite $y = mx + p$, p désigne l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).

- 2** Ici, le coefficient directeur de la tangente tracée est $-\frac{1}{2}$. En effet, les points $A(0; 1)$ et $B(2; 0)$ sont sur la tangente donc :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

- 3** Ici, le coefficient directeur de la tangente est $\frac{1}{2}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

- 4** Ici, la tangente est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0.

L'équation de la tangente est alors :

$$y = -1$$

Corrigé de l'exercice 2.2 page 78

1 $f(x) = x^2, a = 2.$

- Calcul de $f'(2).$

Le taux d'accroissement de f en 2 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h} \\ &= \frac{h(4+h)}{h} \\ &= 4+h.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 2 est :

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est alors :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y = 4(x-2) + 4$$

$$y = 4x - 8 + 4$$

$$\boxed{y = 4x - 4}$$

2 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1.$

- Calcul de $f'(1).$

Le taux d'accroissement de f en 1 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} \\ &= -\frac{h}{h(1+h)} \\ &= -\frac{1}{1+h}.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 1 est :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1+h} \right) = -1.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -1(x - 1) + 1$$

$$y = -x + 1 + 1$$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

3 $f(x) = x^2 - 2x + 3, a = -1.$

- Calcul de $f'(-1)$.

Le taux d'accroissement de f en -1 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - ((-1)^2 - 2 \times (-1) + 3)}{h} \\ &= \frac{h^2 - 2h + 1 + 2 - 2h + 3 - 6}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h} \\ &= \frac{h(h-4)}{h} \\ &= h - 4. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en -1 est :

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$y = -4(x + 1) + 6$$

$$y = -4x - 4 + 6$$

$$\boxed{y = -4x + 2}$$

4 $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$.

- Calcul de $f'(3)$.

Le taux d'accroissement de f en 4 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 4 est :

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} \right) = \frac{1}{4}.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1 + 2$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

Corrigé de l'exercice 2.3 page 78

1

- $f(0) = -1$;
- $f(2) = 1$;
- $f'(2) = 0$ car la fonction atteint un maximum pour $x = 2$;
- $f(4) = -1$;
- $f'(4) = -2$ (coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4).

2

- $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$; donc $c = -1$ d'après la question précédente (1^{er} point).
- $f'(x) = 2ax + b$ et $f'(2) = 4a + b$; donc $4a + b = 0$, soit $b = -4a$.

- $f(2) = 1$ donc $4a + 2b - 1 = 1$, soit $-b + 2b = 2$ d'après le point précédent. Ainsi, $b = 2$.
- $f'(4) = 8a + b = -2$ donc $8a = -4$, soit $b = -\frac{1}{2}$.

Finalement, on a : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

3 L'abscisse des points A et B sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = 4 - 2 = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_B &= \frac{-2 - \sqrt{2}}{-1} \\ \underline{x_B} &= \underline{2 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_A &= \frac{-2 + \sqrt{2}}{-1} \\ \underline{x_A} &= \underline{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.4 page 78

1 • $A(1; -1) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = -1$, soit :

$$a + b + c + d = -1 \quad (2.3)$$

• la tangente à \mathcal{C}_f au point A a pour équation : $y = -2x + 1$ donc $f'(1) = -2$, soit :

$$3a + 2b + c = -2 \quad (2.4)$$

• \mathcal{C}_f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 donc $f(0) = 2$, d'où :

$$d = 2.$$

• $f'(0) = -5$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ donc :

$$c = -5.$$

Les équations 2.3 et 2.4 donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = -1 - (-5) - 2 = 2 \\ 3a + 2b = -2 - (-5) = 3 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a = 2 - b \\ 3(2 - b) + 2b = 3 \end{cases}$$

La seconde équation donne alors :

$$6 - b = 3 \quad \text{soit :} \quad b = 3.$$

La première équation donne alors :

$$a = 2 - 3 = -1.$$

On obtient finalement :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2.$$

Corrigé de l'exercice 2.5 page 79

1 $f(x) = a(x+4)(x+2)(x-3)$. En effet, f s'annule pour $x = -4$, $x = -2$ et $x = 3$.

De plus, $f(0) = -3$ donc $a \times 4 \times 2 \times (-3) = -3$, soit $a = \frac{1}{8}$. Ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{8}(x+4)(x+2)(x-3)$$

2 $g(x) = (x+4)(ax^2 + bx + c)$. En effet, $g(-4) = 0$.

De plus, $g(0) = -1$ donc $4c = -1$, soit $c = -\frac{1}{4}$.

Ainsi, $g'(x) = ax^2 + bx - \frac{1}{4} + (x+4)(2ax + b)$ (on dérive le produit).

Or, $g'(-2) = 0$ donc $4a - 2b - \frac{1}{4} + 2(-4a + b) = 0$, soit $-4a = \frac{1}{4}$. Donc $a = -\frac{1}{16}$.

De plus, $g'(1) = 0$ donc $-\frac{1}{16} + b - \frac{1}{4} + 5\left(-\frac{1}{8} + b\right) = 0$, soit $6b = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$. Donc $c = \frac{5}{32}$. Ainsi :

$$g(x) = (x+4)\left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}\right)$$

3 L'abscisse d'un point d'intersection des deux courbes vérifie l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{8}(x+4)(x+2)(x-3) = (x+4)\left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8}(x^2 - x - 6) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 24 = -2x^2 + 5x - 8 \text{ on a multiplié par 32} \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 9x - 16 = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = 81 - 4 \times 6 \times (-16) = 465.$$

Les abscisses des deux points d'intersection sont donc :

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{465}}{12} \quad ; \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{465}}{12}$$

Corrigé de l'exercice 2.6 page 79

- 1 $f(x) = 3x - 1$ donc $f'(x) = 3$.
- 2 $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = 10x + 3$.
- 3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = x^2 - 10x + 3$.
- 4 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- 5 $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$.
- 6 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$ donc $f'(x) = -x + 3 - \frac{1}{6\sqrt{x}}$.

Corrigé de l'exercice 2.7 page 80

- 1 $f(x) = 2x\sqrt{x}$. On pose :

$$u(x) = 2x$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = 2$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 3\sqrt{x}}$$

- 2 $f(x) = \frac{3x-1}{4x+5}$. On pose :

$$u(x) = 3x - 1$$

$$v(x) = 4x + 5$$

$$u'(x) = 3$$

$$v'(x) = 4$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{3(4x+5) - 4(3x-1)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{12x+15-12x+4}{(4x+5)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{19}{(4x+5)^2}}$$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$. On pose :

$$u(x) = \sqrt{x} - x$$

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$v'(x) = 2x$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \times (x^2 + 1) - (\sqrt{x} - x) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} - x^2 - 1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + x^2 - 2x\sqrt{x} - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2}}$$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$. On pose :

$$u(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$v(x) = x - 3$$

$$u'(x) = 2x - 3$$

$$v'(x) = 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2x - 3)(x - 3) - (x^2 - 3x + 1) \times 1}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 1}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}}$$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}$.

On commence par simplifier l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\frac{x^2+1}{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= x\sqrt{x} & v(x) &= x^2 + 1 \\ u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} & v'(x) &= 2x \\ &= \sqrt{x} + \frac{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{2\cancel{\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2+1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}(3-x^2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.8 page 80

1 $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$.
- f est de la forme uv avec :

$$u(x) = 3x + 2$$

$$u'(x) = 3$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
 &= 3\sqrt{x} + (3x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= 3\sqrt{x} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{6x+3x+2}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}$$

- $f'(x) > 0 \iff 9x+2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\frac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

- D'après le tableau de variation de f , on peut dire que $f(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.
- g est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= 1 + \frac{1}{x} \\
 u'(x) &= -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \sqrt{x} \\
 v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
 &= -\frac{1}{x^2}\sqrt{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{x \times \sqrt{x} \times \cancel{x}\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

- $g'(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$ car $2x\sqrt{x} > 0$ sur \mathcal{D}_g .

On a alors le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$			

- D'après le tableau de variations de g , on peut dire que $g(x) \geq 2$ sur $]0; +\infty[$, donc $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 2.9 page 80

1 $f(x) = \frac{3x-4}{5x-2}$.

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$.

- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 3x - 4$$

$$v(x) = 5x - 2$$

$$u'(x) = 3$$

$$v'(x) = 5$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{3(5x-2) - 5(3x-4)}{(5x-2)^2} \\ &= \frac{15x-6-15x+20}{(5x-2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{14}{(5x-2)^2}$$

- $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ donc :

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		+ +	
$f(x)$			

2 $g(x) = \frac{5x-3}{x^2-x-2}$.

- Une racine évidente de $x^2 - x - 2$ est $x_1 = 2$. De plus, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ donc $2x_2 = -2$, soit $x_2 = -1$.

Ainsi, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 5x - 3$$

$$v(x) = x^2 - x - 2$$

$$u'(x) = 5$$

$$v'(x) = 2x - 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{5(x^2 - x - 2) - (5x - 3)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} \\ &= \frac{5x^2 - 5x - 10 - 10x^2 + 5x + 6x - 3}{(x^2 - x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{-5x^2 + 6x - 13}{(x^2 - x - 2)^2}$$

- $g'(x)$ est du signe de $-5x^2 + 6x - 13$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 36 - 260 < 0.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-			
$g(x)$				

3 $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$

- $x^2 - 3x + 2$ possède $\alpha = 1$ comme racine évidente, donc la seconde racine est $\beta = 2$.
Ainsi, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = x^2 + x + 1$$

$$v(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$u'(x) = 2x + 1$$

$$v'(x) = 2x - 3$$

D'où :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2x + 1)(x^2 - 3x + 2) - (x^2 + x + 1)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + x^2 - 3x + 2 - (2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + 2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2 - 2x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{-4x^2 + 2x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

- $h'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 2x + 5$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 4 + 80 = 84.$$

Ses deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{84}}{-8} = \frac{-2 + 2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1 - \sqrt{21}}{4} \approx -0,9 < \alpha$$

et

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{84}}{-8} = \frac{-2 - 2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \approx 1,4 \in]\alpha; \beta[=]1; 2[.$$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	$\alpha = 1$	x_2	$\beta = 2$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	+	0	-
$h(x)$	\searrow		\nearrow	\nearrow		\searrow

Corrigé de l'exercice 2.10 page 80

1 $CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^3 - 2q^2 + 10q + 150}{q} = q^2 - 2q + 10 + \frac{150}{q}.$

$$C_m(q) = C'(q) = 3q^2 - 4q + 10.$$

2 $CM'(q) = 2q - 2 - \frac{150}{q^2} = \frac{2q^3 - 2q^2 - 150}{q^2} = \frac{2}{q^2}(q^3 - q^2 - 75).$

$$\frac{2}{q^2} > 0 \text{ donc } CM'(q) \text{ est du signe du polynôme } P(q) = q^3 - q^2 - 75.$$

$$P'(q) = 3q^2 - 2q = q(3q - 2) \text{ donc } q = 0 \text{ et } q = \frac{2}{3} \text{ sont les deux racines de } P.$$

On en déduit le tableau suivant :

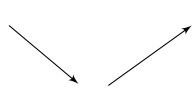
q	0	$\frac{2}{3}$	5	$+\infty$
$P'(q)$	-	0	+	
$P(q)$	-75	\nearrow		25

Intuitivement, comme il n'y a pas de valeurs interdites entre $\frac{1}{3}$ et 5, on peut supposer qu'il existe une valeur de q , notée α , comprise entre $\frac{2}{3}$ et 5, telle que $P(\alpha) = 0$.

Remarque 12

Vous verrez l'année prochaine une formulation plus adéquate de ce qui vient d'être dit sur l'existence de α ; ce sera un théorème du cours.

On peut alors dresser le tableau suivant :

q	0	α	$+\infty$
$CM'(q)$		- 0 +	
$CM(q)$			

À la calculatrice, on trouve une valeur approché de α :

$$\alpha \approx 4,578.$$

Le coût moyen de production est donc minimal pour 4578 kg de poudre fabriquée.

Le coût minimal est alors $CM(\alpha) \approx 54,57$ €, ce qui signifie qu'une tonne de poudre (de fée) coûte en moyenne 54,57 € à fabriquer si on en fabrique 4,578 tonnes.

3 Résolvons l'équation $CM(q) = C_m(q)$ à la calculatrice : on trouve $q \approx 4,578$.

On constate que l'on obtient la valeur de q pour laquelle le coût moyen est minimal.

Corrigé de l'exercice 2.11 page 81

1 f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x\sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 1$.

u est une fonction produit gh avec $g(x) = x$ et $h(x) = \sqrt{x}$, donc $u = g'h + h'g$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2 + 1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(x^2 + 1) - 4x^2\sqrt{x}}{2(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3 - x^2)}{2(x^2 + 1)^2}$$

2 $2(x^2 + 1)^2 > 0$ et $\sqrt{x} \geq 0$ sur $[0; +\infty[$. Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $3 - x^2$, polynôme de degré 2 admettant pour racines $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ et dont le coefficient de x^2 est négatif, d'où le tableau page suivante.

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	0	0

- 3 L'équation réduite d'une tangente est donnée par la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec ici $a = 1$.

$f(a) = \frac{1}{2}$ et $f'(a) = \frac{1}{4}$ donc l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 est :

$$y = \frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}$$

soit $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

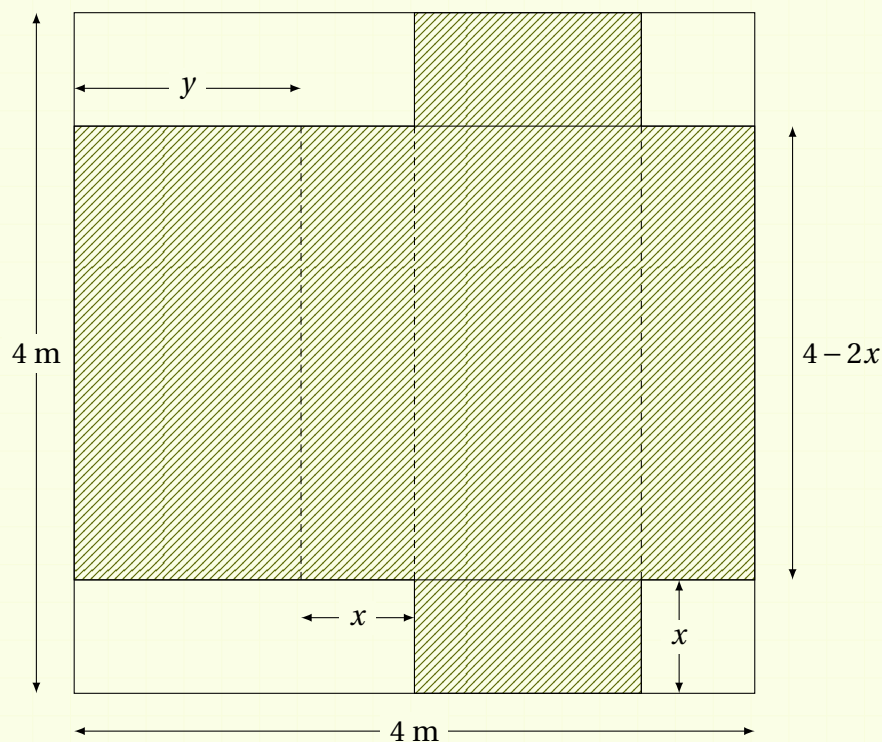
Corrigé de l'exercice 2.12 page 81

- 1 Notons y la largeur d'une face de la boîte (voir illustration page suivante). Alors,

$$y + x + y + x = 4,$$

soit :

$$y = 2 - x.$$




Le volume de la boîte est alors :

$$f(x) = x \times (4 - 2x) \times y$$

$$f(x) = 2x(2 - x)^2$$

2 $f(x) = 2x(4 - 4x + x^2) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$.

Ainsi, $f'(x) = 6x^2 - 16x + 8$, dont le discriminant est $\Delta = 16^2 - 4 \times 6 \times 8 = 64$. $f'(x)$ admet donc deux racines : $\alpha = \frac{16 - \sqrt{64}}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{16 + 8}{12} = 2$. On a alors :

x	0	$\frac{2}{3}$	2
$f'(x)$	+	0	-
f			

Notons que x ne peut pas dépasser la valeur 2 car il faut que $4 - 2x \geq 0$, soit $2x \leq 4$, d'où $x \leq 2$.

Le maximum de f est atteint en $x = \frac{2}{3}$ (exprimé en mètre).

Le volume de la boîte est optimal pour $x = 67$ cm.

Corrigé de l'exercice 2.13 page 82

1 L'aire du disque de fond est : πR^2 ;

l'aire de la surface latérale est : $2\pi R h$ (c'est un rectangle de largeur h et de longueur égale au périmètre du disque de base, soit $2\pi R$).

Donc $f(R) = \pi R^2 + 2\pi R h$.

Or, le volume d'un cylindre est :

$$V = \pi R^2 h$$

donc :

$$h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Alors,

$$f(R) = \pi R^2 + 2\pi R \times \frac{V}{\pi R^2} = \boxed{\pi R^2 + \frac{2V}{R}}$$

2 $f'(R) = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}$
 $= 2 \times \frac{\pi R^3 - V}{R^2}.$

Ainsi,

$$f'(R) > 0 \iff R^3 > \frac{V}{\pi} = \frac{\pi R^2 h}{\pi} = R^2 h.$$

Donc, en simplifiant par R^2 :

$$R > h.$$

Ainsi, le minimum de la fonction f est atteint pour $R = h$.

Nous avons bien vérifié que la surface de la casserole est minimale quand la hauteur de la casserole est égale à son rayon. Prenez une casserole chez vous et essayez !

Corrigé de l'exercice 2.14 page 82

1 $C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$. donc $C'(q) = \frac{3}{2}q^2 - 4q + 5$.

Le discriminant de $C'(q)$ est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 5 = 16 - 30 = -14 < 0.$$

Par conséquent, $C'(q) > 0$ sur \mathbb{R} et donc sur $[0; 20]$. Ainsi, C est strictement croissante sur $[0; 20]$.

2 Une pizza est vendue 7,50 € et il y a 4 dizaines de pizzas dans un lot donc la recette (exprimée en dizaine d'euros) est :

$$R(q) = 4 \times 7,5q = 30q.$$

Ainsi, le bénéfice est :

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 30q - \frac{1}{2}q^3 + 2q^2 - 5q - 20 \end{aligned}$$

$$B(q) = -\frac{1}{2}q^3 + 2q^2 + 25q - 20$$

3 $B'(q) = -\frac{3}{2}q^2 + 4q + 25$. Le discriminant de $B'(q)$ est :

$$\Delta = 16 + 150 = 166.$$

Les racines sont donc :

$$q_1 = \frac{-4 - \sqrt{166}}{-3} \approx 5,63$$

et

$$q_2 = \frac{-4 + \sqrt{166}}{-3} < 0.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	q_1	20
$B'(q)$		+	-
$B(q)$		↗	↘

Le bénéfice maximal est donc atteint pour $q = 5$ ou $q = 6$ lots de 40 pizzas. Le bénéfice (en dizaine d'euros) est alors :

$$B(5) = -\frac{1}{2} \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 25 \times 5 - 20 = 92,5.$$

$$B(6) = -\frac{1}{2} \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 25 \times 6 - 20 = 94.$$

Le bénéfice maximum est donc atteint pour 6 lots de 40 pizzas fabriqués, et est égal à 94 €.

Corrigé de l'exercice 2.15 page 83

1 a. $C_m(q) = C'(q)$

$$= \frac{1}{3} \times 3q^2 - 16 \times 2q + 266$$

$$C_m(q) = q^2 - 32q + 266$$

b. Le discriminant de $C_m(q)$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-32)^2 - 4 \times 1 \times 266 \\ &= -40.\end{aligned}$$

Ainsi, $C_m(q) > 0$ sur \mathbb{R} , et donc sur $[0; 40]$, ce qui signifie que la fonction C est strictement croissante sur $[0; 40]$.


2 a. $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$

$$C_M(q) = \frac{1}{3}q^2 - 16q + 266 + \frac{10}{q}$$

b. $C'_M(q) = \frac{2}{3}q - 16 - \frac{10}{q^2} = \frac{\frac{2}{3}q^3 - 16q^2 - 10}{q^2}$

$$C'_m(q) = \frac{2q^3 - 48q^2 - 30}{3q^2}$$

c. D'après ce qui est admis dans l'énoncé, on a :

x	0	q_0	40
$C'_M(q)$	-	0	+
$C_M(q)$			

d. $C_M(q_0) \approx C_M(24,026) \approx 74.$

$$C_m(q_0) \approx 74.$$

On constate alors que $C_M(q_0) = C_m(q_0)$.

On dit ici que l'optimum technique est atteint pour une quantité q_0 produite.

3 a. $B(q) = 300q - C(q)$

$$= 300q - \left(\frac{1}{3}q^3 - 16q^2 + 266q + 10 \right)$$

$$= 300q - \frac{1}{3}q^3 + 16q^2 - 266q - 10$$

$$B(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 16q^2 + 34q - 10$$

b. $B'(q) = -\frac{1}{3} \times 3q^2 + 16 \times 2q + 34$

$$= -q^2 + 32q + 34.$$

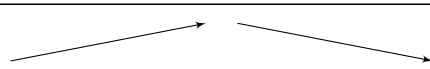
Le discriminant de $B'(q)$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 32^2 - 4 \times (-1) \times 34 \\ &= 1\,160 > 0\end{aligned}$$

Il admet donc deux racines :

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & q_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ q_1 &= \frac{-32 - \sqrt{1\,160}}{2 \times (-1)} & q_2 &= \frac{-32 + \sqrt{1\,160}}{2 \times (-1)} \\ q_1 &= 16 + \sqrt{290} \approx 33,029 & q_2 &= 16 - \sqrt{290} \approx -1,029\end{aligned}$$

On a alors :

x	0	q_1	40
$B'(q)$	+	0	-
$B(q)$			

Le bénéfice est donc maximal pour environ 33 tonnes, et est alors à peu près égal à 33 517 €.

Corrigé de l'exercice 2.16 page 84

- 1** La recette quotidienne s'obtient en multipliant la quantité de confiture vendue (en kilogramme) par le prix unitaire (soit 14 €). Ainsi,

$$R(x) = 14x$$

- 2** Le bénéfice quotidien de l'artisan pour x kilogrammes est donné par la fonction :

$$\begin{aligned}B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 14x - (0,01x^3 - 3,4x + 100) \\ &= -0,01x^3 + 14x + 3,4x - 100\end{aligned}$$

$$C(x) = -0,01x^3 + 17,4x - 100$$

- 3** La dérivée de $B(x)$ est :

$$B'(x) = -0,01 \times 3x^2 + 17,4 \times 1 - 0$$

$$B'(x) = -0,03x^2 + 17,4$$

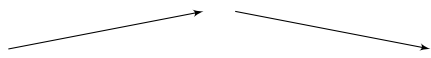
- 4** $B'(x) = 0 \iff -0,03x^2 + 17,4 = 0$

$$\iff -0,03x^2 = -17,4$$

$$\iff x^2 = \frac{17,4}{0,03} = 580$$

$$\iff x = \sqrt{580} \text{ sur } [0; 40]$$

D'où le tableau suivant :

x	0	$\sqrt{580}$	40
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$			

Le bénéfice est donc maximal pour $\sqrt{580} \approx 24$ kilogrammes de confiture vendus.

Corrigé de l'exercice 2.17 page 84

1 La dérivée de $C(q)$ est :

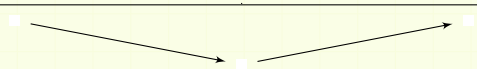
$$\begin{aligned}
 C'(q) &= 0 + 0,1 \times 1 + 250 \times \left(-\frac{1}{q^2}\right) \\
 &= 0,1 - \frac{250}{q^2} \\
 &= \frac{0,1q^2 - 250}{q^2} \\
 &= \frac{0,1(q^2 - 2500)}{q^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{10}(q^2 - 2500)}{q^2}
 \end{aligned}$$

$$C'(q) = \frac{q^2 - 2500}{10q^2}$$

2 $C'(q)$ est du signe de $q^2 - 2500$ car $10q^2 > 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
 q^2 - 2500 &= q^2 - 50^2 \\
 &= (q - 50)(q + 50)
 \end{aligned}$$

Les deux racines de $q^2 - 2500$ sont donc -50 et $+50$, d'où le tableau page suivante.

q	1	50	100
$C'(q)$	-	0	+
C			

Le coût de production est donc minimal pour 50 radiateurs fabriqués.

Ainsi, $q_0 = 50$.

$$\begin{aligned}
 \text{3 } CM(q) &= \frac{C(q)}{q} \\
 &= \frac{10}{q} + 0,1 + \frac{250}{q^2} \\
 &= \frac{10q + 0,1q^2 + 250}{q^2} \\
 &= \frac{0,1q^2 + 10q + 250}{q^2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, CM est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u = 0,1q^2 + 10q + 250$$

$$v = q^2$$

$$u' = 0,2q + 10$$

$$v' = 2q$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 CM'(q) &= \frac{u'v - v'u}{v^2}(q) \\
 &= \frac{(0,2q + 10)q^2 - 2q(0,1q^2 + 10q + 250)}{(q^2)^2} \\
 &= \frac{0,2q^3 + 10q^2 - 0,2q^3 - 20q^2 - 500q}{q^4} \\
 &= \frac{-10q^2 - 500q}{q^4} \\
 &= \frac{-q(10q + 500)}{q \times q^3} \\
 \boxed{CM'(q) = -\frac{10q + 500}{q^3}}
 \end{aligned}$$

4 $q > 0$ donc $CM'(q) < 0$. Par conséquent, CM est une fonction décroissante sur $[10; 100]$. Le coût moyen de production est donc minimal pour $q = 100$, donc deux fois plus que q_0 .

5 $B(q)$ est exprimé en *millier* d'euros. Il faut donc exprimer le prix de revient en millier d'euros aussi. Un radiateur est vendu 350 €, donc 0,35 millier d'euros.

a. $B(q) = 0,35q - C(q)$

$$\begin{aligned}
 &= 0,35q - \left(10 + 0,1q + \frac{250}{q}\right) \\
 &= 0,35q - 10 - 0,1q - \frac{250}{q}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{B(q) = 0,25q - 10 - \frac{250}{q}}$$

- b. • $B(q_0) = B(50) = 0,25 \times 50 - 10 - \frac{250}{50} = -2,5$.
- $B(100) = 0,25 \times 100 - 10 - \frac{250}{100} = 12,5$.

Il est donc immédiat de remarquer que l'entreprise doit fabriquer 100 radiateurs pour avoir un bénéfice maximal, même si le coût de production n'est pas minimal.

Corrigé de l'exercice 2.18 page 85

Appelons x la longueur du rectangle (de l'enclos) ; alors, $\frac{28-2x}{2} = 14-x$ est la largeur.

Ainsi, l'aire de l'enclos est $f(x) = x(14-x) = -x^2 + 14x$.

f est une fonction polynôme de degré 2 dont les branches sont dirigées vers le bas (car le coefficient de x^2 est négatif) donc f admet un maximum pour $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{14}{-2} = 7$.

Ainsi, la longueur de l'enclos doit être égale à 7 mètres et sa largeur, à $14-7 = 7$ mètres. L'enclos doit donc être carré pour optimiser son aire.

Corrigé de l'exercice 2.19 page 85

Pour connaître l'aire coloriée, il nous faut au moins connaître IH.

D'après le théorème de Thalès, dans la configuration croisée où [DM] et [GH] se coupent en I,

$$\frac{IM}{ID} = \frac{IH}{IG} = \frac{IH}{4-IH}.$$

De plus, dans la configuration croisée où [DM] et [AC] se coupent en I,

$$\frac{IM}{ID} = \frac{AM}{DC} = \frac{x}{4}.$$

Ainsi,

$$\frac{IH}{4-IH} = \frac{x}{4} \quad \text{soit} \quad 4IH = x(4-IH).$$

Ainsi,

$$4IH + xIH = 4x$$

et donc :

$$IH = \frac{4x}{4+x}.$$

Ainsi l'aire du triangle IAM est :

$$\frac{IH \times AM}{2} = \frac{2x^2}{4+x}.$$

De plus, l'aire du triangle CID est :

$$\frac{IG \times DC}{2} = 2(4-IH) = 8 - \frac{8x}{4+x}.$$

L'aire coloriée est donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2}{4+x} + 8 - \frac{8x}{4+x} \\ &= \frac{2x^2 - 8x + 8(4+x)}{4+x} \\ &= \frac{2x^2 + 32}{4+x}. \end{aligned}$$

La dérivée de $f(x)$ est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x(4+x) - (2x^2 + 32) \times 1}{(4+x)^2} \\ &= \frac{16x + 4x - 2x^2 - 32}{(4+x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 20x - 32}{(x+4)^2}. \end{aligned}$$

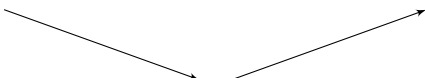
Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 20x - 32$, polynôme du second degré dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 20^2 - 4 \times (-2) \times (-32) = 144 = 12^2.$$

Donc les racines de ce dernier sont :

$$x_1 = \frac{-20 - 12}{-4} = 8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-20 + 12}{-4} = 2.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	2	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$f(2) = \frac{2 \times 2^2 + 32}{4+2} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}.$$

Ainsi, l'aire coloriée est minimale pour $x = \frac{20}{3}$.

Corrigé de l'exercice 2.20 page 86

1 Posons $x = AM$ et $y = AP$.

(AB) et (MN) sont parallèles et coupent donc la droite (BC) suivant deux angles de même mesure; donc $\widehat{PBN} = \widehat{MNC}$.

De même, $\widehat{PNB} = \widehat{MCN}$.

On peut alors conclure que les triangles PNB et MCN sont semblables; par conséquent,

$$\frac{PN}{MC} = \frac{PB}{MN}$$

soit :

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{y}$$

d'où :

$$xy = 12.$$

Or, xy représente l'aire du rectangle AMNP; donc cette aire est égale à 12.

2 Notons $f(x)$ l'aire du triangle ABC. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times (y+4) \times (x+3) \\ &= \frac{1}{2} (xy + 3y + 4x + 12) \\ &= \frac{1}{2} (12 + 3y + 4x + 12) \\ &= \frac{1}{2} (24 + 3y + 4x). \end{aligned}$$

Or, $xy = 12$ donc $y = \frac{12}{x}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(24 + 3 \times \frac{12}{x} + 4x \right) \\ &= 12 + \frac{18}{x} + 2x. \end{aligned}$$

La dérivée de $f(x)$ est donc :

$$f'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = \frac{2x^2 - 18}{x^2}.$$

$x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x-3)(x+3)$.

D'où le tableau suivant :

x	0	3	4	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		24		

Ainsi, l'aire du triangle ABC est minimale lorsque $AM = 3$ et donc $AN = \frac{18}{3} = 6$.

Corrigé de l'exercice 2.21 page 86

- 1** Dans le triangle BOS rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore,

$$SB^2 = SO^2 + OB^2,$$

donc :

$$SB = \sqrt{109}$$

- 2** (O'M) // (OB) donc le théorème de Thalès nous permet d'écrire :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{SM}{SB} = \frac{O'M}{OB},$$

soit :

$$\frac{SO'}{10} = \frac{\sqrt{109} - x}{\sqrt{109}} = \frac{O'M}{3},$$

On peut donc dire d'une part que :

$$O'M = \frac{3(\sqrt{109} - x)}{\sqrt{109}} \quad (\text{rayon de la base du cône})$$

et d'autre part :

$$SO' = \frac{10(\sqrt{109} - x)}{\sqrt{109}}$$

donc la hauteur du cône est :

$$\begin{aligned} h(x) &= 10 - \frac{10(\sqrt{109} - x)}{\sqrt{109}} \\ &= \frac{10\sqrt{109} - 10\sqrt{109} + 10x}{\sqrt{109}} \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{10}{\sqrt{109}}x$$

- 3** Le volume d'un cône est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3(\sqrt{109} - x)}{\sqrt{109}} \right)^2 \times \frac{10}{\sqrt{109}}x$$

$$f(x) = \frac{30\pi}{109\sqrt{109}}x(\sqrt{109} - x)^2$$

4 Optimiser $f(x)$ équivaut à optimiser la fonction g définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= x(\sqrt{109} - x)^2 = \\ &= x(109 - 2\sqrt{109}x + x^2) \\ &= x^3 - 2\sqrt{109}x^2 + 109x. \end{aligned}$$

On a :

$$g'(x) = 3x^2 - 4\sqrt{109}x + 109.$$

Le discriminant de $g'(x)$ est :

$$\Delta = (4\sqrt{109})^2 - 4 \times 3 \times 109 = 436 = (2\sqrt{109})^2.$$

Donc ses racines sont :

$$\alpha = \frac{4\sqrt{109} - 2\sqrt{109}}{6} = \frac{\sqrt{109}}{3}$$

et

$$\beta = \frac{4\sqrt{109} + 2\sqrt{109}}{6} = \sqrt{109}.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	α	$\sqrt{109}$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0		0

Ainsi, le volume est optimal lorsque M est au tiers de [SB] en partant de B.

Corrigé de l'exercice 2.22 page 87

1 $f'(x) = 3 \times x^2 + 7 \times 2x + 11 \times 1 - 0$, donc $f'(x) = 3x^2 + 14x + 11$.

2 $3x^2 + 14x + 11$ est un polynôme de degré 2, dont le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 3 \times 11 = 64.$$

Ses deux racines sont alors :


$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{64}}{2 \times 3} = -\frac{11}{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{64}}{2 \times 3} = -1.$$

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines sont $3x^2 + 14x + 11 > 0$ si $x \in \left] -\infty; -\frac{11}{3} \right[\cup] -1; +\infty[$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{11}{3}$	-1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

3 L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $a = 1$ est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Or,

$$f'(1) = 3 \times 1^2 + 14 \times 1 + 11 = 28$$

et

$$f(1) = 1^3 + 7 \times 1^2 + 11 \times 1 - 19 = 0$$

Donc l'équation réduite de la tangente est :

$$y = 28(x - 1) + 0$$

soit :

$$y = 28x - 28$$

4 $f(1) = 0$ donc 1 est bien solution de l'équation $f(x) = 0$.

De plus,

$$\begin{aligned}
 (x - 1)(x^2 + 8x + 19) &= x^3 + 8x^2 + 19x - x^2 - 8x - 19 \\
 &= x^3 + 7x^2 + 11x - 19 \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

5 Le discriminant de $x^2 + 8x + 19$ est :

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 19 = -12.$$

Le discriminant étant strictement négatif, $x^2 + 8x + 19 > 0$ (signe du coefficient de x^2).
Par conséquent, $f(x)$ est du signe de $x - 1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Corrigé de l'exercice 2.23 page 88

1 La dérivée de f est : $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 0$, soit :

$$f'(x) = 9x^2 - 10x$$

2 L'équation de (T), tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 est :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1).$$

Or,

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2 = -3 - 5 + 2 = -6$$

et

$$f'(-1) = 9(-1)^2 - 10(-1) = 9 + 10 = 19.$$

Ainsi,

$$(T) : y = 19(x + 1) - 6$$

soit :

$$(T) : y = 19x + 13$$

3 a. Calculons, pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 3x^3 - 5x^2 + 2 - (3x^3 - 4x + 1) \\ &= 3x^3 - 5x^2 + 2 - 3x^3 + 4x - 1 \end{aligned}$$

$$f(x) - g(x) = -5x^2 + 4x + 1.$$

b. $f(x) - g(x)$ est un trinôme du second degré, dont le discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \times (-5) \times 1 \\ &= 16 + 20 \\ \Delta &= 36. \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc $f(x) - g(x)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times (-5)} \\ &= \frac{-4 - 6}{-10} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times (-5)} \\ &= \frac{-4 + 6}{-10} \\ &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Remarque 13

On aurait aussi pu remarquer que la somme des coefficients est nulle, et donc que $x_1 = 1$ est une racine évidente; avec la formule $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, on déduit $x_2 = -\frac{1}{5}$.

On en déduit alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$		1	$+\infty$	
$f(x) - g(x)$		-	0	+	0	-

c. Du tableau de signes précédent, on peut conclure que :

- sur $\left] -\frac{1}{5}; 1 \right[$, $f(x) - g(x) > 0$ et donc $f(x) > g(x)$ ce qui signifie que \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g ;
- sur $\left] -\infty; -\frac{1}{5} \right[$ et sur $]1; +\infty[$, $f(x) - g(x) < 0$ et donc $f(x) < g(x)$ ce qui signifie que \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g .

Corrigé de l'exercice 2.24 page 88

- 1** Le coût moyen de production, en milliers d'euros, d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces est :

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{0,5 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 16}{2} \\ &= \frac{4 - 12 + 18}{2} \\ f(2) &= 5. \end{aligned}$$

Ainsi, le coût moyen de production est égal à 5 000 €.

- 2** On peut écrire $f(x)$ sous la forme suivante si l'on divise tous les termes par x :

$$f(x) = 0,5x^2 - 3x + 1 + \frac{16}{x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,5 \times 2x - 3 \times 1 + 0 - 16 \times \frac{1}{x^2} \\ &= x^2 - 3 - \frac{16}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x - 16}{x^2}$$

- 3** Développons :

$$\begin{aligned} (x-4)(x^2+x+4) &= x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16 \\ &= x^3 - 3x^2 - 16. \end{aligned}$$

- 4 $f'(x)$ est du signe de $x^3 - 3x^2 - 16$ car $x^2 > 0$, donc du signe de $(x - 4)(x^2 + x + 4)$.
Or, le discriminant de $x^2 + x + 4$ est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = 1 - 16 = -15 < 0.$$

Donc $x^2 + x + 4$ est du signe du coefficient de x^2 , c'est-à-dire positif.

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $x - 4$, d'où le tableau de signes et de variations suivant :

x	1	4	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	14,5	1	1,7

- 5 D'après le tableau de variations de f , le coût moyen de production est minimal pour $x = 4$, soit pour 4 000 pièces produites par jour, auquel cas le coût de production moyen est égal à 1 000 €.

Corrigé de l'exercice 2.25 page 89

- 1 a. L'aire du rectangle ABCD est égale à xy , mais aussi égale à 49. Donc :

$$y = \frac{49}{x}.$$

Le périmètre de ABCD est $2(x + y)$ soit :

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{49}{x}\right) &= 2x + \frac{98}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 98}{x^2} \end{aligned}$$

- b. Si $x = 10$, ce périmètre vaut :

$$\frac{2 \times 10^2 - 98}{10^2} = \frac{200 - 98}{100} = 1,02.$$

Le périmètre du rectangle est donc égal à 1,02 m.

- 2 Pour $x > 0$, la dérivée de $f(x)$ est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 1 + 98 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2 - \frac{98}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 98}{x^2}$$

- 3 $f'(x) = 0 \iff 2x^2 - 98 = 0 \iff x^2 = \frac{98}{2} \iff x^2 = 49 \iff x = 7 \text{ ou } x = -7$. D'où le tableau suivant sur $]0; +\infty[$:

x	0	7	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		28	

- 4 D'après le tableau de variations de f , le périmètre est minimal pour $x = 7$, et vaut 28 m. Dans ce cas précis, ABCD est un carré.

Suites numériques

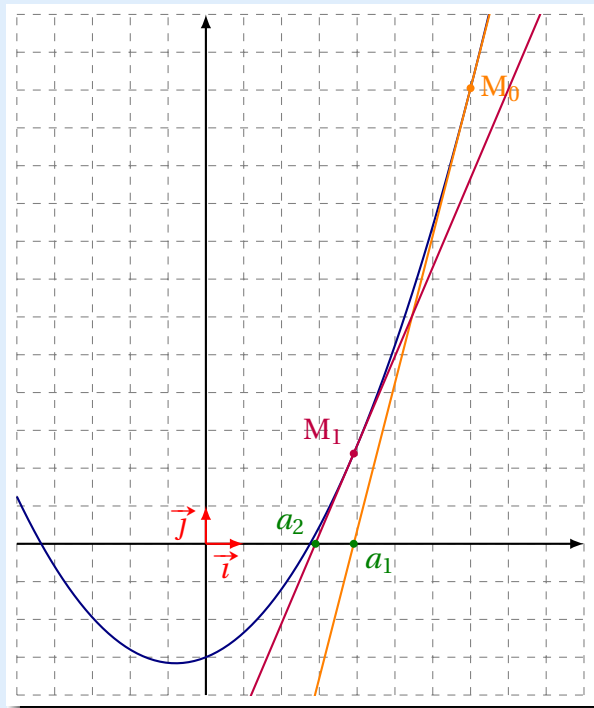
3

Plan du chapitre

I	Rappels sur la méthode de Newton	122
II	Introduction	122
1	Définition	122
2	Objectifs	123
3	Variations d'une suite	123
4	Majorants et minorants	126
III	Suites arithmétiques	126
1	Définition	126
2	Variations	127
3	Formule explicite	128
4	Représentation graphique	129
5	Somme des premiers termes	129
a	Somme des premiers entiers	129
b	Le symbole de sommation « Σ »	130
c	Somme des premiers termes d'une suite arithmétique	130
IV	Suites géométriques	132
1	Définition	132
2	Formule explicite	132
3	Représentation graphique	133
4	Somme des premiers termes	134
V	Algorithmes	135
1	Suites arithmétiques	135
2	Suites géométriques	137
VI	Pour aller plus loin : autres types de suites	139
	Enoncés	143
	Corrigés des exercices	161

I - Rappels sur la méthode de Newton

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la méthode de Newton a pour objectif de trouver des nombres qui se rapprochent de plus en plus d'une solution à l'équation $f(x) = 0$.



Les nombres a_1, a_2, \dots se rapprochent de la solution.

On dit que les nombres a_1, a_2, \dots sont les **termes successifs** de la **suite** (a_n) .

II - Introduction

II.1 - Définition

Définition 10

On appelle **suite numérique** une fonction dont la variable est un entier naturel. Pour ne pas confondre avec les fonctions à variables réelles, la variable est mise en indice.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, alors n est l'**indice** du **terme** u_n .

On peut définir une suite de deux manières :

- par une fonction (si on connaît l'expression du terme général en fonction de l'indice) ;
- par récurrence (si on calcule un terme en fonction du ou des termes précédents).

Exemple 23

- 1 Si on définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n},$$

alors $(u_n)_{n \geq 1}$ est définie par la fonction $n \mapsto \frac{1}{n}$; on dit qu'elle est définie de **manière explicite**.

- 2 Dans la méthode de Newton, les nombres a_n se calculent avec la relation :

$$\begin{cases} a_0 \text{ donné} \\ a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}. \end{cases}$$

Dans la mesure où on calcule un terme à l'aide du terme précédent, la suite est définie de **manière récurrente**.

II. 2 - Objectifs

L'étude des suites numériques consiste à :

- trouver leurs variations ;
- exprimer de façon explicite leur terme général (quand elles sont définies par récurrence).

Pour étudier les variations d'une suite, la dérivation ne sera pas toujours possible (quand la suite est définie de manière récurrente).

Le second point de nos objectifs est sans doute le plus problématique car, dans un cas général, il n'est pas chose aisée de passer de la forme récurrente à la forme explicite.

En classe de 1^{re}, nous verrons tout de même quelques exemples fondamentaux.

II. 3 - Variations d'une suite

Définition 11

- On dira qu'une suite (u_n) est **strictement croissante** à partir de n_0 si :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} > u_n.$$

- On dira qu'une suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir de n_0 si :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} < u_n.$$

- On dira qu'une suite (u_n) est **constante** à partir de n_0 si :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Pour trouver le sens de variation d'une suite, nous avons trois méthodes, qui dépendent de la manière dont est définie la suite :

- 1** On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n et on regarde le signe du résultat : par exemple, si $u_{n+1} - u_n > 0$ alors la suite est croissante.

Exemple 24

a. Cas d'une suite définie de façon explicite.

Posons $u_n = \sqrt{n+1}$. Quel que soit l'entier n ,

$$n+2 > n+1.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$$

(les images de deux nombres par une fonction croissante sont rangées dans le même ordre que les nombres)

Ainsi :

$$u_{n+1} > u_n$$

ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement croissante sur \mathbb{N} .

b. Cas d'une suite définie par récurrence.

Posons pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} v_0 = 9 \\ v_{n+1} = v_n^2 - v_n + 3 \end{cases}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (v_n^2 - v_n + 3) - v_n \\ &= v_n^2 + 3. \end{aligned}$$

Quel que soit la valeur de l'entier n , $v_n^2 \geq 0$ donc $v_n^2 + 3 \geq 3$, et donc $v_{n+1} - v_n > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} > v_n$; la suite est donc croissante sur \mathbb{N} .

Remarque 14

C'est la méthode la plus utilisée dans un cas général.

Cependant, quand on ne peut pas raisonner comme dans l'exemple ci-dessus, elle implique quelques fois des calculs qui peuvent paraître longs.

Il ne faut donc pas détester le calcul algébrique pour l'utiliser.

On utilise cette méthode lorsque l'on ne peut pas utiliser les deux suivantes.

- 2 Si nous sommes en mesure de justifier que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ alors on peut calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et comparer le résultat à 1 ; par exemple, s'il est plus grand que 1, alors la suite est strictement croissante.

Exemple 25

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{3^n}{5^{n+1}}$.

Quel que soit l'entier n , $3^n > 0$ et $5^{n+1} > 0$ donc $u_n > 0$.

On peut donc calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. L'expression de u_{n+1} s'obtient en remplaçant n par $n+1$ dans l'expression de u_n :

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+1+1}} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}.$$

Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}}{\frac{3^n}{5^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} \times \frac{5^{n+1}}{3^n} =$$

On réunit maintenant les puissances de 3 dans une même fraction, et les puissances de 5 dans une autre même fraction :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{5^{n+1}}{5^{n+2}} = \frac{3^{\cancel{n}} \times 3^1}{3^{\cancel{n}}} \times \frac{5^{\cancel{n+1}}}{5^{\cancel{n+1}} \times 5^1} = \frac{3}{5} < 1.$$

Ainsi, (u_n) est strictement décroissante.

Remarque 15

Dans le cas des suites définies par récurrence, il est difficile en classe de 1^{re} de savoir si tous les termes sont strictement positifs. Donc on n'utilisera jamais cette méthode pour de telles suites.

Attention 3



Cette méthode doit s'appliquer aux suites définies de manière explicite dont l'expression comporte des puissances ou des produits.

- 3 Si la suite est définie de manière explicite par une fonction f , et si on peut étudier facilement les variations de f sur \mathbb{R}^+ (car dans $u_n = f(n)$, n est un entier naturel, donc positif), alors on le fait.

Exemple 26

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 5n - 1$.

Ainsi, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 5x - 1$. C'est un polynôme de degré 2 dont le coefficient principal est positif ($a = 1 > 0$) ; ainsi, les branches de la parabole qui le représente sont dirigées vers le haut et son sommet a pour abscisse $x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $[2,5; +\infty[$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante à partir de $n = 3$ (on prend l'entier tout de suite supérieur à 2,5).

II . 4 - Majorants et minorants

Définition 12

- On appelle **majorant** d'une suite (u_n) tout nombre M tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.
- On appelle **minorant** d'une suite (u_n) tout nombre m tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$.

Exemple 27

- 1 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. « 0 » est un minorant de (u_n) car pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 0$.
- 2 Soit (v_n) définie par $v_n = 3 - \frac{1}{n}$. Pour tout entier naturel $n > 0$, $\frac{1}{n} > 0$ donc $3 - \frac{1}{n} < 3$. « 3 » est donc un majorant de (v_n) .

III - Suites arithmétiques

III . 1 - Définition

Définition 13

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où r est un nombre réel.

r est alors appelé la **raison** de la suite.

Exemple 28 (suite arithmétique)

Simon possède 30 € d'argent de poche.

Chaque semaine, il reçoit 5 € de la part de ses parents.

S'il ne dépense pas son argent petit à petit,

- après 1 semaine, il aura $30 + 5 = 35$ €;
- après 2 semaines, il aura $35 + 5 = 40$ €;
- après 3 semaines, il aura $40 + 5 = 45$ €;
- etc.

Si on note u_n la somme qu'il a après n semaine(s) alors :

$$u_0 = 30 \quad ; \quad u_1 = 30 + 5 = 35 \quad ; \quad u_2 = 35 + 5 = 40 \quad ; \quad \dots$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} u_0 = 30 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

La suite (u_n) est alors arithmétique de premier terme $u_0 = 30$ et de raison $r = 5$.

Remarque 16

Si on regarde trois termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\begin{array}{ccccc} & +r & & +r & \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ \boxed{u_{n-1} = u_n - r} & & \boxed{u_n} & & \boxed{u_{n+1} = u_n + r} \end{array}$$

on constate que :

$$\frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = \frac{u_n - r + u_n + r}{2} = u_n.$$

Ainsi, n'importe quel terme est la moyenne *arithmétique* des deux qui l'entourent ; c'est pourquoi ces suites sont qualifiées d'*arithmétiques*.

III . 2 - Variations

Propriété 14

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

Démonstration 7

Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + r) - u_n = r.$$

Donc,

- si $r > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$; la suite (u_n) est donc strictement croissante.
- si $r < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc $u_{n+1} < u_n$; la suite (u_n) est donc strictement décroissante.
- si $r = 0$, $u_{n+1} - u_n = 0$ et donc $u_{n+1} = u_n$; la suite (u_n) est donc constante.

III . 3 - Formule explicite

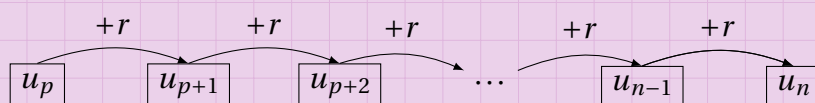
Propriété 15 (terme général)

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r , $p \geq 0$. Alors,

$$\forall n \geq p, \quad u_n = u_p + (n - p)r.$$

Démonstration 8

Le schéma suivant illustre la situation dans laquelle nous sommes :



On peut écrire :

$$u_n = u_{p+(n-p)}$$

donc pour passer de u_p à $u_{p+(n-p)}$, on ajoute $(n - p)$ fois r , d'où :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Propriété 16 (cas particulier, en prenant $p = 0$)

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Alors,

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Propriété 17 (cas particulier, en prenant $p = 1$)

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r . Alors,

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_0 + (n - 1)r.$$

Exemple 29

Reprenons l'exemple de Simon (exemple 28).

Nous avons établi l'égalité :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{avec } u_0 = 30.$$

D'après le corollaire 1,

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 30 + 5n.$$

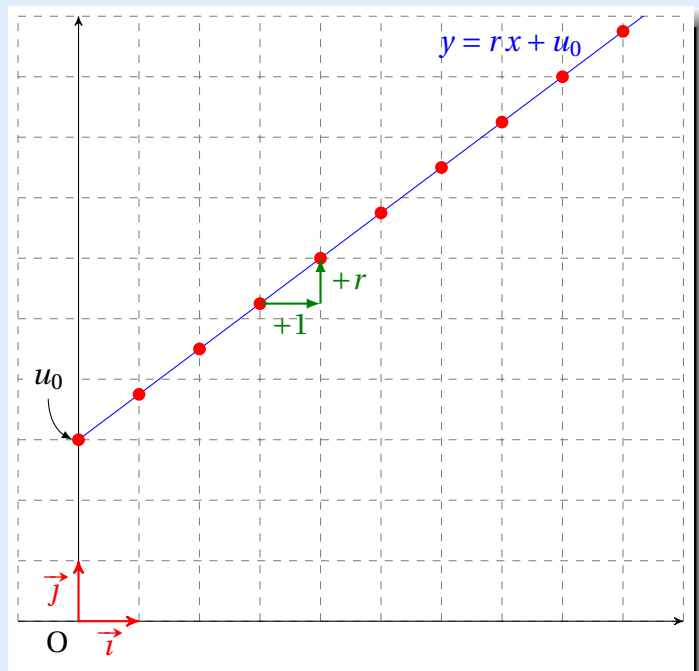
Cette formule explicite nous permet de connaître la somme que possède Simon après n semaines sans avoir à calculer tous les termes de la suite.

III . 4 - Représentation graphique

Une suite peut être représentée par une série de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Dans le cas d'une suite arithmétique de raison r , les points ont pour coordonnées $(n; u_0 + nr)$.

Tous les points sont donc alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$, où u_0 est l'ordonnée à l'origine et r , le coefficient directeur.



III . 5 - Somme des premiers termes

III . 5 . a - Somme des premiers entiers

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) était un grand mathématicien allemand. On le surnomme le « prince des mathématiques » car l'histoire raconte que très jeune, il fit des prouesses en cette discipline.

On raconte par exemple que, très jeune, il avait un instituteur qui voulait la paix dans la classe et pour cela, il demanda à ses élèves de calculer la somme :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 98 + 99 + 100.$$

Mais il ne fallut que quelques secondes au petit Gauss pour donner la réponse : « 5 050 ».

Il remarqua en effet que :

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 50 + 51 = 101 ,$$

et donc que la somme était égale à $50 \times 101 = 5050$.

En s'inspirant de cette méthode, que l'on peut généraliser, on peut trouver une expression qui donne la somme :

$$E_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n.$$

En l'écrivant ainsi, puis à l'envers, et en ajoutant les deux égalités, on a :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} E_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ E_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2E_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Ainsi,

$$2E_n = n \times (n+1)$$

car il y a n fois le terme « $n+1$ », et donc :

$$E_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriété 18 (somme des premiers entiers)

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

III . 5 . B - Le symbole de sommation « \sum »

Le symbole « \sum » (c'est la lettre grecque *sigma majuscule*) est très souvent utilisé pour désigner une somme de termes.

Ainsi, quand on écrit $\sum_{k=0}^{100} u_k$, cela désigne la somme $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{99} + u_{100}$.

La propriété 18 s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

III . 5 . c - Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Dans ce paragraphe, nous souhaitons trouver une formule qui nous donne la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

où (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

D'après la propriété 15, nous savons que pour tout entier naturel k , $u_k = u_0 + kr$; donc :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + (u_0 + 3r) + \cdots + [u_0 + (n-1)r] + (u_0 + nr) \\ &= \underbrace{(u_0 + u_0 + u_0 + \cdots + u_0)}_{(n+1) \text{ termes}} + [r + 2r + 3r + \cdots + (n-1)r + nr] \\ &= (n+1)u_0 + \underbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots + n)}_{\text{propriété 18}} r \\ &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r. \end{aligned} \tag{E}$$

D'où la propriété suivante :

Propriété 19

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$

↑
nombre de termes dans la somme

Cette dernière formule n'est pas du goût de tout le monde ; en effet, elle peut paraître compliquée à retenir. C'est la raison pour laquelle nous allons la modifier légèrement.

Reprenons l'égalité (E) précédente et allons plus loin :

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r \\ &= (n+1) \left[u_0 + \frac{nr}{2} \right] \\ &= (n+1) \left[\frac{2u_0 + nr}{2} \right] \\ &= (n+1) \left[\frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2} \right] \\ &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est plus facile à retenir car « $n+1$ » représente le nombre de termes dans la somme, u_0 désigne le premier terme de la somme et u_n , le dernier.

La somme est donc égale au « nombre de termes fois la moyenne arithmétique des termes extrêmes ».

Propriété 20 (somme des premiers termes d'une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

ou encore :

$$\sum_{k=0}^n u_k = (\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple 30

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

C'est donc une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 3.

Alors, d'après la propriété 15, $u_{200} = 5 + 200 \times 3 = 605$ et donc, d'après la propriété 20 :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{200} = 201 \times \frac{5 + 605}{2} = 201 \times 305 = 61\,305.$$

IV - Suites géométriques

IV.1 - Définition

Définition 14

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

où q est un nombre réel non nul.

q est alors appelé la **raison** de la suite.

Exemple 31 (suite géométrique)

Sophie a placé ses économies, à savoir 1 000 €, sur un livret qui lui rapporte 1,5% par an, c'est-à-dire que d'une année à l'autre, ses économies augmenteront de 1,5% du solde précédent.

Si on note $u_0 = 1\,000$ et u_n le montant de son livret après n années, alors :

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) = 1,015 u_n.$$

(u_n) est alors une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1,015$.

IV.2 - Formule explicite

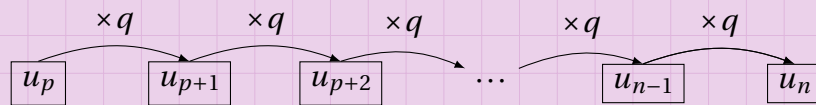
Propriété 21 (terme général d'une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q , $q \geq 0$. Alors,

$$\forall n \geq p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Démonstration 9

Le schéma suivant illustre la situation dans laquelle nous sommes :



On peut écrire :

$$u_n = u_{p+(n-p)}$$

donc pour passer de u_p à $u_{p+(n-p)}$, on multiplie par q , et ceci $(n-p)$ fois, d'où :

$$u_n = u_p \times \underbrace{q \times q \times \cdots \times q}_{(n-p) \text{ facteurs}} = u_p \times q^{n-p}.$$

Propriété 22 (cas où $p=0$)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Alors,

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = u_0 \times q^n.$$

Propriété 23 (cas où $p=1$)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q . Alors,

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_0 \times q^{n-1}.$$

Exemple 32

Reprenons l'exemple de Sophie (exemple 31) et calculons le solde de son livret après 10 ans (si elle ne retire pas d'argent entre temps). D'après la propriété 22 :

$$u_{10} = u_0 \times q^{10} = 1\,000 \times 1,015^{10} \approx 1\,160,54.$$

Ainsi, après 10 ans, elle possèdera 1 160,54 € sur son livret.

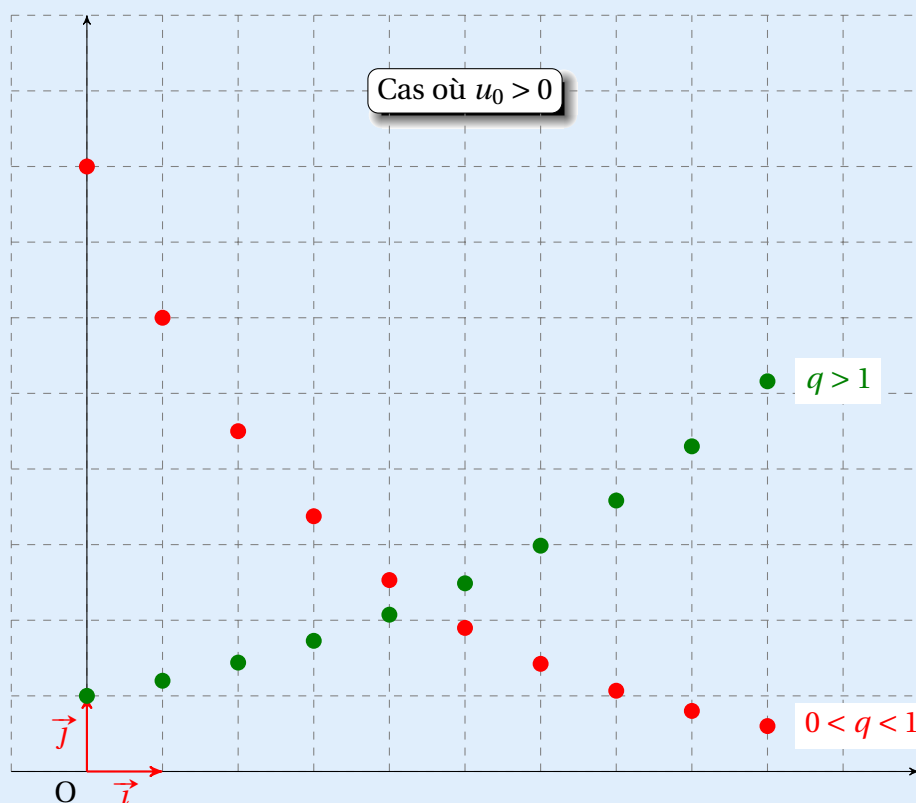
IV.3 - Représentation graphique

Selon les valeurs de la raison q de la suite géométrique, les points qui représentent les termes successifs « monteront » ou « descendront ».

Pour simplifier, prenons $u_0 > 0$.

- Si $q = 1$ alors $u_{n+1} = u_n$, donc la suite (u_n) est constante (ce qui se traduira par une succession de points alignés sur une droite horizontale d'équation $y = u_0$).
- Si $q > 1$ alors l'égalité $u_{n+1} = qu_n$ nous dit que la suite est strictement croissante et donc que les points « monteront » (auront une ordonnée de plus en plus grande).

- Cas où $u_0 > 0$



Somme $1 + q + q^2 + \dots + q^n$

Pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Posons $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

Alors,

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}.$$

Ainsi,

$$qS_n = S_n - 1 + q^{n+1}$$

et donc :

$$qS_n - S_n = q^{n+1} - 1$$

soit :

$$(q-1)S_n = q^{n+1} - 1.$$

On en déduit alors que :

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{ou encore} \quad S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Propriété 25 (somme des premiers termes d'une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration II

D'après la propriété 21 :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \cdots + q^nu_0,$$

donc :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n).$$

Ainsi, d'après la propriété 24 :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

V - Algorithmes

La notion de suites est propice aux algorithmes. En effet, une relation de récurrence définissant une suite implique nécessairement le même type de calculs à faire plusieurs fois. Il est donc important de savoir automatiser ces calculs.

V.1 - Suites arithmétiques

Prenons l'exemple de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$$

Calcul des termes successifs

On souhaite calculer et afficher tous les termes jusqu'à u_{50} .

```
u prend la valeur 7 (terme initial)
Pour n allant de 1 à 50:
    u prend la valeur u-5
    (on soustrait 5 à la valeur précédente)
    Afficher u
Fin du Pour
```

Code Python 3-11

```
1 u = 7
2 for n in range(50):
3     u = u - 5
4     print(u)
```

Une simple boucle suffit : on y calcule le nouveau terme en s'appuyant sur la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$.

On stocke la valeur de u_0 dans la variable u et pour calculer u_1 , on calcule enlève 5 à la valeur stockée dans u .

À chaque passage dans la boucle, on calcule par rapport à la dernière valeur stockée dans la variable u .

Calcul de la somme des termes

On souhaite ici calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

```
u prend la valeur 7 (terme initial)
s prend la valeur 7 (somme initiale)
Pour n allant de 1 à 50:
    u prend la valeur u-5
    s prend la valeur s+u
Fin du Pour
Afficher s
```

Code Python 3-12

```
1 u,s = 7,7
2 for n in range(50):
3     u = u-5
4     s = s + u
5 print(s)
```

La structure de l'algorithme est quasiment la même que celle de l'algorithme précédent, à ceci près que l'on ajoute une instruction dans la boucle pour calculer la somme.

Cette somme est calculée en prenant la valeur de la somme précédemment trouvée, et en lui ajoutant la valeur de u que l'on vient de calculer.

Le programme Python retourne « -6018 » et la formule de la propriété 20 nous donne :

$$51 \times \frac{7 + (7 - 5 \times 50)}{2} = -6018.$$

Calcul d'un seuil

On souhaite à présent savoir à partir de quel rang les termes sont inférieurs à -10000.

```
u prend la valeur 7 (terme initial)
n prend la valeur 0 (indice initial) tant que
u > -10000:
    u prend la valeur u-5
    n prend la valeur n+1
Fin du Pour
Afficher n et u
```

Code Python 3-13

```
1 u,n = 7,0
2 while u > -10000:
3     u = u - 5
4     n = n + 1
5 print(n,u)
```

Ici, on recherche un indice, celui à partir duquel le terme est inférieur à $-10\,000$. On ne va donc pas baser notre boucle sur les indices (comme dans les algorithmes précédents) mais sur la condition à remplir pour continuer à calculer les termes : on continue à calculer les termes TANT QUE le terme est plus grand que $-10\,000$ (d'où l'utilisation de la boucle « Tant que », ou *while* en Python).

Le programme Python nous retourne l'indice $n = 2002$ (et le terme est alors $u_{2002} = -10\,003$).

Attention 4



Quand on utilise une boucle « Tant que » afin de déterminer un seuil, il ne faut pas oublier d'incrémenter l'indice à chaque passage dans la boucle (« n prend la valeur $n+1$ »), sinon la boucle est infinie.

Cet oubli est assez fréquent quand on débute la programmation.

V.2 - Suites géométriques

Prenons l'exemple de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \end{cases}$$

Calcul des termes successifs et de la somme des termes

On souhaite ici faire d'une pierre deux coups : calculer les termes successifs jusqu'à v_{20} ainsi que

la somme $\sum_{k=0}^{20} v_k$.

```
v prend la valeur 10 (terme initial)
s prend la valeur 10 (somme initiale)
Pour n allant de 1 à 20:
    v prend la valeur 0.5*v
    Afficher v
    s prend la valeur s+v
Fin du Pour
Afficher s
```

Code Python 3-14

```
1 v , s = 10 , 10
2 for n in range(20):
3     v = v * 0.5
4     print(v)
5     s = s + v
6 print("Somme = ",s)
```

Le programme Python retourne les valeurs de v_1 à v_{20} suivantes :

```
5.0
2.5
1.25
0.625
0.3125
0.15625
0.078125
0.0390625
0.01953125
0.009765625
0.0048828125
0.00244140625
```

```

0.001220703125
0.0006103515625
0.00030517578125
0.000152587890625
7.62939453125e-05
3.814697265625e-05
1.9073486328125e-05
9.5367431640625e-06

```

et affiche enfin la somme $v_0 + v_1 + \dots + v_{20}$:

```
Somme = 19.999990463256836
```

Si on a la curiosité de pousser la somme jusqu'à v_{100} (par exemple), le programme retourne :

```
Somme = 20.0
```

Et si on va jusqu'à v_{500} ou plus, la réponse est toujours :

```
Somme = 20.0
```

On peut alors conjecturer (supposer) que cette somme se rapproche de plus en plus de 20. Mais il ne faut pas dire que toutes les sommes au-delà de v_{100} sont égales à 20... c'est impossible! Car si

$$\sum_{k=0}^{100} v_k = 20 \text{ alors } \sum_{k=0}^{101} v_k = 20 + v_{101} \neq 20 \text{ car } v_{101} \neq 0.$$

Ce raisonnement est valable à n'importe quel rang : si on suppose que $\sum_{k=0}^n v_k = 20$ alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} v_k = 20 + v_{n+1} > 20 \text{ car } v_{n+1} > 0.$$

Donc la somme n'est pas exactement égale à 20. La raison pour laquelle le programme affiche « 20 » est qu'il arrondit car il est arrivé au résultat « 19.999999999999999999... ».

Calcul d'un seuil

Nous souhaitons savoir à partir de quel indice les termes sont inférieurs à 10^{-9} .

```

v ← 10 (terme initial)
n ← 0
Tant que u >= 10-9:
    v ← 0.5*v
    n ← n+1
Fin du Pour
Afficher n et v

```

Code Python 3-15

```

1 v , n = 10 , 0
2 while v >= 10**(-9):
3     v = v * 0.5
4     n = n + 1
5 print(n,v)

```

Le programme Python renvoie n=34 et v=5.820766091346741e-10.

Ainsi, tous les termes à partir de v_{34} sont inférieurs à 10^{-9} .

VI - Pour Aller plus loin : Autres types de suites

Les suites arithmétiques et géométriques ne sont pas les seuls types de suites, loin de là! Nous allons voir quelques exemples d'algorithmes affichant les premiers termes de diverses suites.

La suite factorielle

On définit la suite (u_n) par l'égalité :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \end{cases}$$

« $n!$ » se dit : *factorielle n*.

L'algorithme et le programme suivant permettent de calculer $n!$. Ils ne sont pas optimaux, mais ce n'est pas très important nous concernant à ce niveau d'apprentissage.

Le principe est le même que pour calculer la somme des premiers termes d'une suite, si ce n'est que l'on multiplie à la place d'ajouter.

Attention ⚠



La fonction range de Python est un peu spéciale. range(n) parcourt les nombres de 0 à n - 1. Si on veut parcourir les nombres entiers de 1 à n, il faut procéder à un décalage comme dans le programme.

```
fonction fact(n):  
  Si n=0:  
    Retourner 1  
  Sinon:  
    p = 1  
    Pour k allant de 2 à n:  
      p prend la valeur p*k  
    Fin du Pour  
    Retourner p  
  Fin du Si  
  
Afficher fact(10)
```

Code Python 3-16

```
1 def fact(n):  
2     if n==0:  
3         return 1  
4     else:  
5         p = 1  
6         for k in range(1,n+1):  
7             p = p * k  
8         return p  
9  
10 print(fact(10))
```

Suites de Syracuse

Pour un nombre u_0 initial donné, les suites de Syracuse sont définies ainsi :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

On souhaite calculer les 20 termes u_1, u_2, \dots, u_{20} .

```
u prend une valeur quelconque
Pour n allant de 1 à 20:
    Si n est pair:
        u prend la valeur u/2
    Sinon:
        u prend la valeur 3*u+1
Fin du Si
Afficher u
Fin du Pour
```

Code Python 3-17

```
1 u = int(input("Entrez un nombre : "))
2 for n in range(30):
3     if u%2 == 0:
4         u = u/2
5     else:
6         u = 3*u+1
7     print(u, "\n")
```

Le programme retourne la série de nombres suivante :

```
113
340.0
170.0
85.0
256.0
128.0
64.0
32.0
16.0
8.0
4.0
2.0
1.0
4.0
2.0
1.0
4.0
2.0
1.0
4.0
2.0
1.0
4.0
2.0
1.0
4.0
```


La conjecture de Syracuse, autrement appelée *conjecture de Collatz*¹ ou encore *conjecture d'Ulam*² est l'hypothèse mathématique selon laquelle le terme « 1 » est toujours atteint, quel que soit le nombre de départ.

Malgré la simplicité de l'énoncé de cette conjecture, celle-ci défie depuis de nombreuses années les mathématiciens (on n'arrive pas à la démontrer).

Paul Erdős³ dit d'ailleurs à son propos :

« Les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes. »

La suite de Fibonacci

Imaginez que l'on mette un couple de lapereaux sur une île déserte.

Il faut attendre un mois avant qu'ils deviennent adultes.

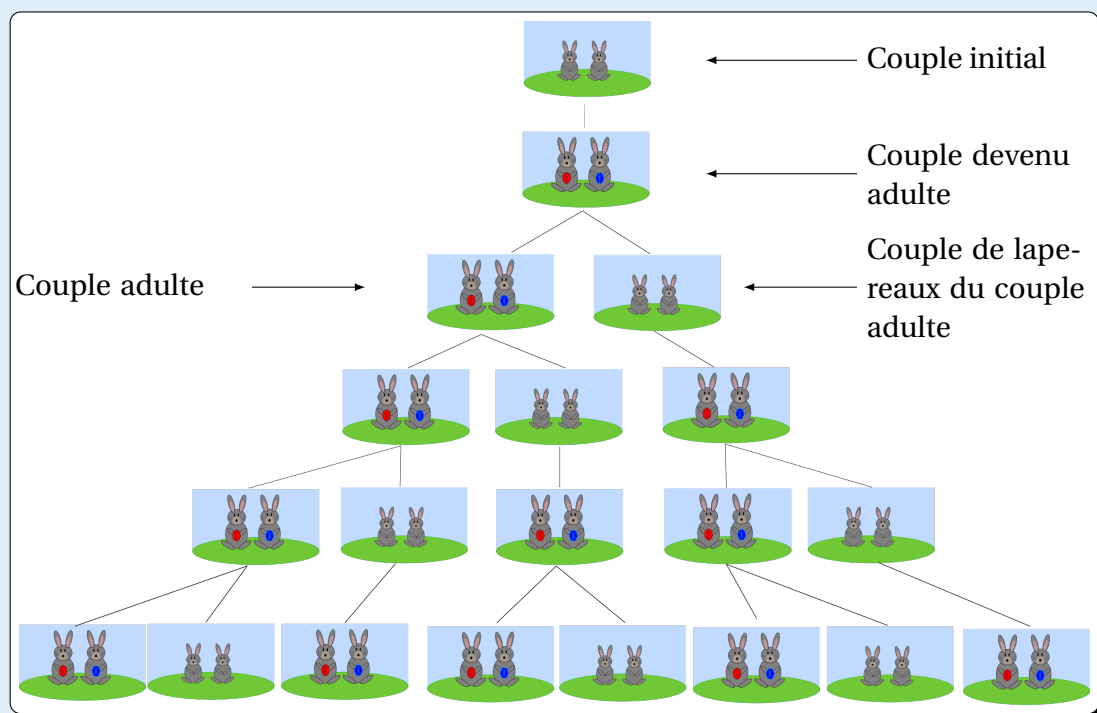
Un mois plus tard, ce couple donne naissance à un couple de lapereaux.

Imaginez que d'un mois à l'autre, un couple adulte donne naissance à un couple de lapereaux, sachant qu'il faut toujours attendre un mois pour qu'un lapereau devienne adulte.

Combien de couples y a-t-il sur l'île après n mois ?

C'est la question que s'est posée Leonardo Pisano, dit *Fibonacci* (1175 – 1250), mathématicien italien du Moyen-Âge.

On peut illustrer la situation à l'aide du schéma suivante.



Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci

1. Lothar Collatz (1910 – 1990) était un mathématicien allemand.
2. Stanislaw Ulam (1909 – 1984) était un mathématicien américain d'origine polonaise.
3. Paul Erdős (1913 – 1996) était un mathématicien hongrois

Notons $F_0 = F_1 = 1$, qui correspond au nombre de couple au mois initial et après 1 mois, et F_n le nombre de couples après n mois.

Ensuite, on a $F_2 = 1 + 1 = 2$ (le 1^{er} couple et sa progéniture).

Ensuite, on a $F_3 = 2$ (couples adultes) + 1 (couple de lapereaux) = 3.

Ensuite, on a $F_4 = 3$ (couples adultes) + 2 (couples de lapereaux) = 5.

On s'aperçoit alors que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. C'est ainsi que l'on définit la **suite de Fibonacci**.

Définition 15

La **suite de Fibonacci** est la suite (F_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$F_0 = F_1 = 1 \quad , \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Contrairement aux suites arithmétiques et géométriques, pour calculer un terme quelconque, on fait appel à deux termes qui le précèdent. On dit que la suite est *d'ordre 2*.

Écrivons maintenant un algorithme qui calcule et affiche les termes successifs de cette suite :

```
u prend la valeur 1 (valeur de  $F_0$ )
v prend la valeur 1 (valeur de  $F_1$ )
Pour n allant de 1 à 20:
    w prend la valeur u+v (calcul du terme suivant)
    v prend la valeur u
    u prend la valeur w
    Afficher w
Fin du Pour
```

Code Python 3-18

```
1 u,v = 1,1
2 print(u)
3 print(v)
4 for n in
    range(20):
5     w = u+v
6     v = u
7     u = w
8     print(w)
```

Le programme affiche :

```
1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89
```

```
144
233
377
610
987
1597
2584
4181
6765
10946
17711
```

Généralités

Exercice 3.1 (relation de récurrence et formules explicites)

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est définie par sa *relation de récurrence* ou par sa *formule explicite*. Donner ensuite les valeurs des 4 premiers termes.

1 $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout entier naturel n .

2 $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$ pour tout entier naturel n

3 $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n

4 $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n \end{cases}$ pour tout entier naturel n

Solution page 161

Exercice 3.2 (sens de variation)

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1 $u_n = \frac{2^n}{5}$

3 $u_n = \sqrt{n^2 + 3}$

2 $u_n = -n^2 + 5n - 2$

4 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

Solution page 162

Exercice 3.3 (variations, majoration et minoration)

On définit la suite (u_n) par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n+1}{n+2}$$

1 Montrer que (u_n) est croissante.

2 Montrer que (u_n) est majorée par 2.

3 Montrer que (u_n) est minorée.

Solution page 162

Exercice 3.4 (Variations)

Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est croissante.

Solution page 163

Exercice 3.5 (Variations, Majoration, Minoration)

On définit la suite (u_n) par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

- 1** Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
- 2** Montrer alors que $u_{n+1} < u_n$ et en déduire les variations de (u_n) .
- 3** Montrer que (u_n) est majorée et minorée.

Solution page 164

Exercice 3.6 (Variations)

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Trouver le sens de variation de (u_n) .

Solution page 164

Suites arithmétiques : les Bases

Exercice 3.7 (reconnaître une suite arithmétique)

Dans chaque cas, dire si la suite (u_n) est arithmétique. Si tel est le cas, donner le premier terme u_0 et la raison de la suite, ainsi que la relation de récurrence.

- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 1 $u_n = 3 + 2n$ | 4 $u_n = 3(n-2) - 2(n+1)$ | 7 $u_n = 3 - n\sqrt{2}$ |
| 2 $u_n = -3n + 4$ | 5 $u_n = \frac{5n+7}{2}$ | 8 $u_n = 7 - \frac{3}{n+2}$ |
| 3 $u_n = 2n^2 - 1$ | 6 $u_n = n\sqrt{5}$ | 9 $u_n = 3$ |

Solution page 164

Exercice 3.8 (reconnaître une suite arithmétique)

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est arithmétique. Si tel est le cas, donner le terme général en fonction de n .

1 $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{2} \end{cases}$

2 $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Solution page 166

Exercice 3.9 (détermination d'une inconnue)

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r .

1 $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r .

2 $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r .

3 $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9 .

4 $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .

5 $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r .

Solution page 167

Exercice 3.10 (somme des premiers termes)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

1 Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.

2 Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

3 Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

4 Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

Solution page 169

Exercice 3.11

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 7820$ et $u_2 = 6712$.

1 Déterminer la relation de récurrence de la suite (u_n) .

2 Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

3 Écrire un programme Python correspondant, permettant de trouver le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 1000$.

Vérifier par le calcul la valeur ainsi trouvée.

Solution page 169

Exercice 3.12 (les sacs de pièces)

Des archéologues du XXX^e siècle découvrent dans une grotte une balance électronique à côté de laquelle se trouvent des sacs et une pancarte sur laquelle est écrite :

« Dans chacun des 73 sacs, il y a 100 pièces d'or pesant chacune 5 grammes, sauf dans un sac où elles ne pèsent que 4,5 grammes.

À l'aide de la balance électronique, qui ne permet qu'une seule pesée, déterminez le sac dans lequel se trouvent les pièces de 4,5 grammes. »

Après réflexion, un des archéologues prend 1 pièce du premier sac, 2 pièces du deuxième, etc. jusqu'à prendre 73 pièces du dernier sac, puis les met toutes sur la balance. La masse indiquée par la balance est alors 13 489 grammes.

Trouver le sac dans lequel se trouvent les pièces de 4,5 grammes.

Solution page 171

Exercice 3.13 (les Allumettes)

Cédric souhaite construire sur une table, à plat, un « château d'allumettes » à plusieurs étages, comme sur le schéma suivant :



- 2 allumettes sont nécessaires pour le 1^{er} étage ;
- 4 allumettes sont nécessaires pour le 2^e ;
- 6 allumettes sont nécessaires pour le 3^e
- etc.

On note (u_n) le nombre d'allumettes nécessaires pour le n -ième étage, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 6$.

- 1 Déterminer u_4 .
- 2 Justifier que (u_n) est une suite arithmétique. Préciser alors sa raison.
- 3 Déterminer le nombre d'allumettes nécessaires pour construire 20 étages.
- 4 Compléter le programme Python afin qu'il affiche ce nombre total d'allumettes.

Code Python 3-21

```
1 u = 2
2 S = 0
3
4 for n in range(20):
5     S = ...
6     u = ...
7
8 print(S)
```

Solution page 171

Suites géométriques : les Bases

Exercice 3.14 (détermination de la raison ou d'un terme)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

1 $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q .

2 $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9 .

3 $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8 .

4 $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10} .

5 $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7 .

Solution page 173

Exercice 3.15 (somme des premiers termes)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

1 Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.

2 Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.

3 Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

4 Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

Solution page 174

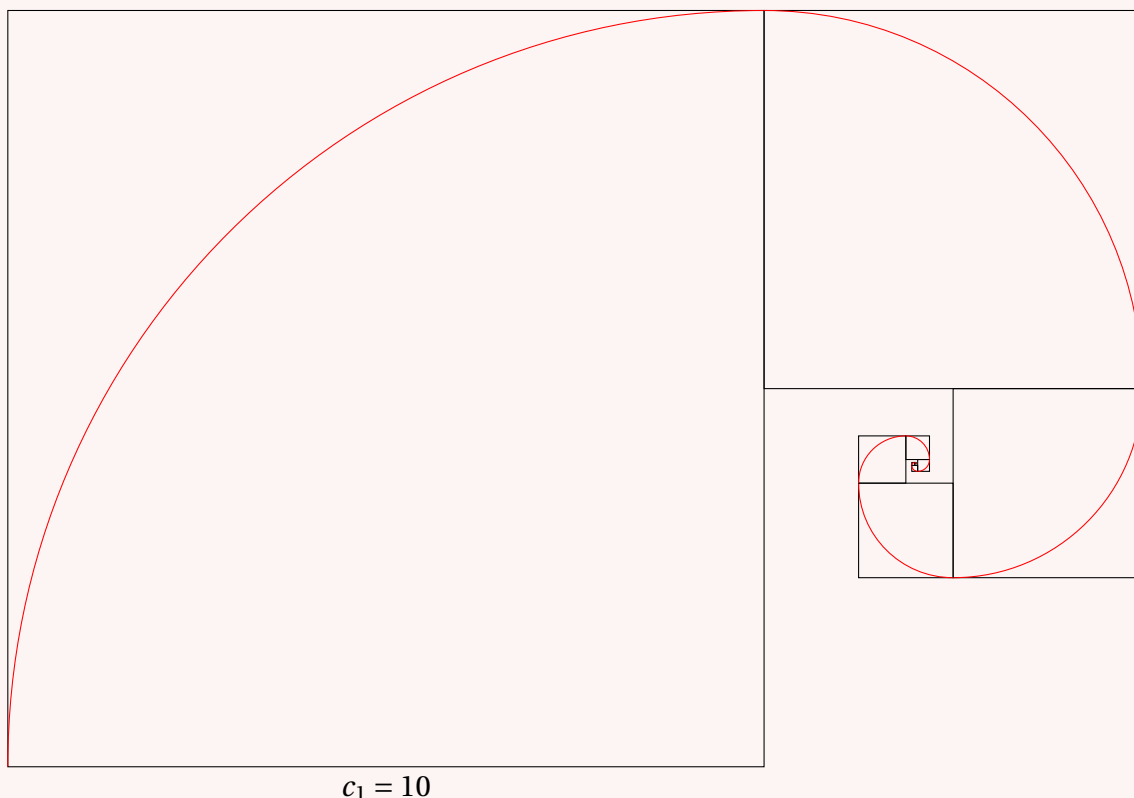
Exercice 3.16 (mot de passe)

Un mot de passe est composé de 1 à 25 caractères choisis parmi une liste de 70 symboles.
Donner un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe possibles.

Solution page 175

Exercice 3.17 (longueur d'une spirale)

On a construit ci-dessous, en rouge, une spirale :



Pour cela,

- on a tracé un carré de côté $c_1 = 10$ cm, puis un quart de cercle à l'intérieur;
- ensuite, on a tracé un carré de côté $c_2 = 5$ cm à l'intérieur duquel on a tracé un quart de cercle qui « continue » le précédent;
- etc.

Le côté d'un carré mesure toujours la moitié du côté du carré précédent.

On note c_n la longueur du carré n , et ℓ_n celle du quart de cercle à l'intérieur, $n \geq 1$, exprimées en cm.

- 1** Montrer que (ℓ_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 2** Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée au millimètre près, de la longueur totale de la spirale si l'on a construit 10 carrés.

Solution page 176

Arithmétiques ou géométriques ?

Exercice 3.18

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie de façon explicite. Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1 $u_n = 3 + 4n$

2 $u_n = 8 \times 2^n$

3 $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

4 $u_n = \sqrt{2^n}$

5 $u_n = \frac{5}{3^n}$

6 $u_n = n(n+1) - n(n-1)$

7 $u_n = n^2 + 2n + 1$

8 $u_n = \frac{1}{3^n} + 1$

9 $u_n = 2^n + 1$

10 $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{3^n}$

Solution page 176

Exercice 3.19

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie à l'aide d'une relation de récurrence.

Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1 $u_{n+1} = 3u_n, u_0 = 1$

2 $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}, u_0 = 1$

5 $u_{n+1} = 3(u_n - 1) - 2(u_n + 1), u_0 = 1$

6 $u_n = \frac{u_{n-1}}{2}, u_0 = 2$

3 $u_n = 2u_{n-1}, u_0 = 1$

4 $u_{n+1} = u_n - \pi, u_0 = 2\pi$

7 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}, u_0 = 2$

8 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}, u_0 = 1$

Solution page 179

Exercice 3.20

Dans chacun des cas suivants, donner la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n . Indiquez alors si (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

1 Chaque jour, ma vue baisse de 0,001 %. u_n désigne ma note aux yeux au jour n .

2 Ma mère me donne 10 €, puis me dit : « chaque mois, je te donnerai 10 € ». u_n représente la somme que j'ai reçu en n mois, pour $n \geq 1$.

3 Je remplis d'eau une bouteille d'un litre à moitié. Chaque minute, ce qui restait la minute précédente est rempli à moitié. u_n représente la proportion de la bouteille qui est remplie la n^{e} minute, $n \geq 1$.

4 Je place 1 000 € sur un compte qui me rapporte 0,75 % chaque année. u_n représente le solde de ce compte (si je ne prélève rien) à l'année n , $n \geq 0$, avec $u_0 = 1 000$.

- 5** Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Pierre étant derrière Paul. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$ (on suppose que les pas de Pierre et de Paul sont de même longueur et mesurent 1 mètre).
- 6** Louis et Hugo sont à 20 mètres l'un de l'autre, Louis étant derrière Hugo. Quand Pierre fait un pas en avant, Louis en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Louis et Hugo à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$ (on suppose que les pas de Hugo et de Louis sont de même longueur et mesurent 1 mètre).

Solution page 180

Exercice 3.21 (un premier bilan)

- 1** On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$u_2 = 8 \quad ; \quad u_{10} = -3.$$

Donner l'expression du terme général de cette suite sous la forme $u_n = a + bn$.

- 2** On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que :

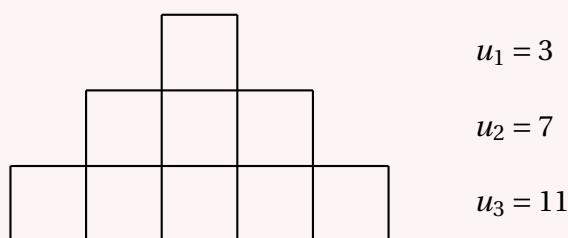
$$u_0 = -6 \quad ; \quad u_8 = 10.$$

Donner l'expression du terme général de cette suite sous la forme $u_n = a + bn$.

- 3** Trouver toutes les suites géométriques $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que :

$$u_0 = 90 \quad ; \quad u_2 = 10.$$

- 4** On construit une pyramide en allumettes comme sur le schéma suivant :



On note u_n le nombre d'allumettes nécessaires pour le n -ième étage de cette pyramide, $n \geq 1$.

Combien faut-il d'allumettes pour faire 20 étages ?

- 5** Dans chacun des cas suivants, dire si les termes sont ceux d'une suite géométrique, d'une suite arithmétique ou d'une autre suite. S'ils définissent une suite arithmétique ou géométrique, donner les paramètres de la suite (raison et 1^{er} terme).

a. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - \frac{1}{3}u_n$.

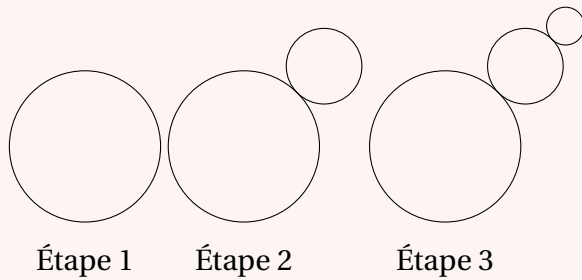
c. $u_n = 3 + 4(n - 1)$.

b. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{10}$.

d. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1$.

e. $u_{n+1} = 3u_n - 5$.

6 On construit une figure étape par étape comme suit :



À chaque étape, on ajoute un disque dont le rayon est la moitié de celui qui a été ajouté à l'étape précédente.

Sachant que le premier disque a un rayon égal à 5 cm, quelle sera la valeur approchée à l'unité de l'aire totale des disques à l'étape 10?

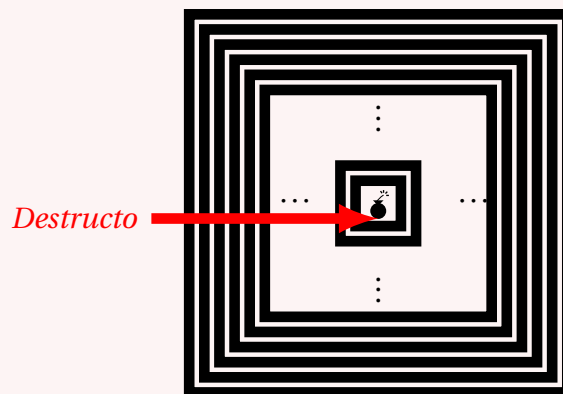
Solution page 181

Exercice 3.22 (Destructo le maléfique)

Destructo a la capacité de détruire les murs en fonçant dessus. Malheureusement, après chaque destruction, il perd 5 % de sa force.

Dès potron-minet, sa force est de 1 000 Newton.

Un jour, le méchant *Massono* a mis une bombe dans un bâtiment carré qui demande à *Destructo* de passer à travers 50 murs.



Sachant qu'il faut à *Destructo* au moins 100 Newton pour détruire un mur, arrivera-t-il jusqu'à la bombe?

Solution page 183

Suites se ramenant à une suite arithmétique ou géométrique

Exercice 3.23 (le débit de l'eau, le débit de lait)

Léonard achète deux bidons de 100 litres : un dans lequel il met de l'eau, l'autre dans lequel il met du lait.

Chaque jour, il consomme 30 % de la quantité de lait et 50 % de la quantité d'eau qu'il y avait le jour précédent. Tous les soirs avant de se coucher, il ajoute 10 litres de lait dans le bidon de lait et 20 litres d'eau dans le bidon d'eau après.

On note e_n la quantité d'eau et ℓ_n la quantité de lait (en litres) au n -ième jour après les ajouts d'eau et de lait. On a ainsi $e_0 = 100$ et $\ell_0 = 100$.

- 1** Calculer e_1 et ℓ_1 .
- 2** Déterminer les relations de récurrence des suites (e_n) et (ℓ_n) .
- 3** On pose $u_n = e_n - 40$.
 - a.** Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b.** En déduire le terme général de (u_n) en fonction de n , puis celui de (e_n) .
- 4** On pose $v_n = \ell_n - \frac{100}{3}$.
 - a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b.** En déduire le terme général de (v_n) en fonction de n , puis celui de (ℓ_n) .
- 5** Calculer alors e_{365} et ℓ_{365} d'une part, e_{730} et ℓ_{730} . Que peut-on remarquer et alors conjecturer?

Solution page 183

Exercice 3.24 (suite arithmético-géométrique)

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 3 \end{cases}$$

- 1** Calculer u_1 et u_2 .
- 2** $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle une suite arithmétique? Une suite géométrique?

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \frac{9}{2}.$$

- 3** Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

- 4** En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis une expression de u_n en fonction de n .
- 5** On donne l'algorithme suivant :

```

U ← 1
i ← 0
Saisir la valeur de N
Tant que i < N :
    i ← i+1
    U ← U/3+3
Fin du Tant que
Afficher U

```

- a.** À l'aide d'un tableau (par exemple), exécuter cet algorithme pour $N = 3$.
- b.** Que permet de faire cet algorithme?
- c.** À l'aide de votre calculatrice, donner la valeur qu'affiche cet algorithme pour $N=10$, $N=20$ et $N=30$.
Que peut-on conjecturer?

Solution page 185

Exercice 3.25 (suite arithmético-géométrique)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{7}u_n + 6 \end{cases}$$

- 1** Calculer u_1 et u_2 .
- 2** Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - \frac{42}{5}$.
- a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b.** En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
- 3** **a.** Calculer $S = \sum_{k=0}^{10} v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$.
- b.** En déduire $S' = \sum_{k=0}^{10} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

Solution page 186

Exercice 3.26 (suite homographique)

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{4u_n}.$$

On pose alors pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 0,5}.$$

- 1** Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.
- 2** En déduire le terme général de (v_n) puis celui de (u_n) en fonction de n .
- 3** À l'aide d'un tableur, de votre calculatrice ou tout simplement de votre cerveau, trouver le nombre vers lequel u_n se rapproche lorsque n augmente de plus en plus.

Solution page 188

Exercice 3.27 (suites imbriquées)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 0,8u_n + 0,4v_n \end{cases}$$

- 1** Pour tout entier naturel n , on pose $t_n = u_n + v_n$.
Montrer que (t_n) est une suite constante. Exprimer alors t_n pour tout entier naturel n .
- 2** Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = 3v_n - 4u_n$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Exprimer alors w_n en fonction de n .
- 3** Exprimer alors u_n et v_n en fonction de n .

Solution page 188

Exercice 3.28 (suite homographique)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3u_n + 1} \end{cases}$$

On considère alors l'algorithme suivant :

```

U ← 2
i ← 0
Saisir la valeur de N
Tant que i < N:
    i ← i+1
    U ← 2/(3*U+1)
Fin du Tant que
Afficher U

```

- 1** À l'aide d'un tableau, exécuter cet algorithme pour $N = 4$.
Qu'affiche alors cet algorithme?

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - \frac{2}{3}}{u_n + 1}.$$

- 2** Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3** En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis une expression de u_n en fonction de n .

Solution page 190

Exercice 3.29 (suites imbriquées)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,55u_n + 0,35v_n \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 0,45u_n + 0,65v_n \end{cases}$$

- 1** Soient deux nombres réels non nuls a et b tels que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = au_n + bv_n$ soit géométrique de raison notée q .
- a.** Montrer que l'on a :
- $$\begin{cases} 0,55a + 0,45b = qa \\ 0,35a + 0,65b = bq \end{cases}$$
- b.** En déduire que $a = \frac{q - 0,65}{0,35}b$ et $b = \frac{q - 0,55}{0,45}a$.
- c.** Montrer alors que q est solution de l'équation $q^2 - 1,2q + 0,2 = 0$.
- d.** Trouver alors les deux valeurs de q possibles, notées q_1 et q_2 , avec $q_1 < q_2$, puis les valeurs possibles de a et b pour chacune de ces deux valeurs de q .
- 2** On pose alors $c_n = u_n + v_n$ et $g_n = 9u_n - 7v_n$.
- a.** Montrer que ces deux suites vérifient les conditions de la suite (w_n) .
- b.** En déduire une expression de c_n et g_n en fonction de n .
- c.** En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n .

Solution page 191

Algorithmique et programmation

Exercice 3.30 (vers l'exponentielle)

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel non nul n par la relation :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Écrire un programme en Python qui permet de calculer et d'afficher une valeur approchée de u_{10^p} , pour $p \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$. Que constate-t-on?

Modifier le programme pour que p aille jusqu'à 15, puis jusqu'à 20. Que se passe-t-il? Donner une explication.

Solution page 193

Exercice 3.31

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0,8u_n + 7.$$

- 1** Écrire un algorithme qui stocke les 20 premiers termes de cette suite dans un tableau (une liste) et qui les affiche.
- 2** Écrire le programme Python correspondant.
- 3** On admet que la suite (u_n) est croissante et que sa limite vaut 35.
Écrire un algorithme, puis le programme Python correspondant, permettant d'afficher le premier indice n à partir duquel $u_n > 34,99$.

Solution page 193

Exercice 3.32 (suite de Fibonacci)

La suite de Fibonacci est la suite (F_n) définie par ses deux premiers termes $F_0 = F_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

- 1** Écrire un algorithme permettant de stocker dans un tableau (une liste) les 100 premiers termes de cette suite et d'afficher tous les quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ pour $n < 100$.
- 2** Écrire le programme Python correspondant.

Solution page 195

Exercice 3.33 (les habitants du village)

Dans un village se trouvaient au 1^{er} janvier 2018 10 520 habitants.

Au 1^{er} janvier 2019, il y en avaient 10 694.

Au 1^{er} janvier 2020, il y en avaient 10 859.

Pour estimer le nombre d'habitants de ce village au 1^{er} janvier 2018 + n , le maire souhaite utiliser une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 10520 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

où a et b sont deux nombre réels.

- 1 En utilisant les données de l'énoncé, déterminer les valeurs de a et b . On arrondira la valeur de a à 10^{-2} près et celle de b à l'entier près.

Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 14000$.

- 2 Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3 En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 14000 - 3480 \times 0,95^n.$$

On peut raisonnablement supposer qu'à longs termes, le nombre d'habitants de ce village se rapprochera de 14 000.

Pour savoir à partir de quelle année le nombre d'habitants dépassera 13 500, le maire a écrit un programme Python :

Code Python 3-27

```
1 u = ...
2 n = ...
3 while u ...:
4     n = n + 1
5     u = ...
6 print(n)
```

- 4 Compléter ce programme afin qu'il affiche la première année à partir de laquelle le nombre d'habitants est supérieure ou égale à 13 500.
- 5 À l'aide de votre calculatrice, déterminer cette valeur.

Solution page 195

Exercices spécimens

Les exercices spécimens sont des exercices extraits de sujets spécimens délivrés par l'Éducation Nationale, conformes aux attentes lors de l'épreuve écrite.

Exercice 3.34 (le jeu d'échecs)

Une ancienne légende raconte que le jeu d'échecs a été inventé par un vieux sage. Son roi voulut le remercier en lui accordant n'importe quel cadeau en récompense. Le vieux sage demanda qu'on lui fournisse un peu de riz pour ses vieux jours, et plus précisément qu'on place :

- un grain de riz sur la première case du jeu qu'il venait d'inventer,
- puis deux grains de riz sur la case suivante,
- puis quatre grains de riz sur la troisième case,

et ainsi de suite, en doublant le nombre de grain de riz entre une case et la suivante, et ce jusqu'à la 64^e case (puisque'un plateau de jeu d'échecs comporte 64 cases).

On note u_1 le nombre de grains de riz présents sur la première case, u_2 le nombre de grains sur la deuxième case, et ainsi de suite jusqu'à la 64^e case.

- 1 Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .
- 2 Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n .
- 3 En déduire la nature de la suite (u_n) et en préciser les éléments caractéristiques.
- 4 Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n .
- 5 Calculer le nombre de grains de riz qui doivent être disposés sur le plateau pour satisfaire à la demande du vieux sage.
- 6 On veut écrire une fonction en langage Python qui détermine à partir de quelle case le vieux sage disposera d'au moins R grains de riz. Une ébauche de cette fonction est donnée ci-dessous :

Code Python 3-29

```
1 def nb_case(R):
2     case = 1
3     u = 1
4     somme = u
5     while somme < R:
6         u = 2 * u
7         somme = u
8         case = case + 1
9     return case
```

Recopier et compléter cette fonction afin qu'elle renvoie le résultat désiré.

Solution page 196

Exercice 3.35 (collectivité locale)

Une collectivité locale octroie une subvention de 116 610 € pour le forage d'une nappe d'eau souterraine. Une entreprise estime que le forage du premier mètre coûte 130 €; le forage du deuxième mètre coûte 52 € de plus que celui du premier mètre; le forage du troisième mètre coûte 52 € de plus que celui du deuxième mètre, etc.

Plus généralement, le forage de chaque mètre supplémentaire coûte 52 € de plus que celui du mètre précédent.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note : u_n le coût du forage du n -ième mètre en euros et S_n le coût du forage de n mètres en euros; ainsi $u_1 = 130$.

- 1 Calculer u_2 et u_3 .
- 2 Préciser la nature de la suite (u_n) . En déduire l'expression de u_n en fonction de n , pour tout n entier naturel non nul.
- 3 Calculer S_2 puis S_3 .
- 4 Afin de déterminer le nombre maximal de mètres que l'entreprise peut forer avec la subvention qui est octroyée, on considère la fonction Python suivante :

Code Python 3-31

```
1 def nombre_metre(S):
2     C = 130
3     n = 1
4     while C < S:
5         C = C + ...
6         n = n + 1
7     return n
```

Compléter cette fonction de sorte que l'exécution de la fonction `nombre_metre(S)` renvoie le nombre maximal de mètres que l'entreprise peut forer avec la subvention octroyée. Justifier votre réponse.

- 5 On admet que, pour tout entier naturel non nul, $S_n = 26n^2 + 104n$. En déduire la valeur de n que fournit la fonction Python donnée à la question 4. On expliquera la démarche utilisée.

Solution page 197

Exercice 3.36 (marathon)

Bob s'est fixé un objectif : participer à un marathon qui aura lieu très bientôt dans sa ville. Pour cela, il désire programmer sa préparation au marathon de la manière suivante :

- lors du premier entraînement, il décide de courir 20 km;
- il augmente ensuite, à chaque entraînement, la distance à courir de 5%.

On peut modéliser la distance parcourue lors de ses entraînements par une suite (d_n) où, pour tout entier naturel n non nul, le nombre d_n désigne la distance à courir en kilomètre, lors de son n -ième entraînement.

On a ainsi $d_1 = 20$.

- 1 Calculer d_2 , puis vérifier que $d_3 = 22,05$.

- 2 Pour tout entier naturel n non nul, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n .
- 3 Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_n = 20 \times 1,05^{n-1}$.
- 4 Quelle distance, arrondie à 1 m près, va courir Bob lors de son 10^e entraînement?
- 5 La distance à courir lors d'un marathon est de 42,195 km. Bob estime qu'il sera prêt pour la course, s'il parvient à courir au moins 43 km lors d'un de ses entraînements. Recopier et compléter le script suivant, écrit en langage Python, dont la valeur de n , après exécution de ce script, est le nombre minimal d'entraînements permettant à Bob d'être prêt pour le marathon.

Code Python 3-34

```
1 n = 1
2 d = 20
3 while ...:
4     n = ...
5     d = 1.05 * d
```

Solution page 199

Exercice 3.37

Fanny est inscrite dans un club d'athlétisme. Elle pratique le penta bond (le penta bond est un enchaînement de cinq bonds après une course d'élan).

La première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m.

Chaque semaine, la longueur de son saut augmente de 0,1 m. Pour n entier naturel non nul, on note s_n la longueur, en mètres, de son saut la n -ième semaine d'entraînement. Puisque lors de la première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m, on a $s_1 = 8$.

- 1 Pour $n \geq 2$, on considère la fonction Python suivante.

Code Python 3-36

```
1 def saut(n):
2     s = 8
3     for k in range(2,n+1):
4         s = s + 0.1
5     return s
```

- a. Quelle valeur s est renvoyée par la commande `saut(4)`?
- b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
- 2 Exprimer avec justification s_n en fonction de n pour n entier naturel non nul.
- 3 Pour être qualifiée à une compétition, Fanny doit faire un saut d'au moins 12 mètres. À partir de quelle semaine, Fanny réalisera-t-elle un tel saut? Justifier votre réponse.

Solution page 199

Corrigé de l'exercice 3.1 page 143

1 $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout entier naturel n .

(u_n) est ici définie à l'aide d'une formule explicite (en fonction de n , sans faire référence au terme précédent).

Les trois premiers termes de cette suite sont :

- $u_0 = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$.
- $u_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$.
- $u_2 = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 3$.

2
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$
 pour tout entier naturel n

(u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence (le terme u_{n+1} , de rang $n+1$, est défini en fonction de u_n , donc de son terme précédent).

Les trois premiers termes de cette suite sont :

- $u_0 = -2$ (donné).
- $u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times (-2) - 2 = -8$.
- $u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times (-8) - 2 = -26$.

3
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 1 \end{cases}$$
 pour tout entier naturel n

(u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence.

Les trois premiers termes de cette suite sont :

- $u_0 = 1$ (donné).
- $u_1 = u_0^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$.
- $u_2 = u_1^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$.

4
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n \end{cases}$$
 pour tout entier naturel n

(u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence (le terme u_{n+1} , de rang $n+1$, est défini en fonction de u_n , donc de son terme précédent, même s'il y a un terme en n avec lui).

Les trois premiers termes de cette suites sont :

- $u_0 = 1$ (donné).
- $u_1 = u_{0+1} = 2u_0 - 3 \times 0 = 2 \times 1 = 2$.
- $u_2 = u_{1+1} = 2u_1 - 3 \times 1 = 2 \times 2 - 3 = 1$.

Corrigé de l'exercice 3.2 page 143

1 $u_n = \frac{2^n}{5}.$

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\&= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\&= \frac{2^n}{5} \\u_{n+1} - u_n &> 0.\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est croissante.

2 $u_n = -n^2 + 5n - 2.$

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2) \\&= -(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\&= -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\&= -2n + 4.\end{aligned}$$

$$-2n + 4 > 0 \iff -2n > -4 \iff n < 2 \text{ donc } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ pour } n \geq 2.$$

La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 2.

3 $u_n = \sqrt{n^2 + 3}.$

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \sqrt{(n+1)^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 3} \\&= \sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 + 3}.\end{aligned}$$

Or, $n^2 + 4 > n^2 + 3$ donc $n^2 + 2n + 4 > n^2 + 3$ (car $n \geq 0$), donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

4 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5.$

$u_{n+1} - u_n = u_n - 5 - u_n = -5 < 0$ donc (u_n) est décroissante.

Corrigé de l'exercice 3.3 page 143

1 On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{2n+1}{n+2} \\&= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} \\&= \frac{(2n+3)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\&= \frac{3}{(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

$n+2 > 0$ et $n+3 > 0$ car $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

2 Si la suite (u_n) est majorée par 2, alors $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}u_n - 2 &= \frac{2n+1}{n+2} - 2 \\&= \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2(n+2)}{n+2} \\&= \frac{2n+1-2n-4}{n+2} \\&= \frac{-3}{n+2}.\end{aligned}$$

$-3 < 0$ et $n+2 > 0$ donc $u_n - 2 < 0$, soit $u_n < 2$.

Donc la suite est majorée par 2.

3 La suite est croissante donc, nécessairement, $u_n \geq u_0$ pour tout entier naturel n , soit $u_n \geq \frac{1}{2}$.

La suite est donc minorée par $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 3.4 page 144

On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2 + 1} - u_n \\&= \frac{(\sqrt{u_n^2 + 1} - u_n)(\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n)}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n} \\&= \frac{u_n^2 + 1 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n} \\&= \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n}.\end{aligned}$$

$u_n > 0$ car chaque terme est défini comme étant égal à une racine carrée.

De plus, $\sqrt{u_n^2 + 1} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite est donc croissante.

Corrigé de l'exercice 3.5 page 144

$$\begin{aligned}
 \text{1} \quad u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
 &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (\text{on multiplie par l'expression conjuguée}) \\
 &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
 \boxed{u_n} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

$$\text{2} \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Or, $n+2 > n$ donc $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ et donc, en ajoutant $\sqrt{n+1}$ aux deux membres de cette dernière inégalité, on a $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

En inversant, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (attention à ne pas oublier d'inverser le signe de l'inégalité).

Ceci nous dit alors que $u_{n+1} < u_n$, et donc que (u_n) est décroissante.

$$\text{3} \quad \sqrt{n+1}\sqrt{n} > 0 \text{ donc } u_n > 0.$$

(u_n) est donc minorée par 0.

De plus, $\sqrt{n+1}\sqrt{n} \geq 1$ (car $\sqrt{n+1} \geq 1$ et $\sqrt{n} \geq 0$) donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \leq 1$, soit $u_n \leq 1$.

(u_n) est donc majorée par 1.

Corrigé de l'exercice 3.6 page 144

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - u_n + 1 - u_n \\
 &= u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} \geq u_n$, donc (u_n) est croissante.

Corrigé de l'exercice 3.7 page 144

$$\text{1} \quad u_n = 3 + 2n.$$

La fonction $x \mapsto 3 + 2x$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 3$ et sa raison r est le coefficient de n , donc ici $r = 2$.

Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

2 $u_n = -3n + 4.$

La fonction $x \mapsto -3x + 4$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 4$ et sa raison r est le coefficient de n , donc ici $r = -3$.

Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

3 $u_n = 2n^2 - 1.$

La fonction $x \mapsto 2x^2 - 3$ n'est pas une fonction affine, donc $f(n) = u_n$ n'est pas une suite arithmétique.

Autre méthode : $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 7$.

Ainsi, $u_1 - u_0 = 2$ et $u_2 - u_1 = 6 \neq u_1 - u_0$ donc la suite n'est pas arithmétique.

4 $u_n = 3(n-2) - 2(n+1).$

On peut écrire : $u_n = 3n - 6 - 2n - 2 = n - 8$. La fonction $x \mapsto x - 8$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = -8$ et sa raison r est le coefficient de n , donc ici $r = 1$.

Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = -8 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$$

5 $u_n = \frac{5n+7}{2}.$

On peut écrire : $u_n = \frac{5n}{2} + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}n + \frac{7}{2}.$

La fonction $x \mapsto \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = \frac{7}{2}$ et sa raison r est le coefficient de n , donc ici $r = \frac{5}{2}.$

Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2} \end{cases}$$

6 $u_n = n\sqrt{5}.$

La fonction $x \mapsto x\sqrt{5}$ est une fonction affine (même linéaire) donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 0$ et sa raison r est le coefficient de n , donc ici $r = \sqrt{5}.$

Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{5} \end{cases}$$

7 $u_n = 3 - n\sqrt{2}$.

La fonction $x \mapsto 3 - x\sqrt{2}$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 3$ et sa raison r est le coefficient de n , donc ici $r = -\sqrt{2}$.

Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{2} \end{cases}$$

8 $u_n = 7 - \frac{3}{n+2}$.

$$u_0 = 7 - \frac{3}{0+2} = \frac{11}{2}.$$

$$u_1 = 7 - \frac{3}{1+2} = 6.$$

$$u_2 = 7 - \frac{3}{2+2} = \frac{25}{4}.$$

Ainsi, $u_1 - u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{1}{4} \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

9 $u_n = 3$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 3 - 3 = 0$, qui est un nombre constant, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 3.8 page 145

1 $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{2} \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - \sqrt{2}) - u_n = -\sqrt{2}.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque est donc toujours la même; par conséquent, (u_n) est une suite arithmétique, ici de raison $r = -\sqrt{2}$.

D'après le cours, son terme général est :

$$u_n = u_0 + nr = -1 - n\sqrt{2}.$$

2 $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = u_n + 1.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque n'est donc pas toujours la même; par conséquent, (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

3 $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 + 3) - u_n = u_n^2 - u_n + 3.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque n'est donc pas toujours la même; par conséquent, (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

4 $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 2) - u_n = 2.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque est donc toujours la même; par conséquent, (u_n) est une suite arithmétique, ici de raison $r = 2$.

D'après le cours, son terme général est :

$$u_n = u_1 + (n - 1)r = -1 + (n - 1) \times 2 = -1 + 2n - 2 = 2n - 3.$$

Attention 9



Ici, la suite commence à u_1 et non u_0 ; il faut donc utiliser la formule explicite générale :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Corrigé de l'exercice 3.9 page 145

1 $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc :

$$u_8 = u_0 + 8r$$

$$7 = 3 + 8r$$

$$7 - 3 = 8r$$

$$r = \frac{4}{8}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

2 $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$\begin{aligned}u_5 &= u_2 + (5-2)r \\ 2 &= 5 + 3r \\ 2-5 &= 3r \\ 3r &= -3 \\ \boxed{r} &= \boxed{-1}\end{aligned}$$

- 3** $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9 .

On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc

$$\begin{aligned}u_9 &= u_0 + 9r \\ u_9 &= 5 - \frac{9}{2} \\ u_9 &= \frac{10}{2} - \frac{9}{2} \\ \boxed{u_9} &= \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

- 4** $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

donc

$$\begin{aligned}u_{20} &= u_5 + (20-5)r \\ u_{20} &= 6 + 15 \times 2 \\ u_{20} &= 6 + 30 \\ \boxed{u_{20}} &= \boxed{36}\end{aligned}$$

- 5** $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

donc

$$\begin{aligned}u_7 &= u_2 + (7-2)r \\ \sqrt{2} &= \sqrt{7} + 5r \\ 5r &= \sqrt{2} - \sqrt{7} \\ \boxed{r} &= \boxed{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{5}}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.10 page 145

- 1 Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.
(u_n) est une suite arithmétique donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

donc ici :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= \frac{5 + (5 + 100 \times 3)}{2} \times 101 \\ &= 155 \times 101 \end{aligned}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 15655$$

- 2 Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= \frac{3 + 60}{2} \times 51 \\ &= 31,5 \times 51 \end{aligned}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 1606,5$$

- 3 Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \\ &= \frac{60 + (60 + 5 \times 99)}{2} \times 100 \\ &= \frac{61500}{2} \end{aligned}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = 30750$$

- 4 Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{50} &= \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 \\ &= \frac{50 + 1}{2} \times 50 \end{aligned}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = 1275$$

Corrigé de l'exercice 3.11 page 145

- 1 (u_n) étant arithmétique, $u_2 - u_0 = 2r$.
Or, $u_2 - u_0 = 6712 - 7820 = -1108$. Donc $2r = -1108$, d'où $r = -554$.
Ainsi, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 7820 \\ u_{n+1} = u_n - 554 \end{cases}$$

2 D'après la formule du cours, $u_n = u_0 + nr$, donc ici, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 7820 - 554n.$$

3 Il s'agit ici de trouver le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 1000$. Pour cela, on va calculer tous les termes successifs jusqu'à celui qui est inférieur à 1 000.

Il y a deux façons de procéder :

- à l'aide de la relation de récurrence de la suite :

Code Python 3-37

```
1 u = 7820 # premier terme
2 n = 0    # rang du premier terme
3 while u >= 1000:
4     n = n + 1
5     u = u - 554 # on calcul le terme suivant
6
7 print( n )
```

- à l'aide de la formule explicite :

Code Python 3-38

```
1 u = 7820 # premier terme
2 n = 0    # rang du premier terme
3 while u >= 1000:
4     n = n + 1
5     u = 7820 - 554*n # on calcul le terme suivant
6
7 print( n )
```

Dans les deux cas, le résultat est le même :

13

Ce qui signifie que u_{13} est le premier terme à être inférieur à 1 000.

Pour le vérifier par le calcul, on résout l'inéquation :

$$u_n < 1000 \iff 7820 - 554n < 1000$$

$$\iff -554n < 1000 - 7820$$

$$\iff -554n < -6820$$

$$\iff n > \frac{-6820}{-554}$$

$$\iff n > 12,31\dots$$

Comme n est un entier, cela signifie que le premier n possible est $n = 13$, ce qui correspond bien au résultat de nos programmes Python.

Corrigé de l'exercice 3.12 page 146

En procédant ainsi, l'archéologue dispose en tout sur la balance :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 73 = \frac{73 \times 74}{2} = 2701 \text{ pièces.}$$

Si les pièces pesaient toutes 5 g, cela représenterait une masse totale égale à :

$$2701 \times 5 = 13505 \text{ g.}$$

Mais certaines pièces ne pèsent que 4,5 g.

Supposons qu'elles soient extraites du sac k , pour $1 \leq k \leq 73$. La masse totale est alors égale, en grammes, à :

$$\begin{aligned} & 1 \times 5 + 2 \times 5 + \dots + k \times 4,5 + \dots + 73 \times 5 \\ &= 1 \times 5 + 2 \times 5 + \dots + 5k - 0,5k + \dots + 73 \times 5 \\ &= 1 \times 5 + 2 \times 5 + \dots + k \times 5 + \dots + 73 \times 5 - 0,5k \\ &= 13505 - 0,5k. \end{aligned}$$

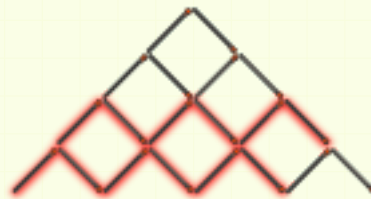
Ainsi, comme la balance indique une masse de 13 489 grammes, on a :

$$\begin{aligned} 13505 - 0,5k &= 13489 \iff 0,5k = 13505 - 13489 \\ &\iff 0,5k = 16 \\ &\iff k = \frac{16}{0,5} = 32. \end{aligned}$$

Le 32^e sac contient donc les pièces de 4,5 grammes.

Corrigé de l'exercice 3.13 page 146

1 Pour 4 étages, nous avons :



On ajoute 2 allumettes par rapport au nombre d'allumettes nécessaires pour l'étage précédent.

Ainsi, $u_4 = 6 + 2 = 8$.

2 Comme mentionné dans la réponse précédente, pour construire l'étage $n + 1$, il est nécessaire d'avoir u_n allumettes (nombre d'allumettes pour construire l'étage n) et d'en ajouter 2.

Ainsi, $u_{n+1} = u_n + 2$, ce qui correspond à la relation de récurrence d'une suite arithmétique de raison 2.

3 Le nombre total d'allumettes pour construire 20 étages correspond à :

$$\begin{aligned}
 u_1 + u_2 + \dots + u_{20} &= 20 \times \frac{u_1 + u_{20}}{2} \\
 &= 20 \times \frac{2 + (2 + (20 - 1) \times 2)}{2} \\
 &= 20 \times 21 \\
 &= 420.
 \end{aligned}$$

Il est donc nécessaire d'avoir 420 allumettes pour construire 20 étages.

4 Le programme Python complété est le suivant :

Code Python 3-39

```

1 u = 2
2 S = 0
3
4 for n in range(20):
5     S = S + u
6     u = u + 2
7
8 print(S)

```

Explications :

- On commence par initialiser la variable u à 2 ; elle représente u_1 .
- On initialise ensuite la variable S à 0 ; elle représentera la somme des allumettes.
- On crée ensuite une boucle « Pour » car on connaît le nombre d'étages (20) ; il faudra donc ajouter 20 termes pour obtenir la somme totale.
- Dans cette boucle, on commence par ajouter à la valeur déjà stockée en S la valeur qui est dans u ...
- ... puis on calcule le u suivant en écrivant que c'est l'ancienne valeur de u à laquelle on ajoute 2 (la raison de la suite) : « $u = u + 2$ » est la traduction de la relation $u_{n+1} = u_n + 2$.
- Une fois la boucle terminée, on affiche la valeur stockée dans S .

Si on exécute ce programme pas à pas, on a :

Valeurs de n	-	0	1	2	...	19
Valeurs de S	0	$0 + 2 = 2$	$2 + 4 = 6$	$6 + 6 = 12$...	$380 + 40 = 420$
Valeurs de u	2	$2 + 2 = 4$	$4 + 2 = 6$	$6 + 2 = 8$...	$40 + 2 = 42$

La dernière valeur de S est la valeur trouvée à la question précédente, à savoir 420.

Remarque 21

Le fait de faire varier n de 0 à 19 est équivalent au fait de la faire varier de 1 à 20. On aurait donc pu écrire dans le programme, à la ligne 4 : « `for n in range(1, 21)` ». Ce qui compte est ici d'exécuter 20 fois les instructions à l'intérieur de la boucle.

Corrigé de l'exercice 3.14 page 147

- 1** $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_2 = u_0 \times q^2$$

$$12 = 5 \times q^2$$

$$q^2 = \frac{12}{5}$$

$$q = \sqrt{\frac{12}{5}} \quad \text{ou} \quad q = -\sqrt{\frac{12}{5}}$$

- 2** $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9 .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_9 = u_0 \times q^9$$

$$u_9 = 3 \times 2^9$$

$$u_9 = 1536$$

- 3** $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8 .

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_8 = u_2 \times q^{8-2}$$

$$u_8 = 8 \times 2^{-6}$$

$$u_8 = 2^{-3}$$

- 4** $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10} .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_{10} = u_0 \times q^{10}$$

$$u_{10} = 2 \times 3^{-10}$$

$$u_{10} = \frac{2}{3^{10}}$$

- 5** $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7 .

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5}$$

$$u_7 = 2 \times \sqrt{2}^2$$

$$u_7 = 4$$

Corrigé de l'exercice 3.15 page 147

- 1** Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.

(u_n) est une suite géométrique donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Donc ici,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = \frac{1 - 2^{101}}{1 - 2}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 2^{101} - 1$$

- 2** Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{51}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{2^{51}} \right) \times 2 \end{aligned}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{50} = 6 \left(1 - \frac{1}{2^{51}} \right)$$

- 3** Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= u_1 \times \frac{1 - q^{100}}{1 - q} \\ &= 60 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{100}}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 60 \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = 45 \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

4 Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = 50 \times \frac{1 - 10^{50}}{1 - 10}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_5 = \frac{50}{9}(10^{50} - 1)$$

Corrigé de l'exercice 3.16 page 147

- Si le mot de passe comporte 1 seul caractère, alors il y a 70 possibilités (car un caractère est choisi parmi 70 symboles);
- si le mot de passe comporte 2 caractères, il y a 70^2 possibilités;
- si le mot de passe comporte 3 caractères, il y a 70^3 possibilités; etc.

Ainsi, le nombre total de possibilités est :

$$S = 70 + 70^2 + 70^3 + \dots + 70^{25}$$

car il y a au plus 25 caractères dans le mot de passe.

$$\begin{aligned} S &= 70(1 + q + q^2 + \dots + q^{24}) \quad \text{avec } q = 70 \\ &= 70 \times \frac{q^{25} - 1}{q - 1} \\ &= 70 \times \frac{70^{25} - 1}{70 - 1} \\ &= \frac{70}{70 - 1} \times (70^{25} - 1). \end{aligned}$$

On peut considérer que $\frac{70}{70 - 1}$ est proche de 1 et que $70^{25} - 1$ est proche de 70^{25} .

Ainsi, un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe est 70^{25} .

Mais par « ordre de grandeur », on peut comprendre « une puissance de 10 ». Nous allons donc aller plus loin.

$$\begin{aligned} 70^{25} &= (7 \times 10)^{25} \\ &= 7^{25} \times 10^{25} \\ &= 7 \times 7^{24} \times 10^{25} \\ &= 7 \times (7^2)^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 50^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 5^{12} \times 10^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 2 \times 10^8 \times 10^{37} \\ &\approx 14 \times 10^{45} \\ &\approx 10^{46}. \end{aligned}$$

Petite précision : j'ai calculé 5^{12} à l'aide de la calculatrice pour écrire que c'était à peu près égal à 2×10^8 .

Corrigé de l'exercice 3.17 page 148

1 Par définition, $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$ pour $n \geq 1$, avec $c_1 = 10$.

De plus, $\ell_{n+1} = \frac{2\pi c_{n+1}}{4} = \frac{\pi}{2}c_{n+1}$ (longueur d'un quart de cercle de rayon c_{n+1}).

Ainsi,

$$\begin{aligned}\ell_{n+1} &= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}c_n \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}c_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\ell_n.\end{aligned}$$

Ainsi, (ℓ_n) est géométrique. Son premier terme est $\ell_1 = \frac{\pi}{2} \times c_1 = \frac{\pi}{2} \times 10 = 5\pi$ et sa raison est $q = \frac{1}{2}$.

2 La longueur totale de la spirale formée avec 10 carrés est :

$$\begin{aligned}\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{10} &= \ell_1 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} \\ &= 5\pi \times \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 5\pi \times \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) \times 2 \\ &= 10\pi \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) \\ &= 10\pi \left(1 - \frac{1}{1024}\right) \\ &= \frac{5115\pi}{512} \quad (\text{valeur exacte}) \\ &\approx 31,4 \text{ cm} \quad (\text{valeur approchée au mm près}).\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.18 page 149

1 $u_n = 3 + 4n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 3 + 4(n+1) - (3 + 4n) \\ &= 3 + 4n + 4 - 3 - 4n \\ &= 4.\end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 4$ est une constante (un nombre qui ne dépend pas de n) donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 3 + 4 \times 0 = 3$.

Remarque 22

J'ai remarqué que u_n était de la forme $u_0 + nr$ donc j'ai commencé par calculer $u_{n+1} - u_n$ car je savais alors que c'était une suite arithmétique.

2 $u_n = 8 \times 2^n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{8 \times 2^{n+1}}{8 \times 2^n} \\ &= \frac{2^n \times 2^1}{2^n} \\ &= 2.\end{aligned}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ est une constante donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 8 \times 2^0 = 8$.

Remarque 23

Ici, j'ai remarqué que u_n était de la forme $u_0 \times q^n$, d'où le calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3 $u_n = 2 \times 3^{n-1}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^{n-1}} \\ &= \frac{3^{n-1} \times 3}{3^{n-1}} \\ &= 3.\end{aligned}$$

Par conséquent, $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 2 \times 3^{0-1} = \frac{2}{3}$.

4 $u_n = \sqrt{2^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{n+1}}{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^n \times 2}{2^n}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = \sqrt{2^0} = 1$.

5 $u_n = \frac{5}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{5}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{5} \\ &= \frac{3^n}{3^n \times 3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{5}{3^0} = 5$.

6 $u_n = n(n+1) - n(n-1) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$. u_n est donc de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = 0$ et $r = 2$.

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$.

7 $u_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+2)^2 - (n+1)^2 \\ &= (n+2 - n - 1)(n+2 + n+1) \\ &= 2n + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

8 $u_n = \frac{1}{3^n} + 1$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3^{n+1}} + 1 - \frac{1}{3^n} - 1 \\ &= \frac{1}{3^n \times 3} - \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{3^{n+1}} + 1}{\frac{1}{3^n} + 1} \\ &= \frac{\frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{1+3^n}{3^n}} \\ &= \frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{1+3^n} \\ &= \frac{1+3^{n+1}}{3(1+3^n)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

9 $u_n = 2^n + 1$. On calcule :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} + 1 - 2^n - 1 \\&= 2^n \times 2 - 2^n \\&= 2^n(2 - 1) \\&= 2^n.\end{aligned}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1}.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

10 $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} \\&= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \times \frac{3^n}{3^{n+1}} \\&= \sqrt{2} \times \frac{1}{3} \\&= \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Corrigé de l'exercice 3.19 page 149

1 $u_{n+1} = 3u_n$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$.

2 $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n} \neq \text{c}^{\text{te}} \text{ (constante)}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2} \neq \text{c}^{\text{te}}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas géométrique.

3 $u_n = 2u_{n-1}$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

4 $u_{n+1} = u_n - \pi$, $u_0 = 2\pi$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = \pi$.

5 $u_{n+1} = 3(u_n - 1) - 2(u_n + 1) = u_n - 5$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = -5$.

6 $u_n = \frac{u_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}u_{n-1}$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

7 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 2$. Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - (\sqrt{u_n})^2 = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas géométrique.

8 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 1$. La relation de récurrence de cette suite est la même que dans la question précédente. Cependant, le premier terme change.

On a ici : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{1} = 1$, etc.

Ainsi, (u_n) est constante. On peut alors dire qu'elle est arithmétique (de raison $r = 0$) et géométrique (de raison $q = 1$).

Corrigé de l'exercice 3.20 page 149

1 Chaque jour, ma vue baisse de 0,001 %. u_n désigne ma note aux yeux au jour n .
Alors,

$$u_{n+1} = 99,999u_n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 99,999$.

2 Ma mère me donne 10 €, puis me dit : « chaque mois, je te donnerai 10 € ». u_n représente la somme que j'ai reçu en n mois, pour $n \geq 1$.

Alors,

$$u_{n+1} = u_n + 10.$$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 10$.

3 Je remplis d'eau une bouteille d'un litre à moitié. Chaque minute, ce qui restait la minute précédente est rempli à moitié. u_n représente la proportion de la bouteille qui est remplie la n^{e} minute, $n \geq 1$.

Alors,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(1 - u_n) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}.$$

(u_n) n'est donc ni arithmétique ni géométrique.

- 4** Je place 1 000 € sur un compte qui me rapporte 0,75 % chaque année. u_n représente le solde de ce compte (si je ne prélève rien) à l'année n , $n \geq 0$, avec $u_0 = 1\,000$.

Alors,

$$u_{n+1} = 1,075u_n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,075$.

- 5** Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Pierre étant derrière Paul. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$.

D'une étape à l'autre, si Paul avance de deux mètres, la distance qui le sépare de Pierre s'agrandit de deux mètres, mais si Pierre avance d'un mètre, elle se réduit d'un mètre. Au final, elle s'agrandit d'un mètre. Mais attention ! u_n est une distance donc :

$$u_{n+1} = |u_n + 1|.$$

Ici, $u_n + 1 > 0$ pour tout n (c'est assez intuitif) donc on peut enlever les valeurs absolues. Finalement, on a :

$$u_{n+1} = u_n + 1.$$

(u_n) est donc arithmétique de raison $r = 1$.

- 6** Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Paul étant derrière Pierre. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$.

D'une étape à l'autre, si Paul avance de deux mètres, la distance qui le sépare de Pierre se réduit de deux mètres, mais si Pierre avance d'un mètre, elle s'agrandit d'un mètre. Au final, elle se réduit d'un mètre. Mais attention ! u_n est une distance donc :

$$u_{n+1} = |u_n - 1|.$$

On ne peut pas ici enlever les valeurs absolues car $u_n - 1$ sera négatif au-delà d'un certain rang.

Par conséquent, (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

Corrigé de l'exercice 3.21 page 150

- 1** $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_k + (n - k)r$.

Ainsi, $u_{10} = u_2 + (10 - 2)r$, soit $-3 = 8 + (10 - 2)r$. On obtient alors $r = \frac{-3 - 8}{10 - 2} = -\frac{11}{8}$.

On peut alors écrire :

$$u_n = u_2 + (n - 2)r$$

$$u_n = 8 - \frac{11}{8}(n - 2)$$

$$= 8 - \frac{11}{8}n + \frac{11}{4}$$

$$u_n = \frac{43}{4} - \frac{11}{8}n$$

- 2** $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_k + (n - k)r$.
Ainsi, $u_8 = u_0 + 8r$, soit $10 = -6 + 8r$. On obtient alors $r = \frac{10+6}{8} = 2$.
On peut alors écrire :

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = -9 + 2n$$

- 3** $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique donc $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_2 = u_0 \times q^2$. Ainsi, $10 = 90 \times q^2$, soit $q^2 = \frac{1}{9}$.

Par conséquent, $q = \frac{1}{3}$ ou $q = -\frac{1}{3}$.

Il existe donc deux suites géométriques, chacune de premier terme $u_0 = 90$, l'une de raison $\frac{1}{3}$ et l'autre de raison $-\frac{1}{3}$.

- 4** On constate que $u_n = u_{n-1} + 4$, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$.
Ainsi, la somme des 20 premiers termes est :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} &= (\text{nombre de termes dans la somme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2} \\ &= 20 \times \frac{1 + (u_1 + (20 - 1) \times 4)}{2} \\ &= 20 \times \frac{1 + (1 + 19 \times 4)}{2} \\ &= 20 \times \frac{78}{2} \\ &= 780. \end{aligned}$$

Le nombre total d'allumettes qu'il faut pour faire 20 étages correspond à la somme des 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, donc il faut 780 allumettes.

- 5**
- a.** $u_{n+1} = 3u_n - \frac{1}{3}u_n = \left(3 - \frac{1}{3}\right)u_n = \frac{8}{3}u_n$ donc u_{n+1} est de la forme qu_n donc c'est le terme général de la suite géométrique de raison $q = \frac{8}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.
 - b.** $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n$ donc u_{n+1} est de la forme qu_n avec $q = \frac{1}{10}$. Il définit donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$ et de premier terme $u_0 = 1$.
 - c.** $u_n = 3 + 4(n - 1) = 3 + 4n - 4 = -1 + 4n$ donc u_n est de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = -1$ et $r = 4$. C'est donc le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = -1$.
 - d.** $u_{n+1} = u_n + 1$ donc c'est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$. u_n est donc le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 2$.
 - e.** $u_{n+1} = 3u_n - 5$ n'est pas de la forme $u_n + r$ ou qu_n donc u_n n'est pas un terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.

6 Appelons r_n le rayon du disque ajouté à l'étape n et a_n l'aire du disque de rayon r_n . Alors, $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$. Donc (r_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

L'aire du disque ajouté à l'étape n est $a_n = \pi \times r_n^2 = \frac{5\pi}{2^{n-1}}$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi \times r_{n+1}^2}{\pi \times r_n^2} = \frac{r_{n+1}^2}{r_n^2} = q$ donc (a_n) est aussi une suite géométrique de raison q .

L'aire totale des disques (en cm^2) à l'étape 10 est donc :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{10} &= (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \\ &= 25\pi \times \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 50\pi \times \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{10} &= 50\pi \left(1 - \frac{1}{1024}\right) \\ &= 50\pi \times \frac{1023}{1024} \\ &= \frac{25575\pi}{512} \\ &\approx 157. \end{aligned}$$

L'aire totale est donc environ égale à 157 cm^2 .

Corrigé de l'exercice 3.22 page 151

Notons u_n la force de *Destructo* (en Newton) après avoir traversé n murs, avec $u_0 = 1\,000$. On a :

$$u_{n+1} = 0,95u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$.

Ainsi,

$$u_n = u_0 \times q^n = 1\,000 \times 0,95^n.$$

Avant le 50^e mur, sa force sera :

$$u_{49} = 1\,000 \times 0,95^{49} \approx 81.$$

Par conséquent, *Destructo* n'aura pas assez de force pour détruire le 50^e mur... Le méchant *massono* a bien calculé son coup!

Corrigé de l'exercice 3.23 page 152

1 Au jour 1, Léonard consomme la moitié d'eau; donc il lui reste 50 litres. Il ajoute ensuite 20 litres d'eau donc $e_1 = 70$.

Au jour 1, il consomme 30% de lait donc il lui reste 70 litres de lait; il ajoute ensuite 10 litres de lait donc $\ell_1 = 80$.

- 2** • **Pour (e_n)** : pour passer de e_n à e_{n+1} , on doit multiplier par $\frac{1}{2}$ (ou diviser par 2).

On a alors à ce stade : $e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n$. Ensuite, on ajoute 20 litres donc finalement,

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n + 20$$

- **Pour (ℓ_n)** : pour passer de ℓ_n à ℓ_{n+1} , on doit multiplier par 0,7 (car enlever 30% de la quantité signifie qu'il en reste 70%). On a alors à ce stade : $\ell_{n+1} = 0,7\ell_n$. Ensuite, on ajoute 10 litres donc finalement, $\ell_{n+1} = 0,7e_n + 10$

- 3** a. $u_{n+1} = e_{n+1} - 40$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}e_n + 20 - 40 \\ &= \frac{1}{2}e_n - 20 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(e_n - \frac{20}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(e_n - 40) \\ &= \frac{1}{2}u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir u_{n+1} , on doit multiplier u_n par $\frac{1}{2}$; la suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Son premier terme est : $u_n = e_0 - 40$, soit $u_0 = 100 - 40 = 60$.

- b. La suite (u_n) étant géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$ d'après le cours. Ainsi, ici, $u_n = 60 \times 0,5^n$.

Or, $u_n = e_n - 40$ donc $e_n = u_n + 40$, soit $e_n = 60 \times 0,5^n + 40$.

- 4** a. $v_{n+1} = \ell_{n+1} - \frac{100}{3}$
- $$\begin{aligned} &= 0,7\ell_n + 10 - \frac{100}{3} \\ &= 0,7\ell_n - \frac{70}{3} \\ &= 0,7\left(\ell_n - \frac{\frac{70}{3}}{0,7}\right) \\ &= 0,7\left(\ell_n - \frac{100}{3}\right) \\ &= 0,7v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir v_{n+1} , on doit multiplier v_n par 0,7; la suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,7.

Son premier terme est : $v_n = \ell_0 - \frac{100}{3}$, soit $v_0 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}$.

b. La suite (v_n) étant géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$ d'après le cours. Ainsi, ici,

$$v_n = \frac{200}{3} \times 0,7^n.$$

Or, $v_n = \ell_n - \frac{100}{3}$ donc $\ell_n = v_n + \frac{100}{3}$, soit $\ell_n = \frac{200}{3} \times 0,7^n + \frac{100}{3}$.

5

- $e_{365} = 60 \times 0,5^{365} + 40 \approx 40$ et $\ell_{365} = \frac{200}{3} \times 0,7^{365} + \frac{100}{3} \approx 33,3$.
- $e_{730} = 60 \times 0,5^{730} + 40 \approx 40$ et $\ell_{730} = \frac{200}{3} \times 0,7^{730} + \frac{100}{3} \approx 33,3$.

On peut alors remarquer que les quantités au bout d'un an sont égales à celles obtenues au bout de 2 ans.

Tout porte donc à croire qu'au bout d'un nombre important de jours, la quantité d'eau stagne autour de 40 litres et que celle de lait stagne autour de 33,33 litres.

Corrigé de l'exercice 3.24 page 152

1

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 3 = \frac{1}{3} \times 1 + 3 = \frac{10}{3}.$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 3 = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 3 = \frac{10}{9} + \frac{27}{9} = \frac{37}{9}.$$

2

$$\left. \begin{array}{l} u_1 - u_0 = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3} \\ u_2 - u_1 = \frac{37}{9} - \frac{10}{3} = \frac{7}{9} \neq u_1 - u_0 \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n)_{n \geq 0} \text{ n'est pas arithmétique.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{10}{1} \times \frac{3}{1} = 10 \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{37}{9}}{\frac{10}{3}} = \frac{37}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{37}{30} \neq \frac{u_1}{u_0} \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n)_{n \geq 0} \text{ n'est pas géométrique.}$$

3

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{3}u_{n+1} + 3 - \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(u_n - \frac{9}{2} \right) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

Ainsi, $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifie une relation de récurrence de la forme $v_{n+1} = qv_n$ qui est significatif d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$. Son premier terme est :

$$v_0 = u_0 - \frac{9}{2} = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}.$$

- 4 De la question précédente, on peut déduire que pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n}$$

et comme $v_n = u_n - \frac{9}{2}$, on a :

$$u_n = v_n + \frac{9}{2}$$

soit :

$$u_n = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n} + \frac{9}{2}$$

- 5 a. On a le tableau suivant :

Condition $i < N$		vraie : $0 < 3$	vraie : $1 < 3$	vraie : $2 < 3$	fausse
Valeurs de i	0	1	2	3	4
Valeurs de U	1	$\frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$	$\frac{10}{9} + 3 = \frac{37}{9}$	$\frac{37}{27} + 3 = \frac{118}{81}$	

- b. On voit qu'à chaque boucle, l'algorithme permet d'obtenir la valeur de u_i . On n'entre plus dans la boucle lorsque $i = N$ et la dernière valeur de U calculée est alors u_N .

Ainsi, cet algorithme permet de calculer u_N pour un entier naturel N donné par l'utilisateur.

- c. On obtient $u_{10} \approx 4,4999407272$, $u_{20} \approx 4,4999999999$ et $u_{30} \approx 4,5$.

On peut alors conjecturer que u_n se rapproche de plus en plus de 4,5 au fur et à mesure que n prend des valeurs de plus en plus grandes.

Corrigé de l'exercice 3.25 page 153

1 $u_1 = \frac{2}{7}u_0 + 6 = \frac{2}{7} \times 2 + 6 = \frac{4}{7} + \frac{42}{7} = \frac{46}{7}.$

$$u_2 = \frac{2}{7}u_1 + 6 = \frac{2}{7} \times \frac{46}{7} + 6 = \frac{92}{49} + \frac{294}{49} = \frac{386}{49}.$$

2 $v_n = u_n - \frac{42}{5}.$

a.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n + 6 - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n + \frac{30}{5} - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n - \frac{12}{5} \\ &= \frac{2}{7} \left(u_n - \frac{12}{5} \times \frac{7}{2} \right) \\ &= \frac{2}{7} \left(u_n - \frac{42}{5} \right) = \frac{2}{7}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{7}$ et de premier terme :
 $v_0 = u_0 - \frac{42}{5} = 2 - \frac{42}{5} = -\frac{32}{5}$.

b. On déduit que $v_n = v_0 \times q^n$, soit $v_n = -\frac{32}{5} \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$.

Or, $v_n = u_n - \frac{42}{5}$ donc $u_n = v_n + \frac{42}{5}$; ainsi, $u_n = \frac{42}{5} - \frac{32}{5} \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$.

3 a. S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique donc :

$$\begin{aligned} S &= v_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q} \\ &= -\frac{32}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}}{1 - \frac{2}{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{32}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}}{\frac{5}{7}} \\ &= -\frac{32}{5} \times \frac{7}{5} \times \left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right] \\ S &= -\frac{134}{25} \left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right] \end{aligned}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{k=0}^{10} \left(v_k - \frac{42}{5}\right) \quad \text{car } u_k = v_k - \frac{42}{5} \\ &= \sum_{k=0}^{10} v_k - \sum_{k=0}^{10} \frac{42}{5} \quad (\text{on a découpé la somme en deux}) \\ &= S' - \frac{42}{5} \times 11 \quad \text{car la dernière somme signifie que l'on ajoute} \end{aligned}$$

11 fois la fraction $\frac{42}{5}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{134}{25} \left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right] - \frac{462}{5} \\ &= -\frac{134}{25} + \frac{134}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{462}{5} \\ &= \frac{134}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{134}{25} - \frac{462 \times 5}{5 \times 5} \end{aligned}$$

$$S' = \frac{134}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{2444}{25}$$

Corrigé de l'exercice 3.26 page 154

$$\begin{aligned}
 1 \quad v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 0,5} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4u_n} - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\frac{4u_n}{4u_n} - \frac{1}{4u_n} - \frac{2u_n}{4u_n}} \\
 &= \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{4u_n}} \\
 &= \frac{4u_n}{2u_n - 1} \\
 &= \frac{4u_n}{2(u_n - 0,5)} = \frac{2u_n}{u_n - 0,5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_n}{u_n - 0,5} - \frac{1}{u_n - 0,5} \\
 &= \frac{2u_n - 1}{u_n - 0,5} \\
 &= \frac{2(u_n - 0,5)}{u_n - 0,5} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

$v_{n+1} - v_n$ étant égal à une constante, (v_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 0,5} = \frac{1}{3 - 0,5} = \frac{2}{5} = 0,4$.

2 (v_n) étant arithmétique, $v_n = v_0 + nr$, soit $v_n = 0,4 + 2n$.

Or, $v_n = \frac{1}{u_n - 0,5}$ donc $\frac{1}{v_n} = u_n - 0,5$, soit $u_n = \frac{1}{v_n} + 0,5$.

Ainsi,
$$u_n = \frac{1}{0,4 + 2n} + 0,5$$

3 Lorsque n augmente de plus en plus, $2n + 0,4$ augmente aussi de plus en plus, donc son inverse se rapproche de plus en plus de 0. Finalement, u_n se rapproche alors de 0,5.

Corrigé de l'exercice 3.27 page 154

$$\begin{aligned}
 1 \quad t_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\
 &= (0,2u_n + 0,6v_n) + (0,8u_n + 0,4v_n) \\
 &= (0,2 + 0,8)u_n + (0,6 + 0,4)v_n \\
 &= u_n + v_n
 \end{aligned}$$

$$t_{n+1} = t_n$$

Ainsi, (t_n) est une suite constante et $t_n = t_0 = u_0 + v_0$. Par conséquent, $t_n = 1$.

$$\begin{aligned}
2 \quad w_{n+1} &= 3v_{n+1} - 4u_{n+1} \\
&= 3(0,8u_n + 0,4v_n) - 4(0,2u_n + 0,6v_n) \\
&= 2,4u_n + 1,2v_n - 0,8u_n - 2,4v_n \\
&= (2,4 - 0,8)u_n + (1,2 - 2,4)v_n \\
&= 1,6u_n - 1,2v_n \\
&= -0,4(-4u_n + 3v_n) \quad \leftarrow (*) \\
&= -0,4w_n.
\end{aligned}$$

(*) Pour trouver $-0,4$, j'ai regardé les coefficients que je voulais faire apparaître devant u_n et v_n . Par exemple, dans l'expression $w_n = 3v_n - 4u_n$, il me faut « 3 » devant v_n . Or, j'avais $-1,2$ dans l'expression $w_{n+1} = 1,6u_n - 1,2v_n$. J'ai donc fait $-1,2 \div 3 = -0,4$. Je sais donc ici qu'il faut que je factorise mon expression $w_{n+1} = 1,6u_n - 1,2v_n$ par $-0,4$.

Ainsi, (w_n) est une suite géométrique de raison $q = -0,4$ et de premier terme $w_0 = 3v_0 - 4u_0 = -4$.

On en déduit alors que $w_n = w_0 \times q^n$ donc $w_n = -4 \times (-0,4)^n$.

3 D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\begin{cases} t_n = u_n + v_n \\ w_n = -4u_n + 3v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = u_n + v_n \\ -4 \times (-0,4)^n = -4u_n + 3v_n \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par 4, on a :

$$\begin{cases} 4 = 4u_n + 4v_n \\ -4 \times (-0,4)^n = -4u_n + 3v_n \end{cases}$$

En ajoutant alors les deux lignes, on obtient :

$$4 - 4 \times (-0,4)^n = 4u_n + 4v_n - 4u_n + 3v_n$$

soit :

$$4 - 4 \times (-0,4)^n = 7v_n.$$

En divisant par 7, on arrive alors à :

$$v_n = \frac{4 - 4 \times (-0,4)^n}{7}$$

et donc, comme $u_n + v_n = 1$,

$$\begin{aligned}
u_n &= 1 - v_n = 1 - \frac{4 - 4 \times (-0,4)^n}{7} \\
&= \frac{7}{7} - \frac{4 - 4 \times (-0,4)^n}{7} \\
&= \frac{7 - [4 - 4 \times (-0,4)^n]}{7} \\
&= \frac{7 - 4 + 4 \times (-0,4)^n}{7} \\
&= \frac{3 + 4 \times (-0,4)^n}{7}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.28 page 154

1 On a le tableau suivant :

Condition $i < N$		vraie : $0 < 4$	vraie : $1 < 4$	vraie : $2 < 4$	vraie : $3 < 4$	fausse
Valeurs de i	0	1	2	3	4	5
Valeurs de U	2	$\frac{2}{3 \times 2 + 1} = \frac{2}{7}$	$\frac{2}{3 \times \frac{2}{7} + 1} = \frac{14}{13}$	$\frac{2}{3 \times \frac{14}{13} + 1} = \frac{26}{41}$	$\frac{2}{3 \times \frac{26}{41} + 1} = \frac{82}{119}$	

Cet algorithme affiche alors la dernière valeur de U calculée, à savoir $\frac{82}{119}$, qui est u_4 .

$$\begin{aligned}
 2 \quad v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \frac{2}{3}}{u_{n+1} + 1} \\
 &= \frac{\frac{2}{3u_{n+1} + 1} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3u_{n+1} + 1} + 1} \\
 v_{n+1} &= \frac{\frac{6 - 2(3u_{n+1} + 1)}{3(3u_{n+1} + 1)}}{\frac{2 + 3u_{n+1} + 1}{3u_{n+1} + 1}} \\
 &= \frac{-6u_{n+1} + 4}{3(3u_{n+1} + 1)} \times \frac{3u_{n+1} + 1}{3u_{n+1} + 3} \\
 &= \frac{-6u_{n+1} + 4}{9u_{n+1} + 9} \\
 &= \frac{-6(u_{n+1} - \frac{2}{3})}{9(u_{n+1} + 1)} \\
 &= -\frac{2}{3} v_n
 \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3} v_n$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme :

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \frac{u_0 - \frac{2}{3}}{u_0 + 1} \\
 &= \frac{2 - \frac{2}{3}}{2 + 1} \\
 &= \frac{\frac{4}{3}}{3}
 \end{aligned}$$

$$v_0 = \frac{4}{9}$$

3 De la question précédente, on déduit :

$$v_n = \frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{u_n - \frac{2}{3}}{u_n + 1} \\
 \Leftrightarrow v_n(u_n + 1) &= u_n - \frac{2}{3} \\
 \Leftrightarrow v_n u_n - u_n &= -v_n - \frac{2}{3} \\
 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) &= -v_n - \frac{2}{3} \\
 \Leftrightarrow u_n &= \frac{-v_n - \frac{2}{3}}{v_n - 1} \\
 \Leftrightarrow u_n &= \frac{-\frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.29 page 155

1 a. Calculons :

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} &= au_{n+1} + bv_{n+1} = a(0,55u_n + 0,35v_n) + b(0,45u_n + 0,65v_n) \\
 &= (0,55a + 0,45b)u_n + (0,35a + 0,65b)v_n.
 \end{aligned}$$

(w_n) est une suite géométrique de raison q donc $w_{n+1} = qw_n$; par conséquent,

$$(0,55a + 0,45b)u_n + (0,35a + 0,65b)v_n = qau_n + qbv_n,$$

et donc :

$$\begin{cases} 0,55a + 0,45b = aq \\ 0,35a + 0,65b = bq \end{cases}$$

b. Du système précédent, on déduit :

$$\begin{cases} 0,45b = qa - 0,55a \\ 0,35a = qb - 0,65b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} b = \frac{q-0,55}{0,45}a \\ a = \frac{q-0,65}{0,35}b \end{cases}$$

c. En remplaçant a par $\frac{q-0,65}{0,35}b$ dans la première équation, on a :

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{q-0,55}{0,45} \times \frac{q-0,65}{0,35} b \Leftrightarrow 1 = \frac{q-0,55}{0,45} \times \frac{q-0,65}{0,35} \quad (b \neq 0) \\
 &\Leftrightarrow 0,45 \times 0,35 = (q-0,55)(q-0,65) \\
 &\Leftrightarrow 0,1575 = q^2 - 0,65q - 0,55q + 0,3575 \\
 &\Leftrightarrow q^2 - 1,2q + 0,2 = 0
 \end{aligned}$$

d. Le discriminant du polynôme $q^2 - 1,2q + 0,2$ est :

$$\Delta = (-1,2)^2 - 4 \times 1 \times 0,2 = 0,64$$

donc il admet deux racines :

$$q_1 = \frac{1,2 - \sqrt{0,64}}{2} = 0,2 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{1,2 + \sqrt{0,64}}{2} = 1.$$

- Pour $q = 1$, le système de la question 1 a. devient :

$$\begin{cases} 0,55a + 0,45b = a \\ 0,35a + 0,65b = b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -0,45a + 0,45b = 0 \\ 0,35a - 0,35b = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors que $a = b$.

- Pour $q = 0,2$, le système de la question 1 a. devient :

$$\begin{cases} 0,55a + 0,45b = 0,2a \\ 0,35a + 0,65b = 0,2b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 0,355a + 0,45b = 0 \\ 0,35a + 0,45b = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors que $a = \frac{-0,45}{0,35}b = -\frac{9}{7}b$.

- 2 a. Pour c_n , $a = b = 1$ donc nous sommes dans le cas où $q = 1$: (c_n) est donc une suite constante.

Pour g_n , $a = 9$ et $b = -7$, soit $a = -\frac{9}{7}b$ donc nous sommes dans le cas où $q = 0,2$.

- b. On en déduit que $c_n = c_0 = u_0 + v_0 = 1$ (car c'est une suite constante) et $g_n = g_0 \times q^n = (9u_0 - 7v_0) \times 0,2^n$, soit $g_n = 9 \times (0,2)^n$.

- c. On a :

$$\begin{cases} c_n = u_n + v_n \\ g_n = 9u_n - 7v_n \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 1 = u_n + v_n \\ 9(0,2)^n = 9u_n - 7v_n \end{cases}$$

En multipliant par 7 la première équation, on a :

$$\begin{cases} 7 = 7u_n + 7v_n \\ 9(0,2)^n = 9u_n - 7v_n \end{cases}$$

En ajoutant les deux équations membre à membre, on a :

$$7 + 9(0,2)^n = 16u_n \quad \text{soit} \quad u_n = \frac{7 + 9(0,2)^n}{16}$$

De l'équation initiale $u_n + v_n = 1$, on déduit alors :

$$v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{7 + 9(0,2)^n}{16} \quad \text{soit} \quad v_n = \frac{9 - 9(0,2)^n}{16}$$

Corrigé de l'exercice 3.30 page 156

Voici un programme Python possible :

Code Python 3-40

```
1 for p in range(1,11):
2     n = 10**p # 10 exposant p
3     u = (1+1/n)**n
4     print(u)
```

Ce programme retourne :

```
2.5937424601000023
2.7048138294215285
2.7169239322355936
2.7181459268249255
2.7182682371922975
2.7182804690957534
2.7182816941320818
2.7182817983473577
2.7182820520115603
2.7182820532347876
```

On constate alors que les termes semblent se rapprocher d'un nombre, dont la valeur approchée au millième est 2,718.

En revanche, pour $p = 15$, le programme retourne la valeur 3.035035206549262.

Si $p = 20$, le programme affiche « 1 ».

La raison est que pour $n = 10^{20}$, le programme arrondit le résultat de $\frac{1}{n}$ à 0 (car il y a trop de « 0 » après la virgule dans le résultat mathématique), ce qui implique que le programme arrondit le résultat de $1 + \frac{1}{n}$ à 1, et donc le résultat de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ à $1^n = 1$.

Quant au résultat retourné pour $p = 15$, on constate que si l'on demande d'afficher la valeur de $1 + \frac{1}{n}$, il s'affiche « 1.0000000000000001 » et la façon dont Python calcule ce nombre à l'exposant 15 semble erronée (méthode trop compliquée à expliquer ici).

Corrigé de l'exercice 3.31 page 156

1 Un algorithme possible est le suivant :

```
L ← [5] (liste débutant par le 1er terme de la suite)
Pour n allant de 1 à 20:
    u ← 0.8*u+7
    On ajoute à L la valeur u
Fin du Pour
Afficher L
```

2 Le programme Python correspondant est :

Code Python 3-41

```
1 L = [5]
2 u = 5 # 1er terme
3
4 for n in range(1,21):
5     u = 0.8*u+7
6     L.append(u)
7
8 print(L)
```

Attention 10



N'oubliez pas que `range(a, b)` parcourt les entiers de a à $b - 1$...

3 Pour afficher le premier indice n pour lequel $u_n > 34,99$, on utilise une boucle « Tant que ».

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ≤ 34.99:
    u ← 0.8*u+7
    n ← n+1
Fin du Tant que
```

Attention 11



La condition qui vient après « Tant que » est toujours le contraire de la condition à remplir. Ici, on veut que $u_n > 34,99$ et le contraire de cette condition est « $u_n \leq 34,99$ ». On doit donc mettre cette condition dans l'algorithme.

Le programme Python correspondant est :

Code Python 3-42

```
1 u , n = 5 , 0 # u = 5 et n = 0
2 while u <= 34.99:
3     u = 0.8*u + 7
4     n = n + 1
5 print(n)
```

Il affiche ici la valeur 36, ce qui signifie que $u_{35} \leq 34,99$ et que $u_{36} > 34,99$.

Corrigé de l'exercice 3.32 page 156

- 1 Un algorithme possible est le suivant :

Initialisation:

F est une liste

$F \leftarrow [1,1]$ (les deux premiers termes de la suite)

Traitement:

Pour n allant de 2 à 100:

Ajouter à F la valeur $F[n-2] + F[n-1]$

Afficher $F[n-1]/F[n-2]$

Fin du Pour

- 2 Le programme Python correspondant est :

Code Python 3-43

```
1 F = [1,1]
2 for n in range(2,100):
3     F.append(F[n-2]+F[n-1])
4     print(F[n-1]/F[n-2])
```

Remarque 24

Si on compile le programme ci-dessus, on voit que les quotients affichés sont, à partir d'un certain rang, tous égaux à 1.618033988749895 .

Bien entendu, cette valeur n'est qu'une valeur approchée de la limite des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Cette limite est appelée le *nombre d'or*.

C'est une valeur que l'on retrouve ailleurs (par exemple, le nombre d'or est une des solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$).

Corrigé de l'exercice 3.33 page 157

- 1 On sait que :

$$\begin{cases} u_0 = 10520 \\ u_1 = 10694 = a \times 10520 + b \\ u_2 = 10859 = a \times (a \times 10520 + b) + b = 10520a^2 + ab + b \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$b = 10694 - 10520a$$

et remplacer b par cette dernière expression dans la dernière égalité :

$$\begin{aligned} 10520a^2 + a(10694 - 10520a) + (10694 - 10520a) &= 10859 \\ \Leftrightarrow 174a &= 165 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{165}{174} \approx 0,95. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$b \approx 10694 - 10520 \times 0,95 \approx 700.$$

Finalement,

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 700$$

2 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 14000 \\ &= 0,95u_n + 700 - 14000 \\ &= 0,95u_n - 13300 \\ &= 0,95\left(u_n - \frac{13300}{0,95}\right) \\ &= 0,95(u_n - 14000) \\ &= 0,95v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 14000 = -3480.$$

3 D'après le cours,

$$v_n = v_0 \times q^n = -3480 \times 0,95^n.$$

Or, $v_n = u_n - 14000$ donc :

$$u_n = 14000 + v_n = 14000 - 3480 \times 0,95^n.$$

4 Le programme complété est le suivant :

Code Python 3-44

```
1 u = 10520
2 n = 2018
3 while u < 13500:
4     n = n + 1
5     u = 0.95 * u + 700
6
7 print(n)
```

5 On trouve à l'aide de la calculatrice que la population de ce village dépassera 13 500 habitants en 2056.

Corrigé de l'exercice 3.34 page 158

- 1**
- Par définition, $u_1 = 1$ (nombre de grain de blé sur la première case);
 - u_2 est le double de u_1 , donc $u_2 = 2u_1 = 2 \times 1 = 2$;
 - $u_3 = 2u_2 = 4$;
 - $u_4 = 2u_3 = 8$;

- $u_5 = 2u_4 = 16$.

- 2** Par définition, u_{n+1} est le double de u_n car on double le nombre de grains d'une case à l'autre.

Ainsi, $u_{n+1} = 2u_n$.

- 3** De la relation de récurrence précédente, on en déduit que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = 2$.

D'après le cours, on a alors pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2^{n-1}$$

- 4** Le nombre de grains de riz qui doivent être disposés sur le plateau pour satisfaire à la demande du vieux sage est :

$$u_{64} = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$$

- 5** Le programme complété est le suivant :

Code Python 3-45

```
1 def nb_case(R):
2     case = 1
3     u = 1
4     somme = u
5     while somme < R:
6         u = 2 * u
7         somme = somme + u
8         case = case + 1
9     return case
```

En effet, on doit calculer les termes successifs de la suite (l. 7) et la somme est obtenue (l. 8) en ajoutant le nouveau terme à la somme précédente *tant que* cette somme n'a pas atteint R, donc tant que la somme est inférieure strictement à R (l. 8).

Corrigé de l'exercice 3.35 page 159

1 $u_2 = u_1 + 52 = 130 + 52 = 182$;

$u_3 = u_2 + 52 = 182 + 52 = 234$.

- 2** Par définition, $u_{n+1} = u_n + 52$ donc (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 130$ et de raison $r = 52$.

On en déduit alors que pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = u_1 + (n - 1)r,$$

c'est-à-dire :

$$u_n = 130 + (n - 1) \times 52$$

ou encore :

$$u_n = 52n + 78$$

3 S_2 correspond au coût de forage pour 2 mètres donc :

$$S_2 = u_1 + u_2 = 130 + 182 = 312.$$

De même,

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 = 312 + 234 = 546.$$

4 La fonction complétée est :

Code Python 3-46

```
1 def nombre_metre(S):
2     C = 130
3     n = 1
4     while C < S:
5         C = C + 52*(n+1)+78
6         n = n + 1
7     return n
```

Attention ici : l'instruction « $n = n + 1$ » étant après « $C = C + \dots$ », il faut penser à ajouter 1 à n dans la formule... Ce qui est à mes yeux stupide! Le concepteur du sujet aurait dû plutôt écrire la fonction suivante :

Code Python 3-47

```
1 def nombre_metre(S):
2     C = 130
3     n = 1
4     while C < S:
5         n = n + 1
6         C = C + 52*n+78
7     return n
```

car c'est bien plus naturel ainsi... Il n'y a aucune raison de complexifier la fonction en inversant les deux instructions de la boucle.

Dans cette dernière fonction, à chaque passage dans la boucle, on ajoute à C la valeur de u_n car c'est ainsi que cela se passe réellement.

5 On cherche ici le premier entier n pour lequel $S_n \leq 116610$:

$$S_n \leq 116610 \iff 26n^2 + 104n - 116610 \leq 0.$$

Le discriminant du polynôme $26n^2 + 104n - 116610$ est :

$$\Delta = 104^2 - 4 \times 26 \times (-116610) = 12\,138\,256 = 3484^2,$$

donc il admet deux racines :

$$n_1 = \frac{-104 - 3484}{2 \times 26} = -69$$

et

$$n_2 = \frac{-104 + 3484}{2 \times 26} = 65.$$

Seules les valeurs de n strictement positives nous intéressent donc $26n^2 + 104n - 116610 \leq 0$ pour $n \geq 65$.

Ainsi, `nombre_metre(116610)` renvoie le nombre 65.

Corrigé de l'exercice 3.36 page 159

1 Par définition, $d_2 = d_1 + \frac{5}{100}d_1 = 1,05d_1 = 1,05 \times 20 = 21$.

De même, $d_3 = 1,05d_2 = 1,05 \times 21 = 22,05$.

2 En s'inspirant des calculs précédents, on peut dire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$d_{n+1} = 1,05d_n$$

3 D'après la relation de récurrence trouvée, (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_1 = 20$ et de raison $q = 1,05$. Ainsi, d'après le cours, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$d_n = d_1 \times q^{n-1}$$

soit :

$$d_n = 20 \times 1,05^{n-1}$$

4 Dans cette question, on cherche d_{10} :

$$d_{10} = 20 \times 1,05^{10} \approx 32,57789$$

Donc Bob va courir environ 33 km lors de son 10^e entraînement.

5 Le script complété est le suivant :

Code Python 3-48

```
1 n = 1
2 d = 20
3 while d < 43:
4     n = n + 1
5     d = 1.05 * d
```

Si on demande d'afficher la valeur de n trouvée, on a : $n = 17$.

Corrigé de l'exercice 3.37 page 160

1 a. Lors de l'appel `saut(4)`, la variable k varie de 2 à 4 inclus. Donc, à $s=8$, on ajoute 0,1 trois fois.

La valeur renvoyée est donc $s=8.3$.

b. Le résultat obtenu à la question précédente signifie que Fanny fera un saut de 8,3 m.

2 Par définition, (s_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0,1$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $s_n = s_1 + (n-1)r$, soit $s_n = 8 + 0,1(n-1)$, ou encore :

$$s_n = 7,9 + 0,1n$$

3 On souhaite résoudre l'inéquation :

$$s_n \geq 12 \iff 7,9 + 0,1n \geq 12$$

$$\iff 0,1n \geq 12 - 7,9$$

$$\iff 0,1n \geq 4,1$$

$$\iff n \geq \frac{4,1}{0,1}$$

$$\iff n \geq 41.$$

Ainsi, Fanny arrivera à faire des bonds plus grands que 12 mètres à partir de la 41^e semaine.



LA fonction exponentielle

Plan du chapitre

I	Première approche	202
1	Notre objectif	202
2	La méthode d'Euler	202
II	Définition	204
1	Unicité de la fonction exponentielle	204
2	Définition	205
III	Relations fonctionnelles	206
1	Image d'un opposé	206
2	Image d'une somme	206
IV	Notation e^x	207
1	Le nombre e	207
2	Vers la notation simplifiée	208
V	La suite (e^{na}), a réel	208
1	La suite est géométrique	208
2	Expression du terme général	209
VI	Étude de la fonction $x \mapsto e^x$	209
1	Positivité	209
2	Sens de variation	210
3	Courbe représentative	210
4	Propriétés de bijectivité	211
VII	Étude des fonctions $x \mapsto e^{kx}$	211
1	Variations	211
2	Représentations graphiques	211
3	Domaines où l'on rencontre l'exponentielle	212
	Enoncés	214
	Corrigés des exercices	224

1 - Première Approche

1.1 - Notre objectif

On recherche une fonction f telle que :

1 pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$;

2 $f(0) = 1$.

On suppose que cette fonction existe.

Très vite, on se rend compte que cette fonction n'est pas un polynôme (car le seul polynôme P qui vérifie le point **1** est $P(x) = 0$ et dans ce cas, $P(0) \neq 1$, ce qui ne satisfait pas le point **2**).

Ce n'est pas non plus une fonction racine carrée ou une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes).

1.2 - La méthode d'Euler

Nous allons avant tout tenter de dessiner la courbe représentative de notre fonction. Pour cela, on va prendre des intervalles $[a; a + h]$, avec h très proche de 0, et on va assimiler la courbe représentative de f à sa tangente au point d'abscisse a . En effet, sur un intervalle assez petit $[a; a + h]$, la tangente est très proche de la courbe.

On sait que l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Posons $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$. Confondre la courbe et la tangente revient à dire que $f(a + h) \approx g(a + h)$, c'est-à-dire :

$$f(a + h) \approx f'(a)(a + h - a) + f(a),$$

soit :

$$f(a + h) \approx f'(a) \times h + f(a).$$

Or, d'après le point **1**, $f'(a) = f(a)$ donc :

$$f(a + h) \approx hf(a) + f(a)$$

soit :

$$f(a + h) \approx (1 + h)f(a).$$

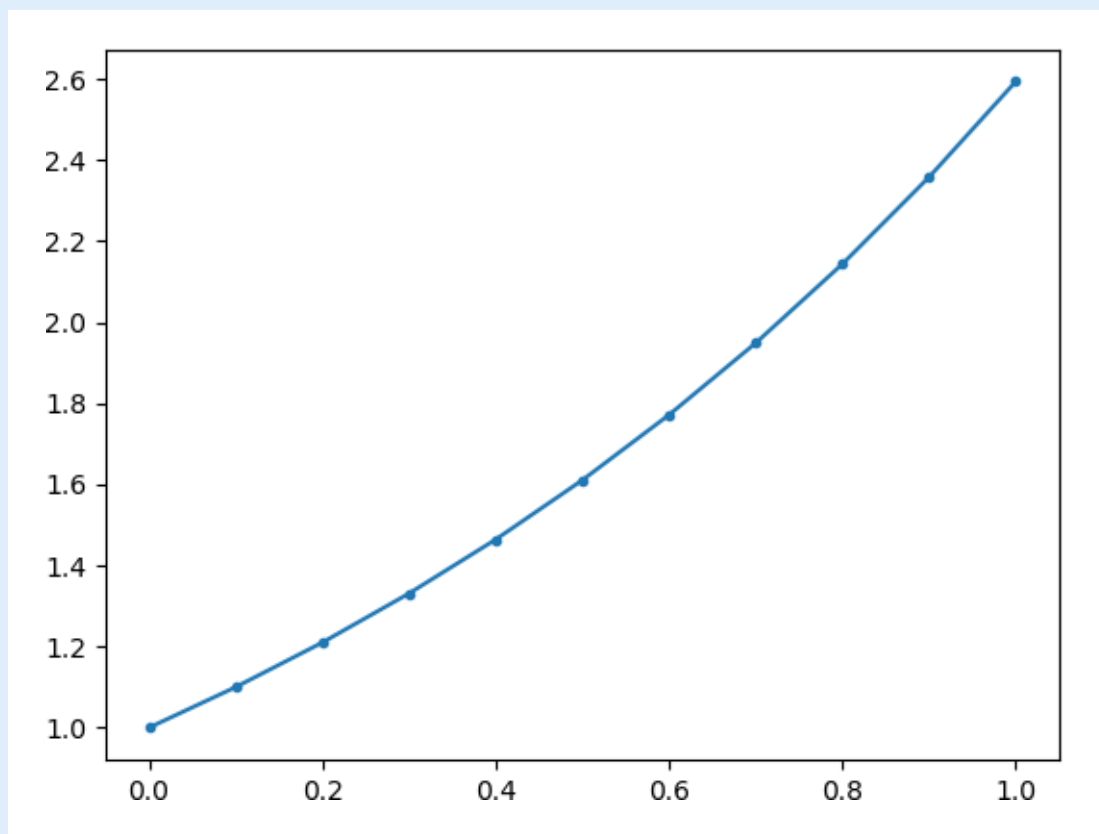
h peut être pris aussi petit qu'on le souhaite. Prenons par exemple $h = 0,1$. Alors,

- en prenant $a = 0$: $f(0 + 0,1) \approx (1 + 0,1) \times f(0) = 1,1 \times 1 = 1,1$;
- en prenant $a = 0,1$: $f(0,2) = f(0,1 + 0,1) \approx (1 + 0,1) \times f(0,1) = 1,1 \times 1,1 = 1,21$;
- en prenant $a = 0,2$: $f(0,3) = f(0,2 + 0,1) \approx (1 + 0,1) \times f(0,2) = 1,1 \times 1,21 = 1,331$;
- etc.

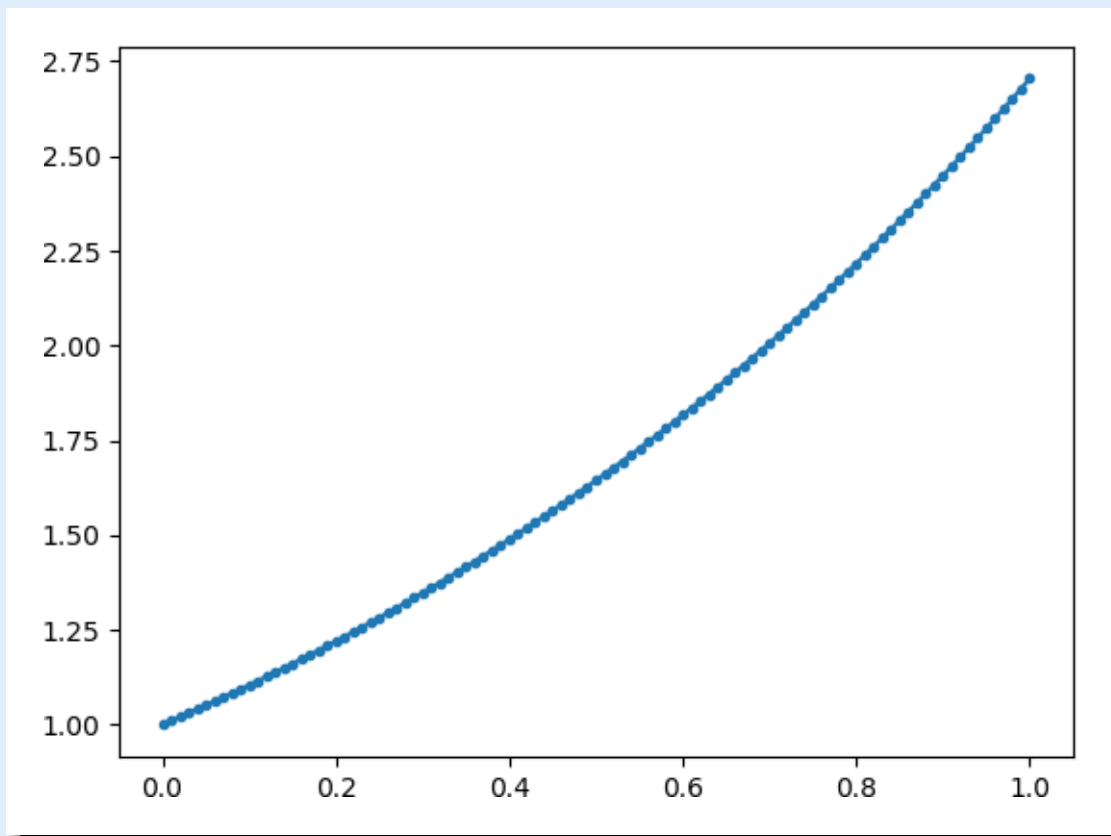
Le programme Python suivant permet d'automatiser la construction des segments :

Code Python 4-49

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 xList = [0]
5 yList = [1]
6
7 a = 0
8 h = 0.1
9
10 for i in range(10):
11     x = a+h
12     y = (1+h)*yList[i]
13     xList.extend([x])
14     yList.extend([y])
15     a = x
16
17 x = np.array(xList)
18 y = np.array(yList)
19 plt.plot(x, y, marker=".")
20
21 plt.show()
```



Avec un pas plus petit ($h = 0,01$), on obtient la figure suivante.



On voit alors se dessiner la courbe représentative de la fonction f cherchée, sur $[0; 1]$.

II - Définition

II.1 - Unicité de la fonction exponentielle

Nous avons vu précédemment comment tracer la représentation graphique d'une fonction f telle que $f' = f$, avec $f(0) = 1$.

Montrons qu'une telle fonction est unique (on suppose son existence).

Pour cela, nous aurons besoin de la propriété suivante.

Propriété 26 (fondamentale)

Soit une fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Pour tout réel x , $f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

Démonstration 12

Posons $h(x) = f(x) \times f(-x)$. Alors, h est dérivable sur \mathbb{R} comme le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , et :

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)].$$

Or, $f'(x) = f(x)$ donc :

$$h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

La fonction h est donc constante sur \mathbb{R} .

Or, $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$.

Donc, pour tout réel x , $h(x) = 1$, c'est-à-dire :

$$f(x) \times f(-x) = 1.$$

On en déduit de plus que f ne s'annule jamais sur \mathbb{R} , donc que $f(x) \neq 0$ sur \mathbb{R} .

Montrons maintenant que f est unique. Pour cela, supposons qu'il existe deux fonctions f et g qui vérifient les mêmes hypothèses mathématiques, à savoir que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}.$$

Posons alors $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ (d'après la propriété 26, f ne s'annule jamais donc h est bien définie).

h est dérivable sur \mathbb{R} comme le quotient de deux fonction dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas, et :

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Or, $g' = g$ et $f' = f$ donc :

$$h'(x) = \frac{g(x)f(x) - f(x)g(x)}{[f(x)]^2} = 0.$$

Ainsi, h est une fonction constante sur \mathbb{R} .

De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

Donc, pour tout réel x , $h(x) = 1$, ce qui signifie que $g(x) = f(x)$.

Nous venons donc de montrer qu'il n'existe qu'une fonction remplissant nos exigences.

Théorème 1

Il n'existe qu'une fonction f telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

II. 2 - Définition

Définition 16

On appelle **fonction exponentielle** la fonction \exp telle que :

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

III - Relations fonctionnelles

III . 1 - Image d'un opposé

D'après la propriété 26, on peut tout de suite écrire :

Propriété 27

Pour tout réel x ,

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

III . 2 - Image d'une somme

Propriété 28 (exponentielle d'une somme)

Pour tous nombres réels x et y ,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Démonstration 13

Posons $f(x) = \exp(x + y) \times \exp(-x)$. f est dérivable sur \mathbb{R} comme le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'(x + y) \times \exp(-x) + \exp(x + y) \times [-\exp'(-x)] \\ &= \exp(x + y) \times \exp(-x) - \exp(x + y) \times \exp(-x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f est une fonction constante.

De plus, $f(0) = \exp(0 + y) \times \exp(-0) = \exp(y)$ donc, pour tout réel x ,

$$f(x) = \exp(x + y) \times \exp(-x) = \exp(y),$$

c'est-à-dire :

$$\exp(x + y) = \exp(y) \times \frac{1}{\exp(-x)} = \exp(y) \times \exp(x).$$

Propriété 29 (exponentielle d'une différence)

Pour tous réels x et y ,

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Démonstration 14

En considérant la propriété 28 en remplaçant y par $-y$, on a :

$$\exp [x + (-y)] = \exp(x) \times \exp(-y).$$

D'après la propriété 26, $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$ donc :

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

IV - Notation e^x

IV.1 - Le nombre e

En mathématiques, il est de coutume de désigner par une lettre un nombre important dont l'écriture décimale est infinie. C'est par exemple le cas du nombre π .

C'est la raison pour laquelle on pose :

$$e = \exp(1).$$

Le nombre e est égal à l'image de 1 par la fonction \exp .

Avec la méthode d'Euler, nous avons vu que :

- $\exp(0,1) \approx (1 + 0,1)$;
- $\exp(0,2) \approx (1 + 0,1) \times \exp(0,1) \approx (1 + 0,1)^2$;
- $\exp(0,3) \approx (1 + 0,1) \times \exp(0,1) \approx (1 + 0,1)^3$;
- etc.

On peut alors écrire, pour h très proche de 0 et pour tout entier naturel n :

$$\exp(nh) \approx (1 + h)^n.$$

En prenant $h = \frac{1}{n}$, n étant un entier assez grand pour que $\frac{1}{n}$ soit assez proche de 0, on a :

$$\exp(1) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi, en prenant n de plus en plus grand, le nombre $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se rapproche du nombre e .

Dans l'exercice VI, nous en avons trouvé une valeur approchée. Nous prendrons :

$$e \approx 2,71828182846$$

IV.2 - Vers la notation simplifiée

De la propriété 28, nous pouvons déduire que :

- $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \times \exp(1) = (\exp(1))^2 = e^2$;
- $\exp(3) = \exp(2 + 1) = \exp(2) \times \exp(1) = (\exp(1))^3 = e^3$;
- \vdots
- $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Ceci nous encourage alors à simplifier l'écriture $\exp(x)$ en e^x , sans pour autant avoir démontré l'égalité pour tout réel x (on laisse cette démonstration aux mathématicien.ne.s averti.e.s).

Ainsi, à partir de maintenant, on notera :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

Les propriétés précédentes s'écrivent alors :

Propriété 30

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$;
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;
- $e^0 = 1$;
- $(e^x)' = e^x$.

V - La suite (e^{na}) , a réel

Soit a un réel. Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = e^{na}.$$

V.1 - La suite est géométrique

Pour démontrer que la suite (u_n) est géométrique, il faut démontrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout entier naturel n .

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} \\ &= e^{(n+1)a - na} && \text{(d'après la propriété 28)} \\ &= e^{na + a - na} \\ &= e^a. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = e^a$.

V.2 - Expression du terme général

Par propriété,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

avec $u_0 = e^0 = 1$. Par conséquent,

$$u_n = (e^a)^n.$$

Or, $u_n = e^{na}$. On en déduit alors la propriété suivante :

Propriété 31 (puissance d'une exponentielle)

Pour tout réel a et pour tout entier n ,

$$(e^a)^n = e^{na}.$$

VI - Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

VI.1 - Positivité

Propriété 32 (positivité)

La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement positive.

Démonstration 15

Quel que soit le réel x , on peut écrire :

$$e^x = e^{\frac{x}{2} \times 2}.$$

D'après la propriété 31, cela revient à écrire :

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Un carré étant toujours positif ou nul, cela signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 0.$$

Or, d'après la propriété 26,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \times e^{-x} = 1,$$

ce qui implique que pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 0.$$

VI.2 - Sens de variation

Propriété 33 (croissance de la fonction exponentielle)

La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration 16

Par définition,

$$\exp' = \exp.$$

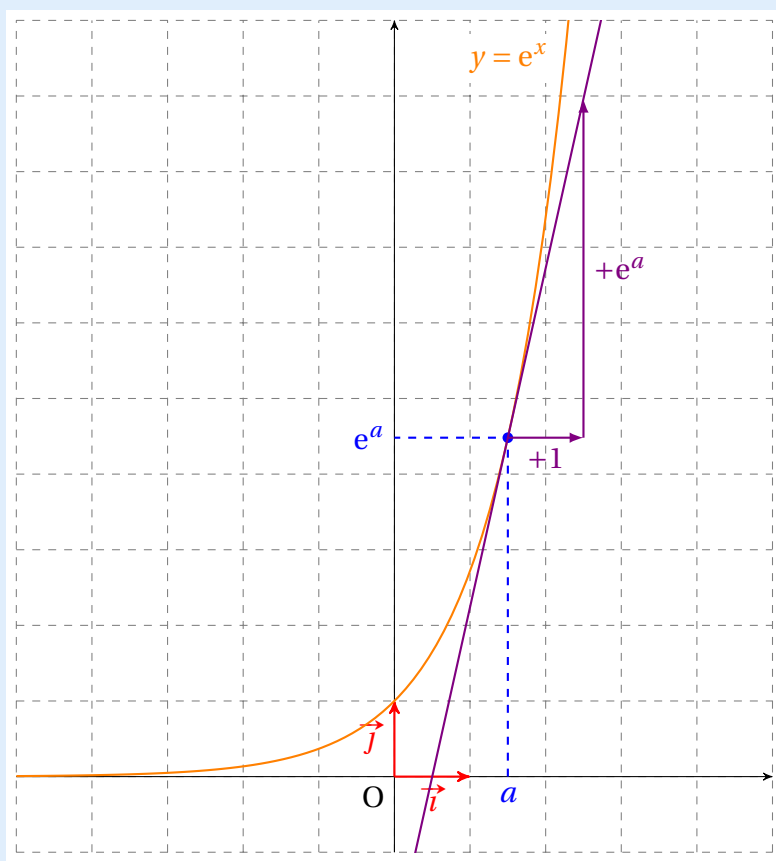
De plus, d'après la propriété 32, pour tout réel x , $\exp(x) > 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) > 0,$$

ce qui signifie que la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

VI.3 - Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ sur \mathbb{R} est la suivante :



En tout point d'abscisse a , le coefficient directeur de la tangente à la courbe est égal à e^a .

VI. 4 - Propriétés de Bijectivité

Propriété 34

Pour tous réels x et y ,

1 $x = y \iff e^x = e^y$

2 $x \geq y \iff e^x \geq e^y$

3 $x \leq y \iff e^x \leq e^y$

Ces propriétés découlent de la stricte monotonie de la fonction $x \mapsto e^x$ sur \mathbb{R} .

VII - Étude des fonctions $x \mapsto e^{kx}$

VII. 1 - Variations

Posons $f(x) = e^{kx}$, où $k \in \mathbb{R}^*$.

Nous avons vu précédemment que la dérivée de toute fonction $g(ax + b)$ était égale à $ag'(ax + b)$. Ainsi,

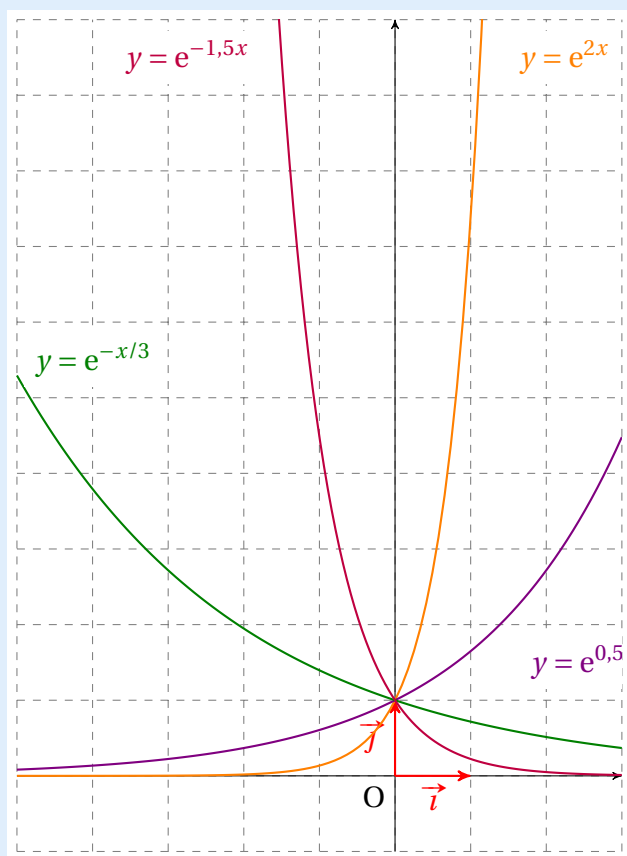
$$f'(x) = ke^{kx}.$$

Pour tout réel x , $e^{kx} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de k . Ainsi,

- si $k < 0$, f est strictement décroissante sur \mathbb{R} ;
- si $k > 0$, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

VII. 2 - Représentations graphiques

Voici quelques exemples de représentations graphiques des fonctions $x \mapsto e^{kx}$:



VII . 3 - Domaines où l'on rencontre l'exponentielle

Radioactivité

« La radioactivité est le phénomène physique par lequel des noyaux atomiques instables (dits radionucléides ou radioisotopes), se transforment spontanément en d'autres atomes (désintégration) en émettant simultanément des particules de matière (électrons, noyaux d'hélium, neutrons, etc.) et de l'énergie (photons et énergie cinétique). La radioactivité a été découverte en 1896 par Henri Becquerel dans le cas de l'uranium, et très vite confirmée par Marie Curie pour le radium. »

Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Radioactivité>

Quand une substance est radioactive, elle ne l'est pas pour toujours. En effet, on montre mathématiquement que le nombre N de noyaux radioactifs diminue avec le temps t et est donné par l'égalité :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

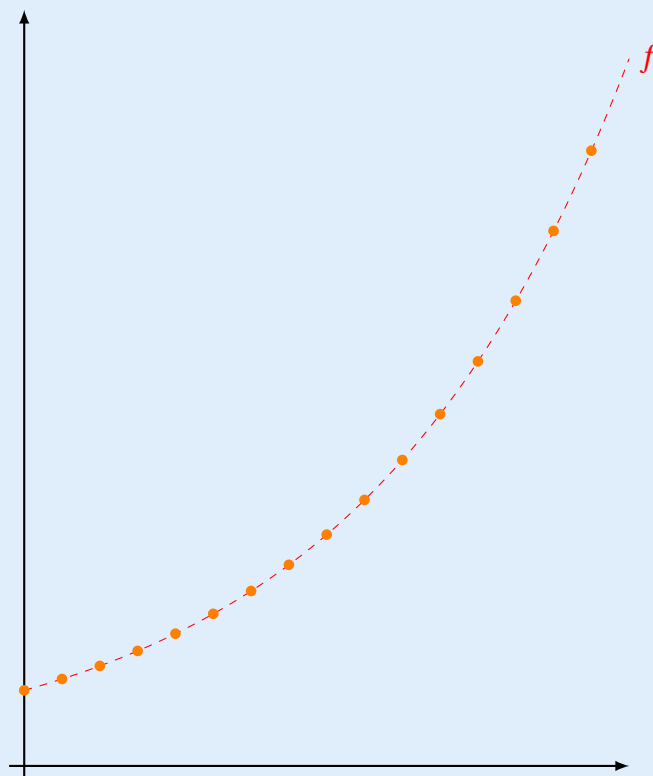
où λ est un paramètre positif dépendant de l'élément radioactif, et N_0 le nombre initial observé de noyaux radioactifs.

évolution d'un capital à taux fixe

Lorsque l'on place un capital sur un compte à taux fixe, cela signifie que chaque année (si on n'y touche pas entre temps), on ajoute un certain pourcentage t au capital de l'année précédente. Cela se traduit par l'égalité :

$$C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n.$$

Si on place les points représentant cette suite, on constate qu'ils suivent une courbe exponentielle :



On arrive à montrer que la fonction f s'écrit sous la forme :

$$f(x) = C_0 e^{kx}, \quad k > 0.$$

Remarque 25

Ici, le paramètre k est ce que l'on nomme le **logarithme népérien** du nombre $1 + \frac{t}{100}$. On le note $\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Décroissance thermique

La police scientifique utilise quelques fois (doux euphémisme...) les mathématiques. C'est le cas quand elle souhaite déterminer l'heure de la mort d'une personne. Pour cela, elle utilise la formule :

$$\frac{T_{\text{corps}} - T_{\text{ambiante}}}{37,2 - T_{\text{ambiante}}} = 1,25e^{-kt} - 0,25e^{-5kt},$$

où :

- T_{corps} désigne la température (en °C) du corps;
- T_{ambiante} désigne la température (en °C) du milieu où se trouve le corps;
- k est un paramètre dépendant de la masse (en kg) du corps, avec $k = \frac{1,2815}{e^{0,625 \ln(M)}} - 0,0254$, où $\ln(M)$ désigne le logarithme népérien de M (vous en saurez plus sur le logarithme népérien l'année prochaine).

À l'aide de cette égalité, on peut trouver le réel t , qui représente ici la différence entre l'heure de la mort et l'heure des relevés.

Par exemple, si on trouve $t \approx 7,5$, cela signifie que l'heure de la mort remonte à 7h30min.

Propriétés algébriques

Exercice 4.1 (simplifications)

Simplifier les nombres suivants en donnant le résultat sous la forme d'une seule exponentielle.

1 $e^5 \times e^{-3}$

3 $(e^{-2})^3$

5 $\frac{e^2 \times e^{-2}}{e^{-1}}$

2 $\frac{e^{-9}}{e^7}$

4 $\frac{e^3 \times e^{-4}}{e^{-2}}$

6 $(e^{-1} \times e^{-2})^3$

Solution page 224

Exercice 4.2 (simplifications)

Simplifier les expressions suivantes en donnant le résultat sous la forme d'une seule exponentielle.

1 $e^{2x-1} \times e^{-x+3}$

3 $(e^{-x+1} \times e^{x-1})^2$

2 $\frac{e^{3x-1}}{e^{4x-2}}$

4 $\left(\frac{e^{2x+3} \times e^{3x-2}}{e^4} \right)^{-1}$

Solution page 224

Exercice 4.3 (équations)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1 $e^{x+2} = 0$

5 $e^{x^2-1} = e^{2x^2+3x-2}$

2 $e^{x^5+x+1} = -1$

6 $5 - 2e^{3x+2} = 3$

3 $e^{2x+3} = e^{-2x-5}$

7 $2 + 3e^{2x} = 5$

4 $e^{5x+2} = e^{3x+1}$

8 $7 - 4e^{5x-3} = 3$

Solution page 224

Exercice 4.4 (équations avec changement de variable)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1 $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

2 $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Solution page 225

Exercice 4.5 (Inéquations)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

1 $e^{3x-1} > e^{2x+4}$

3 $e^{x^2-1} < e$

5 $8 + 3e^{-2x+3} \leq 11$

2 $e^{-2x+5} \leq e^{4x+7}$

4 $12 - 4e^{5x+1} \geq 8$

6 $56 + 14e^{47x-15} > 70$

Solution page 226

Exercice 4.6 (Inéquations avec changement de variable)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1 $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$

2 $e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0$

Solution page 227

Études de fonctions

Exercice 4.7

On considère la fonction f définie par pour tout réel x par :

$$f(x) = (7x - 1)e^x$$

1 Montrer que sa dérivée est égale à $f'(x) = (7x + 6)e^x$.

2 En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .

Solution page 227

Exercice 4.8

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (3 - 2x)e^{-x}.$$

1 Montrer que sa dérivée est égale à $f'(x) = (2x - 5)e^{-x}$.

2 En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

Solution page 228

Exercice 4.9

Étudier sur \mathbb{R} les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Solution page 228

Exercice 4.10

On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à son domaine de définition par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 6}{2e^x + 7}$$

- 1 Justifier que son domaine de définition est \mathbb{R} .
- 2 Montrer que sa dérivée est $f'(x) = \frac{2e^x(e^{2x} + 7e^x + 6)}{(2e^x + 7)^2}$.
- 3 En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .

Solution page 229

Exercice 4.11

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x}).$$

- 1 Montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.
- 2 En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
- 3 Préciser la valeur de $f'(0)$ puis donner les variations de f .

Solution page 229

Exercice 4.12

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = e^x \sqrt{x}.$$

- 1 Déterminer $f'(x)$.
- 2 En déduire les variations de f sur \mathbb{R}_+ .
Dresser un tableau de variations de f .

Solution page 230

Exercice 4.13 (modélisation du taux d'équipement en smartphones)

On peut modéliser le taux d'équipement en smartphones des adultes français au cours de l'année $2015 + t$ par la fonction f définie pour tout réel positif t par :

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,5t}}.$$

- 1 Étudier le sens de variation de la fonction f .
- 2 À partir de quelle année le taux d'équipement deviendra supérieur à 90 % ? On pourra utiliser la calculatrice ou n'importe quel programme.

Solution page 230

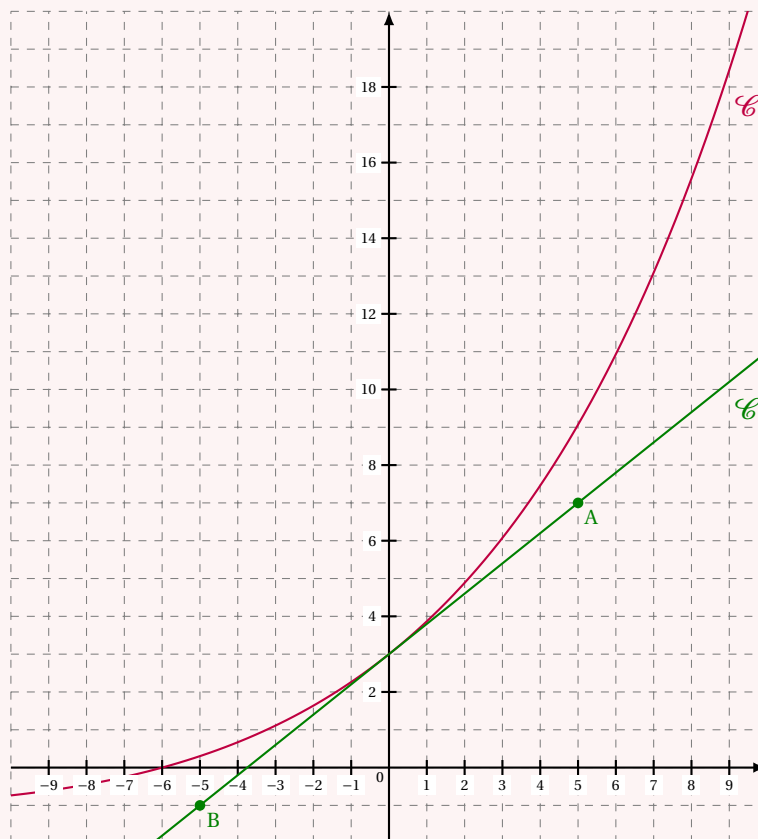
Exercice 4.14

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (ax + b)e^{kx}$$

où a , b et k sont trois nombres réels.

La courbe représentative \mathcal{C} de f est donnée ci-dessous :



\mathcal{T} est la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

Les points A et B sont sur \mathcal{T} .

Par lecture graphique :

- 1 Déterminer la valeur de $f(0)$.
En déduire la valeur de b .
- 2 Déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$.
En déduire la valeur de a .
- 3 Déterminer la valeur de $f'(0)$.
En déduire la valeur de k .

Solution page 231

Exercice 4.15

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1 Montrer que f est impaire, c'est-à-dire que pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.
- 2 Montrer que $f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.
En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .
- 3 Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

Solution page 231

Exercice 4.16 (Taux de malades après injection d'un antidote)

On injecte à toutes les personnes d'un groupe d'individus infectés par un virus un antidote à l'instant $x = 0$.

Le taux de personnes ayant le virus à l'instant x est donné par la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = e^{-x} \sqrt{x+1},$$

où x est exprimé en jour.

- 1 Déterminer les variations de f .
- 2 Soit l'algorithme suivant :

```
f ← 1
x ← 0
Tant que f > 0.5:
  x ← x+1/24
  f ← e-x√(x+1)
Afficher x
```

À quoi correspond la valeur affichée par cet algorithme?

- 3 Cet algorithme affiche la valeur : 1,08333.
Indiquer au bout de combien d'heures le taux de malades est inférieur à 50 %.
- 4 À l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, déterminer au bout de combien de jours et d'heures ce taux sera strictement inférieur à 10 %.

Solution page 232

Exercice 4.17 (datation au carbone 14)

Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants.

À leur mort, celui-ci se désintègre avec une demi-vie de 5 730 ans. On peut alors établir l'expression de la fonction N représentant le taux de carbone 14 en fonction du temps t exprimé en années :

$$N(t) = e^{-0,00012t}.$$

Si un fragment d'os contient 71 % de sa quantité initiale de carbone 14, quel âge a-t-il ?

Pour répondre à cette question, vous devrez faire preuve d'initiative et ne pas hésiter à utiliser des outils numériques (calculatrice, tableur ou programme Python par exemple).

Solution page 233

Exercice 4.18 (taux de radioactivité)

Le taux d'un élément radioactif diminue de 30 % en 1 500 ans.

On sait de plus que ce taux est égal à $e^{-\lambda t}$ après t années.

À l'aide d'une calculatrice ou d'un programme Python, déterminer une valeur approchée de λ à 10^{-4} près.

Solution page 233

Exercice 4.19

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} - x + 1.$$

1 Montrer que $g'(x) = -\frac{4x^2 + 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{4x^2}$.

2 En déduire le sens de variation de g .

3 Calculer $g\left(\frac{1}{4}\right)$ et $g(1)$.

Que peut-on intuitivement supposer quand au nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$? On admettra ce résultat, et on notera α cette solution.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = (x + \sqrt{x})e^{-x}.$$

4 Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$.

5 En déduire les variations de f en fonction de α .

Solution page 234

Exercice 4.20

On observe la charge d'une batterie vide en fonction du temps, et on modélise son taux de remplissage par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{-x},$$

où x est exprimé en heure.

- 1** Montrer que la dérivée de $f(x)$ est :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 e^{-x}.$$

- 2** En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

- 3** On estime que la batterie est pleine lorsque $f(x) \geq 0,995$.

À l'aide de votre calculatrice, estimer la durée (en minutes) de charge totale de la batterie en expliquant votre démarche.

- 4** On appelle « plage d'accalmie » la période durant laquelle le nombre dérivé de la fonction f est compris entre 0 et 0,01.

- a.** Montrer que chercher la plage d'accalmie revient à résoudre l'inéquation :

$$50(x-2)^2 e^{-x} - 1 \leq 0.$$

- b.** À l'aide de votre calculatrice, estimer alors une plage d'accalmie à la minute près en expliquant votre démarche.

Solution page 235

Approfondissement (pour les futur.e.s expert.e.s)

Exercice 4.21 (équations différentielles)

Soit a un réel non nul. On considère l'équation (E) : $y' = ay$, où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

- 1** Justifier que les fonctions $y_0(x) = 0$ et $y_1(x) = e^{ax}$ sont deux solutions de l'équation (E).

- 2** Montrer que toutes fonctions s'écrivant $f(x) = ke^{ax}$ sont solutions de (E).

- 3** On suppose que f et g sont deux solutions de (E).

Montrer que la fonction $h = f + g$ est aussi solution de (E).

- 4** Soit u une solution de l'équation (E). On pose alors $v(x) = u(x)e^{-ax}$.

Montrer que v est une fonction constante.

En déduire que $u(x) = ke^{ax}$, où $k \in \mathbb{R}$.

- 5** Trouver toutes les fonctions solutions de l'équation : $y' = -5y$.

Solution page 237

Exercice 4.22 (équation fonctionnelle de Cauchy)

On recherche toutes les fonctions f , dérivables sur \mathbb{R} , vérifiant l'égalité :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) \times f(y). \quad (\text{E})$$

- 1 Montrer que la fonction exponentielle vérifie l'égalité (E).
- 2 Montrer que les fonctions du type $x \mapsto e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}^*$, sont solutions de (E).
- 3 Montrer que les fonctions du type $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, ne sont pas solutions de (E).

Solution page 237

Exercices spécimens

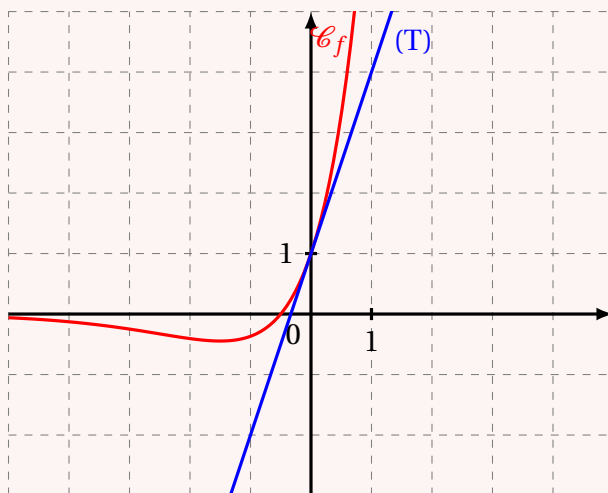
Les exercices spécimens sont des exercices extraits de sujets spécimens délivrés par l'Éducation Nationale, idéaux pour préparer un contrôle.

Exercice 4.23

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x+1)e^x.$$

Sur le graphique ci-dessous, sont tracées la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f , et la droite (T), tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



- 1 Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.
- 2 Montrer que, pour tout x réel, que $f'(x) = (2x+3)e^x$.
- 3 Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur \mathbb{R} , puis préciser les variations de f sur \mathbb{R} .
- 4
 - a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).
 - b. Justifier graphiquement que, pour tout réel x , on a :

$$(2x+1)e^x \geq 3x+1.$$

Solution page 238

Exercice 4.24

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} + 6e^x - 8x - 4$.
Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère :

- \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f ;
- \mathcal{D} la droite d'équation cartésienne $y = -8x - 4$.

- 1 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$.
- 2 Étudier le signe $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
- 3 Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 4 En déduire le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .
- 5 La courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} ont-elles un point commun? Justifier.

Solution page 239

Exercice 4.25 (le rameur)

Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvements d'une personne qui fait de l'aviron.

Il est souvent utilisé pour l'entraînement sportif afin d'améliorer sa condition physique.

La courbe ci-dessous représente la puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant.



Partie A

Répondre par lecture graphique aux deux questions suivantes.

- 1 Quelle est la puissance maximale atteinte par ce rameur?
- 2 Pendant combien de temps la puissance développée reste-t-elle au-dessus de 100 Watts?

Partie B : modélisation par une fonction

On suppose que la courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 2; 4]$ par :

$$f(x) = (-8x + 32)e^x.$$

On note f' la fonction dérivée de f . On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 2; 4]$,

$$f'(x) = (-8x + 24)e^x.$$

- 1 Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0, 2; 4]$.
- 2 Déterminer la valeur exacte du maximum de la fonction f .
- 3 On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois. Combien de mois d'entraînement seront nécessaires pour qu'il dépasse les 200 W?

Solution page 239

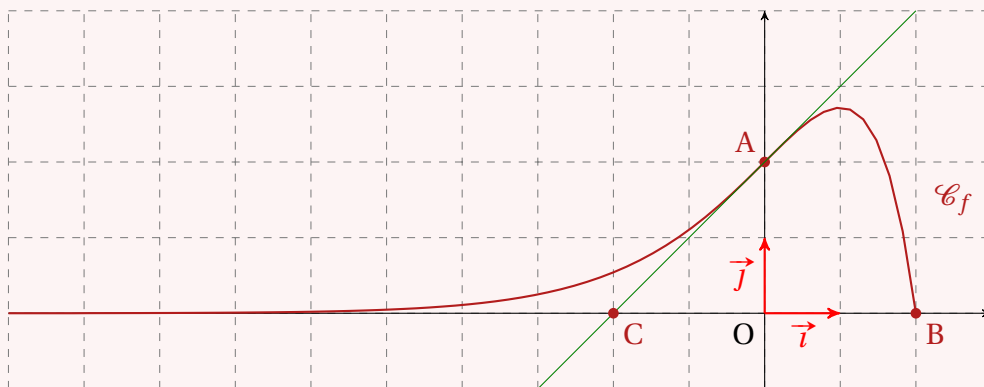
Exercice 4.26

Dans le repère ci-dessous, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10; 2]$.

On a placé dans ce repère les points A (0; 2), B (2; 0) et C (-2; 0).

On dispose des renseignements suivants :

- le point B appartient à la courbe \mathcal{C}_f ;
- la droite (AC) est tangente en A à la courbe \mathcal{C}_f ;
- la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



- 1 Déterminer la valeur de $f'(1)$.
- 2 Donner une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A.

On admet que cette fonction f est définie sur $[-10; 2]$ par $f(x) = (2 - x)e^x$.

- 3 Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-10; 2]$, $f'(x) = (-x + 1)e^x$.
- 4 En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 2]$.
- 5 Déterminer une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point B.

Solution page 241

Corrigé de l'exercice 4.1 page 214

1 $e^5 \times e^{-3} = e^{5+(-3)} = e^2.$

2 $\frac{e^{-9}}{e^7} = e^{-9-7} = e^{-16}.$

3 $(e^{-2})^3 = e^{-2 \times 3} = e^{-6}.$

4 $\frac{e^3 \times e^{-4}}{e^{-2}} = e^{3-4-(-2)} = e^1 = e.$

5 $\frac{e^2 \times e^{-2}}{e^{-1}} = e^{2-2+1} = e.$

6 $(e^{-1} \times e^{-2})^3 = e^{(-1-2) \times 3} = e^{-9}.$

Corrigé de l'exercice 4.2 page 214

1 $e^{2x-1} \times e^{-x+3} = e^{2x-1-x+3} = e^{x+2}.$

2 $\frac{e^{3x-1}}{e^{4x-2}} = e^{3x-1-(4x-2)} = e^{-x+1}.$

3 $(e^{-x+1} \times e^{x-1})^2 = e^{(-x+1+x-1) \times 2} = e^0 = 1.$

4 $\left(\frac{e^{2x+3} \times e^{3x-2}}{e^4} \right)^{-1} = e^{(2x+3+3x-2-4) \times (-1)} = e^{-5x+3}.$

Corrigé de l'exercice 4.3 page 214

1 Une exponentielle étant toujours strictement positive, l'équation $e^{x+2} = 0$ n'admet aucune solution. $\mathcal{S} = \emptyset$

2 Une exponentielle étant toujours strictement positive, l'équation $e^{x^5+x+1} = -1$ n'admet aucune solution. $\mathcal{S} = \emptyset$

3 $e^{2x+3} = e^{-2x-5} \iff 2x+3 = -2x-5$
 $\iff 4x = -8$
 $\iff x = -2$

L'ensemble solution de l'équation $e^{2x+3} = e^{-2x-5}$ est donc $\mathcal{S} = \{-2\}$

4 $e^{5x+2} = e^{3x+1} \iff 5x+2 = 3x+1$
 $\iff 2x = -1$
 $\iff x = -\frac{1}{2}$

L'ensemble solution de l'équation $e^{5x+2} = e^{3x+1}$ est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

5 $e^{x^2-1} = e^{2x^2+3x-2} \iff x^2-1 = 2x^2+3x-2$
 $\iff x^2+3x-1 = 0$

Le discriminant de x^2+3x-1 est $\Delta = 9+4 = 13$ donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

6 $5 - 2e^{3x+2} = 3 \iff -2e^{3x+2} = -2$
 $\iff e^{3x+2} = 1$
 $\iff e^{3x+2} = e^0$
 $\iff 3x + 2 = 0$
 $\iff x = -\frac{2}{3}$

L'ensemble solution de l'équation $5 - 2e^{3x+2} = 3$ est donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$

7 $2 + 3e^{2x} = 5 \iff 3e^{2x} = 3$
 $\iff e^{2x} = 1$
 $\iff e^{2x} = e^0$
 $\iff 2x = 0$
 $\iff x = 0$

L'ensemble solution de l'équation $2 + 3e^{2x} = 5$ est donc $\mathcal{S} = \{0\}$

8 $7 - 4e^{5x-3} = 3 \iff -4e^{5x-3} = -4$
 $\iff e^{5x-3} = 1$
 $\iff e^{5x-3} = e^0$
 $\iff 5x - 3 = 0$
 $\iff x = \frac{3}{5}$

L'ensemble solution de l'équation $7 - 4e^{5x-3} = 3$ est donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$

Corrigé de l'exercice 4.4 page 214

1 $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$. On pose $X = e^x$. Ainsi, comme $e^{2x} = (e^x)^2$, l'équation est équivalente à :

$$X^2 - 2X + 1 = 0 \iff (X - 1)^2 = 0 \iff X = 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{0\}$

2 $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. On pose $X = e^x$ et l'équation devient : $X^2 + X - 2 = 0$.

Le discriminant du polynôme $X^2 + X - 2$ est $\Delta = 9$ donc il admet deux racines :

$$X_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Ainsi, $e^{x_1} = -2$ et $e^{x_2} = 1$.

Une exponentielle étant strictement positive, $e^{x_1} = -2$ est impossible.

$e^{x_2} = 1 \iff x_2 = 0$ donc l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{0\}$

Corrigé de l'exercice 4.5 page 215

1 $e^{3x-1} > e^{2x+4} \iff 3x-1 > 2x+4 \iff x > 5.$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} =]5; +\infty[$

2 $e^{-2x+5} \leq e^{4x+7} \iff -2x+5 \leq 4x+7 \iff 6x \geq -2 \iff x \geq -\frac{1}{3}.$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$

3 $e^{x^2-1} < e \iff x^2-1 < 1 \iff x^2-2 < 0.$

x^2-2 admet pour racines $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, et est négatif entre ses racines.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{S} =]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$

4 $12 - 4e^{5x+1} \geq 8 \iff -4e^{5x+1} \geq -4$

$$\iff e^{5x+1} \leq 1$$

$$\iff e^{5x+1} \leq e^0$$

$$\iff 5x+1 \leq 0$$

$$\iff x \leq -\frac{1}{5}$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{5}\right]$

5 $8 + 3e^{-2x+3} \leq 11 \iff 3e^{-2x+3} \leq 3$

$$\iff e^{-2x+3} \leq 1$$

$$\iff e^{-2x+3} \leq e^0$$

$$\iff -2x+3 \leq 0$$

$$\iff -2x \leq -3$$

$$\iff x \geq \frac{3}{2}$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

6 $56 + 14e^{47x-15} > 70 \iff 14e^{47x-15} > 14$

$$\iff e^{47x-15} > 1$$

$$\iff 47x-15 > 0$$

$$\iff x > \frac{15}{47}$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left]\frac{15}{47}; +\infty\right[$

Corrigé de l'exercice 4.6 page 215

$$\begin{aligned}
 \text{1 } e^{2x} + e^x - 2 &\geq 0 \iff X^2 + X - 2 \geq 0 \text{ avec } X = e^x \\
 &\iff (X-1)(X+2) \geq 0 \text{ (voir exercice 4 pour les racines)} \\
 &\iff (e^x - 1)(e^x + 2) \geq 0 \\
 &\iff e^x - 1 \geq 0 \text{ (car } e^x + 2 > 0 \text{ pour tout réel } x) \\
 &\iff e^x \geq 1 \\
 &\iff x \geq 0
 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = [0; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{2 } e^{2x} - 2e^x + 1 &\leq 0 \iff X^2 - 2X + 1 \leq 0 \text{ avec } X = e^x \\
 &\iff (X-1)^2 \leq 0 \\
 &\iff (X-1)^2 = 0 \text{ car } (X-1)^2 \text{ est toujours positif ou nul} \\
 &\iff X = 1 \\
 &\iff e^x = 1 \\
 &\iff x = 0
 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{0\}$

Corrigé de l'exercice 4.7 page 215

1 $f(x) = (7x-1)e^x$ est de la forme $u \times v$ avec :

$$\begin{array}{ll}
 u(x) = 7x - 1 & v(x) = e^x \\
 u'(x) = 7 & v'(x) = e^x
 \end{array}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\
 &= 7e^x + (7x-1)e^x
 \end{aligned}$$

On peut alors factoriser par e^x

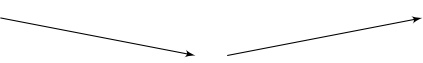
$$f'(x) = (7 + 7x - 1)e^x$$

$$\boxed{f'(x) = (7x + 6)e^x}$$

2 Afin d'étudier les variations de f sur \mathbb{R} , nous devons trouver le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
Or, pour tout réel x , $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $7x + 6$.

$$\begin{aligned}
 7x + 6 > 0 &\iff 7x > -6 \\
 &\iff x > -\frac{6}{7}
 \end{aligned}$$

On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{6}{7}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Corrigé de l'exercice 4.8 page 215

1 $f(x) = (3 - 2x)e^{-x}$ est de la forme $f = u \times v$ avec :

$$u(x) = 3 - 2x$$

$$v(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) = -2$$

$$v'(x) = -e^{-x}$$

Ainsi,

$$f'(x) = (u'v + v'u)(x)$$

$$f'(x) = -2e^{-x} - e^{-x}(3 - 2x)$$

On peut alors factoriser par e^{-x} .

$$f'(x) = [(-2 - (3 - 2x))]e^{-x}$$

$$f'(x) = (-2 - 3 + 2x)e^{-x}$$


$$f'(x) = (2x - 5)e^{-x}$$

2 Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(2x - 5)$.

$$2x - 5 > 0 \iff 2x > 5$$

$$\iff x > \frac{5}{2}.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Corrigé de l'exercice 4.9 page 215

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{u(x)}{v(x)}, \text{ avec } u'(x) = e^x \text{ et } v'(x) = e^x.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} \\ &= \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} \\ f'(x) &= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, f est strictement croissante sur \mathbb{R} (inutile de faire un tableau de variations quand la fonction est strictement monotone comme ici).

Corrigé de l'exercice 4.10 page 216

- 1** $f(x)$ est un quotient; par conséquent, f est définie uniquement pour toutes les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur de $f(x)$ est non nul.

Or, pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $2e^x > 0$ et par conséquent, $2e^x + 7 > 0$.

Le dénominateur de $f(x)$ n'est donc jamais nul. Le domaine de définition de f est donc \mathbb{R} .

- 2** f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = e^{2x} - 6$$

$$u'(x) = 2e^{2x}$$

$$v(x) = 2e^x + 7$$

$$v'(x) = 2e^x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{2e^{2x}(2e^x + 7) - 2e^x(e^{2x} - 6)}{(2e^x + 7)^2} \\ &= \frac{2e^x[e^x(2e^x + 7) - (e^{2x} - 6)]}{(2e^x + 7)^2} \\ &= \frac{2e^x[2e^{2x} + 7e^x - e^{2x} + 6]}{(2e^x + 7)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^{2x} + 7e^x + 6)}{(2e^x + 7)^2}$$

- 3** Pour tous réels x ,

- $2e^x > 0$,
- $e^{2x} + 7e^x + 6 > 0$ comme somme de termes strictement positifs,
- $(2e^x + 7)^2 > 0$.

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur \mathbb{R} ; la fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

Corrigé de l'exercice 4.11 page 216

- 1** f est de la forme uv avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = 2 - e^{-x}$.

Ainsi, $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$.

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - e^{-x} + (x - 1)e^{-1} \\ &= 2 - e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$$

- 2** Si $x > 0$, alors $e^{-x} > 1$ et $1 - e^{-x} > 0$.

De plus, $xe^{-x} > 0$ donc, par somme de termes positifs, $f'(x) > 0$.

- 3** $f'(0) = 0$.

De la question précédente, on déduit que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 4.12 page 216

1 $f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) e^x$, soit $f'(x) = \left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x}} \right) e^x$.

2 $x > 0 \iff 1+2x > 0 \iff f'(x) > 0$ (car $e^x > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$) d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

Remarque 28

J'ai ici dressé le tableau de variation, bien que la fonction soit strictement monotone, car il y a une valeur interdite (traduite par une « double barre » verticale en-dessous de 0).

Quand il y a au moins une valeur interdite, il est conseillé de faire le tableau.

Corrigé de l'exercice 4.13 page 216

1 f est de la forme $\frac{1}{v}$ donc f' sera de la forme $-\frac{v'}{v^2}$ et donc :

$$f'(t) = \frac{0,5e^{-0,5t}}{(1+e^{-0,5t})^2}.$$

Ainsi $f'(t) > 0$ pour tout réel t , donc à plus forte raison pour $t \geq 0$.

f est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

2 On peut s'aider du programme Python suivant :

Code Python 4-53

```
1 # on importe la fonction exponentielle du module "math"
2 from math import exp
3
4 t = 0
5 while 1/(1+exp(-0.5*t)) <= 0.9:
6     t += 0.1
7
8 print(t)
```

On part de $t = 0$ et on calcule l'image de t tant que celle-ci est inférieure ou égale à 90 %, c'est-à-dire 0,9. Tant que cette image ne dépasse pas 0,9, on ajoute 0,1 à t .

Le programme retourne alors la valeur « 4,4 » ; c'est donc au cours de la 4^e année que le taux dépassera 90 %.

Corrigé de l'exercice 4.14 page 217

1 D'après le graphique, $f(0) = 3$.

Or, $f(0) = (a \times 0 + b)e^0 = b \times 1 = b$, donc $b = 3$.

2 \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses en $x = -6$, ce qui signifie que $f(-6) = 0$.

Donc $f(-6) = (a \times (-6) + 3)e^{kx} = 0$. Une exponentielle n'étant jamais nulle, cela signifie que $-6a + 3 = 0$, soit $a = 0,5$.

3 $f'(0)$ est le coefficient directeur de \mathcal{T} . Pour le déterminer, on calcule :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 7}{-5 - 5} = 0,8.$$

Or, si $f(x) = (ax + 3)e^{kx}$ alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{kx} + (ax + 3) \times ke^{kx} \\ &= (a + akx + 3k)e^{kx}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(0) = (a + 3k)e^0 = a + 3k$ et donc $a + 3k = 0,8$.

En remplaçant a par $0,5$, on a : $3k = 0,3$, soit $k = 0,1$.

Finalement on trouve $f(x) = (0,5x + 3)e^{0,1x}$

Corrigé de l'exercice 4.15 page 218

1 Le domaine de définition de f (\mathbb{R}) est centré en 0.

De plus, pour tout réel x , $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x)$.

f est donc impaire.

2 f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x - e^{-x}$ et $v(x) = e^x + e^{-x}$.

Ainsi, $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = e^x + e^{-x} = v(x)$ et $v'(x) = e^x - e^{-x} = u(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } f'(x) &= \frac{[v(x)]^2 - [u(x)]^2}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{[v(x) - u(x)][v(x) + u(x)]}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{2e^{-2x} \times 2e^{2x}}{(e^x + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur \mathbb{R} , ce qui signifie que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3 $f'(0) = \frac{4}{(1+1)^2} = 1$ et $f(0) = 0$ donc l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est $y = x$.

Corrigé de l'exercice 4.16 page 218

1 f est de la forme uv , avec :

$$\begin{aligned}u(x) &= e^{-x} & u'(x) &= -e^{-x} \\v'(x) &= \sqrt{x+1} & v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\end{aligned}$$

donc $f'(x) = (u'v + uv')(x)$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (-e^{-x})\sqrt{x+1} + e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} \right) e^{-x} \\&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} \times \frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \right) e^{-x} \\&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} \right) e^{-x} \\&= \left(\frac{1-2x-2}{2\sqrt{x+1}} \right) e^{-x} \\&= \left(\frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}} \right) e^{-x} \\&= -(2x+1) \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}}.\end{aligned}$$

$\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}} > 0$ et $(2x+1) > 0$ (car $x \geq 0$) donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est strictement décroissante pour $x \geq 0$.

2 La boucle s'exécute tant que la valeur f calculée est supérieure à 0,5. Or, $\sqrt{x+1}e^{-x}$ correspond au taux de malades restants donc la boucle s'arrêtera pour la valeur de x telle que $f(x) \leq 0,5$.

Remarquons de surcroît que x est augmenté de $\frac{1}{24}$ à chaque passage dans la boucle, ce qui correspond à 1 heure.

La valeur affichée est donc le moment (exprimé en jour décimal) où il y aura 50% ou moins de malades par rapport au jour initial.

3 $x = 1,08333$ jour = $1,08333 \times 24$ heures = 26 heures.

Ainsi, après 26 heures, le taux de malades est inférieur à 50%.

4 On trouve $x \approx 3$.

Ainsi, après 3 jours, le taux de malades est inférieur à 10%.

Corrigé de l'exercice 4.17 page 219

Nous devons résoudre l'équation :

$$e^{-1,2 \times 10^{-4} t} = 0,71.$$

Le programme Python suivant nous permet d'avoir une valeur approchée (à l'unité) de t :

Code Python 4-54

```
1 # on importe la fonction exponentielle du module "math"
2 from math import exp
3
4 t = 0
5 while abs(exp(-0.00012*t)-0.71)>=0.00001:
6     t += 1
7
8 print(t)
```

Je suis parti de $t = 0$ et je teste si la différence entre l'image de t par la fonction $t \mapsto e^{-1,2 \times 10^{-4} t}$ et 0,71 était plus grande que 10^{-5} ; si tel est le cas, c'est que mon image n'est pas assez proche de 0,71 et je continue donc en augmentant la valeur de t de 1.

La valeur absolue est ici utilisée pour mettre en relief le fait que l'on calcule la « distance » entre 0,71 et l'image de t par la fonction (ainsi, inutile de se préoccuper de savoir si l'image est plus grande ou plus petite que 0,71).

Corrigé de l'exercice 4.18 page 219

Le taux d'un élément radioactif diminue de 30 % en 1 500 ans. Donc :

$$e^{-\lambda \times 1500} = 0,7.$$

Le programme Python suivant nous permet d'obtenir un encadrement de λ :

Code Python 4-55

```
1 from math import exp
2 l = 0
3 for i in range(40):
4     l = i/100000
5     f = exp(-1500*l)
6     if abs(f-0.7)<=0.01:
7         print(l,f)
```

```
0.00023 0.7082203534678
0.00024 0.697676326071031
```

Ceci signifie que :

$$0,00023 \leq \lambda \leq 0,00024.$$

Ainsi, une valeur approchée de λ à 10^{-4} est $\lambda \approx 0,0002$.

Corrigé de l'exercice 4.19 page 219

1 La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est de la forme $\frac{1}{v}$, dont la dérivée est $\frac{-v'}{v^2}$, donc la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est la fonction :

$$x \mapsto -\frac{2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

Ainsi, la dérivée de g est :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \\ &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{4x^2} \\ &= \frac{-\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - 4x^2}{4x^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = -\frac{\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + 4x^2}{4x^2}$$

2 Pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + 4x^2 > 0$. On en déduit que $g'(x) < 0$, et donc que g est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

3 $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} > 0$ et $g(1) = -\frac{1}{2}$.

Il n'y a pas de valeurs interdites entre $x = \frac{1}{4}$ et $x = 1$, et u est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$; on peut donc supposer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle (car dans ce cas, la courbe représentative de g traverse l'axe des abscisses dans cet intervalle).

4 f est de la forme $u \times v$ avec :

$$u(x) = x + \sqrt{x}$$

$$v(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v'(x) = -e^{-x}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-x} - e^{-x}(x + \sqrt{x}) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - x - \sqrt{x}\right)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = g(x)e^{-x}$$

5 $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. D'après le signe de $g(x)$, on déduit :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0		

Corrigé de l'exercice 4.20 page 220

1 La dérivée de $x \mapsto 1$ est nulle donc la dérivée de $f(x)$ est celle de $x \mapsto -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{-x}$, fonction produit de la forme $u \times v$ avec :

$$u(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)$$

$$v(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) = -\frac{1}{2}(2x - 2) = -x + 1$$

$$v'(x) = -e^{-x}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (-x + 1)e^{-x} - \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)(-e^{-x}) \\ &= \left[(-x + 1) - \frac{1}{2}(-1)(x^2 - 2x + 2) \right] e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-x + 1 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right) e^{-x} \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \right) e^{-x} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 e^{-x}$$

2 Pour tout x dans $[0; +\infty[$,

- $\frac{1}{2} > 0$;
- $(x - 2)^2 \geq 0$;
- $e^{-x} > 0$ (car une exponentielle est toujours strictement positive).

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ comme produit de facteurs tous supérieurs ou égaux à 0, et donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

3 Dans cette question, on doit trouver la valeur de x à partir de laquelle $f(x) \geq 0,995$. Mais hors de question de résoudre cette inéquation (on ne sait pas faire!).

À l'aide de la calculatrice, on peut entrer la fonction :

$$g(x) = f(x) - 0,995$$

et dresser un tableau de valeurs de $g(x)$ (avec un pas de 1 pour commencer) afin de voir à partir de quelle valeur de x on a $g(x) \geq 0$. On obtient le tableau suivant :

x	$g(x)$
0	-0,95
1	-0,1339397206
2	-0,08533528324
3	-0,07446767092
4	-0,04157819444
5	-0,007272549492
6	0,0177762217
7	0,03313018364
8	0,0416134343

Ainsi, on sait que la valeur cherchée est entre 5 h et 6 h.

On construit alors le même tableau de valeurs, mais sur $[5;6]$ avec un pas de 0,1 et on obtient :

x	$g(x)$
5	-0,007272549492
5,1	-0,004291528166
5,2	-0,001414380401
5,3	0,001356917377
5,4	0,004021206004

On sait alors que $x \in [5,2;5,3]$.

x	$g(x)$
5,2	-0,001414380401
5,21	-0,001132462147
5,22	-0,0008516045709
5,23	-0,0005718090953
5,24	-0,0002930770642
5,25	-0,0000154097422
5,26	0,0002611916841
5,27	0,000536726105

On trouve alors que $x \approx 5,25$, soit $5,25 \times 60 = 315$ minutes.

La batterie sera estimée pleine au bout de 315 minutes (soit 5 h 15 min).

- 4** **a.** $0 \leq f'(x) \leq 0,01 \iff f'(x) \leq 0,01$ car $f'(x) \geq 0$
- $$\iff \frac{1}{2}(x-2)^2 e^{-x} \leq \frac{1}{100}$$
- $$\iff 50(x-2)^2 e^{-x} \leq 1 \text{ en multipliant par 50 les deux membres}$$
- $$\iff \underline{(x-2)^2 e^{-x} - 1 \leq 0.}$$

- b.** En traçant la courbe représentative de la fonction $x \mapsto (x-2)^2 e^{-x} - 1$, on s'aperçoit que cette fonction est négative sur un intervalle dont les bornes peuvent être trouvées en zoomant, où à l'aide des fonctions de la calculatrice permettant de trouver l'intersection de deux courbes. On peut aussi dresser un tableau de valeurs de cette fonction pour voir qu'elle est négative sur à peu près $[1,67 ; 2,49]$. De plus, $1,67 \times 60 \approx 100$ et $2,49 \times 60 \approx 149$.

La plage d'accalmie est donc sur la période $[100; 149]$ (en minutes).

Corrigé de l'exercice 4.21 page 220

- 1** Si $f_0(x) = 0$ alors $f'_0(x) = 0$ et on a bien $f'_0(x) = a f_0(x)$; donc f_0 est bien une solution de (E).

Si $f_1(x) = e^{ax}$ alors $f'_1(x) = a e^{ax} = a f_1(x)$, donc f_1 est bien une solution de (E).

- 2** $f(x) = k e^{ax}$ donc $f'(x) = k \times a e^{ax} = a(k e^{ax}) = a f(x)$.

Donc f est bien solution de (E).

- 3** Si $h = f + g$ alors $h' = f' + g'$. Or, f et g étant deux solutions de (E), $f' = a f$ et $g' = a g$. Donc $h' = a f + a g = a(f + g) = a h$. Ainsi, h est bien solution de (E).

- 4** $v(x) = u(x) e^{-ax}$. v est dérivable sur \mathbb{R} comme le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} v'(x) &= u'(x) e^{-ax} + u(x) \times [-a e^{-ax}] \\ &= [u'(x) - a u(x)] e^{-ax}. \end{aligned}$$

Or, u est solution de (E) donc $u' = a u$, c'est-à-dire : $u' - a u = 0$.

D'où :

$$v'(x) = 0 \times e^{-ax} = 0.$$

Ainsi, v est une fonction constante.

On peut alors conclure que $v(x) = u(x) e^{ax} = k$, soit $u(x) = k e^{-ax}$.

- 5** Nous venons de démontrer, à travers cet exercice, que les fonctions de la forme $k e^{ax}$ étaient solutions de l'équation $y' = a y$ et qu'il n'y en avait pas d'autres.

Ainsi, l'équation $y' = -5y$ admet pour solutions les fonctions $f(x) = k e^{-5x}$.

Corrigé de l'exercice 4.22 page 221

- 1** D'après le cours, on sait que $e^{a+b} = e^a \times e^b$ donc la fonction exponentielle vérifie l'égalité (E).

- 2** Si $f(x) = e^{ax}$ alors :

$$f(x+y) = e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax} \times e^{ay} = e^{ax} \times e^{ay} = f(x) \times f(y).$$

Donc f vérifie bien l'équation (E).

- 3** Si $f(x) = k e^{ax}$, $k \neq 0$, $k \neq 1$, alors :

$$f(x+y) = k e^{a(x+y)} = k e^{ax+ay} = k e^{ax} \times e^{ay} = k e^{ax} \times e^{ay}.$$

Or,

$$f(x) \times f(y) = (ke^{ax}) \times (ke^{ay}) = k^2 e^{ax} \times e^{ay}.$$

Ainsi, $f(x+y) \neq f(x) \times f(y)$, donc $f : x \mapsto ke^{ax}$ n'est pas solution de l'équation (E).

Corrigé de l'exercice 4.23 page 221

$$\begin{aligned} 1 \quad f(x) = 0 &\iff (2x+1)e^x = 0 \\ &\iff 2x+1 = 0 \quad \text{car } e^x \neq 0 \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, le point d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

2 f est de la forme $u \times v$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x+1 \\ u'(x) &= 2 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} v(x) &= e^x \\ v'(x) &= e^x \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2e^x + (2x+1)e^x \\ &= (2+2x+1)e^x \end{aligned}$$

$$f'(x) = (2x+3)e^x$$

3 $e^x > 0$ sur \mathbb{R} donc $f'(x)$ est du signe de $2x+3$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

4 a. L'équation réduite de (T) est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

soit :

$$y = 3x+1$$

b. Sur le graphique donné, on constate que \mathcal{C}_f est toujours au-dessus de (T), ce qui se traduit par :

$$f(x) \geq 3x+1$$

c'est-à-dire :

$$(2x+1)e^x \geq 3x+1.$$

Corrigé de l'exercice 4.24 page 222

1 Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2e^{2x} + 6e^x - 8.$$

Or,

$$\begin{aligned} 2(e^x - 1)(e^x + 4) &= 2(e^{2x} + 4e^x - e^x - 4) \\ &= 2(e^{2x} + 3e^x - 4) \\ &= 2e^{2x} + 6e^x - 8 \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

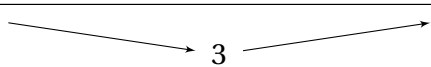
Donc $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$.

2 $e^x + 4 > 0$ pour tout réel x car $e^x > 0$ sur \mathbb{R} . De plus, $2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0.$$

On en déduit alors que $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; 0[$.

3 De la question précédente, on déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$f(0) = e^{2 \times 0} + 6e^0 - 8 \times 0 - 4 = 1 + 6 \times 1 - 0 - 4 = 3.$$

4 Du tableau de variations précédent, on peut déduire que $f(x) \geq 3$ sur \mathbb{R} , donc $f(x) > 0$.

5 Afin de savoir si \mathcal{C}_f et \mathcal{D} ont un point en commun, on peut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) &= -8x - 4 \iff e^{2x} + 6e^x - 8x - 4 = -8x - 4 \\ &\iff e^{2x} + 6e^x = 0 \\ &\iff e^x(e^x + 6) = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation n'admet aucune solution; en effet, $e^x > 0$ donc $e^x \neq 0$ et $e^x + 6 > 6$ (donc $e^x + 6 \neq 0$).

Ainsi, la courbe et la droite n'ont aucun point d'intersection.

Corrigé de l'exercice 4.25 page 222

Partie A

1 La puissance maximale atteinte par le rameur est l'ordonnée du maximum de la fonction, donc environ 160 Watts.

2 Il faut ici regarder sur quel intervalle de x la courbe est au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = 100$. On trouve alors un intervalle à peu près égal à $[1, 7; 3, 7]$.

Remarque 29

Le graphique ne nous permet pas de donner des résultats précis. Ainsi, on peut tout aussi bien considérer que l'intervalle est $[1,65; 3,65]$ ou tout autre intervalle à peu près identique.

Ainsi, la puissance développée reste au-dessus de 100 Watts pendant environ 2 heures.

Partie B

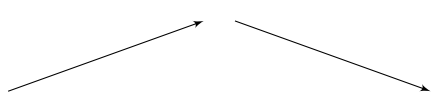
1 $e^x > 0$ pour tout réel x donc $f'(x)$ est du signe de $-8x + 24$.

$$-8x + 24 < 0 \iff -8x > -24$$

$$\iff x < \frac{-24}{-8}$$

$$\iff x < 3$$

D'où le tableau suivant :

x	0,2	3	4
$f'(x)$	+	0	-
f			

2 Des variations de f , on déduit que le maximum est atteint pour $x = 3$, et vaut :

$$f(3) = (-8 \times 3 + 32)e^3 = 8e^3.$$

3 $f(3) \approx 160,68$. Si cette performance est améliorée de 5% chaque mois, alors elle est multipliée par 1,05.

On cherche donc le premier entier n tel que :

$$160,68 \times 1,05^n > 200$$

Il suffit alors de calculer :

- pour $n = 1$, on trouve environ 168,7;
- pour $n = 2$, on trouve environ 177,1;
- pour $n = 3$, on trouve environ 186;
- pour $n = 4$, on trouve environ 195,31;
- pour $n = 5$, on trouve environ 205,1;

Ainsi, 5 mois d'entraînement seront nécessaires pour qu'il dépasse 200 W.

Corrigé de l'exercice 4.26 page 223

- 1 $f'(1)$ est le nombre dérivé de f en $x = 1$; il est égal au coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1, donc en A : c'est (AC).

Il est donc égal à :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} \\ &= \frac{2 - 0}{0 - (-2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(1) = 1}$$

- 2 D'après la question précédente,

$$(AC) : y = x + p$$

où p est l'ordonnée du point d'intersection de (AC) avec l'axe des ordonnées, donc l'ordonnée du point A, à savoir 2. Ainsi,

$$\boxed{(AC) : y = x + 2}$$

- 3 f est de la forme uv avec :

$$u(x) = 2 - x$$

$$u'(x) = -1$$

$$v(x) = e^x$$

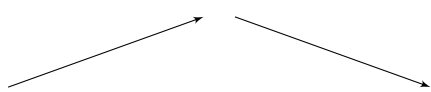
$$v'(x) = e^x$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -1 \times e^x + (2 - x)e^x \\ &= (-1 + 2 - x)e^x \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-x + 1)e^x}$$

- 4 Pour tout rel x , $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x + 1)$, d'où le tableau suivant :

x	-10	1	2
$f'(x)$	+	0	-
f			

- 5 L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point B, d'abscisse 2, est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

Or,

$$\begin{aligned} f'(2) &= (-2 + 1)e^2 \\ &= -e^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f(2) &= (2-2)e^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation réduite est :

$$y = -e^2(x-2)$$

soit :

$$\boxed{-e^2x + 2e^2}$$

$X \xrightarrow{f} Y$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$g \circ f$

$B_3 \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$

$SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$

Z

$A B C D E F$

$A B C D E F$

$X \xrightarrow{f} Y$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$g \circ f$

$B_3 \twoheadrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$

$\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

$\text{SL}_2(\mathbb{R})$

$\text{PSL}_2(\mathbb{R})$

$A B C D E F$

$A B C D E F$

$X \xrightarrow{f} Y$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$g \circ f$

$B_3 \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$

$PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$

$SL_2(\mathbb{R})$

h^2

$p \cdot q$

$A B C D E F$

$A B C D E F$

$X \xrightarrow{f} Y$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$g \circ f$

$B_3 \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$

$PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$

$SL_2(\mathbb{R})$

h^2

$p \cdot q$

$A B C D E F$

$A B C D E F$

$X \xrightarrow{f} Y$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$g \circ f$

$B_3 \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$

$PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$

$SL_2(\mathbb{R})$

h^2

$p \cdot q$

$A B C D E F$

$A B C D E F$

$X \xrightarrow{f} Y$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$g \circ f$

$B_3 \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$

$PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$

$SL_2(\mathbb{R})$

h^2

$p \cdot q$

$A B C D E F$

$A B C D E F$

$X \xrightarrow{f} Y$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$g \circ f$

$B_3 \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$

$PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$

$SL_2(\mathbb{R})$

h^2

$p \cdot q$

$A B C D E F$

$A B C D E F$

Trigonométrie



Plan du chapitre

I	Cercle trigonométrique	245
1	Définitions et représentation	245
2	Radians	246
3	Valeurs remarquables	247
II	Sinus et cosinus	248
1	Définitions	248
2	Propriété fondamentale	248
3	Sinus et cosinus des angles remarquables	249
4	Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle	251
5	Formules de rotation	252
6	Équations	253
III	Fonctions sinus et cosinus	253
1	Parité	253
2	Périodicité	254
3	Courbes représentatives	255
	Enoncés	256
	Corrigés des exercices	264

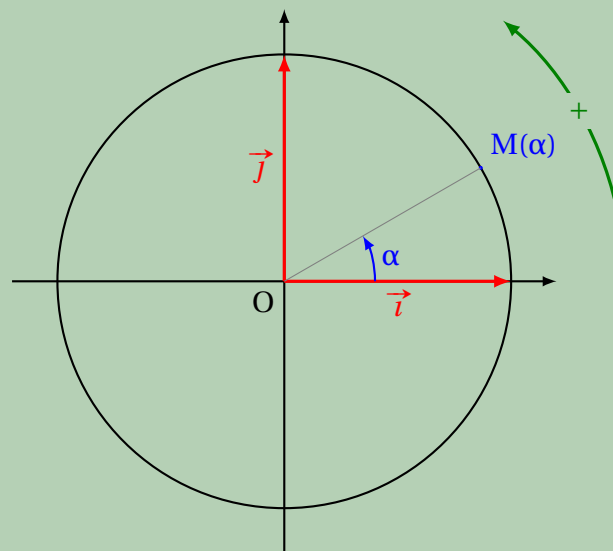
1 - Cercle trigonométrique

1.1 - Définitions et représentation

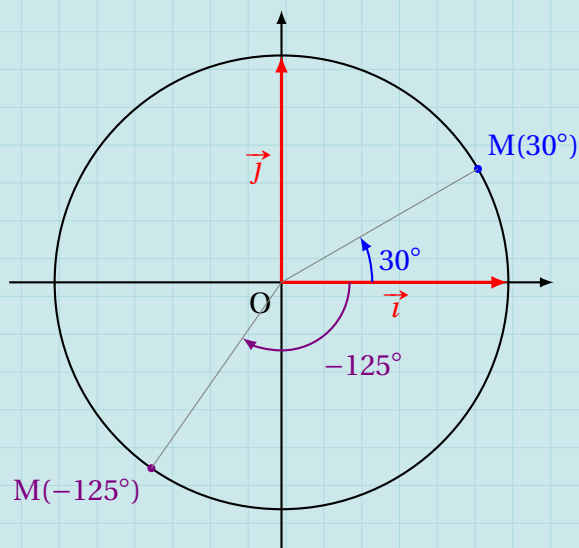
Définition 17

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on peut considérer des points M repérés par l'angle formé par les vecteurs \vec{i} et \vec{OM} , noté (\vec{i}, \vec{OM}) .

Le **sens trigonométrique** est le sens de la rotation qui transforme \vec{i} en \vec{j} ; c'est le sens *positif* (concernant le signe des angles).



Exemple 33

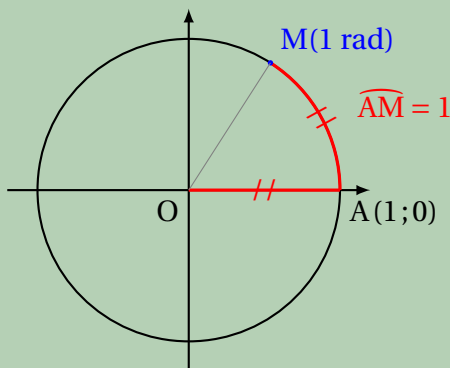


1.2 - Radians

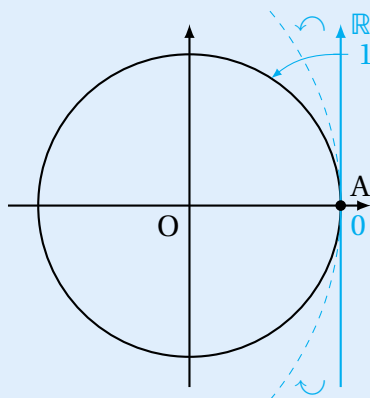
Définition 18

Soit $A(1;0)$.

On appelle **radian** l'angle dont la longueur de l'arc \widehat{AM} est égale à 1.



À partir de là, on peut imaginer que l'on enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique, en mettant « 0 » sur le point A :



Ainsi, tous les nombres réels vont se retrouver sur le cercle trigonométrique, et vont correspondre à des points $M(\alpha)$. On dira alors que $M(\alpha)$ est l'image du nombre réel α sur le cercle trigonométrique. On en déduit alors la propriété suivante :

Propriété 35

Un point M peut être l'image de plusieurs nombres réels.

Autrement dit, il existe une infinité de nombres réels qui ont pour image un point donné sur le cercle trigonométrique.

Définition 19

- On appelle **angle en radians** d'un point M du cercle trigonométrique tout réel dont l'image sur ce cercle est M.
- On appelle **mesure principale** tout angle dans $]-\pi; \pi]$.

Ainsi, tous les angles que nous connaissons en degrés auront un équivalent en radians.

1.3 - Valeurs remarquables

Angles (en degrés)	0	30	45	60	90	180	360
Angles (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Remarquez que ce tableau est un tableau de proportionnalité. Ainsi, pour convertir en radians un angle exprimé en degrés, il suffira de partir, par exemple, du fait que $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

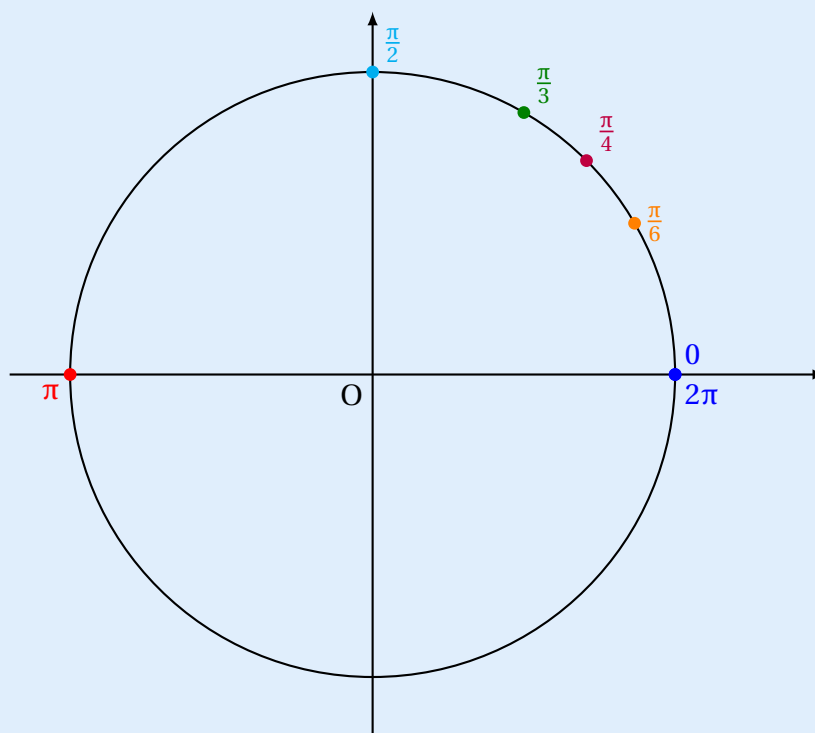
Exemple 34

Pour convertir 72° en radians, on calcule :

$$\frac{\pi}{180} \times 72 = \frac{2\pi}{5}.$$

Donc $72^\circ = \frac{2\pi}{5} \text{ rad.}$

Les points du cercle trigonométrique images des nombres $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \pi$ et 2π sont les suivants :



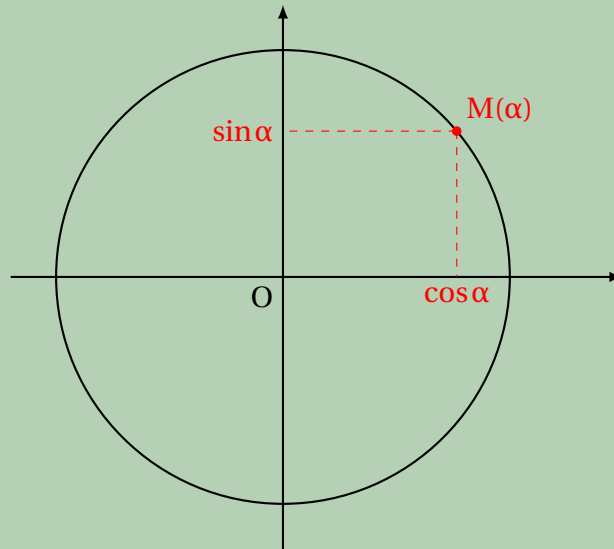
II - Sinus et cosinus

II.1 - Définitions

Définition 20

Soit $M(\alpha)$ un point sur le cercle trigonométrique.

- On appelle **cosinus** de l'angle α , et on note $\cos(\alpha)$ ou $\cos \alpha$, l'abscisse du point M;
- On appelle **sinus** de l'angle α , et on note $\sin(\alpha)$ ou $\sin \alpha$, l'ordonnée du point M.



II.2 - Propriété fondamentale

Propriété 36 (fondamentale trigonométrique)

Pour tout nombre réel x ,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

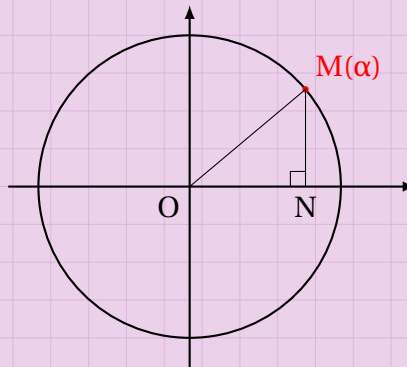
Remarque 30

On peut écrire cette égalité sous la forme :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Démonstration 17

Notons N le point de coordonnées $(\cos \alpha; 0)$.
Le triangle OMN est rectangle en N.



Ainsi, d'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = ON^2 + MN^2.$$

Or, $OM = 1$ (car c'est le rayon du cercle trigonométrique), $ON = \cos \alpha$ et $MN = \sin \alpha$, d'où :

$$1 = (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2.$$

α est un nombre réel et on peut le noter aussi x (ce qui est le cas dans la propriété).

II. 3 - Sinus et cosinus des angles remarquables

Propriété 37

Angles (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstration 18

- Pour $\frac{\pi}{4}$.

Le triangle OMN est rectangle isocèle, donc $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$. La propriété 36 devient alors :

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{soit} \quad 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1.$$

On en déduit alors que :

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

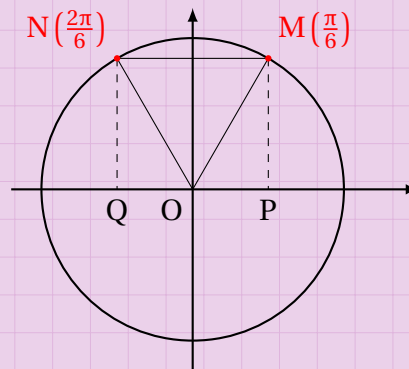
et donc :

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

car $\cos \frac{\pi}{4} > 0$.

- Pour $\frac{\pi}{3}$.

Considérons les points $M(\frac{\pi}{3})$ et $N(\frac{2\pi}{3})$ sur le cercle trigonométrique, ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses P et Q :



Le triangle OMN est alors équilatéral car $\widehat{MON} = \frac{\pi}{3}$ (60°) et $OM = ON$. Ainsi, $MN = MO = 1$.

On en déduit que $QP = 1$; or, M et N étant symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, il en est de même de P et Q. Ainsi, $OP = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

À l'aide de la propriété 36, on en déduit $\sin \frac{\pi}{3}$:

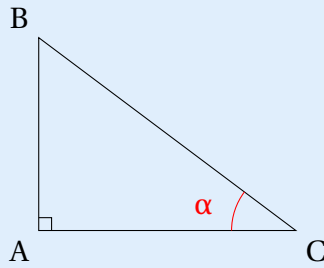
$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} &= 1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 \\ &\iff \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \\ &\iff \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

- Les sinus et cosinus de $\frac{\pi}{6}$ se trouvent par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait pour $\frac{\pi}{3}$.

Quant aux autres, elles sont immédiates.

II. 4 - Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en A.

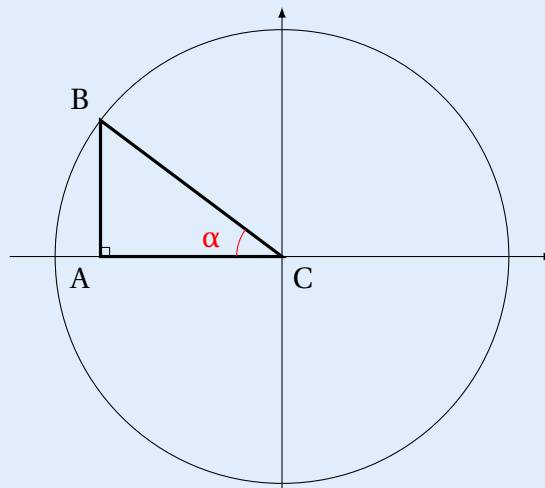


Au collège, vous avez vu les formules suivantes :

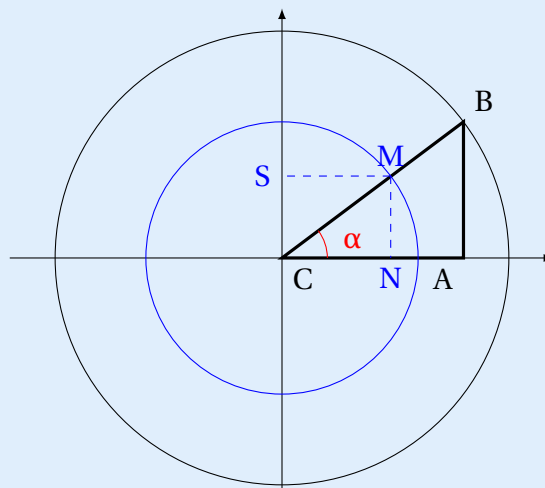
$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{AB}{BC}.$$

Ces formules ne rentrent pas en contradiction avec celles que nous avons introduites précédemment.

En effet, on peut considérer le cercle de centre C passant par B ainsi que deux axes comme sur la figure suivante :



En faisant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et en traçant le cercle trigonométrique (de rayon 1, en bleu), on obtient :



Par construction, $(MN) \parallel (AB)$ donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB} \quad \text{soit} \quad \frac{\cos \alpha}{CA} = \frac{1}{CB} = \frac{\sin \alpha}{AB}.$$

On en déduit (à l'aide de la première égalité) :

$$\frac{\cos \alpha}{CA} = \frac{1}{CB} \iff \cos \alpha = \frac{CA}{CB}$$

et (à l'aide de la seconde égalité) :

$$\frac{1}{CB} = \frac{\sin \alpha}{AB} \iff \sin \alpha = \frac{AB}{CB}.$$

Ainsi, à partir des définitions vues cette année, on peut retrouver celles vues en collège.

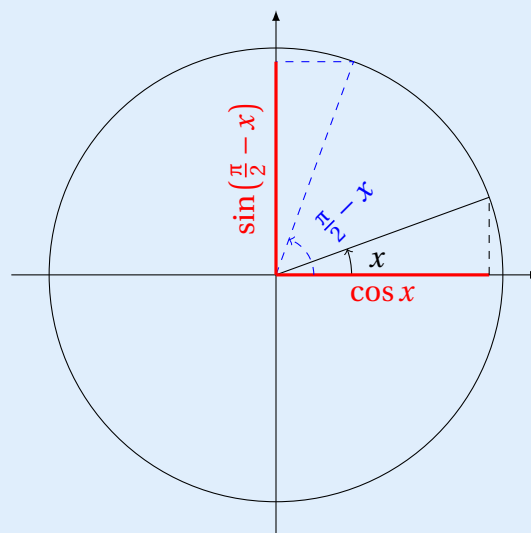
II. 5 - Formules de rotation

Propriété 38

Pour tout réel x ,

- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Regardons par exemple $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ sur le cercle trigonométrique :



En traçant l'angle $\frac{\pi}{2} - x$ et en regardant son sinus, on constate que la longueur du segment est identique à celle correspondant au $\cos x$.

Ce n'est pas une preuve de l'égalité mais un moyen pour retrouver facilement toutes les égalités de la propriété.

II. 6 - Équations

Propriété 39

- $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 35

- $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = \sin \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

III - Fonctions sinus et cosinus

III. 1 - Parité

Définition 21

- On dit qu'une fonction est **paire** si son domaine de définition \mathcal{D} est centré en 0 et si, pour tout x dans \mathcal{D} , $f(-x) = f(x)$.
- On dit qu'une fonction est **impaire** si son domaine de définition \mathcal{D} est centré en 0 et si, pour tout x dans \mathcal{D} , $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 40

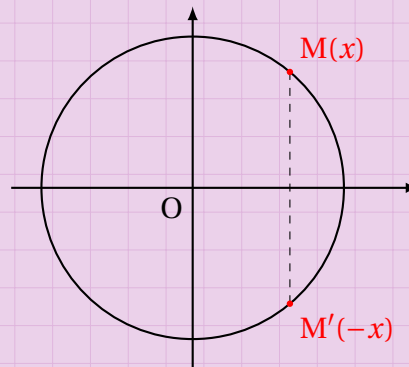
- La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire.
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire.

Démonstration 19

- Fonction $x \mapsto \cos x$.

Son domaine de définition est \mathbb{R} , donc centré en 0.

De plus, nous avons :

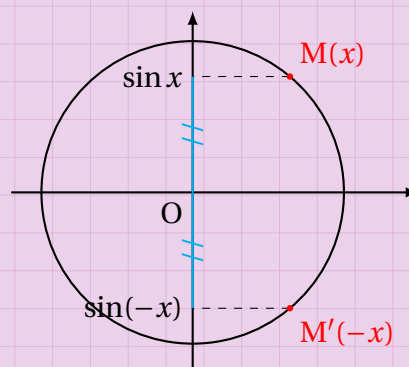


Ainsi, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction $x \mapsto \cos x$ est donc paire.

- Fonction $x \mapsto \sin x$.

Son domaine de définition est \mathbb{R} , donc centré en 0.

De plus, nous avons :



Ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (car M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses).

III . 2 - Périodicité

Définition 22

On dit qu'une fonction f est **T-périodique** si son domaine de définition \mathcal{D} est centré en 0 et si, pour tout réel de \mathcal{D} ,

$$f(x + T) = f(x).$$

Propriété 41

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques.

Démonstration 20

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π . Ainsi, les nombres x et $x + 2\pi$ auront la même image sur le cercle trigonométrique, ce qui signifie que :

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(x + 2\pi).$$

De plus, les deux fonctions sont définies sur \mathbb{R} (qui est centré en 0).

Donc $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques.

Remarque 31

On peut aussi dire que les fonctions sont périodiques de période 2π .

III . 3 - Courbes représentatives

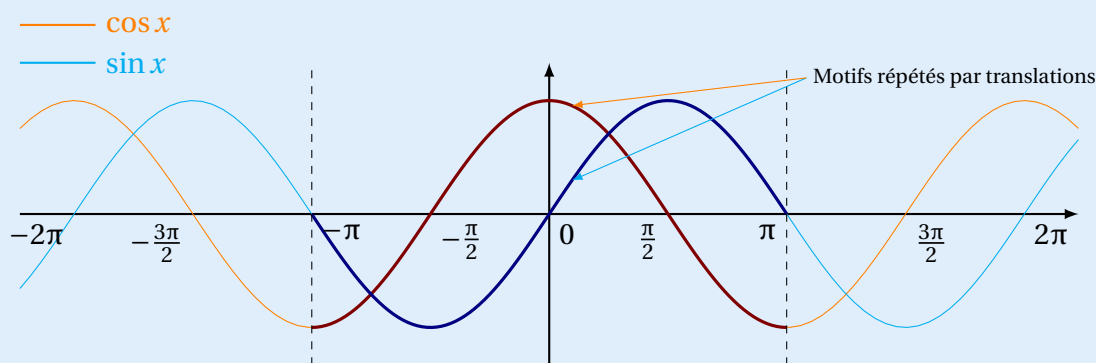
- Le fait de dire que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques signifie que si on prend n'importe quel intervalle d'amplitude 2π , le motif de la courbe représentative trouvé sur cet intervalle pourra se répéter.

On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, et déduire la totalité des courbes par translations de vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

- Le fait de dire que $x \mapsto \cos x$ est paire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (car $f(-x) = f(x)$).

De plus, le fait de dire que $x \mapsto \sin x$ est impaire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère (car $f(-x) = -f(x)$).

On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[0; \pi]$, et déduire les courbes par symétries (axiale ou centrale). Au final, les courbes représentatives sont les suivantes.



Cercle trigonométrique et angles

Exercice 5.1 (mesure principale)

Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants.

1 $\frac{17\pi}{3}$

2 $-\frac{8\pi}{3}$

3 $\frac{9\pi}{5}$

4 $-\frac{2015\pi}{6}$

5 $\frac{9999\pi}{7}$

6 $-\frac{78\pi}{9}$

7 $\frac{89\pi}{9}$

8 $-\frac{107\pi}{13}$

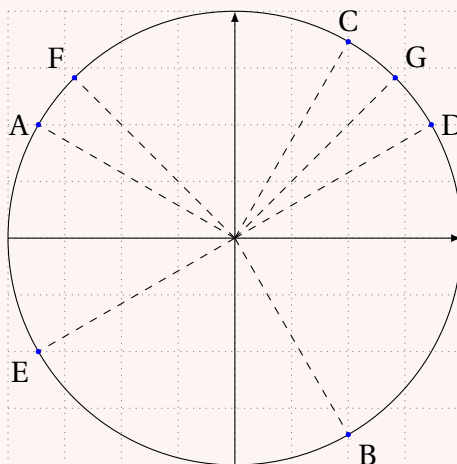
9 $\frac{21\pi}{2}$

10 $-\frac{123321\pi}{123}$

Solution page 264

Exercice 5.2 (mesure principale)

Attribuer à chaque point sur le cercle trigonométrique ci-dessous la mesure principale de l'angle qui lui est associé.



Solution page 264

Exercice 5.3 (conversion de mesures)

- 1 Convertir $\frac{7\pi}{18}$ radians en degrés.
- 2 Convertir 72° en radians.

Solution page 264

Exercice 5.4 (placement de points)

Placer sur le cercle trigonométrique les angles suivants :

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1 $-\frac{5\pi}{6}$ | 5 $\frac{\pi}{6}$ |
| 2 $\frac{7\pi}{4}$ | 6 $-\frac{2\pi}{3}$ |
| 3 $\frac{\pi}{3}$ | 7 $-\frac{3\pi}{4}$ |
| 4 $\frac{\pi}{4}$ | 8 $-\frac{13\pi}{3}$ |

Solution page 265

Sinus et cosinus

Exercice 5.5 (calculs)

- 1 Calculer $\cos\left(\frac{215\pi}{6}\right)$.
- 2 Calculer $\sin\left(\frac{316\pi}{6}\right)$.

Solution page 265

Exercice 5.6 (déductions)

- 1 Un logiciel de calcul donne : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.
En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
- 2 Soit x un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{4}{5}$.
Calculer $\cos(x)$.
- 3 On donne $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.
Montrer que $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$, puis donner la valeur exacte simplifiée de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Solution page 265

Exercice 5.7 (déductions)

- 1** Après quelques calculs, Pierre affirme que le sinus d'un angle a une valeur exacte égale à $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$.
Pourquoi cette valeur est obligatoirement fausse?
- 2** L'erreur étant rectifiée, le sinus de cet angle a pour valeur exacte $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$.
Donner les valeurs exactes possibles du cosinus de cet angle.

Solution page 267

Exercice 5.8 (simplification d'écritures)

Simplifier les écritures suivantes :

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{9}\right).$$

Solution page 267

Exercice 5.9 (calcul d'une somme trigonométrique)

Calculer $\left(\cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}\right)^2$.

Solution page 268

Exercice 5.10 (avec les formules de rotation)

À l'aide des formules de rotation (voir section 5 du cours), calculer :

- 1** $\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- 2** $\sin^2\left(\frac{6\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$
- 3** $\sin\left(\frac{13\pi}{22}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)$
- 4** $1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{26}\right)$

Solution page 268

Équations et inéquation trigonométriques

Exercice 5.11 (équations trigonométriques)

Résoudre sur $[0; 2\pi[$ les équations suivantes.

1 $\cos x = \frac{1}{2}$

2 $\sin x = \frac{1}{2}$

Solution page 269

Exercice 5.12 (équations et inéquations)

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $] -\pi; \pi]$:

1 $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

2 $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4 $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$

Solution page 270

Fonctions

Exercice 5.13

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2.$$

Montrer que f est une fonction constante.

Solution page 271

Exercice 5.14 (périodicité et variations)

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1 Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .

2 Montrer que f est périodique.

Solution page 271

Exercice S.15 (parité et périodicité)

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos^3 x \cos(3x).$$

Montrer que f est π -périodique et paire.

Solution page 272

Exercice S.16 (parité et périodicité)

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sin^3 x \cos(3x).$$

Montrer que f est π -périodique et impaire.

Solution page 272

Exercice S.17

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 1 + \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(2x).$$

- 1** La fonction f est-elle paire? Impaire? Justifier.
- 2** Montrer que f est 2π -périodique.

Solution page 273

Exercices spécimens

Exercice S.18 (QCM)

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Les questions sont indépendantes.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

- 1** Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x) - x$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie?
 - a.** f est paire.
 - b.** f est impaire.
 - c.** Pour tout réel x , $f(x + 2\pi) = f(x)$.
 - d.** Pour tout réel x , $f(x + \pi) = -f(x)$.

2 Dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, l'équation $2 \cos(x) - \sqrt{3} = 0$ a pour solutions :

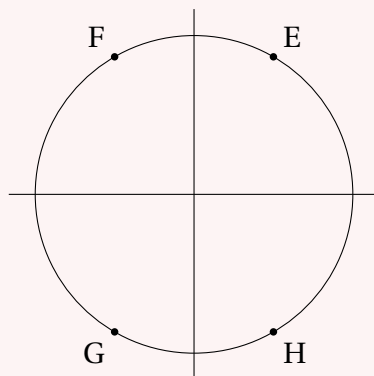
- a. $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$.
- b. $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.
- c. $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.
- d. $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

3 Le nombre réel $-\frac{3\pi}{4}$ est associé au même point du cercle trigonométrique que le réel :

- a. $-\frac{14\pi}{4}$.
- b. $\frac{7\pi}{4}$.
- c. $\frac{13\pi}{4}$.
- d. $\frac{19\pi}{4}$.

4 Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le nombre $\frac{14\pi}{3}$ a pour image le point :

- a. E
- b. F
- c. G
- d. H



5 Soit le réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin x = 0,8$. Alors :

- a. $\cos(x) = 0,8$.
- b. $\cos(x) = -0,6$.
- c. $\cos(x) = 0,2$.
- d. $\cos(x) = -0,2$.

6 On considère dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique $\sin x = 1$.

- a. Cette équation admet une unique solution dans l'ensemble des réels.
- b. Cette équation admet une infinité de solutions dans l'ensemble des réels.
- c. 2π est une solution de cette équation.
- d. $-\frac{57\pi}{2}$ est une solution de cette équation.

7 Soit x un nombre réel. On peut affirmer que :

- a. $\cos(x) = \sin(x)$.
- b. $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$.
- c. $\sin(\pi + x) = \sin(\pi - x)$.
- d. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

8 Les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

- a. $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.
- b. $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
- c. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.
- d. $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

- 9** Soit x un nombre réel. Le réel $\cos(x + 3\pi)$ est égal à :
- a.** $\cos(x)$. **b.** $-\cos(x)$. **c.** $\sin(x)$. **d.** $-\sin(x)$.
- 10** Pour tout nombre réel x , $\sin(7\pi - x)$ est égal à :
- a.** $\sin(x)$. **b.** $-\sin(x)$. **c.** $\cos(x)$. **d.** $-\cos(x)$.
- 11** t est un réel. On sait que $\cos(t) = \frac{2}{3}$. Alors $\cos(t + 4\pi) + \cos(-t)$ est égal à :
- a.** $-\frac{4}{3}$. **b.** 0 . **c.** $-\frac{4}{3}$. **d.** $\frac{2}{3}$.
- 12** L'expression de $\sin(\pi - x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est égale à :
- a.** $-2\sin(x)$. **b.** 0 . **c.** $2\sin(x)$. **d.** $\cos(x) - \sin(x)$.
- 13** Dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'unique solution de l'équation $2\cos(x + \pi) + 1 = 0$ est :
- a.** $\frac{\pi}{3}$. **b.** $-\frac{5\pi}{3}$. **c.** $\frac{\pi}{6}$. **d.** $\frac{2\pi}{3}$.
- 14** α est un nombre réel tel que $\sin(\alpha) = 0,5$. On a alors :
- a.** $\sin(\pi - \alpha) = 0,5$. **c.** $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b. $\sin(\pi - \alpha) = -0,5$. **d.** $\sin(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{6}$.
- 15**
- a.** L'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ admet deux solutions dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- b.** L'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ admet une solution dans $[0; \pi[$.
- c.** L'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ admet une solution dans $[0; \pi[$.
- d.** L'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ admet deux solutions dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 16** On donne : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
L'affirmation « $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) < 0$ » est-elle exacte?

Solution page 273

Exercice 5.19

On applique une tension sinusoïdale u aux bornes d'un circuit électrique comportant en série une résistance et une diode idéale.

Le temps t est exprimé en seconde.

La tension est donnée par la fonction u définie pour tout réel $t \geq 0$ par :

$$u(t) = \sqrt{3} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

La diode est non passante si $u(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et elle est passante si $u(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 1** La diode est-elle passante à l'instant $t = 0$?
- 2** Calculer $u\left(\frac{1}{100}\right)$. Interpréter le résultat.
- 3** On admet que $u\left(t + \frac{2}{100}\right) = u(t)$ pour tout $t \geq 0$. En déduire une propriété de la fonction u .

Solution page 277

Corrigé de l'exercice 5.1 page 256

1 $\frac{17\pi}{3} = \frac{(6 \times 3 - 1)\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$ donc la mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$.

2 $-\frac{8\pi}{3} = -\frac{(2 \times 3 + 2)\pi}{3} = -\frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3}$; la mesure principale est donc $-\frac{2\pi}{3}$.

3 $\frac{9\pi}{5} = \frac{(2 \times 5 - 1)\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}$; la mesure principale est donc $-\frac{\pi}{5}$.

4 $-\frac{2015\pi}{6}$. On commence par calculer $2015 \div 6 \approx 335,83$, ce qui est plus proche de 336 que de 334 (il nous faut un nombre pair). On écrit alors :
 $-\frac{2015\pi}{6} = -\frac{(336 \times 6 - 1)\pi}{6} = -336\pi + \frac{\pi}{6}$; la mesure principale est donc $\frac{\pi}{6}$.

5 $\frac{9999\pi}{7}$.
 $9999 \div 7 \approx 1428,4$ donc on écrit :
 $\frac{9999\pi}{7} = \frac{(1428 \times 7 + 3)\pi}{7} = 1428\pi + \frac{3\pi}{7}$. Ainsi, la mesure principale est $\frac{3\pi}{7}$.

6 $-\frac{78\pi}{9} = -\frac{(8 \times 9 + 6)\pi}{9} = -8\pi - \frac{6\pi}{9} = -8\pi - \frac{2\pi}{3}$. La mesure principale est donc $-\frac{2\pi}{3}$.

7 $\frac{89\pi}{9} = \frac{(10 \times 9 - 1)\pi}{9} = 10\pi - \frac{\pi}{9}$ donc la mesure principale est $\frac{\pi}{9}$.

8 $-\frac{107\pi}{13} = -\frac{(8 \times 13 + 3)\pi}{13} = -8\pi - \frac{3\pi}{13}$ donc la mesure principale est $-\frac{3\pi}{13}$.

9 $\frac{21\pi}{2} = \frac{(10 \times 2 + 1)\pi}{2} = 10\pi + \frac{\pi}{2}$ donc la mesure principale est $\frac{\pi}{2}$.

10 $-\frac{123321\pi}{123} = -\frac{(1002 \times 123 + 75)\pi}{123} = -1002\pi - \frac{75\pi}{123}$ donc la mesure principale est $-\frac{75\pi}{123}$.

Corrigé de l'exercice 5.2 page 256

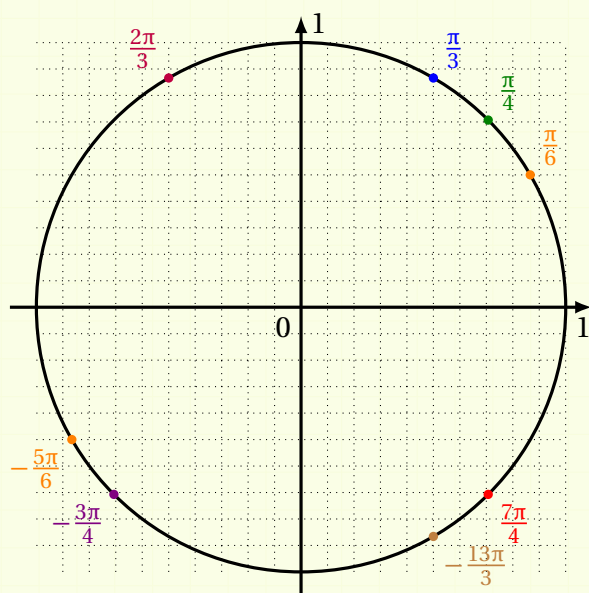
- A : $\frac{5\pi}{6}$
- C : $\frac{\pi}{3}$
- E : $-\frac{5\pi}{6}$
- G : $\frac{\pi}{4}$
- B : $-\frac{\pi}{3}$
- D : $\frac{\pi}{6}$
- F : $\frac{3\pi}{4}$

Corrigé de l'exercice 5.3 page 257

1 $\frac{7\pi}{18}$ radians correspond à $\frac{7 \times 180^\circ}{18} = 70^\circ$.

2 $72^\circ = 72 \times \frac{\pi}{180}$ radians = $\frac{2\pi}{5}$ radians.

Corrigé de l'exercice 5.4 page 257



Corrigé de l'exercice 5.5 page 257

$$1 \quad \cos \frac{215\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2 \quad \sin \frac{316\pi}{6} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 5.6 page 257

$$1 \quad 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \sin \frac{\pi}{5} > 0.$$

De plus, d'après le cours, pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc, en prenant $x = \frac{\pi}{5}$, cela donne :

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{5} \right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{5} \right)^2 &= 1 \iff \left(\sin \frac{\pi}{5} \right)^2 = 1 - \left(\cos \frac{\pi}{5} \right)^2 \\ &\iff \left(\sin \frac{\pi}{5} \right)^2 = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 \\ &\iff \left(\sin \frac{\pi}{5} \right)^2 = 1 - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} \\ &\iff \left(\sin \frac{\pi}{5} \right)^2 = \frac{16 - 6 - 2\sqrt{5}}{16} \\ &\iff \left(\sin \frac{\pi}{5} \right)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \\ &\iff \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \end{aligned}$$

2 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ donc $\cos x \leq 0$.
De plus,

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x = 1 &\iff \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ &\iff \cos^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ &\iff \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} \\ &\iff \cos^2 x = \frac{9}{25} \\ &\iff \boxed{\cos x = -\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

3 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 = 2 + \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\text{De plus, } \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)^2 &= \frac{2 + 2\sqrt{12} + 6}{4} \\ &= \frac{8 + 2\sqrt{4 \times 3}}{4} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4(2 + \sqrt{3})}{4} \\ &= 2 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)^2$, donc $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ (car les deux nombres sont positifs).

$0 < \frac{7\pi}{12} < \pi$ donc $\sin \frac{7\pi}{12} > 0$. Donc,

$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{12} &= \sqrt{1 - \cos^2 \frac{7\pi}{12}} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2 - 2\sqrt{12} + 6}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{12}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{4 \times 3}}{16}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{12} &= \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.7 page 258

1 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} > 1$; or, pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Donc $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ne peut pas représenter un sinus.

2 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \iff \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right)^2$

$$\iff \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2+2\sqrt{6}+3}{16}$$

$$\iff \cos^2 \alpha = \frac{11-2\sqrt{6}}{16}$$

$$\iff \boxed{\cos \alpha = -\sqrt{\frac{11-2\sqrt{6}}{16}} \text{ ou } \cos \alpha = \sqrt{\frac{11-2\sqrt{6}}{16}}}$$

Corrigé de l'exercice 5.8 page 258

- $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$ est de la forme $\cos(\pi - x)$ qui vaut $-\cos(x)$. Ainsi,

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}.$$

Comme $\frac{\pi}{5}$ n'est pas un angle remarquable, on ne peut pas aller plus loin. Ce dernier résultat est le plus simplifié possible à notre niveau.

- $\sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{2}\right)$ est de la forme $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, qui est égal à $\cos(x)$. Ainsi,

$$\sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Comme $\frac{\pi}{7}$ n'est pas un angle remarquable, on ne peut pas aller plus loin. Ce dernier résultat est le plus simplifié possible à notre niveau.

- Pour simplifier $\cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{9}\right)$, on peut remarquer que $11 - 2 = 9$ (la différence des coefficients de π aux numérateurs est égale aux dénominateurs des fractions), ce qui laisse à penser qu'il y a un lien entre les deux angles. Et en effet,

$$\frac{11\pi}{9} = \frac{9\pi}{9} + \frac{2\pi}{9} = \pi + \frac{2\pi}{9}.$$

Donc :

$$\sin \frac{11\pi}{9} = \sin \left(\pi + \frac{2\pi}{9} \right) = -\sin \frac{2\pi}{9}$$

et ainsi :

$$\sin^2 \frac{11\pi}{9} = \sin^2 \frac{2\pi}{9}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{2\pi}{9} \right) + \sin^2 \left(\frac{11\pi}{9} \right) &= \cos^2 \left(\frac{2\pi}{9} \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{9} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

En effet, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x .

Corrigé de l'exercice 5.9 page 258

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2}{4} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3 + 3 - 2\sqrt{3} + 1}{4} \\ &= \frac{8}{4} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.10 page 258

1 Calculons $\cos^2 \left(\frac{3\pi}{10} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right)$.

Remarquons avant tout que :

$$\frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} - \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{3\pi}{10} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) &= \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) \\ &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

2 Calculons $\sin^2\left(\frac{6\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Remarquons avant tout que :

$$\frac{6\pi}{7} = \frac{7\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{\pi}{7}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{6\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

3 Calculons $\sin\left(\frac{13\pi}{22}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)$.

Remarquons avant tout que :

$$\frac{13\pi}{22} = \frac{11\pi}{22} + \frac{2\pi}{22} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{11}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{13\pi}{22}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{11}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

4 Calculons $1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{26}\right)$.

Remarquons avant tout que :

$$\frac{11\pi}{26} = \frac{13\pi}{26} - \frac{2\pi}{26} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{26}\right) &= 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13}\right) \\ &= 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{13}\right) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.11 page 259

1 $\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$
 $\iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{sur } [0; 2\pi[.$

$$\begin{aligned}
 \text{2 } \sin x = \frac{1}{2} &\iff \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\
 &\iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{sur } [0; 2\pi[.
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.12 page 259

$$\begin{aligned}
 \text{1 } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \cos(x) = -\cos \frac{\pi}{6} \\
 &\iff \cos(x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\
 &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\
 &\iff x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, sur $] -\pi; \pi]$, les solutions sont : $-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
 \text{2 } \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &\iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

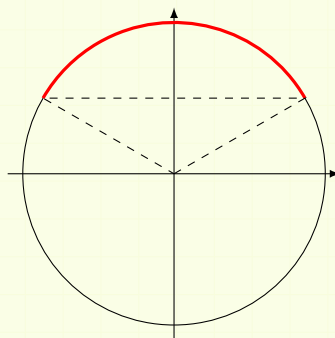
Ainsi, sur $] -\pi; \pi]$, les solutions sont : $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
 \text{3 } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} &\iff \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &\iff 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff 2x = 0 + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff x = k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, sur $] -\pi; \pi]$, les solutions sont (en prenant $k = 0$ et $k = 1$) : $0, \pi, -\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

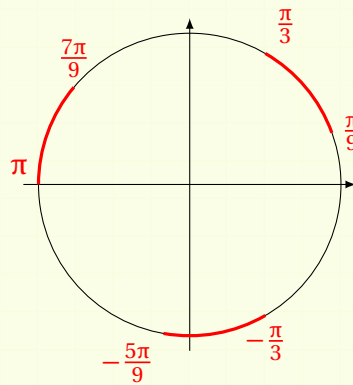
4 Pour résoudre l'inéquation $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$, on peut poser $X = 3x - \frac{\pi}{6}$ dans un premier temps.

$$\sin X \geq \frac{1}{2} \iff \sin X \geq \sin \frac{\pi}{6} \iff \frac{\pi}{6} \leq X \leq \pi - \frac{\pi}{6}$$



$$\begin{aligned}\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 3x - \frac{\pi}{6} \leq \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3x \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- Pour $k = 0$, on obtient : $\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.
- Pour $k = -1$, on obtient : $-\frac{5\pi}{9} \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$.
- Pour $k = 1$, on obtient : $\frac{7\pi}{9} \leq x \leq \pi$.



Corrigé de l'exercice 5.13 page 259

Développons $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + \underline{2\cos x \sin x} + \sin^2 x + \cos^2 x - \underline{2\cos x \sin x} + \sin^2 x \\ &= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.14 page 259

1 $f(x)$ est défini quand $1 + \sin x \neq 0$.

$$\text{Or, } 1 + \sin x = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2 On sait que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Par conséquent, $f(x + 2\pi) = f(x)$.
Ainsi, f est 2π -périodique.

Corrigé de l'exercice 5.15 page 260

- Montrons d'abord que f est π -périodique.

$$\begin{aligned}f(x + \pi) &= [\cos(x + \pi)]^3 \cos(3(x + \pi)) \\&= [-\cos x]^3 \cos(3x + 3\pi) \\&= -\cos^3 x \cos(3x + \pi) \\&= -\cos^3 x (-\cos(3x)) \\&= \cos^3 x \cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x + \pi) = f(x)}$$

Donc f est π -périodique.

On peut donc réduire l'intervalle d'étude à un intervalle d'amplitude π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Montrons que f est paire. D'abord, le domaine de définition de f est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned}f(-x) &= [\cos(-x)]^3 \cos(-3x) \\&= [\cos x]^3 \cos(3x) \\&= \cos^3 x \cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

Donc f est paire.

Corrigé de l'exercice 5.16 page 260

- Montrons d'abord que f est π -périodique.

$$\begin{aligned}f(x + \pi) &= [\sin(x + \pi)]^3 \cos[3(x + \pi)] \\&= [-\sin x]^3 \cos(3x + 3\pi) \\&= -\sin^3 x \cos(3x + \pi) \\&= -\sin^3 x [-\cos(3x)] \\&= \sin^3 x \cos(3x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x + \pi) = f(x)}$$

La fonction f est donc π -périodique; on peut donc restreindre l'intervalle d'étude de f à un intervalle d'amplitude π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Montrons que f est impaire. Le domaine de définition de f est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= [\sin(-x)]^3 \cos(-3x) \\ &= [-\sin x]^3 \cos(3x) \\ &= -\sin^3 x \cos(3x) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

La fonction f est donc impaire ; on peut donc réduire l'intervalle d'étude précédent à sa moitié, donc à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Corrigé de l'exercice 5.17 page 260

- 1** Le domaine de définition de f est \mathbb{R} , donc centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + \sin(-x) - \frac{1}{2} \cos(-2x) \\ &= 1 - \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \end{aligned}$$

car la fonction \sin est impaire (donc $\sin(-x) = -\sin x$) et la fonction \cos est paire (donc $\cos(-2x) = \cos(2x)$).

Ainsi, $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$; la fonction f n'est donc ni paire, ni impaire.

2 $f(x + 2\pi) = 1 + \sin(x + 2\pi) - \frac{1}{2} \cos[2(x + 2\pi)]$

$$= 1 + \sin x - \frac{1}{2} \cos(2x + 4\pi)$$

$$= 1 + \sin x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$= f(x).$$

Donc f est 2π -périodique.

Corrigé de l'exercice 5.18 page 260

- 1** Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x) - x$.

- a.** f est paire : pour le savoir, il faut avoir l'égalité $f(-x) = f(x)$ pour tout réel x de \mathbb{R} (qui est centré en 0).

$$\text{On a : } f(-x) = \sin(-x) - (-x) = -\sin(x) + x = -(\sin(x) - x) = -f(x).$$

f est donc en effet paire.

Comme il n'y a qu'une bonne solution, on pourrait s'arrêter ici, mais je vais tout de même expliquer pourquoi les autres propositions sont fausses.

- b.** f est impaire : si f est paire, elle ne peut pas être impaire en même temps. Donc cette proposition est fausse.

c. Pour tout réel x , $f(x + 2\pi) = f(x)$. On calcule :

$$\begin{aligned}f(x + 2\pi) &= \sin(x + 2\pi) - (x + 2\pi) \\&= \sin(x) - x - 2\pi \\&\neq f(x).\end{aligned}$$

Donc cette proposition est fausse.

d. Pour tout réel x , $f(x + \pi) = -f(x)$. On calcule :

$$\begin{aligned}f(x + \pi) &= \sin(x + \pi) - (x + \pi) \\&= -\sin(x) - x - \pi \\&\neq f(x).\end{aligned}$$

Donc cette proposition est fausse.

- 2 Dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, l'équation $2 \cos(x) - \sqrt{3} = 0$ a pour solutions...
Ici, il vaut mieux résoudre directement l'équation :

$$\begin{aligned}2 \cos(x) - \sqrt{3} = 0 &\iff 2 \cos(x) = \sqrt{3} \\&\iff \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\&\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\&\iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{-\pi}{6}.\end{aligned}$$

La proposition correcte est donc la proposition a.

- 3 Le nombre réel $-\frac{3\pi}{4}$ est associé au même point du cercle trigonométrique que le réel...

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = -\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

$\frac{5\pi}{4}$ ne fait pas partie des propositions donc on ajoute encore 2π :

$$\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}.$$

La proposition correcte est donc la proposition c.

- 4 Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le nombre $\frac{14\pi}{3}$ a pour image le point...

$$\frac{14\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}.$$

Donc $\frac{14\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ correspondent au même point sur le cercle trigonométrique, à savoir E.

La proposition correcte est donc la proposition a.

- 5** Soit le réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin x = 0,8$. Alors...

On sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout nombre réel x .

Donc, $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - 0,8^2 = 0,36$. Ainsi, $\cos(x) = -\sqrt{0,36} = -0,6$ ou $\cos(x) = \sqrt{0,36} = 0,6$.

Or, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc $\cos(x) < 0$. Donc $\cos(x) = -0,6$.

La proposition correcte est donc la proposition **b**.

- 6** On considère dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique $\sin x = 1$.

a. Cette équation admet une unique solution dans l'ensemble des réels : faux car il existe plusieurs valeurs de x pour lesquelles $\sin x = 1$; par exemple $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{2}$.

b. Cette équation admet une infinité de solutions dans l'ensemble des réels : vraie. Toutes les valeurs de $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont solutions car elles correspondent toutes au point situé à $\frac{\pi}{2}$.

c. 2π est une solution de cette équation : certainement pas car $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$.

d. $-\frac{57\pi}{2}$ est une solution de cette équation : faux. En effet,

$$57 = 28 \times 2 + 1$$

donc :

$$-\frac{57\pi}{2} = -\frac{(28 \times 2 + 1)\pi}{2} = -28\pi - \frac{\pi}{2}$$

ce qui signifie que $-\frac{57\pi}{2}$ correspond au même point que $-\frac{\pi}{2}$. Donc son sinus vaut -1 et non 1 .

La proposition correcte est donc la proposition **b**.

- 7** Soit x un nombre réel. On peut affirmer que :

a. $\cos(x) = \sin(x)$.

c. $\sin(\pi + x) = \sin(\pi - x)$.

b. $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$.

d. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Réponse **b**. C'est une question de cours.

- 8** Les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

a. $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

c. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

b. $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

d. $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

Réponse **d**. C'est du cours

- 9** Soit x un nombre réel. Le réel $\cos(x + 3\pi)$ est égal à :

a. $\cos(x)$.

b. $-\cos(x)$.

c. $\sin(x)$.

d. $-\sin(x)$.

Réponse **b**. En effet, $\cos(x + 3\pi) = \cos(x + \pi + 2\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

10 Pour tout nombre réel x , $\sin(7\pi - x)$ est égal à :

- a. $\sin(x)$. b. $-\sin(x)$. c. $\cos(x)$. d. $-\cos(x)$.

Réponse **a**. En effet, $\sin(7\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin(x)$.

11 t est un réel. On sait que $\cos(t) = \frac{2}{3}$. Alors $\cos(t + 4\pi) + \cos(-t)$ est égal à :

$$\begin{aligned}\cos(t + 4\pi) + \cos(-t) &= \cos(t) + \cos(t) \\ &= 2\cos(t) \\ &= 2 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

La proposition correcte est donc la proposition **c**.

12 L'expression de $\sin(\pi - x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est égale à :

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x) - \sin(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

La proposition correcte est donc la proposition **b**.

13 Dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'unique solution de l'équation $2\cos(x + \pi) + 1 = 0$ est :

$$\begin{aligned}2\cos(x + \pi) + 1 = 0 &\iff 2\cos(x + \pi) = -1 \\ &\iff \cos(x + \pi) = -\frac{1}{2} \\ &\iff -\cos(x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff \cos(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

La proposition correcte est donc la proposition **a**.

14 α est un nombre réel tel que $\sin(\alpha) = 0,5$. On a alors :

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) = 0,5.$$

La proposition correcte est donc la proposition **a**.

15 Réponse **b**. L'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ admet une solution dans $[0; \pi[$ qui est $x = \frac{2\pi}{3}$.

16 On donne : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

L'affirmation « $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) < 0$ » est-elle exacte ?

$\frac{2\pi}{5} \in [0; \pi]$ car $0 < \frac{2}{5} < 1$, donc peu importe la valeur de son cosinus, son sinus sera nécessairement positif.

L'affirmation est donc fausse.

Corrigé de l'exercice 5.19 page 263

1 $u(0) = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc la diode est passante pour $t = 0$.

2
$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{100}\right) &= \sqrt{3} \sin\left(100\pi \times \frac{1}{100} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt{3} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ u\left(\frac{1}{100}\right) &= -\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

La tension est négative, donc la diode n'est pas passante.

3 $u\left(t + \frac{2}{100}\right) = u(t)$ pour tout $t \geq 0$. Cela signifie que u est périodique, de période $\frac{2}{100}$.

La tension de la diode sera donc la même à intervalle régulier de $\frac{1}{50}$ seconde.

Produit scalaire



Plan du chapitre

I	Géométrie non repérée	279
1	Définition du produit scalaire	279
2	Orthogonalité de deux vecteurs	279
3	Produit scalaire et projetés orthogonaux	280
4	Propriétés algébriques du produit scalaire	282
a	Distributivité	282
b	Symétrie (commutativité)	283
c	Bilinéarité	283
5	Identités avec les normes	284
II	Géométrie repérée	286
1	Calcul du produit scalaire	286
2	Application pour trouver la mesure d'un angle	287
	Enoncés	288
	Corrigés des exercices	298

1 - Géométrie non repérée

Dans cette section, nous nous placerons dans un plan euclidien.

1.1 - Définition du produit scalaire

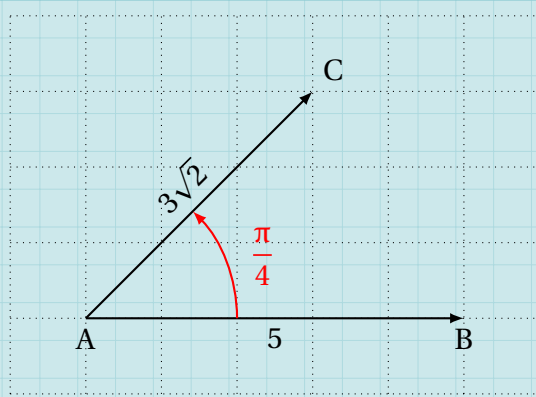
Définition 23

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan est le nombre noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

où (\vec{u}, \vec{v}) représente l'angle formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , et $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur \vec{u} (sa longueur).

Exemple 36



$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \\ &= 5 \times 3\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 15.\end{aligned}$$

Remarque 32

N'essayez pas d'interpréter le produit scalaire de façon géométrique car dans un cas général, le produit scalaire n'a aucune signification géométrique particulière. Cependant, il existe un cas où le produit scalaire a une signification géométrique; c'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

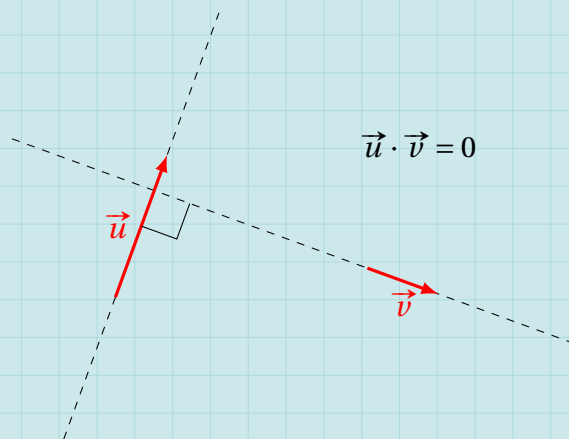
1.2 - Orthogonalité de deux vecteurs

Propriété 42

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemple 37



Démonstration 21

- Supposons que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Alors, $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$ et donc $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$. Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 0 = 0.$$

Nous venons de démontrer que :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

- Supposons maintenant que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; alors :

$$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0.$$

Or, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ donc $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$. Cela implique que $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire que $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π), et donc que les vecteurs sont orthogonaux.

Nous venons de démontrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux.}$$

Ainsi, nous avons ainsi démontré l'équivalence de la propriété.

1.3 - Produit scalaire et projetés orthogonaux

Propriété 43

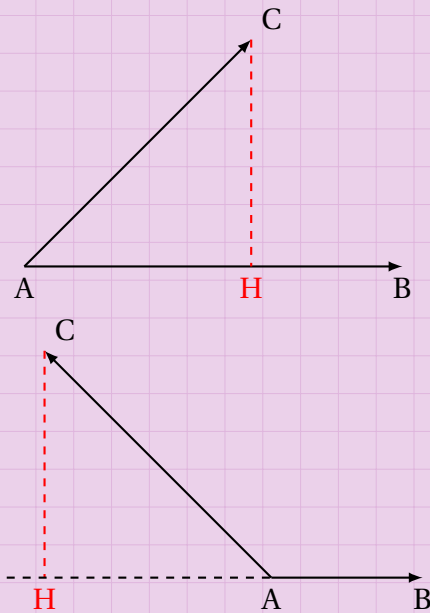
Soient \vec{AB} et \vec{AC} deux vecteurs du plan.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu;
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

Démonstration 22

On place les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de sorte qu'ils aient la même origine.
On note alors $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.



• 1^{er} cas.

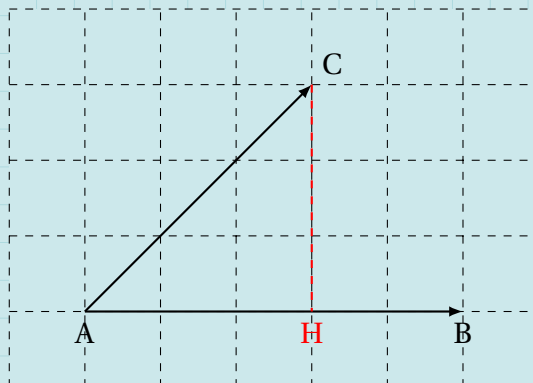
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \\ &= AB \times AH.\end{aligned}$$

• 2^e cas.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \\ &= -AB \times AC \times (-\cos(\vec{AB}, \vec{AC})) \\ &= -AB \times AC \times \cos(\vec{AH}, \vec{AC}) \\ &= -AB \times AH.\end{aligned}$$

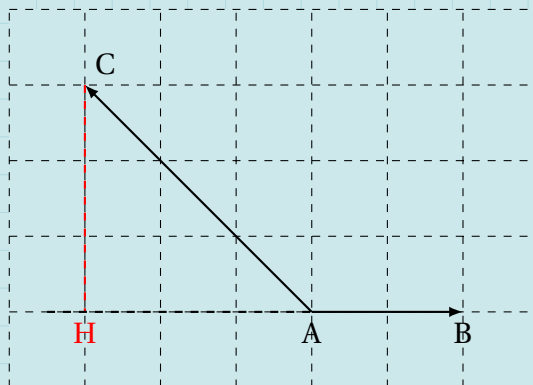
Exemple 38

- Cas où l'angle est aigu.



$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AH \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15.\end{aligned}$$

- Cas où l'angle est obtus.



$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= -AB \times AH \\ &= -2 \times 3 \\ &= -6.\end{aligned}$$

I. 4 - Propriétés algébriques du produit scalaire

I. 4. a - Distributivité

Propriété 44 (distributivité du produit scalaire)

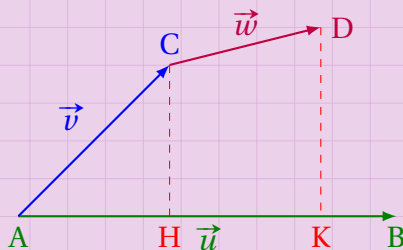
Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs du plan. Alors,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Démonstration 23

Considérons les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} comme sur le schéma ci-dessous.

On ne considèrera que le cas où les produits scalaires rencontrés sont positifs (car le cas où ils sont négatifs est similaire).



D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{AB} \cdot (\vec{AC} + \vec{CD}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} \\ &= AB \times AK. \quad (1)\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= AB \times AH \\ \text{et} \\ \vec{u} \cdot \vec{w} &= \vec{AB} \cdot \vec{CD} \\ &= AB \times HK\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= AB \times AH + AB \times HK \\ &= AB \times (AH + HK) \\ &= AB \times AK. \quad (2)\end{aligned}$$

Des égalités (1) et (2), on peut déduire :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Exemple 39

Quels que soient les points A, B, C et D du plan :

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{CD} &= \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}.\end{aligned}$$

1.4.B - Symétrie (commutativité)

Propriété 45 (commutativité du produit scalaire)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

Démonstration 24

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos[-(\vec{v}, \vec{u})] \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

car la fonction $x \mapsto \cos x$ est paire
car pour a et b réels, $a \times b = b \times a$

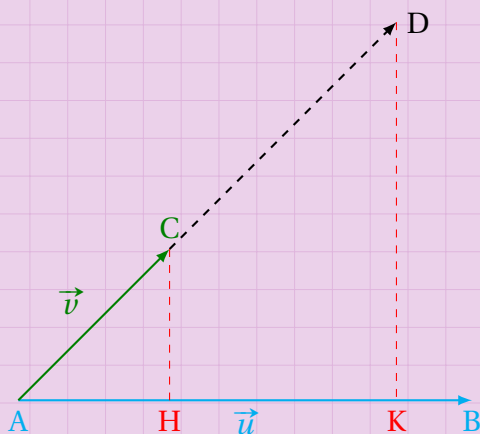
1.4.c - Bilinearité

Propriété 46 (résultat intermédiaire)

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconques. Alors,

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Démonstration 25



Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $k\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
D'après le théorème de Thalès,

$$AD = kAC \implies AK = kAH.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (k\vec{v}) &= AB \times AK \\ &= AB \times kAH \\ &= kAB \times AH \end{aligned}$$

et

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = kAB \times AH.$$

$$\text{Donc, } \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Un raisonnement analogue montrerait que $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

De ce résultat intermédiaire, on déduit la propriété suivante :

Propriété 47 (bilinearité du produit scalaire)

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconques. Alors,

$$(k\vec{u}) \cdot (k\vec{v}) = k^2(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Démonstration 26

D'après la propriété 46,

$$(k\vec{u}) \cdot (k\vec{v}) = k(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k^2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

1.5 - Identités avec les normes

Propriété 48

Pour tous \vec{u} et \vec{v} du plan :

1 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2.$

2 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$

Démonstration 27

1 $\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\|^2.\end{aligned}$

2 $\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.\end{aligned}$

De cette propriété, on peut déduire la suivante :

Propriété 49 (identités avec des normes)

Pour tous \vec{u} et \vec{v} du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Démonstration 28

- Nous avons vu précédemment que :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

En isolant $\vec{u} \cdot \vec{v}$, on arrive à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

- En exploitant l'égalité :

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2,$$

on arrive à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

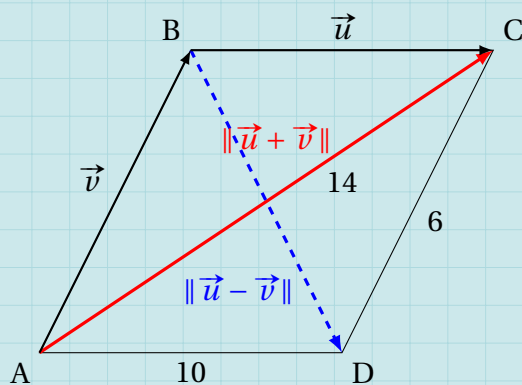
- En ajoutant les deux précédentes égalités, on a :

$$\begin{aligned} 2\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Exemple 40



$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(14^2 - 10^2 - 6^2) \\ &= 30. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \\ 30 &= \frac{1}{4}(14^2 - AC^2) \\ 30 \times 4 &= 196 - AC^2 \\ \Rightarrow AC &= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}. \end{aligned}$$

II - Géométrie repérée

Dans cette section, on rapporte le plan euclidien à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

II.1 - Calcul du produit scalaire

Propriété 50

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration 29

D'après la propriété 49,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

On sait que :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

et

$$\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$$

car on est dans un repère orthonormé.

De plus,

$$(\vec{u} - \vec{v}) \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \\ &= x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x'^2 + 2xx' - x^2 - y'^2 + 2yy' - y^2) \\ &= \frac{1}{2} (2xx' + 2yy') \\ &= xx' + yy'. \end{aligned}$$

Exemple 41

On pose $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 5 \times 1 + (-2) \times 7 \\ &= 5 - 14 \\ &= -9.\end{aligned}$$

II. 2 - Application pour trouver la mesure d'un angle

Reprenons les vecteurs de l'exemple précédent : $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Nous avons vu que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -9.$$

Or,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \sqrt{5^2 + (-2)^2} \times \sqrt{1^2 + 7^2} \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \sqrt{29} \times \sqrt{50} \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 5\sqrt{58} \cos(\vec{u}, \vec{v}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-9 = 5\sqrt{58} \cos(\vec{u}, \vec{v}),$$

soit :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{9}{5\sqrt{58}} \approx -0,236351579148.$$

On en déduit alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 104^\circ.$$

Attention 12



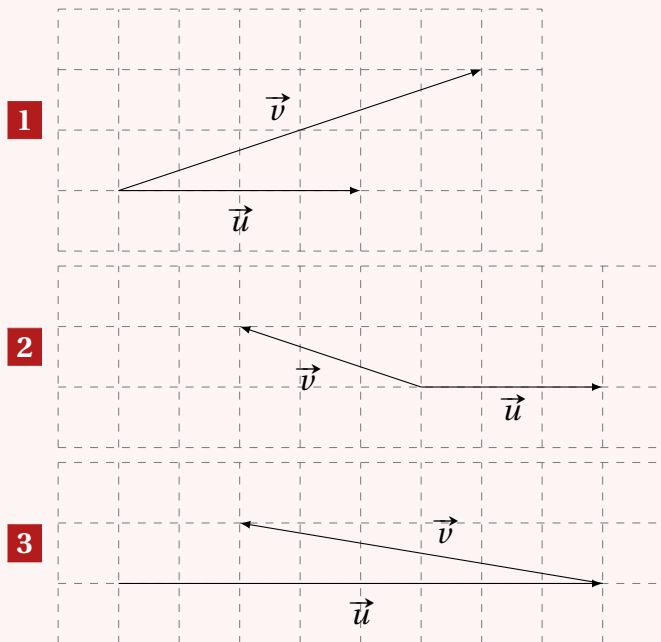
Certains enseignants mettent en fin de ce chapitre deux théorèmes : le théorème de la médiane et celui d'Al-Kaschi.

J'ai opté pour les mettre dans le chapitre suivant car ce sont deux théorèmes qui sont obtenus par application du produit scalaire.

Géométrie non repérée

Exercice 6.1 (projetés orthogonaux)

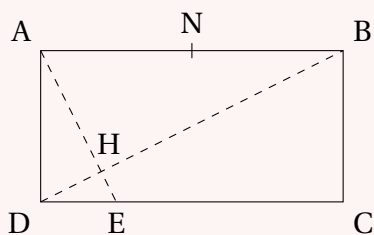
Dans chacun des cas suivants, déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis en déduire une valeur approchée de la mesure (en degrés) de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) .



Solution page 298

Exercice 6.2

ABCD est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$. E est le point de $[DC]$ tel que $DE = 1$. Les droites (AE) et (BD) se coupent en H et N est le milieu de $[AB]$.



- 1 Décomposer \vec{AE} et \vec{BD} à l'aide de la relation de Chasles, puis calculer $\vec{AE} \cdot \vec{BD}$.
Que peut-on conclure quant à (AE) et (BD) ?
- 2 En calculant de deux façons différentes $\vec{BA} \cdot \vec{BD}$, trouver BH.
- 3 Montrer que $\vec{HA} + \vec{HB} = 2\vec{HN}$.
- 4 Calculer HA, puis montrer que $\vec{HN} \cdot \vec{HA} = \frac{8}{5}$.
- 5 Justifier que $HN = 2$.
- 6 Calculer $\cos \widehat{AHN}$ et en déduire une valeur approchée de \widehat{AHN} au degré près.

Solution page 299

Exercice 6.3

Soit ABCD un carré. On pose :

- I le milieu de [AB] ;
- J le milieu de [AD] ;
- K le milieu de [ID].

- 1 Montrer que $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2$.
- 2 Montrer que (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

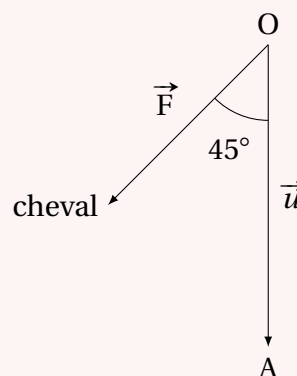
Solution page 300

Exercice 6.4 (Applications en sciences physiques)

- 1 Deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont appliquées en un point O, formant un angle de 50° . Leur intensité est respectivement de 300 N et 200 N. Par définition, la résultante est le vecteur $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Calculer l'intensité de cette résultante.

- 2 Pour tirer sur 50 mètres une péniche, un cheval exerce une force \vec{F} de 2 000 N au point où est accrochée la corde sur la péniche. La corde fait un angle de 45° avec la direction de la péniche.

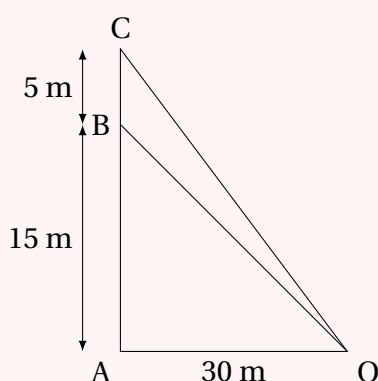


On rappelle que le travail d'une force \vec{F} est $W = \vec{F} \cdot \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur représentant le déplacement de l'objet.

- a. Calculer W.
- b. Calculer l'intensité de la force que doit exercer un bateau tirant cette même péniche et se déplaçant dans la même direction que celle-ci pour que le travail soit le même.

Solution page 301

Exercice 6.5



1 Montrer que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OA^2 + AB \times AC$.

2 Calculer \widehat{BOC} .

Solution page 302

Exercice 6.6 (ensemble de points)

Soit ABCD un carré de centre O tel que $AB = 2$. On pose I le milieu de [AB].

1 Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ est la droite (OI).

2 a. Montrer que, quel que soit le point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 1$.

b. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$?

Solution page 302

Exercice 6.7 (lignes de niveau)

On considère deux points A et B tels que $AB = 6$, ainsi que I le milieu de [AB].

On pose \mathcal{E}_k l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, où $k \in \mathbb{R}$.

1 Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$.

2 En déduire \mathcal{E}_{16} .

3 Pour quelles valeurs de k l'ensemble \mathcal{E}_k est-il réduit à l'ensemble vide?

Solution page 303

Exercice 6.8 (avec les normes)

1 Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AC = 6$.

a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b. En déduire la valeur approchée à l'unité de la mesure de l'angle \widehat{DAB} .

2 Soit EFGH un parallélogramme tel que $EF = 6$, $EH = FH = 5$.

a. Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH}$.

b. En déduire la valeur approchée à l'unité de la mesure de l'angle \widehat{FEH} .

3 Soit IJKL un parallélogramme tel que $IK = 8,5$ et $JL = 5$.

a. Calculer $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = IJ^2 + \frac{189}{16}$.

- c. En déduire que $IJ^2 - 8,5 \cos(\vec{IJ}, \vec{IK})IJ + \frac{189}{4} = 0$.
- d. En déduire que $\cos^2(\vec{IJ}, \vec{IK}) \geq \frac{189}{289}$.
- e. En déduire un encadrement approximatif (à l'unité près) de (\vec{IJ}, \vec{IK}) en degrés.

Solution page 304

Exercice 6.9 (pour les futur.e.s expert.e.s)

Dans le plan, on considère un point M et un cercle Γ , de centre O et de rayon r .

Soit d une droite passant par M et coupant Γ en deux points A et B.

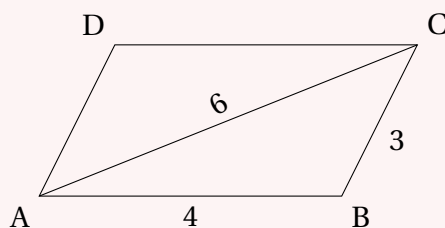
On appelle *puissance* de M par rapport à Γ le nombre : $\mathcal{P}_\Gamma(M) = OM^2 - r^2$.

- 1 En considérant le projeté orthogonal de O sur (AB), c'est-à-dire le point H de (AB) tel que $(OH) \perp (AB)$, montrer que :
 - si M est à l'extérieur de Γ alors $MA \times MB = \mathcal{P}_\Gamma(M)$;
 - sinon, $MA \times MB = -\mathcal{P}_\Gamma(M)$
- 2 On considère un cercle Γ' , de centre O' distinct de O, et de rayon r' . Soit M un point tel que $\mathcal{P}_\Gamma(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M)$.
 - a. Soient K le projeté orthogonal de M sur (OO') et I le milieu de $[OO']$.
Après avoir justifié que $r^2 - r'^2 = MO^2 - MO'^2$, montrer que $r^2 - r'^2 = 2\vec{OI} \cdot \vec{MK}$.
 - b. Déterminer alors l'ensemble des points M.
Cet ensemble est appelé *l'axe radical des deux cercles*.
- 3 Soit Γ'' un troisième cercle de centre O'' tel que O'' n'appartient pas à (OO') .
Montrer que les trois axes radicaux sont concourants en vous aidant de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle.

Solution page 306

Exercice 6.10

On considère la figure suivante :



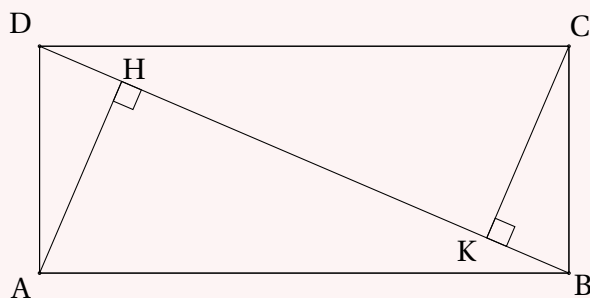
ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $BC = 3$ et $AC = 6$.

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Solution page 308

Exercice 6.11 (distance entre deux projetés orthogonaux)

On considère le rectangle ABCD ci-dessous, ainsi que les points E et F, projetés orthogonaux respectivement des points A et C sur [BD].



- 1 Exprimer en fonction de HK le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{DB}$ en utilisant les points H et K.
- 2 En utilisant la relation $\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{CB}$, calculer d'une autre manière $\vec{AC} \cdot \vec{DB}$.
- 3 En déduire la valeur exacte de HK.

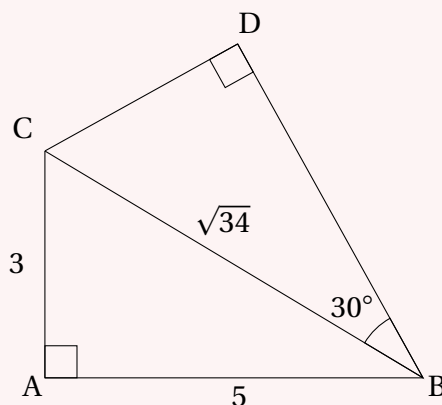
Solution page 308

Exercice 6.12 (À l'aide d'une formule de trigonométrie)

Dans un vieux grimoire, on trouve la formule magique suivante :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

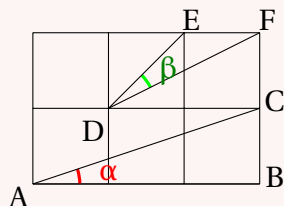
À l'aide de cette formule, donner la valeur exacte de $\vec{BD} \cdot \vec{BA}$.



Solution page 309

Géométrie repérée

Exercice 6.13 (comparaison de deux angles)



Comparer la mesure des angles α et β .

Solution page 310

Exercice 6.14

On considère un carré ABCD de côté 1.

On construit alors les points E et F tels que :

- BEC est un triangle équilatéral;
- F est un point de la droite (BC).

Déterminer la position du point F pour que les droites (AF) et (DE) soient perpendiculaires.

Indication : on pourra se placer dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Solution page 310

Exercice 6.15 (calcul de produits scalaires)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis en déduire l'angle (\vec{u}, \vec{v}) .

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solution page 311

Exercice 6.16 (mesure d'un angle)

Soit ABCD un carré. On considère alors I le milieu de [CD] et le point J défini par $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

En se plaçant dans un repère convenablement choisi, déterminer une mesure de l'angle \widehat{IAJ} au degré près.

Solution page 312

Exercice 6.17 (calcul d'une longueur)

ABCD est un rectangle tel que $AB = 1$.

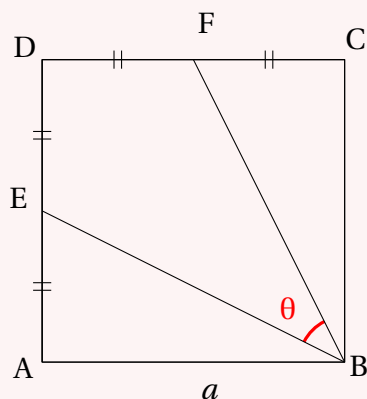
R est le milieu de $[DA]$. On sait que (BR) et (AC) sont perpendiculaires.

Que vaut AD ?

Solution page 313

Exercice 6.18

On considère la figure suivante :



ABCD est un carré de côté a . E et F sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[DC]$.

- 1** Montrer que $BE = BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
- 2** En déduire que $\vec{BE} \cdot \vec{BF} = \frac{5}{4}a^2 \cos \theta$.
- 3** On considère le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel B a pour coordonnées $(4; 0)$. Dans ce repère, donner les coordonnées de \vec{BE} et \vec{BF} , puis en déduire que $\vec{BE} \cdot \vec{BF} = a^2$.
- 4** En déduire la valeur de $\cos \theta$, puis une valeur approchée de θ au degré près.

Solution page 313

Exercices spécimens

Exercice 6.19 (QCM)

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Les questions sont indépendantes.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

- 1** ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$. Alors, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :
- a. $15\sqrt{2}$. b. $15\sqrt{3}$. c. $\frac{15}{2}$. d. 15.
- 2** ABCD est un carré de centre O tel que $AB = 1$. Alors, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD})$ est égal à :
- a. 1. b. 0. c. $-0,5$. d. -1.
- 3** \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 1$.
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$ est égal à :
- a. 6. b. 9. c. 13. d. 7.
- 4** Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 3$, $AD = 4$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$. Alors, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$ est égal à :
- a. 12. b. -12. c. 6. d. -6.

Solution page 314

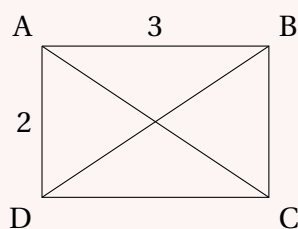
Exercice 6.20 (QCM)

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Les questions sont indépendantes.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

- 1** Soit ABCD un carré de côté 6 et I le milieu de [BC]. Alors, le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}$ vaut :
- a. -18. b. 18. c. 36. d. $9\sqrt{5}$.
- 2** On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 3$ et $AD = 2$.



Alors, le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ vaut :

- a.** 0. **b.** 5. **c.** 6. **d.** -6.

3 EFG est un triangle tel que $EF = 8$, $FG = 5$ et $\widehat{EFG} = \frac{3\pi}{4}$. Alors, $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG}$ est égal à :

- a.** $20\sqrt{2}$. **b.** $-20\sqrt{2}$. **c.** $20\sqrt{3}$. **d.** $-20\sqrt{3}$.

4 Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

- a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$.
b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$.
c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9\sqrt{3}$.
d. les données sont insuffisantes pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

5 Soit x un nombre réel. Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}(-x+4;7)$ et $\vec{v}(9;2x-5)$ sont orthogonaux lorsque x est égal à :

- a.** $\frac{1}{5}$. **b.** 10. **c.** $-\frac{1}{5}$. **d.** 6.

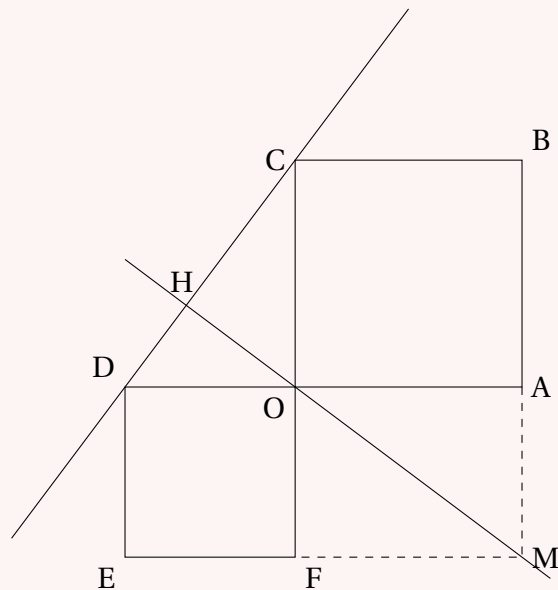
6 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On peut affirmer que :

- a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. **c.** $\vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2$.
b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{u}$. **d.** $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solution page 315

Exercice 6.21

OABC et ODEF sont des carrés de côtés respectifs 3 et 2. OAMF est un rectangle.
On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite (DC).



Dans cet exercice, on pourra, si on le souhaite, se placer dans le repère $(O, \frac{1}{3}\vec{OA}, \frac{1}{3}\vec{OC})$.

- 1 La droite (OM) est-elle perpendiculaire à la droite (DC) ?
- 2 Calculer $\vec{CD} \cdot \vec{CM}$.
- 3 Déterminer la longueur CH.

Solution page 317

Corrigé de l'exercice 6.1 page 288

1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 6 = 24$ (avec le projeté orthogonal de \vec{v} sur \vec{u}).

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{24}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = 2\sqrt{10}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 4$, donc :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{24}{8\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

et donc :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 18^\circ.$$

2 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-3) = -9$.

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{10}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 3$, donc :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{3\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

et donc :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 162^\circ.$$

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \times (-6) = -48$ (les deux vecteurs sont de sens contraires donc leur produit scalaire est négatif).

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-48}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 6^2 = 37 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{37}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 8$, donc :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-48}{8\sqrt{37}} = \frac{-6\sqrt{37}}{37}$$

et donc :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 171^\circ.$$

Corrigé de l'exercice 6.2 page 288

$$\begin{aligned}
 1 \quad \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \\
 &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + 0 + 0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 &= \|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{DE}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos \pi \\
 &= 4 - 1 \times 4
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0}$$

On en déduit alors que (AE) et (BD) sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned}
 2 \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} &= BH \times BD \\
 &= BH \times \sqrt{4^2 + 2^2} \quad (\text{Théorème de Pythagore dans BAD rectangle en A}) \\
 &= BH \times 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

De plus, on a aussi :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} &= BA \times BD \times \cos \widehat{ABD} \\
 &= BA \times BD \times \frac{AB}{BD} \quad (\text{en se plaçant dans le triangle rectangle ABD}) \\
 &= AB^2 \\
 &= 16.
 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$2\sqrt{5}BH = 16 \quad \text{soit} \quad \boxed{BH = \frac{8\sqrt{5}}{5}}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} &= (\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{NA}) + (\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{NB}) \\
 &= 2\overrightarrow{HN} + (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}) \\
 &= 2\overrightarrow{HN} + \vec{0} \quad (\text{car N est le milieu de [AB]})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{HN}}$$

$$4 \quad HA^2 = AB^2 - HB^2 \quad (\text{théorème de Pythagore dans le triangle AHB rectangle en H})$$

$$HA^2 = 16 - \frac{64}{5}$$

$$HA^2 = \frac{16}{5}$$

$$HA = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{HA = \frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} &= (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AN}) \cdot \overrightarrow{HA} \\
 &= \overrightarrow{HA}^2 + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{HA} \\
 &= \frac{16}{5} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AH}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{5} - 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \cos \widehat{HAN} \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{AH}{AB} \quad (\text{dans le triangle HAB rectangle en H}) \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{HN} \cdot \vec{HA} = \frac{8}{5}}$$

- 5** Dans le triangle BAH rectangle en H, [HN] est la médiane issue du sommet de l'angle droit, donc :

$$HN = \frac{1}{2}AB \quad \text{soit} \quad \boxed{HN = 2}$$

- 6** $\vec{HN} \cdot \vec{HA} = HN \times HA \times \cos \widehat{AHN}$

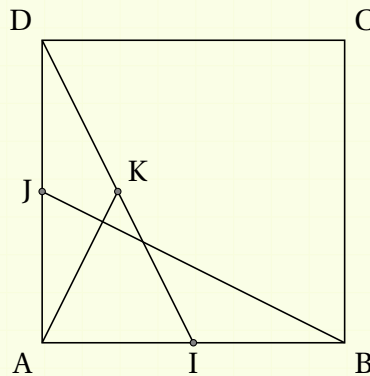
$$\frac{8}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \cos \widehat{AHN} \quad (\text{d'après la question } \boxed{4})$$

$$\cos \widehat{AHN} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{\widehat{AHN} \approx 63^\circ}$$

Corrigé de l'exercice 6.3 page 289

Faisons avant tout une figure :



- 1** Pour calculer $\vec{DK} \cdot \vec{AB}$, on peut projeter K sur (AB) ; on obtient un point K' au milieu de [AI]. Ainsi,

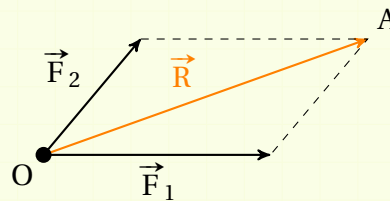
$$\begin{aligned}
\vec{DK} \cdot \vec{AB} &= AK' \times AB \\
&= \frac{1}{2}AI \times AB \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}AB \times AB \\
&= \frac{1}{4}AB^2.
\end{aligned}$$

- 2 Démontrer que (AK) et (JB) sont perpendiculaires est équivalent à démontrer que $\vec{AK} \cdot \vec{BJ} = 0$.

$$\begin{aligned}
 \vec{AK} \cdot \vec{BJ} &= (\vec{AD} + \vec{DK}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AJ}) \\
 &= \underbrace{\vec{AD} \cdot \vec{BA}}_{=0} + \vec{AD} \cdot \vec{AJ} + \vec{DK} \cdot \vec{BA} + \vec{DK} \cdot \vec{AJ} \\
 &= AD \times AJ - \vec{DK} \cdot \vec{AB} - \vec{DK} \cdot \vec{JA} \\
 &= \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}AB^2 - DJ \times JA \\
 &= \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}AD^2 - \frac{1}{4}AD^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 6.4 page 289

- 1 Illustrons la situation avec un schéma :



Construisons le point A de sorte à former un parallélogramme.
D'après la propriété 49 du cours,

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 &= \frac{1}{2}(\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 - \|\vec{F}_1\|^2 - \|\vec{F}_2\|^2) \\
 &= \frac{1}{2}(\|\vec{R}\|^2 - \|\vec{F}_1\|^2 - \|\vec{F}_2\|^2) \\
 &= \frac{1}{2}(\|\vec{R}\|^2 - 300^2 - 200^2) \\
 &= \frac{1}{2}(\|\vec{R}\|^2 - 50\,000).
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 &= \|\vec{F}_1\| \times \|\vec{F}_2\| \times \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \\
 &= 200 \times 300 \times \cos 50^\circ \\
 &= 60\,000 \cos 50^\circ.
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{2}(\|\vec{R}\|^2 - 50\,000) = 60\,000 \cos 50^\circ.$$

d'où :

$$\|\vec{R}\|^2 = 120\,000 \cos 50^\circ + 50\,000$$

et donc :

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{120\,000 \cos 50^\circ + 50\,000} \approx 343,496$$

La résultante a donc une intensité d'environ 343 N.

2 a. $W = \vec{F} \cdot \vec{u}$
 $= \|\vec{F}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{F}, \vec{u})$
 $= 2000 \times 50 \times \cos 45^\circ$
 $= 50000\sqrt{2}$
 $\approx 70711 \text{ J.}$

Le travail de la force est alors égal à 70 711 Joules.

- b.** Notons \vec{F}' la force exercée par un bateau se déplaçant dans la même direction que la péniche. On veut alors :

$$\begin{aligned} \vec{F}' \cdot \vec{u} = 70711 &\iff \|\vec{F}'\| \times 50 \times \cos(\vec{F}', \vec{u}) = 70711 \\ &\iff \|\vec{F}'\| = \frac{70711}{50} \approx 1414 \end{aligned}$$

L'intensité de la force du bateau doit donc être environ égale à 1 414 N.

Corrigé de l'exercice 6.5 page 290

1 $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{AC})$
 $= \vec{OA}^2 + \underbrace{\vec{OA} \cdot \vec{AC}}_{=0} + \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{OA}}_{=0} + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$$\boxed{\vec{OB} \cdot \vec{OC} = OA^2 + AB \times AC}$$

- 2** On sait que :

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = OB \times OC \times \cos(\vec{OB}, \vec{OC}).$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$OA^2 + AB \times AC = OB \times OC \times \cos(\vec{OB}, \vec{OC}).$$

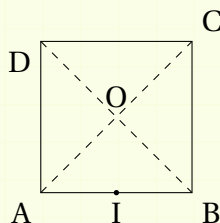
On en déduit alors :

$$\cos(\vec{OB}, \vec{OC}) = \frac{OA^2 + AB \times AC}{OB \times OC} = \frac{900 + 15 \times 20}{\sqrt{30^2 + 15^2} \times \sqrt{30^2 + 20^2}} \approx 0,992277876714.$$

D'où $(\vec{OB}, \vec{OC}) \approx 7^\circ$.

Corrigé de l'exercice 6.6 page 290

Faisons une figure avant tout.



- 1** Soit M un point quelconque du plan. Notons H son projeté orthogonal sur (AB).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} &= 2 \iff AB \times AH = 2 \\ &\iff AH = 1.\end{aligned}$$

Donc $H \in [AB]$ (car le produit scalaire est positif) et H est confondu avec I, ce qui signifie que M est sur la droite perpendiculaire à (AB) passant par I.

M est donc sur (OI).

2 a.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 + \underbrace{\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_{=\vec{0}} + IA \times IB \times \cos(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA})\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 1}$$

b.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= 4 \iff MI^2 - 1 = 4 \\ &\iff MI^2 = 5 \\ &\iff IM = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

Or, $IB = 1$ et $BC = 2$ donc on s'aperçoit que $IC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ et donc que $IC = \sqrt{5}$.

Par conséquent, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I passant par C.

Corrigé de l'exercice 6.7 page 290

1
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 + \underbrace{\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_{=\vec{0}} + IA \times IB \times \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \\ &= MI^2 + 3 \times 3 \times \cos \pi\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9}$$

- 2** \mathcal{E}_{16} est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$MI^2 - 9 = 16 \quad \text{soit} \quad MI^2 = 16 + 9 = 25 \text{ et donc } MI = 5.$$

Ainsi, \mathcal{E}_{16} est le cercle de centre I et de rayon 5.

- 3** $\mathcal{E}_k = \emptyset$ s'il n'existe pas de points M vérifiant l'égalité :

$$MI^2 - 9 = k \quad \text{soit} \quad MI^2 = k + 9.$$

Ceci est le cas si $k + 9 < 0$ (car un carré est toujours positif ou nul), ce qui implique que $k < -9$. Ainsi, pour $k < -9$, $\mathcal{E}_k = \emptyset$.

Corrigé de l'exercice 6.8 page 290

1 ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AC = 6$.

a. Dans cette question, nous allons nous servir de la propriété 49.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (6^2 - 5^2 - 3^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1}$$

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

$$1 = 5 \times 3 \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{15}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \approx 86^\circ}$$

2 EFGH est un parallélogramme tel que $EF = 6$, $EH = FH = 5$.

a.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{EF}\|^2 + \|\overrightarrow{EH}\|^2 - \|\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EH}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{EF}\|^2 + \|\overrightarrow{EH}\|^2 - \|\overrightarrow{HF}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (6^2 + 5^2 - 5^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = 18}$$

b. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = EF \times EH \times \cos(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$

$$18 = 6 \times 5 \times \cos(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$$

$$\cos(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}) = \frac{18}{30}$$

$$(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}) \approx 53^\circ.$$

3 IJKL est un parallélogramme tel que $IK = 8,5$ et $JL = 5$.

a. Dans cette question, on va toujours utiliser la propriété 49, mais pas la même égalité.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} &= \frac{1}{4} (\|\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL}\|^2 - \|\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IL}\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\overrightarrow{IK}\|^2 - \|\overrightarrow{LJ}\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (8,5^2 - 5^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} = \frac{189}{16}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \vec{IJ} \cdot \vec{IK} &= \vec{IJ} \cdot (\vec{IJ} + \vec{IL}) \\
 &= \vec{IJ} \cdot \vec{IJ} + \vec{IJ} \cdot \vec{IL} \\
 &= IJ^2 + \frac{189}{16}.
 \end{aligned}$$

c. Par définition,

$$\vec{IJ} \cdot \vec{IK} = \|\vec{IJ}\| \times \|\vec{IK}\| \times \cos(\vec{IJ}, \vec{IK}) = 8,5 \times IJ \times \cos(\vec{IJ}, \vec{IK}).$$

D'après la question précédente, ce même produit scalaire est égal à $IJ^2 + \frac{189}{16}$, donc

$$IJ^2 + \frac{189}{16} = 8,5 \times IJ \times \cos(\vec{IJ}, \vec{IK}),$$

c'est-à-dire :

$$IJ^2 - 8,5 \cos(\vec{IJ}, \vec{IK}) IJ + \frac{189}{16} = 0 \quad (\text{E})$$

d. L'équation (E) est une équation quadratique d'inconnue IJ qui admet au moins une solution (car le parallélogramme existe) donc son discriminant doit être supérieur ou égal à 0 :

$$[8,5 \cos(\vec{IJ}, \vec{IK})]^2 - 4 \times 1 \times \frac{189}{16} \geq 0$$

soit :

$$\cos^2(\vec{IJ}, \vec{IK}) \geq \frac{189}{4} \times \frac{1}{8,5^2}$$

et donc :

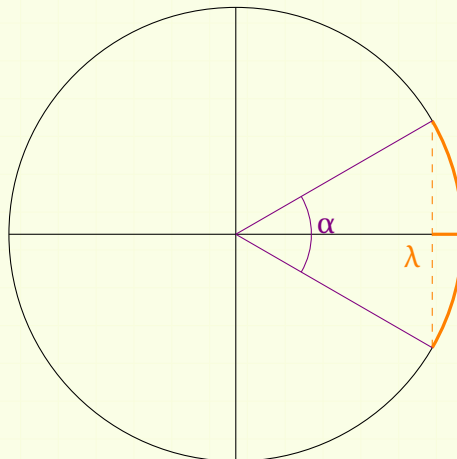
$$\cos^2(\vec{IJ}, \vec{IK}) \geq \frac{189}{289}$$

e. D'après la question précédente, $\cos^2(\vec{IJ}, \vec{IK}) \geq \frac{189}{289}$.

Comme $0 \leq (\vec{IJ}, \vec{IK}) < 90^\circ$ (comme angle formé par un côté et une diagonale d'un parallélogramme), on en déduit que $\cos(\vec{IJ}, \vec{IK}) > 0$, d'où :

$$\cos(\vec{IJ}, \vec{IK}) \geq \sqrt{\frac{189}{289}}.$$

Regardons sur le cercle trigonométrique ce que signifie l'inégalité $\cos \alpha \geq \lambda$:



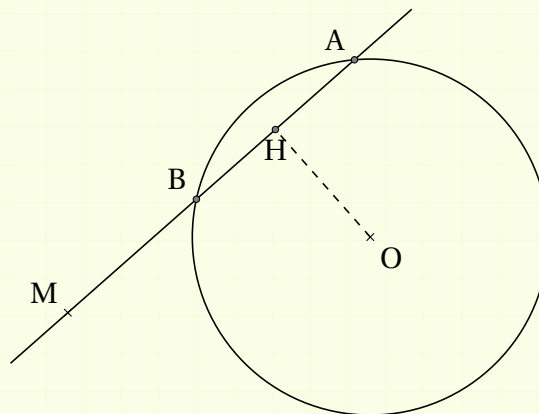
À la calculatrice, on trouve que l'angle positif dont le cosinus est égal à $\sqrt{\frac{189}{289}}$ est à peu près 36° .

Ainsi, on a :

$$0 \leq (\vec{IJ}, \vec{IK}) \leq 36^\circ$$

Corrigé de l'exercice 6.9 page 291

1 On considère le point H, projeté orthogonal de O sur (AB).



Ainsi, H est le milieu de [AB] (car AOB est isocèle en O et dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principale est la médiatrice du côté opposé). Donc :

$$\vec{HB} = -\vec{HA}$$

Nous allons calculer $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$:

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MH} + \vec{HA}) \cdot (\vec{MH} + \vec{HB}) \\ &= (\vec{MH} + \vec{HA}) \cdot (\vec{MH} - \vec{HA}) \\ &= MH^2 - HA^2 \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 \quad \text{et} \quad HA^2 = OA^2 - OH^2 = r^2 - OH^2$$

donc :

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= MH^2 - HA^2 \\ &= OM^2 - OH^2 - r^2 + OH^2 \\ &= OM^2 - r^2 \\ &= \mathcal{P}(M) \end{aligned}$$

Ainsi,

- si M est à l'extérieur du cercle,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \times MB = \mathcal{P}(M)$$

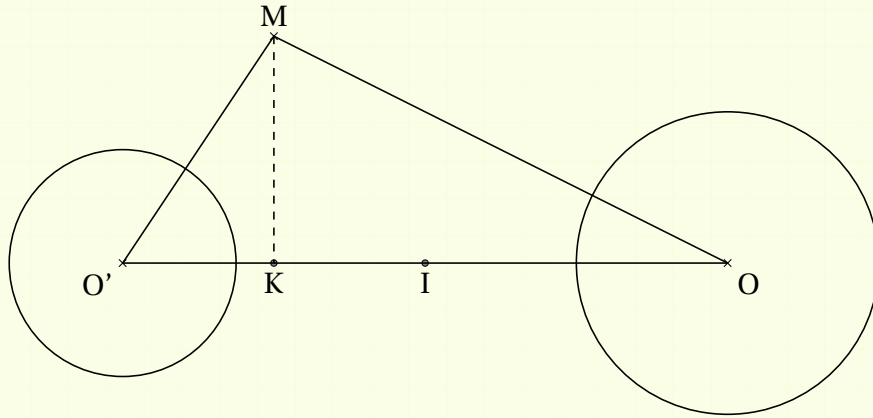
car A et B sont du même côté par rapport à M.

- Si M est à l'intérieur du cercle,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \times MB = \mathcal{P}(M)$$

car A et B sont de part et d'autre de M.

2 Avant tout, faisons un schéma :



- a.** M est tel que $\mathcal{P}_\Gamma(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M)$ donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Gamma(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M) &\iff OM^2 - r^2 = O'M^2 - r'^2 \\ &\iff OM^2 - O'M^2 = r^2 - r'^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } r - r'^2 &= MO^2 - MO'^2 \\ &= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{MO'}^2 \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}) \\ &= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{O'O} \\ &= 2\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{O'O} \text{ car K est le projeté orthogonal de M sur (OO')} \end{aligned}$$

$$\boxed{r - r'^2 = 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{IK}}$$

- b.** Il existe un unique point K tel que :

$$2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{IK} = r^2 - r'^2$$

D'après la question précédente, l'ensemble des points M ayant les mêmes puissances par rapport aux deux cercles est la droite perpendiculaire à (OO') passant par K.

c. Notons :

- d_1 l'axe radical de Γ et Γ' ;
- d_2 l'axe radical de Γ et Γ'' ;
- d_3 l'axe radical de Γ' et Γ'' .

$O'' \notin (OO')$ donc d_1 et d_2 sont sécantes. Appelons J leur intersection. Par définition des deux droites,

$$\mathcal{P}_{\Gamma}(J) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(J) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\Gamma}(J) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(J)$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{\Gamma'}(J) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(J)$, et donc $J \in d_3$.

J est donc le point de concours de d_1 , d_2 et d_3 .

Corrigé de l'exercice 6.10 page 291

D'après le cours,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(4^2 + 6^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (16 + 36 - 9) \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{43}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 6.11 page 292

$$\begin{aligned} \text{1} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= -DH \times DB + DK \times DB \\ &= DB(DK - DH) \\ &= DB \times HK \\ &= \sqrt{7^2 + 3^2} \times HK \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = HK\sqrt{58}}$$

$$\begin{aligned} \text{2} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= AB \times AB - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB^2 - AD^2 \\ &= 7^2 - 3^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 40}$$

3 Des deux questions précédentes, on déduit que :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 40 = HK\sqrt{58} \Rightarrow \boxed{HK = \frac{40}{\sqrt{58}}}$$

On peut aussi mettre le résultat sous la forme :

$$HK = \frac{40\sqrt{58}}{58} = \frac{20\sqrt{58}}{29}.$$

Corrigé de l'exercice 6.12 page 292

Nous savons que :

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = BD \times BA \times \cos \widehat{DBA}.$$

Notons $\alpha = \widehat{CBA}$.

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{\sqrt{34}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

D'après la formule donnée dans l'énoncé (qui, soit-dit en passant, n'a rien de magique!),

$$\begin{aligned} \cos \widehat{DBA} &= \cos(30^\circ + \alpha) \\ &= \cos(30^\circ) \cos(\alpha) - \sin(30^\circ) \sin(\alpha) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{\sqrt{34}} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{34}} \\ &= \frac{5\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{34}}. \end{aligned}$$

De plus, dans le triangle BDC rectangle en D,

$$\underbrace{\cos(30^\circ)}_{=\frac{1}{2}} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{\sqrt{34}} \iff BD = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{\sqrt{34}}{2} \times 5 \times \frac{5\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{34}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{25\sqrt{3} - 15}{4}}.$$

Corrigé de l'exercice 6.13 page 293

$$\begin{aligned}\bullet \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos \alpha \\ &= 3 \times \sqrt{3^2 + 1^2} \times \cos \alpha \\ &= 3\sqrt{10} \cos \alpha.\end{aligned}$$

Or, dans un même temps,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 \text{ (par projection orthogonale sur (AB))}.$$

On en déduit alors que :

$$\cos \alpha = \frac{9}{3\sqrt{10}} \iff \boxed{\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$\begin{aligned}\bullet \quad \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DE} &= DF \times DE \times \cos \beta \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{2} \times \cos \beta \\ &= \sqrt{10} \cos \beta.\end{aligned}$$

Dans un même temps,

$$\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DE} = 2 + 1 = 3.$$

Ainsi,

$$3 = 10 \cos \beta \iff \boxed{\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

On en déduit alors que $\cos \alpha = \cos \beta$, soit $\alpha = \beta$.

Corrigé de l'exercice 6.14 page 293

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$,

$$\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

où x est un nombre réel inconnu. On cherche à déterminer la valeur de x .

$$\begin{aligned}(\text{AF}) \perp (\text{DE}) &\iff \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \\ &\iff 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}x = 0 \\ &\iff x = 2 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Le point F doit donc être tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{BF} = (2 + \sqrt{3})\overrightarrow{BC}}$$

Corrigé de l'exercice 6.15 page 293

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = (-1) \times 3 + 2 \times (-5) = -13.$$

Ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-13}{\sqrt{5} \times \sqrt{34}} = \frac{-13}{\sqrt{170}},$$

soit :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 177^\circ.$$

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 3 \times 5 + 4 \times 6 = 39.$$

Ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{39}{5 \times \sqrt{61}},$$

soit :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 3^\circ.$$

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 10.$$

Ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{10}{2 \times \sqrt{26}},$$

soit :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 11^\circ.$$

4 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = -2.$$

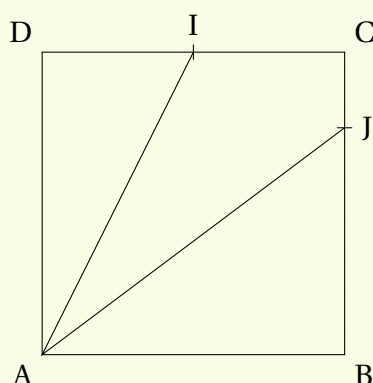
Ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{26}},$$

soit :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 101^\circ.$$

Corrigé de l'exercice 6.16 page 293



Dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$, on a :

$$\vec{AI} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors, d'une part :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = xx' + yy' = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

et d'autre part :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \|\vec{AI}\| \times \|\vec{AJ}\| \times \cos(\vec{AI}; \vec{AJ}).$$

Or, dans le triangle ADI rectangle en D, on a :

$$AI^2 = 1^2 + \frac{1^2}{2^2} = \frac{5}{4} \quad \text{soit} \quad AI = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

et dans le triangle ABJ rectangle en B, on a :

$$AJ^2 = 1^2 + \frac{3^2}{4^2} = \frac{25}{4} \quad \text{soit} \quad AJ = \frac{5}{2}.$$

Donc :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{5}{4} \times \cos(\vec{AI}; \vec{AJ}).$$

Ainsi, on a :

$$\cos(\vec{AI}; \vec{AJ}) = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5\sqrt{5}}{16}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

soit :

$$(\vec{AI}; \vec{AJ}) \approx 27^\circ$$

Remarque 34

Pour être précis, on trouve un angle de mesure $26,57^\circ$, mais donner une approximation décimale pour une mesure d'angle est à mon avis une incohérence monumentale car un angle s'exprime en base sexagésimale (en base 60) et donc, les décimaux n'ont pas leur place ici (comme pour les heures). Il faudrait donc ici donner l'approximation :

$$26^\circ + 0,57 \times 60' = 26^\circ 34' + 0,2 \times 60 = 26^\circ 34' 12''.$$

Corrigé de l'exercice 6.17 page 294

Posons $x = AD$.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \frac{1}{x}\overrightarrow{AD})$, on a :

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BR} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BR} = 0 \iff -1 + \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\iff \frac{x^2}{2} = 1$$

$$\iff x^2 = 2$$

$$\iff x = \sqrt{2} \quad \text{car } x > 0.$$

Ainsi, $AD = \sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 6.18 page 294

- 1** Les triangles ABE et CBF sont égaux et respectivement rectangles en A et C, avec $FC = AE$ et $BC = AB$. Donc $BE = BF$.

De plus, d'après le théorème de Pythagore,

$$BE^2 = AB^2 + AE^2$$

$$= a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$= a^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$= \frac{5}{4}a^2$$

$$BE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$\boxed{BE = \frac{a\sqrt{5}}{2}}$$

- 2** D'après la formule du produit scalaire avec cosinus,

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = BE \times BF \times \cos(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF})$$

$$= BE^2 \cos \theta$$

$$\boxed{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{5}{4}a^2 \cos \theta}$$

- 3** Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a :

$$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -a \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix}$$

donc :

$$\vec{BE} \cdot \vec{BA} = -a \times \left(-\frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}a \times a = a.$$

4 Des questions précédentes, on déduit :

$$\begin{aligned}\vec{BE} \cdot \vec{BF} &= \frac{5}{4}a^2 \cos \theta = a^2 \iff \frac{5}{4} \cos \theta = 1 \\ &\iff \boxed{\cos \theta = \frac{4}{5}}\end{aligned}$$

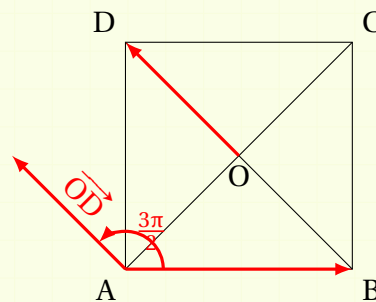
On en déduit alors que $\theta \approx 37^\circ$.

Corrigé de l'exercice 6.19 page 295

1 Réponse a. En effet,

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \\ &= 5 \times 6 \times \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 15\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2 Réponse c. En effet, on a la figure suivante :



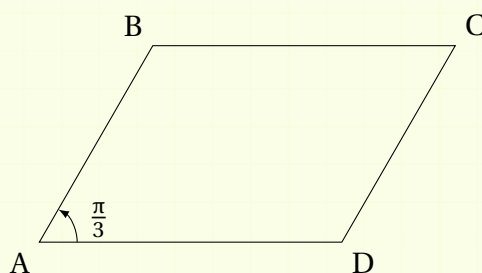
Ainsi,

$$\begin{aligned}(\vec{AB}, \vec{OD}) &= AB \times OD \times \cos(\vec{AB}, \vec{OD}) \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \\ &= -0,5.\end{aligned}$$

3 Réponse d. \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs orthogonaux (donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$) tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 1$.

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) &= 2\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v}^2 \\
 &= 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 \\
 &= 2 \times 2^2 + 0 - 1^2 \\
 &= 7.
 \end{aligned}$$

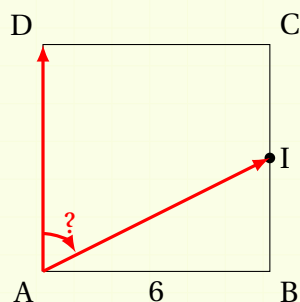
4 Réponse d.



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} &= -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\
 &= -AD \times AB \times \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= -3 \times 4 \times \frac{1}{2} \\
 &= -6.
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 6.20 page 295

1 Réponse a.



Donc :

Dans le triangle ABI rectangle en B,

$$\cos \widehat{I} = \frac{IB}{AI} = \frac{3}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Or, $\widehat{AIB} = \widehat{DAI}$ (angles alternes-internes formé par deux droites parallèles et une sécante).

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} &= AD \times AI \times \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}) \\
 &= 6 \times \sqrt{45} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \\
 &= -18.
 \end{aligned}$$

2 Réponse **b**. En effet,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 \\ &= 3^2 - 2^2 \\ &= 5.\end{aligned}$$

3 Réponse **b**. En effet,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} &= FE \times FG \times \cos(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}) \\ &= 8 \times 5 \times \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= 40 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -20\sqrt{2}.\end{aligned}$$

4 Réponse **a**. En effet, ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. D'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= 6 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 18 \times \frac{1}{2} \\ &= 9.\end{aligned}$$

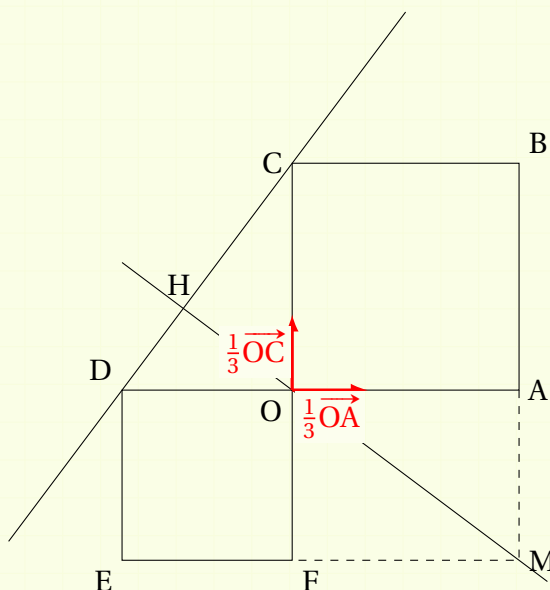
5 Réponse **c**. En effet, dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}(-x+4;7)$ et $\vec{v}(9;2x-5)$ sont orthogonaux lorsque :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\iff 9(-x+4) + 7(2x-5) = 0 \\ &\iff -9x + 36 + 14x - 35 = 0 \\ &\iff 5x = -1 \\ &\iff x = -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

6 Réponse **d**. C'est du cours.

Corrigé de l'exercice 6.21 page 297

1 Dans le repère $(0, \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{3}\overrightarrow{OC})$, on a :



$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OM} = 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0.$$

On en conclut alors que \overrightarrow{DC} et \overrightarrow{OM} sont orthogonaux, et donc que les droites (DC) et (OM) sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned} 2 \quad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= -2 \times 3 + (-3) \times (-5) \\ &= -6 + 15 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} = 9}$$

- 3
- Une équation réduite de (CD) est : $y = \frac{3}{2}x + 3$. En effet, $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc le coefficient directeur de (CD) est $m = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$. De plus, l'ordonnée à l'origine est celle de C, donc $p = 3$.
 - Une équation réduite de (OM) est : $y = -\frac{2}{3}x$. En effet, $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc le coefficient directeur de (CD) est $m = \frac{-2}{3}$. De plus, l'ordonnée à l'origine est celle de O, donc $p = 0$.
 - $H(x_H; y_H) \in (CD)$ donc $y_H = \frac{3}{2}x_H + 3$ et $H \in (OM)$ donc $y_H = -\frac{2}{3}x_H$. On en déduit

alors que :

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x_H + 3 &= -\frac{2}{3}x_H \iff \frac{3}{2}x_H + \frac{2}{3}x_H = -3 \\ &\iff \frac{13}{6}x_H = -3 \\ &\iff x_H = -3 \times \frac{6}{13} = -\frac{18}{13}\end{aligned}$$

d'où :

$$y_H = -\frac{2}{3}x_H = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{18}{13}\right) = \frac{12}{13}.$$

Ainsi, $H\left(-\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right)$.

- À l'aide des coordonnées de H, on peut à présent calculer CH :

$$\begin{aligned}CH &= \sqrt{(x_H - x_C)^2 + (y_H - y_C)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{18}{13} - 0\right)^2 + \left(\frac{12}{13} - 3\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{81}{13}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{9\sqrt{13}}{13}.\end{aligned}$$

Applications du produit scalaire



Plan du chapitre

I	Géométrie non repérée	320
1	Formule d'Al-Kashi	320
2	Théorème de la médiane	320
3	Lignes de niveau	321
4	Centre de gravité d'un triangle	322
II	Géométrie repérée	324
1	Équations cartésiennes de cercles	324
2	Vecteur normal d'une droite	325
	Enoncés	327
	Corrigés des exercices	335

1 - Géométrie non repérée

1.1 - Formule d'Al-Kashi

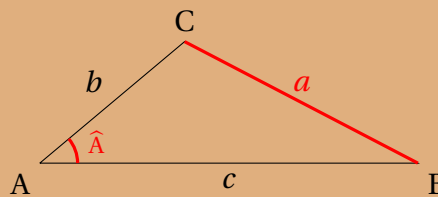
Propriété 51

Soit ABC un triangle quelconque. En notant :

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB, \quad \hat{A} = (\vec{AB}, \vec{AC}),$$

on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$



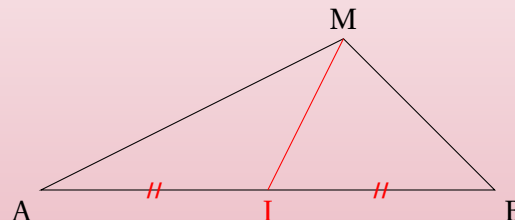
Démonstration 30

$$\begin{aligned} \vec{BC}^2 &= (\vec{BA} + \vec{AC})^2 \\ &= \vec{BA}^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 \\ &= BA^2 + 2BA \times AC \times \cos(\vec{BA}, \vec{AC}) + AC^2 \\ &= AB^2 + AC^2 + 2AB \times AC \times (-\cos(\vec{AB}, \vec{AC})) \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}). \end{aligned}$$

1.2 - Théorème de la médiane

Théorème 2

Soient A, B et M trois points quelconques du plan.



Alors,

$$MA^2 + MB^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2MI^2.$$

Démonstration 31

Nous allons utiliser la relation de Chasles en « injectant » le point I dans les vecteurs \overrightarrow{MA} et \overrightarrow{MB} .

$$\begin{aligned}MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\&= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\&= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}} \\&= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \\&= 2MI^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \\&= 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 \\&= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.\end{aligned}$$

1.3 - Lignes de niveau

Propriété S2 (ligne de niveau 1)

Pour tous points A, B et M du plan,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

où I est le milieu de [AB].

Démonstration 32

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\&= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\&= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\&= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\&= MI^2 + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\&= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.\end{aligned}$$

Propriété S3 (ligne de niveau 2)

Soient A et B deux points du plan.

L'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration 33

Soit I le milieu de [AB]

D'après la propriété 52, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ donc :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0$$

$$\iff MI^2 = \frac{1}{4}AB^2$$

$$\iff MI = \frac{1}{2}AB$$

$$\iff M \text{ appartient au cercle de centre I et de rayon } \frac{AB}{2}$$

$$\iff M \text{ appartient au cercle de diamètre [AB].}$$

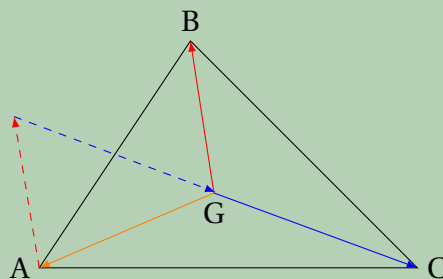
1.4 - Centre de gravité d'un triangle

Définition 24

Soit ABC un triangle quelconque.

On appelle **centre de gravité** de ABC le point G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$



Propriété S4 (égalité vectorielle du centre de gravité)

Soient A, B et C trois points quelconques du plan, et soit G le centre de gravité de ABC.

Quel que soit le point M du plan,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Démonstration 34

Notons G le centre de gravité du triangle ABC.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{= \vec{0} \text{ par définition}} \\ &= 3\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Propriété 55 (ligne de niveau 3)

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Quel que soit le point M du plan,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Démonstration 35

$$\begin{aligned}MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + \\ &= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{= \vec{0}} \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.\end{aligned}$$

Propriété 56

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Soit M un point quelconque du plan.

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimal lorsque $M = G$.

Démonstration 36

D'après la propriété 55,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

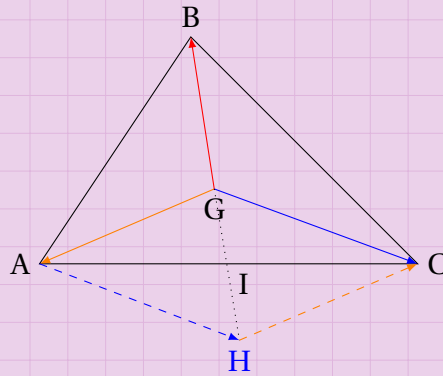
Ainsi, $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimal quand $3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ l'est aussi.

Or $GA^2 + GB^2 + GC^2$ est constant donc $3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ est minimal quand $3MG$ l'est aussi, c'est-à-dire quand $MG = 0$, soit quand $M = G$.

Propriété 57

Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours de ses médianes.

Démonstration 37



Posons H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{GC}$; ainsi, AGCH est un parallélogramme.
Posons I le milieu de [AC]. Ainsi,

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{GI}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

ce qui signifie que \overrightarrow{GB} et \overrightarrow{GI} sont colinéaires et donc que les points B, G et I sont alignés.
On en déduit que G appartient à la médiane (BI).

Un raisonnement analogue peut ensuite démontrer que G appartient aux deux autres médianes.

Ainsi, G est le point d'intersection des médianes de ABC.

II - Géométrie repérée

II.1 - Équations cartésiennes de cercles

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, considérons deux points A $(x_A; y_A)$ et B $(x_B; y_B)$. Posons $\Omega(a; b)$ le milieu de [AB].

Soit M $(x; y)$ un point du cercle de diamètre [AB]. D'après la propriété 53 :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

De plus,

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 &\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \\ &\iff x^2 - (x_A + x_B)x + x_A x_B + y^2 - (y_A + y_B)y + y_A y_B = 0 \\ &\iff x^2 - 2 \times \frac{x_A + x_B}{2} x + x_A x_B + y^2 - 2 \times \frac{y_A + y_B}{2} y + y_A y_B = 0. \end{aligned}$$

Or,

$$x^2 - 2 \times \frac{x_A + x_B}{2} x = \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 = (x - a)^2 - a^2$$

et

$$y^2 - 2 \times \frac{y_A + y_B}{2} y = \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = (y - b)^2 - b^2$$

donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 &\iff (x - a)^2 - a^2 + x_A x_B + (y - b)^2 - b^2 + y_A y_B = 0 \\ &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - x_A x_B - y_A y_B.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 - x_A x_B - y_A y_B &= \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - x_A x_B - y_A y_B \\ &= \frac{x_A^2 + 2x_A x_B + x_B^2}{4} + \frac{y_A^2 + 2y_A y_B + y_B^2}{4} - \frac{4x_A x_B}{4} - \frac{4y_A y_B}{4} \\ &= \frac{x_A^2 - 2x_A x_B + x_B^2 + y_A^2 - 2y_A y_B + y_B^2}{4} \\ &= \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{4} \\ &= \frac{AB^2}{4}.\end{aligned}$$

En convenant de noter $r = \frac{AB}{2}$ le rayon du cercle (de diamètre $[AB]$), on obtient ainsi :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Cette dernière égalité est appelée une *équation cartésienne du cercle*.

Propriété 5B

Soit $\Omega(a; b)$ un point du plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Une équation du cercle de centre Ω et de rayon r est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

II. 2 - Vecteur normal d'une droite

Définition 2S

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite \mathcal{D} d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

On appelle **vecteur normal** à \mathcal{D} tout vecteur orthogonal au vecteur directeur de \mathcal{D} .

Propriété 59

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite \mathcal{D} d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D} .

Démonstration 38

La droite \mathcal{D} a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. En posant $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -b \times a + a \times b = 0.$$

Ainsi, \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux. \vec{n} est donc bien un vecteur normal à \mathcal{D} .

Géométrie non repérée

Exercice 7.1 (formule d'Al-Kashi)

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 6$, $AD = 5$ et $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{3}$. Soient I et J les projetés orthogonaux de D et B sur [AC].

- 1 En exprimant $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ à l'aide de A, C, I et J, montrer que $AI = JC$.
- 2 À l'aide de la propriété 49 du cours du chapitre précédent, exprimer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ en fonction de AC, puis calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ afin d'en déduire AC.
- 3 Justifier que $AI = AD \cos(\vec{AI}, \vec{AD})$.
- 4 En utilisant la formule d'Al-Kashi dans le triangle ACD, montrer que :

$$\cos(\vec{AI}, \vec{AD}) = \frac{8\sqrt{91}}{91}.$$

- 5 En déduire alors IJ.

Solution page 335

Exercice 7.2 (formule d'Al-Kashi)

Dans chacun des cas suivants, utiliser la formule d'Al-Kashi pour trouver ce qui est demandé.

- 1 ABC est un triangle tel que $AB = 9$, $AC = 4$ et $BC = 7$.
Calculer une valeur approchée à l'unité (en degrés) de l'angle \widehat{BCA} .
- 2 ABC est un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 20^\circ$.
Calculer une valeur approchée au dixième de BC.
- 3 ABC est un triangle tel que $AB = 14$, $BC = 7$ et $\widehat{BCA} = 45^\circ$.
Calculer une valeur approchée au centième de AC.

Solution page 336

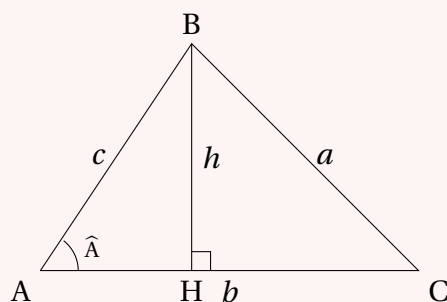
Exercice 7.3 (lignes de niveau avec le théorème de la médiane)

- 1 Soient deux points A et B du plan tels que $AB = 10$.
À l'aide du théorème de la médiane, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 100$.
- 2 Soit un triangle ABC tel que $AB = 7$, $AC = 4$ et $BC = 10$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 100$.
Pour répondre à cette question, on n'hésitera pas à prendre des initiatives.

Solution page 337

Exercice 7.4 (formule de Héron : pour les futur.e.s expert.e.s)

Soit un triangle ABC, et H le pied de la hauteur issue du sommet B.
On note $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et $BH = h$.



- 1** Exprimer h en fonction de c et $\sin \hat{A}$, puis en déduire que l'aire du triangle ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}.$$

- 2** À l'aide de la formule d'Al-Kashi, exprimer $\sin^2 \hat{A}$ en fonction de a , b et c .

- 3** En notant $p = \frac{a+b+c}{2}$, montrer alors que : $\sin^2 \hat{A} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2}$.

- 4** En déduire alors que : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

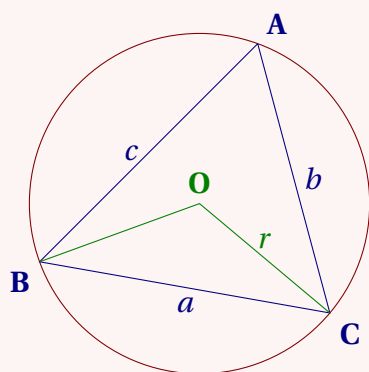
Cette dernière formule est appelée la *formule de Héron*.

- 5** Application : calculer l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour mesure 7 cm, 12 cm et 9 cm.

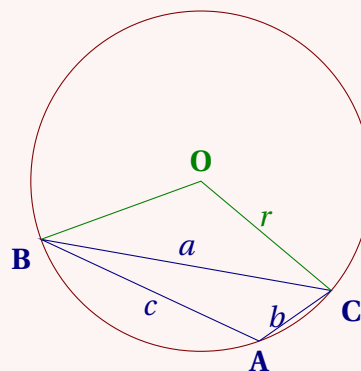
Solution page 339

Exercice 7.5 (formule des sinus, à faire après l'exercice 7.4)

On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle \mathcal{C} de rayon r .
On note $\hat{A} = \widehat{BAC}$.



Cas 1



Cas 2

- 1** Montrer que, dans le cas 1 comme dans le cas 2, on a : $\frac{a}{2} = r \sin \hat{A}$.

- 2** En déduire que : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r$.

- 3** En déduire que l'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{abc}{4r}$.

Solution page 340

Géométrie repérée

Exercice 7.6

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(0;4)$, $B(3;6)$ et $C(6;0)$. Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de B .

- 1 Déterminer les coordonnées de H .
- 2 Déterminer une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} de diamètre $[BH]$.
- 3 On appelle E et F les points d'intersection de \mathcal{C} avec respectivement $[AB[$ et $]BC]$.
Le triangle EFH est-il rectangle en H ?
Dans la négative, donner une mesure approchée au degré près de \widehat{EHF} .

Solution page 341

Exercice 7.7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle \mathcal{C} de centre $A(2;0)$ et de rayon 2 et le cercle \mathcal{C}' de centre $B(18;0)$ et de rayon 14.

Soit (d) la droite passant par O et faisant un angle de 30° avec l'axe des abscisses; elle coupe \mathcal{C}' en deux points I et J , J étant le point le plus éloigné de O .

On considère les points $E(4;0)$ et $F(32;0)$. On s'intéresse à la mesure de l'angle \widehat{JEF} .

- 1 Déterminer une équation de la droite (d) .
- 2 Déterminer une équation du cercle \mathcal{C}' .
- 3 En déduire les coordonnées de J .
- 4 Calculer $\vec{EF} \cdot \vec{EJ}$, puis en déduire une mesure de \widehat{JEF} en degrés.

Solution page 344

Exercice 7.8 (équations cartésiennes de cercles)

Dans chacun des cas suivants, donner l'équation cartésienne du cercle \mathcal{C} .

- 1 \mathcal{C} a pour centre le point $A(-1;2)$ et pour rayon 2.
- 2 \mathcal{C} est le cercle de diamètre $[AB]$, où $A(2;-1)$ et $B(-2;3)$.
- 3 \mathcal{C} est le cercle de centre $A(4;3)$ tangent au cercle \mathcal{C}' d'équation $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Solution page 345

Exercice 7.9 (équations cartésiennes de cercles)

Dans chacun des cas suivants, trouver le centre et le rayon des cercles dont on donne une équation cartésienne.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$ | 3 $3x^2 + 3y^2 - 6x - 3y - 33 = 0$ |
| 2 $x^2 + y^2 - 18x - 14y + 105 = 0$ | 4 $9x^2 + 9y^2 + 12x + 6y - 20 = 0$ |

Solution page 346

Exercice 7.10 (équations cartésiennes de cercles)

On considère le cercle \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.

- 1** Donner son rayon et les coordonnées de son centre A.

On considère maintenant le cercle \mathcal{C}' de centre C, dont le rayon est le double de celui de \mathcal{C} et qui est tangent à \mathcal{C} au point B(5;2).

- 2** Donner l'équation de \mathcal{C}' .

On souhaite maintenant construire un cercle \mathcal{C}_1 dont le diamètre est le triple de celui de \mathcal{C} et qui est tangent à \mathcal{C} et \mathcal{C}' . On appelle D le centre de \mathcal{C}_1 de sorte que son ordonnée soit positive.

- 3** Expliquer pourquoi $AD = 8$ et $CD = 10$.
4 Calculer alors les coordonnées de D.
5 Donner alors une équation cartésienne de \mathcal{C}_1 .

On appelle E le point d'intersection de \mathcal{C}' et \mathcal{C}_1 , et F celui de \mathcal{C} et \mathcal{C}_1 .

- 6** Les droites (AE), (CF) et (DB) sont-elles concourantes?

Solution page 346

Exercice 7.11 (équations de droites perpendiculaires)

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite \mathcal{D} .

- 1** $A(-1;2)$, $B(4;-3)$ et \mathcal{D} est la médiatrice de [AB].
2 \mathcal{D} est la droite passant par $A(1;3)$ et perpendiculaire à la droite \mathcal{D}' d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.
3 \mathcal{D} est la tangente au cercle de centre O et de rayon 3 passant par le point d'abscisse 2.
4 \mathcal{D} a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passe par le point $A(-1;2)$.

Solution page 349

Exercice 7.12 (orthocentre d'un triangle)

Soient $A(-1;3)$, $B(5;-2)$ et $C(9;4)$. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC.

Solution page 351

Exercice 7.13 (projetés orthogonaux sur une droite)

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite (d).

- 1** $A(-1;2)$ et (d) a pour équation cartésienne $-2x + 3y - 5 = 0$.
2 $A(1;6)$ et (d) a pour équation cartésienne $3x - 5y - 7 = 0$.
3 $A(-6;-7)$ et (d) a pour équation cartésienne $-5x - 8y + 3 = 0$.
4 $A(7;1)$ et (d) a pour équation cartésienne $3x + 5y + 8 = 0$.

Solution page 352

Exercice 7.14 (intersection de cercles et de droites)

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection du cercle \mathcal{C} et de la droite (d) .

1 $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ et $(d) : x + y - 1 = 0$.

2 $\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ et $(d) : y = -1$.

3 $\mathcal{C} : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$ et $(d) : x = -4$.

Remarque 35

Seules figurent au programme les intersections avec des droites parallèles aux axes du repère. Cependant, prendre une droite ne remplissant pas ces critères ne fait pas de mal... ce n'est pas plus compliqué!

Solution page 354

Exercice 7.15 (cercle passant par 3 points)

Soient $A(1;1)$, $B(2;-2)$ et $C(-6;2)$.

1 Justifier brièvement que les médiatrices de deux cordes quelconques d'un cercle se coupent toujours en le centre de ce cercle.

2 En déduire alors une équation cartésienne du cercle passant par A, B et C.

Solution page 354

Exercice 7.16 (ligne de niveau : parabole)

Soit $A(2;4)$. On souhaite déterminer l'ensemble géométrique des points équidistants de A et de l'axe des abscisses.

À tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses ; autrement dit, H a la même abscisse que M, et son ordonnée vaut 0.

On appelle *distance de M à l'axe des abscisses* la longueur MH ; c'est donc l'ordonnée de M.

On considère un point $H(a;0)$, projeté orthogonal d'un point M de l'ensemble cherché sur l'axe des abscisses.

Établir l'équation réduite de la médiatrice de [AH], puis déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que $MA = MH$.

Solution page 356

Exercice 7.17 (hight level de la mort : pour les futur.e.s expert.e.s)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b afin que la droite d'équation $ax + by + 12 = 0$ coupe le cercle d'équation $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 36$ en deux points distincts.

Solution page 357

Exercice 7.18 (distance d'un point à une droite)

Partie A

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $A(6;4)$ et la droite (d) d'équation cartésienne $3x + 5y - 2 = 0$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur (d) , et la distance entre A et (d) , c'est-à-dire AH .

- 1 Déterminer une équation cartésienne de (d') , perpendiculaire à (d) passant par A .
- 2 En déduire les coordonnées de H .
- 3 Calculer alors AH .

Partie B : pour les futur.e.s expert.e.s

Dans cette partie, on se propose de généraliser les calculs qui ont été faits dans la partie A. On considère alors une droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $A(\alpha; \beta)$.

- 1 Établir une équation cartésienne de la droite (d') , perpendiculaire à (d) et passant par A .
- 2 Exprimer alors les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur (d) .
- 3 Exprimer la distance du point A à la droite (d) .

Solution page 360

Exercice 7.19 (droites et cercle circonscrit)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(3;0)$, $B(2;7)$ et $C(-6;3)$.

- 1 Déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{BC} .
- 2 Le triangle est-il rectangle? Est-il isocèle? Est-il équilatéral?
- 3 On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.
Déterminer leurs coordonnées.
- 4 On note (D) et (D') les médiatrices respectives de $[AB]$ et $[AC]$.
Déterminer une équation cartésienne de ces médiatrices.
- 5 Calculer les coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') .
- 6 En déduire une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC .
- 7 Déterminer les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{C} et (D') . On le notera Ω .

Solution page 362

Exercices spécimens

Exercice 7.20 (QCM)

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Les questions sont indépendantes.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

- 1** ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 5$ et $AC = 6$. On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ égal à :
- a. -18 . b. 10 . c. 26 . d. 0 .
- 2** Dans le plan muni d'un repère, une équation cartésienne du cercle de centre $A(-2;3)$ et de rayon 4 est :
- a. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$. c. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$.
b. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2$. d. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.
- 3** On considère le triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Que vaut BC?
- a. $\sqrt{109}$. b. $\sqrt{74}$. c. $-35\sqrt{3} + 74$. d. $\sqrt{39}$.
- 4** Dans un repère orthonormé le cercle \mathcal{C} a pour équation $x^2 - 2x + y^2 + y = 3$ et la droite \mathcal{D} pour équation $y = 1$.
- a. \mathcal{C} et \mathcal{D} n'ont aucun point d'intersection.
b. \mathcal{C} et \mathcal{D} ont un seul point d'intersection.
c. \mathcal{C} et \mathcal{D} ont deux points d'intersection.
d. On ne peut pas savoir combien \mathcal{C} et \mathcal{D} ont de points d'intersection.
- 5** Soit la droite (d) d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$. Sachant que la droite (d_1) est perpendiculaire à la droite (d) , une équation de (d_1) peut être :
- a. $x - 2y + 2 = 0$. b. $x + 2y - 1 = 0$. c. $-2x + y - 1 = 0$. d. $x - y + 2 = 0$.

Solution page 364

Exercice 7.21

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(3;1)$, $B(-3;3)$ et $C(2;4)$.

- 1** Montrer que l'équation $x + 3y - 6 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).
2 Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) , perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le point C.
3 En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
4 Calculer la distance AB et déterminer les coordonnées du milieu M du segment [AB].
5 En déduire une équation du cercle de diamètre [AB].

Solution page 365

Exercice 7.22

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(4; -1)$, $B(3; 4)$ et $C(-1; 1)$.

- 1 Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- 2 **a.** Soit D le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Justifier que $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
b. En déduire la longueur AD.
- 3 Déterminer la hauteur du triangle ABC issue de C.
- 4 Calculer l'aire du triangle ABC.

Solution page 367

Exercice 7.23

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1; 3)$, $B(5; 0)$ et $C(9; 3)$.

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
- 2 Déterminer une équation cartésienne de la droite \mathscr{D} passant par le point C et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- 3 Démontrer que les droites \mathscr{D} et (AB) ne sont pas parallèles.

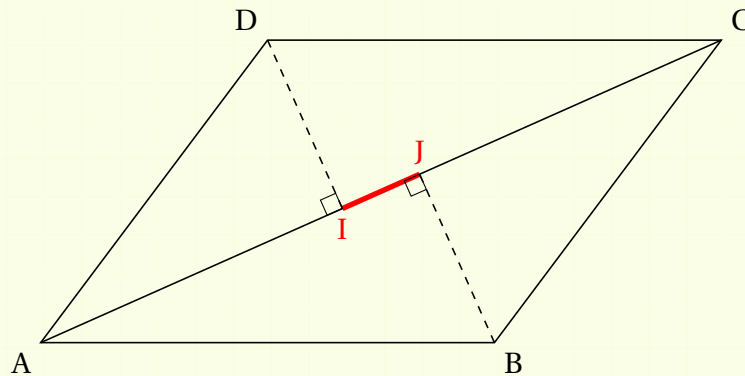
On admet que le point $E(3; 1)$ est le point d'intersection de ces deux droites.

- 4 Les droites \mathscr{D} et (AB) sont-elles perpendiculaires?
- 5 On donne $AE = 2\sqrt{5}$ et $EC = 2\sqrt{10}$.
Calculer la mesure en degrés de l'angle \widehat{AEC} .

Solution page 368

Corrigé de l'exercice 7.1 page 327

Avant tout, faisons une figure (approximative) :



1 On a :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AJ$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC \times AI$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC \times AJ + AC \times AI$$

soit :

$$\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = AC \times (AJ + AI)$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC \times (AJ + AI)$$

ou encore :

$$AC^2 = AC(AJ + AI).$$

Ainsi,

$$AC = AJ + AI.$$

Or,

$$AC = AJ + JC$$

donc

$$JC = AI.$$

2 D'après la propriété 49 du cours du chapitre précédent,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (AC^2 - 6^2 - 5^2) \\ &= \frac{1}{2} (AC^2 - 61). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AD} &= AB \times AD \times \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) \\ &= 6 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 15.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(AC^2 - 61) &= 15 \iff AC^2 - 61 = 30 \\ &\iff AC^2 = 91 \\ &\iff \boxed{AC = \sqrt{91}}\end{aligned}$$

3 On sait que $AC = 2AI + IJ$ d'après la question **1**, donc :

$$IJ = AC - 2AI.$$

Or, AID est un triangle rectangle en I donc :

$$\cos(\vec{AI}, \vec{AD}) = \frac{AI}{AD}$$

soit :

$$\boxed{AI = AD \times \cos(\vec{AI}, \vec{AD})}$$

4 D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ACD,

$$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD \times \cos(\vec{AI}, \vec{AD})$$

soit :

$$\boxed{\cos(\vec{AI}, \vec{AD}) = \frac{36 - 25 - 91}{-2 \times 5 \times \sqrt{91}} = \frac{8\sqrt{91}}{91}}$$

5 On en déduit alors :

$$AI = 5 \times \frac{8\sqrt{91}}{91} = \frac{40\sqrt{91}}{91}.$$

Donc :

$$IJ = \sqrt{91} - 2 \times \frac{40\sqrt{91}}{91}$$

soit :

$$\boxed{IJ = \frac{11\sqrt{91}}{91}}$$

Corrigé de l'exercice 7.2 page 327

1 La formule d'Al-Kashi nous permet d'écrire :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{BCA}$$

soit :

$$81 = 16 + 49 - 56 \cos \widehat{BCA}.$$

On a alors :

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{81 - 16 - 49}{-56} = -\frac{2}{7},$$

d'où :

$$\widehat{BCA} \approx 107^\circ$$

2 La formule d'Al-Kashi nous permet d'écrire :

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

soit :

$$BC^2 = 8^2 + 5^2 - 80 \cos 20^\circ \approx 13,82.$$

Ainsi,

$$BC \approx 3,7$$

3 La formule d'Al-Kashi nous permet d'écrire :

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \times CB \times CA \times \cos \widehat{BCA}$$

soit :

$$196 = CA^2 + 49 - 14 \cos(45^\circ) CA. \quad (E)$$

Posons $CA = x$. L'équation (E) devient alors :

$$x^2 - 7\sqrt{2}x - 147 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (7\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-147) = 686.$$

Les deux solutions sont donc :

$$x_1 = \frac{7\sqrt{2} - \sqrt{686}}{2} < 0 \text{ donc peu intéressant pour nous}$$

et

$$x_2 = \frac{7\sqrt{2} + \sqrt{686}}{2} = \frac{7(\sqrt{2} + \sqrt{14})}{2} \approx 18,05.$$

Ainsi,

$$AC \approx 18,05$$

Corrigé de l'exercice 7.3 page 327

1 Le théorème de la médiane nous dit que :

$$MA^2 + MB^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2MI^2$$

où I est le milieu de [AB]. Ainsi,

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 100 &\iff \frac{1}{2}AB^2 + 2MI^2 = 100 \\ &\iff MI^2 = 25 \\ &\iff MI = 5. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 100$ est le cercle de centre I et de rayon 5.

2 D'après la propriété 55 du cours,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

où G est le centre de gravité de ABC.

Donc, nous recherchons l'ensemble des points M du plan tels que :

$$3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 100,$$

soit :

$$MG = \sqrt{\frac{100 - GA^2 - GB^2 - GC^2}{3}}.$$

Nous savons de surcroît que G est aux deux tiers des médianes en partant des sommets :

$$GA = \frac{2AA'}{3}, \quad GB = \frac{2BB'}{3}, \quad GC = \frac{2CC'}{3},$$

où A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

Le théorème de la médiane nous dit que :

$$\begin{cases} CA^2 + CB^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2CC'^2 \\ AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AA'^2 \\ BA^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AC^2 + 2BB'^2 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 16 + 100 = \frac{49}{2} + 2CC'^2 \\ 49 + 16 = 50 + 2AA'^2 \\ 49 + 100 = 8 + 2BB'^2 \end{cases}$$

et donc :

$$AA' = \frac{\sqrt{30}}{2}, \quad BB' = \frac{\sqrt{282}}{2}, \quad CC' = \frac{\sqrt{183}}{2}.$$

On en déduit alors que :

$$GA = \frac{2}{3} \times AA' = \frac{\sqrt{30}}{3}, \quad GB = \frac{\sqrt{282}}{3}, \quad GC = \frac{\sqrt{183}}{3}.$$

Ainsi,

$$MG = \sqrt{\frac{100 - GA^2 - GB^2 - GC^2}{3}} = \sqrt{\frac{100 - \frac{10}{3} - \frac{94}{3} - \frac{61}{3}}{3}} = \sqrt{15}.$$

Ainsi, l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 100$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{15}$.

Corrigé de l'exercice 7.4 page 328

- 1** Dans le triangle AHB, rectangle en H, on a : $\sin \hat{A} = \frac{h}{c}$, donc $h = c \times \sin \hat{A}$.

L'aire de ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times h \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}}.$$

- 2** La formule d'Al-Kashi donne :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

soit :

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \hat{A}$$

ou encore :

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\cos^2 \hat{A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2 c^2}.$$

Or, $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$, donc $\cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A}$, ce qui donne :

$$1 - \sin^2 \hat{A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2 c^2}$$

soit :

$$\boxed{\sin^2 \hat{A} = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2 c^2}}.$$

- 3** Développons :

$$\begin{aligned} & \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2} \\ &= \frac{4 \frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right)}{b^2 c^2} \\ &= \frac{2(a+b+c) \left(\frac{b+c-a}{2} \right) \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \left(\frac{a+b-c}{2} \right)}{b^2 c^2} \\ &= \frac{(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab+bc+c^2-ac)(a^2+ab-ac-ab-b^2+bc+ac+bc-c^2)}{4b^2 c^2} \\ &= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)}{4b^2 c^2} \\ &= \frac{[2bc+(b^2+c^2-a^2)][2bc-(b^2+c^2-a^2)]}{4b^2 c^2} \\ &= \frac{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2 c^2} \\ &= 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2 c^2} \\ &= \sin^2 \hat{A}. \end{aligned}$$

4 De la question 1, on déduit que :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 \hat{A}.$$

En remplaçant alors $\sin^2 \hat{A}$ par l'expression trouvée à la question 3, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \frac{1}{4} b^2 c^2 \times \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2} \\ &= p(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

\mathcal{A} étant un nombre positif, en prenant la racine carrée des deux membres de cette dernière égalité, on obtient :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

5 $p = \frac{7+9+12}{2} = 14$ donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} \\ &= \sqrt{14 \times 7 \times 5 \times 2} \\ &= \sqrt{980} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 14\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

Corrigé de l'exercice 7.5 page 328

- 1 • Dans le cas 1, BOC est isocèle en O. considérons alors H le pied de la hauteur issue de O ; H est le milieu de [BC] et HOC est un triangle rectangle en H donc :

$$\sin \widehat{HOC} = \frac{HC}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{2r}.$$

Or, \widehat{BAC} et \widehat{BOC} interceptent le même arc de cercle \widehat{BC} donc $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$, donc $\widehat{HOC} = \hat{A}$.

Ainsi,

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{2r} \quad \text{soit} \quad \frac{a}{2} = r \sin \hat{A}.$$

- Dans le cas 2, $\widehat{BAC} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{BOC}$, donc $\frac{1}{2}\widehat{BOC} = \pi - \widehat{BAC}$.
Donc, dans le triangle HOC rectangle en H,

$$\sin(\pi - \widehat{BAC}) = \frac{a}{2r} = \sin \hat{A}.$$

- 2 De l'égalité précédente, on déduit :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2r.$$

Un raisonnement analogue à celui tenu dans la question 1 nous permettrait de démontrer que :

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = 2r \quad \text{et} \quad \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r$$

d'où :

$$\boxed{\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r.}$$

3 L'aire du triangle ABC est (voir exercice 7.4) :

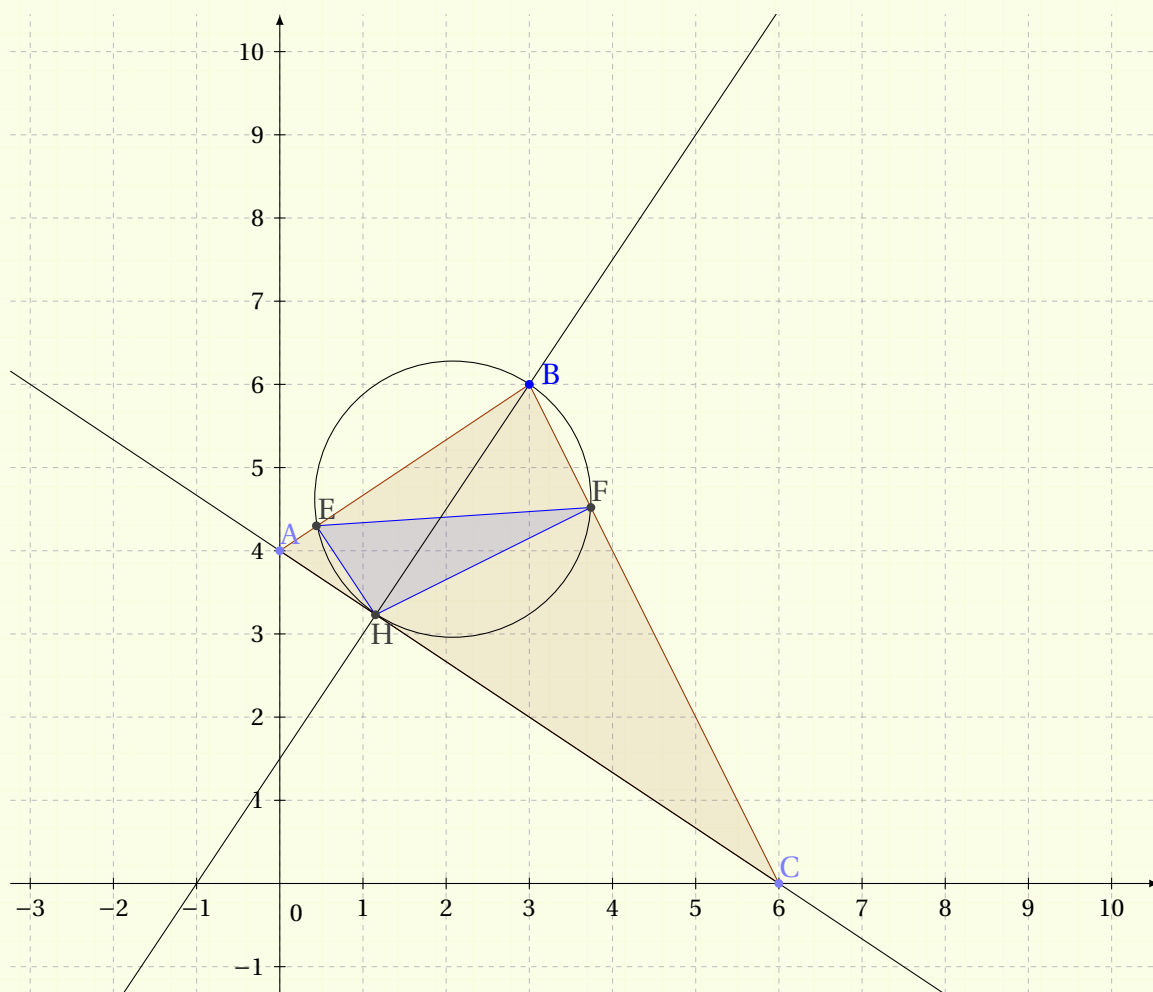
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$$

soit, d'après la relation trouvée dans la question 1,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \times \frac{a}{2r} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A} = \frac{abc}{4r}.}$$

Corrigé de l'exercice 7.6 page 329

Avant tout, faisons une figure.



$$\begin{aligned} 1 \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 &\iff \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_H - 3 \\ y_H - 6 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 6(x_H - 3) - 4(y_H - 6) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 &\iff 6x_H - 4y_H + 6 = 0 \\ &\iff 3x_H - 2y_H + 3 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

De plus, on sait que $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$, donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} &\iff -4x_H - 6(y_H - 4) = 0 \\ &\iff -4x_H - 6y_H + 24 = 0 \\ &\iff 2x_H + 3y_H - 12 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \begin{cases} 3x_H - 2y_H + 3 = 0 & (1) \\ 2x_H + 3y_H - 12 = 0 & (2) \end{cases} &\iff \begin{cases} 6x_H - 4y_H + 6 = 0 & 2 \times (1) \rightarrow L_1 \\ 6x_H + 9y_H - 36 = 0 & 3 \times (2) \rightarrow L_2 \end{cases} \\ &\implies 13y_H - 42 = 0 \quad L_2 - L_1 \\ &\implies y_H = \frac{42}{13} \\ &\implies 2x_H = 12 - 3 \times \frac{42}{13} \quad \text{d'après (2)} \\ &\implies x_H = 6 - \frac{63}{13} = \frac{15}{13} \end{aligned}$$

Ainsi, $H\left(\frac{15}{13}; \frac{42}{13}\right)$.

$$\begin{aligned} 2 \quad M(x; y) \in \mathcal{C} &\iff \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 3 - x \\ 6 - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{15}{13} - x \\ \frac{42}{13} - y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (3 - x) \left(\frac{15}{13} - x \right) + (6 - y) \left(\frac{42}{13} - y \right) = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de \mathcal{C} est donc $x^2 + y^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} = 0$.

- 3 • Déterminons d'abord les coordonnées $(x; y)$ du point E, intersection de \mathcal{C} et $[AB[$.

$E(x; y) \in [AB[\iff \overrightarrow{AE}$ et \overrightarrow{AB} sont colinéaires

$$\begin{aligned} &\iff \begin{vmatrix} x & 3 \\ y - 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 2x - 3y + 12 = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{2}y - 6 \end{aligned}$$

De plus, $E \in \mathcal{C}$ donc :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}y - 6\right)^2 + y^2 - \frac{54}{13}\left(\frac{3}{2}y - 6\right) - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow 169y^2 - 1740y + 4356 &= 0 \\ \Leftrightarrow y = \frac{726}{169} \quad \text{ou} \quad y = 6 \end{aligned}$$

Or, $E \neq B$ donc $y = \frac{726}{169}$ et donc $x = \frac{3}{2} \times \frac{726}{169} - 6 = \frac{75}{169}$.

Ainsi, $E\left(\frac{75}{169}; \frac{726}{169}\right)$.

- Déterminons ensuite les coordonnées $(x; y)$ du point F, intersection de \mathcal{C} et $]BC]$.
 $F(x; y) \in]BC] \Leftrightarrow \overrightarrow{BF}$ et \overrightarrow{BC} sont colinéaires

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-6 & -6 \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow -6(x-3) - 3(y-6) &= 0 \\ \Leftrightarrow -6x - 3y + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 12 - 2x \end{aligned}$$

De plus, $F \in \mathcal{C}$ donc :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (12 - 2x)^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}(12 - 2x) + \frac{297}{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow 65x^2 - 438x + 729 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{243}{65} \end{aligned}$$

Or, $F \neq B$ donc $x = \frac{243}{65}$, et donc $y = 12 - 2 \times \frac{243}{65} = \frac{294}{65}$.

Ainsi, $F\left(\frac{243}{65}; \frac{294}{65}\right)$.

- Regardons alors si (HE) et (HF) sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HF} &= \left(\frac{75}{169} - \frac{15}{13}\right) \cdot \left(\frac{243}{65} - \frac{15}{13}\right) \\ &= \left(-\frac{120}{169}\right) \cdot \left(\frac{168}{65}\right) \\ &= -\frac{120}{169} \times \frac{168}{65} + \frac{180}{169} \times \frac{84}{65} \\ &= -\frac{1008}{2197} \\ \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HF} &\neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le triangle EHF n'est pas rectangle en F

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{HE} \cdot \vec{HF} &= \|\vec{HE}\| \times \|\vec{HF}\| \times \cos(\vec{HE}, \vec{HF}) \\ -\frac{1008}{2197} &= \sqrt{\left(-\frac{120}{169}\right)^2 + \left(\frac{180}{169}\right)^2} \times \sqrt{\left(\frac{168}{65}\right)^2 + \left(\frac{84}{65}\right)^2} \times \cos(\vec{HE}, \vec{HF}) \\ \cos(\vec{HE}, \vec{HF}) &= \frac{-\frac{1008}{2197}}{\sqrt{\left(-\frac{120}{169}\right)^2 + \left(\frac{180}{169}\right)^2} \times \sqrt{\left(\frac{168}{65}\right)^2 + \left(\frac{84}{65}\right)^2}} \\ \cos(\vec{HE}, \vec{HF}) &\approx 0,124 \\ (\vec{HE}, \vec{HF}) &\approx 97^\circ \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.7 page 329

- 1** Le coefficient directeur de (d) est le nombre $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ car (d) forme un angle de 30° avec l'axe des abscisses. De plus, elle passe par l'origine du repère donc c'est une droite représentant une fonction linéaire.

Ainsi, une équation de (d) est : $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

- 2** L'équation du \mathcal{C}' est de la forme $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$ où $(a; b)$ sont les coordonnées de son centre et r son rayon.

Ainsi, \mathcal{C}' a pour équation : $(x-18)^2 + y^2 = 196$

- 3** Notons $(x; y)$ les coordonnées d'un point d'intersection de (d) avec \mathcal{C}' ; alors, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

et $(x-18)^2 + y^2 = 196$, donc $(x-18)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2 = 196$, soit $\frac{4}{3}x^2 - 36x + 128 = 0$, ou encore, en multipliant par $\frac{3}{4}$: $x^2 - 27x + 96 = 0$.

Le discriminant du polynôme $x^2 - 27x + 96$ est $\Delta = (-27)^2 - 4 \times 1 \times 96 = 345$ donc ses deux racines sont :

$$x_1 = \frac{27 - \sqrt{345}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{27 + \sqrt{345}}{2}.$$

L'abscisse de J est donc $\frac{27 + \sqrt{345}}{2}$ (le point le plus éloigné de O). Son ordonnée est donc $\frac{27 + \sqrt{345}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3} + \sqrt{1035}}{6}$.

Ainsi, $J\left(\frac{27 + \sqrt{345}}{2}; \frac{27\sqrt{3} + \sqrt{1035}}{6}\right)$

- 4** $\vec{EJ} \left(\frac{19 + \sqrt{345}}{2\sqrt{3} + \sqrt{1035}} \right)$ et $\vec{EF} \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ainsi, } \vec{EF} \cdot \vec{EJ} = xx' + yy' = \frac{19 + \sqrt{345}}{2} \times 28 = 14(19 + \sqrt{345}).$$

Or, $\vec{EF} \cdot \vec{EJ} = \|\vec{EF}\| \times \|\vec{EJ}\| \times \cos(\vec{EF}, \vec{EJ})$, donc :

$$\cos(\vec{EF}, \vec{EJ}) = \frac{14(19 + \sqrt{345})}{28 \times \sqrt{\left(\frac{19 + \sqrt{345}}{2}\right)^2 + \left(\frac{27\sqrt{3} + \sqrt{1035}}{6}\right)^2}}$$

On en déduit alors que $\widehat{JEF} \approx 35^\circ$.

Corrigé de l'exercice 7.8 page 329

1 \mathcal{C} a pour centre le point $A(-1; 2)$ et pour rayon 2.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \\ &\iff x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de \mathcal{C} est donc $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

2 \mathcal{C} est le cercle de diamètre $[AB]$, où $A(2; -1)$ et $B(-2; 3)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff (x-2)(x+2) + (y+1)(y-3) = 0 \\ &\iff x^2 - 4 + y^2 - 3y + y - 3 = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de \mathcal{C} est donc $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.

3 \mathcal{C} est le cercle de centre $A(4; 3)$ tangent au cercle \mathcal{C}' d'équation $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

\mathcal{C}' a pour centre le point $B(1; 2)$ d'après son équation.

\mathcal{C} et \mathcal{C}' sont tangents donc le rayon de \mathcal{C} est $r = AB - 1$ (« 1 » étant le rayon de \mathcal{C}').

$$AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad \text{donc} \quad r = \sqrt{10} - 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff (x-4)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{10} - 1)^2 \\ &\iff x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 10 - 2\sqrt{10} + 1 \\ &\iff x^2 + y^2 - 8x - 6y + 14 + 2\sqrt{10} = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de \mathcal{C} est donc $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 14 + 2\sqrt{10} = 0$.

Corrigé de l'exercice 7.9 page 329

1 $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0.$

On commence par réunir les x et les y :

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 10y) = -18.$$

Ensuite, on fait apparaître les carrés à l'aide de l'égalité $x^2 \pm 2ax = (x \pm a)^2 - a^2$:

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 5)^2 - 25 = -18$$

soit : $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16 = 4^2.$

L'équation est donc celle du cercle de centre $\Omega(3; -5)$ et de rayon $r = 4$.

2 $x^2 + y^2 - 18x - 14y + 105 = 0 \iff (x^2 - 18x) + (y^2 - 14y) = -105$

$$\iff (x - 9)^2 - 81 + (y - 7)^2 - 49 = -105$$

$$\iff (x - 9)^2 + (y - 7)^2 = 5^2.$$

L'équation est donc celle du cercle de centre $\Omega(9; 7)$ et de rayon $r = 5$.

3 $3x^2 + 3y^2 - 6x - 3y - 33 = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x - y - 11 = 0$ (on divise tout par 3)

$$\iff (x - 1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 11$$

$$\iff (x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

L'équation est donc celle du cercle de centre $\Omega\left(1; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{7}{2}$.

4 $9x^2 + 9y^2 + 12x + 6y - 20 = 0 \iff x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y = \frac{20}{9}$ (on divise tout par 9)

$$\iff \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{20}{9}$$

$$\iff \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

L'équation est donc celle du cercle de centre $\Omega\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $r = \frac{5}{3}$.

Corrigé de l'exercice 7.10 page 330

1 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \iff (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y) = 0$

$$\iff (x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2.$$

Ainsi, \mathcal{C} a pour rayon $r = 2$ et pour centre $A(3; 2)$.

2 En faisant une figure, on voit que $C(9; 2)$, donc une équation de \mathcal{C}' est :

$$(x - 9)^2 + (y - 2)^2 = 4^2.$$

Une équation de \mathcal{C}' est alors $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 69 = 0$.

3 \mathcal{C}_1 est tangent à \mathcal{C} ; notons T_1 leur point d'intersection.

Alors, $AD = AT_1 + DT_1 = 2 + 3 \times 2 = 8$.

De même, $CD = 4 + 6 = 10$.

4 Notons $D(x; y)$.

- $AD^2 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$ et $AD^2 = 8^2 = 64$ donc $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 64$, soit $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 51$ (1).
- $CD^2 = (x - 9)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 18x - 4y + 85$ et $CD^2 = 10^2 = 100$ donc $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 85 = 100$, soit $x^2 + y^2 - 18x - 4y = 15$ (2).

Ainsi, $(1) - (2) \iff 12x = 36 \iff x = 3$.

Or, $AD = 8$ donc $y = 8 + y_A = 8 + 2 = 10$.

Ainsi, $D(3; 10)$.

5 $M \in \mathcal{C}_1 \iff (x - 3)^2 + (y - 10)^2 = 6^2$
 $\iff x^2 + y^2 - 6x - 20y + 109 = 36$
 $\iff x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0$

Une équation cartésienne de \mathcal{C}_1 est alors $x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0$.

6

- \mathcal{C}' : $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 69 = 0$
- \mathcal{C}_1 : $x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0$

$$\begin{aligned} E(x; y) \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' &\iff x^2 + y^2 - 18x - 4y + 69 = x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0 \\ &\iff 12x - 16y + 4 = 0 \\ &\iff 3x - 4y + 1 = 0 \\ &\iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

En remplaçant y dans l'équation de \mathcal{C}' (par exemple), on obtient :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 18x - 4y + 69 = 0 &\iff x^2 + \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right)^2 - 18x - 4\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right) + 69 = 0 \\ &\iff x^2 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{16} - 18x - 3x - 1 + 69 = 0 \\ &\iff \frac{25}{16}x^2 - \frac{165}{8}x + 68 = 0 \\ &\iff 25x^2 - 330x + 1089 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-330)^2 - 4 \times 25 \times 1089 = 0.$$

donc l'équation admet une unique solution :

$$x = \frac{330}{50} = \frac{33}{5}.$$

$$\text{Ainsi, } y = \frac{3}{4} \times \frac{33}{5} + \frac{1}{4} = \frac{26}{5}.$$

On a alors $E\left(\frac{33}{5}; \frac{26}{5}\right)$.

- \mathcal{C} : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ (E_1)
- \mathcal{C}_1 : $x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0$ (E_2)

En faisant (E_1) - (E_2), on obtient :

$$\begin{aligned} F(x; y) \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' &\iff 16y = 64 \\ &\iff y = 4. \end{aligned}$$

On obtient alors $F(2; 4)$.

$\overrightarrow{AE} \left(\frac{33}{5} - 3, \frac{26}{5} - 2 \right)$, soit $\overrightarrow{AE} \left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5} \right)$. Donc une équation de (AF) est de la forme :

$$\frac{16}{5}x - \frac{18}{5}y + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} A \in (AE) &\iff 16x_A - 18y_A + c' = 0 \\ &\iff 48 - 36 + c' = 0 \\ &\iff c' = -12. \end{aligned}$$

Une équation de (AE) est alors $8x - 9y - 6 = 0$.

$\overrightarrow{CF} \left(-6, 2 \right)$ donc une équation de (CF) est de la forme :

$$2x + 6y + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$C \in (CF)$ donc $2 \times 9 + 6 \times 2 + c = 0$, soit $c = -30$.

Une équation de (CF) est alors $x + 3y - 15 = 0$.

$\overrightarrow{DB} \left(2, -8 \right)$ donc une équation de (DB) est de la forme :

$$-8x - 2y + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$B \in (DB)$ donc $-8 \times 5 - 2 \times 2 + c = 0$, soit $c = 44$.

Une équation de (DB) est alors $4x + y - 22 = 0$.

Le point d'intersection $\Omega(x; y)$ de (AE) et (CF) est tel que :

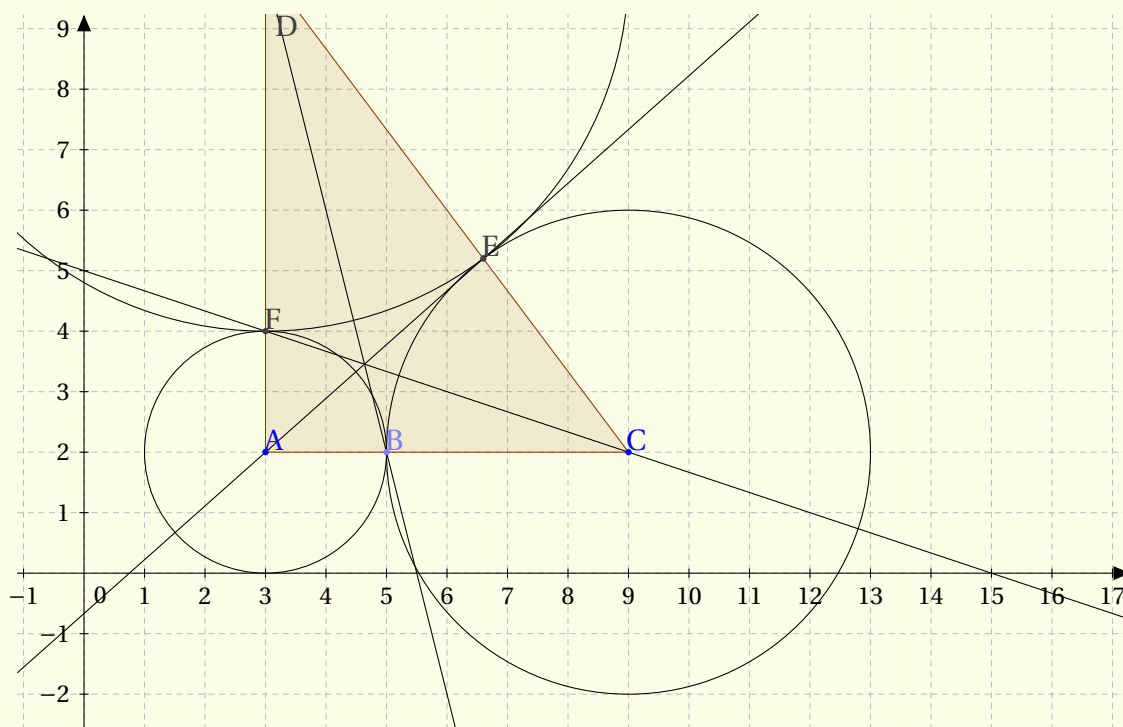
$$\begin{cases} 8x - 9y - 6 = 0 & (L_1) \\ x + 3y - 15 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

En faisant $8(L_2) - (L_1)$, on obtient $33y - 116 = 0$, soit $y = \frac{116}{33}$, et donc $x = 15 - 3y = -\frac{49}{11}$.

On remplace ces valeurs dans l'équation de (DB) :

$$4x + y - 22 = 4 \times \frac{49}{11} + \frac{116}{33} - 22 = -\frac{2}{3} \neq 0.$$

Donc (AE), (CF) et (DB) ne sont pas concourantes (malgré ce que l'on aurait pu penser à la vue de la figure).



Corrigé de l'exercice 7.11 page 330

- 1** A(-1;2), B(4;-3) et \mathcal{D} est la médiatrice de [AB].

On a donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le milieu de [AB] est I($\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{2}$).

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 5\left(x - \frac{3}{2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff 5x - 5y - 10 = 0 \\ &\iff x - y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de \mathcal{D} est donc $x - y + 2 = 0$.

- 2** \mathcal{D} est la droite passant par A(1;3) et perpendiculaire à la droite \mathcal{D}' d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.

Un vecteur directeur de \mathcal{D} est un vecteur normal de \mathcal{D}' , soit par exemple $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ainsi, une équation de \mathcal{D} est de la forme :

$$-5x - 2y + c = 0 \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$A(1;3) \in \mathcal{D} \iff -5 \times 1 - 2 \times 3 + c = 0 \iff c = 11.$$

Une équation cartésienne de \mathcal{D} est donc $5x + 2y - 11 = 0$.

- 3** \mathcal{D} est la tangente au cercle de centre O et de rayon 3 passant par le point d'abscisse 2. Dans ce cas, \mathcal{D} est perpendiculaire à (OA), où A est le point du cercle d'abscisse 2. Son ordonnée est $y = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ donc $A(2; \sqrt{5})$.

Ainsi, (OM) a pour équation $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, ou encore $\frac{\sqrt{5}}{2}x - y = 0$, dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

\mathcal{D} a pour vecteur directeur \vec{n} car elle est perpendiculaire à (OM) donc une équation cartésienne de \mathcal{D} est :

$$-x - \frac{\sqrt{5}}{2}y + c = 0 \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$A \in \mathcal{D} \iff -2 - \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} + c = 0 \iff c = \frac{9}{2}.$$

Une équation cartésienne de \mathcal{D} est donc $2x + \sqrt{5}y - 9 = 0$.

- 4** \mathcal{D} a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passe par le point $A(-1;2)$.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 2(x+1) - 1(y-2) = 0 \\ &\iff 2x - y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de \mathcal{D} est donc $2x - y - 4 = 0$.

Corrigé de l'exercice 7.12 page 330

Je rappelle que l'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection de ses hauteurs. Il faut donc déterminer les équations cartésiennes de deux hauteurs.

- La hauteur issue du sommet C est perpendiculaire à (AB). Si $M(x; y)$ est un point de cette hauteur, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 &\iff \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-9 \\ y-4 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 6(x-9) - 5(y-4) = 0 \\ &\iff 6x - 5y - 34 = 0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la hauteur issue de C est donc $6x - 5y - 34 = 0$.

- La hauteur issue du sommet B est perpendiculaire à (AC). Si $M(x; y)$ est un point de cette hauteur, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 &\iff \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 10(x-5) + (y+2) = 0 \\ &\iff 10x + y - 48 = 0.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la hauteur issue de C est donc $10x + y - 48 = 0$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{aligned}\begin{cases} 6x - 5y = 34 & L_1 \\ 10x + y = 48 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 6x - 5y = 34 & L_1 \\ 50x + 5y = 240 & 5L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 6x - 5y = 34 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 56x & = 274 & L_2 \longleftarrow L_1 + L_2 \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que $x = \frac{137}{28}$ et en remplaçant cette valeur de x dans l'équation $10x + y = 48$, on obtient :

$$y = 48 - 10 \times \frac{137}{28} = -\frac{13}{14}.$$

Ainsi, l'orthocentre de ABC a pour coordonnées $\left(\frac{137}{28}; -\frac{13}{14}\right)$.

Corrigé de l'exercice 7.13 page 330

- 1** A(-1;2) et (d) a pour équation cartésienne $-2x + 3y - 5 = 0$.

Notons H(a; b) le projeté orthogonal de A sur (d), et \vec{u} un vecteur directeur de (d).
Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 &\iff \begin{pmatrix} a+1 \\ b-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -3(a+1) - 2(b-2) = 0 \\ &\iff -3a - 2b + 1 = 0.\end{aligned}$$

De plus, H \in (d) donc ses coordonnées vérifient son équation :

$$-2a + 3b - 5 = 0.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\begin{cases} -3a - 2b = -1 \\ -2a + 3b = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} &\iff \begin{cases} 6a + 4b = 2 \\ -6a + 9b = 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow -2L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} 6a + 4b = 2 \\ 13b = 17 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{matrix}\end{aligned}$$

On en déduit que $b = \frac{17}{13}$ et, en remplaçant b par cette valeur dans l'équation $-2a + 3b = 5$, on obtient $a = -\frac{7}{13}$.

Ainsi, $H\left(\frac{17}{13}; -\frac{7}{13}\right)$.

- 2** A(1;6) et (d) a pour équation cartésienne $3x - 5y - 7 = 0$.

Notons H(a; b) le projeté orthogonal de A sur (d), et \vec{u} un vecteur directeur de (d).
Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 &\iff \begin{pmatrix} a-1 \\ b-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 5(a-1) + 3(b-6) = 0 \\ &\iff 5a + 3b - 23 = 0.\end{aligned}$$

De plus, H \in (d) donc ses coordonnées vérifient son équation :

$$3a - 5b - 7 = 0.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\begin{cases} 5a + 3b = 23 \\ 3a - 5b = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} &\iff \begin{cases} 15a + 9b = 69 \\ 15a - 25b = 35 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} 15a + 9b = 69 \\ 34b = 34 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{matrix}\end{aligned}$$

On en déduit que $b = 1$ et, en remplaçant b par cette valeur dans l'équation $3a - 5b = 7$, on obtient $a = 4$.

Ainsi, $H(4; 1)$.

3 A(-6; -7) et (d) a pour équation cartésienne $-5x - 8y + 3 = 0$.

Notons H(a; b) le projeté orthogonal de A sur (d), et \vec{u} un vecteur directeur de (d).
Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 &\iff \begin{pmatrix} a+6 \\ b+7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 8(a+6) - 5(b+7) = 0 \\ &\iff 8a - 5b + 13 = 0.\end{aligned}$$

De plus, H ∈ (d) donc ses coordonnées vérifient son équation :

$$-5a - 8b + 3 = 0.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\begin{cases} 8a - 5b = -13 & L_1 \\ -5a - 8b = -3 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 40a - 25b = -65 & L_1 \leftarrow 5L_1 \\ -40a - 64b = -24 & L_2 \leftarrow 8L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 40a - 25b = -65 & L_1 \leftarrow L_1 \\ -89b = -89 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que $b = 1$ et, en remplaçant b par cette valeur dans l'équation $-5a - 8b = -3$, on obtient $a = -1$.

Ainsi, H(-1; 1).

4 A(7; 1) et (d) a pour équation cartésienne $3x + 5y + 8 = 0$.

Notons H(a; b) le projeté orthogonal de A sur (d), et \vec{u} un vecteur directeur de (d).
Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 &\iff \begin{pmatrix} a-7 \\ b-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -5(a-7) + 3(b-1) = 0 \\ &\iff -5a + 3b + 32 = 0.\end{aligned}$$

De plus, H ∈ (d) donc ses coordonnées vérifient son équation :

$$3a + 5b + 8 = 0.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\begin{cases} -5a + 3b = -32 & L_1 \\ 3a + 5b = -8 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} -15a + 9b = -96 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ 15a + 25b = -40 & L_2 \leftarrow 5L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -15a + 9b = -96 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 34b = -136 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que $b = -4$ et, en remplaçant b par cette valeur dans l'équation $3a + 5b + 8 = 0$, on obtient $a = 4$.

Ainsi, H(4; -4).

Corrigé de l'exercice 7.14 page 331

1 $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ et $(d) : x + y - 1 = 0$.

Si $M(a; b) \in (d)$ alors $a + b - 1 = 0$, donc $b = 1 - a$.

Si $M(a; b) \in \mathcal{C}$ alors $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 4$, c'est-à-dire :

$$(a-1)^2 + (1-a-2)^2 = 4$$

soit, en développant :

$$a^2 = 1.$$

On en déduit alors que $a = 1$ ou $a = -1$.

Si $a = 1$ alors $b = 1 - a = 0$.

Si $a = -1$ alors $b = 1 - a = 2$.

On en déduit que les deux points d'intersection ont pour coordonnées $(-1; 2)$ et $(1; 0)$.

2 $\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ et $(d) : y = -1$.

On sait d'ores et déjà que l'ordonnée des points d'intersection est égale à -1 car ils appartiennent à (d) . Remplaçons alors y par -1 dans l'équation du cercle. On obtient :

$$(x-3)^2 = 8$$

soit :

$$x-3 = \sqrt{8} \quad \text{ou} \quad x-3 = -\sqrt{8}$$

et donc :

$$x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, les deux points d'intersection ont pour coordonnées $(3 - 2\sqrt{2}; -1)$ et $(3 + 2\sqrt{2}; -1)$.

3 $\mathcal{C} : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$ et $(d) : x = -4$.

On sait d'ores et déjà que l'abscisse des points d'intersection est -4 car ils sont sur (d) . Remplaçons alors x par -4 dans l'équation du cercle. On obtient :

$$(y-2)^2 = 8$$

soit :

$$y-2 = \sqrt{8} \quad \text{ou} \quad y-2 = -\sqrt{8}$$

et donc :

$$y = 2 + 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad y = 2 - 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, les deux points d'intersection ont pour coordonnées $(-4; 2 - 2\sqrt{2})$ et $(-4; 2 + 2\sqrt{2})$.

Corrigé de l'exercice 7.15 page 331

1 Soit \mathcal{C} un cercle quelconque. Posons alors $[EF]$ et $[IJ]$ deux cordes quelconques de \mathcal{C} , c'est-à-dire que les points E, F, I et J sont sur \mathcal{C} (on dit qu'ils sont *cocycliques*).

Posons O le centre de \mathcal{C} ; alors, les triangles OEF et OIJ sont isocèles en O , ce qui signifie que, dans le triangle OEF , la médiane issue de O est aussi la médiatrice de $[EF]$.

De même, dans le triangle OIJ, la médiane issue de O est la médiatrice de [IJ].
Par conséquent, les médiatrices de [EF] et [IJ] passent par O.

Conclusion : les médiatrices de deux cordes quelconques d'un cercle passent toujours par le centre de ce cercle.

2 On souhaite que le cercle passe par A, B et C donc [AB] et [BC] sont deux cordes du cercle.

Soit I le milieu de [AB] ; ainsi,

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Cherchons une équation cartésienne de la médiatrice de [AB] ; pour cela, posons $M(x; y)$ un point de cette médiatrice. Alors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff x - \frac{3}{2} - 3y - \frac{3}{2} = 0 \\ &\iff x - 3y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la médiatrice de [AB] est donc $x - 3y - 3 = 0$.

Soit J le milieu de [BC]. Alors,

$$x_J = -\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad y_J = \frac{3}{2}.$$

Soit $M(x; y)$ un point de la médiatrice de [BC]. Alors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -7x - \frac{35}{2} + y - \frac{3}{2} = 0 \\ &\iff 7x - y + 19 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la médiatrice de [BC] est donc $7x - y + 19 = 0$.

Pour trouver l'abscisse du point d'intersection des deux médiatrices, on doit résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 3y = 3 & L_1 \\ 7x - y = -19 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x - 3y = 3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 21x - 3y = -57 & L_2 \leftarrow 3L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 3y = 3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 20x = -60 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit alors que $x = -3$ et en remplaçant x par -3 dans L_1 , on trouve $y = -2$.

Ainsi, le centre Ω du cercle passant par A, B et C a pour coordonnées $(-3; -2)$.

De plus,

$$\begin{aligned}\Omega A^2 &= (x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 \\ &= (1+3)^2 + (1+2)^2 \\ &= 16+9 \\ &= 25.\end{aligned}$$

Or, ΩA est le rayon du cercle. Ainsi, une équation cartésienne du cercle passant par A, B et C est :

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$$

Corrigé de l'exercice 7.16 page 331

Le milieu I de [AH] a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_H}{2}; \frac{y_A + y_H}{2}\right) = \left(\frac{a+2}{2}; 2\right).$$

Posons $M(x; y)$ un point de la médiatrice de [AH]. Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{IM} &= 0 \iff \begin{pmatrix} a-2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{a+2}{2} \\ y-2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (a-2) \left(\frac{2x-a-2}{2} \right) - 4(y-2) = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}(a-2)(2x-a-2) - 4y + 8 = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}(2ax - a^2 - 2a - 4x + 2a + 4) - 4y + 8 = 0 \\ &\iff (a-2)x - \frac{1}{2}a^2 + 10 = 4y \\ &\iff y = \frac{1}{4}(a-2)x - \frac{1}{8}a^2 + \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

L'équation réduite de la médiatrice de [AH] est donc $y = \frac{1}{4}(a-2)x - \frac{1}{8}a^2 + \frac{5}{2}$.

M a pour abscisse a (car H est son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, donc les deux points ont la même abscisse). Ainsi, en remplaçant x par a dans l'équation réduite de la médiatrice de [AH], on trouve l'ordonnée de M en fonction de son abscisse a :

$$y = \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{5}{2}.$$

a représentant une abscisse, on peut remplacer cette lettre par x . On obtient ainsi l'équation de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $MA = MH$: c'est l'ensemble d'équation cartésienne $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Corrigé de l'exercice 7.17 page 331

Avant tout, remarquons que a et b ne peuvent pas être tous deux nuls. En effet, si $a = b = 0$ l'équation de la droite est réduite à $12 = 0$, ce qui ne correspond pas à une équation de droite. Faisons une disjonction de cas sur a et b :

- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation de la droite devient $ax + 12 = 0$, soit $x = -\frac{12}{a}$. En remplaçant x par cette valeur dans l'équation du cercle, on a :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{12}{a} + 2\right)^2 + (y - 4)^2 = 36 &\iff \frac{144}{a^2} - \frac{48}{a} + 4 + y^2 - 8y + 16 = 36 \\ &\iff y^2 - 8y - 20 + \frac{144}{a^2} - \frac{48}{a} = 0.\end{aligned}$$

S'il existe deux points d'intersection distincts alors cette dernière équation admet deux solutions distinctes, et donc son discriminant est strictement positif :

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\iff 64 - 4\left(-20 + \frac{144}{a^2} - \frac{48}{a}\right) > 0 \\ &\iff 64 + 20 - \frac{576}{a^2} + \frac{192}{a} > 0 \\ &\iff 84 - \frac{576}{a^2} + \frac{192}{a} > 0 \\ &\iff \frac{84a^2 - 576 + 192a}{a^2} > 0.\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $84a^2 + 192a - 576$ est :

$$\Delta' = 230\,400$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$a_1 = \frac{-192 - \sqrt{230\,400}}{168} = -4$$

et

$$a_2 = \frac{-192 + \sqrt{230\,400}}{168} = \frac{12}{7}.$$

Ainsi, les solutions de l'inéquation $84a^2 - 576 + 192a > 0$ sont dans l'ensemble $] -\infty; -4[\cup \left] \frac{12}{7}; +\infty \right[$.

1^{er} résultat : il existe deux points d'intersection distincts si $b = 0$ et $a \in] -\infty; -4[\cup \left] \frac{12}{7}; +\infty \right[$.

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation de la droite devient $by + 12 = 0$, soit $y = -\frac{12}{b}$. En remplaçant y par cette valeur dans l'équation du cercle, on a :

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 + \left(-\frac{12}{b} - 4\right)^2 = 36 &\iff x^2 + 4x + 4 + \frac{144}{b^2} + \frac{96}{b} + 16 = 36 \\ &\iff x^2 + 4x - 16 + \frac{144}{b^2} + \frac{96}{b} = 0.\end{aligned}$$

S'il existe deux points d'intersection distincts alors cette dernière équation admet deux solutions distinctes, et donc son discriminant est strictement positif :

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\iff 16 - 4 \left(-16 + \frac{144}{b^2} + \frac{96}{b} \right) > 0 \\ &\iff 80 - \frac{576}{b^2} - \frac{384}{b} > 0 \\ &\iff \frac{80b^2 - 576 - 384b}{b^2} > 0.\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $80b^2 - 384b - 576$ est :

$$\Delta' = 331\,776 = 576^2$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$b_1 = \frac{384 - 576}{160} = -\frac{6}{5}$$

et

$$b_2 = \frac{384 + 576}{160} = 6.$$

Ainsi, les solutions de l'inéquation $80b^2 - 576 - 384b > 0$ sont dans l'ensemble $\left] -\infty; -\frac{6}{5} \right[\cup]6; +\infty[$.

2^e résultat : il existe deux points d'intersection distincts si $a = 0$ et $b \in \left] -\infty; -\frac{6}{5} \right[\cup]6; +\infty[$.

- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation réduite de la droite est :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{12}{b}.$$

En remplaçant y dans l'équation du cercle, on obtient :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + \left(-\frac{a}{b}x - \frac{12}{b} - 4 \right)^2 &= 36 \iff (x+2)^2 + \left(\frac{a}{b}x + \frac{12}{b} + 4 \right)^2 = 36 \\ &\iff x^2 + 4x + 4 + \frac{a^2}{b^2}x^2 + \frac{2a}{b} \left(\frac{12}{b} + 4 \right) x + \left(\frac{12}{b} + 4 \right)^2 - 36 = 0 \\ &\iff \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) x^2 + \left(4 + \frac{24a}{b^2} + \frac{8a}{b} \right) x + 4 + \frac{144}{b^2} + \frac{96}{b} + 16 - 36 = 0 \\ &\iff \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) x^2 + \left(\frac{4b^2 + 24a + 8ab}{b^2} \right) x - 16 + \frac{144 + 96b}{b^2} = 0.\end{aligned}$$

S'il existe deux points d'intersection alors le discriminant de cette dernière équation est strictement positif :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{4b^2 + 24a + 8ab}{b^2} \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \left(\frac{144 + 96b}{b^2} - 16 \right) > 0 \\ &\iff \frac{128a^2 + 80b^2 + 192a - 384b + 64ab - 576}{b^2} > 0 \\ &\iff 8a^2 + 5b^2 + 12a + 4b + 4ab > 0.\end{aligned}$$

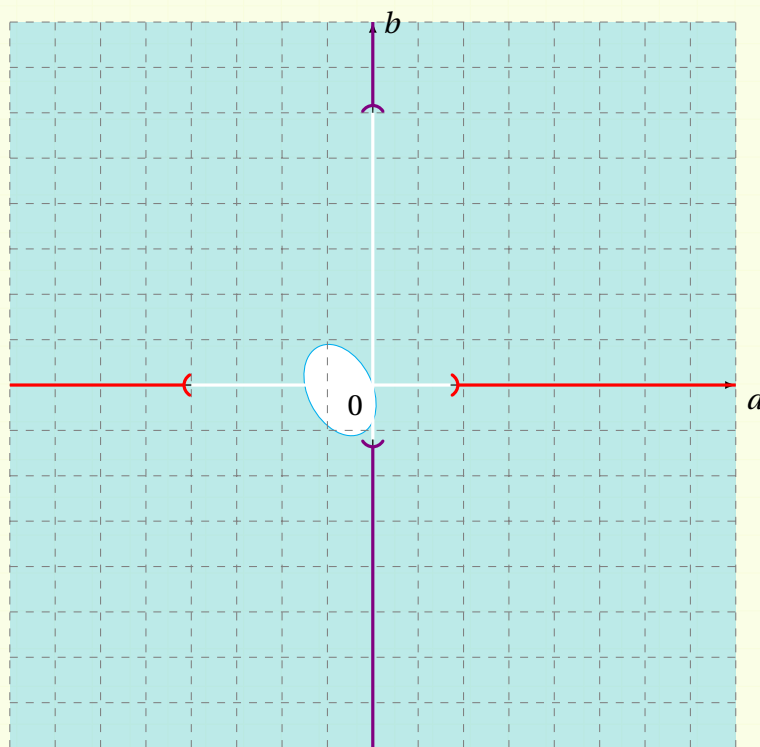
3^e résultat : il existe deux points d'intersection distincts si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $8a^2 + 5b^2 + 12a + 4b + 4ab > 0$.

On peut pousser notre curiosité au-delà de ces résultats en représentant géométriquement les ensembles solutions.

Un logiciel de géométrie (Geogebra par exemple) nous permet de visualiser l'ensemble des points de coordonnées $(a; b)$ tels que $8a^2 + 5b^2 + 12a + 4b + 4ab$: c'est ce que l'on appelle une *ellipse* (représentée en cyan sur la figure suivante).

L'ensemble des points tels que $8a^2 + 5b^2 + 12a + 4b + 4ab > 0$ est donc l'ensemble des points intérieurs ou extérieurs. Pour le savoir, on peut par exemple prendre le point de coordonnées $(-1; 0)$ (donc en prenant $a = -1$ et $b = 0$). Alors, $8a^2 + 5b^2 + 12a + 4b + 4ab = -4 < 0$ donc ce point n'appartient pas à l'ensemble souhaité. Ainsi, l'ensemble des points de coordonnées $(a; b)$ tels que $8a^2 + 5b^2 + 12a + 4b + 4ab > 0$ est le plan privé de l'ellipse (représenté en cyan page suivante).

L'ensemble rouge est l'ensemble des points du 1^{er} résultat et l'ensemble violet est celui du 2^e résultat.



Cela signifie que si on prend n'importe quel point de coordonnées $(a; b)$ en dehors des ensembles blancs, alors le cercle et la droite se coupent en deux points distincts.

Partie A

- 1 D'après le cours, $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) .

Considérons un point $M(x; y)$ sur (d') . Alors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 &\iff \begin{pmatrix} x-6 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -5(x-6) + 3(y-4) = 0 \\ &\iff -5x + 3y + 30 - 12 = 0 \\ &\iff -5x + 3y + 18 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de (d') est $-5x + 3y + 18 = 0$.

- 2 Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') , résolvons le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 5y - 2 = 0 & L_1 \\ -5x + 3y + 18 = 0 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 15x + 25y - 10 = 0 & L_1 \leftarrow 5L_1 \\ -15x + 9y + 54 = 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x + 5y - 2 = 0 & L_1 \\ 34y + 44 = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x + 5y - 2 = 0 \\ y = -\frac{44}{34} = -\frac{22}{17} \end{cases} \end{aligned}$$

De L_1 , on déduit :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} \left[2 - 5 \times \left(-\frac{22}{17} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{110}{17} \right) = \frac{48}{17}. \end{aligned}$$

Ainsi, $H \left(\frac{48}{17}; -\frac{22}{17} \right)$.

- 3 De la question précédente, on déduit :

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{48}{17} - 6 \right)^2 + \left(-\frac{22}{17} - 4 \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{648}{17}} \\ &= \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

$$AH = 18\sqrt{\frac{2}{17}}$$

Partie B

$$\begin{aligned}
 \text{1 } M(x; y) \in (d') &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \\
 &\iff \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0 \\
 &\iff -b(x - \alpha) + a(y - \beta) = 0 \\
 &\iff -bx + ay + b\alpha - a\beta = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de (d') est $-bx + ay + b\alpha - a\beta = 0$.

2 Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -bx + ay + b\alpha - a\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} abx + b^2y + bc = 0 & (L_1) \\ -abx + a^2y + a(b\alpha - a\beta) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (L_1) + (L_2) &\iff (a^2 + b^2)y + bc + a(b\alpha - a\beta) = 0 \\
 &\iff y = -\frac{bc + a(b\alpha - a\beta)}{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -bx + ay + b\alpha - a\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2x + aby + ac = 0 & (L_1) \\ b^2x - aby - b(b\alpha - a\beta) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (L_1) + (L_2) &\iff (a^2 + b^2)x + ac - b(b\alpha - a\beta) = 0 \\
 &\iff x = \frac{b(b\alpha - a\beta) - ac}{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\boxed{H\left(\frac{b(b\alpha - a\beta) - ac}{a^2 + b^2}; -\frac{bc + a(b\alpha - a\beta)}{a^2 + b^2}\right)}$.

3 Pour exprimer la distance du point A à la droite (d), on calcule AH :

$$\begin{aligned}
 AH &= \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{b(b\alpha - a\beta) - ac}{a^2 + b^2} - \alpha\right)^2 + \left(-\frac{bc + a(b\alpha - a\beta)}{a^2 + b^2} - \beta\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{b^2\alpha - ab\beta - ac - a^2\alpha - b^2\alpha}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{bc + ab\alpha - a^2\beta + a^2\beta + b^2\beta}{a^2 + b^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{(ab\beta + ac + a^2\alpha)^2 + (bc + ab\alpha + b^2\beta)^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{a^2b^2\beta^2 + a^2c^2}}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{\sqrt{a^2(b\beta + c + a\alpha)^2 + b^2(c + a\alpha + b\beta)^2}}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(a\alpha + b\beta + c)^2}}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} \times |a\alpha + b\beta + c| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a\alpha + b\beta + c| \\
 \boxed{AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.19 page 332

- 1**
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-3 \\ 7-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.
 - $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6-3 \\ 3-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$.
 - $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -6-2 \\ 3-7 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

- 2**
- $AB = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50}$.
 - $AC = \sqrt{(-9)^2 + 3^2} = \sqrt{90}$.
 - $BC = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{80}$.

Ainsi, aucun des côtés AB, AC et BC n'a la même mesure; par conséquent, le triangle ABC n'est ni isocèle ni équilatéral.

De plus, $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ donc il n'est pas rectangle.

- 3** $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ donc $I \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right)$.

De même, $J \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$.

4

- $(D) \perp (AB)$ et $I \in (D)$ par définition de la médiatrice.

Soit $M(x; y)$ un point de (D) . Alors;

$$\begin{aligned}\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0 &\iff \begin{pmatrix} x - \frac{5}{2} \\ y - \frac{7}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -1 \left(x - \frac{5}{2} \right) + 7 \left(y - \frac{7}{2} \right) = 0 \\ &\iff -x + 7y + \frac{5}{2} - \frac{49}{2} = 0 \\ &\iff -x + 7y - 22 = 0 \\ &\iff x - 7y + 22 = 0 \quad (\text{autre façon d'écrire la même équation})\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (D) est donc : $x - 7y + 22 = 0$.

- $(D') \perp (AC)$ et $J \in (D')$ par définition de la médiatrice.

Soit $M(x; y)$ un point de (D') . Alors;

$$\begin{aligned}\vec{JM} \cdot \vec{AC} = 0 &\iff \begin{pmatrix} x + \frac{3}{2} \\ y - \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -9 \left(x + \frac{3}{2} \right) + 3 \left(y - \frac{3}{2} \right) = 0 \\ &\iff -9x + 3y - \frac{27}{2} - \frac{9}{2} = 0 \\ &\iff -9x + 3y - 18 = 0 \\ &\iff 3x - y + 6 = 0 \quad (\text{en divisant tous les coefficients par } -3)\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (D') est donc : $3x - y + 6 = 0$.

5

Trouver les coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') revient à résoudre le système formé par les équations des deux droites : $\begin{cases} x - 7y + 22 = 0 & L_1 \\ 3x - y + 6 = 0 & L_2 \end{cases}$.

De l'équation L_2 , on déduit que $y = 3x + 6$. On peut donc remplacer y par $3x + 6$ dans L_1 :

$$\begin{aligned}x - 7(3x + 6) + 22 = 0 &\iff x - 21x - 42 + 22 = 0 \\ &\iff -20x - 20 = 0 \\ &\iff x = -1\end{aligned}$$

Ainsi, $y = 3x + 6 = 3 \times (-1) + 6 = -3 + 6 = 3$.

Ainsi, $\Omega(-1; 3)$.

6

Le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de centre Ω et de rayon ΩA (par exemple).

$$\Omega A^2 = (3 - (-1))^2 + (0 - 3)^2 = 25.$$

Une équation cartésienne de \mathcal{C} est donc :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = \Omega A^2$$

soit :

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

- 7** Trouver l'intersection de \mathcal{C} et (D') revient à résoudre le système formé des équations cartésiennes des deux ensembles, donc le système :

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ 3x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

Pour cela, il suffit d'exprimer d'écrire $y = 3x + 6$ à l'aide de la dernière équation, et de remplacer y par $3x + 6$ dans la première équation :

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + [(3x+6)-3]^2 &= 25 \iff x^2 + 2x + 1 + 9x^2 + 18x + 9 = 25 \\ &\iff 10x^2 + 20x - 15 = 0 \\ &\iff 2x^2 + 4x - 3 = 0 \quad (\text{en divisant tous les coefficients par 5}) \end{aligned}$$

On arrive à une équation du second degré de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 16 + 24 = 40.$$

Les deux solutions sont donc :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{40}}{4} = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$$

et sa conjuguée :

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}.$$

- Pour x_1 , on a $y_1 = 3x_1 + 6 = \frac{6 - 3\sqrt{10}}{2}$.
- Pour x_2 , on a $y_2 = 3x_2 + 6 = \frac{6 + 3\sqrt{10}}{2}$.

Les deux points d'intersection de \mathcal{C} et (D') sont donc les points de coordonnées $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$.

Corrigé de l'exercice 7.20 page 333

- 1** Réponse **b**. On sait que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 3 \times 6 \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 18 \cos(\vec{AB}, \vec{AC}).$$

D'après la relation D'Al-Kaschi,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

donc :

$$\begin{aligned} \cos \hat{A} &= \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{-2AB \times AC} \\ &= \frac{5^2 - 3^2 - 6^2}{-2 \times 3 \times 6} \\ &= \frac{25 - 9 - 36}{-36} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 \times \frac{5}{9} = 10.$$

- 2** Réponse **c**. Dans le plan muni d'un repère, une équation cartésienne du cercle de centre $A(-2;3)$ et de rayon 4 est : $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ d'après la formule $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, où $(a;b)$ sont les coordonnées du centre du cercle, et R son rayon.

- 3** Réponse **d**. Le triangle ABC est tel que $AB = 5$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
D'après la formule d'Al-Kaschi,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 49 - 70 \times \frac{1}{2} \\ &= 74 - 35 \\ &= 39 \end{aligned}$$

$$BC = \sqrt{39}$$

- 4** Réponse **c**. Le cercle \mathcal{C} a pour équation $x^2 - 2x + y^2 + y = 3$ et la droite \mathcal{D} pour équation $y = 1$ donc s'il existe au moins un point d'intersection, ses coordonnées sont de la forme $(x; 1)$ ($y = 1$ car il appartient à la droite d'équation $y = 1$). Remplaçons y par 1 dans l'équation du cercle :

$$x^2 - 2x + 1^2 + 1 = 3 \iff x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $x^2 - 2x - 1$ est $\Delta = 8 > 0$ donc cette dernière équation admet deux solutions réelles. Il y a donc deux points d'intersection.

- 5** Réponse **b**. En effet, un vecteur normal à la droite (d) d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de (d_1) peut être de la forme $-1x - 2y + c = 0$ ou $x + 2y + c = 0$.

Corrigé de l'exercice 7.21 page 333

- 1** Il y a deux manières de répondre à cette question : établir directement une équation cartésienne de (AB) et voir si ce que l'on obtient est équivalent à l'équation donnée dans l'énoncé, ou injecter les coordonnées de A et B dans l'équation donnée. C'est cette dernière méthode que je vais ici utiliser :

- $x_A + 3y_A - 6 = 3 + 3 \times 1 - 6 = 0$ donc A appartient à la droite d'équation $x + 3y - 6 = 0$;
- $x_B + 3y_B - 6 = -3 + 3 \times 3 - 6 = 0$ donc B appartient à la droite d'équation $x + 3y - 6 = 0$.

Par conséquent, $x + 3y - 6 = 0$ est bien une équation cartésienne de (AB) .

- 2** Soit $M(x; y)$ sur (d) , perpendiculaire à (AB) et passant par C . Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -6(x-2) + 2(y-4) = 0 \\ &\iff -6x + 12 + 2y - 8 = 0 \\ &\iff -6x + 2y + 4 = 0 \\ &\iff 3x - y - 2 = 0 \quad (\text{en divisant tous les coefficients par } -2)\end{aligned}$$

Ainsi, $3x - y - 2 = 0$ est une équation cartésienne de (d) .

- 3** K , projeté orthogonal de C sur (AB) est le point d'intersection de (d) et (AB) . Pour obtenir ses coordonnées, il faut résoudre le système :

$$\begin{aligned}\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} &\iff \begin{cases} 3x + 9y - 18 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} 10y - 16 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{8}{5} \\ 3x = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{8}{5} \\ x = \frac{6}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $K\left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$

- 4** $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc :

$$AB = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}.$$

De plus, M , milieu de $[AB]$, a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

et

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Ainsi, $M(0; 2)$.

- 5** Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre M donc son équation cartésienne est de la forme :

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$$

où R est le rayon, donc $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{10}$.

Une équation du cercle est donc :

$$x^2 + (y - 2)^2 = 10$$

Corrigé de l'exercice 7.22 page 334

1 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

De plus, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times (-5) + 5 \times 2 = 15.$$

- 2** a. Soit D le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Donc A, D, B sont alignés dans cet ordre (un schéma pourra vous convaincre). Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD$. De plus, d'après le cours $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AD$ (car D est le projeté orthogonal de C sur (AB)).

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$

- b. On sait (question 1) que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15$ et que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AD$; donc :

$$AD = \frac{15}{AB} = \frac{15}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2}} = \frac{15}{\sqrt{26}} = \frac{15\sqrt{26}}{26}.$$

- 3** La hauteur du triangle ABC issue de C est la longueur CD.
Dans le triangle CDA, rectangle en D, on a :

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2 - AD^2 \\ &= (5^2 + 2^2) - \frac{15^2}{26} \\ &= \frac{529}{26} \end{aligned}$$

$$\boxed{CD = \frac{23\sqrt{26}}{26}}$$

- 4** L'aire du triangle ABC est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{AB \times CD}{2} \\ &= \frac{\sqrt{26} \times \frac{23\sqrt{26}}{26}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{23}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 7.23 page 334

1 $M(x; y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 0 - 3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$

$$\iff \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff -3(x + 1) - 6(y - 3) = 0$$

$$\iff -3x - 3 - 6y + 18 = 0$$

$$\iff -3x - 6y + 15 = 0 \quad (\text{on pourrait s'arrêter là})$$

$$\iff x + 2y - 5 = 0 \quad (\text{en divisant tous les coefficients par } (-3))$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc : $x + 2y - 5 = 0$.

2 \mathcal{D} a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de \mathcal{D} est de la forme :

$$-1x + 3y + c = 0.$$

Or, $C \in \mathcal{D}$ donc $-x_C + 3y_C + c = 0$, soit :

$$-9 + 3 \times 3 + c = 0 \iff c = 0.$$

Finalement, une équation cartésienne de \mathcal{D} est : $-x + 3y = 0$.

3 Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de \mathcal{D} est $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Or, $\frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$ et $\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ donc les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, ce qui signifie qu'ils ne sont pas colinéaires.

Les deux droites (AB) et \mathcal{D} ne sont donc pas parallèles.

4 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 6 \times (-3) + (-3) \times (-1) = -18 + 3 = -15 \neq 0$ donc les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Les droites (AB) et \mathcal{D} ne sont donc pas perpendiculaires.

5 $\overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 9 - 3 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = EA \times EC \times \cos(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} \times \cos(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$$

$$-24 + 4 = 4\sqrt{50} \cos(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$$

$$\cos(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \frac{-20}{20\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\widehat{AEC} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\widehat{AEC} = \frac{3\pi}{4}}$$



Probabilités





Probabilités conditionnelles

Plan du chapitre

I	Probabilités conditionnelles	371
1	Définition	371
2	Événement contraire	372
3	Partition de l'univers	372
II	Probabilités totales	373
1	Version « light » de la formule des probabilités totales	373
2	Formule des probabilités totales	373
III	Indépendance	374
IV	Succession de deux épreuves indépendantes	376
	Enoncés	377
	Corrigés des exercices	390

1 - Probabilités conditionnelles

1.1 - Définition

Définition 26

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Propriété 60

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Démonstration 39

Elle découle de la définition : l'égalité des produits en croix mène à la propriété.

Exemple 42

Dans une urne, on place 10 boules, 3 noires et 7 rouges. On tire au hasard 3 boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

En notant :

- N_1 l'événement « la boule tirée est noire au 1^{er} tirage »,
- N_2 l'événement « la boule tirée est noire au 2^e tirage »,

la probabilité demandée est $P(N_1 \cap N_2)$.

- $P(N_1) = \frac{3}{10}$ car il y a 3 boules noires sur 10 lors du 1^{er} tirage ;
- $P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{9}$ car il ne reste plus que 2 boules noires sur 9 au 2^e tirage si l'on sait que l'on a déjà tiré une boule noire au 1^{er} tirage.

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_2) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

1.2 - Événement contraire

Propriété 61

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B).$$

Démonstration 40

Par définition,

$$P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}.$$

Or,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}),$$

d'où :

$$\begin{aligned} P_A(\bar{B}) &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - P_A(B). \end{aligned}$$

1.3 - Partition de l'univers

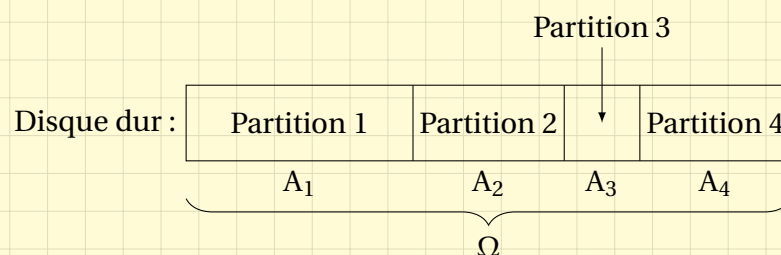
Définition 27

On dit que les n événements A_1, \dots, A_n forment une **partition** de Ω si :

- tous les événements sont incompatibles deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Remarque 36

- A et \bar{A} forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement A.
- La notion de partition est similaire en informatique : un espace de stockage peut être découpé en plusieurs partitions :



II - Probabilités totales

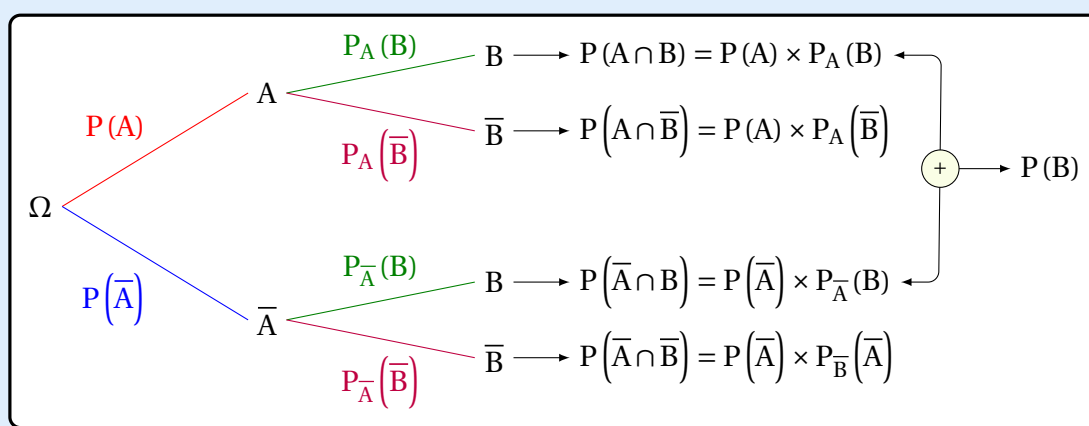
II . 1 - Version « light » de la formule des probabilités totales

Propriété 62

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités :



II . 2 - Formule des probabilités totales

Propriété 63

Soient A_1, A_2, \dots, A_n n événements formant une partition de l'univers, avec $P(A_k) \neq 0$, $1 \leq k \leq n$. Alors, pour tout événement B,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B).$$

Démonstration 41

Les événements $A_k \cap B$ sont incompatibles deux à deux.

De plus,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

Donc,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B).$$

Exemple 43

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

N° de la machine utilisée	1	2	3
Pourcentage de pièces produites	50	35	15
Fréquence des défauts par machine	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.
Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On convient de noter :

- M_k l'événement : « La pièce provient de la machine n° k » ;
- D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(D) &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) \\&= P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) + P(M_3) \times P_{M_3}(D) \\&= 0,5 \times 0,01 + 0,35 \times 0,02 + 0,15 \times 0,06 \\&= 0,0212.\end{aligned}$$

III - Indépendance

Propriété 64

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P_B(A) = P(A) \iff P_A(B) = P(B).$$

Démonstration 42

$$\begin{aligned}P_B(A) = P(A) &\iff \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\&\iff \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \\&\iff P_A(B) = P(B).\end{aligned}$$

Définition 28 (événements indépendants)

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
On dit que A et B sont **indépendants** quand $P_B(A) = P(A)$.

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Propriété 65

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Démonstration 43

$$\begin{aligned} P_B(A) = P(A) &\iff \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\ &\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B). \end{aligned}$$

Exemple 44

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements :

- A : « Tirer un cœur » ;
- B : « Tirer un roi ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On a :

- $P(A) = \frac{1}{4}$ car il y a 8 cœurs sur les 32 cartes en tout ;
- $P_B(A) = \frac{1}{4}$ car, sachant que la carte est un roi, il n'y a qu'une seule carte portant un cœur sur les 4 rois.

On a alors $P(A) = P_B(A)$, ce qui signifie que A et B sont indépendants.

Propriété 66

Soient A et B deux événements indépendants.

Alors, A et \bar{B} sont indépendants.

Démonstration 44

On sait que :

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B).$$

Or, $P_A(B) = P(B)$ car les événements A et B sont indépendants.

D'où :

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P(B) = P(\bar{B}),$$

ce qui signifie que A et \bar{B} sont indépendants.

Remarque 37

Deux événements A et B incompatibles tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ ne sont pas indépendants.

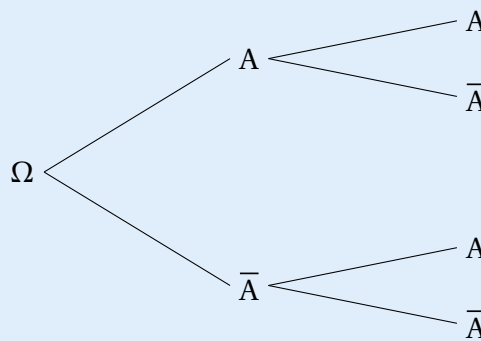
En effet, A et B incompatibles signifie d'une part que $P(A) \times P(B) \neq 0$, d'autre part que $P(A \cap B) = 0$.

Ainsi, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$; les événements ne sont donc pas indépendants.

IV - Succession de deux épreuves indépendantes

Imaginons une expérience à 2 issues (A et \bar{A} par exemple) que l'on répète deux fois de façon indépendante.

Alors, la situation peut se représenter par l'arbre suivant :



Ainsi,

- la probabilité d'obtenir deux fois l'événement A est $P(A)^2$;
- la probabilité d'obtenir une seule fois l'événement A est $P(A \cap \bar{A}) + P(\bar{A} \cap A) = 2P(A \cap \bar{A})$;
- la probabilité de ne pas obtenir l'événement A est $P(\bar{A})^2$.

Exemple 45

On lance un dé cubique équilibré deux fois de suite, en considérant que les lancers sont indépendants.

On pose A : « Obtenir un multiple de 3. » Ainsi, $P(A) = \frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 une seule fois sur les deux lancers est :

$$2P(A \cap \bar{A}) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Conditionnement

Exercice 8.1 (MP3 défectueux)

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

- 1 Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
- 2
 - a. Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
 - b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
- 3 Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.

Solution page 390

Exercice 8.2 (dans deux urnes)

Une urne, notée U_1 , contient k boules rouges, $k + 1$ boules blanches et 2 boules noires, où k est un entier naturel non nul.

Une urne, notée U_2 , contient 3 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule noire.

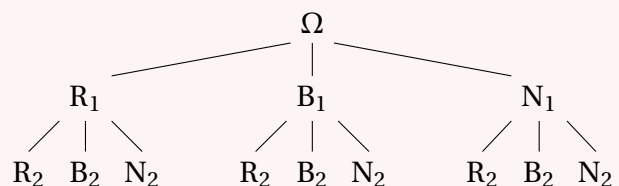
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 , à la mettre dans U_2 , puis à tirer une boule de U_2 .

Pour $i = 1$ et $i = 2$, on note :

- R_i l'événement : « On tire une boule rouge de l'urne U_i . »
- B_i l'événement : « On tire une boule blanche de l'urne U_i . »
- N_i l'événement : « On tire une boule noire de l'urne U_i . »
- D l'événement : « On tire deux boules de couleurs différentes lors de l'expérience. »

- 1 Compléter l'arbre des probabilités de l'expérience ci-contre.
- 2 Montrer que la probabilité de l'événement D est $P(D) = \frac{k+2}{2k+3}$.



Solution page 390

Exercice 8.3 (dans une école)

Dans une école, il y a 3 classes C_1 , C_2 , C_3 dont le nombre d'élèves est respectivement 44, 33, 40. Chaque classe a une probabilité de gagner à un jeu respectivement de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Si un élève gagne, quelle est la probabilité qu'il vienne de la classe C_2 ?

Solution page 391

Exercice 8.4 (Agence TOCAR)

L'agence TOCAR propose aux youtubeurs de les faire connaître sur Internet. Elle affirme que ses clients possèdent 80 % de vidéos vues plus de 200 000 fois..

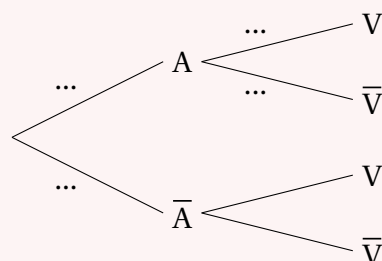
Les statistiques de cette agence montrent que si un youtubeur met en ligne une vidéo en lien avec le thème principal de sa chaîne, la probabilité que cette vidéo soit vue plus de 200 000 fois est égale à 0,7.

La youtubeuse *Mimolette* fait appel à cette agence pour avoir plus de vidéos vues. Elle poste 80 % de vidéos portant sur le thème principal de sa chaîne.

On appelle :

- A l'événement : « la youtubeuse poste une vidéo en rapport avec le thème principal de sa chaîne » ;
- V l'événement : « la vidéo postée est vue plus de 200 000 fois ».

1 Compléter l'arbre des probabilités suivant :



- 2** Calculer la probabilité qu'une vidéo soit vue plus de 200 000 fois sachant qu'elle n'a pas de lien avec le thème principal de la chaîne si l'agence TOCAR disait la vérité.
- 3** Donner un encadrement du pourcentage de vidéos vues plus de 200 000 fois par client.

Solution page 391

Exercice 8.5 (dans un lycée)

Dans un lycée de 2 000 élèves, 55 % sont des garçons.

Parmi les garçons, 70 % font « Anglais L.V.1 », le reste faisant « Espagnol L.V.1 ».

On sait de plus que 65 % des élèves de ce lycée font « Anglais L.V.1 ».

- 1** Compléter le tableau suivant :

	Filles	Garçons	Total
Anglais L.V.1			
Espagnol L.V.1			
Total			

- 2** On choisit au hasard un élève de ce lycée.
Quelle est la probabilité que ce soit un garçon faisant Anglais L.V.1 ?
- 3** On choisit au hasard un élève de ce lycée.
Quelle est la probabilité que ce soit une fille ou que l'élève fasse Espagnol L.V.1 ?
- 4** On choisit au hasard un élève parmi les garçons.
Quelle est la probabilité qu'il fasse Espagnol L.V.1 ?
- 5** On choisit au hasard un élève.
Sachant que c'est une fille, quelle est la probabilité qu'elle fasse Anglais L.V.1 ?

Solution page 392

Exercice 8.6 (QCM)

Ceci est un Q.C.M. Une seule réponse est exacte pour chaque question.

Les élèves de deux classes de terminale ES (désignées par TE 1 et TE 2) sont répartis selon leur spécialité (qui sont abrégées par SES, LV, Math) de façon suivante :

Spécialité \ Classe	TE 1	TE 2	Total
SES	16	8	24
LV	12	14	26
Math	6	10	16
Total	34	32	66

On interroge un élève au hasard. Les données précédentes sont à utiliser pour les quatre questions suivantes.

- 1** La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE 1 est égale à :
- a. $\frac{1}{66}$ b. $\frac{1}{34}$ c. $\frac{17}{33}$
- 2** La probabilité que l'élève interrogé suive l'enseignement de spécialité Math ou appartienne à la TE 1 est égale à :
- a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{25}{33}$ c. $\frac{1}{11}$

3 La probabilité que l'élève interrogé suive la spécialité Math sachant qu'il appartient à la TE 1 est égale à :

a. $\frac{1}{34}$

b. $\frac{1}{11}$

c. $\frac{3}{17}$

4 La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE 1 sachant qu'il suit la spécialité Math est égale à :

a. $\frac{3}{17}$

b. $\frac{14}{17}$

c. $\frac{3}{8}$

Solution page 393

Exercice 8.7 (réunion et intersection)

On considère deux événements A et B de l'univers Ω .

Nous avons réunis dans le tableau suivant le nombre d'éléments de A et B :

	A	\bar{A}
B	7	10
\bar{B}	6	3

1 Calculer $P(A \cap B)$.

3 Calculer $P(\overline{A \cup B})$.

2 Calculer $P(A \cup B)$.

4 Calculer $P(\overline{A \cap B})$.

Solution page 393

Exercice 8.8 (parc informatique)

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5 % des ordinateurs neufs sont défectueux ;
- 10 % des ordinateurs récents sont défectueux ;
- 20 % des ordinateurs anciens sont défectueux.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc. On note les événements suivants :

- N : « L'ordinateur est neuf »
- R : « L'ordinateur est récent »
- A : « L'ordinateur est ancien »
- D : « L'ordinateur est défectueux »
- \bar{D} l'événement contraire de D.

- 1** Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
- 2** Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.
- 3** Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,132 5.
- 4** Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

Solution page 394

Exercice 8.9 (usine de sacs)

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b . Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts. Les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes. On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée. On note A l'événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

- 1** Calculer la probabilité de l'événement C : « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».
- 2** Calculer la probabilité de l'événement D : « le sac est défectueux ».
- 3** Calculer la probabilité de l'événement E : « le sac ne présente aucun défaut ».
- 4** Sachant que le sac présente le défaut a , quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

Solution page 394

Exercice 8.10 (sondage)

Les résultats seront donnés à 0,001 près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.

Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

- 1** On note :
 - A_1 l'événement : « la personne est absente lors d'un premier appel » ;
 - R_1 l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer $P(R_1)$.

- 2** Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois à une heure différente et alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Sachant qu'elle est présente, la probabilité pour qu'elle n'accepte pas de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
On note :

- A_2 l'événement : « la personne est absente lors du second appel »;
- R_2 l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel »;
- R l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de R est 0,176.

- 3** Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, calculer la probabilité que la réponse ait eu lieu lors du premier appel.

Solution page 395

Exercice 8.11 (test faux positif)

Une maladie M affecte une personne sur 1 000 dans une population donnée.
Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99 % (lorsque cette maladie est effectivement présente). En revanche, pour un individu sain, la probabilité que le test soit positif est de 0,1 % (on dit que 0,1 % est le taux de faux positifs).

Si un test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement malade ?

Solution page 396

Exercice 8.12 (test faux positif)

On a un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint 0,5 % de la population.
Sur 99 % des malades, le test réagit (c'est-à-dire que 99 % des malades sont identifiés par le test) mais sur 2 % des sains, le test montre une fausse réaction positive.
Sur un patient, un test est positif. Quelle est la probabilité d'être malade ?

Solution page 396

Exercice 8.13 (test faux positif)

Pour détecter un cancer, à partir de 50 ans, des femmes font une mammographie.
On sait que 1 % des femmes sont atteints par un cancer à cet âge.
La détection d'un cancer sur le mammogramme fonctionne dans 9 sur 10 cas. Par contre, une fausse détection (c'est-à-dire des femmes saines auxquelles un cancer est détecté) est de 9 %.
Une femme vient d'apprendre une mammographie positive. Quel est la probabilité d'avoir vraiment un cancer ?

Solution page 397

Exercice 8.14 (test faux positif)

La probabilité d'avoir le cancer du colon à l'âge de 50 ans est de 0,3 %.

Le médecin offre un test de détection de sang dans les selles.

Pour 50 % des personnes qui souffrent d'un cancer d'intestin, ce test est positif. Les détections faux-positives sont de 3 %.

Quelle est la probabilité de souffrir d'un cancer sachant que le test a été positif?

Solution page 397

Exercice 8.15 (test faux positif)

SIDA : Le test double standard (ELIZA et Western-Blot) détectent dans 99,9 % des cas le virus IH et la probabilité d'être un faux-positif est de 0,01 %.

Une personne sans facteurs de risque particuliers appartient à un groupe dans lequel seulement 0,01 % portent le VIH. Son test est positif.

Quelle est la probabilité d'être porteur de VIH?

Solution page 398

Exercice 8.16 (Avec une suite géométrique)

Victor est un tireur à l'arc qui aime analyser son jeu. Sur une série de tirs, il a constaté que :

- lors du premier tir, la cible était atteinte 9 fois sur 10;
- lorsque la cible est atteinte lors d'un tir, elle est atteinte au tir suivant avec une probabilité de 0,8;
- lorsque la cible n'est pas atteinte lors d'un tir, elle n'est pas atteinte lors du tir suivant avec une probabilité de 0,3.

On note : A_n l'événement : « la cible est atteinte lors du n -ième lancer ».

Partie A

- 1 Préciser la valeur de $P(A_1)$, $P(\overline{A_1})$, $P_{A_1}(A_2)$ et $P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})$.
- 2 Faire un arbre de probabilités pour les deux premiers tirs.
- 3 Calculer $P(A_1 \cap A_2)$.
- 4 Montrer que $P(A_2) = 0,79$.

Partie B

On note $x_n = P(A_n)$ pour un entier n supérieur ou égal à 1.

- 1 Montrer que $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$
- 2 On pose $u_n = x_n - \frac{7}{9}$
 - a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $\frac{11}{90}$.
 - b. En déduire une expression de u_n , puis de x_n , en fonction de n .
 - c. Vers quel nombre semble se rapprocher x_n ? Interpréter ce résultat.

Solution page 398

Exercice 8.17 (Avec une suite géométrique)

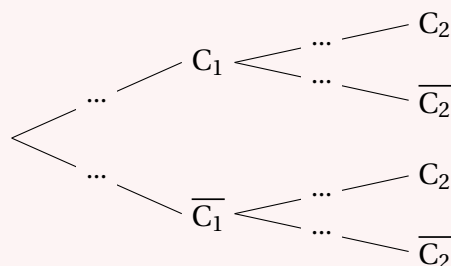
Madame Laguigne est très malchanceuse. Elle a constaté que la probabilité pour qu'une montre qu'elle vient d'acheter fonctionne correctement est égale à 0,7.

De plus, si la montre qu'elle vient d'acheter ne fonctionne pas, la probabilité pour que la montre qu'elle achètera après fonctionne correctement est égale à 0,5 alors que si la montre fonctionne bien cette probabilité est égale à 0,7.

On pose :

- C_n l'événement : « la n -ième montre fonctionne correctement » pour un entier n supérieur ou égal à 1 ;
- p_n la probabilité que C_n se réalise.

1 Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2 Montrer que la probabilité que la deuxième montre fonctionne est égale à 0,64.

3 Justifier l'égalité : $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,5$.

4 On pose :

$$u_n = p_n - 0,625.$$

- Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- En déduire p_n en fonction de n .
- Vers quel nombre se rapproche p_n quand n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Solution page 401

Exercice 8.18 (vers une équation)

Quand Pierre est en vacances, il pense à sortir les poubelles dans 90 % des cas où il le faut, c'est-à-dire la veille du ramassage des ordures. Quand il n'est pas en vacances, il pense à les sortir une fois sur deux.

Son voisin, prof de math de métier, a remarqué que globalement, Pierre pensait à sortir ses poubelles 548 fois sur 1 000.

En notant :

- V l'événement « Pierre est en vacances »
- S l'événement : « Pierre pense à sortir les poubelles la veille du ramassage »

calculer la probabilité que Pierre soit en vacances.

Solution page 402

Indépendance

Exercice 8.19 (dans une université)

Une étude réalisée sur les étudiants d'une université a permis d'établir que 70 % des étudiants possèdent un ordinateur et que, parmi ceux-ci, 40 % possèdent une automobile.

On sait aussi que 55 % des étudiants de l'université ne possèdent pas d'automobile.

On choisit au hasard un étudiant de cette université et on note :

- O l'événement « l'étudiant possède un ordinateur »
- A l'événement « l'étudiant possède une automobile ».

Les événements O et A sont-ils indépendants ?

Solution page 403

Exercice 8.20 (Jeanne et son portable)

Chaque jour, Jeanne ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :

- D : « Son portable est déchargé »
- O : « Elle a oublié son portable chez elle »

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

Elle a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à 0,05 et, d'autre part, qu'elle oublie son portable chez elle un jour sur dix.

- 1** Un jour de travail donné, quelle est la probabilité que Jeanne oublie son portable chez elle et qu'il ne soit pas déchargé ?
- 2** Un jour de travail donné, quelle est la probabilité qu'elle ne puisse pas se servir de son portable ?

Solution page 403

Exercice 8.21 (trois boules dans un urne)

Une urne contient trois boules B_1 , B_2 et B_3 indiscernables au toucher. On vide l'urne par tirages successifs des boules.

- 1** Déterminer le nombre de tirages possibles.
Sont-ils équiprobables ?
- 2** On considère les événements suivants :
 - A : « La boule B_1 est extraite de l'urne avant B_2 . »
 - B : « La boule B_1 est extraite au premier tirage. »
 - C : « La boule B_1 est extraite au deuxième tirage. »
 - a.** Déterminer les probabilités de ces trois événements.
 - b.** Les événements A et B sont-ils indépendants ?
 - c.** Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Solution page 403

Exercice 8.22 (enquête du journal télévisé)

Un grand journal a fait réaliser une enquête sur un échantillon représentatif de la population française des 18-34 ans.

- 35 % des personnes interrogées indiquent que leur principale source d'information est la **télévision** ; parmi elles, 40 % lisent aussi la presse écrite.
- 25 % des personnes interrogées indiquent que leur principale source d'information est la **radio** ; parmi elles, 60 % lisent aussi la presse écrite.
- Les autres personnes interrogées indiquent que leur principale source d'information est **Internet** ; parmi elles, 75 % lisent aussi la presse écrite.

On choisit une personne au hasard dans l'échantillon et on considère les événements :

- T : « La personne a pour principale source d'information la télévision. »
- R : « La personne a pour principale source d'information la radio. »
- I : « La personne a pour principale source d'information Internet. »
- E : « La personne lit la presse écrite. »

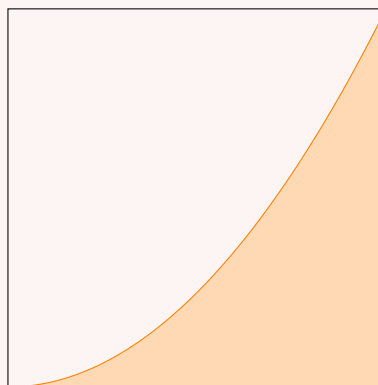
- 1 À l'aide des informations fournies par l'énoncé, indiquer la valeur de $P_T(E)$ et $P_R(\bar{E})$.
- 2 Montrer que $P(E) = 0,59$.
- 3 Calculer $P_E(I)$ (donner une valeur approchée au centième).
- 4 Les événements E et I sont-ils indépendants ?

Solution page 404

Approfondissements

Exercice 8.23 (méthode de Monte-Carlo en Python)

Dans un carré de côté 1, on trace la parabole d'équation $y = x^2$.



L'objectif de cet exercice est d'estimer l'aire sous la courbe (représentée en couleur) à l'aide d'un programme en Python.

Pour cela, nous allons utiliser la méthode de Monte-Carlo qui consiste à exécuter l'algorithme suivant :

- 1 on choisit un point au hasard à l'intérieur du carré ;

- 2 s'il est sous la courbe, on incrémente un compteur; sinon, on laisse le compteur tel qu'il est;
- 3 on répète ceci un certain nombre de fois;
- 4 à la fin, on calcule la fréquence de points sous la courbe : c'est l'estimation souhaitée.

Écrire un programme Python affichant une estimation de l'aire en prenant par exemple 50 000 points au hasard.

Solution page 404

Exercices spécimens

Exercice 8.24 (dans une urne)

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».

On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les événements :

- R : « le jeton tiré est rouge »,
- V : « le jeton tiré est vert »,
- G : « le jeton tiré est gagnant ».

- 1 Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
- 2 Calculer la probabilité de l'événement « le jeton tiré est un jeton vert et marqué gagnant ».
- 3 Soit $P(G)$ la probabilité de tirer un jeton gagnant.
Montrer que $P(G) = \frac{2}{5}$.
- 4 Sachant que le jeton tiré est gagnant, calculer la probabilité qu'il soit de couleur rouge.
- 5 On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, deux jetons dans l'urne.
Calculer la probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant ». Expliquer votre démarche.

Solution page 405

Exercice 8.25

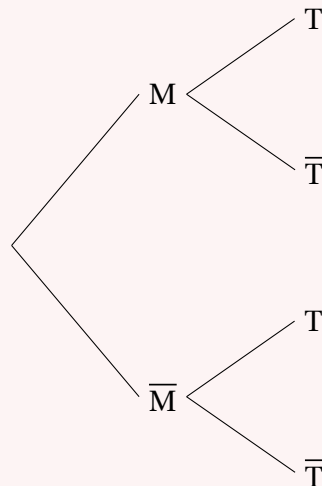
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au dix millième.

On étudie un test de dépistage pour une certaine maladie dans une population donnée. On sait que 1 % de la population est atteint de la maladie. Des études ont montré que si une personne est malade, alors le test se révèle positif dans 97 % des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.

Pour une personne à qui on fait passer le test de dépistage on associe les événements :

- M : la personne est malade,
- T : le test est positif.

- 1 Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'exercice.



- 2 Justifier que $P(\overline{M} \cap T) = 0,0198$.
- 3 Montrer que $P(T) = 0,0295$.
- 4 Calculer $P_T(M)$.
- 5 Une personne dont le test se révèle positif est-elle nécessairement atteinte par cette maladie?

Solution page 407

Exercice 8.26 (consommation de cannabis)

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une enquête a été menée auprès de lycéens pour estimer la proportion de ceux qui ont déjà consommé du cannabis. Pour encourager les réponses sincères, on met en place le protocole suivant : chaque adolescent lance d'abord un dé équilibré à 6 faces et l'enquêteur qui va l'interroger ne connaît pas le résultat du lancer. À la question « Avez-vous déjà consommé du cannabis? », l'adolescent doit répondre :

- « non » si le résultat du lancer est 5, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis;
- « oui » si le résultat du lancer est 6, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis;
- « oui » ou « non » dans les autres cas, mais de façon sincère.

On note :

- N : l'évènement l'adolescent a répondu « non »;
- O : l'évènement l'adolescent a répondu « oui »;
- C : l'évènement l'adolescent a déjà consommé effectivement du cannabis;
- \overline{C} : l'évènement l'adolescent n'a jamais consommé du cannabis.

Sur les lycéens qui ont participé à cette enquête on constate que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » est de $\frac{3}{5}$, soit $P(O) = \frac{3}{5}$.

On veut déterminer la probabilité, notée p , qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis.

On a donc $P(C) = p$.

1 Justifier que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\frac{1}{6}$.

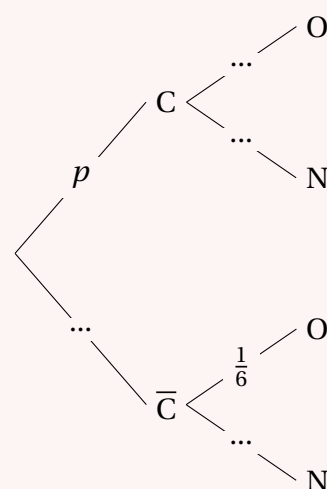
2 On a représenté ci-contre l'arbre de probabilités représentant la situation. Compléter cet arbre.

3 **a.** Démontrer que la probabilité p qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis vérifie l'équation :

$$\frac{2}{3}p + \frac{1}{6} = \frac{3}{5}.$$

b. En déduire la valeur de p .

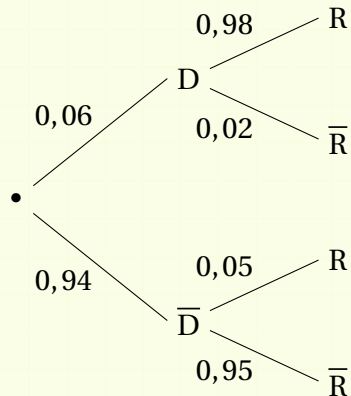
4 Sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis ?



Solution page 408

Corrigé de l'exercice 8.1 page 377

1 On a l'arbre suivant :



- 2 a. En suivant la deuxième branche : $p(D \cap \bar{R}) = 0,06 \times 0,02 = \underline{0,0012}$.
 b. Il y a erreur de contrôle pour les événements disjoints $D \cap \bar{R}$ et $\bar{D} \cap R$.
 Sa probabilité est donc :

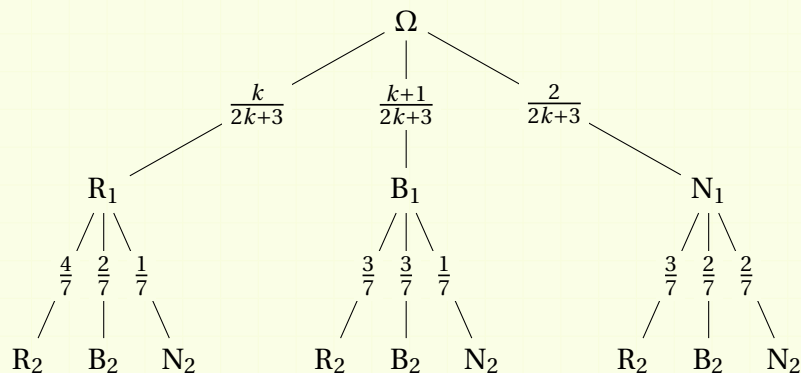
$$\begin{aligned}
 p(D \cap \bar{R}) + p(\bar{D} \cap R) &= 0,06 \times 0,02 + 0,94 \times 0,05 \\
 &= 0,0012 + 0,0470 \\
 &= \underline{0,0482}.
 \end{aligned}$$

3 La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à :

$$\begin{aligned}
 p(D \cap \bar{R}) + p(\bar{D} \cap \bar{R}) &= 0,06 \times 0,02 + 0,94 \times 0,95 \\
 &= 0,0012 + 0,8930 \\
 &= \underline{0,8942}.
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 8.2 page 377

1 On a :



2 D'après la formule des probabilités totales :

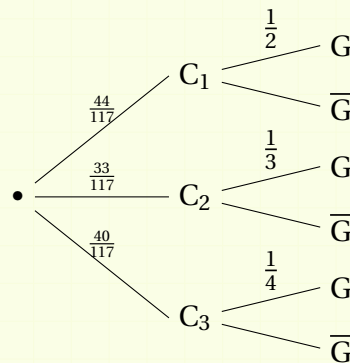
$$\begin{aligned}
 P(D) &= P_{R_1}(B_2) + P_{R_1}(N_2) + P_{B_1}(R_2) + P_{B_1}(N_2) + P_{N_1}(R_2) + P_{N_1}(B_2) \\
 &= 1 - (P_{R_1}(R_2) + P_{B_1}(B_2) + P_{N_1}(N_2)) \\
 &= 1 - \left(\frac{k}{2k+3} \times \frac{4}{7} + \frac{k+1}{2k+3} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{2k+3} \times \frac{2}{7} \right) \\
 &= 1 - \frac{4k+3k+3+4}{14k+21}
 \end{aligned}$$

$$P(D) = \frac{k+2}{2k+3}$$

Corrigé de l'exercice 8.3 page 378

Notons G l'événement : « L'élève gagne ».

Il y a en tout $44 + 33 + 40 = 117$ élèves sur l'ensemble des trois classes. On a alors l'arbre de la page suivante.



On en déduit :

$$p(G) = \frac{44}{117} \times \frac{1}{2} + \frac{33}{117} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{117} \times \frac{1}{4} = \frac{43}{117}.$$

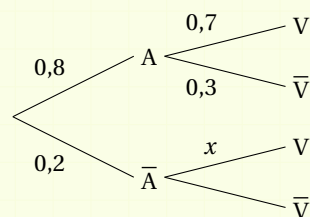
On sait de plus que :

$$p_G(C_2) = \frac{p(C_2 \cap G)}{p(G)} = \frac{\frac{33}{117} \times \frac{1}{3}}{\frac{43}{117}} = \frac{11}{43}.$$

Ainsi, si un élève gagne, la probabilité qu'il vienne de la classe C_2 est $\frac{11}{43}$.

Corrigé de l'exercice 8.4 page 378

1 L'arbre est le suivant :



2 On cherche $x = P_{\bar{A}}(V)$. Pour cela, on a :

$$0,8 = P(V) = 0,8 \times 0,7 + 0,2x$$

$$x = \frac{0,8 - 0,8 \times 0,7}{0,2}$$

$$x = \frac{0,24}{0,2}$$

$x = 1,2 > 1$ donc impossible car une probabilité est comprise entre 0 et 1

3 D'après la question précédente, $P(V) = 0,56 + 0,2x$. De plus, $0 \leq x \leq 1$ donc :

$$0 \leq 0,2x \leq 0,2$$

$$\Leftrightarrow 0,56 \leq 0,56 + 0,2x \leq 0,76$$

$$\Leftrightarrow 0,56 \leq P(V) \leq 0,76.$$

Ainsi, Mimolette pourra espérer avoir entre 56% et 76% de ses vidéos qui seront vues plus de 200 000 fois.

Corrigé de l'exercice 8.5 page 379

1 On a le tableau complété suivant :

	Filles	Garçons	Total
Anglais L.V.1	530	770	1 300
Espagnol L.V.1	370	330	700
Total	900	1 100	2 000

Annotations du tableau :

- ① Le total des élèves (pointe sur 2 000)
- ② 55% des élèves du lycée (pointe sur 1 100)
- ③ $2\,000 - 1\,100$ (pointe sur 900)
- ④ 70% des garçons (pointe sur 770)
- ⑤ $1\,100 - 770$ (pointe sur 330)
- ⑥ 65% des élèves du lycée (pointe sur 1 300)
- ⑦ $2\,000 - 1\,300$ (pointe sur 700)
- ⑧ $700 - 330$ (pointe sur 370)

2 On choisit au hasard un élève parmi les 2 000.

Il y a 330 garçons qui font Anglais L.V.1 donc la probabilité que l'élève pris au hasard soit un garçon faisant Anglais L.V.1 est :

$$\frac{330}{2\,000} = \frac{33}{200}.$$

3 On choisit au hasard un élève parmi les 2 000.

Il y a 900 filles et 700 élèves qui font Espagnol L.V.1, dont 370 filles. Donc la probabilité que l'élève choisi(e) soit une fille ou fasse Espagnol L.V.1 est :

$$\frac{900 + 700 - 370}{2\,000} = \frac{1\,230}{2\,000} = \frac{123}{200}.$$

- 4 On choisit parmi les 1 100 garçons. Il y en a 330 qui font Espagnol L.V.1 donc la probabilité que l'on choisisse un élève qui fait Espagnol L.V.1 parmi les garçons est :

$$\frac{330}{1\,100} = \frac{3}{10}.$$

- 5 On sait qu'il y a 530 filles qui font Anglais L.V.1 donc sachant que l'élève choisie est une fille, la probabilité qu'elle fasse Anglais L.V.1 est :

$$\frac{530}{900} = \frac{53}{90}.$$

Corrigé de l'exercice 8.6 page 379

- 1 Réponse c.

En effet, il y a 34 élèves en TE 1 sur les 66 au total. La probabilité est donc égale à $\frac{34}{66} = \frac{17}{33}$.

- 2 Réponse a.

En effet, il y a 16 élèves qui suivent l'enseignement de spécialité Math et 34 qui sont en TE 1, auxquels il faut enlever les 6 qui font aussi spécialité Math.

La probabilité est donc égale à : $\frac{16 + 34 - 6}{66} = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}$.

- 3 Réponse c.

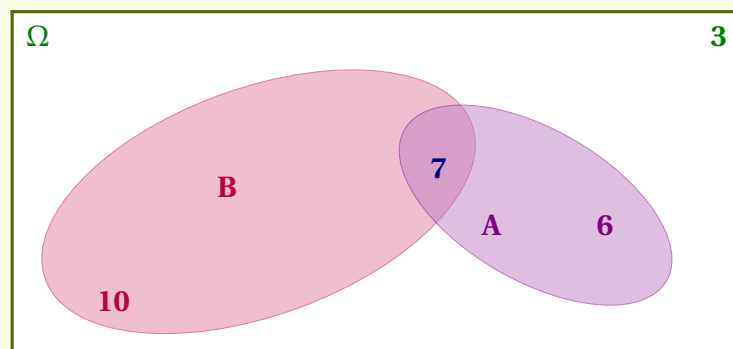
Il y a 6 élèves de TE 1 qui suivent l'enseignement de spécialité Math, donc 6 sur 34. La probabilité est donc égale à $\frac{6}{34} = \frac{3}{17}$.

- 4 Réponse c.

Il y a 16 élèves qui suivent l'enseignement de spécialité Math, dont 6 sont en TE 1. La probabilité est donc égale à $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Corrigé de l'exercice 8.7 page 380

Avant tout, faisant un diagramme de Venn du tableau :



On voit alors qu'il y a en tout $10 + 7 + 6 + 3 = 26$ éléments dans l'univers.

$$1 \quad P(A \cap B) = \frac{7}{26}.$$

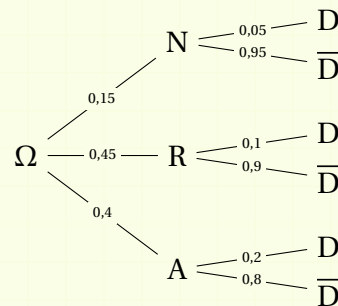
$$2 \quad P(A \cup B) = \frac{10 + 7 + 6}{26} = \frac{23}{26}.$$

$$3 \quad P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{23}{26} = \frac{3}{26}.$$

$$4 \quad P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{7}{26} = \frac{19}{26}.$$

Corrigé de l'exercice 8.8 page 380

1 On a l'arbre pondéré suivant :



2 La probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant est donnée par :

$$P(N \cap D) = P(N) \times P_N(D) = 0,15 \times 0,05 = \underline{0,0075}.$$

3 D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap R) + P(D \cap N).$$

Ainsi, d'après l'arbre, on a :

$$P(D) = 0,4 \times 0,2 + 0,45 \times 0,1 + 0,0075 = \underline{0,1325}.$$

4 La probabilité que l'ordinateur choisi soit ancien sachant qu'il est défaillant est donnée par :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,08}{0,1325} \approx \underline{0,60}.$$

Corrigé de l'exercice 8.9 page 381

1 Comme A et B sont indépendants,

$$\begin{aligned} P(C) &= p(A \cap B) \\ &= p(A) \times p(B) \\ &= 0,02 \times 0,01 \end{aligned}$$

$$P(C) = 0,0002$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad P(D) &= p(A \cup B) \\
 &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\
 &= 0,02 + 0,01 - 0,0002
 \end{aligned}$$

$$P(D) = 0,0298$$

3 On a $E = \bar{D}$ d'où :

$$\begin{aligned}
 P(E) &= 1 - p(D) \\
 &= 1 - 0,0298
 \end{aligned}$$

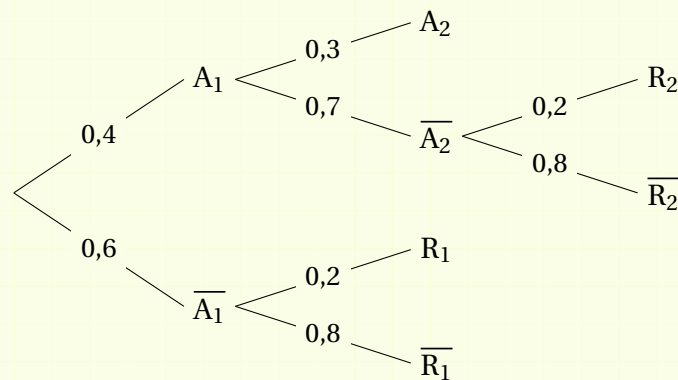
$$P(E) = 0,9702$$

4 A et B étant indépendants, par propriété :

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) = \underline{0,01}.$$

Corrigé de l'exercice 8.10 page 381

Avant tout, construisons un arbre de probabilités schématisant notre problème :



$$\begin{aligned}
 1 \quad P(R_1) &= P_{\bar{A}_1}(R_1) \times P(\bar{A}_1) \\
 &= 0,2 \times 0,6
 \end{aligned}$$

$$P(R_1) = 0,12$$

2 D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P(R_1) + P(R_2) \\
 &= 0,12 + 0,4 \times 0,7 \times 0,2 \\
 &= 0,12 + 0,056
 \end{aligned}$$

$$P(R) = 0,176$$

3 Nous cherchons $P_R(R_1)$.

$$P_R(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)}$$

Or, $P(R_1 \cap R) = P(R_1)$.

$$= \frac{0,12}{0,176}$$

$$P_R(R_1) \approx 0,682$$

Corrigé de l'exercice 8.11 page 382

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population.

On pose :

- M : « l'individu est malade »
- P : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :

- $P(M) = \frac{1}{1000}$, d'où $P(\overline{M}) = \frac{999}{1000}$;
- $P_M(P) = \frac{99}{100}$;
- $P_{\overline{M}}(P) = \frac{1}{1000}$.

On cherche à déterminer $P_P(M)$.

$$\begin{aligned} P_P(M) &= \frac{P(M \cap P)}{P(P)} \\ &= \frac{P_M(P) \times P(M)}{P_M(P) \times P(M) + P_{\overline{M}}(P) \times P(\overline{M})} \\ &= \frac{990}{999 + 990} \\ &\approx 0,5. \end{aligned}$$

Ainsi, si le test est positif, la probabilité que l'individu soit réellement malade est de 0,5. Donc attention avant de tirer des conclusions trop hâtives...

Corrigé de l'exercice 8.12 page 382

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population.

On pose :

- M : « l'individu est malade »
- P : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :

- $P(M) = 0,5\% = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$, d'où $P(\overline{M}) = \frac{199}{200}$;
- $P_M(P) = \frac{99}{100}$;
- $P_{\overline{M}}(P) = 2\% = \frac{1}{50}$.

On cherche à déterminer $P_P(M)$.

$$\begin{aligned}P_P(M) &= \frac{P(M \cap P)}{P(P)} \\&= \frac{P_M(P) \times P(M)}{P_M(P) \times P(M) + P_{\overline{M}}(P) \times P(\overline{M})} \\&= \frac{0,99 \times 0,005}{0,99 \times 0,005 + 0,02 \times 0,995} \\&\approx 0,2.\end{aligned}$$

Il y a donc 20 % d'être malade sachant que le test est positif.

Remarque 39

Selon une enquête de l'institut Max-Planck, si on demande à des médecins de choisir comme réponse à la question posée dans l'énoncé entre 3 probabilités possibles (à peu près 90 %, à peu près 50 % ou à peu près 9 %), seul un tiers des médecins trouvent la bonne réponse.

Corrigé de l'exercice 8.13 page 382

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population.

On pose :

- M : « l'individu est malade »
- P : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :

- $P(M) = 1\% = 0,01$, d'où $P(\overline{M}) = 0,99$;
- $P_{\overline{M}}(P) = 9\% = 0,09$.
- $P_M(P) = 0,9$;

On cherche à déterminer $P_P(M)$.

$$P_P(M) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{P_M(P) \times P(M)}{P_M(P) \times P(M) + P_{\overline{M}}(P) \times P(\overline{M})} = \frac{0,9 \times 0,01}{0,9 \times 0,01 + 0,09 \times 0,99} \approx 0,09.$$

La probabilité que cette femme soit malade sachant que le test est positif est donc égale à 0,09.

Corrigé de l'exercice 8.14 page 383

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population.

On pose :

- M : « l'individu est malade »
- P : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :

- $P(M) = 0,3\% = 0,003$, d'où $P(\overline{M}) = 0,997$;
- $P_M(P) = 0,5$;

- $P_{\overline{M}}(P) = 3\% = 0,03$.

On cherche à déterminer $P_P(M)$.

$$\begin{aligned} P_P(M) &= \frac{P(M \cap P)}{P(P)} \\ &= \frac{P_M(P) \times P(M)}{P_M(P) \times P(M) + P_{\overline{M}}(P) \times P(\overline{M})} \\ &= \frac{0,5 \times 0,003}{0,5 \times 0,003 + 0,03 \times 0,997} \\ &\approx 0,05. \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir un cancer du colon sachant que le test est positif est égale à 4 %.

Corrigé de l'exercice 8.15 page 383

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population.

On pose :

- M : « l'individu est malade »
- P : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :

- $P(M) = 0,01\% = 0,0001$, d'où $P(\overline{M}) = 0,9999$;
- $P_M(P) = 99,9\% = 0,999$;
- $P_{\overline{M}}(P) = 0,01\% = 0,0001$.

On cherche à déterminer $P_P(M)$.

$$\begin{aligned} P_P(M) &= \frac{P(M \cap P)}{P(P)} \\ &= \frac{P_M(P) \times P(M)}{P_M(P) \times P(M) + P_{\overline{M}}(P) \times P(\overline{M})} \\ &= \frac{0,999 \times 0,0001}{0,999 \times 0,0001 + 0,0001 \times 0,9999} \\ &\approx 0,5. \end{aligned}$$

La probabilité que la personne soit atteinte du VIH sachant que le test est positif est égale à 0,5.

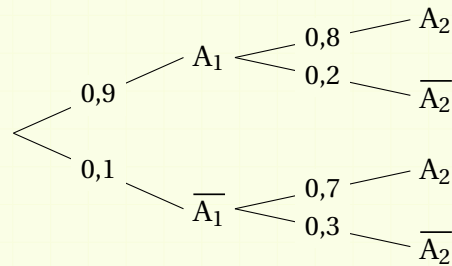
Corrigé de l'exercice 8.16 page 383

Partie A

1 D'après l'énoncé, on a :

$$P(A_1) = 0,9 \quad ; \quad P(\overline{A_1}) = 1 - 0,9 = 0,1 \quad ; \quad P_{A_1}(A_2) = 0,8 \quad ; \quad P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = 0,3$$

2 L'arbre des probabilités est le suivant :



3 $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$
 $= 0,9 \times 0,8$

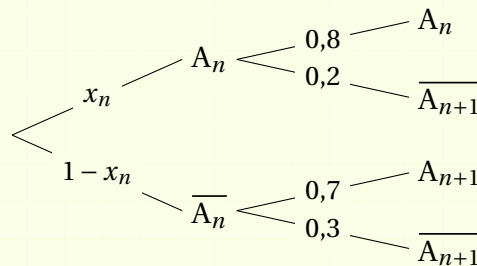
$P(A_1 \cap A_2) = 0,72$

4 $P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2)$
 $= 0,72 + 0,1 \times 0,7$

$P(A_2) = 0,79$

Partie B

1 Avant tout, construisons l'arbre de probabilités pour A_n et A_{n+1} :



Ainsi,

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
 &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \\
 &= 0,8x_n + 0,7(1 - x_n) \\
 &= 0,8x_n + 0,7 - 0,7x_n
 \end{aligned}$$

$x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$

2 a. On sait que $u_n = x_n - \frac{7}{9}$ (par définition) donc, au rang $n + 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{7}{9} \\
 &= 0,1x_n + 0,7 - \frac{7}{9} \\
 &= \frac{1}{10}x_n + \frac{7}{10} - \frac{7}{9} \\
 &= \frac{1}{10}x_n + \frac{63}{90} - \frac{70}{90} \\
 &= \frac{1}{10}x_n - \frac{7}{90} \\
 &= \frac{1}{10}\left(x_n - \frac{7}{9}\right) \\
 &= \frac{1}{10}u_n \\
 &= 0,1u_n.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= x_1 - \frac{7}{9} \\
 &= 0,9 - \frac{7}{9} \\
 &= \frac{9}{10} - \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{11}{90}$$

b. (u_n) étant une suite géométrique,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{11}{90} \times 0,1^{n-1}.$$

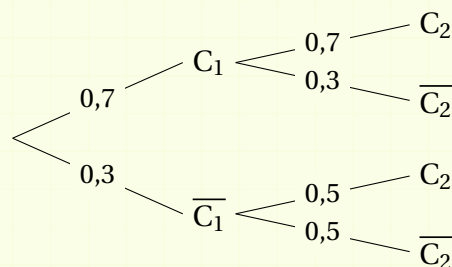
De plus, comme $u_n = x_n - \frac{7}{9}$, on a :

$$x_n = u_n + \frac{7}{9} \quad \text{soit} \quad x_n = \frac{11}{90} \times 0,1^{n-1} + \frac{7}{9}$$

- c. Pour des valeurs de plus en plus grandes de n , $0,1^n$ semble se rapprocher de 0. Ainsi, on peut supposer que x_n se rapproche de plus en plus de $\frac{7}{9}$. Ceci signifie que plus Victor effectuera de tirs, plus la probabilité que la cible soit atteinte se rapprochera de $\frac{7}{9}$, soit à peu près 0,78.

Corrigé de l'exercice 8.17 page 384

- 1 L'arbre de probabilités est le suivant :

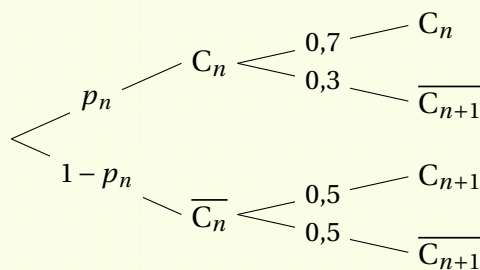


- 2 La probabilité que la deuxième montre fonctionne correctement est :

$$\begin{aligned}
 P(C_2) &= P(C_1 \cap C_2) + P(\overline{C_1} \cap C_2) \\
 &= P(C_1) \times P_{C_1}(C_2) + P(\overline{C_1}) \times P_{\overline{C_1}}(C_2) \\
 &= 0,7 \times 0,7 + 0,3 \times 0,5
 \end{aligned}$$

$$P(C_2) = 0,64$$

- 3 À l'étape n , nous avons l'arbre suivant :



Ainsi,

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= p_n \times 0,7 + (1 - p_n) \times 0,5 \\
 &= 0,7p_n + 0,5 - 0,5p_n
 \end{aligned}$$

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,5$$

4 a. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,625$
 $= 0,2p_n + 0,5 - 0,625$
 $= 0,2p_n - 0,125$
 $= 0,2\left(p_n - \frac{0,125}{0,2}\right)$
 $= 0,2(p_n - 0,625)$
 $= 0,2u_n$

Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme :

$$u_1 = p_1 - 0,625 = 0,7 - 0,625 = 0,075.$$

b. On déduit de la question précédente que :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,075 \times 0,2^{n-1}$$

et, comme $u_n = p_n - 0,625$:

$$p_n = u_n + 0,625 \quad \text{soit} \quad \boxed{p_n = 0,075 \times 0,2^{n-1} + 0,625}$$

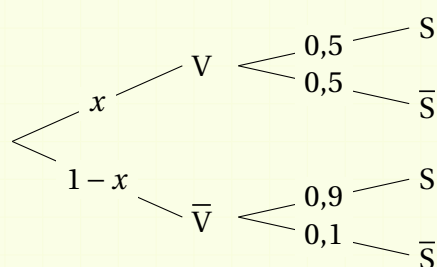
c. Plus n grandit, plus $0,2^n$ se rapproche de 0 car $0 < 0,2 < 1$, donc p_n se rapproche de 0,625.

Cela signifie qu'à longs termes, la probabilité que madame Laguigne achète une montre qui fonctionne correctement se rapprochera de 0,625.

Corrigé de l'exercice 8.18 page 384

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo en cliquant [ici](#).

Notons $x = P(V)$ et construisons un arbre de probabilités représentant la situation :



On sait que $P(S) = \frac{548}{1000} = 0,548$ d'après le voisin de Pierre.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(V \cap S) + P(\bar{V} \cap S) \\ \Leftrightarrow 0,548 &= P(V) \times P_V(S) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(S) \\ \Leftrightarrow 0,548 &= x \times 0,9 + (1-x) \times 0,5 \\ \Leftrightarrow 0,548 &= 0,9x + 0,5 - 0,5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0,548 &= 0,4x + 0,5 \\ \Leftrightarrow 0,04x &= 0,048 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{0,048}{0,4} \\ \Leftrightarrow x &= 0,12. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que Pierre soit en vacances est égale à 0,12.

Corrigé de l'exercice 8.19 page 385

- $P(O) = 0,7$;
- $P(\bar{A}) = 0,55$ donc $P(A) = 0,45$;
- $P_O(A) = 0,4$.

Ainsi, $P_O(A) \neq P(A)$ donc A et O ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 8.20 page 385

1 $P(D \cap O) = P(\bar{D}) \times P(O)$ car D et O sont indépendants, donc \bar{D} et O aussi.

$$\begin{aligned} &= (1 - 0,05) \times 0,1 \\ &= 0,095. \end{aligned}$$

Donc la probabilité pour que Jeanne oublie son portable chez elle et qu'il soit déchargé est égale à 0,095.

2 $P(D \cup O) = P(D) + P(O) - P(D \cap O)$

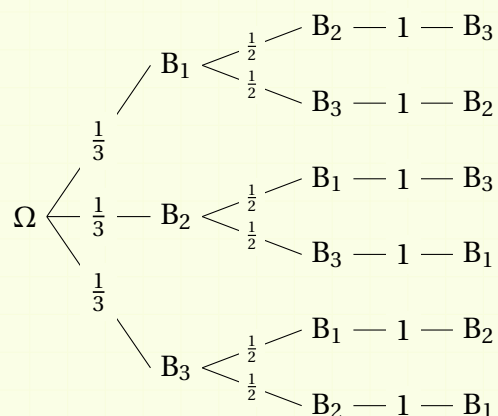
$$\begin{aligned} &= 0,05 + 0,1 - 0,005 \\ &= 0,145. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité pour que Jeanne ne puisse pas se servir de son portable un jour donné est égale à 0,145.

Corrigé de l'exercice 8.21 page 385

📺 Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo en cliquant ici.

- 1** Construisons un arbre de probabilités :



Il y a donc 6 tirages possibles, et chaque possibilité a une probabilité de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$ d'être obtenue. Ces tirages sont donc équiprobables.

- 2 a.** • « La boule B_1 est extraite avant B_2 » est possible dans 3 cas : $B_1 - B_2 - B_3$, $B_1 - B_3 - B_2$ et $B_3 - B_1 - B_2$.

Ainsi, $P(A) = 3 \times \frac{1}{6}$, soit $P(A) = \frac{1}{2}$.

- B_1 est extraite au premier tirage dans 1 cas sur 3 car il y a 3 boules possibles au premier tirage.

Donc $P(B) = \frac{1}{3}$.

- La boule B_1 est extraite au deuxième tirage dans 2 cas sur 6, donc $P(C) = \frac{1}{3}$.

b. $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq P(A \cap B)$.

Donc A et B ne sont pas indépendants.

c. $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ et $P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap C)$.

Donc A et C sont indépendants.

Corrigé de l'exercice 8.22 page 386

1 $P_E(T) = 0,4$ et $P_R(\bar{E}) = 0,4$.

2 $P(E) = P(T) \times P_T(E) + P(R) \times P_R(E) + P(I) \times P_I(E)$
 $= 0,35 \times 0,4 + 0,25 \times 0,6 + 0,4 \times 0,75$

$P(E) = 0,59$

3 $P_E(I) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{0,4 \times 0,75}{0,59} \approx 0,51$.

4 $P(I) = 0,4 \neq P_E(I)$ donc E et I ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 8.23 page 386

Un programme possible est le suivant :

Code Python 8-58

```
1 from random import random
2 n = 0
3 for i in range(5000):
4     x = random()
5     y = random()
6     if (y < x*x):
7         n+=1
8 print(n/5000)
```


Explications :

- On commence par importer le module *random* qui permet de simuler l'aléatoire;
- on initialise la variable n à 0 : c'est la variable qui va compter le nombre de points en dessous de la courbe;
- on crée une boucle de sorte à répéter 5 000 fois l'expérience consistant à choisir au hasard deux nombres x et y , qui vont jouer le rôle des coordonnées du point;
- on teste si $y < x^2$: si tel est le cas, cela signifie que le point est bien en dessous de la courbe et on incrémente n (on lui ajoute 1);
- une fois sortis de la boucle, on affiche la valeur de $\frac{n}{5000}$, qui correspond à la fréquence de points obtenus en dessous de la courbe.

Voici trois résultats successifs : 0,3358 ; 0,3326 ; 0,3308.

On peut modifier légèrement le programme afin qu'il simule plus de choix :

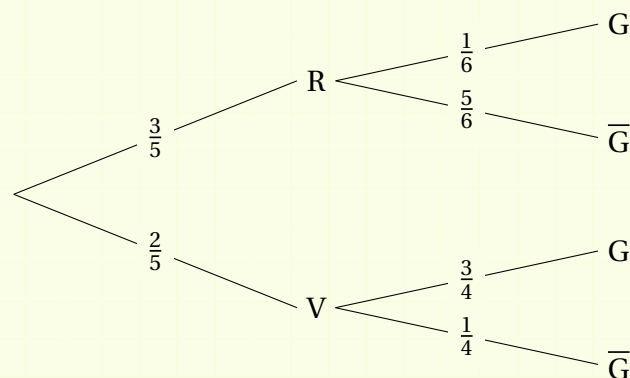
Code Python 8-59

```
1 from random import random
2 n = 0
3 c = int(input('Nombre de choix : '))
4 for i in range(c):
5     x = random()
6     y = random()
7     if (y < x*x):
8         n+=1
9 print(n/c)
```

On peut ainsi choisir le nombre de choix. Il semble que plus le nombre de choix augmente, plus la fréquence se rapproche de 0,333333...

Corrigé de l'exercice 8.24 page 387

1 L'arbre de probabilité modélisant la situation est le suivant :



2 On doit ici calculer $P(V \cap G)$ qui, d'après le cours, est égale à :

$$P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

3 D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(G) &= P(V \cap G) + P(V \cap \bar{G}) \\&= \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} \\&= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \\&= \frac{4}{10} \\P(G) &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

4 On souhaite ici calculer $P_G(R)$ qui, d'après le cours, est égale à :

$$\begin{aligned}P_G(R) &= \frac{P(R \cap G)}{P(G)} \\&= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} \\&= \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} \\P_G(R) &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

5 Tirer au hasard et simultanément deux jetons revient à en tirer un, puis un autre (sans remettre le premier dans l'urne).

On sait que la probabilité de tirer un premier jeton gagnant est $P(G) = \frac{2}{5}$ d'après la question 3. Mais une fois ce jeton choisi, nous avons une autre configuration :

- si le premier jeton gagnant est rouge, alors il n'y a plus de jeton gagnant rouge pour le second tirage; la probabilité de tirer un jeton gagnant est donc égale à :

$$P(V \cap G) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$

- si le premier jeton gagnant est vert, alors il y a encore un jeton rouge gagnant (sur les 9 jetons restants) et 2 jetons gagnants verts; la probabilité de tirer un second jeton gagnant est donc égale à :

$$\begin{aligned}P(R \cap G) + P(V \cap G) &= \frac{6}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{3} \\&= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

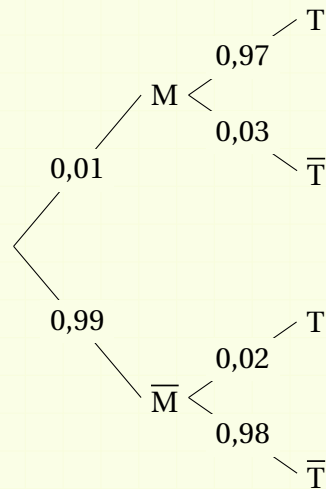
La probabilité de tirer simultanément deux jetons gagnants est alors égale à :

$$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{15}.$$

C'est la probabilité de tirer un premier jeton gagnant ($\frac{2}{5}$) ET (multiplication) la probabilité de tirer un second jeton gagnant rouge OU (addition) vert.

Corrigé de l'exercice 8.25 page 387

1 L'arbre de probabilité complété est le suivant :



2 D'après le cours,

$$\begin{aligned} P(\overline{M} \cap T) &= P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,99 \times 0,02 \end{aligned}$$

$$P(\overline{M} \cap T) = 0,0198$$

3 D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= 0,01 \times 0,97 + 0,0198 \\ &= 0,0097 + 0,0198 \end{aligned}$$

$$P(T) = 0,0295$$

4 D'après la formule du cours,

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,0097}{0,0295} \end{aligned}$$

$$P_T(M) \approx 0,3288$$

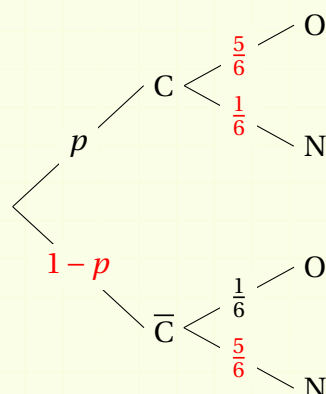
5 De la question précédente, on peut dire que la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit malade est d'environ 1 sur 3. La personne n'est donc pas nécessairement malade.

Corrigé de l'exercice 8.26 page 388

- 1** On considère un lycéen n'ayant jamais consommé de cannabis. Alors, il répond « Oui » au questionnaire uniquement s'il obtient un « 6 » au lancer de dé.

Donc la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\frac{1}{6}$.

- 2** On a :



- 3 a.** D'après la formule des probabilités totales,

$$P(O) = P(C) \times P_C(O) + P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(O)$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= p \times \frac{5}{6} + (1-p) \times \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5} &= \frac{5}{6}p + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}p \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5} &= \frac{4}{6}p + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{5} &= \frac{2}{3}p + \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{3}{5} &= \frac{2}{3}p + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{3}p = \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}p = \frac{13}{30} \\ &\Leftrightarrow p = \frac{13}{30} \times \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \boxed{p = \frac{13}{20}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4 } P_N(\bar{C}) &= \frac{P(\bar{C} \cap N)}{P(N)} \\ &= \frac{\frac{7}{20} \times \frac{5}{6}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{35}{48} \end{aligned}$$

Ainsi, sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis est égale à $\frac{35}{48}$.

Variables Aléatoires



Plan du chapitre

I	Introduction	410
1	Une expérience aléatoire	410
2	Définition	410
3	Définition plus théorique	411
II	Loi de probabilité	411
1	Définition	411
2	Espérance d'une variable aléatoire	412
3	Variance et écart-type d'une variable aléatoire	413
a	Définitions	413
b	Interprétation	413
c	Théorème de König-Huygens	414
	Enoncés	415
	Corrigés des exercices	425

1 - Introduction

1.1 - Une expérience aléatoire

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et regardons la somme des faces obtenues. Voici les différentes possibilités que nous avons :

Dé 1 \ Dé 2						
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Notons S la somme des deux dés. Alors, les valeurs possibles de S sont dans l'ensemble :

$$\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}.$$

On dit ici que S est une *variable aléatoire* car sa valeur varie (d'où le mot « variable ») et ce, de façon aléatoire (car sa valeur dépend des issues obtenues dans l'expérience aléatoire).

Par abus de langage, et pour simplifier la notion, on écrira :

$$S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}.$$

1.2 - Définition

Définition 29

Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire dont les issues possibles sont des nombres (lancers de dés, nombres de stylos dans une trousse,...).

On appelle **variable aléatoire** l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les issues de \mathcal{E} .

Exemple 46

- 1 L'univers étant une classe donnée, l'expérience consiste à regarder le nombre de stylos dans une trousse d'un élève. On constate que le nombre de stylos varie entre 5 et 10. Alors, la variable aléatoire représentant ce nombre est :

$$X = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

- 2 L'univers étant un lycée donné, l'expérience consiste à regarder dans chaque classe le nombre d'élèves mesurant plus de 2 mètres. On constate que ce nombre varie entre 0 et 5. Alors, la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves de ce lycée mesurant plus de 2 mètres est :

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

1.3 - Définition plus théorique

Définition 30

Soit Ω un univers probabilisé et \mathcal{E} une expérience aléatoire dans Ω .

Une **variable aléatoire** X est une application qui, à chaque événement élémentaires de Ω , associe un nombre réel. Autrement dit,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

Remarque 40

- En théorie, $X(\Omega)$ est un ensemble pouvant être infini. Cependant, au lycée, on se limite au cas où il est fini.
- De plus, par soucis de simplification, on notera plutôt X l'ensemble $X(\Omega)$, quitte à installer une ambiguïté entre la fonction et l'ensemble des valeurs prises par cette fonction.
- Il existe deux types de variables aléatoires réelles : discrètes et continues. En 1^{re}, on ne rencontrera que des variables aléatoires discrètes, c'est-à-dire où les valeurs prises sont dénombrables (des valeurs que l'on peut compter une à une).

II - Loi de probabilité

II.1 - Définition

Définition 31

Soit X une variable aléatoire discrète.

La **loi de probabilité** de X est la donnée de la probabilité de toutes les valeurs que peut prendre X .

En général, elle est donnée sous forme de tableau.

Exemple 47

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés, où S est la variable aléatoire représentant la somme obtenue.

D'après le tableau obtenu précédemment, on peut écrire :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Par exemple, sur les 36 issues possibles, seule une donne la somme « 2 ». Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 2, que l'on note $P(S = 2)$, est égale à $\frac{1}{36}$.

II. 2 - Espérance d'une variable aléatoire

Définition 32

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une variable aléatoire discrète.

On appelle **espérance mathématique** de X le nombre défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i) .$$

Remarque 41

Le calcul de l'espérance mathématique ressemble à celui de la moyenne d'une série statistique.

L'espérance peut alors être considérée comme la « valeur moyenne » de la variable aléatoire si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple 48

Reprenons l'exemple précédent. Alors,

$$\mathbb{E}(S) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \dots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S) = 7}$$

Cela signifie que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer obtenir en moyenne une somme égale à 7.

Propriété 67 (linéarité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète. Soient a et b deux réels. Alors,

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b .$$

Démonstration 45

Par définition, $aX + b = \{ax_i + b\}_{1 \leq i \leq n}$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX+b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \times P(aX + b = ax_i + b) \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \times P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i \times P(X = x_i) + \sum_{i=1}^n bP(X = x_i) \\ &= a \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i)}_{=\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum_{i=1}^n P(X = x_i)}_{=1} \\ &= a\mathbb{E}(X) + b . \end{aligned}$$

II . 3 - Variance et écart-type d'une variable aléatoire

II . 3 . a - Définitions

Définition 33

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une variable aléatoire discrète.

- On appelle **variance mathématique** de X le nombre défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{i=1}^n [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 \times P(X = x_i) .$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} .$$

Exemple 49

Reprenons l'exemple précédent. Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S - \mathbb{E}(S)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S) &= (-5)^2 \times \frac{1}{36} + (-4)^2 \times \frac{1}{18} + (-3)^2 \times \frac{1}{12} + \dots + 5^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{35}{6} \\ &\approx 5,83\end{aligned}$$

et donc :

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4.$$

II . 3 . b - Interprétation

Dans la formule $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$, si on élève au carré la variable $X - \mathbb{E}(X)$, c'est pour manipuler une variable positive. Cette nouvelle variable représente alors le carré de la différence entre X et son espérance.

Ainsi, la variable est l'espérance de ce carré; on peut donc l'interpréter comme la moyenne des carrés des différences entre X et $\mathbb{E}(X)$.

En prenant la racine carrée de la variance pour calculer l'écart-type, on se ramène à la moyenne des différences (en valeur absolue). Ainsi, l'écart-type représente l'écart moyen de chaque valeur de X à son espérance.

En obtenant $\mathbb{E}(S) = 7$ et $\sigma(S) \approx 2,4$, on peut conclure que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer en moyenne avoir une somme égale à 7 plus ou moins 2,4, soit une somme comprise entre 4,6 et 9,4.

II.3.c - Théorème de König-Huygens

Théorème 3 (de König-Huygens)

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une variable aléatoire discrète. Alors,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Démonstration 46

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \quad (\text{par définition}) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X))^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2[\mathbb{E}(X)]^2 + [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.\end{aligned}$$

Remarque 42

Dans la pratique, ce théorème nous permet de calculer la variance de façon peut-être plus simple dans certains cas.

Exemple 50

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés. Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S^2 = s_i^2$	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S^2) &= 4 \times \frac{1}{36} + 9 \times \frac{1}{18} + 16 \times \frac{1}{12} + \dots + 144 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{329}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de König-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S) &= \frac{329}{6} - 7^2 \\ &= \frac{35}{6} \\ &\approx 5,83\end{aligned}$$

et donc :

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4.$$

Exercice 9.1

On considère un jeu où deux urnes U_1 et U_2 sont remplies de 12 boules.

Dans U_1 , il y a 8 boules rouges, 3 boules blanches et 1 boule noire.

Dans U_2 , il y a 1 boule rouge, 8 boules blanches et 3 boules noires.

Le joueur tire au hasard une boule dans U_1 , puis une autre dans U_2 .

On note :

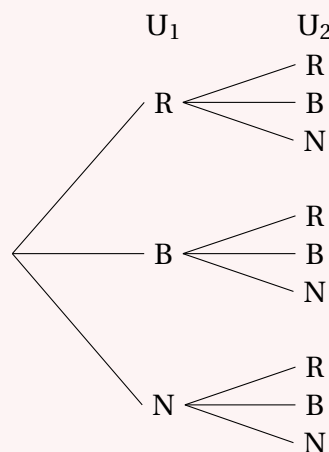
- R l'événement : « la boule tirée est rouge » ;
- B l'événement : « la boule tirée est blanche » ;
- N l'événement : « la boule tirée est noire ».

Si les deux boules tirées sont de la même couleur, le joueur gagne 10 € ; sinon, il ne gagne rien.

Pour jouer, on doit s'acquitter d'une somme de 5 €.

On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1 Compléter l'arbre de probabilités suivant :



- 2** Déterminer la loi de probabilités de X .
- 3** Calculer l'espérance mathématique de X , puis interpréter ce résultat.
- 4** Calculer la variance puis l'écart-type de X .

Solution page 425

Exercice 9.2

On dispose d'un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et d'un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). Ces dés sont parfaitement équilibrés.

On lance ces deux dés et on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus.

Soit X la variable aléatoire représentant l'ensemble des sommes possibles.

- 1** Donner la loi de probabilité de X .
- 2** Calculer l'espérance mathématique de X .
- 3** Calculer l'écart-type de X .

Solution page 426

Exercice 9.3

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie.

- 1** Si on obtient trois fois « pile » ou trois fois « face », on gagne 100 €. Sinon, on perd 10 € (ce qui correspond à un gain de -10 €).
Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.
- 2** On ajoute 5 € aux gains. Quelle est alors l'espérance et quel est l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu?
- 3** On multiplie par 2 les gains du jeu initial. Calculer alors l'espérance et l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu.

Solution page 426

Exercice 9.4

On lance 3 pièces bien équilibrées valant respectivement 1 €, 2 € et 2 €.

On veut étudier la variable aléatoire X qui totalise le montant en euros des pièces tombées sur « Pile ».

- 1** Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
- 2** Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ?
Donner la loi de probabilité de X .
- 3** Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 €?

Solution page 427

Exercice 9.5

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

Dans U_1 , il y a n boules noires et 10 boules blanches.

Dans U_2 , il y a 10 boules noires et $n + 1$ boules blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne.

- 1** Exprimer en fonction de n la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
- 2** Pour quelle valeur de n cette probabilité est maximale?

Solution page 427

Exercice 9.6

Pour une mise de 0,50 €, on lance un dé cubique équilibré. Tout résultat pair fait gagner le nombre d'euros indiqué sur le dé et tout résultat impair fait perdre le nombre d'euros indiqué sur le dé. Par exemple, obtenir 2 permet de gagner 2 € mais obtenir 3 fait perdre 3 €.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique (en tenant compte de la mise).

- 1** Établir la loi de probabilité de X .
- 2** Le jeu est-il équitable? Justifier.

Solution page 428

Exercice 9.7

Voici trois lois de probabilité ainsi que trois couples (espérance; écart-type).

X	8	14
P(X)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

couple 1 : (11; 1,73)

couple 2 : (10; 0,82)

Y	8	12
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

couple 3 : (10; 2,83)

Z	4	10	16
P(X)	$\frac{1}{100}$	$\frac{98}{100}$	$\frac{1}{100}$

Sans effectuer de calculs, associer chaque couple à sa variable aléatoire.

Solution page 429

Exercice 9.8

Un jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

- Si c'est un 7, 8, 9 ou 10, on perd 30 €.
- Si c'est une figure (valet, dame ou roi), on gagne 10 €.
- Si c'est un as, on gagne 10 €.

On note X la variable aléatoire représentant le gain (en euros) à l'issue du jeu.

- 1 Déterminer la loi de probabilité de X.
- 2 Calculer son espérance mathématique.
À qui ce jeu est-il favorable? Justifier.
- 3 Quel devrait être le gain pour un As afin que le jeu soit équitable?

Solution page 429

Exercice 9.9

Dans une fête foraine, pour une mise initiale de 3 €, le joueur est invité à lancer deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si le résultat est un « double », le joueur empoche le montant en euros égal à la somme des points obtenus.
- Si un seul 6 apparaît, le joueur gagne le montant en euros indiqué sur l'autre dé.
- Dans les autres cas, la partie est perdue.

On désigne par G la variable aléatoire définie par le « gain » du joueur (gain qui peut être négatif).

- 1 Déterminer la loi de probabilité de G.
- 2 Calculer l'espérance mathématique de G. Le jeu est-il équitable?
- 3 Calculer l'écart-type de G. Interpréter le résultat.

Solution page 430

Exercice 9.10 (prendre des initiatives)

Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

X	50	100	200	500
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

On souhaite modifier les valeurs de X , tout en conservant les mêmes probabilités, afin que son espérance soit égale à 0 et son écart-type égal à 1.

Proposer les valeurs de la nouvelle variable aléatoire. Pour cela, on s'aidera des formules suivantes :

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b \quad ; \quad \sigma(aX+b) = |a| \sigma X.$$

Solution page 430

Exercice 9.11

On dispose d'une urne contenant 1 boule noire, 1 boule rouge, 2 boules jaunes et 3 boules bleues.

Un jeu consiste à effectuer deux tirages successifs sans remise dans cette urne.

- quand on tire une boule noire au 1^{er} ou 2nd tirage, on ne gagne rien ;
- quand on tire une boule bleue au 2nd tirage, on gagne 1 € ;
- quand on tire une boule jaune au 2nd tirage, on gagne 5 € ;
- quand on tire une boule rouge au 2nd tirage, on gagne 10 €.

Pour avoir le droit de participer, un joueur doit miser 3 €.

On appelle X la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.

- 1 Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- 2 Donner la loi de probabilité de X .
- 3 Calculer l'espérance mathématique de X . Quelle conclusion peut-on alors faire ?
- 4 À la vue de la dernière conclusion, déterminer la mise de départ afin que le jeu soit équitable.
- 5 La mise de départ trouvée à la question précédente ne satisfaisant pas à l'organisateur du jeu, celui-ci souhaite modifier les règles du jeu. Il se demande s'il peut trouver une mise de départ pour laquelle le jeu serait équitable s'il multiplie tous les gains absolus (donc sans tenir compte de la mise de départ) par un entier a non nul.

On pose Y la variable aléatoire représentant les gains algébriques de ce jeu avec les nouvelles règles. On note m la mise de départ.

- a. Expliquer pourquoi $Y = aX + 3a - m$.
- b. Donner alors une réponse à la question de l'organisateur.

Solution page 431

Exercice 9.12

Une maladie touche 20% de la population d'une ville.

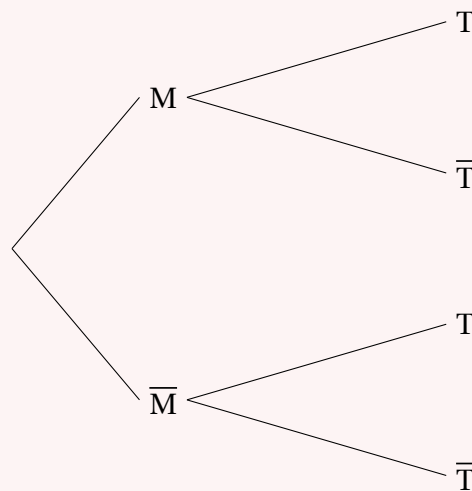
Lors d'un dépistage de la maladie, on utilise un test biologique vendu par une entreprise qui a les caractéristiques suivantes :

- lorsque la personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est 0,85;
- lorsque la personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,95.

On choisit une personne au hasard dans cette population.

On note T l'événement « la personne a un test positif à cette maladie » et M l'événement « la personne est atteinte de cette maladie ».

1 Complétez l'arbre page suivante.



2 Calculer $P(M \cap T)$.

3 Montrer que $P(T) = 0,21$.

4 On appelle *valeur prédictive positive* du test la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 0,95.

Ce test est-il efficace sur la population étudiée?

5 Le test est vendu 5 €. Si le test ne correspond pas à l'état de la personne l'utilisant, il est intégralement remboursé; sinon, il ne l'est pas.

Calculer la recette moyenne d'un test pour l'entreprise le commercialisant.

Solution page 432

Exercice 9.13

On propose le jeu suivant : un joueur mise 3 € puis tire un ticket dans une urne qui contient 5% de tickets portant le numéro 15, 10% de tickets portant le numéro 10, 20% de tickets portant le numéro 5 et le reste portant la mention « perdu ».

- Si le ticket porte le numéro 15, il gagne 15 €.
- Si le ticket porte le numéro 10, il gagne 10 €.
- Si le ticket porte le numéro 5, il gagne 5 €.
- Si le ticket porte la mention « perdu », il ne gagne rien.

On appelle X la variable aléatoire définie par le gain du joueur.

- 1 Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2 Calculer l'espérance mathématique de X .
Le jeu est-il équitable?
- 3 Par quelle valeur doit-on remplacer le gain de 15 € pour que le jeu soit équitable?

Solution page 433

Exercice 9.14

Dans une urne, il y a 9 boules rouges et n boules blanches.

Un joueur doit payer 5 € pour tirer au hasard une boule de cette urne.

Si la boule tirée est rouge, il ne gagne rien ; si elle est blanche, il gagne 20 €.

Quelle doit être la valeur de n pour que le jeu soit équitable?

Solution page 434

Algorithmique et programmation

Exercice 9.15

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	0,05	0,12	0,21	0,14	0,17	0,27	0,04

On modélise en Python cette loi de probabilité par la variable X ci-dessous :

```
X = [ (1,0.05) , (2,0.12) , (3,0.21) , (4,0.14) , (5,0.17) , (6,0.27) ,  
      (7,0.04) ]
```

On considère la variable $Y = -3X + 5$.

Écrire le code permettant de créer la liste Y modélisant la loi de probabilité de Y .

Solution page 434

Exercice 9.16

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	0,05	0,12	0,21	0,14	0,17	0,27	0,04

On modélise en Python cette loi de probabilité par la variable X ci-dessous :

```
X = [ (1,0.05) , (2,0.12) , (3,0.21) , (4,0.14) , (5,0.17) , (6,0.27) ,  
      (7,0.04) ]
```

- 1 Écrire une fonction Python `esperance(X)` qui renvoie la valeur de l'espérance de X .
- 2 Écrire une fonction Python `variance(X)` qui renvoie la valeur de la variance de X .

Solution page 435

Exercice 9.17 (formule de König-Huygens)

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	0,05	0,12	0,21	0,14	0,17	0,27	0,04

On modélise en Python cette loi de probabilité par la variable X ci-dessous :

```
X = [ (1,0.05) , (2,0.12) , (3,0.21) , (4,0.14) , (5,0.17) , (6,0.27) ,  
      (7,0.04) ]
```

La formule de König-Huygens nous donne un moyen de calculer la variance de X en connaissant son espérance :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Écrire une fonction `variance(X)` calculant la variance de X en utilisant cette formule et qui renvoie cette valeur.

Pour cela, on suppose que l'on a déjà une fonction `esperance(X)` qui renvoie l'espérance de X (comme présentée dans l'exercice 9.15).

Solution page 436

Exercices spécimens

Exercice 9.18 (dans le BDS)

Dans une école d'ingénieurs, certains étudiants s'occupent de la gestion des associations comme par exemple le BDS (bureau des sports).

Sur les cinq années d'études, le cycle « licence » dure les trois premières années, et les deux dernières années sont celles du cycle de « spécialisation ».

On constate que, dans cette école, il y a 40 % d'étudiants dans le cycle « licence » et 60 % dans le cycle de « spécialisation ».

- Parmi les étudiants du cycle « licence », 8 % sont membres du BDS;
- Parmi les étudiants du cycle de « spécialisation », 10 % sont membres du BDS.

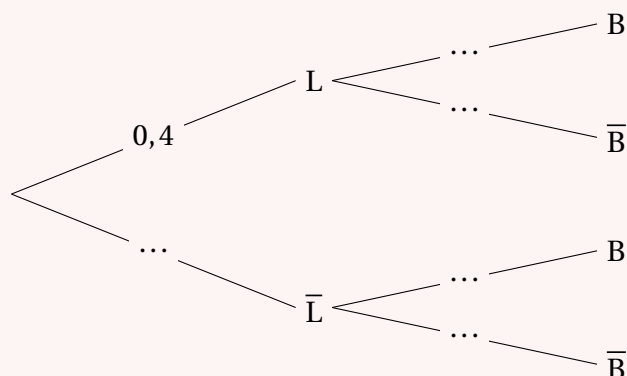
On considère un étudiant de cette école choisi au hasard, et on considère les événements suivants :

- L : « L'étudiant est dans le cycle « licence » ; \bar{L} est son événement contraire.
- B : « L'étudiant est membre du BDS » ; \bar{B} est son événement contraire.

La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

Partie A

- 1** Recopier et compléter l'arbre pondéré modélisant la situation.



- 2** Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit en cycle « licence » et membre du BDS.
- 3** En utilisant l'arbre pondéré, montrer que $P(B) = 0,092$.

Partie B

Le BDS décide d'organiser une randonnée en montagne. Cette sortie est proposée à tous les étudiants de cette école mais le prix qu'ils auront à payer pour y participer est variable. Il est de 60 € pour les étudiants qui ne sont pas membres du BDS, et de 20 € pour les étudiants qui sont membres du BDS.

On désigne par X la variable aléatoire donnant la somme à payer pour un étudiant qui désire faire cette randonnée.

- 1** Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 2** Donner la loi de probabilité de X , et calculer l'espérance de X .

Solution page 437

Exercice 9.19

- 1** On lance deux dés cubiques équilibrés « classiques » et on note les numéros apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros apparaissant sur les deux faces.
Le jeu est gagné si le produit des numéros apparaissant sur les faces supérieures des deux dés lancés est strictement inférieur à 10.
- a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c. Déterminer la probabilité de gagner.
- 2** On lance à présent deux dés spéciaux : ce sont des dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées différemment des dés classiques.
- Les faces du premier dé sont numérotées avec les chiffres : 1, 2, 2, 3, 3, 4.
 - Les faces du deuxième dé sont numérotées avec les chiffres : 1, 3, 4, 5, 6, 8.
- On note Y la variable aléatoire égale au produit des numéros apparaissant sur les deux faces après lancer de ces deux dés spéciaux.
Déterminer $P(Y > 10)$.
- 3** Est-il préférable de jouer au jeu de la question 1 avec des dés classiques ou avec des dés spéciaux?

Solution page 438

Exercice 9.20 (canapés et tables de salon)

Un magasin commercialise des canapés et des tables de salon.

Quand un client se présente, il achète au plus un canapé et au plus une table de salon. Une étude a montré que :

- la probabilité pour qu'un client achète un canapé est 0,24;
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il a acheté un canapé est 0,25;
- la probabilité pour qu'un client achète une table de salon quand il n'achète pas de canapé est 0,1.

On choisit un client au hasard parmi ceux ayant participé à l'étude. On note :

- C l'événement « le client achète un canapé » et \bar{C} son événement contraire;
- T l'événement « le client achète une table de salon » et \bar{T} son événement contraire.

- 1** Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
- 2** Calculer la probabilité que le client achète un canapé et une table de salon.
- 3** Montrer que la probabilité $P(T)$ est égale à 0,136.
- 4** Dans ce magasin, le prix moyen d'un canapé est de 1 000 € et le prix moyen d'une table de salon est de 300 €. On note X la variable aléatoire correspondant à la somme payée par le client.

- a. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	0	300	1 000	1 300
$P(X = x_i)$				

- b. Calculer l'espérance de X.

Donner une interprétation de ce nombre dans le contexte de l'exercice.

Solution page 439

Exercice 9.21 (smartphones)

Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme décimale, arrondie au millième.

Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

- 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé ;
- parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont également une batterie défectueuse ;
- par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

- 1** Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock. On note :

- E l'événement : « Le smartphone choisi a un écran cassé. »
- B l'événement : « Le smartphone choisi a une batterie défectueuse. »

- a. Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.
- b. Démontrer que la probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse est égale à 0,245.
- c. Sachant que le smartphone choisi a une batterie défectueuse, quelle est la probabilité qu'il ait un écran cassé ?

- 2** L'entreprise dépense 20 € pour réparer et reconditionner chaque smartphone qu'elle récupère. Si l'écran est cassé, elle dépense 30 € supplémentaires, et si la batterie est défectueuse, elle dépense 40 € supplémentaires.

On note X la variable aléatoire égale au coût total de réparation et reconditionnement d'un smartphone choisi au hasard dans le stock.

- a. Recopier et compléter sur la copie (aucune justification n'est attendue) le tableau suivant pour donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

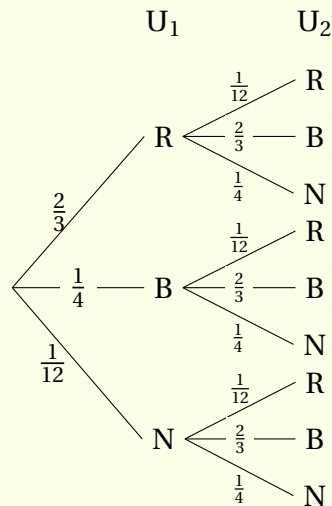
x_i	20	50
$P(X = x_i)$	0,44

- b. L'entreprise doit réparer et reconditionner 500 smartphones.
Combien doit-elle s'attendre à dépenser ?

Solution page 440

Corrigé de l'exercice 9.1 page 415

1 L'arbre de probabilités complété est le suivant :



2 La probabilité d'avoir deux boules rouges est : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$.

La probabilité d'avoir deux boules blanches est : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'avoir deux boules noires est : $\frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$.

Ainsi, la probabilité d'avoir deux boules de la même couleur est :

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{35}{144}.$$

Par conséquent, la probabilité d'avoir deux boules de couleurs différentes est :

$$1 - \frac{35}{144} = \frac{109}{144}.$$

Le gain algébrique du joueur peut être -5 € (s'il paie 5 € pour jouer et s'il ne gagne pas) ou 5 € (s'il paie 5 € et qu'il gagne 10 €). On a alors :

X	-5	5
P(X)	$\frac{109}{144}$	$\frac{35}{144}$

3 L'espérance mathématique de X est : $\mathbb{E}(X) = -5 \times \frac{109}{144} + 5 \times \frac{35}{144}$

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{185}{72} \approx -2,57$$

Cela signifie que si l'on participe un grand nombre de fois à ce jeu, on peut « espérer » perdre en moyenne 2,57 €.

4 La variance de X est : $\mathbb{V}(X) = \left[-5 - \left(-\frac{185}{72} \right) \right]^2 \times \frac{109}{144} + \left[5 - \left(-\frac{185}{72} \right) \right]^2 \times \frac{35}{144}$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{95375}{5184} \approx 18,4$$

Ainsi, $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$
 $\approx \sqrt{18,4}$

$$\sigma(X) \approx 4,29$$

L'écart-type représentant l'écart moyen à l'espérance, le joueur peut espérer avoir un gain algébrique entre $\mathbb{E}(X) - \sigma(X) \approx -6,86 \text{ €}$ et $\mathbb{E}(X) + \sigma(X) \approx 1,72 \text{ €}$.

Corrigé de l'exercice 9.2 page 415

1 L'ensemble des sommes possibles est donné par le tableau suivant :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

On a alors :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

2 $\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{24} + 3 \times \frac{1}{12} + \dots + 10 \times \frac{1}{24}$

$$\mathbb{E}(X) = 6$$

3 La variance de X est : $\mathbb{V}(X) = \frac{25}{6}$ donc son écart-type est $\sigma(X) = \frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2$.

Corrigé de l'exercice 9.3 page 416

1 La loi de probabilité de la v.a. X représentant le gain algébrique du jeu est :

X	-10	100
P(X)	$\frac{3}{4}$	$2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{4}$

L'espérance de X est donc :

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \frac{3}{4} + 100 \times \frac{1}{4} = 17,5.$$

Sa variance est :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{3}{4}(-10 - 17,5)^2 + \frac{1}{4}(100 - 17,5)^2 = 2268,75$$

Son écart-type est alors :

$$\sigma(X) = \sqrt{2268,75} \approx 47,63.$$

2 On sait que $\mathbb{E}(X+a) = \mathbb{E}(X) + a$ donc ici, $\mathbb{E}(X') = 17,5 + 5 = 22,5$.

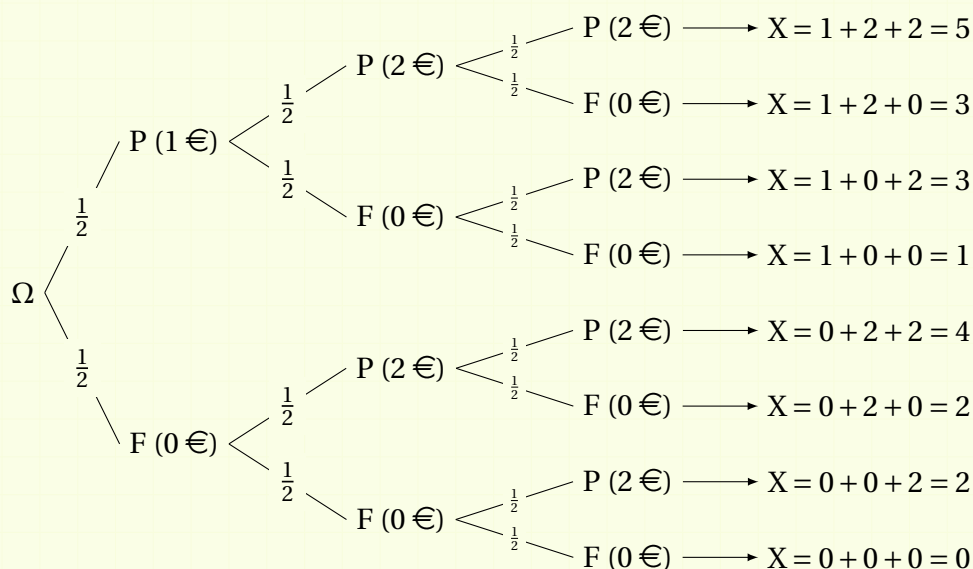
De plus, $\mathbb{V}(X+a) = \mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X+a) = \sigma(X)$ donc la variance et l'écart-type ne changent pas.

3 $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$ donc ici, $\mathbb{E}(X'') = 2 \times 17,5 = 35$.

De plus, $\sigma(aX) = a\sigma(X)$ donc $\sigma(X'') = 2 \times 47,63 = 95,26$.

Corrigé de l'exercice 9.4 page 416

1 L'arbre est le suivant :



2 On a : $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ d'après l'arbre précédent, d'où la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3 $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 9.5 page 416

1 La probabilité de tirer deux boules noires est :

$$\frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+11} = \frac{10n}{(n+10)(n+11)}.$$

La probabilité de tirer deux boules blanches est :

$$\frac{10}{n+10} \times \frac{n+1}{n+11} = \frac{10(n+1)}{(n+10)(n+11)}.$$

La probabilité de tirer deux boules de même couleur est la somme de ces deux probabilités donc :

$$\frac{10(2n+1)}{(n+10)(n+11)}$$

2 Posons $f(x) = \frac{10(2x+1)}{(x+10)(x+11)} = \frac{20x+10}{x^2+21x+110}.$

Alors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{20(x^2+21x+110) - (20x+10)(2x+21)}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{20x^2+420x+2200-40x^2-420x-20x-210}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{-20x^2-20x+1990}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{10(-2x^2-2x+199)}{(x^2+21x+110)^2} \end{aligned}$$

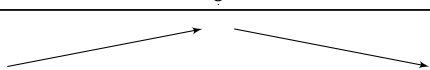
Le discriminant du polynôme $-2x^2-2x+199$ est :

$$\Delta = 4 + 8 \times 199 = 1596.$$

Il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{1596}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{399}}{2} > 0 \text{ et } x_2 = \frac{2 + \sqrt{1596}}{-4} = \frac{-1 - \sqrt{399}}{2} < 0.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

On voit alors que $f(x)$ atteint son maximum pour $x = \frac{-1 + \sqrt{399}}{2} \approx 9.$

Ainsi, pour $n = 9$, la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est maximale.

Corrigé de l'exercice 9.6 page 416

1 La loi de probabilité de X est :

$X = x_i$	-1,5	1,5	-3,5	3,5	-5,5	5,5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- 2** Le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= (-1,5 + 1,5 - 3,5 + 3,5 - 5,5 + 5,5) \times \frac{1}{6} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Le jeu est donc équitable.

Corrigé de l'exercice 9.7 page 417

- Le couple 2 correspond à la variable Z. En effet, $\frac{98}{100} = 0,98$ est très fort par rapport aux autres probabilités. Ainsi, l'espérance est très proche de 10 et l'écart-type est certainement très faible. Donc des couples 2 et 3, on choisit le 2.
- Le couple 1 correspond à Y. En effet, $\frac{3}{4}$ est plus grand que $\frac{1}{4}$, donc l'espérance va plus se rapprocher de 12 que de 8. Elle ne peut donc pas être égale à 10 (qui est le centre de $[8; 12]$).
- Il nous reste le couple 3 pour X.

À l'aide du programme de l'exercice 9.14, on vérifie rapidement que c'est exact.

Corrigé de l'exercice 9.8 page 417

- 1** La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

X	-30	10	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- 2** On trouve $\mathbb{E}(X) = -8,75$ et $\sigma(X) \approx 21,5$.

Autrement dit, si on joue à ce jeu un grand nombre de fois, on peut espérer perdre en moyenne 8,75 € avec un écart moyen de 21,5 €.

Ce jeu est donc défavorable aux joueurs.

- 3** Notons x le gain lorsque le joueur tire un As.

L'espérance est maintenant :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= -15 + \frac{30}{8} + \frac{x}{8} \\ &= \frac{x - 90}{8}.\end{aligned}$$

Pour que le jeu soit équitable, il faut que $\mathbb{E}(X) = 0$, soit $x = 90$.

Il faudrait donc gagner 90 € quand on tire un As.

Corrigé de l'exercice 9.9 page 417

1 La loi de probabilité de G est :

$G = g_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	7	9
$P(G = g_i)$	$\frac{24}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

2
$$\mathbb{E}(G) = -3 \times \frac{24}{36} - 2 \times \frac{1}{36} + \dots + 9 \times \frac{1}{36}$$

$$\approx -1,25.$$

L'espérance étant non nulle, le jeu n'est pas équitable.

3 $\sigma(G) \approx 3,1$. Ainsi, sur un grand nombre de parties, le gain moyen par partie varie entre $-1,25 - 3,1 = -4,35 \text{ €}$ et $-1,25 + 3,1 = 1,85 \text{ €}$.

Corrigé de l'exercice 9.10 page 418

X	50	100	200	500
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = 235 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{33525} = 15\sqrt{149}.$$

De plus, on sait que :

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

On cherche donc a et b afin d'avoir :

$$a\mathbb{E}(X) + b = 0 \iff 235a + b = 0 \iff b = -235a.$$

De plus,

$$\sigma(aX+b) = |a| \sigma(X).$$

On souhaite que $\sigma(aX+b) = 1$ donc :

$$|a| \sigma(X) = 1 \iff |a| = \frac{1}{15\sqrt{149}}.$$

On en déduit alors que :

$$\text{si } a = \frac{1}{15\sqrt{149}} \text{ alors } b = -\frac{235}{15\sqrt{149}}.$$

Dans ce cas, la nouvelle variable aléatoire sera :

$$Y = \frac{X-235}{15\sqrt{149}} = \left\{ -\frac{37}{3\sqrt{149}}; -\frac{9}{\sqrt{149}}; -\frac{7}{3\sqrt{149}}; \frac{53}{3\sqrt{149}} \right\}.$$

De plus,

$$\text{si } a = -\frac{1}{15\sqrt{149}} \text{ alors } b = \frac{235}{15\sqrt{149}}.$$

Dans ce cas, la nouvelle variable aléatoire sera :

$$Z = -Y = \left\{ \frac{37}{3\sqrt{149}}; \frac{9}{\sqrt{149}}; \frac{7}{3\sqrt{149}}; -\frac{53}{3\sqrt{149}} \right\}.$$

Remarque 46

À travers cet exemple, on peut remarquer que si X est une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et d'écart-type $\sigma(X)$ alors la variable $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est telle que $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\sigma(Y) = 1$.

Corrigé de l'exercice 9.11 page 418

1 L'arbre est présenté page suivante (faute de place sur celle-ci), en fin de corrigé.

2 D'après l'arbre précédent,

- $P(X = -3) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$
- $P(X = -2) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{14}$
- $P(X = 2) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$
- $P(X = 7) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{42}$

La loi de probabilité de X est alors :

x_i	-3	-2	2	7
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{42}$

3 $\mathbb{E}(X) = (-3) \times \frac{2}{7} + (-2) \times \frac{5}{14} + 2 \times \frac{5}{21} + 7 \times \frac{5}{42} = -\frac{11}{42}.$

Ainsi, le jeu est plutôt défavorable au joueur.

4 $\mathbb{E}(X) = -\frac{11}{42}$ donc il faut ajouter à la mise de départ $\frac{11}{42}$ €, soit à peu près 0,26 €.

La mise de départ doit donc être égale à $3 - 0,26 = 2,74$ €.

5 a. Les gains absolus du jeu initial sont donnés par $X + 3$ (on ne considère pas ici la mise de départ de 3 €). Si on multiplie tous les gains absolus par a , les nouveaux gains sont donnés par la variable aléatoire $a(X + 3) = aX + 3a$. En tenant compte de la mise souhaitée m , on arrive à la variable aléatoire $Y = aX + 3a - m$.

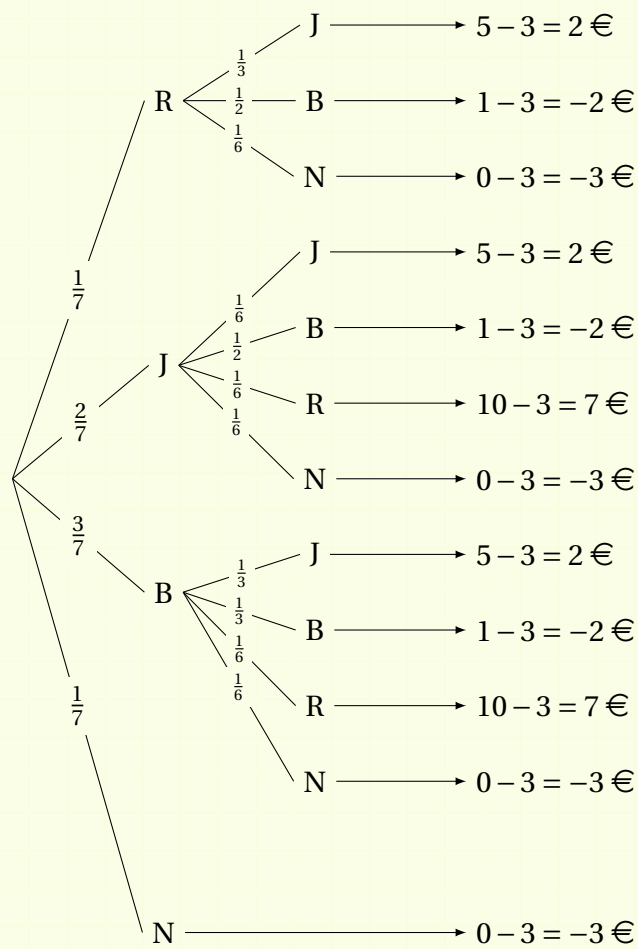
b. $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX + 3a - m) = a\mathbb{E}(X) + 3a - m$ par linéarité de l'espérance.

Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = -\frac{11a}{42} + 3a - m$.

Si le jeu est équitable, il faut que $\mathbb{E}(Y) = 0$, donc :

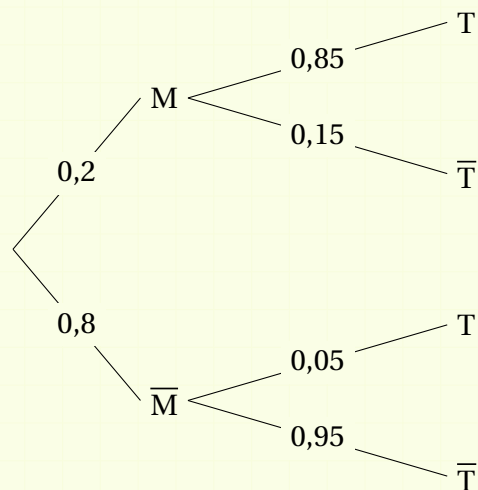
$$-\frac{11a}{42} + 3a - m = 0 \quad \text{soit :} \quad m = -\frac{11a}{42} + 3a = \left(-\frac{11}{42} + \frac{3 \times 42}{42}\right)a = \frac{115}{42}.$$

Par conséquent, l'organisateur doit fixer la mise de départ à $\frac{115}{42}$ € (soit à peu près 2,74 €) pour que le jeu soit équitable avec ces nouvelles règles.



Corrigé de l'exercice 9.12 page 419

1 L'arbre complété est le suivant :



2 $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$

$P(M \cap T) = 0,2 \times 0,85$

$P(M \cap T) = 0,17$

- 3** M et \bar{M} forment une partition de l'univers (la population de la ville) donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ = 0,17 + 0,8 \times 0,05$$

$$P(T) = 0,21$$

- 4** Dans cette question, on nous demande de calculer $P_T(M)$.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ = \frac{0,17}{0,21}$$

$$P_T(M) \approx 0,81$$

$P_T(M) < 0,95$ par conséquent, le test n'est pas estimé efficace.

- 5** Notons X la variable aléatoire représentant la recette de l'entreprise qui commercialise les tests, exprimée en euro.

Alors, $X = \{5; -5\}$. D'après les calculs précédents, la loi de probabilité de X est :

- $P(X = 5) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0,17 + 0,76 = 0,93$;
- $P(X = -5) = P(M \cap \bar{T}) + P(\bar{M} \cap T) = 1 - 0,93 = 0,07$.

X	-5	5
P(X)	0,07	0,93

L'espérance mathématique de X est alors :

$$E(X) = -5 \times 0,07 + 5 \times 0,93$$

$$E(X) = 4,3$$

La recette moyenne d'un test est donc égale à 4,3 €.

Corrigé de l'exercice 9.13 page 420

- 1** La loi de probabilité de X est :

$G = g_i$	-3	2	7	12
$P(G = g_i)$	0,65	0,2	0,1	0,05

- 2** $E(X) = -0,25$ et $\sigma(X) \approx 4,3$.

Le jeu n'est donc pas équitable (car $E(X) \neq 0$) et en moyenne, sur un grand nombre de parties, on peut s'attendre à gagner entre $-0,25 - 4,3 = -4,55$ € et $-0,25 + 4,3 = 4,05$ €.

3 Notons x le gain qui doit remplacer 15 € pour que $\mathbb{E}(X) = 0$.

Alors,

$$-3 \times 0,65 + 2 \times 0,2 + 7 \times 0,1 + (x - 3) \times 0,05 = 0$$

On trouve $x = 20$.

Corrigé de l'exercice 9.14 page 420

La mise est de 5 €, donc si le joueur tire une boule rouge, il aura au final perdu 5 €. S'il tire une boule blanche, il gagne 20 € moins la mise de départ, soit au final 15 €.

L'espérance du jeu est donc :

$$-5 \times \frac{9}{9+n} + 15 \times \frac{n}{9+n} = \frac{15n-45}{9+n}.$$

Le jeu est équitable si cette valeur est nulle :

$$15n - 45 = 0 \iff n = 3.$$

Il faut donc qu'il y ait trois boules blanches pour que le jeu soit équitable.

Corrigé de l'exercice 9.15 page 420

Pour construire la variable Y , on peut procéder ainsi :

Code Python 9-67

```
1 X = [ (1,0.05) , (2,0.12) , (3,0.21) , (4,0.14) , (5,0.17) , (6,0.27) ,  
        (7,0.04) ]  
2  
3 Y = [ ]  
4  
5 for c in X:  
6     Y.append( ( -3*c[0]+5 , c[1] ) )
```

Explications :

- on commence par initialiser la variable Y comme étant une liste vide (crochets sans rien à l'intérieur);
- on parcourt la liste X avec l'instruction « `for c in X:` » : ici, chaque valeur que va prendre la variable c sera une valeur contenue dans la liste X ; donc c est un couple, où $c[0]$ représentera la valeur de X et $c[1]$ sa probabilité;
- on insère dans la liste Y le couple $(-3*c[0]+5, c[1])$ car $Y = -3X + 5$, ce qui signifie que chaque valeur de Y est obtenue en multipliant par -3 chaque valeur que prend X et en ajoutant 5, et que chaque probabilité reste inchangée.

Remarque 47

On peut aussi envisager de construire la liste Y par *compréhension*, où la syntaxe est plus concise :

Code Python 9-68

```
1 X = [ (1,0.05) , (2,0.12) , (3,0.21) , (4,0.14), (5,0.17) ,  
        (6,0.27) , (7,0.04) ]  
2  
3 Y = [ ( -3*c[0]+5 , c[1] ) for c in X]
```

Corrigé de l'exercice 9.16 page 421

- 1 Voici une proposition de fonction pour calculer l'espérance de X :

Code Python 9-69

```
1 def esperance(X):  
2     s = 0  
3  
4     for c in X:  
5         s = s + c[0]*c[1]  
6  
7     return s
```

Pour écrire cette fonction, je me suis inspiré de la formule permettant de calculer l'espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i$$

On doit donc ajouter tous les produits $x_i \times p_i$, représentés en Python par `c[0]*c[1]`.

- 2 La variance de X est l'espérance de la variable aléatoire $(X-E(X))^2$. On peut donc écrire la fonction suivante :

Code Python 9-70

```
1 def variance(X):  
2     E = esperance(X)  
3  
4     # on construit Y par compréhension  
5     Y = [ ((c[0]-E)**2 , c[1]) for c in X ]  
6  
7     return esperance(Y)
```

Si vous n'êtes pas très à l'aise avec les listes par compréhension, on peut aussi voir les choses ainsi :

Code Python 9-71

```
1 def variance(X):
2     E = esperance(X)
3     Y = [ ]
4
5     for c in X:
6         Y.append( ( (c[0]-E)**2 , c[1] ) )
7
8     return esperance(Y)
```

```
>>> esperance(X), variance(X)
4.23, 2.6971
```

Corrigé de l'exercice 9.17 page 421

Une fonction possible est la suivante :

Code Python 9-72

```
1 def variance(X):
2     Y = [ ]
3     for c in X:
4         Y.append( ( c[0]**2 , c[1] ) )
5
6     return esperance(Y) - esperance(X)**2
```

que l'on peut aussi écrire de façon plus concise comme suit (en construisant la liste Y par compréhension) :

Code Python 9-73

```
1 def variance(X):
2     Y = [ ( c[0]**2 , c[1] ) for c in X ]
3
4     return esperance(Y) - esperance(X)**2
```

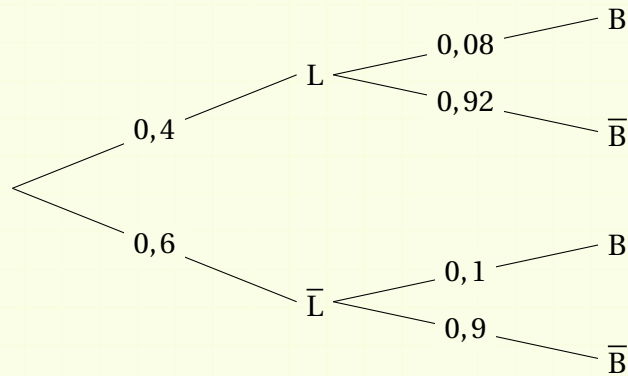
Remarque 48

Vous voyez ici l'importance de moduler un programme. En effet, en faisant ainsi, on peut dans un programme se servir des fonctions définies dans un autre programme.

Corrigé de l'exercice 9.18 page 422

Partie A

1 L'arbre complété est le suivant :



2 $P(L \cap B) = P(L) \times P_L(B)$
 $= 0,4 \times 0,08$
 $= 0,032.$

Ainsi, la probabilité que l'étudiant choisi soit en cycle « licence » et membre du BDS est égale à 0,32.

3 D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(L \cap B) + P(\bar{L} \cap B) \\ &= 0,032 + 0,6 \times 0,1 \\ &= 0,032 + 0,06 \end{aligned}$$

$P(B) = 0,092$

Partie B

1 $X = \{20; 60\}.$

2 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

X	20	60
P(X)	0,092	$1 - 0,092 = 0,908$

Ainsi, l'espérance de X est :

$$E(X) = 20 \times 0,092 + 60 \times 0,908$$

$E(X) = 56,32$

Corrigé de l'exercice 9.19 page 423

1 Construisons un tableau à double entrée pour visualiser tous les produits possibles :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

a. Ainsi, $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20; 24; 30; 36\}$.

b. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

$X = k$	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

c. $P(X < 10) = \frac{1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 4 + 2 + 1}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

2 Faisons comme dans la question 1 en présentant les différents produits dans un tableau :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	2	3	3	4
1	1	2	2	3	3	4
3	3	6	6	9	9	12
4	4	8	8	12	12	16
5	5	10	10	15	15	20
6	6	12	12	18	18	24
8	8	16	16	24	24	32

La loi de probabilité de Y est donc :

$Y = k$	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	32
$P(Y = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

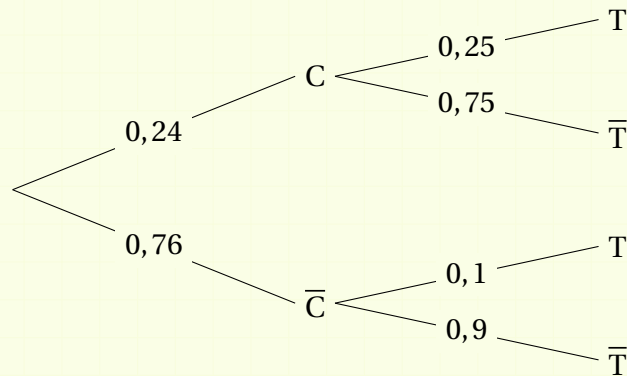
Ce qui donne :

$$P(Y < 10) = \frac{1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 3 + 3 + 2}{36} = \frac{17}{36}.$$

3 $P(Y < 10) > P(X < 10)$ donc il est préférable de jouer avec le dé de la deuxième question.

Corrigé de l'exercice 9.20 page 423

1 L'arbre est le suivant :



2 $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T)$
 $= 0,24 \times 0,25$
 $= 0,06.$

La probabilité qu'un client achète un canapé et une table de salon est donc égale à 0,06.

3 D'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(C \cap T) + P(\bar{C} \cap T)$$
$$= 0,06 + 0,76 \times 0,1$$

$$P(T) = 0,136$$

4 a. Le tableau complété est le suivant :

x_i	0	300	1 000	1 300
$P(X = x_i)$	0,684	0,076	0,18	0,06

- $P(X = 0) = 0,76 \times 0,9 = 0,684;$
- $P(X = 300) = 0,76 \times 0,1 = 0,076;$
- $P(X = 1\,000) = 0,24 \times 0,75 = 0,18.$

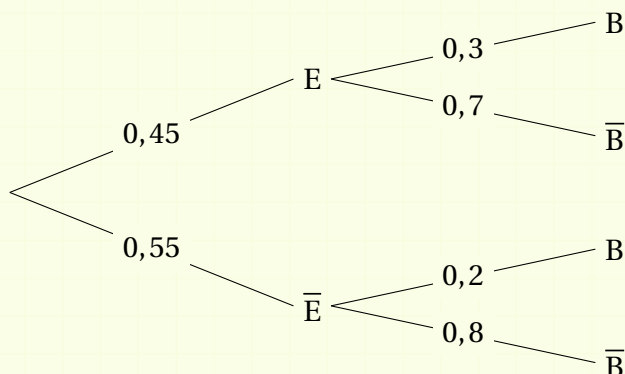
b. $E(X) = 0 \times 0,684 + 300 \times 0,076 + 1\,000 \times 0,18 + 1\,300 \times 0,06$

$$E(X) = 280,80$$

Ainsi, la dépense moyenne d'un client dans ce magasin est égale à 280,80 €.

Corrigé de l'exercice 9.21 page 424

- 1 a.** L'arbre représentant la situation est le suivant :



b. $P(B) = P(E \cap B) + P(\bar{E} \cap B)$
 $= 0,45 \times 0,3 + 0,55 \times 0,2$

$P(B) = 0,245$

La probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse est égale à 0,245.

c. $P_B(E) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)}$
 $= \frac{0,45 \times 0,3}{0,245}$

$P_B(E) \approx 0,551$

Sachant que le smartphone choisi a une batterie défectueuse, la probabilité qu'il ait un écran cassé est égale à environ 0,551.

- 2 a.** La loi de probabilité de X est la suivante :

x_i	20	50	60	90
$P(X = x_i)$	0,44	0,315	0,11	0,135

Explications (non demandées) :

- $P(X = 20) = P(\bar{E} \cap \bar{B}) = 0,55 \times 0,8 = 0,44.$
- $P(X = 50) = P(E \cap \bar{B}) = 0,45 \times 0,7 = 0,315.$
- $P(X = 60) = P(\bar{E} \cap B) = 0,55 \times 0,2 = 0,11.$
- $P(X = 90) = P(E \cap B) = 0,45 \times 0,3 = 0,135.$

- b.** L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = 20 \times 0,44 + 50 \times 0,315 + 60 \times 0,11 + 90 \times 0,135 = 43,3.$$

Ainsi, en moyenne, l'entreprise dépense 43,30 € par smartphone. Donc, si elle reconditionne 500 smartphones, elle doit s'attendre à dépenser $500 \times 43,3\text{€}$, soit 21 650 €.