



INTERROS des LYCÉES

Collection dirigée
par *Éric Maurette*

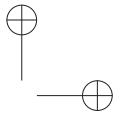
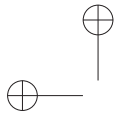
Maths

Term S
SPÉCIFIQUE ET SPÉCIALITÉ

**Danièle Eynard
Anne Cruzier
Stéphane Pasquet**

Le papier de cet ouvrage est composé de fibres naturelles,
renouvelables et fabriquées à partir de bois provenant de
forêts gérées de manière responsable.

 **Nathan**



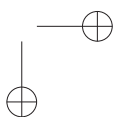
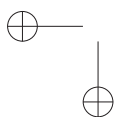
Remerciements

Les auteurs et l'équipe de Prepamath éditions tiennent à remercier Jean-Côme Charpentier et Frédéric Yargui pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Morgann Lechat
Coordination éditoriale : François Déliac

Votre avis sur cet ouvrage nous intéresse :
edition.prepamath.com

© Prepamath Édition Décembre 2014
© Éditions NATHAN Décembre 2014 – ISBN 978209 188094 5



Avant-propos

Cet ouvrage est conforme au programme de mathématiques en vigueur en classe de Terminale S à la rentrée 2012.

La présente édition, revue et corrigée, bénéficie d'une nouvelle maquette permettant une lecture encore plus aisée et efficace.

Dans chaque chapitre, on trouvera :

- Un rappel de cours, qui s'appuie sur la résolution pratique d'un exercice type, et qui propose de manière concise tout ce que l'on doit retenir du chapitre étudié.
- Des QCM ou des exercices de type vrai-faux permettant de tester de manière rapide la connaissance du cours et sa réelle assimilation et de préparer au mieux les épreuves similaires figurant dans les sujets de baccalauréat et dans les concours post-bac.
- Des exercices qui correspondent aux différents types de sujets en classe de Terminale S. Certains sont des applications immédiates du cours, d'autres nécessitent une réflexion plus approfondie et constituent un bon entraînement pour les études supérieures. Tous ont été réellement posés en lycée. Conformément à l'esprit de la réforme, nous avons introduit des exercices à prise d'initiative et d'autres qui font appel aux calculatrices ou aux algorithmes.
- Enfin les solutions des QCM et des exercices. Certaines sont parfois beaucoup plus détaillées que ce qui est normalement demandé à un élève de Terminale S pour un devoir en classe. Ceci est intentionnel, dans le but d'aider l'élève à avoir les idées claires sur les notions fondamentales utilisées. Les corrigés comportent de nombreux points-méthode qui mettent clairement en évidence des démarches qu'il convient de maîtriser.

Rappelons notre recommandation traditionnelle : cet ouvrage n'est pas un manuel de cours. Les auteurs souhaitent que l'utilisation de ce livre ne se substitue pas au travail de classe mais qu'elle soit l'occasion d'un dialogue avec le professeur de mathématiques.

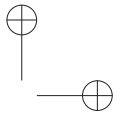
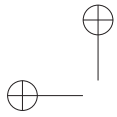
Nous remercions par avance tout lecteur qui nous fera part de ses remarques ou suggestions (voir les coordonnées à la page précédente) et nous vous souhaitons une bonne et profitable lecture.

Les auteurs.

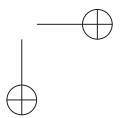
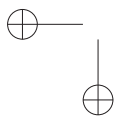
Table des matières

Chap 1	Suites et limites	1
	● Cours	1
	● Interros	6
	● Corrigés	12
Chap 2	Suites et récurrence	25
	● Cours	25
	● Interros	29
	● Corrigés	35
Chap 3	Limites de fonctions	51
	● Cours	51
	● Interros	58
	● Corrigés	64
Chap 4	Continuité et dérivation	77
	● Cours	77
	● Interros	84
	● Corrigés	92
Chap 5	Fonctions sinus et cosinus	109
	● Cours	109
	● Interros	115
	● Corrigés	122
Chap 6	Fonction exponentielle	139
	● Cours	139
	● Interros	143
	● Corrigés	151
Chap 7	Logarithme népérien	167
	● Cours	167
	● Interros	171
	● Corrigés	179

Chap 8	Intégration	191
	• Cours	191
	• Interros	198
	• Corrigés	204
Chap 9	Nombres complexes	223
	• Cours	223
	• Interros	233
	• Corrigés	241
Chap 10	Droites et plans	261
	• Cours	261
	• Interros	267
	• Corrigés	271
Chap 11	Géométrie vectorielle dans l'espace	279
	• Cours	279
	• Interros	284
	• Corrigés	288
Chap 12	Produit scalaire	299
	• Cours	299
	• Interros	307
	• Corrigés	312
Chap 13	Probabilités conditionnelles	323
	• Cours	323
	• Interros	327
	• Corrigés	334
Chap 14	Lois de probabilités continues	347
	• Cours	347
	• Interros	357
	• Corrigés	368
Chap 15	Intervalle de fluctuation et estimation	385
	• Cours	385
	• Interros	389
	• Corrigés	397



Chap 16	Arithmétique (spécialité)	403
	● Cours	403
	● Interros	408
	● Corrigés	414
Chap 17	Matrices et suites (Spécialité)	425
	● Cours	425
	● Interros	436
	● Corrigés	444
	Bac Blanc	457
	● Sujet	457
	● Corrigé	464



Méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous recommandons le livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et E. Maurette, aux Éditions Prepamath.

Faire des « feed-back »

Le « feed-back » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral. Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé. Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- *Idem* pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

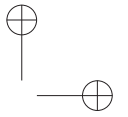
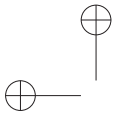
Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudié, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable d'en survoler l'ensemble avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

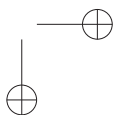
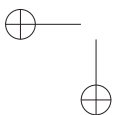
Pour acquérir de la rapidité, trois voies sont possibles :

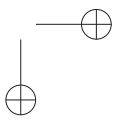
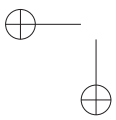
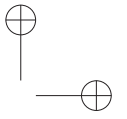
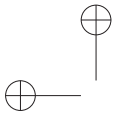
- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en



rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.

- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoirs surveillés. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.





Suites et limites

Plan du chapitre

1. Limite d'une suite
2. Limite et comparaison
3. Suite majorée ou minorée
4. Opérations et limites

Exercice type

Lycée Virlogeux, Riom

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

- 1 Pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = n - n^2$.
- 2 Pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = n(3 - \sin(n))$.
- 3 Pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n = \frac{1 + \cos(n)}{n}$.

1 Limite d'une suite

1.1 Définitions

Définition 1

On dit que la suite (u_n) tend vers un réel ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Vocabulaire : On dit alors que la suite (u_n) a pour limite ℓ , ou encore que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Définition 2

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ (respectivement $] - \infty ; A[$) où A est un réel, contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Remarque : certaines suites n'ont pas de limite.

1.2 Des limites de référence

Soit p un entier strictement positif.

Lorsque n tend vers $+\infty$, les suites (n) , (n^2) , (n^p) et $(\sqrt[n]{n})$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ ont pour limite $+\infty$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$, ont pour limite 0.

2 Limite et comparaison

Théorème 1 (Théorème de comparaison)

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

- pour tout n , à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

De même, si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

- pour tout n , à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Théorème 2

Si la suite (u_n) est croissante et admet pour limite ℓ en $+\infty$, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ . (Cela signifie que la suite est majorée par ℓ .)

Remarque : de même, avec une suite décroissante, ses termes sont supérieurs ou égaux à ℓ et on dit alors que la suite est minorée par ℓ (voir aussi paragraphe suivant).

Théorème 3 (Théorème des gendarmes)

Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que :

- pour tout n , à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$,
- les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite réelle ℓ ,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

3 Suite majorée ou minorée

Définition 3

Une suite (u_n) est dite *majorée* s'il existe un réel M vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

Elle est dite *minorée* s'il existe un réel m vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.

Une suite réelle à la fois majorée et minorée est dite *bornée*.

ATTENTION

Un majorant ou minorant est une constante indépendante de n .

Par ailleurs, si une suite admet un majorant, elle en admet une infinité, de même pour les minorants.

Par exemple, si une suite est majorée par 5, elle est aussi majorée par 5,5 d'après la définition.

Théorème 4 (Théorème de convergence monotone)

Soit (u_n) une suite croissante.

- Si (u_n) est une suite majorée, alors (u_n) converge.
- Sinon, (u_n) tend vers $+\infty$.

Remarque : de même, si une suite décroissante est *minorée*, elle converge. Sinon elle tend vers $-\infty$.

Une suite monotone a donc toujours une limite, *finie ou infinie*.

À RETENIR

Toute suite croissante majorée est convergente.

Toute suite décroissante minorée est convergente.

On rappelle que pour trouver le sens de variation d'une suite, on peut :

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$: si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n , u est croissante. Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n , u est décroissante. Cette méthode fonctionne dans tous les cas.
- Dans le cas d'une suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite a le même sens de variation que f sur \mathbb{R}_+ ;
- Dans le cas d'une suite dont tous les termes sont strictement positifs, on peut comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: si pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite est croissante ; si pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, la suite est constante ; si pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite est décroissante.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Opérations et limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, ℓ et ℓ' représentent des réels.

4.1 Somme et produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$-\infty$ $+\infty$
0	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

4.2 Quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell > 0$	0^+ (0 en restant positif) 0^- (0 en restant négatif)	$+\infty$ $-\infty$
$\ell < 0$	0^+ (0 en restant positif) 0^- (0 en restant négatif)	$-\infty$ $+\infty$
0	0	F.I.
ℓ	$+\infty$ $-\infty$	0 0
$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.

ATTENTION

Les cases où il est indiqué « F.I. » (pour « Forme Indéterminée ») correspondent à des cas d'indétermination. Un changement d'écriture de l'expression est nécessaire pour déterminer la limite (si elle existe).

Solution de l'exercice type

Lycée Virlogeux, Riom

- 1** Lorsque n tend vers $+\infty$, le terme $n - n^2$ donne un cas d'indétermination ; factoriser par n permet alors de transformer l'écriture de u_n et de conclure :

$$u_n = n(1 - n).$$

n tend vers $+\infty$ et $(1 - n)$ tend vers $-\infty$, donc par produit on obtient que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

- 2** Pour $u_n = n(3 - \sin(n))$, le facteur $(3 - \sin(n))$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin n \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq -\sin n \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq 3 - \sin n \leq 4. \end{aligned}$$

Donc $3 - \sin n \geq 2$ et en multipliant par n on obtient :

$$u_n \geq 2n.$$

Comme la suite de terme général $2n$ a pour limite $+\infty$, on en déduit, d'après le théorème de comparaison, que la suite (u_n) a aussi pour limite $+\infty$.

MÉTHODE

Dans les situations où interviennent les fonctions sinus et cosinus, penser aux encadrements $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

- 3** Pour tout n de \mathbb{N}^* , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $0 \leq 1 + \cos(n) \leq 2$, et on en déduit : $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$.

Comme les suites de terme général 0 et $\frac{2}{n}$ convergent vers 0 , d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge aussi vers 0 .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Suite arithmétique

10 min Corrigé p. 12

Soit la suite arithmétique (u_n) de raison 5 et de premier terme $u_1 = -28$.
Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Il existe un entier n tel que $u_n > n$.
- 2 Il existe un entier n tel que $u_1 + u_n = 2\,009$.
- 3 Il existe un entier n tel que $u_n u_{n+1} < 0$.
- 4 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{5n^2 - 63n}{2}$.

2 V/F Suites convergentes

10 min Corrigé p. 13

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Une suite monotone et bornée converge.
- 2 Si la suite (u_n) converge vers 0 et si la suite (v_n) est telle que, pour $n \geq 100$, $v_n \leq u_n$, alors la suite (v_n) converge aussi vers 0.
- 3 Pour qu'une suite converge, il suffit qu'elle soit décroissante et positive.
- 4 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors la suite (u_n) converge.

3 V/F Convergence et opérations

10 min Corrigé p. 13

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Si la suite $(u_n + v_n)$ converge alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent aussi.
- 2 Si la suite $(u_n v_n)$ converge alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent aussi.
- 3 Si la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0 alors l'une au moins des deux suites (u_n) ou (v_n) converge aussi vers 0.
- 4 Si deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite finie L , alors il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n = v_n$.

4 V/F Vrai faux

10 min Corrigé p. 14

On considère une suite u dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite v par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, donner une démonstration, et si elle est fausse, donner un contre-exemple.

- 1 Si u est convergente, alors v est convergente.
- 2 Si u est minorée par 2, alors v est minorée par -1 .
- 3 Si u est décroissante, alors v est croissante.
- 4 Si u est divergente, alors v est convergente de limite nulle.

5 **V/F** **Vrai ou Faux**

15 min Corrigé p. 14

Pour les questions suivantes, répondre par Vrai ou Faux.

- 1 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors, à partir d'un certain rang, toutes les valeurs de la suite (u_n) sont nécessairement supérieures à 1 000 000.
- 2 Si, à partir d'un certain rang, toutes les valeurs de la suite (u_n) sont supérieures à 1 000 000, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 3 Si une suite (u_n) est croissante, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 4 Si une suite est décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers 0.
- 5 La suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2 + 3$ est une suite géométrique.
- 6 La suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2n + 3$ est une suite arithmétique.
- 7 $3 + 4 + 5 + \dots + 2\,002 = \frac{2\,000 \times 2\,005}{2}$.
- 8 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{15} = \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2}$.

6 **En utilisant les définitions**

35 min Corrigé p. 15

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Voici les définitions explicites de deux suites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n + 1}{n + 2} \quad \text{et} \quad v_n = n^2 + 3n - 5.$$

- (a) En utilisant la définition, prouver que u tend vers 2 et que v tend vers $+\infty$.
- (b) À partir de quelle valeur de n peut-on assurer :
 - que $|u_n - 2| < 10^{-4}$?
 - que $v_n > 10^4$?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 On définit les quatre suites a, b, c et d par :

$$a_n = \sqrt{\frac{6n+1}{2n+3}}; \quad b_n = \frac{n\sqrt{n}+2}{2n};$$

$$c_n = n^3 + (-1)^n n^2; \quad d_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^n}.$$

En utilisant les théorèmes du cours, déterminer les limites des suites a, b, c , et d .

7 Suites monotones



10 min

Corrigé
p. 18

Lycée Carnot, Dijon

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

- 1 Cette suite est-elle croissante ou décroissante ?
- 2 Est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

8 Limites de suite



10 min

Corrigé
p. 19

Lycée Henri IV, Paris

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1 Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- 2 Montrer que pour tout $n, u_n \geq n + 1$.
- 3 Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en proposant deux méthodes.

9 Avec des sinus



20 min

Corrigé
p. 19

Lycée Notre dame de Grandchamp, Versailles

La suite u est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{2n^2 - 3 \sin(n)}{n^2 + 1}$.

- 1 Prouver que, pour tout entier naturel n ,

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}.$$

En déduire la limite de la suite u .

- 2 (a) Justifier que pour tout entier naturel n ,

$$\frac{-5}{n^2 + 1} \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

- (b) À partir de quel rang N est-on certain que pour tout $n \geq N$, la distance entre u_n et 2 soit inférieure à 10^{-3} ?
- (c) A-t-on pour tout entier $n \geq N, u_n \leq 2$?

10 Avec une somme



20 min

Corrigé
p. 21

Lycée Hoche, Versailles

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

- 1 Établir le sens de variation de la suite u .
- 2 Démontrer que pour tout $p \geq 2$, $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.
- 3 (a) Prouver que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$, en utilisant la question 2.
(b) Prouver que la suite u converge.
(c) En utilisant la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_9 , puis de u_{10} .

11 Avec un algorithme



20 min

Corrigé
p. 22

Lycée Monet, Paris

On considère la suite u définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On se propose d'étudier le comportement à l'infini de cette suite.

Partie A – Approche à l'aide d'un algorithme

- 1 On souhaite construire un algorithme permettant de calculer u_n pour tout entier $n \geq 1$.

On propose pour cela l'algorithme incomplet ci-dessous. Le compléter de façon à obtenir la valeur de u pour tout entier $n \geq 1$.

```
Entrée
    Saisir un entier naturel non nul n.
Initialisation
    Affecter à u la valeur 0
Traitement
    Pour i allant de ... à ..., Faire
        Affecter à u la valeur u + ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

- 2 Programmer l'algorithme et donner les valeurs approchées de u_{10} , u_{20} , et u_{100} .
- 3 Conjecturer le comportement à l'infini de la suite u .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Partie B

- 1 Soit n un entier, $n \geq 1$. Justifier que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on a : $\frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- 2 En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n}$.
- 3 Déterminer la limite de la suite u .

12 Interpréter un algorithme



45 min

Corrigé
p. 23

Lycée La Bruyère, Versailles

- 1 On considère l'algorithme suivant :

Entrée
Saisir un réel strictement positif a
Saisir un réel strictement positif b
Saisir un entier naturel non nul N

Initialisation
Affecter à u la valeur a
Affecter à v la valeur b
Affecter à n la valeur 0

Traitement
Tant que $n < N$
Affecter à n la valeur $\frac{n + 1}{a + b}$
Affecter à u la valeur $\frac{2}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}$
Affecter à a la valeur u
Affecter à b la valeur v
Fin du Tant que

Sortie
Afficher u , afficher v

Compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 3$, $b = 7$, et $N = 2$.

Les valeurs seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	3	7		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites u et v définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2 Pour un entier naturel n donné, que représentent les valeurs affichées par l'algorithme ?

3 (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$.

4 (a) Démontrer que la suite u est croissante.

(b) Donner le sens de variation de la suite v .

5 (a) Démontrer que les suites u et v sont convergentes.

(b) Sans chercher à déterminer les limites de u et v , montrer que ces limites sont égales (on pourra utiliser l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n et v_n).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Suite arithmétiqueEnoncé
p. 6

- 1** Vrai. On commence par déterminer le terme général de la suite en fonction de n .

Comme la suite est arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = -28$, pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_n = u_1 + (n - 1)r = 5n - 33.$$

L'inéquation $u_n > n$ équivaut à $5n - 33 > n$ soit $n > \frac{33}{4}$. Comme n est un entier, on en déduit que la plus petite valeur qui convient est 9.

- 2** Vrai. On a, pour tout entier naturel non nul, $u_1 + u_n = 5n - 61$. L'équation $5n - 61 = 2\,009$ admet pour unique solution $n = 414$.
- 3** Vrai. Les termes u_1 à u_6 sont strictement négatifs. À partir de u_7 , tous les termes de la suite sont strictement positifs. Il existe donc une seule valeur de n pour laquelle $u_n u_{n+1} < 0$: c'est $n = 6$.
- 4** Faux. Pour $n = 1$, on obtient $S_1 = -29$ et non -28 .

Remarque : en utilisant la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, rappelée dans le point méthode ci-dessous, on démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{5n^2 - 61n}{2}$.

MÉTHODE

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$, et on montre que cette différence est une constante (ne dépend pas de n) appelée *raison* et notée généralement r . On a alors $u_n = u_p + (n - p)r$ pour n et p entiers quelconques.
- De plus, vous avez appris en première que la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique se calcule à l'aide de la formule :

$$S = \frac{n(\text{1}^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

- Pour montrer qu'une suite est géométrique, on montre que, pour n quelconque, on peut écrire u_{n+1} sous la forme $q \times u_n$, q étant une constante (donc indépendante de n). On a alors $u_n = u_p q^{n-p}$.
- De plus, vous avez appris en première que la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique se calcule par la formule :

$$S = \text{1}^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{ou } q \text{ est la raison de la suite.}$$

2 V/F Suites convergentes

Enoncé
p. 6

- 1** Vrai. La suite est monotone donc elle est soit croissante soit décroissante. La suite est bornée donc elle est à la fois majorée et minorée. Or, d'après le théorème de convergence monotone, toute suite croissante et majorée converge et toute suite décroissante et minorée converge.
- 2** Faux. Considérons la suite v définie pour tout n par $v_n = u_n - 1$. Si la suite u converge vers 0, la suite v converge vers -1 .
- 3** Vrai. Si la suite (u_n) est positive, alors elle est minorée par 0. Si, de plus, elle est décroissante, alors, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. Les conditions énoncées sont bien suffisantes, cependant, elles ne sont absolument pas nécessaires.
- 4** Faux. Considérons la suite de terme général $u_n = \ln n$. Pour tout entier naturel n strictement positif,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \ln(n+1) - \ln n \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\end{aligned}$$

car pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\begin{aligned}&= \ln\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Cependant la suite (u_n) est divergente.

3 V/F Convergence et opérations

Enoncé
p. 6

- 1** Faux. Il suffit de considérer les suites de terme général $u_n = n$ et $v_n = -n$. Leur somme est la suite nulle qui est convergente ; cependant les deux suites considérées sont divergentes.

ATTENTION

Si deux suites sont convergentes, alors leur somme est une suite convergente. La réciproque de ce théorème est fautive.

- 2** Faux. Si on considère les suites de terme général $u_n = n+1$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$. Leur produit est une suite constante donc la suite $(u_n v_n)$ converge alors que la suite (u_n) est clairement divergente.
- 3** Faux. Ce n'est pas parce que le produit de deux suites converge vers 0 que l'une au moins des deux suites doit converger vers 0. Considérons la

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

suite (u_n) définie par $u_n = 0$ si n est pair et $u_n = 1$ si n est impair et la suite v_n définie par $v_n = 0$ si n est impair et $v_n = 2$ si n est pair. La suite $(u_n v_n)$ converge vers 0 alors que les suites (u_n) et (v_n) ne convergent pas vers 0.

- 4** Faux. Les suites de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ admettent toutes les deux la même limite finie $L = 0$. Or, il n'existe aucun entier n tel que $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}$.

4 **V/F** **Vrai faux**

Enoncé
p. 6

- 1** Faux. Prenons la suite définie pour tout n entier strictement positif par $u_n = \frac{1}{n}$. Aucun terme de cette suite n'est nul, u converge vers 0, mais v tend vers $-\infty$, donc diverge.
- 2** Vrai. En effet,

$$\begin{aligned} u_n \geq 2 &\Rightarrow 0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{par passage à l'inverse} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{2}{u_n} \leq 2 \quad \text{par produit par 2} \\ &\Rightarrow -1 \leq -\frac{2}{u_n} < 0 \quad \text{en prenant l'opposé des 3 termes)} \\ &\Rightarrow -1 \leq v_n < 0. \end{aligned}$$

- 3** Faux. Reprenons la suite u définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{1}{n}$. La suite u est décroissante et la suite v est elle aussi décroissante.
- 4** Faux. u peut être divergente sans tendre vers l'infini ; par exemple, si $u_n = (-1)^n$, u diverge car elle prend alternativement les valeurs 1 et -1 . Alors, v diverge aussi car elle prend alternativement les valeurs 2 et -2 .

5 **V/F** **Vrai ou Faux**

Enoncé
p. 7

- 1** Vrai, d'après la définition des limites infinies donnée dans le cours précédent :

On dit que u admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty,$$

si pour tout réel A , on a $u_n \in [A ; +\infty[$ si n est suffisamment grand.

Il suffit ici de choisir $A = 1\,000\,000$.

- 2** Faux. Considérons par exemple la suite de terme général $u_n = 1\,000\,000 + \frac{1}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, les termes de la suite sont supérieurs à 1 000 000 et néanmoins la suite ne tend pas vers l'infini puisque sa limite est 1 000 000.
- 3** Faux. La suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ est croissante (il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n$ qui est clairement positif) et sa limite est 1.
- 4** Faux. La suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est décroissante, minorée par 0. Or sa limite est 1.
- 5** Faux. Il suffit de calculer les premiers termes de la suite : $u_0 = 3, u_1 = 4, u_2 = 7$. On constate alors que $u_1 = \frac{4}{3}u_0$ et $u_2 = \frac{7}{4}u_1$, ce qui prouve que la suite considérée n'est pas géométrique.
- 6** Vrai. Pour tout entier naturel n ,
$$u_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 2 + 3 = (2n + 3) + 2 = u_n + 2.$$
La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 2.
- 7** Vrai. Il s'agit de la somme des 2 000 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 1. On applique alors la formule du cours.
- 8** Faux. Il s'agit de la somme des 16 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Le résultat correct est $\frac{1 - 2^{16}}{1 - 2}$.

MÉTHODE

Pour montrer qu'une propriété est fautive, il suffit de donner un contre-exemple. C'est la démarche qui a été utilisée ici. Ainsi, pour prouver que la proposition « Si une suite est décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers 0 », on a construit une suite décroissante, minorée par 0 et dont la limite n'était pas 0.

6 En utilisant les définitions

→ **Énoncé**
p. 7

Lycée Hoche, Versailles

- 1 (a)** • Pour la suite u : soit l'intervalle $I =]2 - r ; 2 + r[$, centré sur 2, r étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Cherchons à quelle condition sur n u_n appartient à I (voir page suivante).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$2 - r \leq u_n \leq 2 + r \Leftrightarrow 2 - r \leq \frac{2n+1}{n+2} \leq 2 + r$$

$$\Leftrightarrow (2-r)(n+2) \leq 2n+1 \leq (2+r)(n+2)$$

(car $n+2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n(2-r-2) \leq -4+2r+1 \\ n(2-2-r) \leq 4+2r-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \leq \frac{2r-3}{-r} \\ n \leq \frac{2r+3}{-r} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \geq \frac{2r-3}{r} \\ n \geq \frac{2r+3}{r} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2r+3}{r} \text{ car } \frac{2r-3}{r} < \frac{2r+3}{r}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2r}{r} + \frac{3}{r}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 2 + \frac{3}{r}$$

On a montré que tout intervalle contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, donc la suite converge bien vers 2.

- Pour la suite v : soit l'intervalle $J =]A ; +\infty[$, A étant un nombre positif aussi grand que l'on veut. Cherchons à quelle condition sur n u_n appartient à J .

$$u_n > A \Leftrightarrow n^2 + 3n - 5 > A$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 5 - A > 0$$

On a un trinôme du second degré.

$$\Delta = 9 + 4 \times (5 + A).$$

A étant un nombre positif, Δ est strictement positif. Soit x' et x'' les deux racines, x' étant la plus petite.

$$u_n > A \Leftrightarrow n \in]-\infty ; x'[\cup]x'' ; +\infty[.$$

Donc $u_n > A$ pour tout $n \in]x'' ; +\infty[$.

On a montré qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à J , et ce pour toute valeur positive de A . Donc la suite tend vers $+\infty$ (et est donc divergente).

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \cdot |u_n - 2| < 10^{-4} &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| < 10^{-4} \\
 &\Leftrightarrow \left| -\frac{3}{n+2} \right| < 10^{-4} \\
 &\Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < 10^{-4} \\
 &\Leftrightarrow n+2 > \frac{3}{10^{-4}} \\
 &\Leftrightarrow n > 30\,000 - 2 \\
 &\Leftrightarrow n > 29\,998.
 \end{aligned}$$

Donc on a $|u_n - 2| < 10^{-4}$ à partir de $n = 29\,999$.

$$\bullet v_n > 10^4 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 5 > 10^4$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 5 - 10^4 > 0.$$

$\Delta = 40\,029$. n doit être supérieur à la plus grande des racines, qui vaut environ 98,5.

Donc c'est à partir de $n = 99$ que $v_n > 10^4$.

2 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{6n+1}{2n+3} = \frac{6n\left(1 + \frac{1}{6n}\right)}{2n\left(1 + \frac{3}{2n}\right)} = 3 \frac{1 + \frac{1}{6n}}{1 + \frac{3}{2n}}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6n} = 0$ donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{6n}\right) = 1$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n} = 0$ donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right) = 1$.

D'où, par quotient et produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n+1}{2n+3} = 3$.

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3}$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \frac{n\sqrt{n} + 2}{2n} = \frac{n\sqrt{n}}{2n} + \frac{2}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{1}{n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$ donc, par somme,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

• $n^3 - n^2 \leq c_n \leq n^3 + n^2$ donc $c_n \geq n^2(n-1)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(n-1) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$ par comparaison.

• Pour tout entier $n \geq 1$,

$$n-1 \leq n + (-1)^n \leq n+1 \quad \text{et} \quad 2n-1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n+1,$$

donc :

$$\frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n + (-1)^n} \leq \frac{1}{2n-1} \quad (\text{par passage à l'inverse}),$$

d'où :

$$\frac{n-1}{2n+1} \leq d_n \leq \frac{n+1}{2n-1} \text{ (par produit de réels positifs).}$$

De plus, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{n-1}{2n+1} = \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, par somme, produit et quotient, on a successivement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$\frac{n+1}{2n-1} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}},$$

ce qui donne, d'une façon analogue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

Donc, en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \frac{1}{2}$.

7 Suites monotones

Enoncé
p. 8

Lycée Carnot, Dijon

1 Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Or, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante et à valeurs positives, donc la suite $n \mapsto \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ est croissante à valeurs (strictement) positives. Par conséquent, la suite (u_n) – son inverse – est décroissante.

2 On sait *a priori* que la suite est convergente. En effet, (u_n) est décroissante et minorée par zéro. Mais cela ne donne pas la valeur de la limite, qui est obtenue ici de façon directe grâce à la forme obtenue dans la question 1 : (suite page suivante)

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = +\infty$, et donc la suite (u_n) converge vers 0.

8 Limites de suite

Enoncé
p. 8

Lycée Henri IV, Paris

- 1** Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1$.
Comme, pour tout entier naturel n , $u_n^2 + 1 > 0$, il en résulte que (u_n) est strictement croissante.
- 2** L'inégalité demandée peut s'établir à l'aide d'un raisonnement par récurrence que nous laissons au soin du lecteur (voir chapitre 2).

Il peut aussi s'établir par une méthode parfois appelée « sommes télescopiques » ou « addition en cascade ».

Pour tout $n \geq 0$ entier :

$$\begin{cases} u_n - u_{n-1} = u_{n-1}^2 + 1 \geq 1 \\ u_{n-1} - u_{n-2} = u_{n-2}^2 + 1 \geq 1 \\ \vdots \\ u_2 - u_1 = u_1^2 + 1 \geq 1 \\ u_1 - u_0 = u_0^2 + 1 \geq 1 \end{cases}$$

En sommant membre à membre et après simplification, il vient : $u_n - u_0 \geq n$, soit $u_n \geq n + 1$.

- 3** • 1^{re} méthode. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$, donc d'après le théorème de limite par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- 2^e méthode. La suite étant croissante (question **1**), elle admet une limite finie ou infinie. Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ soit un réel ℓ , on a bien sûr $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$, mais aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 + u_n + 1) = \ell^2 + \ell + 1.$$

Le réel ℓ serait donc solution de l'équation $x^2 + x + 1 = x$.

Or, cette équation est équivalente à $1 + x^2 = 0$ qui n'a pas de solution réelle. Donc un tel réel ℓ ne peut exister.

Conclusion : (u_n) est croissante et non convergente ; par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

9 Avec des sinus

Enoncé
p. 8

Lycée Notre dame de Grandchamp, Versailles

- 1** On sait que : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, quelle que soit la valeur de n .
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-3 \leq -3 \sin(n) \leq 3 \quad (\text{par produit par } -3),$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

d'où :

$$2n^2 - 3 \leq 2n^2 - 3 \sin(n) \leq 2n^2 + 3 \text{ (en ajoutant } 2n^2 \text{ aux trois nombres).}$$

On a donc, en divisant l'encadrement précédent par le réel strictement positif $n^2 + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} = \frac{2n^2 \left(1 - \frac{3}{2n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 2 \frac{1 - \frac{3}{2n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc, par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{2n^2}\right) = 1$.

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$.

D'où, par quotient et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} = 2$.

Par un procédé analogue, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} = 2$.

Donc, en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

2 (a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} - 2 \leq u_n - 2 \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} - 2.$$

En s'aidant de ce qui a été fait dans la question **1**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{-5}{n^2 + 1} \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

(b) Si $u_n - 2 > 0$, $|u_n - 2| = u_n - 2$ et donc $|u_n - 2| \leq \left| \frac{1}{n^2 + 1} \right|$.

Si $u_n - 2 < 0$, $|u_n - 2| = -(u_n - 2)$ et donc $|u_n - 2| \leq \frac{5}{n^2 + 1}$ (on prend les opposés des deux expressions de gauche dans la double inégalité ci-dessus).

De plus, $\frac{5}{n^2 + 1} > \frac{1}{n^2 + 1}$ donc si on choisit n tel que $\frac{5}{n^2 + 1}$ soit inférieur à 10^{-3} , on sera sûr que la distance de u_n à 2 sera aussi inférieure à 10^{-3} .

$$\frac{5}{n^2 + 1} < 10^{-4} \Leftrightarrow n^2 + 1 > 5\,000 \Leftrightarrow n^2 > 4\,999.$$

n étant un entier positif, on a donc $n > \sqrt{4\,999}$; or, $\sqrt{4\,999} \approx 70,7$ à 10^{-1} près. Il faut donc prendre $n \geq 71$.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad u_n \leq 2 &\Leftrightarrow u_n - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2n^2 - 3 \sin(n)}{n^2 + 1} - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3 \sin(n) - 2}{n^2 + 1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -3 \sin(n) - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(n) \geq -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Or, $\sin(4) < -0,75$ à 10^{-2} près, donc $\sin(4) < -\frac{2}{3}$, donc on n'a pas toujours $u_n \leq 2$.

10 Avec une somme

Enoncé
p. 9

Lycée Hoche, Versailles

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc, $u_{n+1} - u_n > 0$, et la suite est alors croissante.

2 Pour tout $p \geq 2$,

$$\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \frac{p - (p-1)}{p(p-1)} = \frac{1}{p^2 - p}.$$

Or, $p^2 - p < p^2$ donc $\frac{1}{p^2 - p} > \frac{1}{p^2}$.

On a donc bien $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.

3 (a) $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ donc, d'après la question 2,

$$u_n \leq \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + 1.$$

Or,

$$\sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3-1} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

Dans cette somme, seul le premier terme (1) et le dernier $\left(\frac{1}{n}\right)$ ne vont pas s'annuler deux à deux.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On a donc bien $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

- (b) La suite est croissante (question **1**) et majorée par 2 d'après le **3.a**, donc elle converge.
- (c) $u_9 \approx 1,540$ et $u_{10} \approx 1,550$.

11 Avec un algorithme

Enoncé
p. 9

Lycée Monet, Paris

Partie A – Approche à l'aide d'un algorithme

- 1** Pour i allant de 1 à n
Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{\sqrt{i}}$.

- 2** Voici le programme :

TI	CASIO
PROGRAM:ABC	==== ABC ====
:Prompt N	"N="?"→N
:0→U	0→U
:For(I,1,N)	For 1→I To N
:U+1/√(I)→U	U+1÷√I→U
:End	Next
:Disp U	U

On obtient $u_{10} \approx 5,021$, $u_{20} \approx 7,595$, et $u_{100} \approx 18,590$ à 10^{-3} près.

- 3** Au vu de ces valeurs, on peut penser que la suite tend vers $+\infty$.

Partie B

- 1** $1 \leq i \leq n \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{i} \leq \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est croissante
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{i}}$ car la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}_+^*

- 2** $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, d'après la question précédente,

$$u_n \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{soit :} \quad u_n \geq n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

On a donc bien $u_n \geq \sqrt{n}$.

- 3** Par comparaison, on sait donc que la suite tend vers $+\infty$.

12 Interpréter un algorithme

Enoncé
p. 10

Lycée La Bruyère, Versailles

1 Le tableau complété est le suivant :

n	a	b	u	v
n	a	b	u	v
0	3	7	3	7
1	5	5,385	5	5,385
2	5,193	5,196	5,193	5,196

2 Pour n donné, les valeurs affichées sont les valeurs de u_n et v_n .

3 (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2$

$$= \frac{2u_n^2 + 2v_n^2 - u_n^2 - 2u_nv_n - v_n^2}{4}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{4}$$

$$= \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2.$$

(b) • Pour $n = 0$, on a : $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Or, par hypothèse, $a < b$ donc on a bien $u_0 < v_0$.

• D'après la question **3.a**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(v_{n+1} - u_{n+1})(v_{n+1} + u_{n+1}) = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2.$$

L'énoncé admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$; ainsi, $(v_{n+1} + u_{n+1}) > 0$.

Comme $\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2 \geq 0$ pour tout n , il en résulte que $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$ pour tout n . Soit $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

• En vertu des deux points précédents, on a l'inégalité $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

4 (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$ (par définition de u_n).

$$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ d'après la question précédente, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, ce qui prouve que la suite u est croissante.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la définition de v_n :

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - v_n^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} (v_{n+1} - v_n)(v_{n+1} + v_n) &= \frac{u_n^2 + v_n^2 - 2v_n^2}{2} \\ &= \frac{u_n^2 - v_n^2}{2} \\ &= \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{2}. \end{aligned}$$

Or, comme tous les v_n sont positifs, on a $v_{n+1} + v_n > 0$ et les u_n aussi donc $u_n + v_n > 0$.

$v_{n+1} - v_n$ a donc le même signe que $u_n - v_n$, c'est-à-dire négatif car $u_n \leq v_n$.

$v_{n+1} - v_n \leq 0$ pour tout n traduit bien que v est une suite décroissante.

5 (a) On a : $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0$.

Par conséquent, la suite u est croissante et majorée par v_0 ; elle est donc convergente. De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0 ; elle est donc convergente.

(b) Soit L la limite de la suite u et L' celle de la suite v . On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Ainsi, $L = \frac{L + L'}{2}$, ce qui prouve bien que $L = L'$.

Chapitre 2

Suites et récurrence

Plan du chapitre

1. Raisonnement par récurrence
2. Comportement à l'infini de (q^n)
3. Suites arithmético-géométriques

1 Raisonnement par récurrence

Exercice type 1

Lycée Carnot, Paris

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Propriété 1

Soit \mathcal{P}_n une propriété dépendant de l'entier naturel n .

Si

- pour un entier n_0 , \mathcal{P}_{n_0} est vraie (initialisation),
- pour tout naturel $k \geq n_0$, le fait que \mathcal{P}_k soit vraie implique que \mathcal{P}_{k+1} est vraie (hérédité),

alors \mathcal{P}_n est vraie pour tout n supérieur à n_0 .

Remarque : si le fait que \mathcal{P}_k est vraie implique que \mathcal{P}_{k+1} est vraie alors on dira que la propriété est héréditaire.

À RETENIR

Une démonstration par récurrence comporte impérativement deux étapes : initialisation et hérédité.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Carnot, Paris

- *Initialisation* : Comme :

$$1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6},$$

la propriété est vraie au rang 1.

➔ Solution de l'exercice type 1 (suite)

Lycée Carnot, Paris

- *Hérédité* : Soit k un entier non nul arbitrairement fixé ; supposons la propriété vraie au rang k :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, soit :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k+1}{6} [k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Ainsi, on a montré que si la propriété est vraie au rang k , alors elle est vraie au rang $k+1$.

La propriété considérée est donc vraie pour tout rang $n \geq 1$ en vertu du principe de récurrence.

2 Comportement à l'infini de (q^n)

Propriété 2

Pour tout entier a strictement positif et pour tout entier naturel n , on a :

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Propriété 3

Soient q un nombre réel et n un entier naturel.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q < -1$, alors (q^n) n'a pas de limite en $+\infty$.

Propriété 4

Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ converge vers 0.

3 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

Une suite (u_n) arithmético-géométrique est une suite définie par son premier terme et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b,$$

a et b étant des réels non nuls, et a étant de plus différent de 1.

Remarques

- Si a était égal à 0, on aurait une suite constante.
- Si b était égal à 0, on aurait une suite géométrique.
- Si a était égal à 1, on aurait une suite arithmétique.

Il n'y a pas de résultat de cours à connaître sur ces suites, mais il est utile de savoir les reconnaître pour comprendre la démarche décrite dans un exercice.

Exercice type 2

Lycée Descartes, Coumon

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = 0,5u_n - 3.$$

- 1** Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 6$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- 2** Pour tout entier n , exprimer v_n en fonction de n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 3** Étudier la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite en $+\infty$ si elle existe.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 2

Lycée Descartes, Coumon

1 Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on cherche à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

Par définition de v_n et de la relation de récurrence qui définit u_n , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6.$$

Or,

$$u_{n+1} = 0,5u_n - 3,$$

et comme $u_n = v_n - 6$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,5(v_n - 6) - 3 \\ &= 0,5v_n - 6. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,5v_n + 6 - 6 \\ &= 0,5v_n. \end{aligned}$$

Cela montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

Son premier terme v_0 est égal à $u_0 + 6$, donc $v_0 = 7$.

2 Le terme général de la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 7 est :

$$v_n = 7 \times (0,5)^n.$$

On en déduit u_n grâce à la relation $u_n = v_n - 6$.

Donc,

$$u_n = 7 \times (0,5)^n - 6.$$

3 D'après le cours, comme $-1 < 0,5 < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n = 0.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [7 \times (0,5)^n - 6] = -6.$$

La suite (u_n) admet donc -6 comme limite en $+\infty$.

1 **V/F** **Convergence de suites**

10 min Corrigé p. 35

Soient (u_n) et (v_n) des suites numériques définies sur \mathbb{N} . Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Si $u_0 = 3$ et $\frac{u_2}{u_1} = 0,5$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
- 2** Si (u_n) est une suite arithmétique de raison 0,5, alors elle converge vers 0.
- 3** Si (u_n) est une suite géométrique de raison 3, alors elle diverge vers $+\infty$.
- 4** Si (u_n) est une suite géométrique de raison -3 , alors elle n'a pas de limite en $+\infty$.
- 5** Si (u_n) est une suite géométrique de raison -2 , et (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, alors la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge.

2 **V/F** **Terme u_{n+1} fonction de n et u_n**

10 min Corrigé p. 35

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = nu_n$. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** La suite (u_n) est une suite géométrique.
- 2** La suite (u_n) est strictement croissante.
- 3** Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1)$.
- 4** La suite (u_n) diverge.

3 **V/F** **Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (1)**

10 min Corrigé p. 35

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$ et (u_n) la suite définie par la donnée de son premier terme u_0 tel que $u_0 > e$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Pour tout entier naturel n , $u_n > e$.
- 2** La suite (u_n) est croissante.
- 3** L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions 0 et e .
- 4** La suite (u_n) converge.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 QCM Suite définie par récurrence

10 min Corrigé p. 36

On considère la suite définie par récurrence sur \mathbb{N} par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Pour chaque question, désigner la bonne réponse :

- 1 La suite (u_n) est :
 a arithmétique b géométrique c aucun des deux
- 2 On peut définir une suite géométrique (v_n) par la relation :
 a $v_n = u_n - 1$ b $v_n = 2u_n + 2$ c $v_n = 2u_n$
- 3 La suite (u_n) :
 a converge vers 2
 b admet $+\infty$ comme limite
 c admet $-\infty$ comme limite
- 4 La suite (w_n) est définie par la même relation de récurrence que (u_n) , c'est-à-dire $w_{n+1} = 2w_n + 1$, mais son terme initial vaut -1 . Alors la suite (w_n) :
 a converge vers 0
 b converge vers -1
 c n'est pas convergente

5 Démonstration par récurrence

★ 10 min Corrigé p. 36

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

- 1 $u_n < 6$
- 2 $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$

6 Terme général d'une suite

★ 10 min Corrigé p. 37

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

- 1 On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

- 2 Soit (v_n) définie par $v_0 = v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^{n+1} - 3^n$.

7 Suite arithmétique



10 min

Corrigé
p. 38

Lycée François 1^{er}, Fontainebleau

Soit une suite (a_n) vérifiant pour tout entier n la relation suivante :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n^2 - 3n.$$

Démontrer que (a_n) est une suite arithmétique.

8 Suite homographique



20 min

Corrigé
p. 38

Lycée Buffon, Paris

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

1 (a) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

(b) Démontrer que pour tout $n, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.

(c) En déduire par récurrence qu'on a toujours $u_n > 1$ et donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout n .

2 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout n par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

(a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

(b) Écrire v_n puis u_n en fonction de n .

9 Suites récurrentes monotones



15 min

Corrigé
p. 40

Lycée Fénelon, Paris

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

1 (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si $u_0 \geq 1$ et décroissante si $u_0 \leq 1$.

(b) Que dire si $u_0 = 1$?

2 (a) Exprimer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0 et de n .

(b) Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0 .

10 Suite convergente



30 min

Corrigé
p. 41

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

Soit $0 < k < 1$ et la suite u définie par $u_0 = 1$ et :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 + k^n) u_n.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 1 Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$,

$$u_n = (1+k)(1+k^2)(1+k^3) \cdots (1+k^{n-1}).$$

- 2 Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln u_n$.

(a) Justifier que, pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

(b) En déduire que la suite v est majorée par $\frac{k}{1-k}$.

- 3 Démontrer que la suite u est majorée.

Étudier le sens de variation de u .

En déduire que la suite u est convergente.

11 Récurrence et algorithme



25 min

Corrigé
p. 43

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-fossés

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right).$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier n , $u_n > 0$.

- 1 On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{7}{x} \right).$$

(a) Démontrer que la fonction f admet un minimum.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq \sqrt{7}$.

- 2 (a) Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite u est convergente ?

(c) Déterminer alors sa limite L .

- 3 Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}.$$

- 4 On définit la suite d par $d_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2.$$

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$u_n - \sqrt{7} \leq d_n.$$

(b) Voici un algorithme :

Variables
 n et p sont des entiers naturels
 d est un réel

Entrée
 Demander à l'utilisateur la valeur de p

Initialisations
 Affecter à d la valeur 1
 Affecter à n la valeur 0

Traitement
 Tant que $d > 10^{-p}$
 Affecter à d la valeur $0,5d^2$
 Affecter à n la valeur $n + 1$

Sortie
 Afficher n

En entrant la valeur 9, l'algorithme donne la valeur 5.
 Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
 Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

12 Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (2) ★★★ 20 min Corrigé p. 44

Lycée Bachelard, Chelles

Soit f la fonction définie pour tout $x > \frac{1}{2}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}.$$

1 Démontrer que pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$.

On peut donc définir la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

2 On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que pour tout entier n :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n).$$

- (a) Vérifier que v_n et w_n existent pour tout entier n .
- (b) Montrer que w est une suite géométrique.
- (c) Exprimer w_n puis v_n en fonction de n .

En déduire que :

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

Quelle est la limite de la suite u ?

13 Suite de Fibonacci



60 min

Corrigé
p. 45

Lycée des Arènes, Toulouse

On considère la suite (F_n) définie par :

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

quel que soit l'entier naturel n .

On notera que la troisième information signifie que tout terme de la suite (à partir du troisième) est égal à la somme des deux termes qui le précèdent.

Pour information, F_n représente l'effectif de la population des ancêtres de n -ième génération d'une abeille mâle (dans un modèle simplifié).

1 Calculer F_2, F_3, F_4 et F_5 .

2 Démontrer par récurrence que :

$$F_n \geq n,$$

quel que soit l'entier naturel n .

Que peut-on en déduire à propos de la limite de la suite (F_n) ?

3 Démontrer par récurrence que :

$$F_n \times F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n,$$

quel que soit l'entier naturel n .

4 Pour la suite de l'exercice, on considère les suites (Q_n) , (u_n) et (v_n) définies par les égalités :

$$Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad u_n = Q_{2n}, \quad v_n = Q_{2n+1},$$

quel que soit l'entier naturel n .

(a) Déterminer l'expression de $Q_{n+2} - Q_n$ en fonction de termes de la suite F .

(b) Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .

(c) Exprimer $v_n - u_n$ en fonction de n , F_{2n} et F_{2n+1} , et en déduire successivement que :

- $u_n \leq v_n$.
- ces deux suites convergent.
- $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
- (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
- (Q_n) converge.

(d) Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Q_n^2 - Q_n - 1) = 0.$$

(e) En déduire la valeur de la limite de la suite (Q_n) .

1 **V/F** **Convergence de suites**

Enoncé
p. 29

- 1** Faux. Le rapport $\frac{u_2}{u_1}$ ne donne aucun renseignement sur le terme général de la suite. Par exemple, la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ et $u_n = n$ pour tout $n \geq 3$ vérifie les conditions mais ne converge pas vers 0. Ceci ne serait vrai que si on savait que la suite est géométrique, ce qui n'est pas précisé dans l'énoncé.
- 2** Faux. Le terme général de la suite est $u_n = u_0 + 0,5n$. Cette suite arithmétique diverge vers $+\infty$.
- 3** Faux. (3^n) a bien pour limite $+\infty$, mais la limite de la suite géométrique dépend du signe de u_0 et peut-être de $-\infty$ si $u_0 < 0$ et égale à 0 si $u_0 = 0$.
- 4** Vrai. La suite prend alternativement des valeurs positives et négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue, donc n'a pas de limite.
- 5** Vrai. $u_n = u_0(-2)^n$ et $v_n = v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n$, donc $u_n \times v_n = u_0 \times v_0 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^n$.
Comme $\left|\frac{-2}{3}\right| < 1$, la suite géométrique produit converge vers 0.

2 **V/F** **Terme u_{n+1} fonction de n et u_n**

Enoncé
p. 29

- 1** Faux. On a $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, donc si (u_n) avait été une suite géométrique, on aurait $u_3 = 1$. Or, $u_3 = 2$.
- 2** Faux. On remarque que $u_2 = u_1 = 1$. La suite n'est donc pas strictement croissante. Cependant, elle est croissante.
- 3** Vrai. Ce résultat se démontre par récurrence.
L'égalité est vérifiée pour $n = 2$.
Si, pour un entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a :
 $u_k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (k-1)$, alors comme $u_{k+1} = ku_k$, on obtient
 $u_{k+1} = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (k-1) \times k$, ce qui permet de montrer l'hérédité.
- 4** Vrai. On a, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n \geq 1$ car :
 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \geq 1$. Donc pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq n-1$
car $u_n = (n-1)u_{n-1}$. D'après le théorème de comparaison, on a bien
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. La suite diverge.

3 **V/F** **Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (1)**

Enoncé
p. 29

- 1** Vrai. Ce résultat se démontre par un raisonnement par récurrence. On sait par hypothèse que $u_0 > e$. De plus, si, pour un entier k fixé, on a $u_k > e$ alors $\ln u_k > 1$ et par suite, $u_k \ln u_k > e$ soit $u_{k+1} > e$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2** Vrai. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = u_n(\ln u_n - 1)$. Comme on a établi à la première question que, pour tout entier naturel n , $u_n > e$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite est strictement croissante.
- 3** Faux. L'équation admet pour unique solution le nombre e . La fonction f n'est pas définie en 0.
- 4** Faux. Supposons que la suite (u_n) converge vers un réel L , comme pour tout entier naturel n , $u_n > e$, on aurait, d'après le théorème de compatibilité de l'ordre et de la limite, $L \geq e$. De plus la suite extraite (u_{n+1}) convergerait aussi vers L . Comme la fonction f est continue sur son ensemble de définition, L vérifierait l'égalité $L = L \ln L$. Or d'après la question précédente, cette équation admet pour unique solution le nombre e , ce qui engendre une contradiction puisque $u_0 > e$ et la suite est strictement croissante. On peut donc en déduire que la suite (u_n) diverge.

4 QCM Suite définie par récurrence

Enoncé
p. 30

- 1** Réponse **c** : la suite est arithmético-géométrique.
- 2** Réponse **b** : $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 2 = 2(2u_n + 1) + 2 = 2(2u_n + 2) = 2v_n$.
- 3** Réponse **c** : la suite (v_n) du **2** est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -2$. Elle a donc pour limite $-\infty$.
Comme $u_n = \frac{v_n - 2}{2}$, (u_n) a donc aussi pour limite $-\infty$.
- 4** Réponse **b** : $w_0 = -1$ et $w_1 = 2 \times (-1) + 1 = -1$. On démontre aisément par récurrence que la suite (w_n) est constante de valeur -1 et converge donc vers -1 .

5 Démonstration par récurrence

Enoncé
p. 30

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

- 1** Soit \mathcal{P}_n la propriété définie par « $u_n < 6$ ».
- Par hypothèse, $u_0 = -2$ donc $u_0 < 6$, donc \mathcal{P}_0 est vraie.
 - Supposons que \mathcal{P}_k est vraie au rang $k \geq 0$.

Alors,

$$u_k < 6 \Rightarrow \frac{1}{2}u_k < 3 \Rightarrow \frac{1}{2}u_k + 3 < 6,$$

donc \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

On en déduit, d'après le principe de récurrence, que \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n , c'est-à-dire pour tout entier naturel n , $u_n < 6$.

- 2** Soit \mathcal{Q}_n la propriété définie par : $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$.

• Comme $6 - \frac{8}{2^0} = -2 = u_0$, alors \mathcal{Q}_0 est vraie.

• Supposons que \mathcal{Q}_k est vraie au rang $k \geq 0$.
Alors ,

$$u_k = 6 - \frac{8}{2^k} \Rightarrow \frac{1}{2}u_k = 3 - \frac{8}{2^{k+1}} \Rightarrow \frac{1}{2}u_k + 3 = 6 - \frac{8}{2^{k+1}}.$$

Donc \mathcal{Q}_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 6 - \frac{8}{2^n}.$$

Remarque : on en déduit que la limite de u_n est 6.

6 Terme général d'une suite

Enoncé
p. 30

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 Raisonnons par récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, on a : $2^n + n + 1 = 1 + 0 + 1 = 2 = u_0$.
- Supposons la formule vraie pour un entier naturel k arbitrairement fixé.
On calcule :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - k \\ &= 2(2^k + k + 1) - k \\ &= (2^{k+1} + 2k + 2) - k \\ &= 2^{k+1} + k + 2 \\ &= 2^{k+1} + (k + 1) + 1. \end{aligned}$$

C'est bien la formule au rang $(k + 1)$.

On a donc prouvé par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $u_n = 2^n + n + 1$.

2 Nous allons démontrer par récurrence l'assertion :

$$\mathcal{P}(n) : \left[(*) v_n = 2^{n+1} - 3^n \text{ et } (**) v_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1} \right]$$

- Pour $n = 0$, on a $2^{n+1} - 3^n = 2 - 1 = 1 = v_0$ d'où $(*)$.
Enfin, $2^{n+2} - 3^{n+1} = 4 - 3 = 1 = v_1$ qui est $(**)$: on a vérifié $\mathcal{P}(0)$.
- Supposons l'assertion $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain entier naturel k .
On sait déjà : $v_{k+1} = 2^{k+2} - 3^{k+1}$ (d'après l'hypothèse de récurrence),
qui est la partie $(*)$ de l'assertion $\mathcal{P}(k + 1)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On calcule :

$$\begin{aligned} v_{k+2} = 5v_{k+1} - 6v_k &= 5(2^{k+2} - 3^{k+1}) - 6(2^{k+1} - 3^k) \\ &= 5 \times 2^{k+2} - 5 \times 3^{k+1} - 6 \times 2^{k+1} + 6 \times 3^k \\ &= 5 \times 2^{k+2} - 5 \times 3^{k+1} - 3 \times 2^{k+2} + 2 \times 3^{k+1} \\ &= 2 \times 2^{k+2} - 3 \times 3^{k+1} \\ &= 2^{k+3} - 3^{k+2} \end{aligned}$$

qui est (***) au rang $(k + 1)$. On a ainsi vérifié $\mathcal{P}(k + 1)$.

On en déduit, d'après le principe de récurrence, que, pour tout entier naturel n , $v_n = 2^{n+1} - 3^n$.

ATTENTION

La suite v_n est une suite linéaire récurrente d'ordre deux (chaque terme dépend des deux termes qui le précèdent). Il est donc nécessaire de modifier l'hypothèse de récurrence. Une telle récurrence est parfois appelée récurrence double.

7 Suite arithmétique

Enoncé
p. 31

Lycée François 1^{er}, Fontainebleau

On calcule :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} &= 2(n-1)^2 - 3(n-1) = 2n^2 - 4n + 2 - 3n + 3 \\ &= 2n^2 - 7n + 5. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} a_n &= (a_1 + \dots + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1}) \\ &= (2n^2 - 3n) - (2n^2 - 7n + 5) \\ &= 4n - 5. \end{aligned}$$

Le terme général de la suite a_n est de la forme $a_0 + nr$.

Ainsi, (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = -5$ et de raison 4.

MÉTHODE

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut prouver que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$ où r est une constante (la raison de la suite) ou que le terme général de la suite est de la forme $u_0 + nr$.

8 Suite homographique

Enoncé
p. 31

Lycée Buffon, Paris

1 (a) $u_1 = \frac{4}{3}, u_2 = \frac{6}{5}$ et $u_3 = \frac{8}{7}$.

(b) Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} &= \frac{(2u_n - 1) + (u_n - 1)}{2u_n - 1} \\ &= \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \\ &= u_{n+1}. \end{aligned}$$

(c) Soit \mathcal{P}_n la propriété définie par : « $u_n > 1$ ».

- Par hypothèse, $u_0 = 2$ donc $u_0 > 1$. Il en résulte que \mathcal{P}_0 est vraie.
- Supposons que \mathcal{P}_k est vraie au rang $k \geq 0$.

Alors, $2u_k - 1 > 0$ et $u_k - 1 > 0$, d'où $\frac{u_k - 1}{2u_k - 1} > 0$, et donc :

$$u_{k+1} = 1 + \frac{u_k - 1}{2u_k - 1} > 1.$$

Alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Donc, pour tout entier naturel n , \mathcal{P}_n est vraie.

Alors, pour tout entier naturel n , $u_n > 1 > \frac{1}{2}$.

Comme, pour tout entier naturel n , $u_n > \frac{1}{2}$, il en résulte que $2u_n - 1$ est non nul et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie pour tout n .

2 (a) Remarquons d'abord que, d'après la question précédente, pour tout n , $u_n \neq 1$; la suite (v_n) est donc bien définie.

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - \frac{2u_n - 1}{2u_n - 1}} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2 - (2u_n - 1)}{2u_n - 1}} = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}.$$

D'où :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2.$$

La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 2.

(b) On calcule $v_0 = \frac{1}{2 - 1} = 1$. Alors pour tout entier naturel n :

$$v_n = 1 + 2n \quad \text{et} \quad u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{2n + 2}{2n + 1}.$$

ATTENTION

Avant de travailler sur une suite, il faut toujours s'assurer (même si l'énoncé ne le précise pas) qu'elle est bien définie. Dans cet exercice, il est nécessaire, pour que la suite (u_n) soit bien définie, que tous les termes de la suite soient différents de $\frac{1}{2}$. En général, une telle propriété se prouve en minorant ou en majorant les termes de la suite et se démontre par récurrence.

9 Suites récurrentes monotones

Enoncé
p. 31

Lycée Fénélon, Paris

1 (a) Une récurrence immédiate montre que $u_n \geq 0$ pour tout n .

- Supposons que $u_0 \geq 1$.

Soit \mathcal{P}_n la proposition définie par : $u_n \geq 1$.

La proposition est vraie de manière évidente pour $n = 0$.

Supposons que \mathcal{P}_k est vraie pour un entier k arbitrairement fixé.

Alors, comme $u_{k+1} = u_k^2$, on a $u_{k+1} \geq 1$, donc \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Donc si \mathcal{P}_k est vraie alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

On a ainsi prouvé par récurrence que, pour tout naturel n , $u_n \geq 1$.

En multipliant de part et d'autre par u_n (qui est positif), on conclut que :

$$u_{n+1} \geq u_n ,$$

pour tout n , soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante.

Remarque : ici, la récurrence à faire n'est pas directement donnée, il faut donc « l'inventer ».

- Supposons que $u_0 \leq 1$.

Soit \mathcal{Q}_n la proposition définie par : $u_n \leq 1$.

La proposition est vraie de manière évidente pour $n = 0$.

Supposons que \mathcal{Q}_k est vraie pour un entier k arbitrairement fixé.

Alors $u_{k+1} = u_k^2$ donc $u_{k+1} \leq 1$, donc \mathcal{Q}_{k+1} est vraie.

On a prouvé par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n .

En multipliant de part et d'autre par u_n , on conclut que :

$$u_{n+1} \leq u_n ,$$

pour tout n , soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

(b) Si $u_0 = 1$ alors $u_0 \leq 1$ et $u_0 \geq 1$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois croissante et décroissante, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante.

2 (a) L'étude des premiers termes conduit à considérer la propriété \mathcal{P}_n définie par : $u_n = u_0^{2^n}$.

Comme $2^0 = 1$, \mathcal{P}_0 est vraie.

Soit k un entier arbitrairement fixé. Supposons \mathcal{P}_k vraie.

Alors, $u_{k+1} = u_k^2 = (u_0^{2^k})^2 = u_0^{2^{k+1}}$.

Donc si \mathcal{P}_k est vraie, alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Par conséquent, pour tout entier n , \mathcal{P}_n est vraie.

(b) Ainsi,

$$\begin{cases} \text{pour } u_0 > 1, & \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \\ \text{pour } 0 \leq u_0 < 1, & \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \text{pour } u_0 = 1, & \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \end{cases}$$

10 Suite convergente

Enoncé
p. 31

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

1 Pour tout $n \geq 1$, on note \mathcal{P}_n la proposition :

$$u_n = (1+k)(1+k^2)(1+k^3) \cdots (1+k^{n-1}).$$

- On a $u_1 = 2$, ce qui montre que la propriété est vraie pour $n = 1$.
- Supposons que la propriété est vraie pour un entier p non nul arbitrairement fixé.

On sait par hypothèse que $u_{p+1} = (1+k^p)u_p$. On remplace alors u_p dans cette expression par sa valeur. Il vient :

$$u_{p+1} = (1+k^p)(1+k)(1+k^2)(1+k^3) \cdots (1+k^{p-1}).$$

Donc si \mathcal{P}_p est vraie, alors \mathcal{P}_{p+1} est vraie.

Par conséquent, pour tout entier $n > 0$, \mathcal{P}_n est vraie.

2 Remarquons que, d'après la question précédente, la suite (u_n) est à valeurs strictement positives. La suite (v_n) est donc bien définie.

(a) Considérons la fonction définie pour tout réel x positif par :

$$f(x) = \ln(x+1) - x.$$

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1,$$

soit : $f'(x) = -\frac{x}{1+x}$. La fonction f' est donc négative sur $[0; +\infty[$, donc la fonction f est décroissante sur son ensemble de définition. Elle admet ainsi un maximum en 0 et, pour tout réel x positif, on a : $f(x) \leq f(0)$, soit $f(x) \leq 0$.

Il en résulte que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$.

(b) Par hypothèse, $v_n = \ln u_n$.

On remplace alors u_n par l'expression obtenue à la première question :

$$v_n = \ln \left[(1+k)(1+k^2)(1+k^3) \cdots (1+k^{n-1}) \right].$$

Comme $0 < k < 1$, tous les facteurs du produit sont strictement positifs, donc, en appliquant les propriétés de la fonction logarithme,

$$v_n = \ln(1+k) + \ln(1+k^2) + \cdots + \ln(1+k^{n-1}).$$

MÉTHODE

Pour prouver une égalité du type $f(x) < g(x)$, on étudie la fonction $d(x) = f(x) - g(x)$, et son tableau de variation permettra d'en déterminer le signe.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Comme $0 < k < 1$, on peut appliquer l'inégalité démontrée dans la question précédente à chacun des termes de la somme :

$$\begin{aligned} \ln(1+k) &\leq k \\ \ln(1+k^2) &\leq k^2. \end{aligned}$$

On additionne ensuite membre à membre les $n - 1$ inégalités ainsi obtenues :

$$v_n \leq k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n-1}.$$

On reconnaît dans le second membre de l'inégalité la somme des $n - 1$ premiers termes de la suite géométrique de raison k et de premier terme k . On peut alors écrire, comme $0 < k < 1$:

$$v_n \leq k \left(\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k} \right),$$

soit :

$$v_n \leq \left(\frac{k}{1 - k} \right) - \left(\frac{k^n}{1 - k} \right).$$

Comme $\frac{k^n}{1 - k}$ est positif, il en résulte que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n \leq \frac{k}{1 - k}.$$

- 3** D'après la question précédente, la suite v est majorée. Or, pour tout naturel n ,

$$u_n = e^{v_n},$$

car la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante sur \mathbb{R} , donc la suite u est aussi majorée.

La suite u est à termes strictement positifs.

D'après la relation de la question **1**, pour tout naturel n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (1 + k^n).$$

Comme $0 < k < 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Il en résulte que la suite u est croissante.

La suite u est croissante et majorée donc elle est convergente.

MÉTHODE

On ne peut pas choisir comme majorant de la suite v le réel $\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}$. En effet, un majorant est une constante et ne peut donc dépendre de n . Il est donc indispensable de majorer la quantité $\frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}$ par $\frac{k}{1 - k}$ qui, lui, est indépendant de n .

11 Récurrence et algorithme

Enoncé
p. 32

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-fossés

1 (a) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{7}{x^2}$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{7}{2x^2}$
 $\Leftrightarrow x^2 > 7$
 $\Leftrightarrow x > \sqrt{7}$ sur $]0; +\infty[$.

Donc f est décroissante sur $]0; \sqrt{7}]$ et croissante sur $[\sqrt{7}; +\infty[$.
 Donc la fonction f admet un minimum en $\sqrt{7}$.

(b) u_n est toujours positif par hypothèse et d'après la **1.a**, pour tout n ,
 $f(u_n) \geq \sqrt{7}$.

Or, $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est croissante sur $]0; \sqrt{7}]$ donc pour tout
 $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{7}$.

D'autre part, la propriété est vraie pour $n = 0$ car $3 > \sqrt{7}$.

Donc, pour tout entier naturel n , $u_n \geq \sqrt{7}$.

2 (a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right) - u_n$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{u_n} - u_n \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{7 - u_n^2}{u_n} \right)$.

Or, tous les termes de la suite sont positifs et $u_n \geq \sqrt{7}$ donc $u_n^2 \geq 7$.
 Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(b) La suite est décroissante et minorée par $\sqrt{7}$. Elle est donc convergente.

(c) $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$.

Donc,

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{7}{L} \right) \Leftrightarrow \frac{L}{2} = \frac{7}{2L} \Leftrightarrow L^2 = 7.$$

Donc, $L = \sqrt{7}$ (car tous les termes de la suite sont positifs).

3 Pour tout n , $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right) - \sqrt{7}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{u_n^2 + 7 - 2u_n\sqrt{7}}{u_n} \right)$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$.

4 (a) $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \approx 0,354$, et $d_0 = 1$ donc $u_0 - \sqrt{7} \leq d_0$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Supposons que pour une valeur de n quelconque, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.
 Montrons qu'alors $u_{n+1} - \sqrt{7} \leq d_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{7} \leq d_n &\Rightarrow (u_n - \sqrt{7})^2 \leq d_n^2 \text{ après avoir élevé au carré} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{7})^2 \leq \frac{1}{2} d_n^2 \text{ après avoir divisé par 2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{7})^2 \leq d_{n+1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n} \leq \frac{d_{n+1}}{u_n} \text{ après avoir divisé par } u_n \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n} \leq d_{n+1}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que $u_n \geq \sqrt{7} > 1$. On a donc bien $u_{n+1} - \sqrt{7} \leq d_{n+1}$.

Donc, pour tout entier naturel n , $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

(b) $d_5 \leq 10^{-9}$. On a :

$$u_5 - \sqrt{7} \leq d_5 \leq 10^{-9}.$$

Donc u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

12 Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (2)

Enoncé
p. 33

Lycée Bachelard, Chelles

1 Pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{x^2}{2x-1} - 1 \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{2x-1} \\ &= \frac{(x-1)^2}{2x-1}. \end{aligned}$$

Or, $(x-1)^2 > 0$ et $2x-1 > 0$ donc, pour tout $x > 1$, $f(x) - 1 > 0$, soit $f(x) > 1$.

2 (a) On montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$, donc $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ existe ($u_n \neq 0$) et $v_n > 0$. Par conséquent $w_n = \ln(v_n)$ existe.

Les suites (v_n) et (w_n) sont bien définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n^2}{2u_n - 1},$$

d'où :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{\frac{u_n^2}{2u_n-1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}} \\ &= \frac{\frac{u_n^2 - (2u_n-1)}{2u_n-1}}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}} \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2} \\ &= \frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2} \\ &= v_n^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = 2 \ln(v_n) = 2w_n$.

Donc w est géométrique de raison 2.

De plus, $w_0 = \ln(v_0)$ et $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{1}{2}$, donc $w_0 = -\ln 2$.

(c) Pour tout n , on a :

$$w_n = -\ln 2 \times 2^n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times 2^n$$

et

$$v_n = e^{w_n} = e^{2^n \times \ln \frac{1}{2}} = \left(e^{\ln \frac{1}{2}}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

De plus,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \iff u_n = \frac{1}{1 - v_n},$$

d'où :

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

13 Suite de Fibonacci

→ Enoncé
p. 34

Lycée des Arènes, Toulouse

1 On a $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$ et $F_5 = 8$.

2 Soit \mathcal{P}_n la propriété définie par : $F_n \geq n$.

- Comme $F_0 = F_1 = 1$, la propriété est vérifiée de manière évidente pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Supposons que \mathcal{P}_{k-1} et \mathcal{P}_k sont vraies pour un entier k arbitrairement fixé et montrons alors que \mathcal{P}_k et \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

\mathcal{P}_k est vraie puisque cela fait partie de l'hypothèse de récurrence.
Comme $F_{k-1} \geq k-1$ et $F_k \geq k$, alors en additionnant membre à membre ces deux inégalités, il vient :

$$F_{k-1} + F_k \geq 2k - 1,$$

Et donc :

$$F_{k+1} \geq 2k - 1.$$

On cherche à montrer que $F_{k+1} \geq k+1$. Or,

$$2k - 1 \geq k + 1 \Leftrightarrow k \geq 2 \quad (1)$$

On a déjà montré que \mathcal{P}_k est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$.

Pour $k \geq 2$, on vient de montrer que $F_{k+1} \geq 2k - 1$ et donc $F_{k+1} \geq k + 1$ d'après (1).

On a donc démontré par récurrence que, pour tout naturel n , $F_n \geq n$.

En appliquant le théorème des limites par comparaison, on en déduit de manière immédiate que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty.$$

MÉTHODE

La suite étudiée ici est une suite récurrente d'ordre deux, c'est-à-dire que chaque terme, à partir du troisième, dépend des deux termes qui le précèdent. Ceci nous a conduit à utiliser une variante du raisonnement par récurrence parfois appelée « récurrence double » dont le principe s'énonce ainsi :

Soit \mathcal{P}_n une propriété dépendant de l'entier naturel n . Si la propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ et si, pour tout entier naturel n , le fait que la propriété soit vraie au rang n et au rang $n + 1$ entraîne alors qu'elle est vraie au rang $n + 2$, alors la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

Remarque : une telle récurrence n'est pas exigible au niveau du baccalauréat, mais savoir l'étudier sera utile en post bac.

3 Soit \mathcal{P}_n la propriété définie par :

$$F_n \times F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n.$$

- Pour $n = 0$, on a $F_0 F_2 = 2$ et $F_1^2 + 1 = 2$, ce qui montre que la propriété est vraie au rang 0.
- Supposons que \mathcal{P}_k est vraie pour un entier k arbitrairement fixé. Calculons alors $F_{k+1} F_{k+3}$:

$$\begin{aligned} F_{k+1} F_{k+3} &= F_{k+1} [F_{k+2} + F_{k+1}] \\ &= F_{k+1} F_{k+2} + F_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$F_{k+1}^2 = F_k \times F_{k+2} - (-1)^k.$$

On remplace et on simplifie l'écriture. Il vient :

$$F_{k+1}F_{k+3} = F_{k+2} [F_{k+1} + F_k] + (-1)^{k+1},$$

car $-(-1)^k = (-1)^{k+1}$.

Or, $F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$.

On obtient donc finalement :

$$F_{k+1}F_{k+3} = F_{k+2}^2 + (-1)^{k+1}.$$

Donc si \mathcal{P}_k est vraie alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

On a donc prouvé par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $F_n \times F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$.

4 (a) On a :

$$Q_{n+1} - Q_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Après réduction au même dénominateur et remplacement de $F_n \times F_{n+2}$ par $F_{n+1}^2 + (-1)^n$ (résultat obtenu à la question précédente), il reste :

$$Q_{n+1} - Q_n = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}.$$

On commence par remarquer que :

$$Q_{n+2} - Q_n = (Q_{n+2} - Q_{n+1}) + (Q_{n+1} - Q_n),$$

ce qui permet d'exploiter l'égalité obtenue précédemment.

$$Q_{n+2} - Q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+2}F_{n+1}} + \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}.$$

Après réduction au même dénominateur et mise en facteur de $(-1)^n$, on obtient :

$$Q_{n+2} - Q_n = \frac{(-1)^n [F_{n+2} - F_n]}{F_n F_{n+1} F_{n+2}}.$$

Or, par hypothèse, $F_{n+2} - F_n = F_{n+1}$, ce qui permet de réduire l'égalité précédente à :

$$Q_{n+2} - Q_n = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+2}}.$$

(b) Pour tout naturel n , d'après le résultat de la question précédente,

$$u_{n+1} - u_n = Q_{2n+2} - Q_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n} F_{2n+2}}.$$

Comme la suite (F_n) est à valeurs positives d'après la question **2**, et que $(-1)^{2n} = 1$, $u_{n+1} - u_n$ est positif donc la suite (u_n) est croissante.

On procède de même pour déterminer le sens de variation de la suite (v_n) .

Pour tout naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = Q_{2n+3} - Q_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{F_{2n+1}F_{2n+3}}.$$

On a donc $v_{n+1} - v_n$ négatif et la suite (v_n) est décroissante.

(c) Calculons la différence $v_n - u_n$.

Pour tout naturel n ,

$$v_n - u_n = Q_{2n+1} - Q_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n}F_{2n+1}}$$

Or, pour tout naturel n , le nombre $2n$ est pair donc $(-1)^{2n} = 1$.

- On a prouvé à la question 2. que $F_n > n$, donc que F_n est positif. Par conséquent, $v_n - u_n \geq 0$, et alors $u_n \leq v_n$ pour tout n .
- Puisque (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, pour tout n , on a $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Cela montre que la suite (u_n) est croissante majorée par v_0 et (v_n) décroissante minorée par u_0 , donc les deux suites sont convergentes.
- Comme la suite (F_n) tend vers $+\infty$, l'expression de $v_n - u_n$ montre que cette différence tend vers 0.
- Les suites (u_n) et (v_n) convergent et leur différence converge vers 0, donc les deux suites convergent vers la même limite.
- Il reste alors à prouver que si les deux suites $(u_n) = (Q_{2n})$ et $(v_n) = (Q_{2n+1})$ convergent vers la même limite, alors la suite (Q_n) converge aussi vers cette limite.

Ce résultat s'établit en revenant à la définition de la limite d'une suite.

Soit ℓ un nombre réel. On dit que la suite u admet ℓ pour limite en $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell,$$

si, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , on a $u_n \in I$ si n est suffisamment grand.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition précédente, il existe un entier N_1 tel que, pour tout entier $p \geq N_1$,

$$Q_{2p} \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

De même, il existe un entier N_2 tel que, pour tout entier $p \geq N_2$,

$$Q_{2p+1} \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On considère alors l'entier N défini par $N = 2\sup(N_1, N_2)$.

Pour tout entier $n > N$, si n est pair, alors $n = 2p$ où p est un entier naturel, et $Q_n = Q_{2p}$. Comme $n > N$, alors $p \geq N_1$ donc

$Q_n \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$. De même, si n est impair, il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$. Pour tout $n > N$, on a $p \geq N_2$ donc $Q_n \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$.

Il en résulte que, pour tout entier naturel $n > N$, on a :
 $Q_n \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$, ce qui montre que la suite (Q_n) converge elle aussi vers ℓ .

(d) Pour tout naturel n , on a :

$$Q_n^2 - Q_n - 1 = \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)^2 - \frac{F_{n+1}}{F_n} - 1.$$

On réduit alors au même dénominateur :

$$Q_n^2 - Q_n - 1 = \frac{(F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n) - F_{n+1}F_n}{F_n^2},$$

soit :

$$\begin{aligned} Q_n^2 - Q_n - 1 &= \frac{F_{n+2}(F_{n+1} - F_n) - F_{n+1}F_n}{F_n^2} \\ &= \frac{F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_n}{F_n^2} \end{aligned}$$

On peut alors remplacer $F_{n+2}F_n$ par $F_{n+1}^2 + (-1)^n$:

$$Q_n^2 - Q_n - 1 = \frac{F_{n+1}[F_{n+2} - F_n] - F_{n+1}^2 - (-1)^n}{F_n^2}.$$

Or, $F_{n+2} - F_n = F_{n+1}$ et après une ultime simplification, il vient :

$$Q_n^2 - Q_n - 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{F_n^2}.$$

Comme le numérateur ne garde pas un signe constant, on procède par encadrement :

$$\frac{-1}{F_n^2} \leq Q_n^2 - Q_n - 1 \leq \frac{1}{F_n^2}.$$

Comme d'après la question 2, la suite (F_n) tend vers $+\infty$, il en résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{F_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{F_n^2} = 0.$$

On en conclut d'après le théorème de limite par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Q_n^2 - Q_n - 1) = 0.$$

(e) Soit ℓ la limite de la suite (Q_n) . D'après l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Q_n^2 - Q_n - 1) = 0,$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

on a :

$$\ell^2 - \ell - 1 = 0.$$

Cette équation admet deux racines $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Or, la suite (Q_n) est définie pour tout naturel n par $Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$; elle est donc à valeurs positives. D'après le théorème de compatibilité de l'ordre et de la limite, sa limite ℓ est donc positive.

On en déduit que $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

MÉTHODE

On retiendra la méthode utilisée ici pour démontrer la convergence de la suite (Q_n) et en déterminer la limite. On a considéré les deux suites extraites : la sous-suite des termes de rang pair et la sous-suite des termes de rang impair. On a démontré alors le résultat suivant :

Soit (u_n) une suite réelle ; si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ , alors la suite (u_n) converge aussi vers ℓ .

Ce résultat étant hors programme, il conviendra de le redémontrer chaque fois qu'on souhaitera l'utiliser.

Limites de fonctions

Plan du chapitre

1. Limites à l'infini
2. Limites en un réel donné
3. Limites et opérations
4. Théorèmes de composition et de comparaison

Exercice type

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

- 1** Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes, en déduire éventuellement l'existence d'asymptotes horizontales dont on donnera les équations.

(a) $f : x \mapsto \frac{3x + 1}{x^2}$

(b) $g : x \mapsto \frac{7 - 3x^2}{5 + 4x^2}$

(c) $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 1} - x$

- 2** Étudier le comportement lorsque x tend vers 1, des fonctions f et g suivantes :

(a) $f : x \mapsto x + \frac{1}{(x - 1)^2}$

(b) $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1}$

- 3** Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f et la limite en $-\infty$ de la fonction g .

(a) $f : x \mapsto \left| \frac{1 - x}{1 + x} \right|$

(b) $g : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{4|x| - 1}\right)$

- 4** Calculer la limite en 1 de la fonction $h : x \mapsto (x - 1)^2 \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right)$.

1 Limites à l'infini

Définition 1

Soit ℓ un nombre réel. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$

si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , on a $f(x) \in I$ si x est suffisamment grand.

On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe. Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de l'asymptote, on étudie le signe de la différence $f(x) - \ell$.

Définition 2

On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

si pour tout réel A , on a $f(x) \in [A ; +\infty[$ si x est suffisamment grand.

On définit de même la limite en $-\infty$.

Remarque : l'écriture $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^+$ signifiera que la limite ℓ est approchée par valeurs supérieures. De même ℓ^- signale une limite approchée par valeurs inférieures.

2 Limites en un réel donné

2.1 Définitions

Définition 3

Soient ℓ et a deux réels. On dit que f admet ℓ pour limite en a et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , on a $f(x) \in I$ si x est suffisamment proche de a .

Définition 4

On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a et on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

si pour tout réel A , on a $f(x) \in [A ; +\infty[$ si x est suffisamment proche de a .
 De même f admet pour limite $-\infty$ lorsque $f(x) \in]-\infty ; A]$.

On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe.

Remarque : si $x > a$, on parlera de limite à droite en a .

Si $x < a$, on parlera de limite à gauche en a .

2.2 Propriété

Si la fonction f admet une limite ℓ en a , alors cette limite est unique.

3 Limites et opérations

Convention : une lettre grecque minuscule désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

3.1 Somme et produit de deux fonctions f et g

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)]$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) \times g(x)]$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$ indéterminée si $\ell' = 0$.
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$ indéterminée si $\ell' = 0$.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

3.2 Inverse d'une fonction f

- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0^+$, alors : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0^-$, alors : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = 0^+$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = 0^-$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3.3 Quotient de deux fonctions f et g

En écrivant, pour $g \neq 0$, $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$, on applique les résultats sur l'inverse d'une fonction et sur le produit de deux fonctions.

Dans la pratique, on cherche la limite du numérateur, puis celle du dénominateur, et l'on fait le quotient (lorsque cela est possible).

3.4 Cas d'indétermination

Elles sont au nombre de quatre :

« $(+\infty) + (-\infty)$ »	« $0 \times \infty$ »
« $\frac{0}{0}$ »	« $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Dans ces quatre cas, on ne peut pas conclure directement. On modifie alors l'écriture de $f(x)$ de manière à « lever l'indétermination ».

Deux méthodes à connaître dans ce but :

- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur
- Si un calcul de limite comprenant des racines carrées conduit à une forme indéterminée, on peut souvent s'en sortir en multipliant le numérateur et le dénominateur par la forme conjuguée de l'un ou de l'autre.

4 Théorèmes de composition et de comparaison

Dans une recherche de limite, les théorèmes sur les opérations ne permettent pas toujours de conclure, soit en raison d'un cas d'indétermination, soit à cause de la présence d'un terme n'ayant pas de limite. Ce paragraphe présente des outils adaptés à cette situation.

Théorème 1 (composition)

f et g sont deux fonctions. Pour ces deux fonctions :

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow \alpha} g(t) = \beta \text{ et } \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \gamma \quad \text{alors} \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} f(g(t)) = \gamma.$$

Théorème 2 (comparaison)

Soient f et g deux fonctions. Si, pour x au voisinage de α , $f(x) \geq g(x)$, alors :

- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$.

ATTENTION

Ce théorème est utilisé pour obtenir des limites infinies.

Théorème 3 (Théorème des gendarmes)

Soient f , g , et h trois fonctions et ℓ un réel.

- Si, pour x au voisinage de α , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \ell,$$

alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$.

- Si, pour x au voisinage de α , $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$.

ATTENTION

Le théorème de limite par encadrement ne permet d'obtenir que des limites finies.

Solution de l'exercice type

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

- 1 (a) Fonction f : la limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

L'étude est identique en $-\infty$ où la limite est aussi 0.

- (b) Fonction g : on a de même :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{4x^2} = \frac{-3}{4}.$$

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-3}{4}$.

- (c) $h : x \mapsto x^2 + 3x - 1$ est une fonction trinôme dont le discriminant 13 est positif. h est donc définie sur :

$$\left] -\infty ; \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} ; +\infty \right[.$$

- Étude en $-\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \text{et} \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} = +\infty.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$.

Donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

- Étude en $+\infty$:

On obtient une forme indéterminée. Utilisons alors l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x) (\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x) \\ &= (x^2 + 3x - 1) - (x)^2 = 3x - 1. \end{aligned}$$

Alors, pour $x > 0$ suffisamment grand :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x} = \frac{x \left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1\right)} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1}. \end{aligned}$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 2, de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{3}{2}.$$

- 2** (a) On a $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$.

D'où, par somme : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{1}{(x - 1)^2}\right) = +\infty$.

- (b) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1}$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a $x - 1 > 0$ et donc $x - 1 = (\sqrt{x - 1})^2$.

Alors : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} = 0^+$,

d'où : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$.

Notons qu'ici, x ne peut tendre vers 1 que par valeurs supérieures ; il est pourtant inutile de le préciser dans l'écriture symbolique de la limite, car il est comme toujours sous-entendu que $x \in \mathcal{D}_g$.



➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

3 (a) On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$$

(limite du rapport des termes de plus haut degré).

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \lim_{X \rightarrow -1} |X| = |-1| = 1.$$

(b) On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{4|x| - 1} = \frac{\pi}{4},$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin t = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On trouverait de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4 *Remarque* : la fonction sinus n'a pas de limite à l'infini, on doit donc utiliser les théorèmes d'encadrement.

Pour tout réel $x \neq 1$, on a :

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1 \quad \text{donc} \quad -(x-1)^2 \leq h(x) \leq (x-1)^2.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ donc d'après le théorème de limite par encadrement : $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Étude de formes indéterminées

10 min Corrigé p. 64

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ est indéterminée.
- 2** Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x)$ est indéterminée.
- 3** Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$ est indéterminée.
- 4** Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^n(x) = -\infty$.

2 V/F Calculs de limites

10 min Corrigé p. 64

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = +\infty.$
- 2** $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = 0.$
- 3** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x + 1} = -1.$
- 4** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = +\infty.$

3 QCM Lecture graphique

10 min Corrigé p. 64

Sur le graphique page suivante se trouvent les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g de deux fonctions f et g , f étant définie sur $]0 ; +\infty[$ et g sur $] -3 ; +\infty[$. On sait que :

- L'axe des abscisses est asymptote aux deux courbes ;
- L'axe des ordonnées est asymptote à \mathcal{C}_f .

Pour chaque question, donner la bonne réponse parmi les trois proposées :

- 1** La limite de f quand x tend vers 0 est :
 a) 0 b) $+\infty$ c) On ne peut pas conclure.
- 2** La limite quand x tend vers $+\infty$ de $g(x)$ est :
 a) 0 b) $+\infty$ c) On ne peut pas conclure.

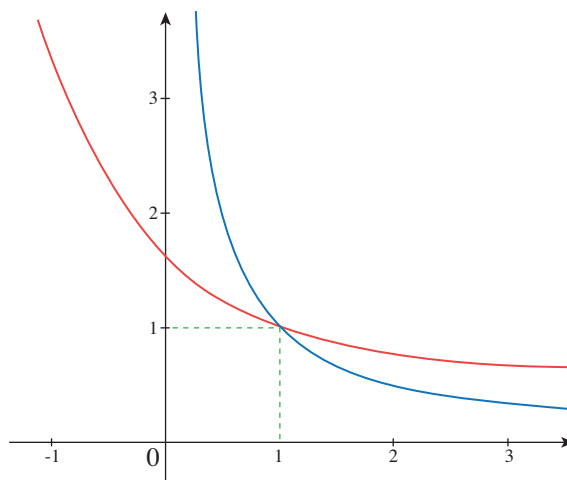
3 On a :

a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ **b** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) > \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

c $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) < \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

4 Soit h une fonction telle que, pour tout $x > 5$, $f(x) < h(x) < g(x)$. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $h(x)$ est :

a 0 **b** $+\infty$ **c** On ne peut pas conclure.



4 **V/F** **Théorèmes de comparaisons**

10 min Corrigé p. 65

Les fonctions f, g, h , et k sont définies sur \mathbb{R} .

On sait que pour tout x :

$$g(x) \leq f(x) \quad , \quad h(x) \geq f(x) \quad \text{et} \quad k(x) \geq f(x).$$

On connaît d'autre part les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 3.$$

Parmi les propositions suivantes, dire celles qui sont exactes. On précisera le théorème du cours utilisé, ainsi que la ou les limites ci-dessus qui ont permis de répondre.

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$

4 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 Avec des polynômes



15 min

Corrigé
p. 65

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-Bois

Pour chaque fonction, déterminer les limites indiquées :

- 1 $f(x) = -x^3 + x - 2$, en $+\infty$, $-\infty$ et 2.
- 2 $f(x) = x^2 + |2 - x|$, en $+\infty$, $-\infty$ et 3.
- 3 $f(x) = (7 - x^2)(x - 3)^3$, en $+\infty$, $-\infty$ et 0.
- 4 $f(x) = \sqrt{2x + 1} + x^2 - 2$, en $+\infty$ et $-\frac{1}{2}$.

6 Encadrement



15 min

Corrigé
p. 66

Lycée Virlogeux, Riom

On définit trois fonctions sur \mathbb{R} :

- $f : x \mapsto x + 2$
- $g : x \mapsto x + 3$
- $h : x \mapsto x + 2 + \cos^2 x$

- 1 Conjecturer, pour tout nombre réel x , une comparaison entre $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ à l'aide de la calculatrice.
- 2 Démontrer la conjecture.
- 3 En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$ et $-\infty$.

7 Transformer une expression



15 min

Corrigé
p. 66

Lycée Kléber, Strasbourg

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x + 2}{|x| - 2}$$

- 1 Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2 Étudier les limites de f en -2 puis en 2.

8 Limites en un nombre réel



20 min

Corrigé
p. 67

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Étudier les limites suivantes. Lorsqu'une limite prouve l'existence d'une asymptote à la courbe représentative, donner son équation.

- 1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x - 2}$
- 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- 3 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- 4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2x}{x^2 + 2x - 3}$

9 Limites de quotients



10 min

Corrigé p. 67

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1}$

10 Lever une indétermination



15 min

Corrigé p. 69

Lycée Corot, Savigny-sur-Orge

1 Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$. Étudier la limite de h en $+\infty$.

2 Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; -1]$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + x}$. Étudier la limite de g en $-\infty$.

11 Une courbe asymptote



10 min

Corrigé p. 70

Lycée Bachelard, Chelles

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x+2},$$

et la fonction g est définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x^2 - 3x + 5.$$

1 Déterminer le réel a tel que pour tout réel x dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on ait :

$$f(x) = g(x) + \frac{a}{x+2}.$$

2 Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)]$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$.

3 Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.

12 Limites de fonctions irrationnelles



10 min

Corrigé p. 70

Lycée Marie Curie, Sceaux

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

13 Limites et comparaisons



25 min

Corrigé
p. 71

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

Étudier les limites suivantes. Si cette limite permet de conclure en l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction définie par l'expression étudiée, en donner une équation.

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8 - 2x}{\cos x - 6}$

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \sin x - 3}{x}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x - 2}$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 \cos x}{2 + \sin x}$

14 Une asymptote oblique



30 min

Corrigé
p. 73

Lycée La Bruyère, Versailles

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 14}{x - 4}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère du plan.

1 Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 4}.$$

2 Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3 Quelles asymptotes à la courbe \mathcal{C} peut-on déduire de ces limites ? En donner une équation.

4 Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction g telle que $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

5 Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} d'équation $y = x - 3$.

15 Une fonction trigonométrique



15 min

Corrigé
p. 74

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

Soit f la fonction est définie par :

$$f(x) = \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + 5}.$$

1 Quel est l'ensemble de définition de f ?

2 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

16 Limite de $f[f(x)]$



25 min

Corrigé
p. 74

Lycée Camille Vernet, Valence

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3 - 2x}{x + 1}.$$

Étudier la limite de $f[f(x)]$ dans chacun des cas suivants :

- 1** x tend vers $+\infty$. **2** x tend vers 4.

17 Algorithme



30 min

Corrigé
p. 75

Lycée Hoche, Versailles

Soient f et g deux fonctions définies sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = (x + 1)^2.$$

- 1** Afficher les représentations graphiques des deux fonctions sur la calculatrice. Que peut-on observer pour les grandes valeurs de x ?
2 On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
  Donner à a une valeur strictement positive
Traitement
  x prend la valeur 0
  Tant que  $\left| \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x + 1} - (x + 1)^2 \right| > a$ 
    x prend la valeur x + 1
  Fin de Tant que
Sortie
  Afficher x
```

- (a) Quelle est la propriété du nombre x affiché ? On note M ce nombre.
(b) Peut-on affirmer d'après cet algorithme que, pour tout $x \geq M$, $|f(x) - g(x)| \leq a$?
- 3** Étudier par le calcul la position relative des courbes représentant les fonctions f et g dans un même repère du plan.
4 Quelle est la limite de $g(x) - f(x)$ en $+\infty$? Que peut-on en déduire pour les deux courbes ?
5 Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$. Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $|f(x) - g(x)| \leq a$.
6 L'algorithme utilisé vous semble-t-il judicieux pour ce problème ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 **V/F** Étude de formes indéterminées

→ **Énoncé**
p. 58

- 1 Faux. D'après le théorème sur les limites de quotients, cette limite vaut 0.
- 2 Faux. D'après le théorème sur les limites de produits, cette limite vaut $-\infty$.
- 3 Vrai. Il s'agit d'une des quatre formes indéterminées rencontrées en terminale.
- 4 Faux. Tout dépend de la parité de l'entier naturel n .

2 **V/F** Calculs de limites

→ **Énoncé**
p. 58

- 1 Vrai.
- 2 Faux. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = +\infty$.
- 3 Vrai.

Remarque : pour lever l'indétermination, on factorise le terme dominant au numérateur et au dénominateur.

⚠ ATTENTION

Se souvenir que $\sqrt{x^2} = |x|$ et que, lorsque x est négatif, $|x| = -x$.

- 4 Faux. Le numérateur et le dénominateur tendent simultanément vers 0 quand x tend vers 1. On est donc en présence d'une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on peut remarquer que, pour x positif : $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$, ce qui permet de simplifier $\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ en $\sqrt{x} + 1$. Par suite, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$.

3 **QCM** Lecture graphique

→ **Énoncé**
p. 58

- 1 Réponse **b** car l'énoncé dit que l'axe des ordonnées est asymptote à C_f et manifestement la limite $-\infty$ n'est pas vraisemblable.
- 2 Réponse **a**. D'après l'énoncé, l'axe des abscisses est asymptote aux deux courbes.
- 3 Réponse **a**. En fait, on peut écrire $f(1) = g(1)$ car ces deux fonctions sont continues en 1.
- 4 Réponse **a** d'après les théorèmes des gendarmes.

4 **V/F** **Théorèmes de comparaisons**

Enoncé
p. 59

- 1** Vrai. On a $k(x) \geq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- 2** Faux. On a $g(x) \leq f(x)$ et $h(x) \geq f(x)$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 3$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$.
- 3** Vrai. On a $g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- 4** Faux. Tout ce que l'énoncé permet d'affirmer avec les théorèmes de comparaison est que (si cette limite existe) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \leq 4$.

5 **Avec des polynômes**

Enoncé
p. 60

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-Bois

MÉTHODE

En $+\infty$ et $-\infty$, on utilisera la propriété : « la limite d'un polynôme en $+\infty$ et $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré ».

- 1**
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$.
 - La fonction polynôme est définie en 2, et de façon intuitive $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^3 + x - 2) = -2^3 + 2 - 2 = -8$.
C'est la notion de continuité vue dans le chapitre 4 qui justifie correctement ce résultat.
- 2**
 - Lorsque $x > 2$, on a $2 - x < 0$ donc $|2 - x| = x - 2$.
Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} |2 - x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$. Par somme, enfin, on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - Lorsque $x < 2$, on a $2 - x > 0$ donc $|2 - x| = 2 - x$.
Alors, $f(x) = x^2 - x + 2$. On trouve donc que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
 - Comme dans la question **1**, la fonction est définie en 3 ; donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 3^2 + |2 - 3| = 10$.
- 3** Le terme de plus haut degré du polynôme est $-x^2 \times x^3 = -x^5$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5) = -\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5) = +\infty$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 7 \times (-3)^3 = -189.$

4 L'expression $\sqrt{2x+1}$ n'est définie que pour $x \geq -\frac{1}{2}$.

- $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$ par composée.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) = +\infty$ donc, par somme, on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

- La fonction f est définie en $-\frac{1}{2}$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}.$$

6 Encadrement

Enoncé
p. 60

Lycée Virlogeux, Riom

1 Il semblerait que, pour tout x , $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

2 Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, donc $x+2 \leq x+2+\cos^2 x \leq x+3$.

3 On utilise les théorèmes de comparaison :

- en $-\infty$:

$$h(x) \leq x+3, \text{ or } \lim_{x \rightarrow -\infty} x+3 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

- en $+\infty$:

$$h(x) \geq x+2, \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} x+2 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

7 Transformer une expression

Enoncé
p. 60

Lycée Kléber, Strasbourg

1 Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $|x| = x$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1.$$

De même, pour tout $x \leq 0$, on a : $|x| = -x$.

$$\text{Donc, pour } x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 0[: f(x) = \frac{x+2}{-x-2} = -1.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$

2 Nous avons vu que pour $x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 0[:$

$$f(x) = \frac{x+2}{-x-2} = -1.$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$.

Par contre : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

8 Limites en un nombre réel

Enoncé
p. 60

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} x - 1 = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 2 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x - 1}{x - 2} = -\infty.$$

De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x - 1}{x - 2} = +\infty$.

On a donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

2 On a une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». L'expression n'est pas définie en 1, mais on remarque que pour tout x différent de 1 :

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2.$$

3 Ici pas de problème, l'expression est définie en -1 , il suffit de remplacer

$$x \text{ par } -1 \text{ et on obtient } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0.$$

4 Quand x tend vers 1, le dénominateur tend vers 0. Il nous faut savoir si c'est par valeurs positives ou par valeurs négatives.

Les racines de $x^2 + 2x - 3$ sont 1 et -3 , et le trinôme est positif à l'extérieur des racines puisque le coefficient de x^2 est positif. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} 1 - 2x = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 + 2x - 3) = 0^- \\ \text{(entre les racines)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1 - 2x}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \text{ (règle des signes).}$$

De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1 - 2x}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$. On a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

9 Limites de quotients

Enoncé
p. 61

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

1 Le trinôme du second degré $2x^2 - 2x + 3$ a un discriminant strictement négatif donc il est du signe du coefficient de x^2 . Par conséquent, pour

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

tout réel x , on a : $2x^2 - 2x + 3 > 0$. Pour tout x non nul, on a :

$$2x^2 - 2x + 3 = 2x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} \right),$$

donc on peut écrire, pour tout réel x strictement positif :

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 3} = x\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2}}.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} \right) = 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2}} = \sqrt{2}.$$

⚠ ATTENTION

Lorsqu'on travaille avec une expression irrationnelle, on doit toujours commencer par s'assurer que celle-ci est bien définie, c'est-à-dire que l'expression située sous le radical est bien positive.

2 Pour tout réel x tel que $x \neq -1$ et $x \neq 0$:

$$\frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{x^4 \left(1 - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

Or,

$$\frac{x^4}{x} = x^3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

🔗 MÉTHODE

Pour déterminer la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$, on peut soit utiliser le théorème du cours précisant qu'en l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré, soit factoriser comme ci-dessus par le terme dominant afin de simplifier l'écriture de la formule définissant la fonction pour lever l'indétermination.

10 Lever une indétermination

Enoncé
p. 61

Lycée Corot, Savigny-sur-Orge

1 Pour tout réel x strictement positif, $h(x) = 2x^2 \times \left(1 - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$.

On en déduit d'après les opérations sur les limites que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

2 Pour tout $x \leq -1$,

$$g(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+x}} = \frac{x\left(\frac{2}{x}-1\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}.$$

D'où :

$$g(x) = \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$

ATTENTION

Comme x est négatif, on a $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = 1.$$

Or, $\lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = 1$, donc d'après le théorème de composition, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = 1.$$

On en conclut que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{2}.$$

MÉTHODE

Pour lever l'indétermination dans le calcul de la limite de $g(x)$, on a utilisé la méthode de l'expression conjuguée.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Une courbe asymptote

Enoncé
p. 61

Lycée Bachelard, Chelles

1 Pour tout $x \neq -2$:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{(x-1)^2(x+1) - (x^2 - 3x + 5)(x+2)}{x+2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 1)(x+1) - (x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 6x + 5x + 10)}{x+2} \\ &= \frac{x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + x + 1 - (x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 6x + 5x + 10)}{x+2} \\ &= \frac{-9}{x+2}. \end{aligned}$$

En identifiant à $\frac{a}{x+2}$, on trouve $a = -9$.

2 On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-9}{x+2} \right) = 0 \\ \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-9}{x+2} \right) = 0. \end{aligned}$$

3 Les courbes représentatives des fonctions f et g sont asymptotes aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

12 Limites de fonctions irrationnelles

Enoncé
p. 61

Lycée Marie Curie, Sceaux

On utilise dans cet exercice la méthode dite de *l'expression conjuguée*.

1 Quel que soit x , tel que $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$, c'est-à-dire pour tout $x > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}.$$

Soit :

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}.$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1}) = +\infty.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = +\infty.$$

- 2** On procède de même. Pour tout $x > 1$, les racines carrées ci-dessous sont toutes bien définies, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}} &= \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{(x^2+x) - (x^2-x)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{2x} \\ &= \frac{|x| \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} \right)}{2x}. \end{aligned}$$

Or, quand $x > 0$, $\frac{|x|}{x} = 1$ donc, pour $x > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}}{2}.$$

Enfin :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} \right) = 1,$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}} \right) = 1.$$

Remarque : pour transformer les sommes ou différences d'expressions irrationnelles, on peut utiliser l'expression conjuguée. Le conjugué de $a + b$ est $a - b$ et, par suite, le produit des deux conjugués est $a^2 - b^2$, ce qui permet une simplification d'écriture et permet de lever une indétermination.

13 Limites et comparaisons

→ **Énoncé**
p. 62

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

MÉTHODE

Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en l'infini. Il faut donc utiliser des théorèmes de comparaison pour déterminer les limites. On part généralement du fait que $\sin x$ et $\cos x$ sont compris entre -1 et 1 .

- 1** Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc :

$$-7 \leq \cos x - 6 \leq -5 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\cos x - 6} \leq -\frac{1}{7}.$$

Pour $x > 4$, $8 - 2x < 0$ donc l'encadrement précédent donne :

$$-\frac{8-2x}{\cos x - 6} \geq \frac{8-2x}{\cos x - 6} \geq -\frac{8-2x}{7}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8+2x}{7} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8-2x}{\cos x - 6} = +\infty.$$

Remarque : on avait aussi un majorant de l'expression, mais il ne sert à rien lorsque la limite est $+\infty$.

2 Pour tout réel x , on a : $-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$.

On cherche la limite en $+\infty$, on peut donc poser la condition $x > 2$ et alors $x - 2 > 0$.

Par conséquent, pour tout $x > 2$, on a l'encadrement :

$$\frac{-2}{x-2} \leq \frac{\cos x + \sin x}{x-2} \leq \frac{2}{x-2}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-2} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x-2} = 0.$$

3 Pour tout réel x , on a : $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$, donc $-5 \leq 2 \sin x - 3 \leq -1$.

Comme on cherche la limite en $-\infty$, on a pour tout $x < 0$:

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{2 \sin x - 3}{x} \leq \frac{-5}{x}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x} = 0$. Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \sin x - 3}{x} = 0.$$

4 Pour tout réel x , on a : $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$ donc :

$$x - 2 \leq x + 2 \cos x \leq x + 2.$$

D'autre part, $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$.

Pour tout réel $x > 2$, on peut multiplier membre à membre ces deux encadrements de nombres positifs et on obtient :

$$\frac{x-2}{3} \leq \frac{x+2 \cos x}{2 + \sin x} \leq x+2.$$

Pour trouver la limite en $+\infty$, seule l'inégalité de gauche est utile. L'expression est minorée par un terme qui tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2 \cos x}{2 + \sin x} = +\infty.$$

14 Une asymptote oblique

Enoncé
p. 62

Lycée La Bruyère, Versailles

$$\begin{aligned} 1 \quad f(x) &= ax + b + \frac{c}{x-4} = \frac{(ax+b)(x-4) + c}{x-4} \\ &= \frac{ax^2 + (b-4a)x - 4b + c}{x-4}. \end{aligned}$$

Par identification avec l'expression de $f(x)$, on voit qu'il suffit que a, b et c vérifient le système :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-4a=-7 \\ -4b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$$

Par conséquent, on peut écrire : $f(x) = x - 3 + \frac{2}{x-4}$.

2 Il faut étudier les limites en l'infini et en 4 par valeurs supérieures et inférieures.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-4} = 0$ donc, par somme, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 4} (x-3) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$, mais aussi $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$.

3 La limite infinie en 4 permet de conclure que la courbe admet une asymptote verticale en 4 d'équation $x = 4$. Par contre, comme les limites en l'infini sont infinies, il n'y a pas d'asymptote horizontale.

4 En utilisant l'écriture établie dans la question **1**, on trouve :

$$g(x) = f(x) - (x-3) = \frac{2}{x-4}.$$

D'après les calculs de limites de la question **2**, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Remarque : cette limite montre que la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} se rapprochent lorsque x tend vers l'infini. On dit que la droite \mathcal{D} est une *asymptote oblique* à la courbe \mathcal{C} .

5 Pour étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} , il faut étudier le signe de l'expression $f(x) - (x-3)$, c'est-à-dire le signe de $g(x)$.

Pour $x > 4$, la différence est positive, donc la courbe \mathcal{C} est au-dessus de la droite \mathcal{D} .

Pour $x < 4$, la différence est négative, donc la courbe \mathcal{C} est en dessous de la droite \mathcal{D} .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

15 Une fonction trigonométrique

Enoncé
p. 62

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

1 Comme, pour tout réel x , on a $x^2 + 5 > 0$, la fonction f est définie pour tout réel x tel que $\sin \frac{1}{x}$ existe. La fonction f est donc définie sur \mathbb{R}^* .

2 Pour tout réel x , on a $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ et pour tout réel x strictement positif, on obtient en multipliant l'inégalité précédente par x ,

$$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x.$$

L'expression $x \sin \frac{1}{x}$ est donc encadrée par deux expressions qui tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. On en déduit, d'après le théorème de limite par encadrement que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 5) = 5$, d'où, finalement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

On démontrerait de même que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

16 Limite de $f[f(x)]$

Enoncé
p. 63

Lycée Camille Vernet, Valence

MÉTHODE

Dans cet exercice, on calculera la limite en l'infini d'une fonction rationnelle en appliquant la règle suivante : « la limite en l'infini d'un quotient de polynôme est égale à la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré ».

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$ et $\lim_{X \rightarrow 2} f(X) = \frac{3+4}{-2+1} = -7$.
Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)] = -7$.

2 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{3-8}{4+1} = -1$, mais lorsque x tend vers -1 , le dénominateur de $f(x)$ tend vers 0. Il faut donc affiner le résultat précédent pour savoir si $f(x)$ tend vers -1 par valeurs supérieures ou inférieures.

Étudions le signe de $f(x) - (-1)$, c'est-à-dire de :

$$\frac{3-2x}{x+1} + 1 = \frac{4-x}{x+1}.$$

Lorsque x tend vers 4, le dénominateur est positif.

Si $-1 < x < 4$, l'expression est positive et si $x > 4$, l'expression est négative.

On peut donc donner les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = -1^+ \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = -1^-.$$

Nous pouvons maintenant chercher la limite de $f(X)$ quand X tend vers -1 par valeurs inférieures ou supérieures.

On a :

$$\lim_{X \rightarrow -1} (3 - 2X) = 5$$

et

$$\lim_{\substack{X \rightarrow -1 \\ X > -1}} (X + 1) = 0^+,$$

donc :

$$\lim_{\substack{X \rightarrow -1 \\ X > -1}} f(X) = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{\substack{X \rightarrow -1 \\ X < -1}} (X + 1) = 0^-,$$

donc :

$$\lim_{\substack{X \rightarrow -1 \\ X < -1}} f(X) = -\infty.$$

Par composition nous obtenons finalement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f[f(x)] = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f[f(x)] = -\infty.$$

17 Algorithme

→ **Énoncé**
p. 63

Lycée Hoche, Versailles

- 1 À la calculatrice, il semble que pour de grandes valeurs de x , les deux courbes aient tendance à se confondre.
- 2 (a) Pour un nombre a positif donné, le nombre x est le plus petit entier tel que la valeur absolue de l'écart entre $f(x)$ et $g(x)$ soit inférieure ou égale à a .
(b) On sait que $|f(x) - g(x)| \leq a$, mais sans étude complémentaire sur les fonctions, il n'y a aucune raison que cela soit encore vrai pour les autres réels $x > M$.
- 3 Pour étudier la position relative des deux courbes, on étudie le signe de l'expression :

$$\frac{x^2 + 3x^2 + 3x}{x + 1} - (x + 1)^2 = \frac{-1}{x + 1}.$$

Pour $x < -1$, la différence est positive, donc la courbe représentative de f est au-dessus de celle de g .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Pour $x > -1$, la différence est négative, donc la courbe représentative de f est en dessous de celle de g .

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0.$$

Cela montre que les deux courbes tendent l'une vers l'autre lorsque x tend vers $+\infty$.

On dit que les deux courbes sont asymptotes en $+\infty$.

$$5 \quad |f(x) - g(x)| \leq a \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{x+1} \right| \leq a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} - 1 \leq x$$

(x est bien positif car $0 < a < 1$)

- 6 Les calculs relativement simples montrent que pour tout x tel que $x \geq \frac{1}{a} - 1$, on a $f(x) - g(x) \leq a$. Cela prouve que les deux courbes sont alors aussi proche l'une de l'autre que l'on veut à partir d'une certaine valeur de x assez grande. Ce résultat est plus complet que celui de l'algorithme qui n'est pas très efficace ici puisque le calcul est facilement réalisable.

Chapitre 4

Continuité et dérivation

Plan du chapitre

1. Continuité
2. Dérivation

Exercice type

Lycée Carnot, Dijon

On définit :

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 6x\sqrt{x} - 3x^2 - 2x.$$

- 1 (a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et calculer f' .
(b) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
(c) Montrer que f' est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , mais pas en 0. Calculer f'' .
- 2 (a) Étudier le signe de f'' et dresser le tableau de variation de f' .
(b) Dédire de la question précédente que l'équation $f'(x) = 0$ possède deux solutions α et β (avec $\alpha < \beta$).
(c) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f .
(d) En reprenant l'expression de f' et en posant $X = \sqrt{x}$, trouver les valeurs exactes de α et β .
- 3 Tracer la courbe représentative de f .

1 Continuité

1.1 Continuité en un point a

Définition 1

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I .

Graphiquement, si une fonction est continue sur un intervalle I , la courbe représentative de la fonction peut être tracée sans lever le crayon.

1.2 Fonctions continues de référence

Propriétés 1

Les fonctions *polynômes*, les fonctions *sinus* et *cosinus* sont continues sur \mathbb{R} .
Les fonctions *rationnelles* sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
La fonction *racine carrée* est continue sur $[0 ; +\infty[$.
Les fonctions obtenues par somme, produit, quotient ou composition de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

1.3 Continuité et tableau de variation

Dans un tableau de variation, une flèche oblique signifie à la fois continuité et stricte monotonie sur l'intervalle concerné.

Une double barre indique une valeur interdite et par conséquent une discontinuité. Mais une fonction peut être partout définie sans être continue : par exemple la fonction partie entière qui, à tout nombre x réel appartenant à l'intervalle $[n ; n + 1[$, n étant un entier relatif, associe n est définie pour tout x , mais n'est continue en aucune valeur entière.

Si la fonction est constante sur un intervalle, on utilise une flèche horizontale.

1.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 (TVI)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et a et b deux réels appartenant à I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

À RETENIR

Ce théorème appartient à la catégorie des *théorèmes d'existence*. Il assure, sous certaines hypothèses, l'existence d'*au moins un* antécédent. Néanmoins, il n'assure pas l'unicité de l'antécédent considéré et ne permet pas de le calculer.

Corollaire 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a et b deux réels appartenant à I vérifiant $a < b$.

Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a ; b]$.

Remarque : cette propriété peut aussi s'appliquer lorsque a ou b sont infinis à condition que k ne prenne pas la valeur d'une limite.

2 Dérivation

2.1 Dérivabilité en un point a

Définition 2

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I . On dit que f est *dérivable* en a si la fonction :

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite réelle ℓ en zéro.

On dit alors que ℓ est le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout réel a de I . La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée *fonction dérivée* de f .

Remarques

- Si f est dérivable en a , $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f représentative de f au point d'abscisse a .
- L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- Si, en utilisant la définition du nombre dérivé en a , on trouve une limite infinie, on a une tangente (ou une demi-tangente) verticale au point d'abscisse a de \mathcal{C}_f .

2.2 Dérivabilité et continuité

Théorème 2

Si f est une fonction définie et dérivable en un réel a , alors elle est continue en a .

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fautive : une fonction peut être continue sans être dérivable. Par exemple, la fonction qui à tout nombre réel x associe sa valeur absolue est continue en 0, mais pas dérivable en 0.

2.3 Règles de dérivation

Théorème 3 (Théorème de dérivation des fonctions composées)

Soient a et b deux nombres réels avec a non nul, et I et J deux intervalles.

- Si f est une fonction dérivable sur I et si pour tout nombre x réel de J , $ax + b$ appartient à I , alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J et $g'(x) = af'(ax + b)$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

- e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$ (voir chapitre 6).
- si $u(x) > 0$ sur I , \sqrt{u} est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- si n est un entier supérieur ou égal à 2, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- si $u(x) > 0$ sur I , $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (voir chapitre 7).

Le cas suivant n'est pas exigible : Soit u une fonction dérivable sur I et f une fonction dérivable sur $J = u(I)$.

Alors la fonction composée $f \circ u : x \mapsto y = f(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$[f(u(x))]' = u'(x)f'(u(x)).$$

2.4 Dérivée et sens de variation

Théorème 4

Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I .

- Si $f' \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .
- Si $f' \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

On a des résultats analogues avec des inégalités strictes, qui assurent des strictes monotonies (voir page suivante).

- Si $f' > 0$ sur I , sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f' < 0$ sur I , sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

➔ Solution de l'exercice type

Lycée Carnot, Dijon

- 1** (a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* , et on a, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 6\sqrt{x} + 6x \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \times 2x - 2 = 9\sqrt{x} - 6x - 2.$$

- (b) On revient à la définition : pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = 6\sqrt{x} - 3x - 2,$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6\sqrt{x} - 3x - 2) = -2.$$

On en déduit que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -2$.

- (c) La fonction f' est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* , et, pour tout réel x strictement positif,

$$f''(x) = \frac{9}{2\sqrt{x}} - 6. \text{ D'autre part,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{9}{\sqrt{x}} - 6 \right) = +\infty.$$

Donc f' n'est pas dérivable en 0.

- 2** (a) On a, pour tout réel x strictement positif, $f''(x) = \frac{9 - 12\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, donc :

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 9 - 12\sqrt{x} > 0 \\ &\Leftrightarrow 12\sqrt{x} < 9 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow x < \frac{9}{16} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Carnot, Dijon

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 3 - \frac{2}{x} \right) \right]$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 3 - \frac{2}{x} \right) = -3,$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'où le tableau :

x	0	$\frac{9}{16}$	$+\infty$
$f''(x)$		+ 0 -	-6
$f'(x)$		$\frac{11}{8}$	
	-2	\nearrow	\searrow
			$-\infty$

(b) La fonction f' est continue sur $[0; +\infty[$. De plus :

- f' est strictement croissante sur $\left[0; \frac{9}{16}\right]$ et :

$$f'(0) < 0 < f'\left(\frac{9}{16}\right).$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique $\alpha \in \left[0; \frac{9}{16}\right]$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

- f' est strictement décroissante sur $\left[\frac{9}{16}; +\infty\right[$ et

$$f'\left(\frac{9}{16}\right) > 0 > \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x).$$

Il existe donc un unique $\beta \in \left[\frac{9}{16}; +\infty\right[$ tel que $f'(\beta) = 0$.

(c) Calculons la limite de f en $+\infty$.

Pour tout réel x strictement positif,

$$6x\sqrt{x} - 3x^2 - 2x = x^2 \left(-3 + \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right) = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Carnot, Dijon

Finalement :

x	0	α	β	$+\infty$			
$f'(x)$	-2	-	0	+	0	-	$-\infty$
$f(x)$	0				$f(\beta)$		$-\infty$
		\searrow		\nearrow		\searrow	
			$f(\alpha)$				

- (d) Les réels α et β sont les solutions de l'équation $9\sqrt{x} - 6x - 2 = 0$ (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$). Posons $X = \sqrt{x}$, et cherchons les solutions positives de l'équation $6X^2 - 9X + 2 = 0$. Ce sont :

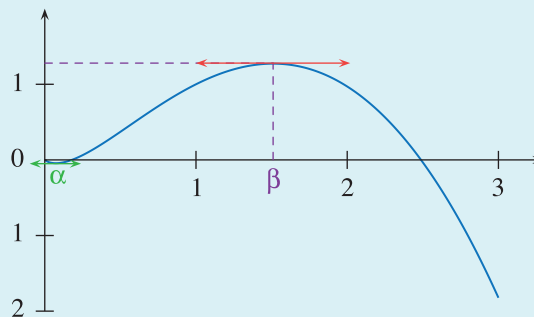
$$X_1 = \frac{9 + \sqrt{33}}{12} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{9 - \sqrt{33}}{12}.$$

On a bien $0 < \frac{9 - \sqrt{33}}{12} < \frac{9 + \sqrt{33}}{12}$, donc :

$$\alpha = \left(\frac{9 - \sqrt{33}}{12}\right)^2 \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{9 + \sqrt{33}}{12}\right)^2.$$

Application numérique : à 10^{-2} près, $\alpha \approx 0,07$ et $\beta \approx 1,51$.

- 3 On peut maintenant tracer la représentation graphique de f :



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F **Dérivabilité**

10 min Corrigé p. 92

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont correctes ?

- 1** La fonction racine carrée est définie donc dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
- 2** Si $f'(a) = 0$, alors la fonction f admet un extremum en a .
- 3** La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x - 2|$ est dérivable en 2.
- 4** Si la fonction f est dérivable en a et la fonction g n'est pas dérivable en a , alors la fonction fg n'est pas dérivable en a .

2 V/F **Fonction définie par morceaux**

10 min Corrigé p. 92

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 1 \\ f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont correctes ?

- 1** La fonction f n'admet pas de limite en 0.
- 2** La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
- 3** La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- 4** Pour tout réel a , l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .

3 V/F **Avec des valeurs absolues**

10 min Corrigé p. 93

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + |x|}$$

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont correctes ?

- 1** La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale.
- 2** La fonction f est continue sur \mathbb{R} .
- 3** La fonction f n'est pas dérivable en 0.
- 4** La courbe représentative de la fonction f admet une tangente de pente 2.

4 V/F **Solution de $f(x) = 0$**

20 min Corrigé p. 94

Soit f la fonction $x \mapsto x\sqrt{x} - x^2 - 0,1$.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont correctes ?

- 1 f est définie sur $[0 ; +\infty[$.
- 2 f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
- 3 Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f(x)$ est négative ou nulle.
- 4 La différence entre les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ est inférieure à 0,23.

5 V/F **Continuité et dérivabilité**

15 min Corrigé p. 94

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

f représente une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de cet intervalle.

- 1 Il existe une fonction f continue et dérivable en a .
- 2 Il existe une fonction f continue en a et non dérivable en a .
- 3 Il existe une fonction f qui n'est pas continue en a mais qui est dérivable en a .
- 4 Il existe une fonction f qui n'est ni continue ni dérivable en a .

6 **Étude d'une fonction irrationnelle**

★ 25 min Corrigé p. 94

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{3}{4} & \text{pour } x = 1 \end{cases}$$

- 1 f est-elle continue en 1 ?
- 2 f est-elle dérivable en 1 ?
- 3 Justifier que f est dérivable pour x différent de 1.
- 4 Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 1$. (On ne demande pas le signe de $f'(x)$).
- 5 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

7 Calcul de dérivées



30 min

Corrigé
p. 97

Lycée Jules Ferry, Caen

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur \mathbb{R} puis calculer leur dérivée.

- $f(x) = \frac{3x^3 - 6x + 5}{x^2 + 1}$
- $h(x) = \left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1} \right)^4$
- $g(x) = (5x^4 - 2x^2 + x)^3$
- $\ell(x) = \sqrt{\sqrt{1 + x^2}}$

8 Localisation de racines



10 min

Corrigé
p. 98

Lycée Chaptal, Paris

Démontrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet une solution α unique sur $[0 ; 1]$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut.

9 Étude d'une équation



15 min

Corrigé
p. 99

Lycée Vieljeux, La Rochelle

On considère la fonction f définie sur $\left[-1 ; \frac{1}{2} \left[\cup \right] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2x - 1} - \sqrt{x + 1}.$$

Étudier les variations de f et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α , puis prouver que $\alpha \in \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[$.

10 Lecture graphique

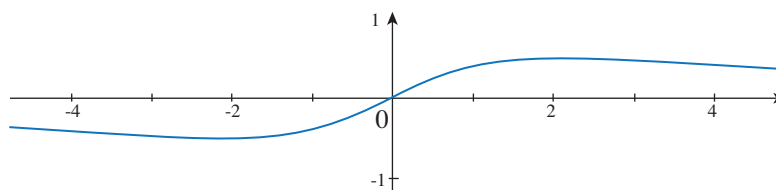


10 min

Corrigé
p. 100

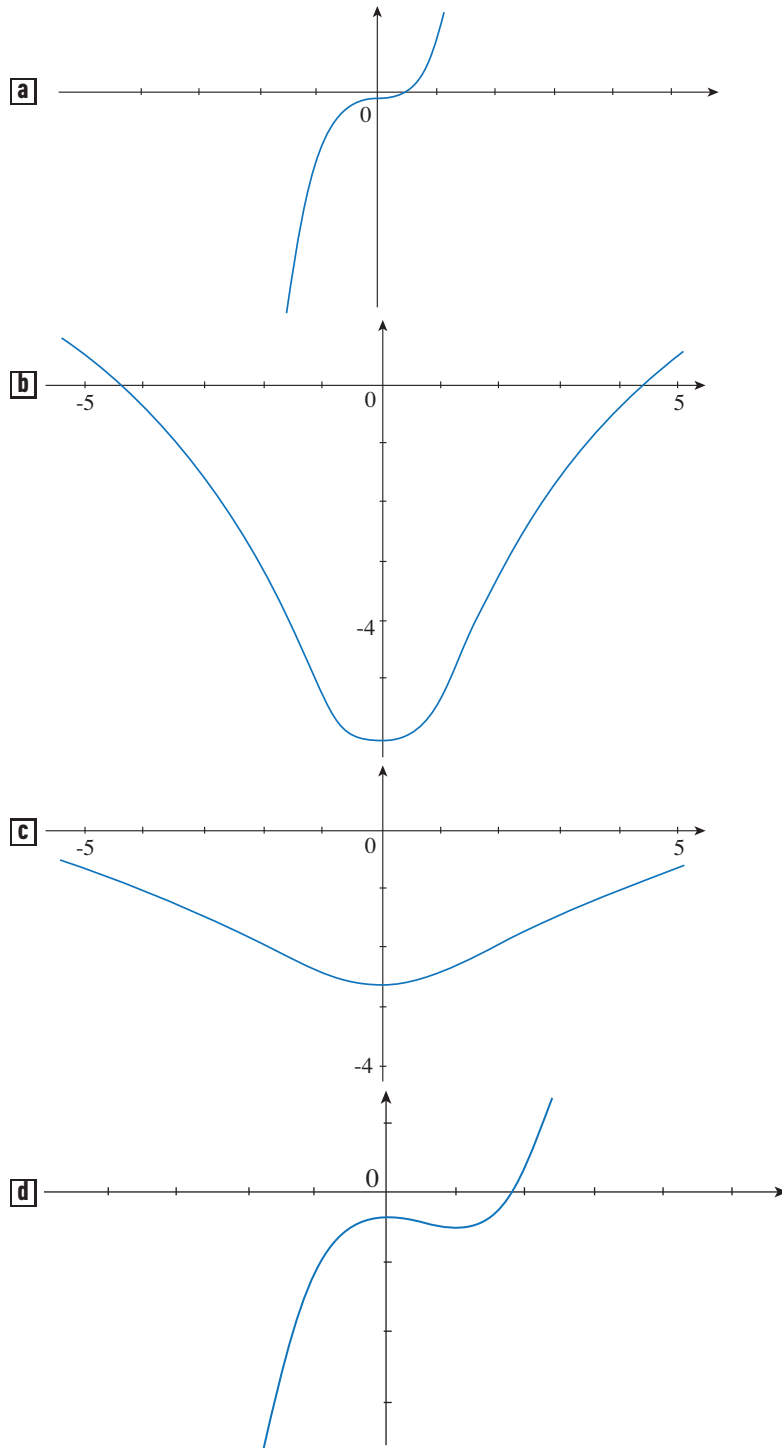
Lycée Virlogeux, Riom

f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} . On a tracé ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de sa dérivée f' .



- 1 Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de la fonction f .
- 2 Prouver que f admet un minimum local et donner une valeur de x pour laquelle il est atteint.
- 3 Parmi les courbes page suivante, quelle est (ou quelles sont) celle(s) qui pourrai(en)t représenter la fonction f ? Justifier.

CONTINUITÉ ET DÉRIVATION • CHAP. 4



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Vrai ou faux



15 min

Corrigé
p. 100

Lycée Guynemer, Compiègne

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Pour chaque affirmation, dire, en justifiant, si elle est vraie ou fausse. Une justification graphique sera acceptée.

- 1 Si f change de signe sur I , alors f s'annule sur I .
- 2 Si :
 - $I = [a ; b]$,
 - $f(a) \times f(b) > 0$,
 - f est continue sur I ,
 alors f ne s'annule pas sur I .
- 3 Si f s'annule une fois et une seule sur I et si f est strictement monotone, alors f est continue sur I .
- 4 Si f s'annule une fois et une seule sur I et f est continue sur I , alors f est strictement monotone sur I .

12 Étude de fonctions



35 min

Corrigé
p. 100

Lycée François Mauriac, Bordeaux

On définit :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left| 2x^2 - 6x + \frac{11}{8} \right|.$$

- 1 Étudier le signe du trinôme $2x^2 - 6x + \frac{11}{8}$.
- 2 Montrer qu'il existe deux nombres a et b tels que f soit dérivable sur les intervalles $]-\infty ; a[$, $]a ; b[$ et $]b ; +\infty[$.
- 3 (a) Étudier les variations de f sur les intervalles $]-\infty ; a[$, $]a ; b[$ et $]b ; +\infty[$.
(b) En déduire le tableau de variation de f .
- 4 Tracer la représentation graphique de f .

13 Existence ou unicité



25 min

Corrigé
p. 102

Lycée La Bruyère, Versailles

- 1 *Question de cours.*
On suppose connu le théorème des valeurs intermédiaires.

Démontrer que si une fonction f , continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a ; b]$ vérifie $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[a ; b]$.

2 Application.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 2$ et $f(6) = -1$. Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire de l'existence et du nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0 ; 6]$? Justifier les réponses.

- (a) f est continue sur $[0 ; 6]$.
- (b) f est strictement décroissante sur $[0 ; 6]$.
- (c) f est continue et strictement décroissante sur $[0 ; 6]$.

14 Algorithme de dichotomie



30 min

Corrigé p. 103

Lycée La Bruyère, Versailles

On considère la fonction f définie sur $]2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

- 1** (a) Étudier les variations de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$.
(b) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $]2 ; +\infty[$.
- 2** On considère l'algorithme de dichotomie page suivante permettant d'encadrer α .

```

Initialisation
  Affecter à a la valeur 3.
  Affecter à b la valeur 4.
Traitement
  Tant que b-a > 0,01 faire
    Affecter à m la valeur (a+b)/2
    Si f(m) > 1 alors
      Affecter à a la valeur m
    Sinon
      Affecter à b la valeur m.
    Fin Si
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher a, b
    
```

- (a) Justifier le choix des valeurs initiales $a = 3$ et $b = 4$.
- (b) Que peut-on dire de l'amplitude de l'intervalle à la fin de l'algorithme ?

- (c) Dérouler pas à pas les deux premières étapes de l'algorithme en remplissant les cases vides du tableau suivant :

Étape	Test $b - a > 0,01$	m	Test $f(m) > 1$	a	b
Initialisation				3	4
1	Vrai	3,5			
2					

- (d) Après les deux premières étapes, quel encadrement de α obtient-on ?
- (e) Déterminer le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir l'encadrement final.

15 Un problème récapitulatif



55 min

Corrigé
p. 103

Lycée Honoré de Balzac, Mitry-Mory

Partie A

- 1** Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega(1 ; 0)$ et de rayon 1. Tracer le cercle \mathcal{C} et en donner une équation dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).
- 2** Soit Δ la droite d'équation $x = 1$ et \mathcal{D} la droite d'équation $y = tx$, où t est un réel. \mathcal{D} coupe la droite Δ au point M_0 et le cercle \mathcal{C} aux points O et M_1 .

On définit le point M par la relation : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_0M_1}$.

- (a) On note $(x_M ; y_M)$ les coordonnées du point M .

Déduire de la question précédente que :

$$t^2 = \frac{1 - x_M}{1 + x_M},$$

puis tracer Δ , \mathcal{D} , M_0 , M_1 et M dans les cas particuliers où $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$ sur trois figures différentes.

- (b) Calculer les coordonnées de M_0 . Montrer que celles de M_1 sont $\left(\frac{2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2}\right)$, puis exprimer celles de M en fonction de t .

- 3** Déduire de la question précédente que $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$, puis, à l'aide de la relation $y = tx$, démontrer que lorsqu'on fait varier t dans \mathbb{R} , les points M se trouvent sur la courbe \mathcal{S} d'équation :

$$(x - 1)x^2 + (x + 1)y^2 = 0.$$

Partie B

Le but de cette partie est de représenter graphiquement la courbe \mathcal{S} .

- 1** On définit la fonction numérique f par : $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
- (a) Donner l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
 - (b) On pose $u(x) = \frac{1-x}{1+x}$ pour $x \in \mathcal{D}_f$. Calculer $u'(x)$.
 - (c) Donner l'ensemble de définition de la fonction dérivée f' de f , et montrer que $f'(x) = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^2 \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.
 - (d) En déduire le signe de f' puis les variations de f .
- 2** (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Que peut-on en conclure ?
- (b) Étudier les limites de f aux bornes de \mathcal{D}_f . Dresser le tableau de variation de f .
 - (c) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point O .
- 3** (a) Représenter graphiquement f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm. Soit \mathcal{S}_1 la courbe obtenue.
- (b) Comment peut-on déduire \mathcal{S} de \mathcal{S}_1 ? (Justifier.) Représenter graphiquement \mathcal{S} .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F **Dérivabilité**

Enoncé
p. 84

1 Faux. La fonction racine carrée est bien définie sur $[0 ; +\infty[$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

2 Faux. La fonction f n'admet un extremum en a que si sa dérivée s'annule et change de signe en a . Ainsi la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ a sa dérivée qui s'annule en 0 puisque, pour tout x réel $f'(x) = 3x^2$. Cependant, elle n'admet pas d'extremum en 0.

3 Faux. Pour $x \neq 2$, $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{|x - 2|}{x - 2}$.

Par suite, pour $x > 2$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 1,$$

et pour $x < 2$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1.$$

La fonction $x \mapsto |x - 2|$ n'est pas dérivable en 2.

4 Faux. Soit $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = x$. La fonction g n'est pas dérivable en 0 ; la fonction f est dérivable en 0. La fonction fg définie pour tout réel x positif par $(fg)(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 et $(fg)'(0) = 0$.

2 V/F **Fonction définie par morceaux**

Enoncé
p. 84

1 Vrai. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1.$$

Si f est une fonction définie en a , elle admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en a et que ces limites sont égales.

2 Faux. D'après la question précédente, la fonction f n'est pas continue en 0, par suite, elle n'est pas dérivable en 0.

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

On a donc, en prenant la contraposée de la proposition précédente : si f n'est pas continue en a , alors f n'est pas dérivable en a .

3 Vrai. Pour tout réel $x < 0$, $f'(x) = -2x$ donc f' est strictement positive sur $] -\infty ; 0[$. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 2x$ donc f' est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et sur $] -\infty ; 0[$.

De plus, pour tout x non nul, $-x^2 < 1 < x^2 + 1$, donc si $x < 0$, on a $f(x) < f(0)$ et si $x > 0$, on a aussi $f(0) < f(x)$. Par conséquent, f

est strictement croissante sur \mathbb{R} .

MÉTHODE

Il est conseillé de faire une représentation graphique rapide pour bien voir l'allure de la courbe. On remarquera alors l'importance de bien préciser que la limite à gauche de la fonction f en 0 est inférieure à l'image de 0 et que la limite à droite en 0 est justement égale à $f(0)$. Cette représentation graphique sera aussi une aide pour la question suivante.

- 4 Faux. L'équation $f(x) = a$ n'admet aucune solution pour a appartenant à l'intervalle $[0 ; 1[$.

3 V/F Avec des valeurs absolues

Enoncé
p. 84

- 1 Faux. La fonction f est définie sur \mathbb{R} .
- 2 Vrai. La fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} donc f est continue sur \mathbb{R} en tant que quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
- 3 Faux. La fonction f est dérivable en 0.

On a, pour tout réel x ,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x}{1 + |x|},$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

On peut donc conclure que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

- 4 Faux. On cherche s'il existe un réel x tel que $f'(x) = 2$.

Pour $x > 0$, l'équation $f'(x) = 2$ équivaut à $\frac{x^2 + 2x}{(1 + x)^2} = 2$, ce qui équivaut à $x^2 + 2x + 2 = 0$, équation qui a un discriminant négatif, donc aucune solution dans \mathbb{R} .

De même, pour $x < 0$, l'équation $f'(x) = 2$ équivaut à $\frac{2x - x^2}{(1 - x)^2} = 2$ soit $3x^2 - 6x + 2 = 0$. Cette équation n'admet aucune solution négative. On en déduit que l'équation $f'(x) = 2$ n'a pas de solution. Ainsi la courbe représentative de la fonction f n'a pas de tangente de pente 2.

4 **V/F** **Solution de $f(x) = 0$**

Enoncé
p. 85

- 1 Vrai.
- 2 Vrai. De façon évidente, cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}^* .
Si la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, en revanche $x \mapsto x\sqrt{x}$ l'est : en effet, d'après la définition du nombre dérivé en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x} - 0\sqrt{0}}{x} = 0.$$

- 3 Faux, le maximum est atteint pour $x = \frac{9}{16}$ et il est positif (mais très proche de 0).
- 4 Vrai. Un encadrement de la première solution est : $0,456 < x_1 < 0,457$, et un encadrement de la deuxième solution est $0,665 < x_2 < 0,666$.

5 **V/F** **Continuité et dérivabilité**

Enoncé
p. 85

- 1 Vrai. $I = \mathbb{R}$ et $a = 0$. La fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x$ est bien continue et dérivable en 0.
- 2 Vrai. $I = \mathbb{R}$ et $a = 0$. La fonction valeur absolue f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
- 3 Faux. D'après un théorème du cours, toute fonction dérivable en a est aussi continue en a .
- 4 Vrai. $I = \mathbb{R}$ et $a = 0$. La fonction partie entière E définie sur \mathbb{R} par $E(x) = n$ où n est l'entier tel que $n \leq x < n + 1$, n'est pas continue en 0, et n'est donc pas dérivable en a d'après la contraposée du théorème rappelé à la question **3**.

MÉTHODE

Contrairement aux affirmations générales, où un contre-exemple permet de montrer qu'une affirmation est fautive, dans le cas où l'affirmation porte sur l'existence d'une fonction, un exemple permet de prouver que l'affirmation est vraie. Il faut par contre faire appel à un théorème pour justifier que l'affirmation est fautive.

6 **Étude d'une fonction irrationnelle**

Enoncé
p. 85

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

- 1 Pour savoir si la fonction f est continue en 1, on détermine sa limite quand x tend vers 1 et on compare le résultat à $f(1)$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}.$$

On a donc, en factorisant $x^2 + x - 2$ en $(x - 1)(x + 2)$ puis en simplifiant

$$\text{par } x - 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + 2}.$$

$$\text{On en déduit que } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{4}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, il en résulte que la fonction f est continue en 1.

2 On a :
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1} - \frac{3}{4}}{x - 1}.$$

Après simplification, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\sqrt{x^2 + x + 2} - (3x + 5)}{4(x - 1)^2}.$$

En multipliant les deux termes du quotient par l'expression conjuguée du numérateur, puis en simplifiant, il vient :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4\sqrt{x^2 + x + 2} - (3x + 5))(4\sqrt{x^2 + x + 2} + (3x + 5))}{4(x - 1)^2(4\sqrt{x^2 + x + 2} + (3x + 5))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16x^2 + 16x + 32 - (9x^2 + 30x + 25)}{4(x - 1)^2(4\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 14x + 7}{4(x - 1)^2(4\sqrt{x^2 + x + 2} + (3x + 5))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(x - 1)^2}{4(x - 1)^2(4\sqrt{x^2 + x + 2} + (3x + 5))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{4(4\sqrt{x^2 + x + 2} + (3x + 5))}, \end{aligned}$$

soit $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{7}{64}$. On en déduit que la fonction f est dérivable en 1.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3** Étudions la dérivabilité de la fonction f pour $x \neq 1$.

La fonction : $x \mapsto x^2 + x + 2$ est dérivable pour tout x différent de 1 et strictement positive.

La fonction racine carrée est dérivable sur $]0 ; +\infty[$; d'après le théorème de dérivabilité des fonctions composées, la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 2}$ est dérivable pour tout x différent de 1.

La fonction : $x \mapsto x - 1$ est dérivable et ne s'annule pas pour tout x différent de 1, donc la fonction f est dérivable pour tout $x \neq 1$.

- 4** Pour tout x différent de 1, on a, en appliquant la formule de dérivation d'un quotient,

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - [\sqrt{x^2+x+2} - 2]}{(x-1)^2}.$$

Cette expression se simplifie en :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - [2(x^2+x+2) - 4\sqrt{x^2+x+2}]}{2(x-1)^2\sqrt{x^2+x+2}}.$$

Finalement, on obtient :

$$f'(x) = \frac{-3x - 5 + 4\sqrt{x^2+x+2}}{(x-1)^2 2\sqrt{x^2+x+2}}.$$

- 5** Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1} = \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \frac{2}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}.$$

Après simplification par x , on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

On procède de même pour déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$. Comme x est négatif au voisinage de $-\infty$, on a $\sqrt{x^2} = -x$ d'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

MÉTHODE

Il ne faut pas confondre l'étude de la dérivabilité d'une fonction en un point (étude locale) et l'étude de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle (étude globale).

Pour savoir si une fonction f est dérivable au point a , on étudie la limite du quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a .

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle, on utilise la dérivabilité des fonctions de références (fonctions polynômes, fonctions rationnelles, fonction racine carrée, etc.) et les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables (somme, produit, quotient, composée).

7 Calcul de dérivées

Enoncé
p. 86

Lycée Jules Ferry, Caen

- 1** La fonction f est une fonction rationnelle, donc est dérivable sur son ensemble de définition. Or, pour tout réel x , on a $x^2 + 1 > 0$, de sorte que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Alors f est définie et dérivable sur \mathbb{R} tout entier.

Pour calculer la dérivée de f , on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec :

$$u(x) = 3x^3 - 6x + 5 \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 + 1.$$

D'où :

$$u'(x) = 9x^2 - 6 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x.$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(9x^2 - 6)(x^2 + 1) - 2x(3x^3 - 6x + 5)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 15x^2 - 10x - 6}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

- 2** La fonction g est dérivable comme composée d'une fonction polynôme et d'une fonction puissance. On a :

$$g'(x) = 3(20x^3 - 4x + 1)(5x^4 - 2x^2 + x)^2.$$

- 3** La fonction h est définie sur \mathbb{R} car le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction h est dérivable comme composée d'une fonction rationnelle et d'une fonction puissance.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4 \left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1} \right)^3 \frac{(4x - 5)(x^2 + 1) - (2x^2 - 5x + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= 4 \left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1} \right)^3 \frac{5x^2 + 2x - 5}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4(2x^2 - 5x + 1)^3(5x^2 + 2x - 5)}{(x^2 + 1)^5}. \end{aligned}$$

Remarque : sous cette forme, on pourra trouver le signe de $h'(x)$, ce qui est le but quand on calcule une dérivée.

- 4** La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur \mathbb{R} et est à valeurs dans $[1; +\infty[$, donc dans \mathbb{R}_+^* . Or, $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Par ailleurs, cette dernière fonction est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Donc $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2 + 1}}$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions dérivables.

Posons $G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Alors :

$$G'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Or, $\ell = \sqrt{G}$, donc $\ell'(x) = \frac{G'(x)}{2\sqrt{G(x)}}$.

Soit :

$$\ell'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{\sqrt{x^2 + 1}}}.$$

8 Localisation de racines

Enoncé
p. 86

Lycée Chaptal, Paris

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^5 - 5x + 1.$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme et :

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1).$$

Nous en retiendrons que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[0; 1[$.

Ainsi, la fonction f est dérivable, donc continue, et est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Enfin :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(1) = -3, \quad \text{donc} \quad 0 \in [f(1); f(0)].$$

On sait alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0 ; 1]$.

De plus,

$$f(0,2) = 0,000\ 32 > 0$$

et

$$f(0,3) = -0,497\ 57 < 0,$$

donc α est compris entre 0,2 et 0,3.

Finalement, $\alpha \approx 0,2$ à 10^{-1} près par défaut.

9 Étude d'une équation

Enoncé
p. 86

Lycée Vieljeux, La Rochelle

La fonction f est dérivable sur $] -1 ; \frac{1}{2} [\cup] \frac{1}{2} ; +\infty [$ et :

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

On a donc $f'(x) < 0$ pour tout x dans $] -1 ; \frac{1}{2} [\cup] \frac{1}{2} ; +\infty [$, ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $] -1 ; \frac{1}{2} [$ et strictement décroissante sur $] \frac{1}{2} ; +\infty [$.

On a de plus $f(-1) = -\frac{1}{3}$, donc f ne prend que des valeurs strictement négatives sur $] -1 ; \frac{1}{2} [$: donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution dans cet intervalle.

Par ailleurs, f est continue et strictement décroissante sur $] \frac{1}{2} ; +\infty [$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] \frac{1}{2} ; +\infty [$.

On remarque enfin que $f(1) = 1 - \sqrt{2} < 0$, donc $\alpha \in] \frac{1}{2} ; 1 [$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

10 Lecture graphique

Enoncé
p. 86

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 La dérivée est négative sur \mathbb{R}_- , donc f est décroissante sur \mathbb{R}_- ; la dérivée est positive sur \mathbb{R}_+ , donc f est croissante sur \mathbb{R}_+ .
- 2 La fonction admet donc un minimum en 0.
- 3 La dérivée est négative sur \mathbb{R}_- , donc f est décroissante sur \mathbb{R}_- ; la dérivée est positive sur \mathbb{R}_+ , donc f est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Ceci élimine les courbes **a** et **d**.

On voit que $f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, donc que la pente de la tangente à la courbe va diminuer quand x augmente, elle doit déjà être faible pour $x = 4$ (environ 0,5).

C'est donc la courbe **c** qui convient.

11 Vrai ou faux

Enoncé
p. 88

Lycée Guynemer, Compiègne

- 1 Faux. Contre-exemple : $f(x) = 2$ pour $x < 0$ et $f(x) = -5$ pour $x \geq 0$.
- 2 Faux. $I = [-2 ; 2]$ et $f(x) = x^2 - 1$. $f(2)f(-2) = 9$, f est continue car c'est une fonction polynôme, mais $f(1) = 0$.
- 3 Faux. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pour $x < 1$ et $f(x) = x + 1$ pour $x \geq 1$. Cette fonction est strictement monotone mais n'est pas continue en 1.
- 4 Faux. $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = (x - 2)^2$. Cette fonction ne s'annule que pour $x = 2$, elle est continue sur I , mais elle est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$, donc non monotone.

12 Étude de fonctions

Enoncé
p. 88

Lycée François Mauriac, Bordeaux

- 1 Le discriminant du trinôme est :

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times \frac{11}{8} = 25 = 5^2.$$

Les racines de $2x^2 - 6x + \frac{11}{8} = 0$ sont donc :

$$x_1 = \frac{6 - 5}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + 5}{4} = \frac{11}{4},$$

d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$	$+\infty$	
$2x^2 - 6x + \frac{11}{8}$	+	0	-	0	+

CONTINUITÉ ET DÉRIVATION • CHAP. 4

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Posons $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{11}{4}$.

Alors :

- pour $x < \frac{1}{4}$, $f(x) = 2x^2 - 6x + \frac{11}{8}$ donc f est dérivable sur $]-\infty ; a[$;
- pour $\frac{1}{4} < x < \frac{11}{4}$, $f(x) = -2x^2 + 6x - \frac{11}{8}$ donc f est dérivable sur $]a ; b[$;
- pour $x > \frac{11}{4}$, $f(x) = 2x^2 - 6x + \frac{11}{8}$ donc f est dérivable sur $]b ; +\infty[$.

3 (a) Pour $x \in]-\infty ; \frac{1}{4}[$, $f'(x) = 4x - 6$.

Pour $x < \frac{1}{4}$, on a $4x - 6 < 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty ; \frac{1}{4}[$.

Pour $x \in]\frac{1}{4} ; \frac{11}{4}[$, $f'(x) = -4x + 6$, f' s'annule pour $x = \frac{3}{2}$, or $\frac{1}{4} < \frac{3}{2} < \frac{11}{4}$.

Donc :

- pour $x \in]\frac{1}{4} ; \frac{3}{2}[$, $f'(x) > 0$ et f est croissante ;
- pour $x \in]\frac{3}{2} ; \frac{11}{4}[$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante.

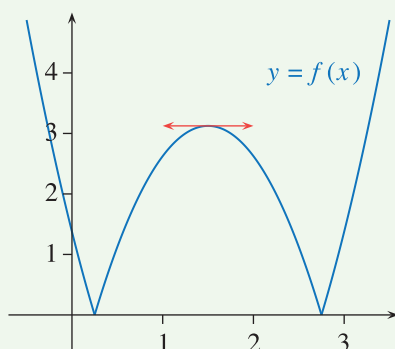
Pour $x \in]\frac{11}{4} ; +\infty[$, $f'(x) = 4x - 6$.

Pour $x > \frac{11}{4}$, on a $4x - 6 > 0$, donc f est croissante sur $]\frac{11}{4} ; +\infty[$.

(b) D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0 -	+	
f	$+\infty$	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow
		0	$\frac{25}{8}$	0	$+\infty$

4



Remarque : on obtient la courbe à partir de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 6x + \frac{11}{8}$ et en remplaçant la partie sous l'axe des abscisses par sa courbe symétrique par rapport à ce même axe (c'est l'effet de la valeur absolue).

13 Existence ou unicité

Enoncé
p. 88

Lycée La Bruyère, Versailles

- 1 La fonction f est continue sur $[a ; b]$. Comme $f(a)f(b) < 0$, cela signifie que l'une des valeurs est positive et l'autre négative, donc que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve donc qu'il existe au moins un réel c entre a et b tel que $f(c) = 0$. Comme f est strictement décroissante, pour tout autre réel d , si $d < c$ alors $f(d) < f(c)$ ou si $d > c$, $f(d) > f(c)$, donc $f(d)$ ne peut être nul. Cela montre qu'il existe un réel c unique dans $[a ; b]$ tel que $f(c) = 0$.
- 2 Application : On constate que $0 \in [f(6) ; f(0)]$.
 - (a) Si f est continue sur $[0 ; 6]$, alors le théorème des valeurs intermédiaires prouve qu'il existe au moins une solution dans $[0 ; 6]$ à l'équation $f(x) = 0$.
 - (b) Si f est strictement décroissante, il n'est pas certain qu'il y ait des solutions, par contre il y en a au plus une.
 - (c) Si f est continue et strictement décroissante sur $[0 ; 6]$, alors d'après la question de cours, l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans $[0 ; 6]$.

14 Algorithme de dichotomie

Enoncé
p. 89

Lycée La Bruyère, Versailles

- 1** (a) La fonction f est définie et dérivable sur $]2; +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{-2 \times 3(x-2)^2}{(x-2)^6} = -\frac{6}{(x-2)^4}.$$

On constate donc que $f'(x) < 0$ sur $]2; +\infty[$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

- (b) $f(3) = 2$ et $f(4) = \frac{2}{2^3} = 0,25$.

Comme f est continue, strictement décroissante sur $[3; 4]$, et 1 est compris entre $f(3)$ et $f(4)$, il existe donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, un nombre α unique dans $[3; 4]$ tel que $f(\alpha) = 1$.

Comme f est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$, f ne peut pas prendre deux fois la valeur 1 sur cet intervalle. L'équation $f(x) = 1$ a donc une solution unique α dans $]2; +\infty[$, de plus on sait que α est compris entre 3 et 4.

- 2** (a) On a vu dans la question **1.b** que α est compris entre 3 et 4, il est donc normal de partir de cet encadrement.

- (b) Le traitement cesse lorsque $b - a \leq 0,01$. Donc à la fin de l'algorithme, l'amplitude de l'encadrement est inférieur ou égal à 0,01.

- (c) Le tableau rempli est le suivant :

Étape	Test $b - a > 0,01$	m	Test $f(m) > 1$	a	b
Initialisation				3	4
1	Vrai	3,5	Faux	3	3,5
2	Vrai	3,25	Vrai	3,25	3,5

Pour remplir ce tableau, on a besoin des valeurs : $f(3,5) \approx 0,59$ et $f(3,25) \approx 1,02$.

- (d) On trouve donc que α est compris entre 3,25 et 3,5.

- (e) L'amplitude de l'encadrement est divisée par 2 à chaque étape. Initialement, l'amplitude est 1 ; après n étapes, elle est égale à 2^{-n} . On veut $2^{-n} \leq 0,01$, c'est-à-dire $2^n \geq 100$. Cela se réalise à partir de $n = 7$ ($2^6 = 64$ et $2^7 = 128$).

Il faut donc 7 étapes pour avoir l'encadrement final.

15 Un problème récapitulatif

Enoncé
p. 90

Lycée Honoré de Balzac, Mitry-Mory

Partie A

- 1** Nous laissons au lecteur le soin de tracer le cercle de centre $\Omega(1; 0)$ et de rayon 1 dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 centimètres.

COURS

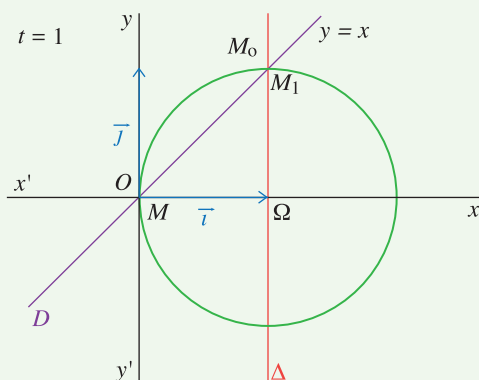
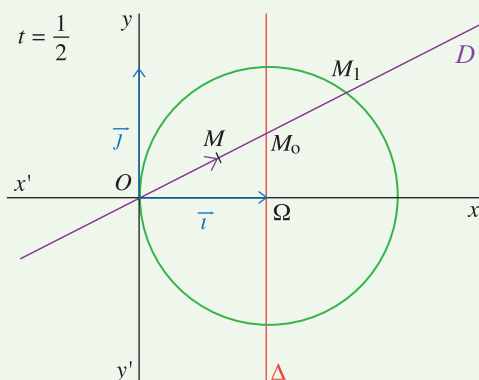
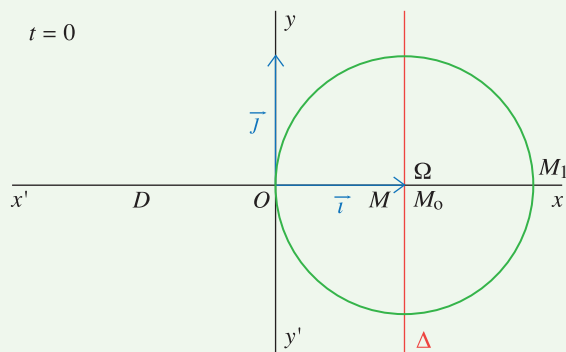
INTERROS

CORRIGÉS

Ce cercle a pour équation :

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

- 2 (a)** On trace les trois figures demandées correspondant à $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$:



- (b)** Le point M_0 est le point d'intersection de la droite \mathcal{D} d'équation $x = 1$ et de la droite Δ d'équation $y = tx$.
 Ses coordonnées sont donc $(1 ; t)$.

Le point M_1 est l'un des points d'intersection de la droite Δ d'équation $y = tx$ et du cercle \mathcal{C} d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Les coordonnées des points d'intersection de la droite Δ et du cercle \mathcal{C} s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} y = tx \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

En remplaçant y par tx dans la deuxième équation, il vient :

$$(x - 1)^2 + t^2x^2 = 1,$$

soit :

$$x [x(1 + t^2) - 2] = 0.$$

Cette équation admet deux solutions 0 et $\frac{2}{1 + t^2}$.

L'abscisse du point M_1 est donc $\frac{2}{1 + t^2}$ et son ordonnée est $\frac{2t}{1 + t^2}$.

On obtient bien les coordonnées demandées :

$$\left(\frac{2}{1 + t^2}; \frac{2t}{1 + t^2} \right).$$

Le point M est défini par le relation vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_0M_1}$.

D'après les résultats précédents, ses coordonnées sont :

$$\left(\frac{2}{1 + t^2} - 1; \frac{2t}{1 + t^2} - t \right),$$

soit, après calcul :

$$M \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \frac{t - t^3}{1 + t^2} \right).$$

3 On a : $x_M = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ équivaut à $x_M(1 + t^2) = 1 - t^2$.

Donc $x_M = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ équivaut à $t^2(x_M + 1) = 1 - x_M$, d'où, puisque x_M est différent de -1 , on déduit l'égalité demandée :

$$t^2 = \frac{1 - x_M}{1 + x_M}.$$

Si t varie dans \mathbb{R} , comme $y_M = tx_M$, on a alors $y_M^2 = t^2x_M^2$, soit

$$y_M^2 = \frac{1 - x_M}{1 + x_M}x_M^2.$$

Les coordonnées du point M vérifient l'égalité :

$$y_M^2(1 + x_M) = x_M^2(1 - x_M).$$

Ce sont donc bien des solutions de l'équation :

$$(x - 1)x^2 + (x + 1)y^2 = 0.$$

Les points M sont donc bien sur la courbe \mathcal{S} .

Partie B

- 1** (a) La fonction f est définie pour tout réel x tel que :

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0.$$

On a donc :

$$\mathcal{D}_f =]-1; 1].$$

- (b) La fonction $u : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est dérivable sur $]-1; 1]$ en tant que fonction rationnelle.

Pour tout x appartenant à $]-1; 1]$, on a :

$$u'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

- (c) La fonction u est dérivable sur $]-1; 1]$, à valeurs dans $]0; +\infty[$.
La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc, d'après le théorème de dérivabilité des fonctions composées, la fonction \sqrt{u} est dérivable sur $]-1; 1]$.

On en déduit que la fonction f est dérivable sur $]-1; 1]$.

$$\text{Comme } f(x) = x\sqrt{u(x)}, f'(x) = \sqrt{u(x)} + x \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

En remplaçant alors $u(x)$ et $u'(x)$ par leurs valeurs, on obtient :

$$f'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x \left(\frac{-2}{(1+x)^2} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \right)$$

Après simplifications, il vient :

$$f'(x) = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^2 \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

- (d) Le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif sur $]-1; 1]$.

$f'(x)$ est donc du signe de son numérateur.

Or, le trinôme $1-x-x^2$ admet deux racines réelles dont une seule

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ appartient à } \mathcal{D}_f.$$

On en déduit que $f'(x)$ est strictement positive sur $]-1; \alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha; 1]$.

Il en résulte que la fonction f est strictement croissante sur $]-1; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha; 1]$.

- 2** (a) Étudions la dérivabilité de la fonction f en 1 :

CONTINUITÉ ET DÉRIVATION • CHAP. 4

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-x}{1+x} \times \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{1+x} = \frac{-1}{2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = +\infty.$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty.$$

Il en résulte que la fonction f n'est pas dérivable en 1 et que sa courbe représentative admet au point d'abscisse 1 une demi tangente verticale.

- (b) Déterminons les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

On a d'une part $f(1) = 0$ et d'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -\infty.$$

Dressons le tableau de variation de la fonction f :

x	-1	α	1
$f'(x)$		+	0 -
f		$f(\alpha)$	
		↗	↘
	$-\infty$		0

- (c) Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point O est :

$$y = f'(0)x + f(0).$$

On obtient : $y = x$.

- 3** (a) Représentation graphique de la fonction f :
La courbe \mathcal{S}_1 est représentée dans le repère de la question suivante.
- (b) La courbe \mathcal{S} a pour équation $(x - 1)x^2 + (x + 1)y^2 = 0$.

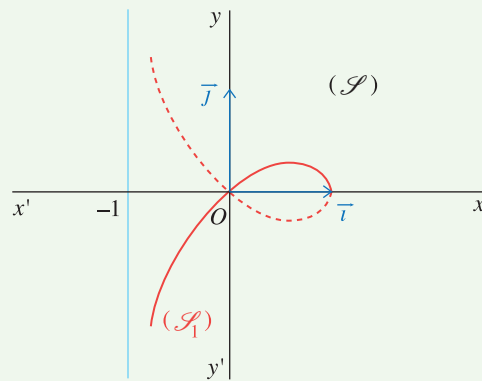
Or, pour tout réel x différent de -1 , cette équation peut se mettre sous la forme :

$$y^2 = x^2 \frac{1-x}{1+x}.$$

La courbe \mathcal{S} a donc pour équation :

$$|y| = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

On en déduit que la courbe \mathcal{S} est la réunion de la courbe \mathcal{S}_1 et de la courbe symétrique de \mathcal{S}_1 par rapport à l'axe des abscisses.



Chapitre 5

Fonctions sinus et cosinus

Plan du chapitre

1. Dérivées des fonctions sinus et cosinus
2. Étude de la fonction sinus
3. Étude de la fonction cosinus

Exercice type

Lycée François Mauriac, Bordeaux

L'observation de l'écran graphique d'une calculatrice laisse penser que, lorsque x est un réel, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

On se propose de valider cette propriété en étudiant la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

- 1 Montrer que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
- 2 Étudier le sens de variation de la fonction f' sur \mathbb{R} puis en déduire le signe de la fonction f' .
- 3 En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} puis que, pour tout réel x , $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.
- 4 En admettant l'inégalité $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ valable pour tout réel x , déterminer, si elle existe, la limite en 0 de $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

1 Dérivées des fonctions sinus et cosinus

1.1 Fonction sinus

Propriété 1

La fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout nombre réel x , $\sin' x = \cos x$.

Propriété 2

La fonction sinus est dérivable en 0 et on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Voir exercice 9 pour une démonstration.

1.2 Fonction cosinus

Propriété 3

La fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout nombre réel x , $\cos' x = -\sin x$.

Propriété 4

On déduit de ce qui précède que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

2 Étude de la fonction sinus

2.1 Étude sur $I = [0 ; \pi]$

On a $\sin' x = \cos x$.

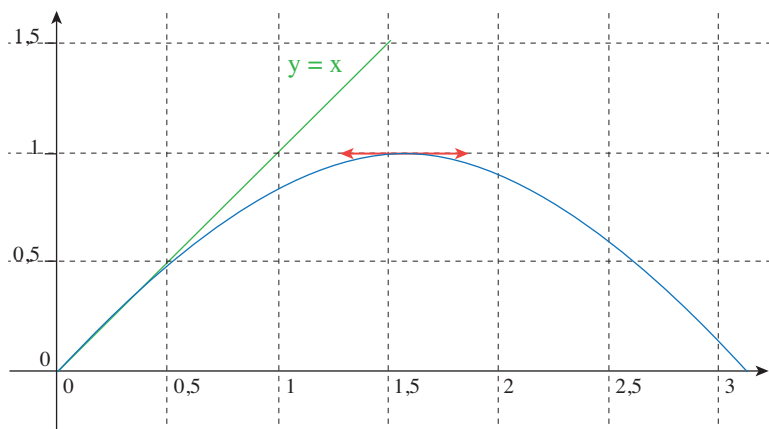
Or, sur I , $\cos x > 0$ si $x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x = 0$ si $x = \frac{\pi}{2}$ et $\cos x < 0$ si $x > \frac{\pi}{2}$.

D'où le tableau de variation sur $[0 ; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
\sin'	+	0	-
\sin	0	1	0

↗ ↘

Et la courbe représentative sur $[0 ; \pi]$, avec sa tangente à l'origine : (voir page suivante)



2.2 Courbe représentative sur \mathbb{R}

- Comme, pour tout nombre réel x , $\sin(-x) = -\sin x$, on dit que la fonction est impaire.

Propriété 5

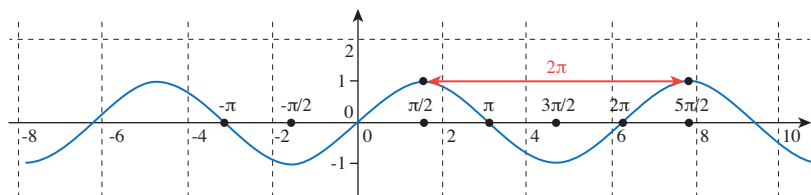
La représentation graphique de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

- Comme, pour tout nombre réel, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, on dit que la fonction est périodique de période de 2π .
On appelle période d'une fonction f (s'il existe) le plus petit nombre k strictement positif tel que, pour tout x réel, $f(x + k) = f(x)$.

Conséquence graphique :

Propriété 6

La représentation graphique de la fonction sinus dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est invariante par toute translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$, k appartenant à \mathbb{Z} .



COURS

INTERROS

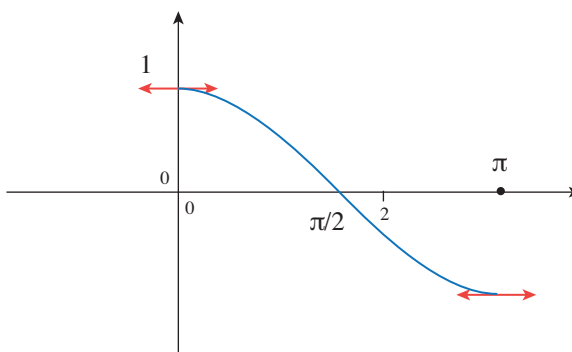
CORRIGÉS

3 Étude de la fonction cosinus

3.1 Étude sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

Pour tout nombre réel x , $\cos' x = -\sin x$. Or, $\sin x \geq 0$ sur $[0 ; \pi]$, donc la fonction cosinus est décroissante sur $[0 ; \pi]$.

x	0	π
\cos'	0	0
\cos	1	-1

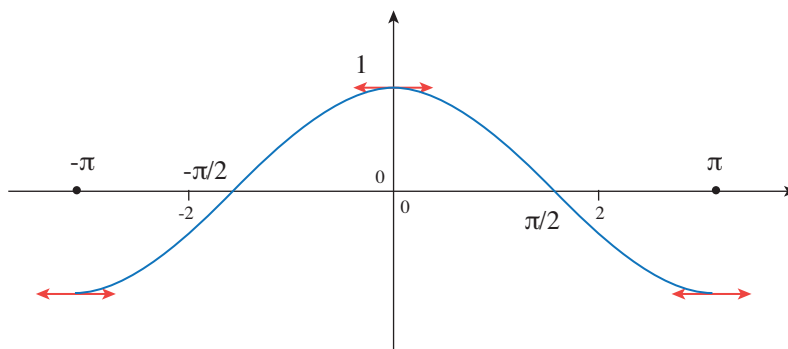


3.2 Courbe représentative sur \mathbb{R}

- On sait que pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$. On dit que la fonction \cos est paire.

Propriété 7

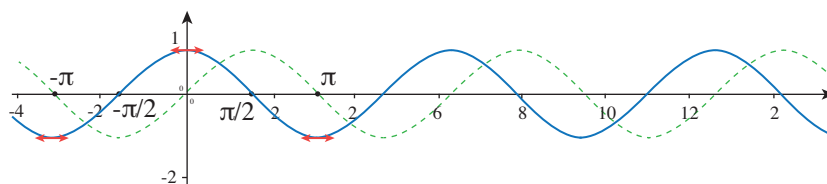
La courbe représentative de la fonction \cos est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



- On sait que, pour tout nombre réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. La fonction \cos est donc périodique de période 2π . On a donc $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ pour tout nombre k appartenant à \mathbb{Z} .

Propriété 8

La représentation graphique de la fonction cosinus dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est invariante par toute translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$, k appartenant à \mathbb{Z} .
On a représenté ci-dessous les fonctions sinus (en pointillés) et cosinus. Elles se déduisent l'une de l'autre par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.



➔ Solution de l'exercice type

Lycée François Mauriac, Bordeaux

1 La fonction \cos est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et la fonction :
 $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme
donc la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

2 Pour tout réel x ,

$$f'(x) = -\sin x + x ,$$

$$f''(x) = 1 - \cos x .$$

Comme pour tout réel x , $\cos x \leq 1$, on en déduit que $f''(x)$ est positif sur \mathbb{R} et ne s'annule que pour $x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que la fonction f' est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Comme $f'(0) = 0$ et f' est strictement croissante sur \mathbb{R} , on peut en déduire que f' est strictement négative sur $]-\infty ; 0[$ et strictement positive sur $]0 ; +\infty[$.

3 D'après l'étude du signe de f' obtenu à la question précédente, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f admet un minimum en 0 et ce minimum vaut $f(0) = 0$.
Il en résulte que, pour tout réel x , on a $f(x) \geq f(0)$ soit $f(x) \geq 0$.

Par conséquent, pour tout réel x , $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0$, d'où finalement :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x .$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée François Mauriac, Bordeaux

- 4 En admettant l'inégalité donnée par le texte et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient l'encadrement, valable pour tout réel x :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

On encadre alors $g(x)$:

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} \right) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit d'après le théorème de limite par encadrement que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}.$$

1 **V/F** **Calculs de limites**

15 min Corrigé p. 122

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 1.$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 1.$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$

4 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = 1.$

2 **QCM** **Dérivées de fonctions trigonométriques**

20 min Corrigé p. 122

Pour chaque question, plusieurs réponses vous sont proposées. Au moins une est juste. Donner toutes les réponses justes.

1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Alors $f'(x) =$

a $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

b $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c $2 \cos(2x)$

d $\sqrt{2}(1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x)$

2 La fonction tangente est définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Alors, pour tout réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan' x =$

a $-\frac{\cos x}{\sin x}$

b $\frac{1}{\cos^2 x}$

c $1 + \tan^2 x$

d $-\ln(\cos x)$

3 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3 \sin^3 x - 6 \sin x + 5}{\sin^2 x + 1}$. Alors $f'(x) =$

a $\frac{4 \sin^2 x \cos x}{(\sin^2 x + 1)^2}$

b $\frac{9 \sin^2 x \cos x - 6 \cos x}{2 \sin x \cos x}$

c $\frac{(3 \sin^4 x + 15 \sin^2 x - 10 \sin x - 6) \cos x}{(\sin^2 x + 1)^2}$

4 Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin 2x$ et $g(x) = 2x$. Les courbes représentatives des fonctions f et g ont des tangentes communes en :

a aucun point

b un point

c deux points

d une infinité de points

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 QCM Propriétés des fonctions trigonométriques 10 min Corrigé p. 123

Pour chaque question, une seule réponse est juste. Choisir la bonne réponse.

- 1 Une période de la fonction $f : x \mapsto \cos(3x)$ est :
 - a** $\frac{2\pi}{3}$
 - b** 3π
 - c** $\frac{3\pi}{2}$
- 2 La fonction $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est :
 - a** paire
 - b** impaire
 - c** ni l'un ni l'autre
- 3 La fonction $g : x \mapsto \sin 3x$ est :
 - a** paire
 - b** impaire
 - c** ni l'un ni l'autre
- 4 Une période de la fonction $h : x \mapsto \sin\left(\frac{x + \pi}{4}\right)$ est :
 - a** 2π
 - b** $\frac{\pi}{2}$
 - c** 8π

4 QCM Variations 15 min Corrigé p. 123

Pour chaque question, une seule réponse est juste. Choisir la bonne réponse.

- 1 La fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est :
 - a** croissante sur $[0 ; \pi]$
 - b** croissante sur $[2 ; \pi]$
 - c** croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4} ; \pi\right]$
- 2 La fonction g définie sur $I = [0 ; \pi]$ par $g : x \mapsto \sin(2x)$:
 - a** a les mêmes variations que la fonction \sin sur I
 - b** est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$
 - c** est monotone sur I
- 3 La fonction h définie sur $[0 ; \pi]$ par $h : x \mapsto \sin x + \cos x$:
 - a** est décroissante
 - b** admet pour maximum $\sqrt{2}$
 - c** admet pour maximum $\frac{\pi}{4}$
- 4 La fonction $k : x \mapsto \cos 3x$ définie sur $I = [-2 ; 2]$:
 - a** a les mêmes variations que la fonction \cos
 - b** admet un maximum local pour $x = 2$
 - c** admet deux minimums locaux sur I

5 Fonction dérivée



15 min

Corrigé
p. 125

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition.

1 $f(x) = 2 \sin(8x) - 5 \cos\left(7x - \frac{\pi}{3}\right).$

2 $g(x) = [\cos(7x)]^4.$

3 $h(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$

6 Équations et inéquations



25 min

Corrigé
p. 125

Lycée Buffon, Paris

1 Résoudre dans \mathbb{R} , puis dans $I = [-\pi ; \pi]$, l'inéquation :

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

2 Résoudre dans \mathbb{R} , puis dans $J = [-\pi ; 3\pi]$, l'équation :

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0.$$

7 Inéquation associée à une équation



20 min

Corrigé
p. 126

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

Résoudre dans l'intervalle $] -\pi ; \pi[$:

1 $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} = 0.$

2 $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} \leq 0.$

Aide : $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}.$

8 Étude d'une fonction



25 min

Corrigé
p. 127

Lycée La Bruyère, Versailles

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3 \cos x - 2 \cos^3 x.$

On appelle \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}).$

1 Démontrer que f est paire et périodique de période $2\pi.$

2 Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout réel $x,$

$$f'(x) = 3 \sin x \cos 2x.$$

3 Étudier les variations de f sur $[0 ; \pi].$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 4 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0,5$ dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune de ces éventuelles solutions.
- 5 Tracer la courbe représentative de f sur $[0 ; \pi]$. Comment en déduire la courbe \mathcal{C} sur \mathbb{R} ?

9 Une limite à connaître



15 min

Corrigé
p. 129

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 Expliquer ce que représente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
- 2 En déduire, en fonction de x , la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

10 Limites trigonométriques



15 min

Corrigé
p. 129

Lycée Chaptal, Paris

- 1 Soit α un nombre réel non nul. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)}$.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin^2(x)}$.

11 Fonction trigonométrique



30 min

Corrigé
p. 130

Lycée Lakanal, Sceaux

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \cos(3x) \cos^3 x.$$

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- 1 (a) Montrer que f est paire et périodique de période π . Expliquer pourquoi on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
- (b) Étudier les variations de f .
- 2 (a) Tracer \mathcal{C} .
- (b) Déterminer l'abscisse des points de \mathcal{C} où la tangente à \mathcal{C} est parallèle à l'axe (Ox) .

12 Aire maximale



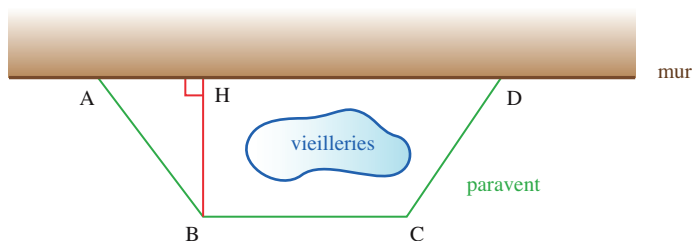
20 min

Corrigé
p. 131

Lycée La Bruyère, Versailles

Les parents d'Amélie utilisent un paravent à trois panneaux pour cacher un tas de vieilleries dans leur garage.

Le paravent est déplié contre un mur de la façon suivante :



Les trois panneaux du paravent sont de même longueur. Le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle. On pose $AB = BC = CD = 1$, et on appelle x la mesure en radians de l'angle \widehat{BAD} comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

- 1 Exprimer la longueur AD ainsi que la hauteur BH en fonction de x .
- 2 (a) Montrer que l'aire disponible derrière le paravent est égale en fonction de x à :

$$A(x) = (1 + \cos x) \sin x.$$

- (b) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$A(x) = 2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) (1 + \cos x).$$

- (c) À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$.
- (d) En déduire le sens de variation de la fonction A sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- (e) Quelle est l'aire maximale de la zone que l'on peut cacher ainsi avec ce paravent, et comment faut-il l'installer ?

13 Axe de symétrie



20 min

Corrigé
p. 132

Lycée Hoche, Versailles

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 + \sin x - \frac{1}{2} \cos(2x)$.

- 1 (a) Prouver que f est périodique sur \mathbb{R} .
(b) Démontrer que f n'est ni paire, ni impaire.
- 2 Établir les variations de f sur $[-\pi; \pi]$ puis construire la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
- 3 Démontrer que les fonctions f et f^2 ont les mêmes variations sur \mathbb{R} .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

14 Un algorithme



30 min

Corrigé
p. 134

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

\mathcal{C} est sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Démontrer que f est périodique de période 2π .
- 2 Démontrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe \mathcal{C} .
- 3 En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de f à $[0; \pi]$.
- 4 Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = (2 \cos x - 1) \sin x$.
- 5 Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
- 6 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0; \pi]$.
- 7 On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
    Saisir les valeurs de a, b et p
Traitement
    Tant que b-a > p
        c prend la valeur (a+b)/2
        Si f(a) × f(c) < 0, alors b prend la valeur c
        Sinon a prend la valeur c
    Fin de Tant que
Sortie
    Afficher a et b
```

- (a) Faire fonctionner l'algorithme avec $a = 1, b = 3$ et $p = 0,1$ et compléter le tableau suivant :

Étape	Test : $b - a > p$	c	Test : $f(a) \times f(c) < 0$	a	b
				1	3
1	Vrai	2	Faux	2	3
2					
⋮					

- (b) Quelles sont les valeurs affichées à la sortie de l'algorithme ? Que peut-on en déduire ?

- 8 Résoudre l'équation (E) : $X^2 - X - 1 = 0$.
- 9 Montrer que α est solution de $f(x) = 0$ si et seulement si $\cos \alpha$ est solution de (E).
- 10 En déduire la valeur exacte de $\cos \alpha$, puis un encadrement au centième de α . Vérifier que ce résultat est en accord avec les valeurs trouvées à la question 7.b.

15 Étude de la dérivabilité en 0



30 min

Corrigé
p. 135

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

- 1 On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$g(x) = x \cos x - \sin x.$$

Étudier g et dresser son tableau de variation.

En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0 ; \pi]$.

- 2 Soit f la fonction numérique définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \end{cases}, \quad x \in]0 ; \pi]$$

Justifier que f est continue en 0, puis étudier les variations de f .

- 3 Étude de la dérivabilité de f en 0.

- (a) Prouver que, pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a :

$$0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

Aide : pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. On calculera les dérivées φ' , φ'' et φ''' et on en déduira le signe de $\varphi(x)$.

- (b) Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

16 Encore de la trigonométrie !



20 min

Corrigé
p. 137

Lycée Albert Camus, Bois-Colombes

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}.$$

- 1 Déterminer par comparaison la limite de f en $+\infty$.

- 2 On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par :

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Montrer que, pour tout x non nul, on a :

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2,$$

et en déduire la limite de g en 0.

À l'aide d'une composée, déterminer alors la limite de f en 0.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 **V/F** **Calculs de limites**

Enoncé
p. 115

1 Faux. La fonction \sin n'a pas de limite à l'infini.

2 Vrai. En posant $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \quad \text{d'après le cours.}$$

3 Faux. En posant $X = 3x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{\frac{X}{3}} = 3.$$

4 Vrai. En effet, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$ est, par définition, le nombre dérivée de $\cos x$ en $\frac{\pi}{2}$, qui est $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. On a ici l'opposé, qui vaut donc bien 1.

2 **QCM** **Dérivées de fonctions trigonométriques**

Enoncé
p. 115

1 La réponse **a** est juste par définition.

La réponse **d** est juste aussi et est obtenue en utilisant les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= 2 \left(\cos(2x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= 2 \left((1 - 2 \sin^2 x) \frac{\sqrt{2}}{2} - (2 \sin x \cos x) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2}(1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x). \end{aligned}$$

2 Les réponses **b** et **c** sont correctes.

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

3 La réponse **c** est la bonne, elle nécessite juste un peu de soin.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(9 \cos x \sin^2 x - 6 \cos x)(\sin^2 x + 1) - (3 \sin^3 x - 6 \sin x + 5)(2 \sin x \cos x)}{(\sin^2 x + 1)^2} \\ &= \frac{\cos x (3 \sin^4 x + 15 \sin^2 x - 10 \sin x - 6)}{(\sin^2 x + 1)^2}. \end{aligned}$$

4 La réponse **b** est correcte. Pour que les deux courbes aient la même tangente au point d'abscisse x , il faut que les dérivées des fonctions soient égales donc que $2 \cos 2x = 2$, ou encore que $\cos 2x = 1$. Donc $2x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mais il faut aussi que pour ces valeurs de x , les deux courbes aient un point commun, c'est-à-dire que $\sin(2k\pi) = 2k\pi$, il faut donc que $-1 \leq 2k\pi \leq 1$. La seule valeur de k qui convient est $k = 0$. Les courbes représentatives ont donc une tangente commune en un point.

3 QCM Propriétés des fonctions trigonométriques

Enoncé
p. 116

1 Réponse **a**. En effet, pour tout x réel,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3x.$$

2 Réponse **c**. En effet, la fonction \cos est paire, mais cette fonction est obtenue par translation de la fonction \cos le long de l'axe des abscisses de $\frac{\pi}{4}$, elle n'est donc ni paire ni impaire.

3 Réponse **b**. En effet, pour tout réel x ,

$$g(-x) = \sin(3(-x)) = \sin(-3x) = -3 \sin x = -g(x).$$

Donc g est impaire.

4 Réponse **c**. En effet, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} h(x + 8\pi) &= \sin\left(\frac{x + 8\pi + \pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x + \pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x + \pi}{4} + 2\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{x + \pi}{4}\right) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Remarque : pour les questions **1** et **3**, on a trouvé une période, mais on n'a pas montré que c'était la plus petite.

4 QCM Variations

Enoncé
p. 116

1 Réponse **c**. En effet, la fonction cosinus est croissante sur $[\pi ; 2\pi]$, donc f est croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4} ; \pi\right]$.

2 Réponse **b**. En effet, $g'(x) = 2 \cos 2x$ donc :

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \quad (2\pi) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right] \quad (\pi)$$

5 Fonction dérivée

Enoncé
p. 117

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

- 1** La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme somme et composée de fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = 16 \cos(8x) + 35 \sin\left(7x - \frac{\pi}{3}\right).$$

- 2** g est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme puissance entière d'une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$g'(x) = 4[-7 \sin(7x)] \times [\cos(7x)]^3 = -28 \sin(7x) \cos^3(7x).$$

- 3** La fonction h est définie et dérivable pour tout x tel que $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$h'(x) = \frac{\cos x \times \cos x + \sin x \times \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6 Équations et inéquations

Enoncé
p. 117

Lycée Buffon, Paris

- 1** D'après le cercle trigonométrique,

$$\sin X \geq \frac{1}{2} \text{ pour } \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq X \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cela signifie que :

$$\begin{aligned} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 3x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3x \leq \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

Si l'on ne veut que les solutions dans $[-\pi; \pi]$, les valeurs extrêmes que l'on peut prendre pour k vérifient : $-\pi \leq \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, c'est-à-dire $-\frac{5}{3} \leq k$, et comme k est entier, $-1 \leq k$, et : $\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$, soit $k \leq 1$. k peut donc prendre les valeurs $-1, 0$ et 1 .

L'ensemble solution est donc :

$$S = \left[-\frac{5\pi}{9}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{9}; \pi\right].$$

- 2** On pose $X = \cos x$. L'équation devient alors : $2X^2 + 3X + 1 = 0$.
Le discriminant est égal à 1 ; l'équation admet donc deux solutions :
 $X = -1$ et $X = -\frac{1}{2}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Alors, l'équation $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$ équivaut à :

$$\cos x = -1 \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire :

$$x = -\pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$$

$$\text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k''\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}, k'' \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation dans l'intervalle $[-\pi ; 3\pi]$ est donc :

$$S = \left\{ -\pi ; -\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; \pi ; \frac{4\pi}{3} ; \frac{8\pi}{3} ; 3\pi \right\}.$$

7 Inéquation associée à une équation

Enoncé
p. 117

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

On pose $X = \sin x$.

1 Le polynôme $2X^2 + (2 - \sqrt{3})X - \sqrt{3}$ a pour discriminant $7 + 4\sqrt{3}$, que l'on factorise sous la forme $(2 + \sqrt{3})^2$ (en utilisant l'aide de l'énoncé).

L'équation $2X^2 + (2 - \sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$ admet donc deux solutions :

$$X = -1 \quad \text{et} \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'équation $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} = 0$ équivaut donc à :

$$\sin x = -1 \quad \text{ou} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dans l'intervalle $] -\pi ; \pi[$, $\sin x = -1$ pour $x = -\frac{\pi}{2}$, et $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$.

L'équation admet donc trois solutions dans $] -\pi ; \pi[$: $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

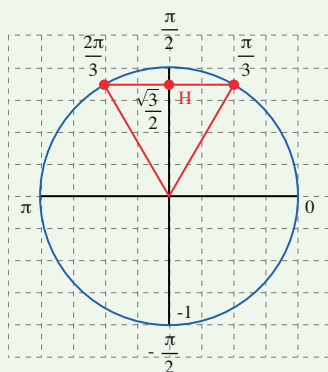
2 Grâce aux calculs de la question **1**, on connaît les racines de l'expression $2X^2 + (2 - \sqrt{3})X - \sqrt{3}$.

Comme le coefficient de X^2 est positif, on sait que cette expression est inférieure ou égale à 0 lorsque X est compris entre les racines, c'est-à-dire : $-1 \leq X \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En revenant à la variable x , cela donne : $-1 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le cercle trigonométrique montre que les solutions dans $] -\pi ; \pi[$ de cette double inéquation sont tous les réels x tels que :

$$x \in \left] -\pi ; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi \right[.$$



8 Étude d'une fonction

Enoncé
p. 117

Lycée La Bruyère, Versailles

- 1 La fonction f est paire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition, on a $f(-x) = f(x)$.

Ici, $f(-x) = 3 \cos(-x) - 2 \cos^3(-x) = 3 \cos x - 2 \cos^3 x = f(x)$ car la fonction \cos est paire.

De plus, comme la fonction \cos a pour période 2π :

$$f(x+2\pi) = 3 \cos(x+2\pi) - 2 \cos^3(x+2\pi) = 3 \cos x - 2 \cos^3 x = f(x).$$

La fonction f est donc paire et admet 2π comme période.

- 2 f est composée de la somme et du produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , elle est donc dérivable sur \mathbb{R} , et les formules de dérivation donnent :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin x - 2 \times 3 \times (-\sin x) \times \cos^2 x \\ &= -3 \sin x + 6 \sin x \cos^2 x \\ &= -3 \sin x (1 - 2 \cos^2 x). \end{aligned}$$

Or, $\cos(2x) = -1 + 2 \cos^2 x$.

Par conséquent, on a bien $f'(x) = 3 \sin x \cos(2x)$.

- 3 Pour x compris entre 0 et π , on a $2x$ compris entre 0 et 2π . Dans cet intervalle, $\cos(2x) < 0$ pour $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

On peut alors dresser le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variation de f page suivante.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin x$	0	+	+	+ 0
$\cos 2x$		+	0	- 0 +
$f'(x)$	0	+	0	- 0 + 0
$f(x)$		$\sqrt{2}$		1
	-1	↗	↘	↗
			$-\sqrt{2}$	

4 D'après le tableau de variation de f , sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on a $f(x) \geq 1$, donc $f(x) = 0,5$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

De même, sur $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$, on a $f(x) \leq -1$, donc $f(x) = 0,5$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

En revanche, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, la fonction f est continue et strictement décroissante; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0,5 > f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ d'après les valeurs du tableau de variation. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α compris dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ tel que $f(\alpha) = 0,5$.

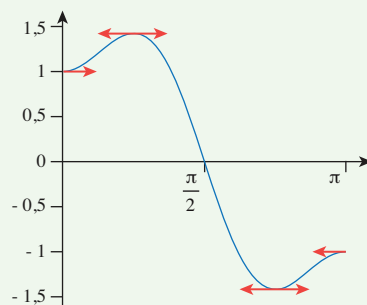
Ce réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0; \pi]$.

À la calculatrice, on trouve : $f(1,40) \approx 0,500\ 08$ et $f(1,41) \approx 0,412\ 10$. Par conséquent, $1,40 < \alpha < 1,41$.

5 Tableau de valeurs pour tracer la courbe de f :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x) \approx$	1	1,3	1,4	1,25	0	-1,25	-1,4	-1,3	-1

Pour tracer la courbe de f , on gradue l'axe des abscisses par fractions de π . D'autre part, on connaît quatre tangentes horizontales.



Comme la fonction est paire, on obtient la partie de la courbe entre $-\pi$ et 0 par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Puis comme la fonction est de période 2π , on obtient la totalité de la courbe en traduisant le morceau tracé entre $-\pi$ et π , de $2k\pi$ unités, avec k qui décrit \mathbb{Z} .

9 Une limite à connaître

Enoncé
p. 118

Lycée Virlogeux, Riom

1 La quantité $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est le taux de variation de la fonction entre x et $x+h$ et sa limite quand h tend vers 0 est $f'(x)$, si cette limite existe et est finie.

2 On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

10 Limites trigonométriques

Enoncé
p. 118

Lycée Chaptal, Paris

1 Pour tout réel x non nul :

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)} = \alpha \times \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \times \frac{x}{\sin(x)}.$$

Or, d'après le cours :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \quad \text{dont on déduit :} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = 1.$$

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)} = \alpha \times 1 \times 1 = \alpha.$$

2 Le numérateur et le dénominateur sont de limite nulle, donc $\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ présente une forme indéterminée en 0.

Cependant, en utilisant $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \frac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x} = \frac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}.$$

En simplifiant le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \frac{-1}{1 + \cos x}.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Fonction trigonométrique

Enoncé
p. 118

Lycée Lakanal, Sceaux

1 (a) $f(x + \pi) = \cos[3(x + \pi)] \cos^3(x + \pi)$
 $= \cos(3x + 2\pi + \pi) \cos^3(x + \pi).$

Or,

$$\cos(X + \pi) = -\cos X$$

et

$$\cos(X + 2\pi) = \cos X ,$$

donc :

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= -\cos(3x)[- \cos^3(3x)] \\ &= \cos(3x) \cos^3(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction f admet donc π pour période.

$$f(-x) = \cos(-3x) \cos^3(-x) = \cos(3x) \cos^3(x)$$

car la fonction \cos est paire. Donc $f(-x) = f(x)$, ce qui signifie que f est paire.

La fonction f étant périodique de période π , il suffit de l'étudier sur une période, par exemple sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Mais, comme elle est aussi paire, il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, l'étude sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ se déduisant par symétrie.

(b) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

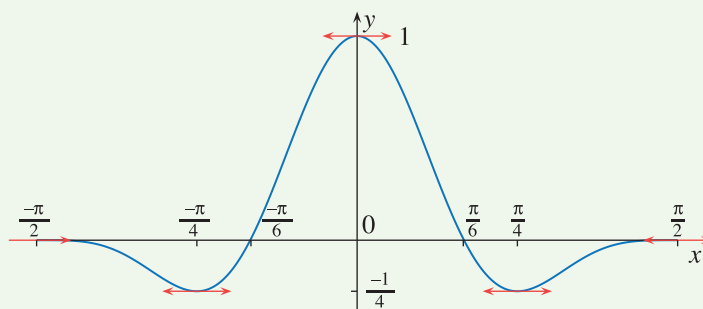
$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin(3x) \cos^3 x - 3 \cos(3x) \sin x \cos^2 x \\ &= -3 \cos^2 x (\cos(3x) \sin x + \sin(3x) \cos x) \\ &= -3 \sin(4x) \cos^2 x \end{aligned}$$

car $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

D'où le tableau de variation de f pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	-	0
f	1		0
		\searrow	\nearrow
		$-\frac{1}{4}$	

2 (a) On représente la courbe de f entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (pour l'obtenir sur \mathbb{R} , il suffit de translater la courbe ainsi tracée).



- (b) La tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$. Les points en lesquels la tangente à \mathcal{C} est parallèle à (Ox) sont donc les points d'abscisse x tels que :

$$f'(x) = 0 \iff \sin(4x) \cos^2 x = 0 \iff x = 0 \quad \left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Cette condition tient compte de l'annulation possible du cosinus ; en effet, dans ce cas $x = \frac{\pi}{2}$ (π), cette condition impliquant la condition ci-dessus.

Ce sont donc tous les points d'abscisse $k\frac{\pi}{4}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

12 Aire maximale

Enoncé
p. 118

Lycée La Bruyère, Versailles

- 1 Comme le trapèze est isocèle, $AD = 2AH + BC$.
De plus, $AH = AB \cos x$ et $BH = AB \sin x$ donc $AD = 1 + 2 \cos x$ et $BH = \sin x$.
- 2 (a) $A(x) = AH \times BH + BH \times BC$
 $= 1 \times \cos x \times \sin x + 1 \times \sin x \times 1$
 $= (\cos x + 1) \sin x$.
- (b) La fonction A est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} A'(x) &= \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) \\ &= \cos x(1 + \cos x) - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2 \cos^2 x + \cos x - 1. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) (1 + \cos x) &= 2 \left(\cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) \\ &= 2 \cos^2 x + \cos x - 1. \end{aligned}$$

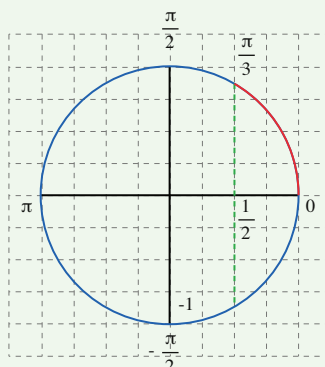
Cela prouve que l'on a bien $A'(x) = 2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) (1 + \cos x)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(c)



Sur le cercle trigonométrique, on lit que dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \geq \frac{1}{2}$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

(d) On calcule :

$$A(0) = 0 \quad ; \quad A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad ; \quad A(3) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Grâce à la question 2.c, on connaît le signe de $A'(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on peut établir le tableau de variation de A suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$A'(x)$	+		-
$A(x)$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		
	↗	↘	
	0		1

(e) L'aire maximale est obtenue lorsque l'angle \widehat{BAD} mesure $\frac{\pi}{3}$ radian, et elle vaut alors $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

13 Axe de symétrie

Lycée Hoche, Versailles

Enoncé
p. 119

1 (a) $f(x + 2\pi) = 1 + \sin(x + 2\pi) + \frac{1}{2} \cos[2(x + 2\pi)].$

Comme les fonctions sin et cos sont de période 2π , on trouve :

$$f(x + 2\pi) = 1 + \sin x + \frac{1}{2} \cos(2x) = f(x).$$

La fonction f est donc périodique et 2π en est une période.

FONCTIONS SINUS ET COSINUS • CHAP. 5

(b) $f(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. La fonction n'est donc ni paire ni impaire car pour $x = 0$, elle ne vérifie ni $f(-x) = f(x)$, ni $f(-x) = -f(x)$.

2 La fonction f est dérivable sur $[-\pi ; \pi]$ puisque les fonctions sin et cos le sont. De plus, on a :

$$f'(x) = \cos x + \sin(2x).$$

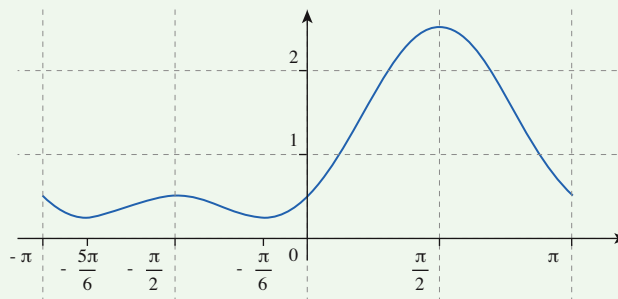
Comme $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, on a :

$$f'(x) = \cos x + 2 \sin x \cos x = \cos x(1 + 2 \sin x).$$

Sur $[-\pi ; \pi]$, $\cos x > 0$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et $1 + 2 \sin x < 0$ pour $\sin x < -\frac{1}{2}$ donc pour $x \in]-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}[$.

Cela permet d'établir le tableau de signes de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f :

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	-	-	0	+	+	0
$1 + 2 \sin x$	+	0	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	0,5		0,5		2,5	
		↘	↗	↘	↗	↘
			0,25		0,25	



3 D'après le tableau de variation précédent, on constate que le minimum de f sur $[-\pi ; \pi]$ est 0,5, donc la fonction f est positive sur $[-\pi ; \pi]$. Or, f est de période 2π et $[-\pi ; \pi]$ est d'amplitude 2π ; par conséquent, $f(x) > 0$ pour tout réel x .

D'autre part, comme la fonction f est dérivable, la fonction f^2 l'est aussi, et sa dérivée est égale à $2ff'$. Or, pour tout réel x , $f(x) > 0$ donc la dérivée de f^2 est du même signe que f' , ce qui montre que les deux fonctions, f^2 et f ont les mêmes variations sur \mathbb{R} .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

14 Un algorithme

Enoncé
p. 120

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

- 1** Les fonctions sin et cos sont périodique de période 2π donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + 2\pi) = \sin^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin^2 x + \cos x = f(x).$$

La fonction f est donc périodique et 2π en est une période.

- 2** Pour tout réel x , comme la fonction sin est impaire et la fonction cos paire, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin^2(-x) + \cos(-x) \\ &= (-\sin x)^2 + \cos x \\ &= \sin^2 x + \cos x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc paire, ce qui signifie que l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe dans un repère orthonormé.

- 3** Comme f est de période 2π , on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ d'amplitude 2π .

Comme f est paire, et comme l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ est symétrique par rapport à 0, il suffit d'étudier f sur le demi-intervalle : $[0 ; \pi]$.

- 4** La fonction f est bien dérivable car les fonctions sin et cos sont dérivables sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x - \sin x = (2 \cos x - 1) \sin x.$$

- 5** Sur $]0 ; \pi[$, $\sin x > 0$ et $2 \cos x - 1 > 0$ pour $\cos x > \frac{1}{2}$, donc pour $x \in]0 ; \frac{\pi}{3}[$.

On obtient le tableau de signes de f' puis le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$ suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\sin x$	0	+	+ 0
$2 \cos x - 1$		+	0 -
$f'(x)$	0	+	0 - 0
$f(x)$		$\frac{5}{4}$	
	1	↗	↘
			-1

- 6** Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{3} ; \pi]$, la fonction est continue et strictement décroissante. $f(\frac{\pi}{3}) > 0$ et $f(\pi) < 0$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe un réel α unique dans $[\frac{\pi}{3} ; \pi]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

D'autre part, d'après le tableau de variation, la fonction f ne s'annule pas entre 0 et $\frac{\pi}{3}$ car son minimum sur cet intervalle est 1.

Par conséquent, α est l'unique réel de $[0 ; \pi]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

7 (a) On a le tableau suivant :

Étape	Test : $b - a > p$	c	Test : $f(a) \times f(c) < 0$	a	b
				1	3
1	Vrai	2	Faux	2	3
2	Vrai	2,5	Vrai	2	2,5
3	Vrai	2,25	Vrai	2	2,25
4	Vrai	2,125	Faux	2,125	2,25
5	Vrai	2,187 5	Faux	2,187 5	2,25
6	Faux				

(b) L'algorithme affiche 2,187 5 et 2,25, qui constituent un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,1.

8 Le discriminant de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ est égal à 5. Elle admet donc deux solutions qui sont : $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

9 α vérifie $f(\alpha) = 0$ si et seulement si $\sin^2 \alpha + \cos \alpha = 0$. En remplaçant $\sin^2 \alpha$ par $1 - \cos^2 \alpha$ et en multipliant par -1 , on trouve la condition :

$$\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0,$$

ce qui signifie que $\cos \alpha$ est une solution de (E).

10 La seule solution de l'équation (E) qui convienne est $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ car $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$ et ne peut donc pas être égale à un cosinus.

Par conséquent, $\cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

À la calculatrice, à l'aide de la touche **COS⁻¹**, on trouve $2,23 < \alpha < 2,24$, ce qui est bien compatible avec le résultat de la question **7.b**.

15 Étude de la dérivabilité en 0

→ **Énoncé**
p. 121

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

1 La fonction g est dérivable sur $[0 ; \pi]$ et :

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x.$$

Comme sur $]0 ; \pi[$, $x > 0$ et $\sin x > 0$, on en déduit que $g(x)$ est strictement négatif sur cet intervalle donc g est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$.

x	0	π
$g(x)$	0	$-\pi$

La fonction g admet un maximum égal à 0 en 0, puis elle est strictement décroissante sur $]0 ; \pi]$ donc $g(x) < 0$ pour $x \in]0 ; \pi]$.

2 Pour tout $x \in]0 ; \pi]$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, la fonction est continue et dérivable.

On sait (résultat du cours) que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par conséquent, comme la limite de f en 0 est égale à $f(0)$, la fonction f est, par définition de la continuité, continue en 0.

Pour étudier les variations de f , il suffit d'étudier ses variations sur $]0 ; \pi]$. On peut donc calculer la dérivée de f sur $]0 ; \pi]$:

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

D'après l'étude du signe de $g(x)$, on en déduit que $f'(x) < 0$ sur $]0 ; \pi]$ et donc strictement décroissante sur $]0 ; \pi]$.

3 (a) Soit $\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Tous les calculs suivants sont sur $[0 ; \pi]$. On a :

$$\varphi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \varphi''(x) = -\sin x + x$$

$$\text{et } \varphi'''(x) = -\cos x + 1.$$

Comme $\cos x \leq 1$, $\varphi'''(x) \geq 0$; la fonction φ'' est donc croissante. Comme de plus $\varphi''(0) = -\sin 0 + 0 = 0$, on a alors $\varphi''(x) \geq 0$; cela prouve que la fonction φ' est croissante.

On a encore $\varphi'(0) = \cos 0 - 1 + \frac{0^2}{2} = 0$ et, par conséquent, $\varphi'(x) \geq 0$.

La fonction φ est par conséquent croissante, et comme $\varphi(0) = 0$, on obtient que $\varphi(x) \geq 0$.

On obtient donc :

$$-\sin x + x \geq 0 \text{ (car } \varphi''(x) \geq 0) \text{ et } \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$x - \sin x \leq \frac{x^3}{6} \text{ (car } \varphi(x) \geq 0).$$

Cela justifie donc l'encadrement proposé.

- (b) Pour étudier la dérivabilité de f , il faut étudier la limite lorsque x tend vers 0 du taux de variation :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

D'après la question précédente, $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$, donc en divisant par x^2 qui est positif :

$$0 \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq \frac{x}{6}.$$

Le théorème de limite par encadrement permet donc de prouver que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0.$$

La limite du taux d'accroissement de f entre 0 et x existe et elle est finie, donc f est dérivable en 0, et sa dérivée est égale à la limite, c'est-à-dire $f'(0) = 0$.

16 Encore de la trigonométrie !

Enoncé
p. 121

Lycée Albert Camus, Bois-Colombes

- 1 On encadre $f(x)$ par deux expressions de même limite :
Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$-1 \leq \cos \sqrt{x} \leq 1.$$

On multiplie par -1 :

$$-1 \leq -\cos \sqrt{x} \leq 1.$$

On ajoute 1 puis on multiplie par $\frac{1}{x}$ qui est strictement positif. On obtient alors l'encadrement :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, on en déduit, d'après le théorème de limite par encadrement, que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

- 2 En utilisant les formules de duplication, on obtient :

$$\cos x = \cos \left(2 \times \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Il suffit alors de remplacer $\cos x$ par cette expression dans le numérateur de $g(x)$ pour obtenir :

$$g(x) = 2 \times \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \times \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ et, d'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc d'après le théorème de limite par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}.$$

On remarque que $f(x) = g(\sqrt{x})$ pour x positif. On peut donc appliquer le théorème de limite par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2},$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$$

et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Fonction exponentielle

Plan du chapitre

1. Définition de la fonction exponentielle et propriétés algébriques
2. Étude de la fonction exponentielle
3. Limites à connaître

Exercice type

Lycée Guynemer, Compiègne

- 1 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}.$$

- 2 Résoudre l'équation :

$$e^{3x^2} e^{-6x} = (e^{2-x})^2.$$

- 3 Résoudre l'inéquation :

$$e^{3x+2} > -2.$$

1 Définition de la fonction exponentielle et propriétés algébriques

Théorème 1

Il existe une et une seule fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , vérifiant $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.

Cette fonction est notée \exp . Elle est en particulier continue, strictement croissante, et d'ensemble image \mathbb{R}_+^* . Ainsi, pour tout réel x :

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad , \quad \exp(x) > 0 \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

Remarque : le symbole \exp s'utilise comme \cos et \sin . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit simplement $\exp x$, sans parenthèses. Par exemple, on écrit en général : $\exp 0 = 1$.

Conséquence : La fonction exponentielle étant strictement croissante sur \mathbb{R} , il en résulte que, pour tous réels x et y ,

$$\exp x < \exp y \iff x < y \quad \text{et} \quad \exp x = \exp y \iff x = y.$$

Remarque : en particulier, le nombre dérivé de la fonction exponentielle en zéro vaut $\exp(0) = 1$.

La tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de la fonction \exp a pour coefficient directeur 1 et son équation est $y = 1 + x$.

Complément : La courbe est partout au-dessus de sa tangente.

Théorème 2 (Relation fonctionnelle)

Pour tous réels x et y , et pour tout entier m :

$$\exp(x + y) = \exp x \times \exp y.$$

Conséquences :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \quad \text{et} \quad (\exp x)^m = \exp(mx).$$

Définition 1

On pose :

$$e = \exp 1 \approx 2,718.$$

C'est le *nombre d'Euler* ou *constante de Neper*. Cette définition et la relation fonctionnelle conduisent à la notation exponentielle e^x souvent utilisée à la place de $\exp x$. On a alors :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{et} \quad (e^x)^m = e^{mx}.$$

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Limites

Théorème 3 (Limites)

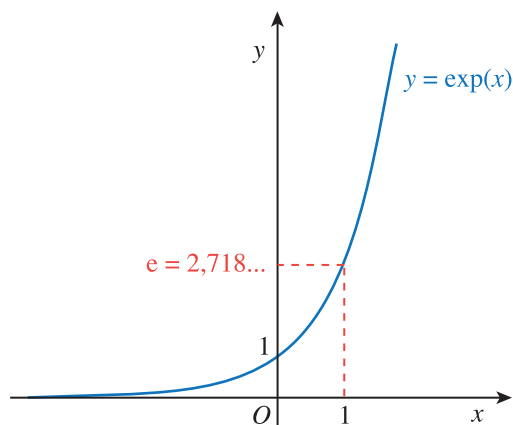
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

2.2 Sens de variation

L'égalité $\exp'(x) = \exp(x)$ entraîne que la fonction est croissante sur \mathbb{R} puisque $\exp(x) > 0$.

2.3 Représentation graphique

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, l'axe des abscisses est asymptote à la représentation graphique en $-\infty$.



3 Limites à connaître

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$

c $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0.$

Pour le **b** et le **c**, on dit que l'exponentielle « l'emporte » sur x en cas d'indétermination (en fait, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type

Lycée Guynemer, Compiègne

1 On a :

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1}{e^x + 1} &= \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} \\ &= \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}},\end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1}{e^x + 1} &= \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} \\ &= 1 - \frac{2}{e^x + 1}.\end{aligned}$$

2 $e^{3x^2}e^{-6x} = (e^{2-x})^2 \Leftrightarrow e^{3x^2-6x} = e^{2(2-x)}$.

Or, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ donc la condition équivaut à :

$$3x^2 - 6x = 4 - 2x,$$

c'est-à-dire :

$$3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Cette équation du second degré de discriminant $\Delta = 64$ admet deux solutions : $-\frac{2}{3}$ et 2, qui sont donc aussi les solutions de l'équation initiale.

3 $e^{3x+2} > -2$. Cette inégalité est toujours vérifiée car pour tout réel a , $e^a > 0$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions est \mathbb{R} .

1 **V/F** **Fonction exponentielle**

10 min **Corrigé**
p. 151

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Pour tous réels a et b , $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- 2** Le nombre $-e^{-x}$ est toujours strictement positif.
- 3** La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1.
- 4** La tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x$.

2 **QCM** **Propriétés de la fonction exponentielle**

25 min **Corrigé**
p. 151

Pour chaque question, il y a une seule réponse correcte. La donner.

- 1** Pour tout nombre réel x non nul, $2 - \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ est égal à :

a $\frac{3e^{-x} - 4}{e^{-x} - 1}$	b $\frac{1}{1 - e^x}$
c Aucune de ces deux réponses.	
- 2** L'équation $e^{2x} - \left(e + \frac{1}{e}\right)e^x + 1 = 0$ admet dans \mathbb{R} :

a une solution	b deux solutions
c aucune solution	
- 3** L'inéquation $e^{2x} - (e + 1)e^x + e < 0$ admet pour ensemble solution :

a \emptyset	b $]0 ; 1[$
c $]1 ; e[$	d $] - \infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$
- 4** Les nombres $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et $\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ sont, pour tout x réel :

a égaux	b inverses
c opposés	

3 **QCM** **Dérivation**

10 min **Corrigé**
p. 152

- 1** La dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x + 3x + e^{-x}$ est :

a $x \mapsto e^x(x + 1) + 3 + e^{-x}$
b $x \mapsto e^x + 3 - e^{-x}$
c $x \mapsto e^x(x + 1) + 3 - e^{-x}$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2** La dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x^2-4x+5}$:
- a** ne s'annule jamais
 - b** s'annule pour une valeur réelle
 - c** s'annule pour deux valeurs réelles
- 3** Soient f et g définies par $f(x) = x^2e^x$ et $g(x) = xe^x$. Les courbes représentatives de f et g ont, pour deux valeurs de x :
- a** des tangentes communes
 - b** des tangentes parallèles
 - c** ni l'un ni l'autre
- 4** Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5e^{0,2x^2+0,5x}$. La tangente à la courbe représentative dans un repère au point d'abscisse 0 a pour équation :
- a** $y = 2,5x + 5$
 - b** $y = 5x$
 - c** $y = 5x + 10$

4 QCM Limites

25 min Corrigé p. 153

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$.

- 1** La limite de f en $+\infty$ est :
- | | |
|--------------------|--------------------------------|
| a $+\infty$ | b 1 |
| c 0 | d on ne peut pas savoir |
- 2** La limite de f en $-\infty$ est :
- | | |
|--------------------|--------------------------------|
| a $+\infty$ | b 1 |
| c 0 | d on ne peut pas savoir |
- 3** La limite de f en 0 est :
- | | |
|---|------------|
| a $+\infty$ à droite et $-\infty$ à gauche | b 0 |
| c 1 | d 2 |
- 4** La limite de f en 1 est :
- | | |
|--------------------|------------------|
| a 0 | b $e + 1$ |
| c $e^2 - 1$ | d $e - 1$ |

5 QCM

15 min Corrigé p. 154

Lycée Jean Rostand, Villepinte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est juste. Pour chaque question donner la lettre correspondant à la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

- 1** L'expression $g(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* est :
- a** toujours positive **b** toujours négative
c du signe de $-x$ **d** du signe de x
- 2** On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
Parmi les expressions suivantes, la seule qui n'est pas égale à $f(x)$ est :
- a** $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ **b** $1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$
c $\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ **d** $\frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{-2x}}$
- 3** Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.
- a** La représentation graphique de f admet une tangente d'équation $y = 2 - x$.
b $f'(x) = (x + 3)e^{-x}$.
c Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = x + 2$.
d $f'(-1) = 2e$.
- 4** L'équation $e^{-x} + e^x = m$, d'inconnue réelle x , où m est un nombre réel :
- a** a toujours une solution **b** a au moins deux solutions
c n'a jamais de solution **d** a au plus deux solutions

6 Un calcul de limite



10 min

Corrigé
p. 155

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de :

$$x \mapsto \frac{3e^{2x} - 12}{e^{2x} - 7e^x + 10}$$

7 Cosinus et sinus hyperboliques



45 min

Corrigé
p. 155

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Les fonctions ch et sh sont définies sur \mathbb{R} par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- 1** Dresser le tableau des signes de ces fonctions.
2 Calculer ch' et sh' .
Quel lien y a-t-il entre ch' et sh ? Entre sh' et ch ?

- 3** Dresser les tableaux de variations de ch et sh .
- 4** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
- (a) En dérivant $f(x) = \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x$.
- (b) Par un calcul algébrique.
- 5** Montrer comme en **4.a** ou **4.b** (au choix) que :
- (a) $\text{sh}(2x) = 2 \text{ch} x \times \text{sh} x$
- (b) $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$
- 6** Donner une représentation graphique de ch et de sh .

8 QCM



20 min

Corrigé
p. 157

Lycée Olympe de Gouges, Noisy-Le-Sec

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

- 1** La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $] -\infty ; +\infty[$ et est telle que :

- f est croissante sur $] -\infty ; 3[$ et $] 7 ; +\infty[$;
- f est décroissante sur $] 3 ; 7[$;

g est la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = e^{f(x)}$.

Parmi les tableaux de variation suivants, lequel peut être celui de g ?

	x	-∞	3	7	+∞	
a	g	+∞	↘	↗	↘	0
b	g	0	↗	↘	↗	+∞
c	g	-∞	↗	↘	↗	1

- 2** On sait que $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.
L'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ a :
- a** 0 solution **b** 1 solution **c** 2 solutions
- 3** La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}e^{-2x^2}$ définie sur \mathbb{R}^* est :
- a** $-\frac{4x^2 + 1}{x^2}e^{-2x^2}$ **b** $4e^{-2x^2}$ **c** $-\frac{1}{x^2}e^{-2x^2}$

9 Composée d'exponentielles



60 min

Corrigé
p. 157

Lycée Jean Renoir, Bondy

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

- 1 (a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
(b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
(c) En déduire les asymptotes de \mathcal{C} (courbe représentative de f).
- 2 Étudier les variations de f .
- 3 (a) Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point $K\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
(b) Justifier que, pour étudier la position de la tangente \mathcal{T} par rapport à la courbe \mathcal{C} , il suffit d'étudier sur \mathbb{R} le signe de $g(x)$ où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.
(c) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
(d) Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x .
(e) En déduire la position de la tangente \mathcal{T} par rapport à la courbe \mathcal{C} .
- 4 Tracer \mathcal{C} et \mathcal{T} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

10 Trigonométrie et exponentielle



30 min

Corrigé
p. 159

Lycée Maximilien Sorre, Cachan

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$.

- 1 Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) > 0$.
- 2 (a) Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.
(b) Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $2 + \cos x + \sin x > 0$.
(c) Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- 3 (a) Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
(b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
(c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu en $+\infty$.
- 4 (a) Montrer que, sur l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .
(b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Tangente hyperbolique



20 min

Corrigé
p. 162

Lycée Jean Rostand, Mantes-la-Jolie

La fonction tangente hyperbolique, notée \tanh , est définie sur \mathbb{R} par :

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- 1 (a) Étudier la limite de \tanh en $+\infty$.
(b) Prouver que si $k \in]-1 ; 1[$, l'équation $\tanh x = k$ possède une unique solution.

- 2 (a) Prouver que, pour tous réels x et y ,

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

- (b) En déduire que, pour tout réel x ,

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$$

- 3 Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$ et $w_{n+1} = \frac{2w_n}{1 + w_n^2}$.

- (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N} , $w_n = \tanh 2^n$.
(b) En déduire que (w_n) converge et préciser sa limite.

12 Algorithme et limite



20 min

Corrigé
p. 164

Lycée Buffon, Paris

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Entrée
  a et n sont des nombres
  Saisir a
  n prend la valeur 0
Traitement
  Tant que  $\exp(-n) \geq a$ 
    Affecter à n la valeur n+1
  Fin du Tant que
Sortie
  Afficher n
```

- 1 Qu'affiche cet algorithme si on entre $a = 0,3$?
2 Donner si possible une valeur de a pour laquelle l'algorithme affiche 0.
3 Qu'affiche l'algorithme si on entre $a = 10^{-20}$?

13 Avec une fonction auxiliaire



30 min

Corrigé
p. 164

Lycée Eugène Delacroix, Maisons Alfort

Partie A

La fonction g est définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

- 1 Étudier les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2 Étudier le sens de variation de la fonction g sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation.
- 3 Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α telle que : $0,940 < \alpha < 0,941$.
- 4 Étudier le signe de g sur \mathbb{R} .
- 5 On considère l'algorithme suivant :

```

Entrée
  P est un réel strictement positif
Initialisation
  Donner à X la valeur 0 et à Y la valeur -5
Traitement
  Tant que Y < 0
    Donner à X la valeur X+P
    Donner à Y la valeur g(X)
Sortie
  Afficher X-P et X
    
```

- (a) On entre une valeur P égale à 0,1. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?
- (b) On a fait fonctionner l'algorithme avec une certaine valeur de P . On a obtenu en sortie les nombres 0,94 et 0,95. Quelle valeur de P avait-on choisie en entrée ?
- (c) On entre une valeur de P égale à 0,001. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

Partie B

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

- 1 Étudier le signe de f sur \mathbb{R} .
- 2 Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 3 Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f , et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Dresser le tableau de variation de f .
- 4 (a) Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- (b) Étudier le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$ sur l'intervalle $]-\infty ; \frac{7}{2}[$.

En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la question 3 de la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.

1 **V/F** Fonction exponentielle

Enoncé
p. 143

- 1** Vrai. Il s'agit d'une formule du cours.
- 2** Faux. D'après les propriétés de la fonction exponentielle le réel e^{-x} est toujours strictement positif donc $-e^{-x}$ est toujours strictement négatif.
- 3** Faux. La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 et non au point d'abscisse 1.
- 4** Vrai. Le coefficient directeur de la tangente \mathcal{T} à la courbe au point d'abscisse 0 est $f'(0)$. Or, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ donc $f'(0) = -\frac{1}{4}$. La tangente \mathcal{T} et la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}$ sont deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées et de même coefficient directeur donc elles sont parallèles.

2 **acm** Propriétés de la fonction exponentielle

Enoncé
p. 143

- 1** Réponse **b**. On a :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1} &= \frac{2e^{-x} - 2 - e^{-x} + 2}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{1}{1 - e^x} \quad \text{en multipliant haut et bas par } e^x. \end{aligned}$$

- 2** Réponse **b**. On pose $e^x = X$.

L'équation devient alors $X^2 - \left(e + \frac{1}{e}\right)X + 1 = 0$. On calcule :

$$\Delta = \left(e + \frac{1}{e}\right)^2 - 4 = e^2 + 2 + \frac{1}{e^2} - 4 = e^2 - 2 + \frac{1}{e^2} = \left(e - \frac{1}{e}\right)^2.$$

Le discriminant est strictement positif et les deux solutions sont :

$$X_1 = \frac{e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e}}{2} = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{e + \frac{1}{e} + e - \frac{1}{e}}{2} = e.$$

On a donc soit $e^x = e^{-1}$ soit $x = -1$, soit $e^x = e$, soit $x = 1$. L'équation admet donc deux solutions, 1 et -1 .

- 3** Réponse **b**. Ici aussi, on pose $X = e^x$.

On obtient alors l'expression $X^2 - (e + 1)X + e$.

$$\Delta = (e + 1)^2 - 4e = e^2 + 2e + 1 - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2.$$

Le trinôme en X a deux racines, e et 1.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On peut donc factoriser l'expression de départ :

$$e^{2x} - (e + 1)e^x + e = (e^x - 1)(e^x - e).$$

On a donc :

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{et} \quad e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1.$$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$
$e^x - e$		$-$	$-$	0
$(e^x - 1)(e^x - e)$		$+$	0	$-$

- 4 Réponse **[b]**. En multipliant par e^x le numérateur et le dénominateur, et en simplifiant, on a :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Ces deux nombres sont donc inverses.

3 **QCM** Dérivation

Enoncé
p. 143

- 1 Réponse **[c]**. On a : $f'(x) = e^x + xe^x + 3 - e^{-x}$.
- 2 Réponse **[b]**. On a : $f'(x) = (4x - 4)e^{2x^2 - 4x + 5}$. Cette fonction s'annule si et seulement si $4x - 4 = 0$, donc pour une seule valeur réelle.
- 3 Réponse **[b]**. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 e^x = x e^x \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x)e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Donc les points communs aux deux courbes ont pour abscisses 0 et 1.
De plus :

$$f'(x) = (2x + x^2)e^x \quad \text{et} \quad g'(x) = (x + 1)e^x,$$

d'où $f'(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, donc il n'y a pas de tangente commune au point d'abscisse 0.

Et $f'(1) = 3e$; $g'(1) = 2e$, donc là non plus il n'y a pas de tangente commune.

Ce raisonnement élimine la réponse **[a]**.

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(x) &\Leftrightarrow (2x + x^2)e^x = (x + 1)e^x \\ &\Leftrightarrow 2x + x^2 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Ici, $\Delta = 5$. Cette équation a deux solutions, il y a donc deux valeurs de x pour lesquelles on obtiendra des tangentes parallèles pour les courbes représentatives de f et de g .

- 4 Réponse **a** . $f(0) = 5$.
 $f'(x) = 5(0,4x + 0,5)e^{0,2x^2+0,5x}$. Donc $f'(0) = 2,5$.
 La tangente a pour équation $y = 2,5x + 5$.

MÉTHODE

Il souvent utile de se souvenir de l'égalité : $e^{2x} = (e^x)^2$.

4 **acm** **Limites**

Enoncé
p. 144

- 1 Réponse **a** . On peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^x}}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^2 = +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

- 2 Réponse **b** . On a :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

- 3 Réponse **d** . Pour tout x non nul, $f(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1} = e^x + 1$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

- 4 Réponse **d** . La fonction f est définie en 1, sa limite est donc $f(1) = e + 1$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 QCM

Enoncé
p. 144

Lycée Jean Rostand, Villepinte

1 Réponse **b**. $g(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x} = \frac{e^x(1 - e^x)}{x}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	+		+
$1 - e^x$	+	0	-
x	-	0	+
$g(x)$	-		-

On constate que $g(x)$ est toujours négative.

2 Réponse **d**.

$$\frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(e^{3x} - e^x)}{e^{-x}(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{3x} - e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

Cette expression est égale à $f(x)$ si $e^x - e^{-x} = e^{3x} - e^x$.

Or, il existe au moins une valeur de x pour laquelle cette égalité n'est pas vérifiée (par exemple pour $x = 1$, on vérifie facilement que $e - e^{-1} \neq e^3 - e$). La proposition **d** est donc fausse.

3 Réponse **a**. $f'(x) = e^{-x}(1 - x - 2) = e^{-x}(-1 - x)$.

On a alors $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$. Donc la droite d'équation $y = -x + 2$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Si on ne pense pas au point d'abscisse 0, il est facile de montrer, une fois la dérivée calculée, que les 3 autres propositions sont fausses.

4 Réponse **d**. Comme $e^x \neq 0$, en multipliant les deux termes de l'équation par e^x , on obtient une équation équivalente :

$$(e^x)^2 + 1 = me^x.$$

Puis en posant $X = e^x$, on a une équation du second degré :

$$X^2 - mX + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2)$. Selon les valeurs de m , l'équation en X a donc zéro, une ou deux solutions (cela élimine donc les réponses **a** et **b**). Pour avoir une solution en x , il faut de plus que l'équation en X ait une solution positive.

Il est facile de voir que pour $m = 2$, l'équation $X^2 - 2X + 1 = 0$ admet « 1 » comme racine, donc au moins dans ce cas, l'équation $e^{-x} + e^x = m$ admet une solution, ce qui élimine la réponse **a**.

6 Un calcul de limite

Enoncé
p. 145

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Nous savons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{2x} - 12 = -12 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 7e^x + 10 = 10.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^{2x} - 12}{e^{2x} - 7e^x + 10} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}.$$

Par ailleurs :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} - 12}{e^{2x} - 7e^x + 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \frac{3 - 12(e^{-x})^2}{1 - 7e^{-x} + 10(e^{-x})^2}.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0,$$

donc,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 12(e^{-x})^2 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 7e^{-x} + 10(e^{-x})^2 = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} - 12}{e^{2x} - 7e^x + 10} = \frac{3}{1} = 3.$$

7 Cosinus et sinus hyperboliques

Enoncé
p. 145

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $\text{ch } x > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geq 1$ et $e^{-x} \leq 1$, donc $\text{sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geq 0$.

Comme sh est impaire, on en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $\text{sh } x \leq 0$.

D'où les tableaux de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh } x$	$-$	0	$+$
$\text{ch } x$	$+$	1	$+$

2 Les fonctions ch et sh sont toutes deux dérivables en tant que sommes de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x \quad \text{et} \quad \text{sh}' x = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \text{ch } x.$$

3 Le tableau de variation de ch est alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh } x$	$-$	0	$+$
$\text{ch } x$	$+\infty$	1	$+\infty$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

et celui de sh est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch } x$	$+$	1	$+$
$\text{sh } x$	$-\infty$	0	$+\infty$

4 (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\text{ch}^2)'(x) - (\text{sh}^2)'(x) \\ &= 2 \text{ch } x \text{ ch}' x - 2 \text{sh } x \text{ sh}' x \\ &= 2 \text{ch } x \text{ sh } x - 2 \text{sh } x \text{ ch } x = 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (\text{ch } x)^2 - (\text{sh } x)^2 \\ &= f(0) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (\text{ch } x)^2 - (\text{sh } x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Ou encore,

$$f(x) = \frac{1}{4} \left((e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \right) = \frac{4}{4} = 1.$$

5 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2 \text{ch } x \text{ sh } x &= 2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{2}{4} \left((e^x)^2 - (e^{-x})^2 \right) \\ &= \text{sh}(2x). \end{aligned}$$

Posons :

$$g(x) = 2 \text{ch } x \text{ sh } x - \text{sh}(2x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

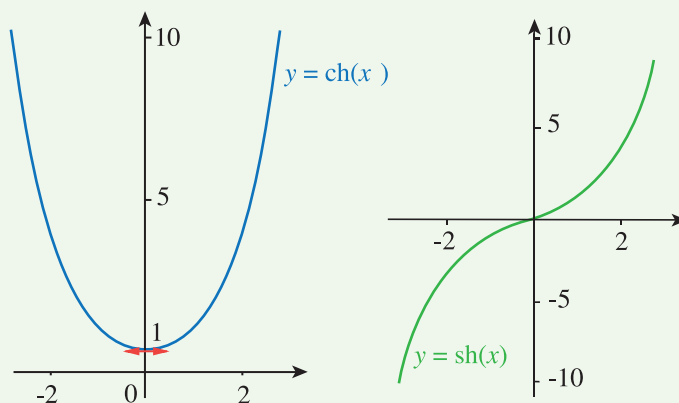
$$g'(x) = 2 \text{sh } x \text{ sh } x + 2 \text{ch } x \text{ ch } x - 2 \text{ch}(2x).$$

Or, g est constante donc g' est nulle.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(2x) = (\text{ch } x)^2 + (\text{sh } x)^2.$$

6 Les fonctions ch et sh ont pour représentations graphiques :



On appelle la fonction ch « cosinus hyperbolique » et la fonction sh « sinus hyperbolique ».

8 QCM

Enoncé
p. 146

Lycée Olympe de Gouges, Noisy-Le-Sec

1 Le tableau **b** est correct.

$(e^f)' = f'(e^f)$. On constate donc que la dérivée de e^f a le même signe que la dérivée de f . Ces deux fonctions ont le même sens de variation, ce qui élimine le tableau **a**.

D'autre part, pour tout x , $e^{f(x)} > 0$, ce qui élimine le tableau **c**.

2 Réponse **b**. En posant $X = e^x$, on constate que :

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3) = (e^x - 1)(e^x + 3).$$

L'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ équivaut donc à $e^x = 1$ ou $e^x = -3$, ce qui donne comme solution unique $x = 0$.

3 Réponse **a**. En appelant f la fonction à dériver, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{-2x^2} - 4xe^{-2x^2} \times \frac{1}{x} = \frac{-e^{-2x^2}(4x^2 + 1)}{x^2}.$$

9 Composée d'exponentielles

Enoncé
p. 147

Lycée Jean Renoir, Bondy

1 (a) D'après les limites du cours, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Il en résulte que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{-x} + 1} = 1.$$

 **MÉTHODE**

Pour lever une indétermination du type « infini sur infini », on factorise le terme dominant au numérateur et au dénominateur puis on simplifie.

On a donc factorisé les deux termes du quotient par e^x puis on a simplifié par e^x .

(c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, on en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

De même, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $-\infty$.

2 La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x(e^x)}{(1 + e^x)^2}$$

soit, après avoir effectué les produits et simplifié,

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

On en déduit que, pour tout réel x , $f'(x) > 0$, et, par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3 (a) La tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point K a pour équation :

$$y = f'(0)x + f(0),$$

$$\text{soit } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

(b) La position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la tangente \mathcal{T} est donnée par le signe de la différence $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$ soit le signe de :

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right).$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2e^x - x - xe^x - 2}{4(1 + e^x)}.$$

Le dénominateur de $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$ étant strictement positif sur \mathbb{R} , $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$ est du signe de son numérateur soit $g(x)$.

- (c) La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} d'après les opérations sur les fonctions dérivables et, pour tout réel x , on a :

$$g'(x) = 2e^x - e^x - xe^x - 1.$$

La fonction g' est aussi dérivable sur \mathbb{R} d'après les opérations sur les fonctions dérivables et, pour tout réel x , on a :

$$g''(x) = -xe^x.$$

- (d) La quantité $g''(x)$ est du signe contraire de x donc elle est positive sur $]-\infty ; 0]$ et négative sur $[0 ; +\infty[$

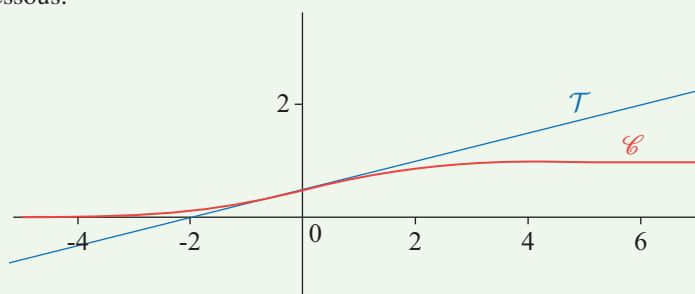
On en déduit que la fonction g' est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$

Or, $g'(0) = 0$. Donc la fonction g admet un maximum en 0 et ce maximum vaut 0. On peut donc en déduire que g' est négative sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0.

Il en résulte que la fonction g est strictement décroissante sur \mathbb{R} . Or, $g(0) = 0$. On peut donc en déduire que g est positive sur $]-\infty ; 0]$ et négative sur $[0 ; +\infty[$.

- (e) D'après les résultats des trois questions précédentes, on peut conclure : La courbe \mathcal{C} est au-dessus de sa tangente \mathcal{T} sur $]-\infty ; 0]$ et en dessous sur $[0 ; +\infty[$.

- 4 La courbe \mathcal{C} et la tangente \mathcal{T} sont représentées sur le graphique ci-dessous.



10 Trigonométrie et exponentielle

Enoncé
p. 147

Lycée Maximilien Sorre, Cachan

- 1 Pour tout réel x , on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $2 + \cos x > 0$ et $e^{1-x} > 0$, ce qui prouve que $f(x) > 0$ sur \mathbb{R} .

- 2 (a) En appliquant la formule :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

on a, pour tout réel x ,

$$\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left[\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right].$$

Or, $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En remplaçant dans la formule précédente et en effectuant le produit, on obtient :

$$\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos x + \sin x.$$

(b) Pour tout réel x , d'après la question précédente, on peut écrire :

$$2 + \cos x + \sin x = 2 + \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Or, pour tout réel x , on a l'encadrement :

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2},$$

duquel on déduit :

$$2 + \cos x + \sin x \geq -\sqrt{2} + 2 > 0.$$

(c) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} d'après les opérations sur les fonctions dérivables et, pour tout réel x ,

$$f'(x) = -\sin x e^{1-x} + (2 + \cos x) (-e^{1-x}),$$

soit :

$$f'(x) = -e^{1-x} (2 + \cos x + \sin x).$$

D'après la question précédente, $2 + \cos x + \sin x > 0$.

Or, $-e^{1-x} < 0$ pour tout réel x .

On en déduit que $f'(x)$ est strictement négatif sur \mathbb{R} ce qui entraîne que la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3 (a) Pour tout réel x , on a l'encadrement :

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$

duquel on déduit :

$$1 \leq 2 + \cos x \leq 3.$$

On multiplie alors par le réel positif e^{1-x} et on obtient :

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}.$$

(b) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on en déduit d'après le théorème de limite de fonctions composées que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{1-x} = 0.$$

Or, d'après la question précédente,

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}.$$

Il en résulte, d'après le théorème de limite par encadrements (théorème des gendarmes) que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a d'après le théorème de limite de fonctions composées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = +\infty.$$

Il en résulte, d'après le théorème de limite par comparaison, que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

MÉTHODE

Lorsque le texte demande d'établir des inégalités et d'en déduire la valeur d'une limite, il faut utiliser soit le théorème de limite par encadrement (théorème des gendarmes) soit le théorème de limite par comparaison. On notera que dans le cas du théorème de limite par comparaison, il est inutile de déterminer la limite des deux expressions qui encadrent $f(x)$.

(c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

4 (a) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Or, $f(0) = 3e$ et $f(\pi) = e^{1-\pi}$. On a $f(0) > 3$ et $f(\pi) < 3$. On en déduit, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.

(b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$f(0,88) < 3 < f(0,87),$$

d'où, comme la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$, on déduit l'encadrement de α à 10^{-2} près :

$$0,87 < \alpha < 0,88.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Tangente hyperbolique

Enoncé
p. 148

Lycée Jean Rostand, Mantes-la-Jolie

1 (a) On peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}.$$

Après réduction au même dénominateur et simplification, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

On lève l'indétermination en factorisant le terme dominant e^{2x} puis en simplifiant par e^{2x} .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc, d'après le théorème de limite de fonctions composées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$.

Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$.

(b) En procédant comme à la question précédente, on montre que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$$

On étudie alors les variations de la fonction \tanh . La fonction \tanh est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Pour tout réel x ,

$$\tanh'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Par conséquent, la fonction \tanh' est strictement positive sur \mathbb{R} et la fonction \tanh est strictement croissante sur \mathbb{R} .

La fonction \tanh est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} avec :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1.$$

On peut donc affirmer d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que, pour tout réel k appartenant à l'intervalle $] -1 ; 1[$, l'équation $\tanh x = k$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .

2 (a) Pour tous réels x et y ,

$$\frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}}{1 + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})}}.$$

On réduit au même dénominateur et on simplifie :

$$\frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{e^{x+y} + e^{-x-y}}$$

Soit finalement,

$$\frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} = \tanh(x + y).$$

(b) Il suffit de faire $y = x$ dans la relation précédente pour obtenir le résultat demandé.

3 (a) Soit n un entier naturel. On note P_n la propriété : $w_n = \tanh 2^n$.

• Par hypothèse, $w_0 = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$.

$$\tanh 2^0 = \tanh 1 = \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}}.$$

En remplaçant e^{-1} par $\frac{1}{e}$, en réduisant au même dénominateur et en simplifiant, on obtient :

$$\tanh 2^0 = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1},$$

soit finalement, $\tanh 2^0 = w_0$, ce qui montre que P_0 est vraie.

• On suppose que la propriété est vraie pour un entier n arbitrairement fixé.

On a alors $w_n = \tanh 2^n$. Or, par hypothèse, $w_{n+1} = \frac{2w_n}{1 + w_n^2}$.

On remplace alors w_n par $\tanh 2^n$ dans l'expression de w_{n+1} .

On obtient :

$$w_{n+1} = \frac{2 \tanh 2^n}{1 + (\tanh 2^n)^2}.$$

Or, on a prouvé à la question précédente que $\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$.

On en déduit que :

$$w_{n+1} = \tanh(2 \times 2^n).$$

Soit $w_{n+1} = \tanh 2^{n+1}$.

On a donc prouvé que si la propriété est vraie au rang n , alors elle est encore vraie au rang $n + 1$.

On a donc prouvé par récurrence que, pour tout entier naturel n , $w_n = \tanh 2^n$.

(b) On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1.$$

Il en résulte d'après le théorème de limite par composition que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tanh 2^n = 1.$$

On peut donc conclure que la suite (w_n) converge vers 1.

12 Algorithme et limite

Enoncé
p. 148

Lycée Buffon, Paris

- 1 Lorsque l'on applique cet algorithme en donnant à a la valeur 0,3, on obtient les résultats successifs suivants :

n	$\exp(-n)$	test : $\exp(-n) \geq 0,3$
0	$e^0 = 1$	$1 \geq 0,3$: vrai
1	$e^{-1} \approx 0,37$	$0,37 \geq 0,3$: vrai
2	$e^{-2} \approx 0,14$	$0,14 \geq 0,3$: faux

La boucle s'achève pour $n = 2$ et la valeur affichée est donc 2.

- 2 L'algorithme affiche le premier entier tel que le test « $e^{-n} \geq a$ » soit faux.

Pour afficher 0, il faut donc que $e^{-0} \geq a$ soit faux, donc que $1 < a$.

On constate que pour $a = 2$, on obtient bien $n = 0$.

- 3 Si $a = 10^{-20}$, le test devient faux dès que $e^{-n} < 10^{-20}$, avec n entier, c'est-à-dire dès que $e^n > 10^{20}$.

À la calculatrice, on trouve $e^{46} \approx 9,5 \times 10^{19}$ et $e^{47} \approx 2,6 \times 10^{20}$. Comme la fonction exponentielle est croissante, cela permet de trouver que si $a = 10^{-20}$, la valeur affichée est 47.

13 Avec une fonction auxiliaire

Enoncé
p. 149

Lycée Eugène Delacroix, Maisons Alfort

Partie A

- 1 Les calculs sur les limites donnent sans difficultés : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

- 2 La fonction g est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur \mathbb{R} , donc elle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
g	$-\infty$	$+\infty$

↗

3 La fonction g est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} . 0 est compris entre les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement croissantes, il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$. À la calculatrice, on trouve $g(0,940) < 0$ et $g(0,941) > 0$, donc $0,940 < \alpha < 0,941$.

4 Comme g est strictement croissante sur \mathbb{R} et $g(\alpha) = 0$, on a $g(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

5 (a) En appliquant l'algorithme à $P = 0,1$, on obtient les valeurs successives suivantes :

X	Y	Test : $Y < 0$
0	-5	Vrai
0,1	$g(0,1) \approx -4,59$	Vrai
\vdots	\vdots	\vdots
0,9	$g(0,9) \approx -0,28$	Vrai
1	$g(1) \approx 0,44$	Faux

Les valeurs affichées sont donc 0,9 et 1.

(b) Si on obtient 0,94 et 0,95, cela signifie que $X - P = 0,94$ et $X = 0,95$, donc $P = 0,01$.

(c) Avec $P = 0,001$, on obtient un encadrement par deux nombres ayant 3 chiffres après la virgule et de différence 0,001. Or, on sait que $0,940 < \alpha < 0,941$. Cela veut dire que les valeurs affichées seront 0,940 et 0,941.

Partie B

1 $2x - 5 > 0$ pour $x > 2,5$ et $1 - e^{-x} > 0$ pour $e^{-x} < 1$, c'est-à-dire pour $x > 0$.

x	$-\infty$	0	2,5	$+\infty$	
$2x - 5$	-	-	0	+	
$1 - e^{-x}$	-	0	+	+	
$f(x)$	+	0	-	0	+

2 On établit facilement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1 - e^{-x}) + (2x - 5)e^{-x} \\ &= 2 - 7e^{-x} + 2xe^{-x} \\ &= e^{-x}(2e^x + 2x - 7) \\ &= e^{-x}g(x). \end{aligned}$$

Comme $e^{-x} > 0$, cela montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$f(\alpha)$

- 4 (a)** $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^\alpha)$. Or, $g(\alpha) = 0$ donc $2e^\alpha + 2\alpha - 7 = 0$,
d'où $e^\alpha = \frac{7 - 2\alpha}{2}$.

Alors,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (2\alpha - 5) \left(1 - \frac{2}{7 - 2\alpha}\right) \\ &= (2\alpha - 5) \left(\frac{5 - 2\alpha}{7 - 2\alpha}\right) \\ &= \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}. \end{aligned}$$

(b)
$$h'(x) = \frac{2 \times 2 \times (2x - 5) \times (2x - 7) - (2x - 5)^2}{(2x - 7)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 56x + 90}{(2x - 7)^2}$$

$h'(x)$ est du signe de $8x^2 - 56x + 90$, qui admet deux racines : 2,5 et 4,5. Selon la règle du signe du trinôme, l'expression est positive « à l'extérieur » des racines, donc $h'(x) > 0$ sur $] -\infty ; 2,5[$, ce qui signifie que h est croissante sur $] -\infty ; 2,5[$.

Comme $0,94 < \alpha < 0,941$ et que ces trois nombres sont dans l'intervalle $] -\infty ; 2,5[$, on a $h(0,94) < h(\alpha) < h(0,941)$.

À l'aide de la calculatrice et comme $h(\alpha) = f(\alpha)$, on obtient :

$$-1,905 < f(\alpha) < -1,895.$$

(Attention à l'arrondi pour obtenir un encadrement d'amplitude 0,01)

Chapitre 7

Logarithme népérien

Plan du chapitre

1. Fonction logarithme népérien
2. Limites à connaître
3. Logarithme décimal

Exercice type

Lycée Guynemer, Compiègne

- 1 Simplifier les écritures suivantes :

$$A = \ln \left(e^3 \sqrt{e^5} \right) \quad ; \quad B = e^{3 \ln 8 + 4 \ln 32}.$$

- 2 Résoudre l'équation suivante :

$$\ln(x - 4) + \ln(x - 2) = \ln 3.$$

- 3 Calculer la dérivée de la fonction suivante en indiquant l'ensemble de dérivabilité :

$$f(x) = x^2 \ln(1 + x).$$

1 Fonction logarithme népérien

Définition 1

Pour tout réel strictement positif x , l'équation $e^y = x$ (d'inconnue y) admet une et une seule solution dans \mathbb{R} . Cette solution réelle y est notée $\ln x$. On définit ainsi une fonction appelée *logarithme népérien* :

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln x \end{aligned}$$

À RETENIR

Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $B \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$A = e^B \iff B = \ln A.$$

Corollaire 1

Si le repère est orthonormé, les courbes représentatives des fonctions \ln et \exp sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Théorème 1

La fonction \ln est continue, dérivable, strictement croissante de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

On a :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Enfin :

$$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ln e = 1.$$

Remarque : le symbole \ln obéit aux mêmes conventions d'écriture que \exp , et souvent des parenthèses sont inutiles.

Conséquence : La fonction logarithme étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , il en résulte que, pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln x < \ln y \iff x < y \quad \text{et} \quad \ln x = \ln y \iff x = y.$$

Remarque : le nombre dérivé de la fonction logarithme en $x = 1$ vaut 1 donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

La tangente à la courbe de la fonction \ln , au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 1 et son équation est $y = x - 1$.

Complément : La courbe représentative de la fonction logarithme est partout en dessous de sa tangente.

Théorème 2 (Relation fonctionnelle)

Pour tous réels x et y strictement positifs :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Conséquences : pour tout entier relatif m ,

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad \text{et} \quad \ln(x^m) = m \ln x.$$

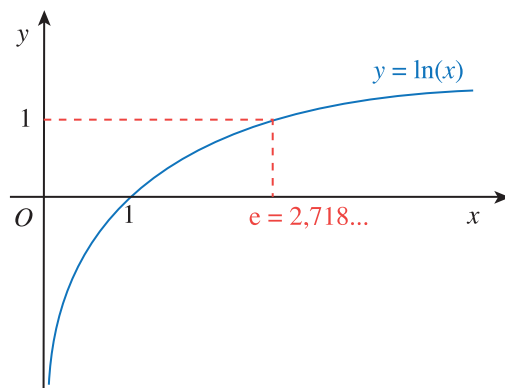
⚠ ATTENTION

Faire preuve de rigueur lors de l'utilisation de la relation fonctionnelle : ne pas scinder $\ln(xy)$ en somme de deux logarithmes sans avoir vérifié et mentionné la stricte positivité de x et y .

Théorème 3 (Limites)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de la fonction logarithme.



2 Limites à connaître

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0.$

Remarque : on dit qu'en cas d'indétermination, x ou les puissances de x « l'emportent » sur $\ln x$.

3 Logarithme décimal

On définit sur \mathbb{R}_+^* la fonction \log par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Cette fonction est utilisée, entre autres, pour la définition des décibels, et pour la définition des intensités des tremblements de terre sur l'échelle de Richter.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type

Lycée Guynemer, Compiègne

$$\begin{aligned}
 1 \quad A &= \ln(e^3) + \ln \sqrt{e^5} \\
 &= 3 \ln e + \frac{1}{2} \ln(e^5) \\
 &= 3 \ln e + \frac{5}{2} \ln e \\
 &= 3 + \frac{5}{2} \\
 &= \frac{11}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= e^{3 \ln 8} \times e^{4 \ln 32} \\
 &= e^{\ln(8^3)} \times e^{\ln(32^4)} \\
 &= 8^3 \times 32^4 \\
 &= 2^{29}.
 \end{aligned}$$

2 Il faut commencer par déterminer l'ensemble de validité de l'équation :

$$x - 4 > 0 \quad \text{pour} \quad x > 4$$

et

$$x - 2 > 0 \quad \text{pour} \quad x > 2.$$

Donc l'ensemble de validité de l'équation est $]4 ; +\infty[$.

Dans cet ensemble de validité, l'équation équivaut à :

$$\ln [(x - 4)(x - 2)] = \ln 3 ,$$

c'est-à-dire :

$$(x - 4)(x - 2) = 3.$$

Donc,

$$x^2 - 6x + 8 = 3 ,$$

soit encore :

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Cette équation admet deux solutions : 1 et 5.

Seule 5 est solution de l'équation initiale, car 1 n'appartient pas à l'ensemble de validité de l'équation :

$$S = \{5\}.$$

3 La fonction f est dérivable sur $] - 1 ; +\infty[$ car la fonction carré est dérivable sur \mathbb{R} et la fonction $\ln u$ est dérivable pour $u(x) > 0$.

$$f'(x) = 2x \ln(1 + x) + \frac{x^2}{1 + x}.$$

1 V/F Fonctions logarithme et exponentielle  10 min  Corrigé p. 179

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 2$.
- 2 Pour tout réel x , $\ln(e^x + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1)$.
- 3 Pour tout réel x différent de -1 , $\ln(x^3 + 1)^2 = 2 \ln(x^3 + 1)$.
- 4 Pour tout réel x , $\ln(e^{3x} + 1)^2 = 2 \ln(e^{3x} + 1)$.

2 V/F Étude d'une fonction  10 min  Corrigé p. 179

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 La fonction f est définie sur $\mathcal{D} =]0; +\infty[$.
- 2 La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote au voisinage de 0.
- 3 Pour tout réel x appartenant à \mathcal{D} , $f(x) < \frac{x}{2}$.
- 4 Pour tout réel x appartenant à \mathcal{D} , $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

3 V/F Propriétés de la fonction logarithme  10 min  Corrigé p. 179

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Pour tout réel $x > 0$, $\ln x > 0$.
- 2 L'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ admet deux solutions distinctes dans \mathbb{R} .
- 3 L'image du réel $x - y$, avec $x < y$, par la fonction \ln est $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$.
- 4 Pour tout réel $x > 0$, $\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

4 V/F Lecture graphique et logarithmes  10 min  Corrigé p. 180

Page suivante est représentée une fonction f définie sur $] -\infty ; 2[$. La droite d'équation $x = 2$ et l'axe des abscisses sont asymptotes à la courbe. On appelle g la fonction définie par $g(x) = \ln(f(x))$. Dire, en utilisant la représentation graphique, si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

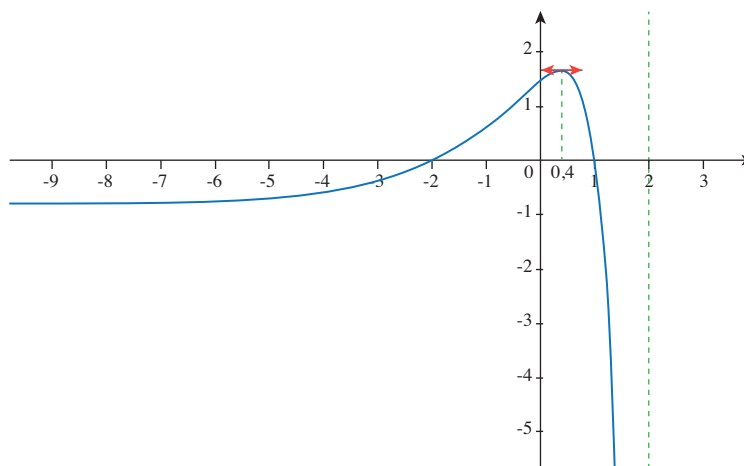
- 1 La fonction g a le même ensemble de définition que f .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2 La fonction g est dérivable en $0,4$ et $g'(0,4) = 0$.
- 3 L'équation $g(x) = -1$ possède exactement deux solutions.
- 4 La fonction $\ln |f(x)|$ est définie pour tout x de $] -\infty ; 2[$.



5 Fonction exponentielle et équations



10 min

Corrigé
p. 180

Lycée La Pérouse, San Francisco

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- 1 $\frac{e^x}{e^x - 1} = 2$
- 2 $\frac{-e^{-3x}}{e^{2x} - 2e^x + 3} = 1$

6 Fonction logarithme et système



10 min

Corrigé
p. 181

Lycée Pasteur, Neuilly

Donner les solutions, lorsqu'elles existent, des systèmes :

- 1 $\begin{cases} 2 \ln x + \ln y = \ln \left(\frac{x}{y} \right) \\ \ln x + 2 \ln y = 0 \end{cases}$
- 2 $\begin{cases} xy = 2 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

7 Retrouver la fonction



15 min

Corrigé
p. 181

Lycée Jules Ferry, Paris

f est une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \ln(ax^2 + bx + c),$$

où a , b et c sont trois réels.

Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	0				
$f(x)$		0		$\ln \frac{5}{8}$	

En utilisant les données du tableau, déterminer a , b et c .

8 Construction d'une tangente



20 min

Corrigé
p. 182

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

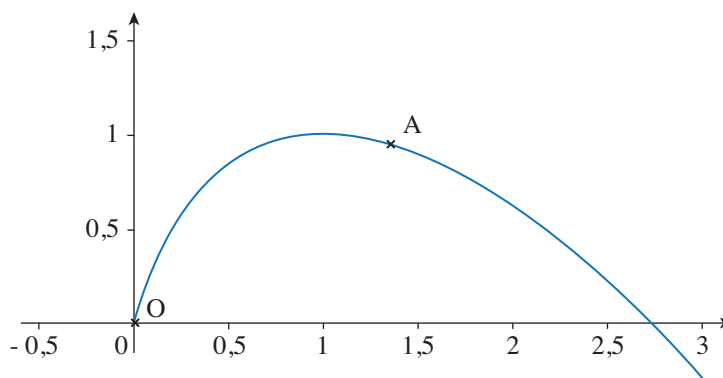
\mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

- 1 Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre x .
- 2 Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3 Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 4 Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente \mathcal{T}_a au point A de la courbe d'abscisse a .
 - (a) Déterminer, en fonction du nombre réel a , les coordonnées du point A' , point d'intersection de la droite \mathcal{T}_a et de l'axe des ordonnées.
 - (b) Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente \mathcal{T}_a .
Construire la tangente \mathcal{T}_a au point A placé sur la figure page suivante.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



9 Étude d'une fonction logarithmique



45 min

Corrigé
p. 183

Lycée Maximilien Sorre, Cachan

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - x - \ln x.$$

- 1 Étudier les variations de f . Compléter le tableau de variation par les limites de f aux bornes de $]0 ; +\infty[$.
- 2 (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $[2 ; 3]$.
(b) Expliquer le rôle de l'algorithme suivant :

```

Entrée
  Saisir  $n$ 
Initialisation
  Affecter à  $a$  la valeur 2
Traitement
  Tant que  $3 - a - \ln(a) > 0$ 
     $a$  prend la valeur  $a + 10^{-n}$ 
  Fin tant que
Sortie
  Afficher  $a$ 
    
```

- (c) Donner une valeur approchée au millième de α en programmant l'algorithme ci-dessus sur votre calculatrice. Recopier ce programme sur votre copie en précisant le modèle de votre calculatrice.
- 3 Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) (2 - \ln x)$.

- 1 Calculer $g'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ et montrer que : $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
- 2 En déduire les variations de g et compléter le tableau de variation par les limites de g aux bornes de $]0 ; +\infty[$.
- 3 En utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, montrer que $g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.
- 4 En déduire un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 0,02.
- 5 Étudier le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

10 Valeur approchée de $\ln 5$



45 min

Corrigé p. 185

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

- 1 Donner une valeur approchée de $\ln 5$ à 10^{-7} près.
- 2 Voici un algorithme :

```

Entrée
  Saisir N, N est un entier naturel non nul
Initialisation
  S prend la valeur 0
Traitement
  Pour k allant de N à 5N
    S prend la valeur  $S + \frac{1}{k}$ 
  Fin Pour
Sortie
  Afficher S
    
```

- (a) Tester l'algorithme pour $N = 1$ et $N = 2$.
- (b) Exprimer S en fonction de N .
- (c) On a testé le programme pour différentes valeurs de N .
On obtient les résultats ci-dessous :

N	1 000	5 000	10 000	15 000	20 000
S	1,610 038	1,609 557 9	1,609 497 9	1,609 477 9	1,609 467 9

De quelle valeur semble se rapprocher S ?

- 3 f et g sont des fonctions définies sur $[0 ; 1[$ par :
 $f(x) = x - \ln(1 + x)$ et $g(x) = x + \ln(1 - x)$.
- (a) Étudier les variations de f et g sur $[0 ; 1[$.

(b) En déduire que pour tout x de $[0 ; 1[$, $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.

4 S est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, par :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{5n}.$$

(a) Montrer que pour tout nombre entier naturel k tel que $n \leq k \leq 5n$ avec $n \geq 2$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

(b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$,

$$\ln\left(5 + \frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{5n}\right).$$

(c) Déterminer la limite de la suite (S_n) .

11 Points d'intersection



45 min

Corrigé
p. 187

Lycée Charlemagne, Paris

Soit f la fonction définie sur $] -1 ; 3[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A

1 Démontrer que les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$ sont deux asymptotes à \mathcal{C} .

2 (a) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $] -1 ; 3[$.

(b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .

3 Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

4 Soit la fonction définie sur $] -1 ; 3[$ par : $g(x) = f(x) - x + 1$.

(a) Démontrer que $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{(1+x)(3-x)}$.

(b) Quel est le sens de variation de g sur $] -1 ; 3[$?

(c) Calculer $g(1)$ et donner le signe de $g(x)$.

(d) En déduire la position relative de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{T} .

Partie B

On note \mathcal{D}_k la droite d'équation $y = x + k$ où k est un réel. On souhaite connaître le nombre de points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D}_k . Pour cela, on pose $h_k(x) = f(x) - (x + k)$.

- 1 (a) Justifier que $h'_k = g'$.
(b) En déduire le sens de variation de h_k .
- 2 Prouver que l'équation $h_k(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $] -1 ; 3[$.
- 3 Répondre au problème posé.
- 4 Voici un algorithme qui permet d'obtenir une valeur approchée de l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{C} et de \mathcal{D}_k :

```

Variables
  x et k sont des réels
Traitement
  Lire k
  x prend la valeur 1
  Si k < -1 alors
    Tant que f(x) - (x+k) > 0
      x prend la valeur x - 0,01
    Fin du Tant que
  Sinon
    Si k > -1 alors
      Tant que (x+k) - f(x) > 0
        x prend la valeur x + 0,01
      Fin du Tant que
    Fin Si
  Fin Si
Sortie
  Afficher x
    
```

- (a) Pour $k = -1$, quel est le résultat affiché ?
- (b) Pourquoi faut-il augmenter x lorsque $k > -1$?
- (c) Pour $k = 2$, le résultat affiché est-il supérieur ou inférieur à l'abscisse du point d'intersection ?
- (d) Quelles modifications peut-on apporter à l'algorithme pour obtenir un résultat plus précis ?

12 Fonction et distance minimale



45 min

Corrigé
p. 189

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

- 1 Étudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2** (a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.
 (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
- 3** Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4** Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.

- 1** Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2 En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction \ln (logarithme népérien);
- A le point de coordonnées $(0 ; 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0 ; +\infty[$.

- 1** Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2 Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
 (a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0 ; +\infty[$.
 (b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ , noté P , dont on précisera les coordonnées.
 (c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
3 Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
 La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

1 **V/F** Fonctions logarithme et exponentielle

Enoncé
p. 171

- 1** Faux. Comme $-\ln 3 = \ln \frac{1}{3}$, ce nombre est égal à $5 + \frac{1}{3}$.
- 2** Vrai. Pour tout réel x , $\ln(e^x + 1) = \ln[e^x(1 + e^{-x})]$. Comme e^x et $1 + e^{-x}$ sont tous les deux strictement positifs,

$$\ln(e^x + 1) = \ln e^x + \ln(1 + e^{-x}).$$
 Or, $\ln e^x = x$. Donc, $\ln(e^x + 1) = x + \ln(1 + e^{-x})$.
- 3** Faux. Le nombre $x^3 + 1$ peut être négatif, par exemple dans le cas où $x = -2$. Or, la formule $\ln a^n = n \ln a$ n'est valable que lorsque a est un réel strictement positif.
- 4** Vrai. Le nombre $e^{3x} + 1$ est toujours strictement positif donc on peut appliquer la formule $\ln a^n = n \ln a$.

2 **V/F** Étude d'une fonction

Enoncé
p. 171

- 1** Faux. La fonction f n'est pas définie en 1 car $\ln 1 = 0$.
- 2** Faux. En effet, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \sqrt{x}} = 0$.
 Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Comme la limite en 0 est finie, il n'y a pas d'asymptote en 0.
- 3** Faux. Lorsque x vérifie $0 < x < 1$, le nombre $\ln \sqrt{x}$ est strictement négatif donc $-\frac{1}{\ln \sqrt{x}} > 0$ donc, dans ce cas, $f(x) > \frac{x}{2}$.
- 4** Vrai. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout réel x de \mathcal{D} , $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x(\ln \sqrt{x})^2}$.
 Pour $x > 0$, $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ donc $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

3 **V/F** Propriétés de la fonction logarithme

Enoncé
p. 171

- 1** Faux. Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, $\ln x < 0$.
- 2** Faux. Pour résoudre cette équation, on pose $X = e^x$ et on résout l'équation du second degré $X^2 - 3X - 4 = 0$.
 Cette équation admet deux solutions réelles distinctes 4 et -1 . Or pour tout réel x , $e^x > 0$ donc l'équation $e^x = -1$ n'admet pas de solution. Par suite, l'équation étudiée admet pour unique solution $x = \ln 4$.
- 3** Faux. $x - y$ est un nombre négatif, il n'a donc pas d'image par la fonction \ln .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 4 Vrai. On remarque que $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = 1$. Ces deux réels sont donc inverses l'un de l'autre. D'après le cours, pour tout réel $a > 0$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$. En appliquant cette formule, on a bien : $\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

4 V/F Lecture graphique et logarithmes

Enoncé
p. 171

- 1 Faux. La fonction g est définie si f est strictement positive, donc sur l'intervalle $] -2 ; 1[$.
- 2 Vrai. On a $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Donc, en 0,4, $g'(x) = 0$.
- 3 On a $g(x) = -1 \Leftrightarrow \ln[f(x)] = -1 \Leftrightarrow f(x) = e^{-1}$. Or, $e^{-1} \approx 0,37$. Graphiquement, l'affirmation est vraie.
- 4 Faux. Le nombre $|f(x)|$ est positif ou nul. Cependant, d'après la représentation graphique, $f(x)$ s'annule pour $x = -2$ et $x = 1$, donc la fonction $\ln|f(x)|$ n'est pas définie pour ces deux valeurs.

5 Fonction exponentielle et équations

Enoncé
p. 172

Lycée La Pérouse, San Francisco

- 1 L'expression $\frac{e^x}{e^x - 1} = 2$ n'a de sens que pour $e^x \neq 1$, c'est à dire pour $x \neq 0$.
Alors :

$$\frac{e^x}{e^x - 1} = 2 \iff e^x = 2e^x - 2$$

$$\iff e^x = 2.$$

L'équation $\frac{e^x}{e^x - 1} = 2$ possède donc une unique solution $x = \ln 2$.

- 2 Posons $X = e^x$. On a alors : $e^{2x} - 2e^x + 3 = X^2 - 2X + 3$.
Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = -8$, donc pour tout réel t :

$$t^2 - 2t + 3 > 0.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 2e^x + 3 > 0$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-3x} > 0$ donc :

$$\frac{-e^{-3x}}{e^{2x} - 2e^x + 3} < 0,$$

et l'équation $\frac{-e^{-3x}}{e^{2x} - 2e^x + 3} = 1$ ne possède donc pas de solution réelle.

6 Fonction logarithme et système

Enoncé
p. 172

Lycée Pasteur, Neuilly

1 Pour tous x, y vérifiant $x > 0$ et $y > 0$, on a $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$, donc :

$$\begin{cases} 2 \ln x + \ln y = \ln \left(\frac{x}{y} \right) \\ \ln x + 2 \ln y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \ln x + \ln y = \ln x - \ln y \\ \ln x + 2 \ln y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \ln x + 2 \ln y = 0$$

Or, $\ln(x) + 2 \ln(y) = \ln(xy^2)$ donc :

$$\begin{cases} 2 \ln x + \ln y = \ln \left(\frac{x}{y} \right) \\ \ln x + 2 \ln y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy^2 = 1 \\ x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc l'ensemble des couples $\left(x ; \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$ où x décrit \mathbb{R}_+^* .

2 Puisque \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , deux réels qui ont le même logarithme sont égaux. Donc :

$$\begin{cases} xy = 2 \\ \ln x + \ln y = 3 \\ x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(xy) = \ln 2 \\ \ln x + \ln y = 3 \\ x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$$

De plus, $\ln x + \ln y = \ln(xy)$ donc :

$$\begin{cases} \ln(xy) = \ln 2 \\ \ln x + \ln y = 3 \\ x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(xy) = \ln 2 \\ \ln(xy) = 3 \\ x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$$

Or $\ln 2 \neq 3$ (puisque \ln est croissante d'où $\ln 2 < \ln e = 1$) : ce système ne possède donc pas de solution.

7 Retrouver la fonction

Enoncé
p. 173

Lycée Jules Ferry, Paris

Si $ax^2 + bx + c > 0$, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$.

D'après les données du tableau de variation :

- $f'(0) = 0$ donc $b = 0$;
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ donc $\ln\left(\frac{a}{4} + c\right) = 0$, soit $\frac{a}{4} + c = 1$;
- $f\left(\frac{1}{4}\right) = \ln \frac{5}{8}$ donc $\ln\left(\frac{a}{16} + c\right) = \ln \frac{5}{8}$, soit $\frac{a}{16} + c = \frac{5}{8}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

De ces deux équations, on déduit $c = \frac{1}{2}$, $a = 2$ et nous avons déjà $b = 0$.

L'expression $2x^2 + \frac{1}{2}$ est bien strictement positive sur \mathbb{R} donc la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .

8 Construction d'une tangente

Enoncé
p. 173

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

1 $1 - \ln x > 0$ pour $x < e$ et $x > 0$. Par conséquent, $f(x) > 0$ pour $0 < x < e$, $f(e) = 0$ et $f(x) < 0$ pour $x > e$.

2 • $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (limite de référence) donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = 0.$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 - \ln x)] = -\infty.$$

3 $f'(x) = 1 \times (1 - \ln x) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		1	
		↗	↘
	0		$-\infty$

4 (a) Une équation de \mathcal{T}_a est :

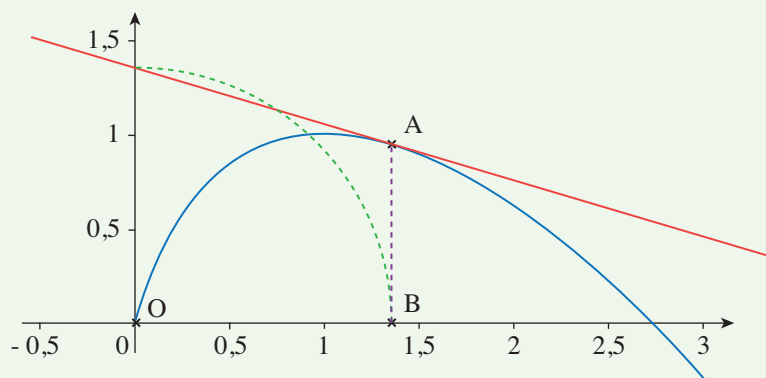
$$y = f'(a)(x - a) + f(a),$$

ce qui donne :

$$y = -x \ln a + a.$$

En remplaçant x par 0 dans cette équation, on trouve que les coordonnées du point A' sont $(0 ; a)$.

(b) Pour tracer cette tangente, il suffit de reporter l'abscisse du point A sur l'axe des ordonnées pour obtenir le point A' , puis la tangente est la droite (AA') .



9 Étude d'une fonction logarithmique

Enoncé
p. 174

Lycée Maximilien Sorre, Cachan

Partie A

- 1 La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ d'après les opérations sur les fonctions dérivables.

Pour tout réel x tel que $x > 0$, on a :

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x}.$$

Pour tout réel x strictement positif on a $f'(x) < 0$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

D'après les limites usuelles,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

On dresse alors le tableau de variation de la fonction f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

- 2 (a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[2 ; 3]$; $f(2) = 1 - \ln 2$ et $f(3) = -\ln 3$ donc $f(2) > 0$ et $f(3) < 0$. Il en résulte, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) L'algorithme donne, à 10^{-n} près, une valeur approchée de α . On part de 2, et la fonction étant décroissante sur $]0 ; \alpha]$, on se rapprochera de α .

TI	Casio GRAPH
PROGRAM :	? → N ←
: Prompt N	2 → A ←
: 2 → A	While 3-A-ln(A)>0 ←
: While 3-A-ln(A)>0	A+10 ^(-N) → A ←
: A+10 ^(-N) → A	WhileEnd ←
: End	A
: Disp A	

En utilisant l'algorithme ci-dessus, on obtient $\alpha \approx 2,208$.

3 La fonction f s'annule en α et elle est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$. On en déduit que f est strictement positive sur $]0 ; \alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha ; +\infty[$.

Partie B

1 La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout réel x , on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}(2 - \ln x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x}\right),$$

soit :

$$g'(x) = \frac{3 - x - \ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}.$$

2 Comme x^2 est strictement positif sur $]0 ; +\infty[$, $g'(x)$ a même signe que $f(x)$. On en déduit que $g'(x)$ est strictement positif sur $]0 ; \alpha[$ et strictement négatif sur $]\alpha ; +\infty[$. Il en résulte que la fonction g est strictement croissante sur $]0 ; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha ; +\infty[$. Elle admet un maximum en α .

D'après les limites usuelles,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

On dresse alors le tableau de variation de la fonction g .

x	0	α	∞
$g'(x)$	+	0	-
g	$-\infty$	$g(\alpha)$	$-\infty$

3 On a :

$$g(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (2 - \ln \alpha).$$

Or, $f(\alpha) = 0$ donc $3 - \alpha - \ln \alpha = 0$.

On en déduit que $\ln \alpha = 3 - \alpha$.

En remplaçant cette valeur dans l'expression de $g(\alpha)$, on obtient :

$$g(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (-1 + \alpha),$$

soit, après transformation,

$$g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}.$$

4 À la question 2 de la partie A, on a établi l'encadrement :

$$2,20 < \alpha < 2,21.$$

On ne peut pas encadrer $g(\alpha)$ par $g(2,20)$ et $g(2,21)$ car g n'est pas monotone sur $[2,20 ; 2,21]$.

On peut par contre utiliser le résultat de la question précédente

$$g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} \text{ pour donner un encadrement de } g(\alpha).$$

La fonction carré étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$1,2^2 < (\alpha - 1)^2 < 1,21^2.$$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{2,21} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2,20}.$$

On en déduit alors que :

$$\frac{1,2^2}{2,21} < \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} < \frac{1,21^2}{2,20}.$$

À l'aide de la calculatrice, on peut alors donner un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 0,02 :

$$0,65 < g(\alpha) < 0,67.$$

5 En remarquant que $g(1) = g(e^2) = 0$ et en exploitant le tableau de variation de la fonction g obtenu à la question 2 de la partie B, on déduit le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

$$g(x) < 0 \text{ sur }]0 ; 1[\text{ et sur }]e^2 ; +\infty[\text{ et } g(x) > 0 \text{ sur }]1 ; e^2[.$$

10 Valeur approchée de $\ln 5$

→ Enoncé
p. 175

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

1 La calculatrice donne $\ln 5 \approx 1,609\,437\,9$.

2 (a) Pour $N = 1$, k et S prennent les valeurs successives suivantes :

k	1	2	3	4	5
S	$0 + 1 = 1$	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$	$\frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$	$\frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$

On obtient donc $S = \frac{137}{60}$, soit $S \approx 2,28$.

Pour $N = 2$, k varie de 2 à 10. Alors, $S = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}$, ce qui donne $S \approx 1,93$.

(b) $S = \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{5N}$.

(c) S semble se rapprocher de $\ln 5$.

3 (a) Les fonctions f et g sont définies et dérivables sur $[0 ; 1[$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Donc $f'(x)$ est positive sur $[0 ; 1[$ et f est croissante sur cet intervalle.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x}.$$

Alors $g'(x)$ est négative sur $[0 ; 1[$ et g est décroissante sur cet intervalle.

(b) La fonction f est croissante sur $[0 ; 1[$ et $f(0) = 0$, donc pour tout x de $[0 ; 1[$, $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geq 0$, ou encore $x \geq \ln(1+x)$.

De même, g est décroissante sur $[0 ; 1[$ et $g(0) = 0$ donc $g(x) \leq 0$, ce qui donne $x \leq -\ln(1-x)$.

Ces deux inégalités donnent l'encadrement demandé pour tout x de $[0 ; 1[$:

$$\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x).$$

4 (a) Si k est un entier compris entre n et $5n$ avec $n \geq 2$, alors $\frac{1}{k}$ appartient à $[0 ; 1[$ et vérifie la double inégalité précédente :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

(b) En faisant la somme membre à membre des inégalités précédentes pour k allant de n à $5n$, on constate que le terme central est S_n .

Le terme de gauche est :

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{5n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{5n+1}{5n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{5n+1}{5n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{5n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(5 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Dans le terme de droite, la somme obtenue est :

$$-\ln\left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \times \dots \times \frac{5n-1}{5n}\right) = -\ln\left(\frac{n-1}{5n}\right).$$

Cela donne bien, pour tout $n \geq 2$, l'encadrement :

$$\ln\left(5 + \frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{5n}\right).$$

(c) On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{5n} = \frac{1}{5}$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\ln\left(\frac{n-1}{5n}\right)\right] = -\ln\frac{1}{5} = \ln 5.$$

D'après le théorème d'encadrement des limites (théorème des gendarmes), on en déduit que la limite de la suite (S_n) est égale à $\ln 5$.

11 Points d'intersection

Enoncé
p. 176

Lycée Charlemagne, Paris

Partie A

1 On trouve facilement que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$. Cela montre que les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$ sont des asymptotes à \mathcal{C} .

2 (a) f est dérivable sur $] -1 ; 3[$ car c'est la composée d'une fonction rationnelle définie sur $] -1 ; 3[$, dont les valeurs sont strictement positives sur $] -1 ; 3[$, et de la fonction \ln .

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f'(x) &= \frac{\frac{(3-x)+(1+x)}{(3-x)^2}}{\frac{1+x}{3-x}} \\ &= \frac{4}{(3-x)(1+x)}. \end{aligned}$$

Cette expression est strictement positive sur $] - 1 ; 3[$ donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

- 3** Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) ,$$

ce qui donne : $y = x - 1$.

- 4 (a)** $g'(x) = f'(x) - 1$

$$= \frac{4}{(3-x)(1+x)} - 1$$

$$= \frac{(x-1)^2}{(3-x)(x+1)} .$$

- (b)** $g'(x) > 0$ sur $] - 1 ; 3[$ sauf en 1 où elle s'annule. La fonction g est donc strictement croissante sur $] - 1 ; 3[$.

- (c)** $g(1) = 0$ et comme g est strictement croissante, on trouve :

- pour $-1 < x < 1$, $g(x) < 0$,
- pour $1 < x < 3$, $g(x) > 0$,
- $g(1) = 0$.

- (d)** Comme $y = x - 1$ est une équation de \mathcal{T} , le signe de $g(x)$ donne la position relative de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{T} :

- pour $-1 < x < 1$, comme $g(x) < 0$, \mathcal{C} est en dessous de \mathcal{T} ;
- pour $1 < x < 3$, comme $g(x) > 0$, \mathcal{C} est au dessus de \mathcal{T} ;
- $g(1) = 0$ donc \mathcal{C} et \mathcal{T} sont sécantes.

Partie B

- 1 (a)** On constate que $h_k(x) = g(x) - k - 1$ donc on a bien $h'_k = g'$.

- (b)** h a le même sens de variation que g , donc h_k est strictement croissante sur $] - 1 ; 3[$.

- 2** À l'aide des limites de la fonction f , on trouve $\lim_{x \rightarrow -1} h_k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} h_k(x) = +\infty$.

La fonction h_k est donc continue, strictement croissante sur $] - 1 ; 3[$.

On a $0 \in \left] \lim_{x \rightarrow -1} h_k(x) ; \lim_{x \rightarrow 3} h_k(x) \right[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliquées aux fonctions strictement monotones, il existe donc un réel α unique dans $] - 1 ; 3[$ tel que $h_k(\alpha) = 0$.

- 3** Pour toute droite \mathcal{D}_k , il y a donc un point d'intersection unique avec \mathcal{C} , qui a pour abscisse la valeur α de la question précédente.

- 4 (a)** Pour $k = -1$, les conditions « Si » et « Sinon » ne sont pas vérifiées, donc on obtient directement l'affichage du x initial, c'est-à-dire 1. C'est le cas étudié dans la partie A.

- (b) Si $k > -1$, alors comme $h_k(x) = g(x) - k - 1$, on a $h_k(x) < g(x)$ et en particulier pour $x = 1$: $h_k(1) < 0$.
Comme h_k est croissante, la valeur qui annule h_k est donc plus grande que 1, et il faut augmenter le x initial pour l'atteindre.
- (c) Pour $k = 2$, tant que $(x + k) - f(x) > 0$, on augmente x par pas de 0,01. La valeur affichée est donc la première pour laquelle $(x + k) - f(x) \leq 0$, c'est-à-dire une valeur supérieure ou égale à celle qui correspond à l'abscisse du point d'intersection.
- (d) Pour obtenir un résultat plus précis, on peut diminuer le pas utilisé, c'est-à-dire ajouter ou retrancher à x une valeur plus petite que 0,01.

12 Fonction et distance minimale

Enoncé
p. 177

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

Partie A

- 1 On calcule $u'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$. Sur $]0 ; +\infty[$, $u'(x) > 0$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ d'après les limites connues de la fonction \ln .
- 2 (a) La fonction u est continue car somme de fonctions définies et continues sur son ensemble de définition.
La fonction u est strictement croissante.
Le nombre $0 \in]-\infty ; +\infty[$, donc d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0 ; +\infty[$.
- (b) D'après la calculatrice, $1,31 < \alpha < 1,32$.
- 3 On a $u(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $u(x) > 0$ pour $x > \alpha$.
- 4 On a $u(\alpha) = 0$, donc $\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$, d'où $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

- 1 On calcule :
- $$f'(x) = 2x + 2(2 - \ln x) \left(-\frac{1}{x} \right) = \frac{2x^2 - 4 + 2 \ln x}{x} = \frac{2u(x)}{x}.$$
- 2 Comme $x > 0$, les variations de f sont données par le signe de u : f est décroissante pour $x < \alpha$ et croissante pour $x > \alpha$.

Partie C

1 On calcule :

$$AM = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{f(x)}.$$

2 (a) La fonction g est la composée de la fonction f et de la fonction racine carrée. La fonction racine carrée étant croissante sur $]0; +\infty[$, g a les mêmes variations que f .

(b) On a montré précédemment que f admet un minimum pour $x = \alpha$. Les coordonnées du point P sont alors $(\alpha; \ln \alpha)$ ou encore $(\alpha; 2 - \alpha^2)$.

(c) On a :

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{\alpha^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} \\ &= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} \\ &= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

car $\alpha > 0$.

3 Un vecteur directeur de la droite (AP) est $\overrightarrow{AP}(\alpha; -\alpha^2)$.

Par ailleurs $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc le coefficient directeur de la tangente à Γ en P est $\frac{1}{\alpha}$. Donc un vecteur directeur de cette tangente est $\vec{d}\left(1; \frac{1}{\alpha}\right)$.

On a :

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d} = \alpha + (-\alpha^2) \left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0.$$

Donc (AP) est bien perpendiculaire à la tangente Γ en P .

Chapitre 8

Intégration

Plan du chapitre

1. Intégrale d'une fonction continue
2. Primitive et intégrale
3. Valeur moyenne

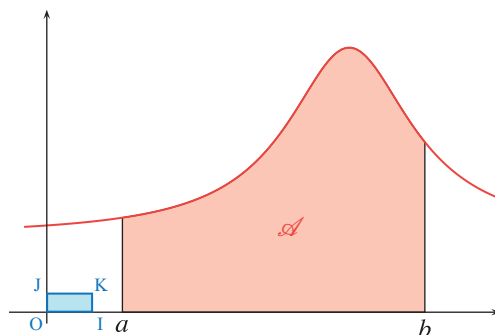
Exercice type

Lycée Henri IV, Paris

On appelle $A(x)$ l'aire comprise entre la droite d'équation $y = 3$ et la parabole d'équation $y = x^2$.
Calculer $A(x)$.

1 Intégrale d'une fonction continue

1.1 Intégrale et aire



Définition 1

Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un intervalle $[a ; b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$ construit à partir des points O , I et J .

L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé sous la courbe \mathcal{C} . On la note :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(t) dt.$$

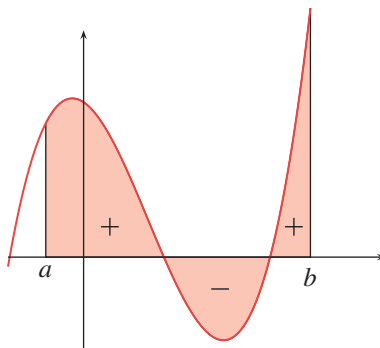
Définition 2

Soit f une fonction *continue* et *négative* sur un intervalle $[a ; b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Le nombre $\int_a^b f(t) dt$ est égal à l'opposé de l'aire du domaine \mathcal{D} limité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On étend la définition de l'intégrale aux fonctions continues *changeant de signe* un nombre fini de fois, comme étant la somme algébrique des aires sur les intervalles où f est de signe constant, chaque terme étant affecté du signe de f sur cet intervalle.

L'aire algébrique ainsi calculée est appelée *intégrale de f sur $[a ; b]$* .



À RETENIR

Pour calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan comprise entre les courbes représentatives des fonctions f et g , on commence par étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

Si $f(x) - g(x)$ est positif sur l'intervalle $[a ; b]$, alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Si $f(x) - g(x)$ est négatif sur l'intervalle $[a ; b]$, alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

On étend la définition du symbole $\int_a^b f(t) dt$ au cas $a > b$ en posant alors :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

C'est l'*intégrale de a à b* de f (attention à ne pas évoquer l'*intervalle* $[a ; b]$ si $a > b$).

1.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 1 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels appartenant à I , alors :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

ATTENTION

Il n'existe aucune condition d'ordre entre les réels a, b et c . La relation de Chasles n'impose pas d'avoir $a < b < c$.

Propriétés 1

- Si f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

- Si f est paire, alors :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

- Si f est périodique de période T , alors pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Théorème 2 (Linéarité de l'intégrale)

Quelles que soient les fonctions continues f et g , quels que soient les réels λ et μ :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

Propriétés 2

- Si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq 0$, alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq 0$, alors : $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

- Si pour tout nombre réel x de $[a ; b]$, $g(x) \leq f(x)$, alors :

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Primitive et intégrale

2.1 Définition et existence

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une *primitive* de f sur I est, si elle existe, une fonction F dérivable sur I vérifiant $F' = f$ sur I .

Théorème 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Si f admet une primitive F sur I , alors elle en admet une infinité.
Si G est une autre primitive, il existe une constante réelle c telle que, pour tout x de l'intervalle I :

$$G(x) = F(x) + c.$$

À RETENIR

Si elles existent, les primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Propriété 3

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I , soit x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque fixé.
Il existe alors une *unique* primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème 4

Tout fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Remarque : ce théorème permet de prouver l'existence de primitives d'une fonction mais ne permet pas de les calculer. Il sera aussi souvent utilisé pour prouver l'existence d'intégrales.

Théorème 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarque : on peut étudier facilement les variations de la fonction F , sans calculer l'intégrale, dans la mesure où on connaît sa dérivée qui n'est autre que la fonction f .

Soit F une fonction définie sur un intervalle I , et soient a, b deux réels appartenant à I . On note :

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Théorème 6

Soit f une fonction continue et F une primitive de f . On a :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b.$$

2.2 Primitives usuelles

Un tableau de dérivées usuelles donne, par lecture inverse, un tableau de primitives à connaître. Précisons une dernière fois qu'on ne parle de primitives que sur un *intervalle* :

La fonction usuelle	Ses primitives
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$ si $-n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$x \mapsto \ln x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2.3 Primitives et fonctions composées

Il est souvent possible de mettre en évidence la dérivée d'une fonction composée. Le tableau page suivants regroupe les cas les plus courants (u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Fonction f	Une primitive F	Conditions sur u
$u'u^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I .
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I .
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$ sur I .
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax+b) \quad a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}U(ax+b)$	U primitive de u sur I .

3 Valeur moyenne

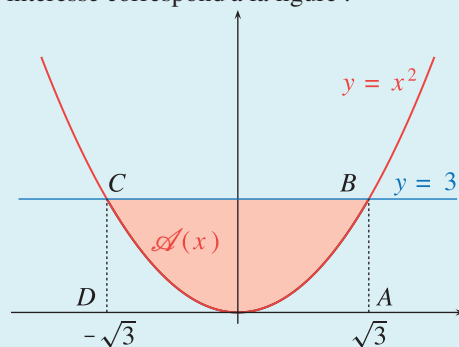
Définition 4

La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a ; b]$ ($a < b$) est le nombre réel μ défini par $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

← Solution de l'exercice type

Lycée Henri IV, Paris

Le cas qui nous intéresse correspond à la figure :



➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Henri IV, Paris

L'aire $\mathcal{A}(x)$ est donc égale à l'aire du rectangle $ABCD$ moins « l'aire sous la courbe » :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \text{Aire}(ABCD) - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2 dx \\ &= 6\sqrt{3} - 2 \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx \quad (\text{car } x \mapsto x^2 \text{ est paire}) \\ &= 6\sqrt{3} - 2 \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 6\sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 QCM Calcul d'intégrales

10 min Corrigé p. 204

- 1** Soit $I = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$. La valeur de I est :
- a** $\left| -\left| \frac{1}{e} - 1 \right| \right| - |e - 1|$ **b** $2(e - 1)$
c $e + \frac{1}{e}$ **d** $e + \frac{1}{e} - 2$
- 2** Soit $I = \int_1^2 \frac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 1} dx$. La valeur de I est :
- a** $2 \ln 11$ **b** $-\frac{1}{11}$ **c** $\ln 11$ **d** $\frac{1}{2} \ln 11$
- 3** Soit $I = \int_0^4 (|x - 1| + |x - 2|) dx$. La valeur de I est :
- a** 6 **b** 7 **c** 8 **d** 9
- 4** Soit $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$. La valeur de I est :
- a** $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$ **b** $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ **c** $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ **d** $\frac{\sqrt{2}}{12}$

2 V/F Propriétés des intégrales

10 min Corrigé p. 204

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est e .
- 2** $\int_{-1}^1 (x^5 + x^3) \sin^3 x dx = 0$.
- 3** $\int_0^\pi e^{\cos x} dx = \int_{-\pi}^0 e^{\cos x} dx$.
- 4** $\int_0^\pi e^{\cos x} dx = \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{\cos x} dx$.

3 V/F Intégrales et ordre

10 min Corrigé p. 205

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** L'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment est positive.
- 2** Si l'intégrale d'une fonction sur un segment est positive alors la fonction est positive.
- 3** Si l'intégrale d'une fonction est nulle sur un segment $[a ; b]$ alors la fonction est nulle sur $[a ; b]$.
- 4** Pour tout réel x , $\int_x^{x^2} t^2 dt \geq 0$.

4 **V/F** **Fonction définie par une intégrale**

15 min Corrigé p. 205

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $F'(x) = e^{-x^2} - 1$.
- 2** La fonction $F \geq 0$ sur \mathbb{R} .
- 3** Pour tout réel $x \geq 1$, $F(x) - F(1) \leq \int_0^x e^{-t^2} dt$.
- 4** Pour tout réel x , $F(x) = F(-x)$.

5 **V/F** **Suite d'intégrales**

15 min Corrigé p. 206

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t + 1} dt.$$

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Pour tout naturel n non nul, I_n est positive.
- 2** Pour tout naturel n non nul, $I_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
- 3** La suite (I_n) est décroissante.
- 4** Pour tout entier naturel n non nul, $I_1 + I_2 + \dots + I_n = \ln(n+2)$.

6 **Pratique du calcul intégral**

10 min Corrigé p. 207

Lycée Blaise Pascal, Brie-Comte-Robert

Calculer les intégrales $I_1 = \int_0^\pi \cos t dt$ et $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt$

7 **Intégrales de fonctions polynômes**

10 min Corrigé p. 207

Lycée Marie Curie, Sceaux

Calculer les intégrales :

$$I_3 = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 4t + 1) dt \text{ et } I_4 = \int_{-3}^3 (12t^{17} + 2t^3 - t) dt$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

8 Un calcul classique



15 min

Corrigé
p. 208

Lycée Victor Hugo, Besançon

Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

- 1 Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$.
- 2 En déduire la dérivée de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}).$$

- 3 Calculer la valeur de I .

9 Recherches de primitives



15 min

Corrigé
p. 209

Lycée Lavoisier, Paris

Soit f la fonction définie sur $]-2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{x + 2}.$$

Déterminer des réels a, b, c et d pour que la fonction F définie sur $]-2 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x + 2}$$

soit une primitive de f .

10 Primitives d'une fonction rationnelle



20 min

Corrigé
p. 209

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2 - 1)^2}$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- 2 Déterminer des réels a, b tels que sur \mathcal{D}_f ,

$$f(x) = \frac{b}{(x + 1)^2} + \frac{a}{(x - 1)^2}.$$

- 3 En déduire deux primitives F et G de f sur $]1 ; +\infty[$.

11 Suites définies par des intégrales



20 min

Corrigé
p. 210

Lycée du Parc, Lyon

Pour chaque entier n , on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + 2x + 4x^2} dx$.

- 1 Montrer que l'on définit ainsi une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont chaque terme est positif ou nul.

2 Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3 Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$\frac{1}{1 + 2x + 4x^2} \leq a.$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

12 Une autre suite d'intégrales



30 min

Corrigé
p. 212

Lycée Balzac, Caen

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx} dx}{e^x + 1}.$$

1 (a) Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0 .

(b) Pour tout entier $n \geq 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

2 (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

(b) Prouver que pour tout entier n et tout $x \in [0 ; 1]$:

$$\frac{e^{nx}}{e + 1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2} e^{nx}.$$

En déduire un encadrement de I_n .

3 À partir de cet encadrement, déterminer les limites de I_n et de $\frac{I_n}{e^n}$.

13 Valeur approchée d'une intégrale



45 min

Corrigé
p. 214

Lycée du Parc, Lyon

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1[$ par : $f(x) = e^{-x} \frac{1}{1-x}$.

On pose : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$.

1 En étudiant les variations de f , démontrer que pour tout $x \in [0 ; \frac{1}{2}]$

$$1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

2 (a) Vérifier que pour tout $x \in [0 ; \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$.

(b) En déduire que $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$.

(c) Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -(x+2)e^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto (x+1)e^{-x}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- (d) Déduire de la question 1 que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.
- (e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision de 0,01.

14 Intégrale d'une fonction irrationnelle ★★ 15 min Corrigé p. 216

Lycée Saint-Jean-de-Passy, Paris

On pose pour tout entier naturel n non nul : $J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

- 1 Par des considérations d'aires, montrer que $J_0 = \frac{\pi}{4}$.
- 2 Montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 3 (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx$.
(b) Déterminer la limite de J_n .

15 Primitive d'une fonction irrationnelle ★★ 30 min Corrigé p. 217

Lycée Carnot, Dijon

On cherche une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

- 1 Pourquoi la fonction f admet-elle une primitive sur \mathbb{R} ?
- 2 Montrer qu'une fonction du type $x \mapsto \sqrt{P(x)}$, où P est un polynôme de degré 2, ne peut pas être une primitive de f .
- 3 Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
Dériver $x \mapsto g(x)\sqrt{2x^2 + 1}$.
- 4 Déterminer une primitive de f sur \mathbb{R} .

16 Avec un algorithme ★★★ 30 min Corrigé p. 218

Lycée La Bruyère, Versailles

On considère la suite définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

- 1 (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geq 0$.
(b) Étudier la monotonie de la suite (I_n) .
(c) En déduire que la suite est convergente. On note L sa limite (dans cette question on ne demande pas de la calculer).

- 2** (a) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^{x^2}$.
Démontrer que la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive de g .
- (b) En déduire la valeur de I_1 .
- (c) Pour tout entier naturel non nul n , on définit sur \mathbb{R} la fonction H_n par : $H_n(x) = x^{n+1}G(x)$.
Montrer que H_n est dérivable sur \mathbb{R} et calculer, pour tout réel x , $H'_n(x)$.
En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$I_{n+2} + \frac{n+1}{2}I_n = \frac{1}{2}e.$$

- (d) Calculer I_3 et I_5 .

- 3** Compléter l'algorithme suivant de façon à obtenir en sortie le terme I_{23} .

```

Variables
  n est un entier naturel impair
  I est un réel
Initialisation
  Affecter à n la valeur 1
  Affecter à I la valeur ...
Traitement
  Tant que n < ...
    Affecter à I la valeur  $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I$ 
    Affecter à n la valeur n + 2
  Fin de Tant que
Sortie
  Afficher I
    
```

- 4** Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Déterminer la valeur de L.

17 Primitives « à vue »



20 min

Corrigé p. 220

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Calculer une primitive de $u(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$ et $v(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

18 Dérivées et primitives



15 min

Corrigé p. 221

Lycée Janson de Sailly, Paris

Calculer en fonction de x la dérivée des fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln t \, dt.$$

1 **QCM** Calcul d'intégrales

Enoncé
p. 198

- 1** Réponse **[d]**. $I = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx$.
 $I = [x - e^x]_{-1}^0 + [e^x - x]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2$.

MÉTHODE

On ne peut pas intégrer directement une fonction dont l'écriture comporte des valeurs absolues. Il est indispensable de commencer par donner une écriture de la fonction sans valeur absolue en distinguant différents intervalles. L'intégrale se calcule ensuite en appliquant la relation de Chasles.

- 2** Réponse **[a]**. Il convient de s'assurer que $x^3 + x^2 - 1$ est bien positif pour tout x de l'intervalle $[1 ; 2]$.
L'étude de la fonction $x \mapsto x^3 + x^2 - 1$ montre que, sur $[0 ; +\infty[$, cette fonction est croissante, et, comme $f(1) = 1$, on a bien la condition requise.

- 3** Réponse **[d]**. On retrouve la même situation que la première question. On doit commencer par simplifier l'écriture de la fonction de manière à ne plus avoir de valeurs absolues puis appliquer la relation de Chasles.
 $I = \int_0^1 (-2x + 3) dx + \int_1^2 dx + \int_2^4 (2x - 3) dx = 9$.

- 4** Réponse **[b]**. Pour tout réel x , $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
Par suite, $I = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

2 **V/F** Propriétés des intégrales

Enoncé
p. 198

- 1** Faux. La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.
2 Vrai. La fonction intégrée est une fonction impaire sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ donc, d'après les propriétés du cours, son intégrale sur le segment $[0 ; 1]$ est nulle.

MÉTHODE

Lorsque les bornes d'intégration sont deux réels opposés, on commencera toujours par étudier rapidement la parité de la fonction intégrée. Si la fonction est impaire, l'intégrale est nulle et il n'y a pas lieu de se lancer dans des calculs.

- 3** Vrai. La fonction intégrée est une fonction paire puisque, pour tout réel

x , $\cos(-x) = \cos x$ et les intervalles d'intégration sont symétriques par rapport à 0.

- 4 Vrai. La fonction intégrée est une fonction périodique de période 2π et on intègre sur des intervalles décalés d'une période.

3 V/F Intégrales et ordre

Enoncé
p. 198

- 1 Faux. Il manque une hypothèse pour pouvoir appliquer le théorème de positivité de l'intégrale : les bornes doivent être dans l'ordre croissant. Ainsi $I = \int_3^1 2t \, dt = [t^2]_3^1 = -8$.

ATTENTION

Pour appliquer un théorème, on doit impérativement s'assurer que toutes les conditions d'application sont réunies et les mentionner sur la copie. Lors de l'apprentissage du cours, on mettra bien en évidence ces conditions en liaison avec la démonstration du théorème.

- 2 Faux. La réciproque du théorème de positivité est fautive. Soit $I = \int_{-1}^2 t \, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2}$. On remarque que l'intégrale I est positive alors que la fonction intégrée est négative entre -1 et 0 .
- 3 Faux. Si on intègre une fonction continue et impaire sur un segment dont les deux bornes sont opposées, alors l'intégrale est nulle alors que la fonction n'est pas nulle. Ainsi $\int_{-1}^1 t^3 \, dt = 0$ alors que la fonction cube n'est pas nulle sur $[-1 ; 1]$.
- 4 Faux. Si $x = \frac{1}{2}$, alors $x^2 = \frac{1}{4}$. On intègre alors une fonction continue, positive avec les bornes dans l'ordre décroissant. L'intégrale sera donc négative.

4 V/F Fonction définie par une intégrale

Enoncé
p. 199

- 1 Faux. D'après le cours, comme la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , elle admet des primitives sur \mathbb{R} et la fonction F est la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Par suite, la fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et $F' = f$. On a donc, pour tout réel x , $F'(x) = e^{-x^2}$.
- 2 Faux. Si x est négatif, on intègre une fonction continue et positive avec les bornes dans l'ordre décroissant donc on obtient un résultat négatif.
- 3 Vrai. En effet, $\int_0^1 f(t) \, dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive, avec les bornes dans l'ordre croissant donc, d'après le théorème de

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

positivité de l'intégrale, $F(1) \geq 0$.
Par conséquent, $F(x) - F(1) \leq F(x)$.

4 Faux. Considérons la différence $F(x) - F(-x)$.

Pour tout réel x , $F(x) - F(-x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} f(t) dt = \int_{-x}^x f(t) dt$.
La fonction f est paire et strictement positive sur l'intervalle d'intégration donc l'intégrale n'est pas nulle et par suite, $F(x)$ et $F(-x)$ ne sont pas égaux.

5 **V/F** Suite d'intégrales

Enoncé
p. 199

1 Vrai. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{e^t}{e^t + 1}$. La fonction f est continue et positive sur $[\ln n ; \ln(n+1)]$. On intègre avec les bornes dans l'ordre croissant donc, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, I_n est positive.

2 Faux. La fonction f est continue sur l'intervalle $[\ln n ; \ln(n+1)]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle. Elle est de la forme $\frac{u'}{u}$ donc elle admet pour primitive la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(t) = \ln(e^t + 1)$. On en déduit que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$I_n = \ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln \frac{n+2}{n+1}.$$

3 Vrai. Pour étudier le sens de variation de la suite (I_n) , on cherche le signe de $I_{n+1} - I_n$.

Pour tout entier naturel n non nul,

$$I_{n+1} - I_n = \ln \frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2}.$$

Or, $(n+3)(n+1) = n^2 + 4n + 3$, donc : $(n+3)(n+1) < (n+2)^2$.

Par suite,

$$\frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2} < 1 \quad \text{et} \quad \ln \frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2} < 0.$$

On en déduit que $I_{n+1} - I_n$ est négatif et la suite (I_n) est décroissante.

4 Faux. On transforme la somme $I_1 + I_2 + \dots + I_n$ en appliquant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + \dots + I_n &= \int_0^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t + 1} dt \\ &= [\ln(e^t + 1)]_0^{\ln(n+1)} \\ &= \ln(n+2) - \ln 2 \\ &= \ln \frac{n+2}{2}. \end{aligned}$$

6 Pratique du calcul intégral

Enoncé
p. 199

Lycée Blaise Pascal, Brie-Comte-Robert

La fonction cosinus est continue sur $[0 ; \pi]$ donc elle admet des primitives sur $[0 ; \pi]$ et l'intégrale I_1 existe.

De même, la fonction sinus est continue sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle et l'intégrale I_2 existe.

Calcul de I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} \cos t \, dt \\ &= [\sin t]_0^{\pi} \\ &= \sin \pi - \sin 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calcul de I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(t + \frac{\pi}{4}\right) \, dt \\ &= \left[-\cos \left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

7 Intégrales de fonctions polynômes

Enoncé
p. 199

Lycée Marie Curie, Sceaux

Calcul de I_3 :

La fonction $t \mapsto t^3 + 2t^2 + 4t + 1$ est continue sur $[0 ; 1]$ donc elle admet des primitives sur $[0 ; 1]$ et l'intégrale I_3 existe.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 4t + 1) \, dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 + t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 2 + 1 \\ &= \frac{47}{12}. \end{aligned}$$

Calcul de I_4 :

La fonction $t \mapsto 12t^{17} + 2t^3 - t$ est continue sur $[-3 ; 3]$. On remarque de plus que cette fonction est impaire. Or, d'après le cours, si la fonction f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) \, dt = 0$. On en déduit :

$$I_4 = \int_{-3}^3 (12t^{17} + 2t^3 - t) \, dt = 0.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

ATTENTION

On pensera bien à vérifier que les trois conditions d'application du théorème sont remplies : la fonction doit être continue, les bornes de l'intervalle d'intégration doivent être deux nombres opposés et la fonction doit être impaire.

8 Un calcul classique

Enoncé
p. 200

Lycée Victor Hugo, Besançon

1 La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$ est la composée des fonctions $x \mapsto x^2 + 2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

Or, la fonction $x \mapsto x^2 + 2$ est dérivable sur \mathbb{R} , à valeurs strictement positives et la fonction racine est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc, d'après le théorème de dérivabilité des fonctions composées, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Les dérivées respectives des deux fonctions sont : $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

La dérivée cherchée est donc : $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

2 Ainsi la dérivée de :

$$x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 2}$$

est :

$$x \mapsto 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

On pose alors $u(x) = x + \sqrt{x^2 + 2}$.

D'après les questions précédentes, la fonction u est dérivable sur $[0 ; 1]$. De plus, la fonction u est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; 1]$. La fonction f étant de la forme $\ln u$, il en résulte qu'elle est dérivable sur $[0 ; 1]$.

Donc pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 2} + x}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x + \sqrt{x^2 + 2}}$$

Soit :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

3 La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et on a montré que f en est une primitive sur $[0 ; 1]$, donc I existe et :

$$I = \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}).$$

9 Recherches de primitives

Enoncé
p. 200

Lycée Lavoisier, Paris

Pour que la fonction F soit une primitive de f , il faut et il suffit que la fonction F soit dérivable sur $] -2 ; +\infty[$ et que $F' = f$.

On détermine donc $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (3ax^2 + 2bx + c) \sqrt{x+2} + \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{(3ax^2 + 2bx + c)(2x+4) + ax^3 + bx^2 + cx + d}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{(6a+a)x^3 + (12a+4b+b)x^2 + (8b+2c+c)x + 4c+d}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{7ax^3 + (12a+5b)x^2 + (8b+3c)x + (4c+d)}{2\sqrt{x+2}}. \end{aligned}$$

Or $F' = f$ si et seulement si, pour tout $x > -2$,

$$\begin{aligned} 7ax^3 + (12a+5b)x^2 + (8b+3c)x + (4c+d) &= 2x^2\sqrt{x+2}\sqrt{x+2} \\ &= 2x^3 + 4x^2. \end{aligned}$$

On en déduit, après identification des coefficients et résolution du système ainsi obtenu : $a = \frac{2}{7}$, $b = \frac{4}{35}$, $c = \frac{-32}{105}$ et $d = \frac{128}{105}$.

$$\text{Ainsi, } F(x) = \left(\frac{2}{7}x^3 + \frac{4}{35}x^2 - \frac{32}{105}x + \frac{128}{105} \right) \sqrt{x+2}.$$

10 Primitives d'une fonction rationnelle

Enoncé
p. 200

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

1 Une fraction rationnelle est définie pour tout réel x qui n'annule pas son dénominateur.

$$\text{Or, } (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2, \text{ donc } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

2 Cherchons a et b tels que :

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2 - 1)^2} &= \frac{b(x-1)^2 + a(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + 2(a-b)x + (a+b)}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit, par identification des coefficients et après résolution du système ainsi obtenu : $a = 1$, $b = 2$.

On a donc, pour tout réel x appartenant à \mathcal{D}_f ,

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

3 Remarquons que la fonction f est continue sur son ensemble de définition donc elle y admet des primitives.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et a pour dérivée sur cet intervalle : $x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2}$.

Une primitive de $\frac{2}{(x+1)^2}$ sur $]1; +\infty[$ est donc $x \mapsto \frac{-2}{x+1}$.

De même, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et a pour dérivée sur cet intervalle : $x \mapsto -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Une primitive de $\frac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1; +\infty[$ est donc $x \mapsto \frac{-1}{x-1}$.

Une primitive de f sur $]1; +\infty[$ est donc :

$$x \mapsto \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{(x+1)} = \frac{1-3x}{x^2-1}.$$

En ajoutant une constante à cette fonction on obtient une autre primitive de f , donc $x \mapsto \frac{1-3x}{(x^2-1)} + 1$ est une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

MÉTHODE

Lorsque l'énoncé demande de déterminer plusieurs primitives d'une même fonction, on commence par justifier l'existence de primitives (toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle), puis on détermine une primitive de la fonction. On peut alors obtenir toute autre primitive de la fonction en ajoutant à la première une constante choisie de manière arbitraire (deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante sur tout intervalle où elle est définie).

11 Suites définies par des intégrales

Enoncé
p. 200

Lycée du Parc, Lyon

- 1 La fonction : $x \mapsto \frac{x^n}{1+2x+4x^2}$ est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ en tant que fonction rationnelle.

Pour tout entier n et tout réel $x \in [0; 1]$,

$$\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \geq 0.$$

Les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant donc, d'après le théorème de positivité de l'intégrale,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} dx \geq 0.$$

En effet sur $[0 ; 1]$, $x^n \geq 0$, et pour le trinôme du dénominateur, le discriminant est négatif, donc le trinôme est toujours du signe de 4, donc strictement positif.

2 Pour tout entier n , par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2} dx. \end{aligned}$$

La fonction : $x \mapsto \frac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2}$ est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$ en tant que fonction rationnelle.

Or, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2} \leq 0$.

Donc, par positivité de l'intégrale on a : $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

3 Pour encadrer $1+2x+4x^2$, il faut connaître le sens de variation de la fonction : $f : x \mapsto 1+2x+4x^2$.

$$f'(x) = 2+8x \text{ donc } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}.$$

Par conséquent, sur l'intervalle $[0 ; 1]$, f est croissante, et :

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

On a donc : $1 \leq 1+2x+4x^2 \leq 7$.

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on en déduit que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\frac{1}{1+2x+4x^2} \leq 1$. Donc, en multipliant par x^n qui est positif, on obtient pour tout entier naturel n ,

$$\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \leq x^n.$$

Les fonctions : $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+2x+4x^2}$ sont continues sur $[0 ; 1]$, les bornes d'intégrations sont dans l'ordre croissant. Il résulte du théorème sur les intégrales et l'ordre que :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx,$$

soit :

$$I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

On a donc obtenu un encadrement de I_n : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème de limite par encadrement (théorème des gendarmes), on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

MÉTHODE

Pour montrer qu'une intégrale est positive, il n'est pas nécessaire de la calculer : le théorème de positivité de l'intégrale permet d'obtenir directement le résultat à partir du signe de la fonction. On pensera à s'assurer que les trois conditions d'application du théorème sont bien réunies : fonction continue sur l'intervalle d'intégration, fonction positive et bornes d'intégration dans l'ordre croissant.

12 Une autre suite d'intégrales

Enoncé
p. 201

Lycée Balzac, Caen

- 1 (a)** La fonction : $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle et l'intégrale I_1 existe. On a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

et, par linéarité de l'intégrale :

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x} dx = 1.$$

Donc :

$$I_0 = (I_0 + I_1) - I_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

- (b)** Pour tout entier naturel n , on a par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx \\ &= \int_0^1 e^{nx} dx \\ &= \left[\frac{1}{n} e^{nx} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^n - 1}{n}. \end{aligned}$$

- 2 (a)** Pour tout entier naturel n et tout réel $x \geq 0$ on a :

$$nx \leq (n+1)x.$$

Or, la fonction exponentielle étant croissante sur \mathbb{R} , on a :
 $e^{nx} \leq e^{(n+1)x}$. D'où :

$$\frac{e^{nx}}{e^x + 1} \leq \frac{e^{(n+1)x}}{e^x + 1} \quad \text{car } e^x + 1 > 0.$$

Les fonctions : $x \mapsto \frac{e^{nx}}{e^x + 1}$ et $x \mapsto \frac{e^{(n+1)x}}{e^x + 1}$ sont continues sur l'intervalle $[0 ; 1]$, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ; donc, d'après le théorème sur les intégrales et l'ordre, on a :

$$I_n \leq I_{n+1}.$$

La suite (I_n) est donc croissante.

(b) Pour tout réel $x \in [0 ; 1]$ on a l'inégalité :

$$1 \leq e^x \leq e$$

donc

$$2 \leq 1 + e^x \leq 1 + e.$$

Tous ces termes sont strictement positifs donc, en passant à l'inverse et en multipliant par $e^{nx} > 0$:

$$\frac{e^{nx}}{1 + e} \leq \frac{e^{nx}}{1 + e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}.$$

En appliquant de nouveau le théorème sur les intégrales et l'ordre (les conditions d'application étant réunies), il vient :

$$\frac{1}{1 + e} \int_0^1 e^{nx} dx \leq I_n \leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{nx} dx ,$$

soit :

$$\frac{e^n - 1}{(1 + e)n} \leq I_n \leq \frac{e^n - 1}{2n}.$$

3 Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{n(1 + e)} = +\infty.$$

D'après le théorème de limite par comparaison, on conclut que :

$$\lim_{+\infty} I_n = +\infty.$$

En repartant de l'encadrement de I_n obtenu à la question précédente et en multipliant par $\frac{1}{e^n}$ qui est strictement positif, on obtient :

$$\frac{1 - e^{-n}}{(1 + e)n} \leq \frac{I_n}{e^n} \leq \frac{1 - e^{-n}}{2n}.$$

Comme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n(1 + e)} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{2n} = 0,$$

par le théorème de limite par encadrement (théorème des gendarmes), on conclut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0.$$

MÉTHODE

Pour comparer deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$, il n'est pas nécessaire de les calculer.

Il suffit de comparer les fonctions f et g sur l'intervalle $[a ; b]$ après s'être assuré que $a \leq b$ et que les fonctions f et g étaient continues sur l'intervalle $[a ; b]$. Le théorème sur les intégrales et l'ordre permettra alors de conclure.

On pensera à mettre en évidence dans la rédaction le fait que les conditions d'application du théorème sont réunies.

13 Valeur approchée d'une intégrale

Enoncé
p. 201

Lycée du Parc, Lyon

1 La fonction f est dérivable sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et,

$$\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right], f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$\text{donc } \forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right], f'(x) \geq 0.$$

Ainsi, f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, donc pour tout $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$,

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right),$$

soit :

$$1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

2 (a) Pour tout $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x) + x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

(b) En utilisant l'égalité démontrée à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + x + \frac{x^2}{1-x} \right) e^{-x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 e^{-x}}{1-x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx. \end{aligned}$$

(c) On a $g'(x) = -e^{-x} + (x+2)e^{-x} = (x+1)e^{-x}$. La fonction g est donc bien une primitive de $x \mapsto (x+1)e^{-x}$.

(d) D'après **1**, pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

$$\text{Donc, pour tout } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], x^2 \leq x^2 f(x) \leq \frac{2x^2}{\sqrt{e}}.$$

En intégrant entre 0 et $\frac{1}{2}$ on a, par conservation de l'ordre par intégration (les conditions d'application du théorème étant réunies),

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \, dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{\sqrt{e}} \, dx,$$

soit :

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$

(e) Nous avons la relation :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)e^{-x} \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx \\ &= [g(x)]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx \\ &= 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx. \end{aligned}$$

D'après **2.d**, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{24} + 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} \leq I \leq \frac{1}{12\sqrt{e}} + 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}.$$

Finalement, on obtient à l'aide de la calculatrice, $I \approx 0,53$ à 10^{-2} près.

14 Intégrale d'une fonction irrationnelle

Enoncé
p. 202

Lycée Saint-Jean-de-Passy, Paris

- 1** Comme la fonction : $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue et positive sur l'intervalle $[0 ; 1]$, on sait d'après le cours que :

$$J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

est l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Or, quelque soit $x \in [0 ; 1]$,

$$x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

On rappelle que $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon unité.

Ainsi, J_0 est égale à l'aire d'un quart de disque de rayon unité dans un repère orthonormé.

Donc :

$$J_0 = \frac{\pi}{4}.$$

- 2** Pour tout entier naturel n on a, par linéarité de l'intégrale :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) \sqrt{1-x^2} dx = - \int_0^1 x^n (1-x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Or, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x^n(1-x)\sqrt{1-x^2} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale (nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que les conditions d'application de ce théorème sont réunies), on a :

$$J_{n+1} - J_n \leq 0.$$

La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

- 3 (a)** Pour tout $x \in [0 ; 1]$, pour tout entier n ,

$$0 \leq x^n \quad \text{et} \quad 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Donc,

$$0 \leq x^n \sqrt{1-x^2} \leq x^n,$$

soit, en appliquant le théorème sur les intégrales et l'ordre sur l'intervalle $[0 ; 1]$ après s'être assuré que les conditions d'application étaient réunies,

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx.$$

- (b)** Comme pour tout entier naturel n ,

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

on obtient un encadrement de J_n :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

D'où, par le théorème de limite par encadrement (théorème des gendarmes),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

15 Primitive d'une fonction irrationnelle

→ **Énoncé**
p. 202

Lycée Carnot, Dijon

1 La fonction $x \mapsto 2x^2 + 1$ est définie, et à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} .

Donc $x \mapsto 2x^2 + 1$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} ;
- La fonction $x \mapsto 4x^2 + 1$ est une fonction polynôme, donc définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Ainsi, f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} . Par conséquent, f est continue sur \mathbb{R} , donc elle admet des primitives sur \mathbb{R} .

2 Soit F une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} . D'après la définition d'une primitive, la fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et $F' = f$.

Tout d'abord, le fait que la fonction F soit définie et dérivable sur \mathbb{R} impose que le polynôme P doit être à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} . On en déduit que, si l'on a $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Alors la fonction F définie par $F(x) = \sqrt{P(x)}$ est dérivable sur \mathbb{R} et a pour dérivée :

$$F'(x) = \frac{P'(x)}{2\sqrt{P(x)}} = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

L'égalité $F' = f$ équivaut pour tout réel x à :

$$\frac{4x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Étudions la limite en $+\infty$ de chacune des expressions :

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a + \frac{b}{2x}}{\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}} = \sqrt{a}.$$

Alors que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = +\infty.$$

On ne peut donc pas avoir $F' = f$.

Donc F ne peut pas être une primitive de f .

- 3** Si g est dérivable sur \mathbb{R} , $x \mapsto g(x)\sqrt{2x^2+1}$ est dérivable sur \mathbb{R} et a pour dérivée :

$$x \mapsto g'(x)\sqrt{2x^2+1} + \frac{2xg(x)}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{g'(x)(2x^2+1) + 2xg(x)}{\sqrt{2x^2+1}}.$$

- 4** Prenons $g(x) = x$ dans l'expression ci-dessus.

On obtient :

$$\frac{g'(x)(2x^2+1) + 2xg(x)}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x^2+1+2x^2}{\sqrt{2x^2+1}} = f(x).$$

La fonction $x \mapsto x\sqrt{2x^2+1}$ est donc une primitive de f sur \mathbb{R} .

16 Avec un algorithme

Enoncé
p. 202

Lycée La Bruyère, Versailles

- 1** (a) Dans l'intervalle $[0 ; 1]$, x^n est un nombre positif ou nul, ainsi bien sûr que e^{x^2} . La fonction à intégrer étant positive ou nul sur $[0 ; 1]$, on a bien $I_n \geq 0$.
- (b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) e^{x^2} dx = \int_0^1 x^n (1-x) e^{x^2} dx$.
Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, $x^n \geq 0$, $e^{x^2} > 0$ et $x-1 \leq 0$, donc la fonction à intégrer est négative ou nulle sur l'intervalle considéré.
Par conséquent, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ pour tout n , et la suite est décroissante.
- (c) La suite I est minorée par 0 d'après le **1.a**, et décroissante. Par conséquent, elle est convergente.
La limite L est positive ou nulle.
- 2** (a) $G'(x) = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} = x e^{x^2} = g(x)$. Donc G est bien une primitive de g .

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad I_1 &= \int_0^1 x e^{x^2} dx \\
 &= \int_0^1 g(x) dx \\
 &= G(1) - G(0) \\
 &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(c) H_n est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
 H'_n(x) &= (n+1)x^n G(x) + x^{n+1} G'(x) \\
 &= (n+1)x^n \times \frac{1}{2}e^{x^2} + x^{n+1} \times x e^{x^2} \\
 &= \frac{n+1}{2}x^n e^{x^2} + x^{n+2} e^{x^2}.
 \end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de l'égalité ci-dessus entre 0 et 1, et en utilisant les propriétés de linéarité des intégrales, il vient :

$$H_n(1) - H_n(0) = \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{x^2} dx + \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} dx,$$

ou encore :

$$G(1) = \frac{n+1}{2} I_n + I_{n+2}.$$

On a donc bien :

$$I_{n+2} + \frac{n+1}{2} I_n = \frac{1}{2}e.$$

(d) D'après ce qui précède, $I_3 + I_1 = \frac{1}{2}e$. Donc, $I_3 = \frac{1}{2}$.

Puis, $I_5 + 2I_3 = \frac{1}{2}e$ donc $I_5 = \frac{1}{2}e - 1$.

3 Voici l'algorithme complété :

```

Variables
  n est un entier naturel impair
  I est un réel
Initialisation
  Affecter à n la valeur 1
  Affecter à I la valeur  $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$ 
Traitement
  Tant que n < 23
    Affecter à I la valeur  $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I$ 
    Affecter à n la valeur n + 2
  Fin de Tant que
Sortie
  Afficher I
    
```

4 $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n \right).$$

Intéressons-nous à la limite de $\frac{n+1}{2}I_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Raisonnons par l'absurde : si I_n tend vers une valeur non nulle, $\frac{n+1}{2}I_n$ tend vers $+\infty$ ($I_n \geq 0$ pour tout n).

Ceci donnerait $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+2} = -\infty$, ce qui est impossible puisque $I_n \geq 0$ pour tout n .

Il faut donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, ce qui donnera une forme indéterminée pour la limite de $\frac{n+1}{2}I_n$.

Donc $L = 0$.

Remarque : si vous tentez de programmer l'algorithme de la question 3 sur votre calculatrice, vous serez surpris de voir une contradiction avec la réponse de la question 4.

Ceci montre la différence entre un algorithme, qui peut très bien être correct, mais conduire à des résultats faux lors de sa programmation, en raison des limites des calculatrices.

17 Primitives « à vue »

Enoncé
p. 203

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Fonction u .

La fonction u est continue sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* comme quotient de deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

Soit donc I l'un des deux intervalles $] -\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$, la fonction u possède des primitives sur I .

En examinant l'écriture de $u(x)$, on est conduit à penser à la formule de la dérivée d'un quotient du type $\frac{f}{g}$ soit $\frac{f'g - fg'}{g^2}$. Définissons sur I les fonctions f et g par :

$$f(x) = \sin x \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

Le quotient est défini et dérivable sur I avec :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g} \right)'(x) &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \\ &= -u(x). \end{aligned}$$

Alors la fonction $U : x \mapsto -\frac{\sin x}{x}$ est une primitive de u sur I .

Fonction v .

La fonction v est continue sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions continues sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} , elle possède donc des primitives sur \mathbb{R} tout entier.

Exploitions la même idée que pour la fonction u . La difficulté provient du fait que le numérateur de $v(x)$ a été effectué et simplifié. Il faut donc le ramener à la forme $f'g - fg'$. L'observation du dénominateur conduit à poser $g(x) = 1 + x^2$. On a alors $g'(x) = 2x$. La numérateur de $v(x)$ peut alors s'écrire $(1 + x^2) - x \times 2x$, ce qui fait que :

$$\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x^2) - x \times 2x}{(1 + x^2)^2}.$$

On pose donc $f(x) = x$, $g(x) = 1 + x^2$ et :

$$v(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \left(\frac{f}{g}\right)'(x).$$

La fonction :

$$V : x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$$

est donc une primitive de v sur \mathbb{R} .

 **MÉTHODE**

Il faut toujours garder à l'esprit que déterminer une primitive d'une fonction f , c'est trouver une fonction F dont la dérivée est f . Lorsque les formules des primitives usuelles ou des primitives de fonctions composées ne semblent pas s'appliquer, on peut chercher à se ramener aux formules de dérivation d'un produit ou d'un quotient. On veillera alors dans la rédaction à faire apparaître clairement les différentes étapes du raisonnement.

18 Dérivées et primitives

 **Enoncé**
p. 203

Lycée Janson de Sailly, Paris

- Soit F_1 la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

D'après les théorèmes du cours, F_1 est la primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

qui s'annule en 1.

Or, par la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \int_x^1 \frac{1}{t} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{t} dt = F_1(2x) - F_1(x).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de dérivabilité des fonctions composées,

$$F'(x) = 2F_1'(2x) - F_1'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Remarque : puisque \mathbb{R}_+^* est un intervalle, on peut en déduire que la fonction F est constante. Alors sa valeur se calcule par exemple en 1 et on a $F(1) = \ln 2$.

- De la même façon, définissons :

$$G_1(x) = \int_1^x \ln(t) dt.$$

G_1 est dérivable et a pour dérivée \ln et :

$$G(x) = G_1(x^2) - G_1(\sqrt{x}).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2xG_1'(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}G_1'(\sqrt{x}) \\ &= 2x \ln(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

soit :

$$G'(x) = 4 \left(x - \frac{1}{16\sqrt{x}} \right) \ln x.$$

MÉTHODE

Les fonctions définies par une intégrales sont très délicates à étudier. On se ramènera à chaque fois au théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

puis on utilisera la définition de la primitive d'une fonction.

On se souviendra que pour dériver une fonction du type : $x \mapsto G(u(x))$ il est indispensable d'utiliser le théorème de dérivabilité des fonctions composées.

Nombres complexes

Plan du chapitre

1. Nombres complexes et coordonnées cartésiennes
2. Nombres complexes et coordonnées polaires
3. Nombres complexes et polynômes
4. Nombres complexes et calcul vectoriel

1 Nombres complexes et coordonnées cartésiennes

Exercice type 1

Lycée Fénelon, Paris

Soient z_1 et z_2 les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{i}{4 - 3i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + i}{1 - i}.$$

- 1 Mettre sous la forme $a + ib$ les nombres $z_1, z_2, \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, z_1 z_2$.
- 2 Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.

1.1 Ensemble \mathbb{C}

Définition 1

On admet l'existence de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Cet ensemble de nombres contient l'ensemble des réels \mathbb{R} .

On peut prolonger à cet ensemble les opérations d'addition et de multiplication définies dans \mathbb{R} .

Il contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec a et b dans \mathbb{R} .

1.2 Le plan complexe

Un nombre complexe est représenté par un point du plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, qui prend alors le nom de *plan d'Argand-Cauchy* ou *plan complexe*.

Au point de coordonnées $(1; 0)$ on fait correspondre le nombre complexe 1.

Au point de coordonnées $(0 ; 1)$, on fait correspondre le nombre complexe i .

Au point $M(x ; y)$, on fait correspondre le nombre complexe noté $x + iy$.

Définition 2

On appelle *affiche* du point M et du vecteur \overrightarrow{OM} le nombre complexe z défini ci-dessus. Inversement, M est appelé l'*image* du nombre complexe z . On écrit parfois $M(z)$ pour signifier cette correspondance entre le point et son affiche.

1.3 Forme algébrique

Définition 3

L'écriture $z = a + ib$, avec a et b dans \mathbb{R} , s'appelle la *forme algébrique* du nombre complexe z .

Le réel a s'appelle la *partie réelle* de z et se note $\operatorname{Re}(z)$.

Le réel b s'appelle la *partie imaginaire* de z et se note $\operatorname{Im}(z)$.

Théorème 1

Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. On a :

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2).$$

1.4 Conjugué

Définition 4

Soit un nombre complexe z , affiche d'un point M . On appelle *conjugué* du nombre complexe $z = a + ib$ (a et b réels) et on note \bar{z} , le nombre complexe $a - ib$.

À RETENIR

L'image \bar{M} de \bar{z} est donc le symétrique de M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

Théorème 2

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\begin{aligned} \overline{zz'} &= \bar{z} \cdot \bar{z}' \\ \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0) \end{aligned}$$

➔ À RETENIR

On pourra retenir facilement les propriétés ci-dessus sous la forme :

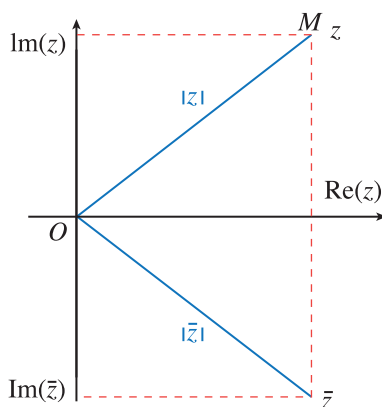
- le conjugué d'une somme est la somme des conjugués
- le conjugué d'un produit est le produit des conjugués
- le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

1.5 Module

Définition 5

On appelle *module* du nombre complexe $z = a + ib$ (a et b réels), et on note $|z|$, le *nombre réel* :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$



Remarque : le module de z s'interprète comme la distance OM .

Théorème 3

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z| = |\bar{z}| \quad \text{et} \quad |zz'| = |z| \times |z'|.$$

1.6 Inégalités

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|,$$

$$|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|,$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1.7 Opérations

- $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + (b + b')i$.
- $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$.
- Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

↳ Solution de l'exercice type 1

Lycée Fénelon, Paris

$$1 \quad z_1 = \frac{i(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{-3 + 4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{4 - 3i}{i} = \frac{-i(4 - 3i)}{-i^2} = -3 - 4i.$$

On a :

$$z_2 = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1}{2}(1 + i)^2.$$

Donc :

$$z_2 = i \quad \text{et} \quad \frac{1}{z_2} = -i.$$

D'où, finalement :

$$z_1 z_2 = -\frac{4}{25} - \frac{3i}{25}.$$

- 2 En appliquant les formules :

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad |z_2| = \sqrt{(1)^2} = 1.$$

2 Nombres complexes et coordonnées polaires

Exercice type 2

Lycée Brantly, Nogent

Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe :

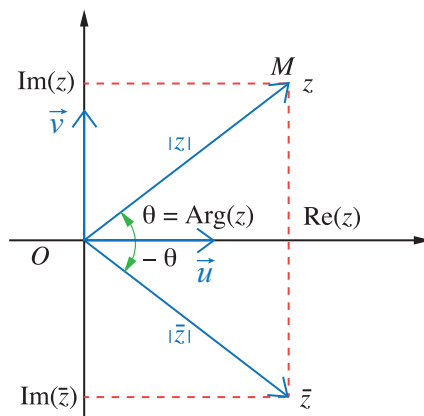
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3}\right)^7.$$

2.1 Argument

Définition 6

Soit z un nombre complexe non nul et M le point du plan d'affixe z . On appelle *argument* de z , et on note $\arg(z)$, l'angle de vecteurs

$$\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}).$$



Remarques

- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.
- Toute mesure de l'angle $\arg z$ s'appelle *un* argument de z .
- L'argument d'un nombre complexe non nul peut être représenté de manière unique par un nombre réel dans $]-\pi ; \pi]$. On l'appelle parfois *argument principal* de z .
- On dit que le couple $(|z|, \arg(z))$ est un couple de coordonnées polaires du point d'affixe M .

Théorème 4

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi).$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2.2 Notation exponentielle

Définition 7

Soit θ un réel.

On convient de noter $e^{i\theta}$ le nombre complexe :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Propriétés 1

- Soient θ et θ' deux nombres réels. Alors :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

- Formule de Moivre :

Soient θ un nombre réel et n un entier. Alors :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Ou encore :

$$(\sin \theta + i \cos \theta)^n = \sin(n\theta) + i \cos(n\theta).$$

- Formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Théorème 5

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} z &= |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= |z| e^{i\theta} \end{aligned}$$

où θ est un argument de z .

À RETENIR

Un nombre complexe non nul admet trois formes différentes :

- la forme algébrique $x + iy$ liée aux coordonnées cartésiennes.
- la forme trigonométrique $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ liée aux coordonnées polaires.
- la forme exponentielle $re^{i\theta}$.

➔ Solution de l'exercice type 2

Lycée Branly, Nogent

Immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3} &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3} \right)^7 &= \frac{128}{2 \cdot 187} e^{\frac{7i\pi}{6}} \\ &= \frac{128}{2 \cdot 187} e^{-\frac{5i\pi}{6}} \\ &= \frac{128}{2 \cdot 187} \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right]. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 Nombres complexes et polynômes

Exercice type 3

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Soit $P(z) = 4z^3 + (4 - 8i)z^2 + (10 - 8i)z - 20i$.

- 1 Calculer $P(2i)$.
- 2 Déterminer un trinôme du second degré $Q(z)$ tel que :

$$P(z) = (z - 2i) Q(z).$$

En déduire l'ensemble des racines de P .

- 3 Donner la factorisation complète de $P(z)$ (i.e. en facteurs de degré 1).

3.1 L'équation du second degré dans \mathbb{C}

Pour résoudre l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0$$

(où a, b et c désignent trois réels, a étant non nul) dans \mathbb{C} , on calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine réelle double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

➔ Solution de l'exercice type 3

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

- 1** Calculons tout d'abord les puissances itérées de $2i$:

$$(2i)^1 = 2i, \quad (2i)^2 = -4, \quad \text{et} \quad (2i)^3 = -8i.$$

Calculons ensuite $P(2i)$:

$$\begin{aligned} P(2i) &= 4 \times (-8i) + (4 - 8i) \times (-4) + (10 - 8i) \times (2i) - 20i \\ &= -32i - 16 + 32i + 20i + 16 - 20i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le nombre $2i$ est donc racine de P .

- 2** Cherchons à factoriser P sous la forme :

$$P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c).$$

On développe le membre de droite et on identifie terme à terme :

$$4z^3 + (4 - 8i)z^2 + (10 - 8i)z - 20i = az^3 + (b - 2ai)z^2 + (c - 2bi)z - 2ic.$$

On en déduit que les valeurs suivantes conviennent :

$$a = 4 \quad b = 4 \quad c = 10.$$

$$\text{Ainsi :} \quad P(z) = (z - 2i)(4z^2 + 4z + 10).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les racines de ce trinôme du second degré.

Calculons son discriminant et ses racines z_1 et z_2 :

$$\Delta = -144$$

donc :

$$z_1 = \frac{-1 - 3i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + 3i}{2}.$$

← Solution de l'exercice type 3 (suite)

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

3 On en déduit la factorisation :

$$\begin{aligned} P(z) &= 4(z - 2i) \left(z - \frac{-1 - 3i}{2} \right) \left(z - \frac{-1 + 3i}{2} \right) \\ &= 4(z - 2i) \left(z + \frac{1 + 3i}{2} \right) \left(z + \frac{1 - 3i}{2} \right). \end{aligned}$$

4 Nombres complexes et calcul vectoriel

Exercice type 4

Lycée Michelet, Vanves

Soit les points du plan :

$$A(2; 2\sqrt{3}), \quad B(2; -2\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad C(-1; \sqrt{3}).$$

Montrer que les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires.

Définition 8

À tout vecteur \vec{w} de coordonnées $(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + ib$.

Ce nombre complexe s'appelle l'*affiche* du vecteur \vec{w} .

Propriétés 2

1 Soit A et B deux points du plan d'affixe respective z_A et z_B . Alors le vecteur \vec{AB} a pour affixe $z_B - z_A$. On en déduit : $AB = |z_B - z_A|$.

2 Soit A, B, C, D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D telles que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Alors :

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \quad (2\pi).$$

← À RETENIR

Dans tous les exercices où l'on demande de comparer des distances ou des angles, penser à utiliser les modules ou les arguments.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 4

Lycée Michelet, Vanves

Les coordonnées des trois points définissent donc leurs affixes :

- A est d'affixe $z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$,
- B est d'affixe $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ et
- C est d'affixe $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.

L'affixe du vecteur \vec{CA} est donc :

$$z_A - z_C = 3 + i\sqrt{3},$$

et celle du vecteur \vec{CB} est donc :

$$z_B - z_C = 3 - 3i\sqrt{3}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= \frac{3 - 3i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{12} \left((1 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3}) \right) \\ &= \frac{1}{4} (-4i\sqrt{3}) \\ &= -i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Or,

$$\arg(-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

Donc :

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

ou encore

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi).$$

Les vecteurs \vec{CA} et \vec{CB} sont orthogonaux, donc les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires.

1 V/F **Nombres complexes**

10 min Corrigé p. 241

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors $z^4 \in \mathbb{R}$.
- 2** Si $z + \bar{z} = 0$ alors $z = 0$.
- 3** Si $z + \frac{1}{z} = 0$ alors $z = i$ ou $z = -i$.
- 4** Si $|z| = 1$ et $|z + z'| = 1$ alors $z' = 0$.

2 V/F **Puissances de nombres complexes**

10 min Corrigé p. 241

On considère les deux nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i$. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Un argument de a est $\arg a = \frac{\pi}{6}$.
- 2** La forme trigonométrique de b est $b = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
- 3** Il existe un entier naturel non nul n tel que a^n soit réel.
- 4** Il existe un entier naturel non nul n tel que $b^n = 1$.

3 V/F **Interprétation géométrique**

10 min Corrigé p. 241

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** L'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que $z + \bar{z} = |z|$ est un cercle.
- 2** Soit z un nombre complexe différent de $1 - i$. On considère le nombre $Z = \frac{z + 1 - 2i}{z - 1 + i}$. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est un cercle.
- 3** Le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les points d'affixes $1, j$ et j^2 où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est le point O .
- 4** Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires purs si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (π).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 V/F **Interprétation géométrique**

10 min Corrigé p. 242

On considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

On désigne ses racines par z_1 et z_2 , la partie imaginaire de z_1 étant strictement positive. Soient M_1 et M_2 les images respectives des deux racines dans le plan complexe. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Les points M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5.
- 2** Le triangle OM_1M_2 est équilatéral.
- 3** L'axe (Ox) est la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.
- 4** Le milieu I du segment $[M_1M_2]$ a pour affixe $2i$.

5 **Forme algébrique**

10 min Corrigé p. 242

Lycée Thiers, Marseille

Mettre sous la forme « $a + ib$ » les nombres complexes suivants :

$$\frac{1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i} ; \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^2 \text{ et } i + \frac{1}{i}.$$

6 **Conjugué et forme algébrique**

10 min Corrigé p. 243

Lycée Masséna, Nice

Mettre sous la forme « $a + ib$ » le conjugué du nombre complexe suivant :

$$\frac{(3 - 2i)(5 + i)}{3i(7 + 2i)}.$$

7 **Vrai ou Faux**

15 min Corrigé p. 243

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

Préciser pour chacune des égalités suivantes si elle est vraie ou fausse.

- 1** $\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} = e^{-\frac{5i\pi}{12}}$
- 2** $\frac{1 + i}{1 - i} = i$
- 3** $\frac{\sqrt{2}(1 - i)}{\sqrt{3} - i} = e^{-\frac{i\pi}{12}}$
- 4** $\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i\sqrt{3}} = i$
- 5** $\frac{-1 + i}{1 + i\sqrt{3}} = e^{-\frac{5i\pi}{12}}$

8 Opérations sur les conjugués



10 min

Corrigé
p. 244

Lycée Buffon, Paris

Montrer que, pour tout z complexe non nul, on a :

$$\overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} - \frac{\overline{1+z}}{\bar{z}} = \bar{z} - 1.$$

9 Caractérisation des nombres réels



10 min

Corrigé
p. 245

Lycée Chaptal, Paris

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 avec $1 + z_1 z_2 \neq 0$.

Démontrer que $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel.

10 Recherche d'un ensemble de points



15 min

Corrigé
p. 245

Lycée Marie Curie, Sceaux

Donner l'ensemble des points M du plan dont les affixes z vérifient :

- 1 z^2 a pour partie réelle 0.
- 2 z^2 a pour partie imaginaire 0.

11 Forme exponentielle



15 min

Corrigé
p. 246

Lycée En Forêt, Montargis

- 1 Donner la forme algébrique de $(1 + i)^{11}$.
- 2 Donner la forme algébrique de $(-1 - i)^{15}$. (On pourra pour cela passer par la forme exponentielle)

12 Avec un algorithme



30 min

Corrigé
p. 246

Lycée Charlemagne, Paris

Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

- 1 Écrire Z sous forme algébrique.
- 2 Donner le module et un argument de z_1 , z_2 et Z .
- 3 En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4 Le plan est muni d'un repère orthonormé. On prendra 2 cm comme unité graphique. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et Z .
Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de constructions apparents).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 On considère l'algorithme suivant :

```
Entrées
  Saisir n, x0, y0.
Initialisation
  x prend la valeur x0
  y prend la valeur y0
Traitement
  Pour k allant de 2 à n
    x prend la valeur x × x0 - y × y0
    y prend la valeur x × y0 + x0 × y
  Fin de Pour
Sortie
  Afficher x + iy
```

- (a) Effectuer à la main l'algorithme pour $n = 3$, $x_0 = 2$ et $y_0 = 1$.
(b) Que permet de calculer cet algorithme ?

6 Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007} .

13 Nombres complexes et trigonométrie ★ 15 min Corrigé p. 248

Lycée du Parc, Lyon

Posons : $u = -\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

- Calculer u^2 sous forme algébrique.
- Mettre u^2 sous forme trigonométrique, en déduire u sous forme trigonométrique.
- Cela permet-il d'obtenir des égalités trigonométriques remarquables ?

14 Équation du second degré ★ 20 min Corrigé p. 249

Lycée Lavoisier, Paris

Soit (E) l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$.

- Montrer que (E) admet 2 solutions complexes conjuguées u et \bar{u} , u étant celle de partie imaginaire positive.
- Calculer le module et un argument de u . En déduire module et argument de \bar{u} .
- Donner $u - 4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- Calculer le module de $\frac{u}{u-4}$. En déduire module et argument de $\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$.
- Proposer une construction géométrique de u et \bar{u} .

15 Résolution d'équations polynomiales ★ 15 min 


Lycée Carnot, Dijon

On considère l'équation $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0$.

- 1 Montrer que 8 est solution de cette équation.
- 2 Déterminer a et b deux réels tel que :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z - 8)(Z^2 + aZ + b).$$

- 3 Résoudre l'équation proposée.

16 Racines d'un polynôme ★ 25 min 

Lycée Masséna, Nice

Soit $P(z) = z^4 - 14z^3 + 74z^2 - 126z + 585$.

- 1 (a) Calculer $P(3i)$.
(b) Montrer que si z est racine de P , alors \bar{z} est aussi racine de P .
Qu'en déduit-on ?
- 2 Déterminer un trinôme $Q(z)$ à coefficients réels tel que :
 $P(z) = (z^2 + 9)Q(z)$. En déduire toutes les racines de P .

17 Équation du troisième degré ★ 25 min 

Lycée Jules Ferry, Caen

On se propose de résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0 \quad (\mathcal{E})$$

- 1 Montrer qu'il existe une solution z_0 de (\mathcal{E}) qui est imaginaire pure.
- 2 Écrire le membre de gauche de l'équation sous la forme $(z - z_0) \times P(z)$ où $P(z)$ est un trinôme à coefficients réels. En déduire l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) .
- 3 Mettre ces solutions sous forme trigonométrique et les placer sur un graphique.

18 Puissance d'un nombre complexe ★ 30 min 

Lycée Marie Curie, Sceaux

- 1 Au point M d'affixe z , on fait correspondre le point M' d'affixe $f(z)$ avec :

$$f(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}.$$

Sur quelle partie du plan f est-elle définie ?

- 2 Donner une forme trigonométrique de $f(i)$, en déduire que $(f(i))^4$ est réel.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

19 Une application du plan complexe



40 min

Corrigé
p. 253

Lycée Carnot, Dijon

Soient A et B deux points du plan d'affixe respective i et $-2i$. Notons f l'application qui à M d'affixe z distincte de i associe un point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1 Montrer que :

$$(z' + 2i)(z - i) = 1.$$

2 Notons r le module et θ un argument de $z - i$. De même, notons r' et θ' le module et un argument de $z' + 2i$.

Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ .

3 Soit \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 1, montrer que si M appartient à \mathcal{C} , M' appartient à un cercle de centre B noté \mathcal{C}' que l'on précisera.

4 Soit T d'affixe :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i.$$

Montrer que T appartient à \mathcal{C} .

5 Proposer une construction géométrique de T' .

20 Application du plan complexe (2)



35 min

Corrigé
p. 255

Lycée Thiers, Marseille

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z distincte de $2 - i$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i}.$$

1 Interpréter géométriquement le module de z' .

2 En déduire l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

3 Interpréter géométriquement l'argument de z' .

4 En déduire l'ensemble des points M tel que z' soit imaginaire pur.

5 Retrouver le résultat de la question **2** par le calcul.

6 Retrouver le résultat de la question **4** par le calcul.

21 Recherche d'un ensemble de points



15 min

Corrigé
p. 257

Lycée Claude Bernard, Paris

Quel est l'ensemble des points M du plan dont les affixes z vérifient :

1 $z + \bar{z} = |z|$.

2 $z - \bar{z} = i|z|$.

22 Rôle d'un algorithme



15 min

Corrigé
p. 257

Lycée Hoche, Versailles

On donne l'algorithme suivant :

Variables
 Z_1 et Z_2 sont des nombres complexes
 e , f et u sont des nombres réels
 Entrée
 Lire Z_1
 Traitement
 Z_2 prend la valeur $\overline{Z_1}$
 e prend la valeur $(Z_1 + Z_2)/2$
 f prend la valeur $(Z_1 - Z_2)/(2i)$
 u prend la valeur $\sqrt{e^2 + f^2}$
 Sortie
 Afficher u

1 Qu'affiche cet algorithme quand $Z_1 = 4 - 3i$?

2 Plus généralement, quel est le rôle de cet algorithme ?

23 Polynôme de degré quatre



30 min

Corrigé
p. 257

Lycée du Parc, Lyon

Soit $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

On va chercher à calculer les racines de P .

1 Calculer $P(1 + i)$.

2 Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$.

3 Montrer que si z_0 est racine de P alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de P .

4 Montrer que si z_0 est racine de P alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi racine de P .

5 Déterminer toutes les racines de P , sachant que P a au plus quatre racines.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

24 Une équation paramétrée



25 min

Corrigé
p. 259

Lycée Marie Curie, Sceaux

1 Soit $\alpha \in]-\pi ; \pi]$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - 2 \sin(2\alpha)z + 2(1 + \cos(2\alpha)) = 0.$$

2 Déterminer module et argument de ces solutions.

3 Pour quelles valeurs de α les deux solutions sont-elles égales ?

25 Sommations classiques



10 min

Corrigé
p. 259

Lycée Blaise Pascal, Paris

Étant donné un entier $n \geq 1$ et x un réel, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^n \cos kx = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx.$$

1 **V/F** Nombres complexes

Enoncé
p. 233

- 1 Vrai. On commence par calculer $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2}i$ puis $z^4 = -\frac{1}{4}$.
- 2 Faux. Il suffit de choisir z imaginaire pur : si $z = 2i$ alors $z + \bar{z} = 0$.
- 3 Vrai. Si $z + \frac{1}{z} = 0$ alors $\frac{z^2 + 1}{z} = 0$ ce qui équivaut, pour z non nul, à $z^2 = -1$. Cette équation a deux solutions i et $-i$.
- 4 Faux. Si $z = 1$ et $z' = -2$, alors $z + z' = -1$ et on a $|z| = 1$ et $|z + z'| = 1$.

2 **V/F** Puissances de nombres complexes

Enoncé
p. 233

- 1 Faux. Le nombre a a pour argument $\frac{\pi}{3}$.
- 2 Vrai. Le module de b est $\sqrt{2}$ et il admet $-\frac{\pi}{4}$ comme argument donc son écriture exponentielle est bien $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
- 3 Vrai. On a $a^3 = -8$.
- 4 Faux. Supposons qu'il existe un entier n non nul tel que $b^n = 1$, alors on aurait $|b^n| = |b|^n = 1$ d'où on déduirait $|b| = 1$ ce qui est contradiction avec le résultat trouvé à la question 2.

3 **V/F** Interprétation géométrique

Enoncé
p. 233

- 1 Faux. L'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que $z + \bar{z} = |z|$ est composé de deux demi-droites passant par l'origine du repère.
Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels. L'égalité $z + \bar{z} = |z|$ s'écrit alors $2x = \sqrt{x^2 + y^2}$ ce qui équivaut à $y^2 = 3x^2$ et $x \geq 0$. L'ensemble cherché est donc la réunion des demi-droites d'équation $y = x\sqrt{3}$ et $y = -x\sqrt{3}$ avec $x > 0$.
- 2 Faux. Si z est un nombre complexe différent de $1 - i$ et $Z = \frac{z + 1 - 2i}{z - 1 + i}$ alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite. On désigne par M le point d'affixe z , par A le point d'affixe $a = -1 + 2i$ et par B le point d'affixe $b = 1 - i$. L'égalité $|Z| = 1$ équivaut à $|z + 1 - 2i| = |z - 1 + i|$ soit $MA = MB$. L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 Vrai. On nomme A , B et C les points d'affixes respectives 1 , j et j^2 . Ces trois points sont sur le cercle de centre O et de rayon 1 car :

$$|1| = |j| = |j^2| = 1.$$

D'autre part,

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg(j) = \frac{2\pi}{3}$$

et

$$(\vec{OB}, \vec{OC}) = \arg(j^2) - \arg(j) = \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

On en déduit donc que les angles inscrits \widehat{ACB} et \widehat{BAC} ont pour mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

Le triangle ABC est donc un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O . Cela signifie que O est son centre de gravité.

- 4 Faux. Le point O d'affixe 0 appartient à l'axe des imaginaires purs et cependant, il n'a pas d'argument.

ATTENTION

Avant de parler de l'argument d'un nombre complexe, on commencera toujours par s'assurer que ce nombre est non nul.

4 **V/F** **Interprétation géométrique**

Enoncé
p. 234

- 1 Faux. Les deux racines de l'équation proposée sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$. Leur module est donc égal à $\sqrt{5}$. Par suite, les points M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$.
- 2 Faux. Le triangle OM_1M_2 est isocèle non équilatéral car $OM_1 = OM_2 = \sqrt{5}$ et $M_1M_2 = 4$.
- 3 Vrai. Les racines de l'équation sont deux nombres complexes conjugués donc leurs images sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi l'axe (Ox) est la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.
- 4 Faux. Le milieu I du segment $[M_1M_2]$ a pour affixe 1 .

Remarque : une représentation graphique de la situation apporte une aide précieuse à la résolution de cet exercice.

5 **Forme algébrique**

Enoncé
p. 234

Lycée Thiers, Marseille

Multiplions en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i} = \frac{(1 + i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i)}{3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2i + i}{3} = i.$$

De même, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \frac{(1-i)^4}{2^2} = \frac{(-2i)^2}{4} = -1$,
ainsi que : $i + \frac{1}{i} = \frac{i^2 + 1}{i} = \frac{-1 + 1}{i} = 0$.

6 Conjugué et forme algébrique

Enoncé
p. 234

Lycée Masséna, Nice

D'après les propriétés du conjugué d'une somme, d'un produit et d'un quotient, le conjugué de ce nombre complexe vaut :

$$\frac{(3+2i)(5-i)}{-3i(7-2i)}$$

Développons le numérateur et le dénominateur, nous trouvons :

$$\frac{-(3+2i)(5-i)}{3i(7-2i)} = -\frac{17+7i}{6+21i}$$

Multiplions en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{-(3+2i)(5-i)}{3i(7-2i)} = -\frac{(17+7i)(6-21i)}{477} = -\frac{83}{159} + i\frac{35}{53}$$

7 Vrai ou Faux

Enoncé
p. 234

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

- 1 Faux. Comparons les modules de $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}$ et de $e^{-\frac{5i\pi}{12}}$:

$$\left|e^{-\frac{5i\pi}{12}}\right| = 1 \quad ; \quad \left|\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right| = 2 \quad ; \quad |1+i| = \sqrt{2}$$

Comme le module d'un quotient est égal au quotient des modules,

$$\left|\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right| = \sqrt{2}$$

Les deux nombres complexes considérés ont des modules différents ; ils ne sont donc pas égaux.

- 2 Vrai. Il suffit de multiplier les deux termes du quotient par le conjugué du dénominateur et d'effectuer les produits :

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = i$$

- 3 Vrai. On écrit le nombre complexe $\frac{\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{3}-i}$ sous forme exponentielle. Pour cela, on en détermine le module et un argument.

$$\left|\sqrt{2}(1-i)\right| = 2 \quad \left|\sqrt{3}-i\right| = 2$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

donc :

$$\left| \frac{\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{3}-i} \right| = 1.$$

$$\arg(\sqrt{2}(1-i)) = -\frac{\pi}{4} \quad (2\pi) \quad ; \quad \arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6} \quad (2\pi).$$

On en déduit que :

$$\arg \frac{\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{3}-i} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{3}-i} = e^{-i\frac{\pi}{12}}.$$

- 4** Vrai. Il suffit de multiplier les deux termes du quotient par le conjugué du dénominateur.
- 5** Faux. On raisonne comme à la question **1** en comparant les modules des deux nombres complexes.

$$\left| \frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \left| e^{-i\frac{5\pi}{12}} \right| = 1,$$

donc ces deux nombres complexes ne sont pas égaux.

MÉTHODE

Dans le cas d'un Vrai ou Faux, on ne fait pas systématiquement tous les calculs si aucune justification n'est demandée. Il existe souvent des procédures plus rapides pour établir qu'une proposition est fautive. Par ailleurs il convient de bien vérifier s'il y a ou non des pénalités en cas de réponse erronée.

8 Opérations sur les conjugués

Enoncé
p. 235

Lycée Buffon, Paris

Simplifions le nombre complexe proposé à l'aide des propriétés des conjugués :

$$\overline{z + \frac{1}{z} - \frac{1+z}{\bar{z}}} = \frac{\bar{z}^2 + 1 - 1 - \bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}}{\bar{z}}.$$

(On a utilisé $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.)

Simplifions par \bar{z} :

$$\overline{z + \frac{1}{z} - \frac{1+z}{\bar{z}}} = \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}}{\bar{z}} = \bar{z} - 1.$$

9 Caractérisation des nombres réels

Enoncé
p. 235

Lycée Chaptal, Paris

Il s'agit de démontrer que $Z = \bar{Z}$.

Calculons donc :

$$Z - \bar{Z} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2}.$$

En réduisant au même dénominateur :

$$Z - \bar{Z} = \frac{z_1 + z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_1 z_2 - \bar{z}_2 z_2 z_1}{(1 + z_1 z_2)(1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)}.$$

Comme $|z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1 = 1$ et $|z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2 = 1$, on obtient :

$$Z - \bar{Z} = \frac{z_1 + z_2 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2 - z_1 - z_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2}{(1 + z_1 z_2)(1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)} = 0.$$

Ainsi, Z est réel.

MÉTHODE

Pour montrer qu'un nombre complexe Z est réel, on peut

- montrer que sa partie imaginaire est nulle
- montrer qu'il est non nul et qu'il admet un argument de la forme $k\pi$ où k désigne un entier relatif
- montrer qu'il est égal à son conjugué.

10 Recherche d'un ensemble de points

Enoncé
p. 235

Lycée Marie Curie, Sceaux

1 Notons $\operatorname{Re}(z) = x$ et $\operatorname{Im}(z) = y$.

Alors :

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\text{et } \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2.$$

Ainsi l'ensemble des points $M(x ; y)$ cherché a pour équation cartésienne :

$$x^2 - y^2 = 0 \iff (y = x \text{ ou } y = -x).$$

L'ensemble cherché est donc réunion de la première et de la deuxième bissectrice du repère (orthonormé).

2 En **1**, on a vu que :

$$\operatorname{Im}(z^2) = 2xy.$$

Ainsi, l'ensemble des points $M(x ; y)$ cherché a pour équation cartésienne :

$$xy = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0).$$

L'ensemble cherché est donc la réunion des deux axes de coordonnées.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Forme exponentielle

Enoncé
p. 235

Lycée En Forêt, Montargis

1 Écrivons $1 + i$ sous la forme exponentielle : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi on peut alors calculer aisément :

$$(1 + i)^{11} = (\sqrt{2})^{11} e^{i\frac{11\pi}{4}}.$$

Enfin notons que $e^{i\frac{11\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. On a donc :

$$(1 + i)^{11} = (\sqrt{2})^{11} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 32\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = -32 + 32i.$$

2 Notons que $(-1 - i)^{15} = -(1 + i)^{15}$ puisque l'exposant est impair. On peut donc comme ci-dessus obtenir, en utilisant ici $e^{i\frac{15\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$:

$$(-1 - i)^{15} = -(\sqrt{2})^{15} e^{i\frac{15\pi}{4}} = -(\sqrt{2})^{15} e^{-i\frac{\pi}{4}} = -128\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

soit : $(-1 - i)^{15} = -128 + 128i$.

12 Avec un algorithme

Enoncé
p. 235

Lycée Charlemagne, Paris

1
$$\begin{aligned} Z &= \frac{z_1}{z_2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 + 2i} \\ &= \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 2i \times i\sqrt{6} + i(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})}{8} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}. \end{aligned}$$

2 $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$$|z_2| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\arg(z_1)) &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\arg(z_1)) &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \arg(z_1) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\arg(z_2)) &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\arg(z_2)) &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi).$$

$$\arg(Z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \quad (2\pi).$$

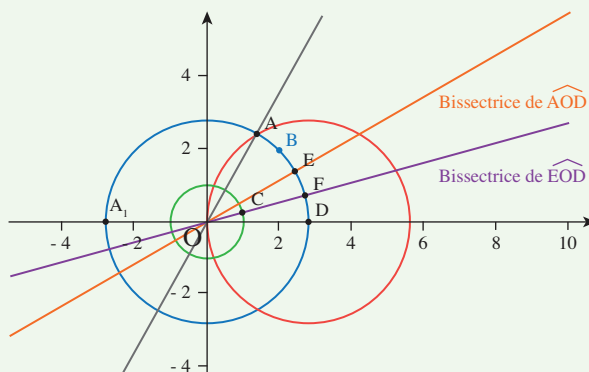
3 On en déduit donc que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

et

$$\sin \frac{\pi}{12} = \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

4



On commence par construire le cercle de centre O (origine du repère) passant par B(2 ; 2). Le point A est sur ce cercle puisque z_1 a même module que z_2 . Notons D le point de ce cercle coupant l'axe (Ox) en une abscisse positive.

Il nous faut ensuite une demi-droite formant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec [OD) puisque l'argument de z_1 est $\frac{\pi}{3}$. On construit donc au compas un triangle équilatéral OAD. A est à l'intersection de la demi-droite faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ et du cercle passant par B. Pour le point C, il faut obtenir une droite faisant un angle de $\frac{\pi}{12}$ avec [OD). Ceci s'obtient en construisant au compas (ce qui n'apparaît pas sur la figure) la bissectrice de l'angle \widehat{AOD} , puis la bissectrice de l'angle \widehat{EOD} . C est à l'intersection entre cette bissectrice et le cercle de centre O et de rayon 1 puisque le module de Z est 1.

5 (a)

	x	y
Initialisation	2	1
$k = 2$	$2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$	$2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$
$k = 3$	$3 \times 2 - 1 \times 4 = 2$	$3 \times 1 + 2 \times 4 = 11$

Affichage sortie : $2 + 11i$.

- (b)** Cet algorithme sert à calculer les puissances successives d'un nombre complexe .

En effet, si $z = x_0 + iy_0$,

$$z^2 = (x_0 + iy_0)(x_0 + iy_0) = x_0^2 - y_0^2 + i(x_0y_0 + y_0x_0).$$

Pour la puissance suivante, x prend la valeur $x_0^2 - y_0^2$ et y la valeur $x_0y_0 + y_0x_0$, et ensuite on multiplie à nouveau par $x_0 + iy_0$ pour obtenir z^3 .

- 6** On pourrait évidemment utiliser l'algorithme précédent en le programmant sur une calculatrice. Mais on sait d'après la question **2** que l'écriture exponentielle de Z est $e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$$\text{Donc, } Z^{2\,007} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2\,007} = e^{i\frac{2\,007\pi}{12}}.$$

$$\text{Or, } 2\,007 = 167 \times 12 + 3 \text{ donc } \frac{2\,007}{12} = 167 + \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Z^{2\,007} &= e^{i\pi\left(167 + \frac{1}{4}\right)} \\ &= e^{167i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= -1 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

13 Nombres complexes et trigonométrie

Enoncé
p. 236

Lycée du Parc, Lyon

- 1** Calculons u^2 sous forme algébrique :

$$u^2 = 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}.$$

- 2** On voit immédiatement que $\arg(u^2) = \frac{-\pi}{4}$ et que $|u|^2 = 4$.

$$2 \arg(u) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ et donc } \arg(u) = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \text{ étant un entier relatif.}$$

Il y a donc à ce stade deux valeurs possibles pour l'argument de u modulo 2π .

On va donc regarder le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de u pour savoir dans quel quadrant du cercle trigonométrique le point image de u se situe.

La partie réelle de u est négative, et sa partie imaginaire positive, donc son point image se situe dans le deuxième quadrant.

On a donc $\arg(u) = \frac{7\pi}{8}$.

On en déduit que $u = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

3 On a donc les égalités trigonométriques suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

14 Équation du second degré

Enoncé
p. 236

Lycée Lavoisier, Paris

1 Calculons le discriminant de E :

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 12 = -12.$$

Les solutions sont donc complexes conjuguées et valent :

$$u = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \bar{u} = 3 - i\sqrt{3}.$$

2 On a : $|u|^2 = 9 + 3 = 12$. On obtient donc :

$$u = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right).$$

On en déduit : $|u| = 2\sqrt{3}$. Alors, modulo 2π , $\arg(u) = \frac{\pi}{6}$.

Comme le point d'affixe \bar{u} est le symétrique du point d'affixe u par rapport à l'axe des abscisses, on a $|\bar{u}| = 2\sqrt{3}$, et modulo 2π , $\arg(\bar{u}) = -\frac{\pi}{6}$.

3 Tout d'abord, $u - 4 = -1 + i\sqrt{3}$, donc $|u - 4| = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2$.

$\cos(\arg(u - 4)) = -\frac{1}{2}$, et $\sin(\arg(u - 4)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$\arg(u - 4) = \frac{3\pi}{2} (2\pi)$, ce qui donne la forme trigonométrique de $u - 4$:

$$u - 4 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right).$$

4 Calculons le module de $\frac{u}{u - 4}$:

$$\left| \frac{u}{u - 4} \right| = \frac{|u|}{|u - 4|} = \sqrt{3}.$$

Calculons alors, modulo 2π , l'argument de $\frac{u}{u-4}$:

$$\arg\left(\frac{u}{u-4}\right) = \arg(u) - \arg(u-4) = -\frac{\pi}{2}.$$

Comme $\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$ est le conjugué de $\frac{u}{u-4}$, on a :

$$\left|\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}\right| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

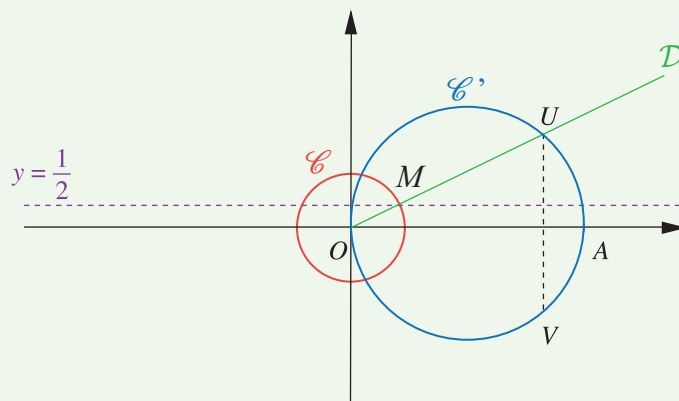
5 Appelons O l'origine, A le point d'affixe 4, U celui d'affixe u et V d'affixe \bar{u} , \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 et \mathcal{C}' le cercle de diamètre $[OA]$.

La question **2** nous dit que le point U est sur la demi-droite \mathcal{D} d'équation :

$$\arg z = \frac{\pi}{6}.$$

Or, on sait que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc on trace la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ qui coupe le cercle trigonométrique en un point M tel que $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{6}$.

Et la question **4** nous dit que le point U est sur \mathcal{C}' car le triangle OAU est rectangle en U . On peut donc construire le point U . Le point V est le symétrique de U par rapport à l'axe des abscisses.



15 Résolution d'équations polynomiales

Enoncé
p. 237

Lycée Carnot, Dijon

1 Posons $P(Z) = Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128$, et calculons $P(8)$:

$$P(8) = 512 - 12 \times 64 + 48 \times 8 - 128 = 0.$$

Le réel 8 est donc bien racine de P .

- 2 On cherche donc a et b tel que :

$$(Z - 8)(Z^2 + aZ + b) = Z^3 + (a - 8)Z^2 + (b - 8a)Z - 8b = P(Z).$$

En identifiant terme à terme, on trouve : $a = -4$ et $b = 16$.

Ainsi on a :

$$P(Z) = (Z - 8)(Z^2 - 4Z + 16).$$

- 3 Si z est racine de P , ou bien $z = 8$, ou bien z est racine de $Z^2 - 4Z + 16$.
Recherchons les racines de ce trinôme du second degré. On calcule d'abord
 $\Delta = -48 = (4i\sqrt{3})^2$. On en déduit les racines de ce trinôme, et finalement celles de P :

$$\{8; 2 + 2i\sqrt{3}; 2 - 2i\sqrt{3}\}.$$

16 Racines d'un polynôme

Enoncé
p. 237

Lycée Masséna, Nice

- 1 (a) Montrons que $3i$ est racine de :

$$z^4 - 14z^3 + 74z^2 - 126z + 585.$$

Commençons par calculer les puissances itérées de $3i$:

$$(3i)^1 = 3i, \quad (3i)^2 = -9, \quad (3i)^3 = -27i, \quad \text{et} \quad (3i)^4 = 81.$$

Calculons ensuite $P(3i)$:

$$P(3i) = 81 - 14 \times (-27i) + 74 \times (-9) - 126 \times (3i) + 585 = 0.$$

- (b) Comme P est à coefficients réels, pour tout z on a :

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z}).$$

Ainsi si z est racine de P , \bar{z} est aussi racine de P .

On en déduit que $-3i$ est aussi racine de P .

- 2 Par une méthode de coefficients indéterminés, on trouve :

$$P(z) = (z^2 + 9)(z^2 - 14z + 65).$$

Les racines de $z^2 + 9$ sont $3i$ et $-3i$ (déjà connues). Les autres racines de P sont les solutions z_1 et z_2 de $z^2 - 14z + 65 = 0$:

$$\Delta = -64 \quad \text{donc} \quad z_1 = 7 + 4i \quad \text{et} \quad z_2 = 7 - 4i.$$

Les racines de P forment donc l'ensemble $\{-3i; 3i; 7 - 4i; 7 + 4i\}$.

17 Équation du troisième degré

Enoncé
p. 237

Lycée Jules Ferry, Caen

1 Posons $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i$ et calculons $P(i)$:

$$P(i) = -i + i - \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i = 0.$$

Le nombre i est donc solution de (\mathcal{E}) .

2 Factorisons P :

$$\begin{aligned} P(z) &= z^3 - iz^2 + \sqrt{3}(z^2 - iz) + z - i \\ &= (z - i)z^2 + (z - i) \times \sqrt{3}z + z - i \\ &= (z - i)(z^2 + \sqrt{3}z + 1). \end{aligned}$$

Les deux autres racines de (\mathcal{E}) sont donc les solutions de l'équation (\mathcal{E}') :

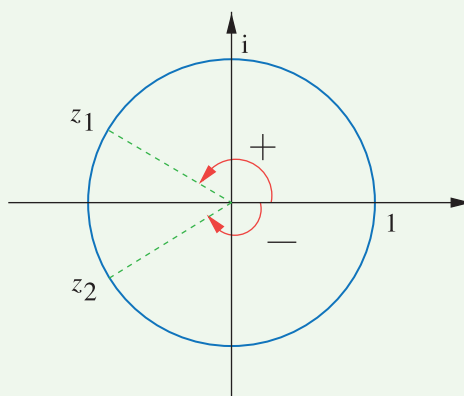
$$z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0 \quad (\mathcal{E}')$$

Calculons le discriminant de (\mathcal{E}') : $\Delta = 3 - 4 \times 1 = -1$.
On obtient alors les deux solutions z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}.$$

3 On obtient immédiatement leurs formes trigonométriques :

$$\begin{aligned} i &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ z_1 &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ z_2 &= \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right). \end{aligned}$$



MÉTHODE

Le texte demande de prouver l'existence d'une solution de l'équation qui est imaginaire pure. Dans le cadre de cet exercice, on « voit » que i est solution et on se contente donc de montrer que $P(i) = 0$. Dans un cadre plus général, la méthode à suivre consiste à prouver l'existence d'un réel k tel que $P(ki) = 0$. Pour cela, on calcule $P(ki)$ et on l'écrit sous forme algébrique. On applique alors la propriété : un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles simultanément. On obtient ainsi un système d'équations permettant d'obtenir la valeur de k .

18 Puissance d'un nombre complexe

Enoncé
p. 237

Lycée Marie Curie, Sceaux

- 1 Le nombre complexe $z = x + iy$ vérifie la relation $z - i\bar{z} = 0$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}x + iy - i(x - iy) &= 0 \\(x - y) + i(y - x) &= 0 \\y &= x.\end{aligned}$$

La fonction f est définie sur le plan tout entier privé de la droite d'équation $y = x$.

- 2 Calculons $f(i)$ et écrivons-le sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned}f(i) &= \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right).\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Moivre, on trouve :

$$(f(i))^4 = \frac{1}{4} (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -\frac{1}{4}.$$

Donc $(f(i))^4$ est réel.

19 Une application du plan complexe

Enoncé
p. 238

Lycée Carnot, Dijon

- 1 Calculons $(z' + 2i)(z - i)$:

$$(z' + 2i)(z - i) = \left(\frac{2z - i}{iz + 1} + 2i \right) (z - i) = \frac{i}{iz + 1} (z - i) = 1.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Écrivons $z' + 2i$ et $z - i$ sous forme exponentielle :

$$\begin{cases} z' + 2i = r' e^{i\theta'} \\ z - i = r e^{i\theta} \end{cases}$$

Réécrivons alors le résultat de la question **1** :

$$(z' + 2i)(z - i) = r' r e^{i(\theta' + \theta)} = 1.$$

On en déduit les relations demandées :

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{r} \\ \theta' = -\theta \quad (2\pi). \end{cases}$$

3 Rappelons tout d'abord une interprétation géométrique de r , r' , θ et θ' dans le cas où le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

$$\begin{cases} r = AM \\ r' = BM' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \\ \theta' = (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \end{cases}.$$

Le point M d'affixe z appartient à \mathcal{C} si et seulement si $r = 1$, on en déduit immédiatement $r' = 1$: le point M' appartient au cercle de centre B et de rayon 1.

4 Notons t l'affixe de T :

$$AT = |t - i| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right| = 1.$$

Le point T appartient donc au cercle \mathcal{C} .

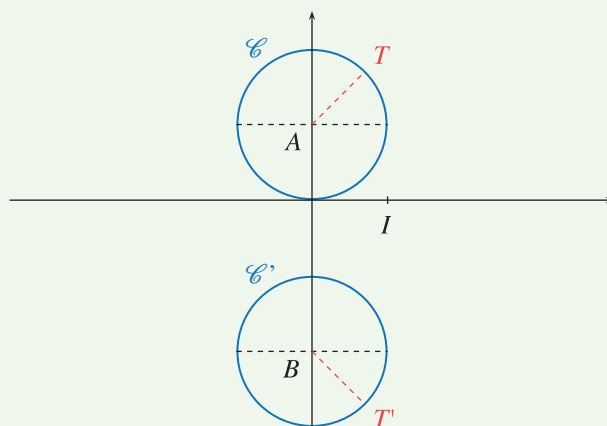
5 En utilisant ce qui précède :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AT}) = \arg \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc les deux relations suivantes pour le point T' :

$$BT' = 1 \quad (\vec{u}, \overrightarrow{BT'}) = -\frac{\pi}{4}.$$

Ce qui permet de construire T' sur le cercle \mathcal{C}' :



20 Application du plan complexe (2)

Enoncé
p. 238

Lycée Thiers, Marseille

- 1 Notons B le point d'affixe $-3 + 2i$ et A celui d'affixe $2 - i$, on a alors :

$$|z'| = \frac{|z - (-3 + 2i)|}{|z - (2 - i)|} = \frac{BM}{AM}.$$

- 2 Les points M tel que $|z'| = 1$ sont les points M tel que $AM = BM$, soit la médiatrice de $[AB]$.

- 3 L'affixe de \vec{BM} est $z + 3 - 2i$ et celui de \vec{AM} est $z - 2 + i$, donc :

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i}\right) = (\vec{AM}, \vec{BM}) \quad (2\pi).$$

- 4 Comme $(\vec{AM}, \vec{BM}) = (\vec{MA}, \vec{MB})$, on en déduit que les points pour lesquels z' est imaginaire pur sont soit le point B car alors $z' = 0$, soit les points M tels que :

$$(\vec{MA}, \vec{MB}) = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

Finalement cet ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A . (Revoir la caractérisation angulaire d'un cercle.)

- 5 Par le calcul, notons $z = x + iy$ et remplaçons :

$$\begin{aligned} |z'| = 1 &\iff (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \\ &\iff 5x - 3y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Cet ensemble de points est donc bien une droite comme l'assure le raisonnement géométrique.

Il reste à vérifier que cette droite est bien la médiatrice de $[AB]$.

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Il est bien sur la

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

droite car ses coordonnées vérifient son équation.

De plus, un vecteur directeur \vec{u} de cette droite a pour coordonnées (3 ; 5) et le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées (-5 ; 3). Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 3 \times (-5) + 5 \times 3 = 0$. Donc les vecteurs sont orthogonaux. La droite est donc perpendiculaire à $[AB]$ et passe par son milieu, c'est donc bien la médiatrice de ce segment.

- 6** Le complexe z' est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Exprimons z' sous forme algébrique :

$$\frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i} = \frac{(x + 3) + i(y - 2)}{(x - 2) + i(y + 1)}$$

Alors,

$$\frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i} = \frac{(x + 3)(x - 2) + (y + 1)(y - 2)}{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} + i \frac{(x - 2)(y - 2) - (y + 1)(x + 3)}{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$$

Ainsi z' est imaginaire pur si et seulement si :

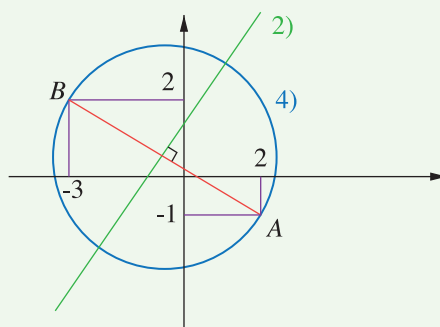
$$(x + 3)(x - 2) + (y + 1)(y - 2) = 0 \quad \text{et} \quad z \neq 2 - i.$$

On développe et factorise à nouveau pour obtenir :

$$(x + 3)(x - 2) + (y + 1)(y - 2) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{2} = 0.$$

L'ensemble des points vérifiant cette équation est bien un cercle, de centre le point I milieu de $[AB]$ de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C'est le cercle de diamètre de $[AB]$ car le point A de coordonnées (2 ; -1) est sur ce cercle. Cependant, le point A ne fait pas partie de l'ensemble des solutions (condition $z \neq 2 - i$).

On retrouve donc bien que l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$, privé du point A .



21 Recherche d'un ensemble de points

Enoncé
p. 239

Lycée Claude Bernard, Paris

- 1 Notons $\operatorname{Re}(z) = x$ et $\operatorname{Im}(z) = y$ et raisonnons par équivalences successives :

$$\begin{aligned} z + \bar{z} = |z| &\iff 2x = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } x \geq 0 \\ &\iff 4x^2 = x^2 + y^2 \text{ et } x \geq 0 \quad (\text{on a élevé au carré}). \end{aligned}$$

Finalement après réduction et factorisation on trouve que :

$$z + \bar{z} = |z| \iff (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0 \text{ et } x \geq 0.$$

L'ensemble cherché est donc la réunion de deux demi-droites fermées d'équations :

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- 2 Un calcul analogue montre que :

$$z - \bar{z} = i|z| \iff (\sqrt{3}y - x)(\sqrt{3}y + x) = 0 \text{ et } y \geq 0.$$

L'ensemble cherché est donc la réunion de deux demi-droites fermées d'équations :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

22 Rôle d'un algorithme

Enoncé
p. 239

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Si $Z_1 = 4 - 3i$ et $Z_2 = 4 + 3i$,
 $e = \frac{Z_1 + Z_2}{2} = 4$, $f = \frac{Z_1 - Z_2}{2i} = 3$ et $u = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, ce qui est le module de Z_1 .
- 2 De façon générale, si $Z_1 = x + iy$, $Z_2 = x - iy$, $e = \frac{Z_1 + Z_2}{2} = x$,
 $f = \frac{Z_1 - Z_2}{2i} = y$ et $u = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z_1|$.

23 Polynôme de degré quatre

Enoncé
p. 239

Lycée du Parc, Lyon

- 1 Mettons $1 + i$ sous forme exponentielle pour en calculer plus facilement

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

les puissances successives :

$$\begin{cases} 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \\ (1 + i)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \\ (1 + i)^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -2 + 2i \\ (1 + i)^4 = 4e^{i\pi} = -4. \end{cases}$$

Calculons alors $P(1 + i)$:

$$\begin{aligned} P(1 + i) &= -4 - 3(-2 + 2i) + \frac{9}{2}(2i) - 3(1 + i) + 1 \\ &= -4 - 3 + 1 + 6 + 9i - 6i - 3i \\ &= 0. \end{aligned}$$

2 Comme P est à coefficients réels on a :

$$\begin{aligned} z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1 &= \overline{z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1} \\ &= \overline{z}^4 - 3\overline{z}^3 + \frac{9}{2}\overline{z}^2 - \overline{z} + 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

3 Supposons z_0 racine de P . Puisque $\overline{P(z_0)} = 0$, on a alors :

$$P(\overline{z_0}) = 0 \quad (\text{car } P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)}).$$

4 Supposons z_0 racine de P . Remarquons que $z_0 \neq 0$ ($P(0) \neq 0$).

Factorisons $P(z_0)$ par z_0^4 :

$$z_0^4 - 3z_0^3 + \frac{9}{2}z_0^2 - 3z_0 + 1 = z_0^4 \left(1 - 3\frac{1}{z_0} + \frac{9}{2}\frac{1}{z_0^2} - 3\frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_0^4} \right).$$

Finalement : $P(z_0) = z_0^4 \cdot P\left(\frac{1}{z_0}\right)$.

On en déduit que $\frac{1}{z_0}$ est racine de P .

5 Le nombre $1 + i$ est racine de P . D'après les questions précédentes $1 - i$,

$\frac{1}{1+i}$ et $\frac{1}{1-i}$ sont aussi racines de P .

Finalement P a pour racines les quatre complexes suivants :

$$1 + i, \quad 1 - i, \quad \frac{1 - i}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 + i}{2}.$$

24 Une équation paramétrée

Enoncé
p. 240

Lycée Marie Curie, Sceaux

1 Remarquons de suite que :

$$\begin{cases} (1 + \cos(2\alpha)) = 2 \cos^2(\alpha) \\ \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha). \end{cases}$$

On peut alors calculer le discriminant du trinôme :

$$\begin{aligned} \Delta &= (4 \sin(\alpha) \cos(\alpha))^2 - 4 \times 4 \cos^2(\alpha) \\ &= 16 \cos^2(\alpha) (\sin^2(\alpha) - 1) \\ &= -16 \cos^4(\alpha). \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + i \times 2 \cos^2(\alpha) \\ z_2 &= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) - i \times 2 \cos^2(\alpha). \end{aligned}$$

2 Il y a trois cas possibles :

- Si $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, $\cos(\alpha) \geq 0$.

Dans ce cas $|z_1| = |z_2| = 2 \cos(\alpha)$ et on obtient :

$$\begin{cases} z_1 = 2 \cos(\alpha) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) \\ z_2 = 2 \cos(\alpha) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right). \end{cases}$$

- Si $\alpha \notin \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, $\cos(\alpha) < 0$.

Dans ce cas $|z_1| = |z_2| = -2 \cos(\alpha)$ et on obtient :

$$\begin{cases} z_1 = -2 \cos(\alpha) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) \\ z_2 = -2 \cos(\alpha) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right). \end{cases}$$

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$,

$$z_1 = z_2 = 0.$$

3 Les deux solutions sont égales si et seulement si $\Delta = 0$ soit si

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

25 Sommations classiques

Enoncé
p. 240

Lycée Blaise Pascal, Paris

On a :

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{Re} \left(1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{nix} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(1 + (e^{ix}) + (e^{ix})^2 + \dots + (e^{ix})^n \right). \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On reconnaît la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de raison e^{ix} et de premier terme 1.

Supposons d'abord que $e^{ix} = 1$, c'est-à-dire $x = 0 \pmod{2\pi}$, alors pour tout entier k , $e^{ikx} = 1$ et donc $S = n + 1$.

Désormais, nous supposons au contraire $x \neq 0 \pmod{2\pi}$.

$$\text{On obtient : } S = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}} \right).$$

Factorisons :

$$\begin{aligned} 1 - e^{i(n+1)x} &= e^{i\frac{n+1}{2}x} \left(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x} \right) \\ &= -2ie^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{2i} \\ &= -2ie^{i\frac{n+1}{2}x} \sin \left(\frac{n+1}{2}x \right) \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} 1 - e^{ix} &= e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} \right) \\ &= -2ie^{i\frac{x}{2}} \sin \left(\frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2}x \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}.$$

Alors :

$$S = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{nx}{2}} \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2}x \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} = \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2}x \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}.$$

MÉTHODE

La méthode utilisée dans la résolution de cet exercice est à retenir. L'idée de base est d'interpréter une somme de cosinus comme étant la partie réelle d'une somme de nombres complexes.

On notera qu'il convient de distinguer deux cas selon que la raison de la suite géométrique considérée vaut 1 ou non. La formule à utiliser pour le calcul de la somme n'est pas la même dans les deux cas.

Chapitre 10

Droites et plans

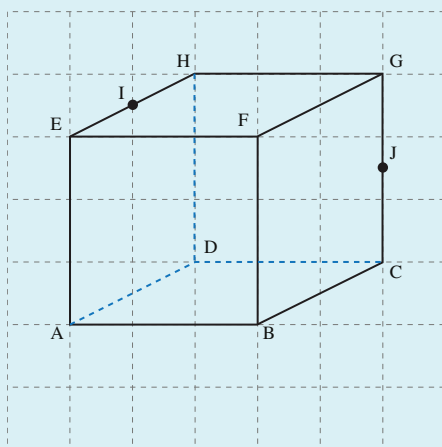
Plan du chapitre

1. Position relative de droites et de plans dans l'espace
2. Démontrer le parallélisme
3. Orthogonalité dans l'espace
4. Démontrer l'orthogonalité

Exercice type

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux respectifs des segments [EH] et [CG].



- 1 Montrer que la droite (EG) est orthogonale au plan (BDF).
- 2 En déduire que les droites (EG) et (DF) sont orthogonales.
- 3 Montrer de même que les droites (EB) et (DF) sont orthogonales.
- 4 Déduire des questions précédentes que la droite (DF) est orthogonale au plan (EGB).

1 Position relative de droites et de plans dans l'espace

1.1 Positions relatives de deux droites

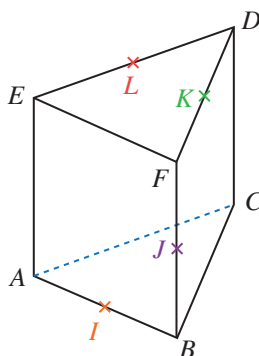
Deux droites de l'espace peuvent être :

- coplanaires et sécantes ;
- coplanaires et parallèles ;
- non coplanaires.

Remarque : « coplanaires » signifie « situées dans le même plan ».

Exemple :

$ABCDEF$ est un prisme droit à base triangulaire. Les points I , J , K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BF]$, $[FD]$ et $[DE]$.



- (AL) et (BK) sont coplanaires ((AB) et (LK) étant parallèles).
- (EJ) et (AK) ne sont pas coplanaires (K est extérieur au plan (EJA)).
- (IJ) et (AL) ne sont pas parallèles ((IJ) est parallèle à (AF) qui est sécante à (AL)).

Propriété 1

Deux droites sécantes sont coplanaires.

Deux droites coplanaires non sécantes sont parallèles.

1.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite peut être :

- strictement parallèle à un plan ;
- parallèle, contenue dans le plan ;
- sécante au plan en un point.

Propriété 2

Une droite qui ne coupe pas un plan est parallèle à ce plan.
Une droite dont deux points distincts appartiennent à un plan est contenue dans ce plan.

1.3 Position relative de deux plans

Deux plans de l'espace peuvent être :

- strictement parallèles ;
- confondus ;
- sécants selon une droite.

Propriété 3

Deux plans non confondus ayant un point commun sont sécants selon une droite.

2 Démontrer le parallélisme

2.1 Droites parallèles

Propriété 4

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Propriété 5

Si une droite \mathcal{D} et un plan \mathcal{P} sont parallèles, tout plan \mathcal{P}' contenant \mathcal{D} et sécant avec \mathcal{P} coupe \mathcal{P} en une droite \mathcal{D}' parallèle à \mathcal{D} .

Propriété 6

Si deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles, tout plan qui coupe \mathcal{P} coupe aussi \mathcal{P}' et les deux droites d'intersection sont des droites parallèles.

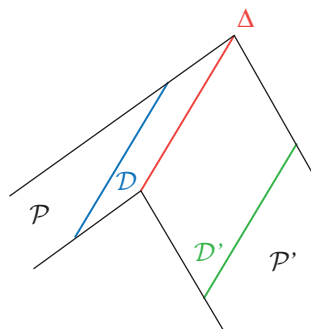
COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Théorème 1 (Théorème du toit)

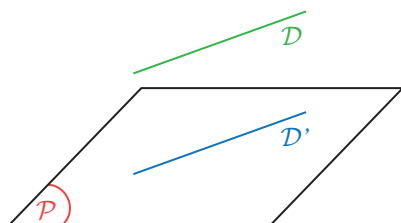
Si les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants selon une droite Δ et si une droite \mathcal{D} de \mathcal{P} est parallèle à une droite \mathcal{D}' de \mathcal{P}' , alors la droite Δ est parallèle aux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' .



2.2 Droite et plan parallèles

Propriété 7

Une droite \mathcal{D} est parallèle à un plan \mathcal{P} si et seulement si \mathcal{D} est parallèle à une droite de \mathcal{P} .



$$\mathcal{D} // \mathcal{P} \text{ car } \begin{cases} \mathcal{D}' \subset \mathcal{P} \\ \mathcal{D} // \mathcal{D}' \end{cases} .$$

2.3 Plans parallèles

Propriété 8

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

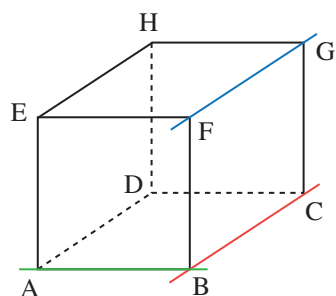
Propriété 9

Si un plan \mathcal{P} contient deux droites sécantes parallèles au plan \mathcal{P}' , alors les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles.

3 Orthogonalité dans l'espace

Définition 1

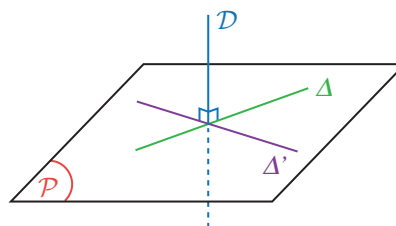
Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



ABCDEFGH est un cube. Les droites (AB) et (FG) sont orthogonales car la parallèle (BC) à (FG) est perpendiculaire à (AB) .

Définition 2

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan.



Définition 3

\mathcal{P} est un plan et A un point de l'espace.
Le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} est le point d'intersection de \mathcal{P} et de la droite orthogonale à \mathcal{P} passant par A .

4 Démontrer l'orthogonalité

Théorème 2

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété 10

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 11

Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

Propriété 12

Deux plans orthogonaux à la même droite sont parallèles.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

→ Solution de l'exercice type

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

- 1** EFGH étant un carré, la droite (EG) est perpendiculaire à la droite (FH) qui est contenue dans le plan (BDF).
De plus, la droite (EG) est contenue dans le plan (EFG) qui est orthogonal à la droite (FB), elle est donc orthogonale à cette droite.
La droite (EG) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDF), elle est donc orthogonale à ce plan.
- 2** Lorsqu'une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan. Donc (EG) est orthogonale à (DF) qui est contenue dans le plan (BDF).
- 3** Ici c'est à vous de choisir le « bon plan » pour effectuer un raisonnement du même type que précédemment. Il convient de considérer le plan (DAF), qui contient le point G.
ABFE étant un carré, (EB) est orthogonale à (AF). De plus, la droite (FG) étant orthogonale au plan (AEB), (EB) est orthogonale à (FG).
La droite (EB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (DAF), elle est orthogonale au plan (DAF). Elle est donc orthogonale à la droite (DF) qui est contenue dans ce plan.
- 4** D'après les questions précédentes, (DF) est orthogonale à (EG) et (EB) qui sont deux droites sécantes du plan (EGB). Elle est donc orthogonale à ce plan.

1 V/F Orthogonalité

10 min Corrigé p. 271

Soit $ABCS$ un tétraèdre quelconque et O est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) . Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- 1 Les droites (SO) et (BO) sont orthogonales.
- 2 Les droites (SO) et (AC) sont orthogonales.
- 3 Les droites (BO) et (AC) sont parallèles.
- 4 La droite (BO) est orthogonale au plan (SOC) .

2 V/F Plans et droites

10 min Corrigé p. 271

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- 1 Soit \mathcal{P} un plan contenant la droite \mathcal{D} et \mathcal{P}' un plan contenant la droite \mathcal{D}' . Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont orthogonales, alors \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants.
- 2 La droite \mathcal{D} est orthogonale au plan \mathcal{P} et \mathcal{P}' est un plan contenant \mathcal{D} . Alors \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants.
- 3 La droite \mathcal{D} est orthogonale au plan \mathcal{P} et \mathcal{P}' est un plan contenant \mathcal{D} . Alors toute droite de \mathcal{P}' est orthogonale au plan \mathcal{P} .
- 4 La droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} et \mathcal{P}' est un plan contenant \mathcal{D} . Alors les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles.
- 5 La droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} et la droite \mathcal{D}' est orthogonale à la droite \mathcal{D} . Alors \mathcal{D}' est orthogonale au plan \mathcal{P} .

3 V/F Transitivité

10 min Corrigé p. 271

Dans l'espace, les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- 1 Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- 2 Deux droites orthogonales à une même troisième sont orthogonales entre elles.
- 3 Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles entre elles.
- 4 Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.
- 5 Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles.
- 6 Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Intersection de plans



10 min

Corrigé
p. 272

Lycée Guynemer, Compiègne

Tracer un tétraèdre $ABCD$ et placer un point I sur la face ACD , mais pas sur une arête.

Construire l'intersection des plans (BAI) et (BCD) .

5 Orthogonalité dans un cube



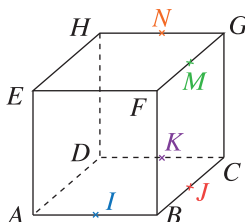
15 min

Corrigé
p. 272

Lycée Alain, Caen

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

Les points I, J, K, M et N sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[FG]$ et $[GH]$.



- 1 Montrer que les droites (AC) et (HF) sont orthogonales.
- 2 Montrer que les droites (AE) et (DI) sont orthogonales.
- 3 Montrer que (AC) est orthogonale au plan (JKN) .
- 4 Montrer que (IJ) est orthogonale au plan (HFB) .

6 Un problème de construction

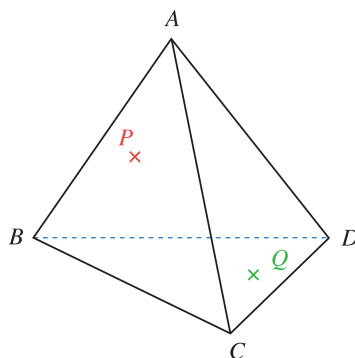


10 min

Corrigé
p. 273

Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

Construire le point E d'intersection de la droite (PQ) avec le plan (BCD) sur la figure ci-dessous. On précise que sur la figure suivante, $P \in (ABC)$ et $Q \in (ACD)$.



7 **Tétraèdre régulier**



25 min

Corrigé
p. 274

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

ABCD est un tétraèdre régulier. I est le milieu de [AC].

- 1 Montrer que la droite (AC) est perpendiculaire au plan (IBD).
- 2 En déduire que les arêtes non adjacentes d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.
- 3 On considère le centre de gravité G du triangle BCD.
 - (a) Construite G sur la figure.
 - (b) Construire l'intersection X de la droite (IG) et du plan (ABD). On pourra utiliser le plan (CIG) et on justifiera la construction.

8 **Dans une pyramide à base rectangulaire**

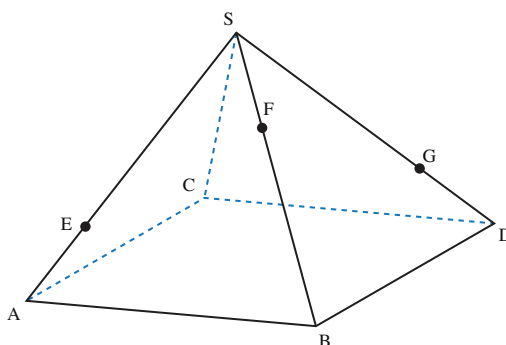


20 min

Corrigé
p. 275

Lycée La Bruyère, Versailles

Sur la figure ci-dessous, les points E, F et G appartiennent respectivement aux arêtes [SA], [SB] et [SD].



- 1 Construire l'intersection des plans (EFG) et (ABC).
- 2 En déduire la section de la pyramide SABDC par le plan (EFG).

9 **Section d'un cube**



15 min

Corrigé
p. 275

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux respectifs des segments [EH] et [CG] (voir figure page suivante).

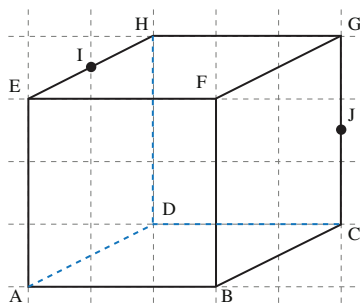
- 1 Construire le point X intersection de la droite (BJ) avec le plan (EFG). Justifier la construction.
- 2 En déduire la droite intersection des plans (BIJ) et (EFG).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 En utilisant les questions précédentes, construire la section du cube par le plan (BIJ).



10 Dans un cube

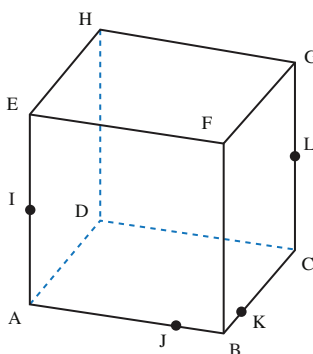


20 min

Corrigé
p. 276

Lycée La Bruyère, Versailles

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AE] et L est le milieu de [CG].
J et K sont les points tels que $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BA}$ et $\vec{BK} = \frac{1}{4}\vec{BC}$.



Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IJ), (KL) et (BF) sont concourantes.

- 1 (a) Montrer que le quadrilatère AILC est un parallélogramme.
(b) Démontrer que $\vec{JK} = \frac{1}{4}\vec{IL}$.
(c) Justifier que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point qu'on appellera R.
- 2 (a) Quelle est l'intersection des plans (AEB) et (BCG) ?
(b) Démontrer que R appartient à la droite (BF) et conclure.

1 **V/F** Orthogonalité

Enoncé
p. 267

- 1 Vrai car par définition, la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC) , donc à toutes les droites de ce plan et en particulier à la droite (BO) .
- 2 Vrai pour la même raison que précédemment.
- 3 Faux. Dans l'espace deux droites peuvent être orthogonales à une même droite sans être parallèles entre elles. Dans le cas général, les droites (BO) et (AC) sont sécantes.
- 4 Faux. Dans le cas général, la droite (BO) n'est pas perpendiculaire à la droite (OC) . Elle n'est donc pas orthogonale à un plan qui contient cette droite.

2 **V/F** Plans et droites

Enoncé
p. 267

- 1 Faux. Les plans peuvent être parallèles.
- 2 Vrai. Le plan \mathcal{P}' est non parallèle à \mathcal{P} car il contient une droite non parallèle à \mathcal{P} . Donc \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants.
- 3 Faux. D'après la question précédente, \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants, donc la droite d'intersection de ces deux plans est contenue dans \mathcal{P} et n'est pas orthogonale à \mathcal{P}' puisqu'elle est contenue dans ce plan.
- 4 Faux. Les deux plans peuvent être sécants selon une droite parallèle à \mathcal{D} (théorème du toit).
- 5 Faux. \mathcal{D}' peut par exemple être parallèle à \mathcal{P} si on la choisit dans le plan parallèle à \mathcal{P} contenant \mathcal{D} .

3 **V/F** Transitivité

Enoncé
p. 267

- 1 Vrai (cours).
- 2 Faux, on sait que si les trois droites sont coplanaires, alors deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.
- 3 Faux, on peut imaginer comme contre exemple les trois axes d'un repère orthonormal.
- 4 Faux. Deux plans sécants selon une droite \mathcal{D} sont tous les deux parallèles à \mathcal{D} .
- 5 Faux. Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est parallèle à une droite du plan. Si deux droites sont parallèles à des droites du plan qui ne sont pas parallèles, elles ne sont pas parallèles entre elles.
- 6 Vrai (cours).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Intersection de plans

Enoncé
p. 268

Lycée Guynemer, Compiègne

Tout d'abord, on peut remarquer que les plans (BAI) et (BCD) ne sont pas parallèles ni confondus puisqu'ils ont en commun le point B, mais que A n'appartient pas au plan (BCD).

Ces plans se coupent donc suivant une droite dont on connaît déjà un point, le point B.

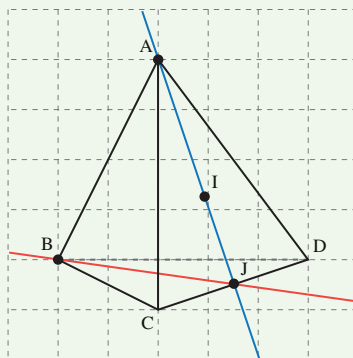
Il suffit donc de trouver un autre point.

La droite (AI) est contenue dans le plan (BAI) et aussi dans le plan (ACD) puisque I est un point de la face ACD.

Elle coupe [CD] en un point J.

Ce point J appartient au plan (BCD) puisqu'il appartient à la droite (CD). Il appartient donc à l'intersection des plan (BAI) et (BCD).

On a donc $(BAI) \cap (BCD) = (BJ)$.



5 Orthogonalité dans un cube

Enoncé
p. 268

Lycée Alain, Caen

1 Les diagonales (AC) et (BD) du carré ABCD sont perpendiculaires, donc la droite (HF), parallèle à la droite (BD), est orthogonale à la droite (AC).

2 La droite (AE), orthogonale aux droites (AB) et (AD), est orthogonale au plan (ABD).

La droite (AE) est donc orthogonale à toute droite contenue dans le plan (ABD). En particulier, (AE) est orthogonale à (DI).

3 La droite (KJ) joignant les milieux de deux côtés du triangle BDC est parallèle au troisième côté [BD]. Or, ABCD étant un carré, (BD) est perpendiculaire à (AC), donc (KJ) est perpendiculaire à (AC).

(KN) joignant les milieux de deux côtés opposés du carré DCGH est parallèle à (GC), or (GC) est orthogonale au plan (ABC), donc à la

droite (AC) . Par conséquent (KN) est aussi orthogonale à (AC) .
La droite (AC) est orthogonale aux deux droites sécantes (KJ) et (KN) du plan (JKN) .
 (AC) est donc orthogonale au plan (JKN) .

4 La droite (IJ) est parallèle à (AC) , donc perpendiculaire à (DB) , donc orthogonale à (HF) . La droite (IJ) est de plus contenue dans le plan (ABC) orthogonal à la droite (BF) ; la droite (IJ) est donc orthogonale à (BF) .

La droite (IJ) , orthogonale à deux droites sécantes du plan (HFB) , est orthogonale à ce plan.

6 Un problème de construction

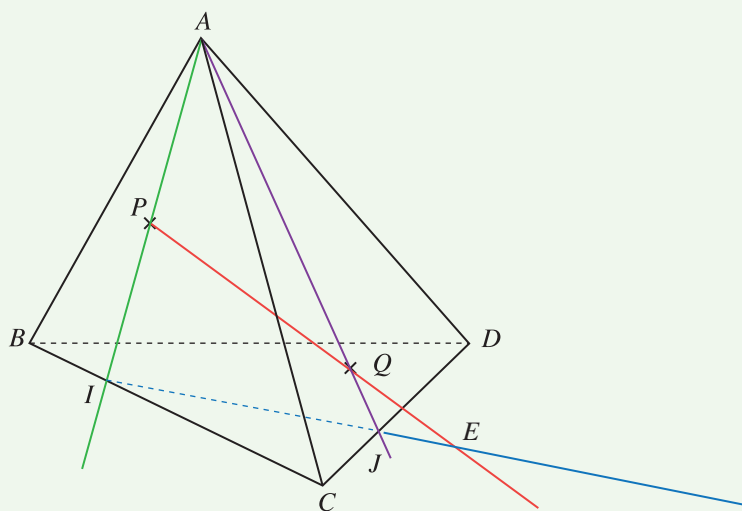
Enoncé
p. 268

Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

Pour construire l'intersection de la droite (PQ) avec le plan (BCD) , on choisit un plan \mathcal{P} qui contient la droite (PQ) et coupe le plan (BCD) selon une droite \mathcal{D}' que l'on sait construire. Le point d'intersection de la droite (PQ) et de la droite \mathcal{D}' est aussi le point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (BCD) .

La droite (AP) coupe la droite (BC) en I et la droite (AQ) coupe la droite (CD) en J . Les points A, I et J n'étant pas alignés déterminent un plan. Ce plan coupe le plan (BCD) selon la droite (IJ) .

Le point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (BCD) est le point d'intersection de la droite (IJ) et de la droite (PQ) , ce qui permet de le construire de manière précise.



7 **Tétraèdre régulier**

Enoncé
p. 269

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

1 Le tétraèdre étant régulier, ses faces sont des triangles équilatéraux. Par conséquent (DI), médiane issue de D dans le triangle ACD est aussi hauteur, et donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (DI). Pour la même raison, la droite (AC) est perpendiculaire à (BI) puisque le triangle ABC est aussi équilatéral.

La droite (AC) est donc perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (IBD), elle est donc orthogonale à ce plan.

2 La droite (AC) étant orthogonale au plan (IBD) est orthogonale à toute droite de ce plan. Elle est donc orthogonale à la droite (DB) et donc au segment [DB] qui est l'arête du tétraèdre non adjacente à [AC]. Ces deux arêtes sont donc orthogonales.

Le tétraèdre étant régulier, le même raisonnement peut être effectué pour toutes autres arêtes non adjacentes, ce qui démontre la propriété : dans un tétraèdre régulier, deux arêtes non adjacentes sont orthogonales.

3 (a) G est le point d'intersection de deux médianes du triangle BCD, qui sont faciles à construire à l'aide du quadrillage.

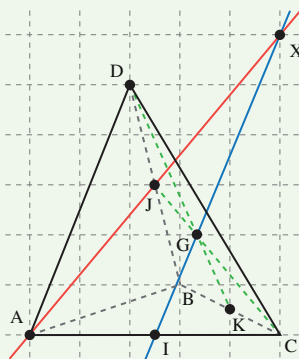
(b) Une droite et un plan sont soit parallèles, soit se coupent en un point que nous appelleront X, s'il existe.

Pour trouver ce point, il faut trouver une droite du plan (ABD) sécante avec la droite (IG).

On se place dans le plan (CIG) comme conseillé : la droite (GI) est évidemment contenue dans ce plan.

De plus, A étant un point de la droite (CI) appartient aussi à ce plan. Par ailleurs J, milieu de [BD], appartient à (CG) donc au plan (CGI). Donc la droite (AJ) est contenue dans le plan (CIG), et les droites (AJ) et (IG) sont donc coplanaires, et sécantes d'après la figure, en un point X.

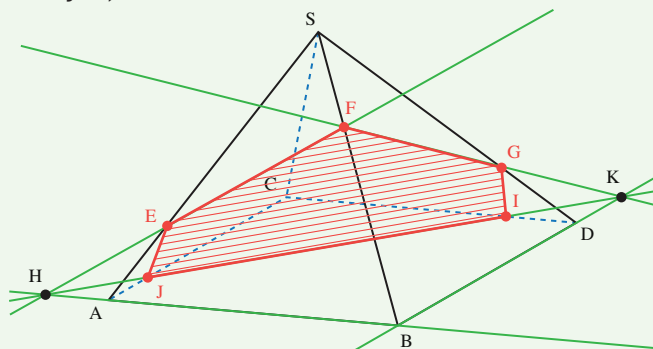
La droite (AJ) est contenue dans le plan (ABD) aussi. Le point X est donc l'intersection de la droite (IG) et du plan (ABD).



8 Dans une pyramide à base rectangulaire

Enoncé
p. 269

Lycée La Bruyère, Versailles



- 1** La droite (FE) est incluse dans le plan (EFG), et la droite (AB) est incluse dans le plan (ABC). Par ailleurs ces deux droites sont contenues dans le plan (SAB) et sont sécantes en un point que nous appelons H. De même, la droite (FG) est contenue dans le plan (EFG) et la droite (BD) est contenue dans le plan (ABC). Ces deux droites sont coplanaires car elles sont contenues dans le plan (SBD) et sécantes en un point que nous appelons K.

On sait que deux plans non parallèles et non confondus ont pour intersection une droite.

$$\left. \begin{array}{l} H \in (EFG) \cap (ABC) \\ K \in (EFG) \cap (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (HK) = (EFG) \cap (ABC).$$

La droite (HK) est donc l'intersection cherchée.

- 2** La section d'une pyramide par un plan est un polygone. Nous en connaissons déjà deux côtés : [EF] et [FG]. Un segment de la droite (HK) en fait aussi partie. C'est le segment [IJ], où I est l'intersection de [CD] avec la droite (HK) et J est l'intersection de [AC] avec la droite (HK).
La section de la pyramide SABDC est donc le polygone EFGIJ matérialisé en stries rouges ci-dessus.

9 Section d'un cube

Enoncé
p. 269

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

- 1** La droite (BJ) et la droite (FG) sont coplanaires et sécantes car elles sont toutes deux incluses dans le plan (BCG). De plus la droite (FG) est incluse dans le plan (EFG). Le point X intersection de la droite (BJ) avec le plan (EFG) est donc le point d'intersection des droites (FG) et (BJ).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

MÉTHODE

Même si deux droites semblent se couper sur un dessin en perspective, il faut prouver qu'elles se coupent vraiment, et pour cela montrer qu'elles sont coplanaires.

2 L'intersection de deux plans non parallèles et non confondus est une droite.

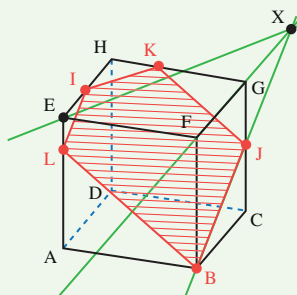
On connaît déjà un point de cette droite, le point X construit à la question **1**, puisqu'il est intersection d'une droite du plan (BIJ) avec une droite du plan (EFG).

Le point I appartient aussi aux deux plans : il est évident qu'il appartient au plan (BIJ), et comme I appartient à la droite (EH) incluse dans le plan (EFG), I appartient au plan (EFG).

Donc la droite (IX) est l'intersection des plans (BIJ) et (EFG).

3 On connaît déjà trois segments du polygone section du cube par le plan (BIJ) : le segment [IK], K étant l'intersection de la droite (IX) avec l'arête [HG] (X et I appartiennent au plan (EFG) et donc la droite (IX) est sécante à la droite (HG)), le segment [BJ], et le segment [JK]. Par ailleurs on sait qu'un plan coupe deux plans parallèles selon deux droites parallèles.

La face ABFE est parallèle à la face CDHG, donc on construit, à partir du point B, un segment parallèle au segment [KJ], qui coupe l'arête [AE] en L. Il suffit ensuite de construire le segment [LI]. La section est le polygone LBJKI.



10 Dans un cube

Enoncé
p. 270

Lycée La Bruyère, Versailles

1 (a) D'après les propriétés du cube, on a $\vec{AE} = \vec{CG}$. Or, $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AE}$ et $\vec{CL} = \frac{1}{2}\vec{CG}$, donc $\vec{AI} = \vec{CL}$, ce qui prouve que le quadrilatère AILC est un parallélogramme.

- (b) $\vec{JK} = \vec{JB} + \vec{BK}$ d'après la relation de Chasles (vue en seconde).
Donc,

$$\begin{aligned}\vec{JK} &= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{BC} \\ &= \frac{1}{4}\vec{AC}.\end{aligned}$$

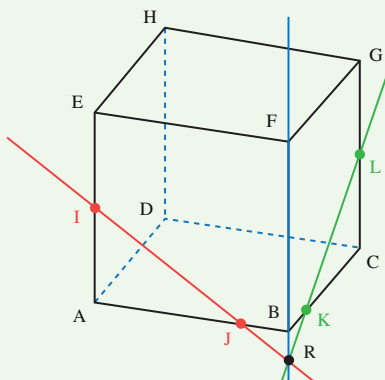
Or, comme AILC est un parallélogramme, $\vec{AC} = \vec{IL}$. On a donc bien $\vec{JK} = \frac{1}{4}\vec{IL}$.

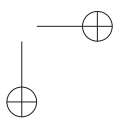
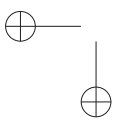
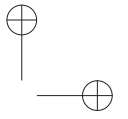
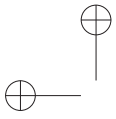
- (c) D'après la question 1.b, les points I, J, K et L sont coplanaires. De plus, les droites (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles. En effet, $\vec{JK} = \frac{1}{4}\vec{IL}$ donc $\vec{JI} + \vec{IK} = \frac{1}{4}(\vec{IK} + \vec{KL})$ et donc $\vec{JI} = -\frac{3}{4}\vec{IK} + \frac{1}{4}\vec{KL}$. Les droites (IK) et (KL) étant sécantes en K, le vecteur ne peut s'exprimer en fonction du vecteur \vec{KL} . Par conséquent, le vecteur \vec{JI} n'est pas colinéaire au vecteur \vec{KL} . Elles se coupent donc en un point R.

- 2 (a) Les plans (AEB) et (BCG) se coupent suivant la droite (BF).
(b) On connaît trois points appartenant à la fois aux plans (AEB) et (BCG) : le point B et le point F d'après la question 2.a, et le point R d'après la question 1, puisque R est l'intersection d'une droite incluse dans le plan AEB) et d'une droite incluse dans le plan (BCG).

Comme l'intersection de deux plans non parallèles et non confondus est une droite, les points B, F et R sont alignés, ce qui prouve que R appartient à (BF).

Donc les droites (IJ), (KL) et (BF) sont bien sécantes en R.





Géométrie vectorielle dans l'espace

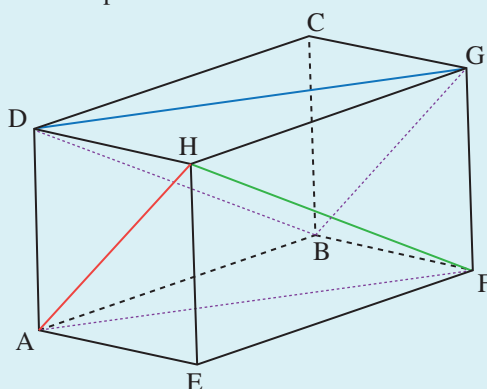
Plan du chapitre

1. Calcul vectoriel dans l'espace
2. Plan dans l'espace
3. Vecteurs coplanaires et repère de l'espace
4. Représentations paramétriques

Exercice type 1

Lycée Lafayette, Clermont-Ferrand

Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.



Démontrer que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.

1 Calcul vectoriel dans l'espace

Les opérations (multiplication par un réel et somme) définies sur deux vecteurs du plan peuvent s'étendre à deux vecteurs de l'espace et elles vérifient les mêmes propriétés.

En effet, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace peuvent être représentés à l'aide de trois points coplanaires A , B et C : $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Toute opération sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} peut alors se définir dans le plan (ABC) .

2 Plan dans l'espace

2.1 Caractérisation

Propriété 1

Tout plan de l'espace est défini par un point A et un couple de vecteurs non colinéaires qui forment un repère de ce plan : $(A ; \vec{u}, \vec{v})$.

On dit que le plan est dirigé par le couple (\vec{u}, \vec{v}) .

2.2 Plans parallèles

Propriété 2

Deux plans dirigés par le même couple de vecteurs sont parallèles.

3 Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

3.1 Vecteurs coplanaires

Définition 1

Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} tels que \vec{u} et \vec{v} ne soient pas colinéaires sont *coplanaires* si et seulement si il existe deux réels a et b tels que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Si deux des trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont colinéaires, alors \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Lafayette, Clermont-Ferrand

Montrons que les deux plans sont dirigés par le même couple de vecteurs :

D'après la relation de Chasles : $\vec{AH} = \vec{AE} + \vec{EH}$.

Comme $ABCDEFGH$ est un pavé : $\vec{AH} = \vec{BF} + \vec{FG}$ et finalement

$$\vec{AH} = \vec{BG}.$$

On montre de même que $\vec{FH} = \vec{BD}$.

Par leur position sur le pavé, les points A , H et F ne sont pas alignés, donc les vecteurs \vec{AH} et \vec{FH} ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (AHF) .

De même, les vecteurs \vec{BG} et \vec{BD} dirigent le plan (BDG) . Les deux plans étant dirigés par le même couple de vecteurs, ces plans sont parallèles.

3.2 Repère de l'espace

Propriété 3

Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, pour tout vecteur \vec{t} de l'espace il existe un triplet unique de réels $(a ; b ; c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Définition 2

Un repère de l'espace est défini par un point A et un triplet de 3 vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Propriété 4

Dans le repère $(A ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels $(x ; y ; z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Définition 3

Ce triplet constitue les coordonnées du point M , mais aussi du vecteur \overrightarrow{AM} dans le repère $(A ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Les calculs sur les coordonnées dans l'espace se font comme les calculs sur les coordonnées dans le plan.

4 Représentations paramétriques

Exercice type 2

Lycée René Descartes, Cournon

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La droite \mathcal{D} passe par le point A de coordonnées $(2 ; -1 ; 1)$ et a pour vecteur directeur \vec{u} de coordonnées $(2 ; 2 ; 1)$.

\mathcal{P} est le plan parallèle à \mathcal{D} , passant par les points $B(0 ; 1 ; 2)$ et $C(-2 ; 3 ; 2)$.

- 1 Déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .
- 2 Déterminer un repère du plan \mathcal{P} et en déduire une représentation paramétrique du plan \mathcal{P} .
- 3 Le plan \mathcal{P}' de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2m + n + 5 \\ y = 2m + 1 \\ z = m + n - 2 \end{cases} \quad \text{avec } m \text{ et } n \text{ dans } \mathbb{R}$$

est-il parallèle au plan \mathcal{P} ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4.1 Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit \mathcal{D} la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur \vec{u} de coordonnées $(a ; b ; c)$.

Un point M appartient à \mathcal{D} si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

La traduction analytique de cette relation vectorielle donne le théorème suivant :

Théorème 1

Un point de coordonnées $(x ; y ; z)$ appartient à la droite \mathcal{D} passant par A et de vecteur directeur \vec{u} si et seulement si il existe k appartenant à \mathbb{R} tel que :

$$\begin{cases} x = ka + x_A \\ y = kb + y_A \\ z = kc + z_A \end{cases}$$

Définition 4

Ce système constitue une *représentation paramétrique* de la droite \mathcal{D} , de paramètre k décrivant \mathbb{R} .

Remarque : si k ne parcourt qu'un intervalle de \mathbb{R} , l'ensemble décrit n'est alors qu'un segment ou une demi-droite.

ATTENTION

Cette représentation paramétrique n'est pas unique et dépend du vecteur directeur et du point choisi sur la droite !

4.2 Représentation paramétrique d'un plan

Un point M appartient au plan de repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si il existe des réels k et t tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + t\vec{v}$.

La traduction analytique de cette relation vectorielle donne le théorème page suivante :

Théorème 2

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan \mathcal{P} de repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$. Le point A a pour coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(a ; b ; c)$ et $(a' ; b' ; c')$.

Alors le système :

$$\begin{cases} x = ka + ta' + x_A \\ y = kb + tb' + y_A \\ z = kc + tc' + z_A \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

est appelé une représentation paramétrique du plan \mathcal{P} .

Solution de l'exercice type 2

Lycée René Descartes, Cournon

1 Une représentation paramétrique de \mathcal{D} est :

$$\begin{cases} x = 2k + 2 \\ y = 2k - 1 \\ z = k + 1 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2 Le vecteur \vec{BC} a pour coordonnées $(-2 - 0 ; 3 - 1 ; 2 - 2)$, c'est-à-dire $(-2 ; 2 ; 0)$.

Les vecteurs \vec{BC} et \vec{u} ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Le plan \mathcal{P} admet donc comme repère $(B ; \vec{u}, \vec{BC})$. Une représentation paramétrique de \mathcal{P} est donc :

$$\begin{cases} x = 2t - 2t' \\ y = 2t + 2t' + 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}.$$

3 Le plan \mathcal{P}' est dirigé par le couple de vecteurs de coordonnées $(2 ; 2 ; 1)$ et $(1 ; 0 ; 1)$. Le premier vecteur est le vecteur \vec{u} . Le vecteur \vec{v} de coordonnées $(1 ; 0 ; 1)$ est-il coplanaire à \vec{u} et \vec{BC} ? En d'autres termes, existe-t-il deux réels a et b tels que $\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{BC}$? Cette équation vectorielle donne un système de 3 équations dans \mathbb{R} , à deux inconnues a et b :

$$\begin{cases} 1 = 2a - 2b \\ 0 = 2a + 2b \\ 1 = a \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution.

Le vecteur \vec{v} ne peut pas s'exprimer en fonction de \vec{u} et \vec{BC} , donc le plan \mathcal{P}' ne peut pas être dirigé par ces deux vecteurs. Il n'est donc pas parallèle à \mathcal{P} .

1 V/F **Points alignés ou coplanaires**

10 min Corrigé p. 288

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Les points $A(1; 2; 1)$, $B(0; 2; 2)$ et $C(0; 0; 5)$ sont alignés.
- 2** Les points $A(5; 4; 2)$, $B(1; 2; 2)$, $C(3; 5; 2)$ et $D(-5; -2; 2)$ sont coplanaires.
- 3** On considère les quatre points $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 2; 5)$, $C(2; 4; 6)$ et $D(5; 1; 0)$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- 4** Les quatre points de la question précédente sont alignés.

2 V/F **Vecteurs colinéaires et coplanaires**

10 min Corrigé p. 288

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ et $\vec{w} + \vec{v}$ ne sont pas coplanaires.
- 2** Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
- 3** Les vecteurs $\vec{w} - \vec{u}$, $\vec{w} + \vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ ne sont pas coplanaires.
- 4** Les vecteurs \vec{u} , $\vec{w} + \vec{v}$ et $\vec{w} - \vec{v}$ ne sont pas coplanaires.

3 V/F **Représentation paramétrique d'une droite**

10 min Corrigé p. 289

L'espace est rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan \mathcal{P} de repère $(O; \vec{i}, \vec{j} + \vec{k})$, ainsi que la droite \mathcal{D} de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Le point M de coordonnées $(3; 1; -4)$ appartient à la droite \mathcal{D} .
- 2** Le vecteur \vec{u} de coordonnées $(-2; 1; 1)$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .
- 3** Le vecteur \vec{v} de coordonnées $(1; 2; -3)$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .
- 4** La droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} .

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE • CHAP. 11

4 Recherche de points



10 min

Corrigé
p. 289

Lycée Marie Curie, Sceaux

Existe-t-il cinq points non coplanaires A, B, C, D et E tels que :

$$\vec{BE} = 2\vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{AE} = 3\vec{AD} \quad ?$$

5 Plan et représentation paramétrique



15 min

Corrigé
p. 289

Lycée Guynemer, Compiègne

Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(-2; 2; -1), B(2; 0; 3), C(-2; 0; 0), D(0; -4; 1)$ et $E(-2; -1; -2)$.

- 1 Vérifier que les points A, B et C déterminent bien un plan.
- 2 Montrer que le vecteur \vec{DE} est colinéaire au vecteur $-\vec{AB} - 2\vec{AC}$.
Que peut-on en déduire pour la droite (DE) ?
- 3 Donner une représentation paramétrique du plan (ABC) .
Le point D appartient-il à ce plan ?
- 4 Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

6 Position relative de deux droites



20 min

Corrigé
p. 291

Lycée Guynemer, Compiègne

Partie A

On donne ci-dessous les représentations paramétriques de deux droites :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- 1 (d_1) et (d_2) sont-elles coplanaires ?
- 2 Soit (d_3) une droite parallèle à (d_1) et sécante à (d_2) . Donner un point d'une telle droite, et un vecteur directeur.
- 3 Donner une équation paramétrique du plan contenant (d_2) et (d_3) .

Partie B : Vrai ou faux ?

- 1 Si deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- 2 Si deux droites sont parallèles à un plan \mathcal{P} , alors elles sont parallèles entre elles.
- 3 Si deux droites de l'espace sont orthogonales à une même troisième, alors elles sont parallèles.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

7 Repère de l'espace



25 min

Corrigé
p. 292

Lycée La Bruyère, Versailles

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2; 4; -1)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; 0; 1)$, $D(3; 2; 1)$ et $E(1; 2; 0)$.

- 1 Démontrer que \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} ne sont pas coplanaires.
- 2 Déterminer les coordonnées du point M tel que $\vec{AM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$.
Où se situe le point M ?
- 3 Déterminer les réels a , b et c tels que $\vec{AE} = a\vec{AB} + b\vec{AC} + c\vec{AD}$.
Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$?

8 Positions relatives de deux droites



20 min

Corrigé
p. 294

Lycée La Bruyère, Versailles

On considère la droite (d) de représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 1 Donner les coordonnées d'un point A et d'un vecteur directeur \vec{u} de (d) .
- 2 Donner une représentation paramétrique de la droite (d') passant par le point $B(3; -3; -6)$ et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- 3 Les droites (d) et (d') sont-elles coplanaires ?
- 4 Démontrer qu'il existe un point C de (d) et un point D de (d') tels que le milieu du segment $[CD]$ soit le point I de coordonnées $(1; -2; 3)$.

9 Plan médiateur d'un segment



25 min

Corrigé
p. 295

Lycée Hoche, Versailles

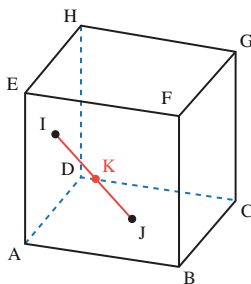
On considère un cube $ABCDEFGH$. On note I le centre de la face $ADHE$, J celui de la face $ABCD$, et K le milieu du segment $[IJ]$ (voir figure page suivante).

L'espace est rapporté au repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- 1 Déterminer les coordonnées des points I , J et K dans ce repère.
- 2 Démontrer que les points A , K et G ne sont pas alignés.

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE • CHAP. 11

- 3 (a) Démontrer que le plan médiateur du segment $[IJ]$ est le plan (AKG) .
 (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG) et une représentation paramétrique de ce plan.
 (c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG) .
 4 Quel est le point d'intersection de la droite (AK) avec le plan (CDH) ?



10 Position relative de plans et de droite ★★

20 min Corrigé p. 297

Lycée Claude Bernard, Paris

L'espace est rapporté à un repère orthonormal, et t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan \mathcal{P} admet comme équation cartésienne :

$$\mathcal{P} : x - 2y + 3z + 5 = 0.$$

Le plan \mathcal{S} admet comme représentation paramétrique :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$$

La droite \mathcal{D} admet comme représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

- 1 Démontrer qu'une représentation paramétrique du plan \mathcal{P} est :

$$\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$$

- 2 Démontrer que la droite \mathcal{D} est une droite du plan \mathcal{P} .
 3 Étudier la position relative des plans \mathcal{P} et \mathcal{S} . Le cas échéant, donner une représentation paramétrique de leur intersection.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Points alignés ou coplanairesEnoncé
p. 284

- 1** Faux. Les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $(-1 ; 0 ; 1)$ et celles du vecteur \vec{AC} sont $(-1 ; -2 ; 4)$. Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les trois points A , B et C ne sont pas alignés.
- 2** Vrai. Les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $(-4 ; -2 ; 0)$, celles du vecteur \vec{AC} sont $(-2 ; 1 ; 0)$ et celles du vecteur \vec{AD} sont $(-10 ; -6 ; 0)$. Les trois vecteurs peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs \vec{i} et \vec{j} . Ils sont donc coplanaires et les quatre points appartiennent au plan passant par A et dirigé par le couple (\vec{i}, \vec{j}) .
- 3** Vrai. Le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées $(-2 ; 2 ; 4)$ et le vecteur \vec{CD} a pour coordonnées $(3 ; -3 ; -6)$. Donc $\vec{CD} = -\frac{3}{2}\vec{AB}$. Les droites (AB) et (CD) sont dirigées par des vecteurs colinéaires, donc elles sont parallèles.
- 4** Faux. Le vecteur \vec{AC} a pour coordonnées $(1 ; 4 ; 5)$ et n'est donc pas colinéaire au vecteur \vec{AB} . Les points A , B et C ne sont donc pas alignés, il en est par conséquent de même pour les quatre points A , B , C et D .

2 V/F Vecteurs colinéaires et coplanairesEnoncé
p. 284

Soit A un point de l'espace. $(A ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un repère de l'espace.

- 1** Vrai. Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{w}$ ne sont pas colinéaires car si $\vec{u} + \vec{w} = k(\vec{u} + \vec{v})$, alors on aurait $(k - 1)\vec{u} + k\vec{v} - k\vec{w} = \vec{0}$. L'unicité de la décomposition d'un vecteur selon les trois vecteurs de la base donnerait $k = 1$ et $k = 0$, ce qui est impossible. On cherche ensuite à montrer que $\vec{w} + \vec{v} = a(\vec{u} + \vec{v}) + b(\vec{u} + \vec{w})$ est impossible. En effet, cela donnerait le système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

qui n'a pas de solution.

- 2** Vrai. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$.
- 3** Faux. La relation $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{w} + \vec{v}) - (\vec{w} - \vec{u})$ montre que les vecteurs sont coplanaires.
- 4** Vrai. Il n'est pas possible d'exprimer \vec{u} en fonction des vecteurs $\vec{w} + \vec{v}$ et $\vec{w} - \vec{v}$ qui ne sont clairement pas des vecteurs colinéaires. Donc les vecteurs ne sont pas coplanaires.

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE • CHAP. 11

3 V/F Représentation paramétrique d'une droite

Enoncé
p. 284

- 1 Vrai. Ce point correspond à $t = 1$.
- 2 Vrai. D'après la représentation paramétrique donnée, le vecteur de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} donc son opposé, le vecteur \vec{u} de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$, est aussi un vecteur directeur de \mathcal{D} .
- 3 Faux. Les coordonnées de \vec{v} ne sont pas proportionnelles à celles du vecteur directeur de \mathcal{D} donc ce n'est pas un vecteur directeur.
- 4 Vrai. Un vecteur directeur de \mathcal{D} est égal à $2\vec{i} - (\vec{j} + \vec{k})$. Il est donc coplanaire à un couple de vecteurs qui dirige \mathcal{P} . La droite \mathcal{D} est donc parallèle à \mathcal{P} .

4 Recherche de points

Enoncé
p. 285

Lycée Marie Curie, Sceaux

La relation $\vec{BE} = 2\vec{BC}$ implique que les points B , C et E sont sur la droite (BE) ou confondus si $B = E$.

La relation $\vec{AE} = 3\vec{AD}$ implique que les points A , D et E sont sur la droite (AE) ou confondus si $A = E$.

Donc si $B = E$ ou $A = E$, il y a au maximum trois points distincts qui sont donc coplanaires. Sinon, les points sont situés dans le plan (ABE) puisqu'ils sont sur des droites de ce plan. On ne peut donc pas trouver de points non coplanaires qui vérifient la relation.

5 Plan et représentation paramétrique

Enoncé
p. 285

Lycée Guynemer, Compiègne

- 1 $\vec{AB}(4 ; -2 ; 4)$ et $\vec{AC}(0 ; -2 ; 1)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc $(A ; \vec{AB}, \vec{AC})$ définit bien un plan.

- 2 $\vec{DE}(-2 ; 3 ; -3)$ et $-\vec{AB} - 2\vec{AC}(-4 ; 6 ; -6)$ donc :

$$\vec{DE} = \frac{1}{2}(-\vec{AB} - 2\vec{AC}).$$

Ces vecteurs sont donc colinéaires, ce qui prouve que la droite (DE) est parallèle au plan (ABC) puisque $(A ; \vec{AB}, \vec{AC})$ constitue un repère de ce plan.

Remarque : à ce stade, on ne sait pas si la droite est strictement parallèle au plan (ABC) ou incluse dans ce plan.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3** On connaît deux vecteurs formant une base du plan (ABC) . De plus, le point A , par exemple, appartient au plan (ABC) donc une représentation paramétrique du plan (ABC) est :

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 2 - 2t - 2t' \\ z = -1 + 4t + t' \end{cases}, \quad t \text{ et } t' \text{ étant deux réels.}$$

Remarque : on aurait pu aussi utiliser le point B , ou le point C : un plan n'a pas une représentation paramétrique unique.

Pour savoir si D appartient au plan, il faut chercher s'il existe des valeurs de t et t' permettant d'obtenir les coordonnées de D .

On obtient le système :

$$\begin{cases} 0 = -2 + 4t \\ -4 = 2 - 2t - 2t' \\ 1 = -1 + 4t + t' \end{cases}, \quad t \text{ et } t' \text{ étant deux réels.}$$

De la première équation, on déduit $t = \frac{1}{2}$.

En reportant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient $t' = \frac{5}{2}$.

Le deuxième membre de la troisième équation est alors :

$$-1 + 4 \times \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}.$$

Cette troisième égalité n'est pas vérifiée avec les valeurs trouvées pour t et t' , donc D n'appartient pas au plan (ABC) .

- 4** La droite (AB) a pour vecteur directeur le vecteur \overrightarrow{AB} et passe par le point A , ce qui donne comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Remarque : là encore, on aurait pu utiliser le point B pour obtenir une autre équation paramétrique de la droite (AB) équivalente à celle donnée ici.

6 Position relative de deux droites

Enoncé
p. 285

Lycée Guynemer, Compiègne

Partie A

- 1** Tout d'abord, on peut se demander si ces deux droites sont parallèles, auquel cas elles sont coplanaires.

D'après les équations paramétriques, $\vec{u}(1 ; -1 ; 2)$ est un vecteur directeur de (d_1) et $\vec{v}(3 ; 2 ; -1)$ est un vecteur directeur de (d_2) .

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc les deux droites ne sont pas parallèles.

Il nous faut maintenant chercher à déterminer si elles sont sécantes, c'est-à-dire s'il existe t et t' tels que :

$$\begin{cases} 1 + t &= 3t' \\ 2 - t &= 1 + 2t' \\ 3 + 2t &= 2 - t' \end{cases}$$

De la première équation, on tire $t = 3t' - 1$, et en reportant dans la seconde on obtient :

$$2 - 3t' + 1 = 1 + 2t'.$$

On en déduit que $5t' = 2$ et donc $t' = \frac{2}{5}$.

En revenant à la première équation on obtient $t = 3 \times \frac{2}{5} - 1 = \frac{1}{5}$. Il nous faut ensuite voir si les valeurs trouvées vérifient la troisième équation :

$$3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5} \quad \text{et} \quad 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}.$$

La troisième équation n'étant pas vérifiée, nous n'avons pas trouvé de valeurs pour t et t' telles que le système soit vérifié, ce qui signifie que les droites ne sont pas sécantes.

Les droites ne sont ni sécantes ni parallèles, par conséquent, elles ne sont pas coplanaires.

- 2** Il faut tout d'abord remarquer qu'il existe une infinité de droites parallèles à (d_1) et sécantes à (d_2) . Si on prend un point quelconque sur (d_2) et qu'on construit par ce point une droite parallèle à (d_1) , ce qui est toujours possible, en prenant un autre point de (d_2) , on peut aussi construire une parallèle à (d_2) , donc à (d_1) .

On va donc choisir arbitrairement un point I de (d_2) , par exemple le point I correspondant à $t = 0$: $I(0 ; 1 ; 2)$.

Un vecteur directeur de la droite (d_3) cherchée est le vecteur directeur

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

de $(d_1) : \vec{u}(1 ; -1 ; 2)$. On obtient donc la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

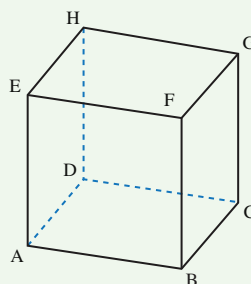
- 3** Le plan contenant (d_2) et (d_3) a pour base le point d'intersection de ces deux droites, donc I , et pour vecteurs directeurs un vecteur directeur de $(d_1) : \vec{u}(1 ; -1 ; 2)$ et un vecteur directeur de $(d_2) : \vec{v}(3 ; 2 ; -1)$.

Une représentation paramétrique de ce plan est donc :

$$\begin{cases} x = t + 3t' \\ y = 1 - t + 2t' \\ z = 2 + 2t - t' \end{cases}, \quad t \text{ et } t' \text{ étant deux réels.}$$

Partie B

- 1** Vrai. Cela fait partie du cours.
- 2** Faux. Prenons deux droites sécantes d'un plan \mathcal{P}' parallèle au plan \mathcal{P} : elles ne sont pas parallèles entre elles, mais elles n'ont pas de point d'intersection avec \mathcal{P} , donc elles sont parallèles à \mathcal{P} .
- 3** Faux. Plaçons-nous dans un cube ABCDEFGH.



La droite (GB) est orthogonale à la droite (AB) car elle est incluse dans le plan (FGB) orthogonal à (AB).

La droite (BC) est orthogonale à (AB) pour la même raison.

Or ces deux droites sont sécantes en B.

7 Repère de l'espace

Enoncé
p. 286

Lycée La Bruyère, Versailles

- 1** On a : $\vec{AB}(1 ; -3 ; 3)$, $\vec{AC}(-1 ; -4 ; 2)$ et $\vec{AD}(1 ; -2 ; 2)$.
Les vecteurs sont coplanaires si et seulement si on peut exprimer l'un d'entre eux, par exemple \vec{AD} , en fonction des deux autres.

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE • CHAP. 11

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On va donc chercher à savoir si on peut trouver deux réels k et k' tels que $\vec{AD} = k\vec{AB} + k'\vec{AC}$.

Si ces réels existent, ils sont solutions du système :

$$\begin{cases} 1 &= k - k' \\ -2 &= -3k - 4k' \\ 2 &= 3k + 2k' \end{cases}$$

obtenu en écrivant que les coordonnées de \vec{AD} et de $k\vec{AB} + k'\vec{AC}$ sont égales.

La première équation donne $k = 1 + k'$, et en reportant dans la deuxième on obtient :

$$-2 = -3 - 3k' - 4k' \Leftrightarrow k' = -\frac{1}{7}.$$

En reprenant la première équation, on obtient donc $k = \frac{6}{7}$.

Le second membre de la troisième égalité vaut donc, avec les valeurs de k et k' obtenues, $\frac{16}{7} \neq 2$.

On ne peut pas trouver de réels k et k' tels que $\vec{AD} = k\vec{AB} + k'\vec{AC}$, donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

2 Posons $M(x ; y ; z)$. Alors, $\vec{AM} = 2\vec{AB} - \vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 &= 3 \\ y - 4 &= -2 \\ z + 1 &= 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 5 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{cases}$$

Donc $M(5 ; 2 ; 3)$.

Le point M se situe dans le plan (ABC) , puisque le vecteur \vec{AM} s'exprime en fonction des deux vecteurs directeurs du plan (ABC) .

3 $\vec{AE} = a\vec{AB} + b\vec{AC} + c\vec{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 &= a - b + c \\ -2 &= -3a - 4b - 2c \\ 1 &= 3a + 2b + 2c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= b - c - 1 \\ -2 &= -3b + 3c + 3 - 4b - 2c \\ 1 &= 3b - 3c - 3 + 2b + 2c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{AE} = a\vec{AB} + b\vec{AC} + c\vec{AD} &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= b - c - 1 \\ -7b + c &= -5 \\ 5b - c &= 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= b - c - 1 \\ 5b - c &= 4 \\ -2b &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

La dernière équation est obtenue en ajoutant la deuxième et la troisième de l'étape précédente.

On obtient donc successivement : $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$ et $a = 1$.

D'après le calcul précédent, les coordonnées de E dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ sont $(1 ; \frac{1}{2} ; -\frac{3}{2})$.

8 Positions relatives de deux droites

Enoncé
p. 286

Lycée La Bruyère, Versailles

1 D'après la représentation paramétrique de (d) , on sait que le point $A(6 ; 1 ; 1)$ appartient à (d) et que le vecteur $\vec{u}(1 ; 2 ; -1)$ est un vecteur directeur de (d) .

2 Une représentation paramétrique de (d') est :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -3 + t \\ z = -6 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3 Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles. Nous allons donc vérifier si elles sont sécantes, c'est-à-dire chercher si on peut trouver t et t' tels que :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6 + t &= 3 - t' \\ 1 + 2t &= -3 + t' \\ 1 - t &= -6 + 2t' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t &= -3 - t' \\ 1 - 6 - 2t' &= -3 + t' \\ 1 + 3 + t' &= -6 + 2t' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 - t' \\ t' = -\frac{2}{3} \\ t' = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme on ne trouve pas la même valeur de t' dans la deuxième et la troisième équation, on ne peut pas trouver t et t' tels que le système soit vérifié, donc les droites (d) et (d') ne sont pas sécantes.

Par conséquent, elles ne sont pas coplanaires.

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE • CHAP. 11

- 4 Les coordonnées du milieu d'un segment sont les demi-sommes des coordonnées des deux extrémités, donc on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{6+t+3-t'}{2} = 1 \\ \frac{1+2t-3+t'}{2} = -2 \\ \frac{1-t-6+2t'}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7+t' \\ 1-14+2t'-3+t' = -4 \\ 1+7-t'-6+2t' = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -7+t' \\ t' = 4 \\ t' = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t' = 4 \end{cases}$$

On a trouvé des valeurs de t et t' .

$t = -3$, donc $C(3; -5; 4)$, et $t' = 4$, donc $D(-1; 1; 2)$, en utilisant les représentations paramétriques des deux droites.

MÉTHODE

Il est ici prudent de vérifier que I est bien le milieu du segment $[CD]$, ce qui est le cas.

9 Plan médiateur d'un segment

Enoncé
p. 286

Lycée Hoche, Versailles

1 $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AH}$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DH})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AE})$$

Donc $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

Donc $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

K étant le milieu de $[IJ]$, K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 \vec{AK} a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$, donc le vecteur \vec{AG} a pour coordonnées $(1; 1; 1)$.

Les vecteurs \vec{AK} et \vec{AG} ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Donc les points A , K et G ne sont pas alignés.

Remarque : cette vérification est nécessaire puisqu'on parle ensuite du plan (AKG) qui ne serait pas défini si les points A , K et G étaient alignés.

3 (a) La notion de plan médiateur d'un segment dans l'espace est similaire à celle de médiatrice dans le plan. C'est donc l'ensemble des points équidistants des deux extrémités du segment.

K étant le milieu de $[IJ]$, $IK = KJ$, donc K appartient au plan médiateur.

$[AI]$ et $[AJ]$ sont deux demi-diagonales de deux faces du cube, donc $AI = AJ$ et A appartient au plan médiateur.

Dans le triangle GHI rectangle en H , d'après le théorème de Pythagore, $GI^2 = GH^2 + HI^2$.

De même, dans le triangle GJC , $GJ^2 = GC^2 + CJ^2$.

Or $GH = GC$ (deux arêtes du cube) et $HI = CJ$ (deux demi-diagonales de deux faces du cube). Donc $GI^2 = GJ^2$ et $GI = GJ$. Par conséquent G appartient au plan médiateur de $[IJ]$. Les trois points considérés étant non alignés, ils définissent le plan (AKG) qui est donc le plan médiateur du segment $[IJ]$.

(b) L'équation cartésienne est de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

$A(0; 0; 0)$ appartient au plan donc $d = 0$ et l'équation est de la forme $ax + by + cz = 0$.

K appartient à (AKG) donc $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = 0$.

G appartient à (AKG) donc $a + b + c = 0$.

L'équation du plan est définie à une constante multiplicative près, donc on peut choisir la valeur d'un des coefficients. Choisissons par exemple $a = 4$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = -1 \\ b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = -4 \\ b + c = -4 \end{cases}$$

Par soustraction des deux équations, on obtient $b = 0$, puis en remplaçant b par sa valeur dans une des équations, $c = -4$.

Une équation cartésienne du plan (AKG) est donc $4x - 4z = 0$, ou encore $x - z = 0$.

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE DANS L'ESPACE • CHAP. 11

Pour la représentation paramétrique, on peut utiliser le point A et les deux vecteurs \vec{AK} et \vec{AG} . On obtient donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}t + t' \\ y = \frac{1}{2}t + t' \\ z = \frac{1}{4}t + t' \end{cases}, \quad t \text{ et } t' \text{ étant deux réels.}$$

(c) D a pour coordonnées $(0; 1; 0)$. Ces coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan donc D appartient au plan (AKG) .

4 Une représentation paramétrique de la droite (AK) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{4}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

en utilisant le point A et le vecteur directeur \vec{AK} .

Le plan (CDH) est constitué de tous les points dont l'ordonnée est 1, il a donc pour équation $y = 1$.

Le point d'intersection de (AK) et de (CDH) a donc pour ordonnée 1, ce qui nous donne $t = 2$.

Le point d'intersection a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$. C'est le centre de la face $CDHG$.

10 Position relative de plans et de droite

Enoncé
p. 287

Lycée Claude Bernard, Paris

1 La représentation paramétrique proposée est une représentation du plan \mathcal{P} si et seulement si les coordonnées exprimées en fonction de t et t' vérifient l'équation cartésienne du plan \mathcal{P} pour toutes valeurs de t et t' .

Donc on remplace :

$$t + 2t' - 2(1 - t + t') + 3(-1 - t) + 5 = 0t + 0t' - 5 + 5 = 0.$$

L'équation est vérifiée quelles que soient les valeurs de t et t' , donc on a bien une représentation paramétrique du plan \mathcal{P} .

2 Là encore, on remplace dans l'équation cartésienne de \mathcal{P} : si, pour tout t , les coordonnées des points de \mathcal{D} vérifient l'équation de \mathcal{P} , cela signifiera que \mathcal{D} est incluse dans \mathcal{P} .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Remarque : les deux autres cas de figure sont :

- les coordonnées des points de \mathcal{D} ne vérifient l'équation cartésienne de \mathcal{P} pour aucune valeur de t : alors la droite est parallèle au plan \mathcal{P} ;
- il existe une unique valeur de t qui convient : alors la droite \mathcal{D} est sécante au plan \mathcal{P} .

En remplaçant, il vient :

$$-2 + t - 2(-t) + 3(-1 - t) + 5 = 0t - 5 + 5 = 0.$$

Donc ici aussi, toute valeur de t convient, donc la droite \mathcal{D} est une droite du plan \mathcal{P} .

- 3** Cherchons à quelle condition un point de \mathcal{S} appartient à \mathcal{P} , en remplaçant x , y et z dans l'équation cartésienne de \mathcal{P} par leur expression dans la représentation paramétrique de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} -2 + t + 2t' - 2(-t - 2t') + 3(-1 - t + 3t') + 5 &= 0 \\ \iff 0t + 15t' &= 0 \\ \iff t' &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation de l'intersection en remplaçant t' par 0 dans la représentation paramétrique de \mathcal{S} .

La droite intersection de \mathcal{P} et \mathcal{S} a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

C'est en fait la droite \mathcal{D} .

Produit scalaire

Plan du chapitre

1. Produit scalaire et norme
2. Orthogonalité dans l'espace
3. Équation cartésienne d'un plan
4. Intersection

Exercice type 1

Lycée Hoche, Versailles

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1 ; -1 ; 0)$, $B(3 ; 0 ; 1)$, $C(1 ; 1 ; 0)$ et $D(3 ; 1 ; -2)$. On nomme I le milieu de $[AD]$.

- 1 Démontrer que les droites (AC) et (DC) sont perpendiculaires.
- 2 Démontrer, par un calcul vectoriel, que pour tout point M de l'espace,
$$\vec{MD} \cdot \vec{MA} = MI^2 - IA^2.$$
- 3 En déduire une équation cartésienne de l'ensemble \mathcal{E} des points M tels que $\vec{MD} \cdot \vec{MA} = 0$, et le caractériser.
- 4 Les points B et C appartiennent-ils à cet ensemble \mathcal{E} ?

1 Produit scalaire et norme

1.1 Produit scalaire dans l'espace

Définition 1

Le produit scalaire dans l'espace de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans tout plan contenant ces vecteurs.

Il en découle que le produit scalaire dans l'espace a les mêmes propriétés que le produit scalaire dans le plan. Il faudra seulement penser à introduire la troisième coordonnée lorsqu'on fait du calcul analytique.

Propriété 1 (Expression du produit scalaire)

Dans un repère orthonormé de l'espace, le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} de coordonnées respectives $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Propriété 2

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} des vecteurs, a et b deux réels,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{symétrie})$$

$$(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{u} \cdot \vec{w}) + b(\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad (\text{linéarité}).$$

1.2 Norme et distance de deux points

Propriété 3

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Propriété 4

Soit A et B deux points,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2 \quad (\text{carré scalaire}).$$

Une sphère étant un ensemble de point équidistants d'un point fixe, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1

Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de l'espace et R un réel positif.

La sphère de centre A et de rayon R admet pour équation cartésienne :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Orthogonalité de deux droites

Définition 2

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Propriété 5

Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.

2.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété 6

Soit \mathcal{D} une droite de vecteur directeur \vec{u} , et \mathcal{P} un plan dirigé par le couple de vecteur (\vec{v}, \vec{v}') . La droite \mathcal{D} est orthogonale au plan \mathcal{P} si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$.

Propriété 7

\mathcal{D} est une droite de vecteur directeur \vec{u} , orthogonale au plan \mathcal{P} . Alors pour tous points M et N de \mathcal{P} on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{MN} = 0.$$

Solution de l'exercice type 1

Lycée Hoche, Versailles

1 \vec{AC} a pour coordonnées $(0 ; 2 ; 0)$ et \vec{DC} a pour coordonnées $(-2 ; 0 ; 2)$. On constate donc que $\vec{AC} \cdot \vec{DC} = 0$, ce qui signifie que les vecteurs directeurs des droites (AC) et (BC) sont orthogonaux. Les deux droites sont donc orthogonales. Elles sont même perpendiculaires car elles sont sécantes en C .

2 Comme I est le milieu de $[AD]$, on a $\vec{ID} = \vec{AI}$.
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{MD} \cdot \vec{MA} &= (\vec{MI} + \vec{ID}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IA}) \\ &= \vec{MI} \cdot \vec{MI} + \vec{MI} \cdot (\vec{ID} + \vec{IA}) + \vec{AI} \cdot \vec{IA} \\ &= MI^2 - IA^2 \end{aligned}$$

3 Les coordonnées de I étant $(2 ; 0 ; -1)$, on a :

$$AI = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

En notant $(x ; y ; z)$ les coordonnées du point M , la condition $\vec{MD} \cdot \vec{MA} = 0$ qui équivaut à $MI^2 - IA^2 = 0$ devient :

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 3.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 1 (suite)

Lycée Hoche, Versailles

On reconnaît l'équation d'une sphère de centre $I(2 ; 0 ; -1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

4 Pour savoir si les points B et C appartiennent à cette sphère, on teste si les coordonnées de ces points vérifient l'équation.

- Pour B : $(3 - 2)^2 + 0^2 + (1 + 1)^2 = 5$, donc B n'appartient pas à la sphère.
- Pour C : $(1 - 2)^2 + 1^2 + (0 + 1)^2 = 3$, donc le point C appartient à la sphère.

⚠ ATTENTION

Une erreur classique est d'oublier que l'on est dans l'espace, et de parler de cercle au lieu de sphère.

3 Équation cartésienne d'un plan

Exercice type 2

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(3 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 6 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 4)$ et $D(-5 ; 0 ; 1)$.

- 1 (a) Vérifier que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(4 ; 2 ; 3)$ est normal au plan (ABC) .
(b) Déterminer une équation du plan (ABC) .
- 2 (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , orthogonale au plan (ABC) passant par D .
(b) En déduire les coordonnées du point H , projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .
(c) Calculer la distance du point D au plan (ABC) .

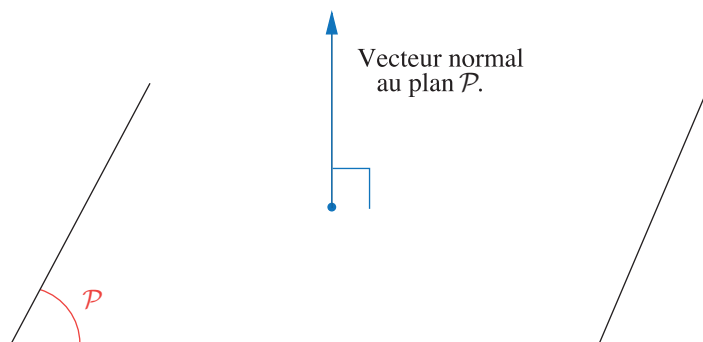
3.1 Vecteur normal à un plan

Définition 3

Soit \mathcal{P} un plan dans l'espace. Un vecteur non nul \vec{v} est dit *vecteur normal* de \mathcal{P} si pour tous points M et N de \mathcal{P} on a :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$

On peut dire aussi que \mathcal{P} est orthogonal à \vec{v} .



3.2 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 2

Soit $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point de l'espace et $\vec{v}(a ; b ; c)$ un vecteur non nul. Il existe un unique plan \mathcal{P} passant par A et orthogonal à \vec{v} . On a :

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0.$$

Propriétés 8

- Le plan \mathcal{P} admet donc une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz = d$.
- Réciproquement, si \mathcal{P} est un plan de l'espace d'équation cartésienne :

$$ax + by + cz = d,$$

alors le vecteur $\vec{n}(a ; b ; c)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

- Si $a'x + b'y + c'z = d'$ est une équation cartésienne d'un plan \mathcal{P}' , alors les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles si et seulement si un vecteur normal de \mathcal{P} est colinéaire à un vecteur normal de \mathcal{P}' , c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$, $c = \lambda c'$.
- En conséquence, $a'x + b'y + c'z = d'$ est une autre équation cartésienne de \mathcal{P} si et seulement si les deux équations sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$, $c = \lambda c'$ et $d = \lambda d'$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Intersection

4.1 Intersection d'une droite et d'un plan

Propriétés 9

Soit \mathcal{P} un plan de vecteur normal \vec{n} et \mathcal{D} une droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

- 1 Si \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux, alors \mathcal{D} et \mathcal{P} sont parallèles.
De plus, si $A \in \mathcal{P}$, alors \mathcal{D} est incluse dans \mathcal{P} ,
et si $A \notin \mathcal{P}$, alors \mathcal{D} et \mathcal{P} n'ont aucun point commun.
- 2 Si \vec{n} et \vec{u} ne sont pas orthogonaux, alors \mathcal{D} et \mathcal{P} sont sécants.

4.2 Intersection de deux plans

Propriété 10 (Point de vue géométrique)

Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans distincts de vecteurs normaux \vec{n} et \vec{n}' .

- Si \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires, alors \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun.
- Si \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires, alors \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants. Leur intersection est une droite.

Propriété 11 (Point de vue algébrique)

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' d'équation respective $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants si et seulement si les triplets $(a ; b ; c)$ et $(a' ; b' ; c')$ ne sont pas proportionnels.

4.3 Position relative de trois plans

Déterminer l'intersection \mathcal{L} des trois plans :

$$\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad (E_1)$$

$$\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad (E_2)$$

$$\mathcal{P}_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \quad (E_3)$$

revient à résoudre le *système linéaire* (Σ) constitué par les équations (E_1) , (E_2) , (E_3) .

Le système est dit compatible si et seulement si $\mathcal{L} \neq \emptyset$. L'intersection peut être alors :

- un point (le système admet alors une unique solution),

- une droite,
- un plan.

Dans ces deux derniers cas, on parle de système *indéterminé*.

4.3.1 - 1^{er} cas : $\mathcal{L} \neq \emptyset$

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est alors une droite \mathcal{D} .

On est ramené à étudier $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_3$, une bonne méthode pour cela étant de chercher une représentation paramétrique de \mathcal{D} .

- Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_3$ est réduit à un point P , on dit que les trois plans sont *concourants*.
- Sinon on a $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_3$ et donc $\mathcal{L} = \mathcal{D}$. Le système est équivalent au système obtenu en supprimant l'une quelconque des trois équations. On obtient un *système d'équations cartésiennes* de la droite \mathcal{D} .

4.3.2 - 2^e cas : $\mathcal{L} = \emptyset$

Le système est incompatible dans les trois configurations suivantes :

- Les trois plans sont deux à deux strictement parallèles.
- Deux plans sont strictement parallèles, par exemple \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Alors \mathcal{P}_3 coupe \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 suivant des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 parallèles.
- Les plans sont deux à deux sécants et les droites d'intersection sont strictement parallèles.

← Solution de l'exercice type 2

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

- 1 (a) \vec{AB} a pour coordonnées $(-3 ; 6 ; 0)$ et \vec{AC} a pour coordonnées $(-3 ; 0 ; 4)$. Les coordonnées de ces vecteurs n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Cela montre que les points A , B et C définissent bien un plan et il suffit de montrer que \vec{n} est orthogonal à ces deux vecteurs pour montrer qu'il est normal au plan (ABC) .

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 4 \times (-3) + 2 \times 6 + 3 \times 0 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 4 \times (-3) + 2 \times 0 + 3 \times 4 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est donc bien un vecteur normal au plan (ABC) .

- (b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme $4x + 2y + 3z = d$, avec d tel que les coordonnées de A par exemple vérifient l'équation, donc $12 = d$. Cela donne donc :

$$4x + 2y + 3z = 12.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

- 2 (a) La droite Δ orthogonale au plan (ABC) a pour vecteur directeur \vec{n} et passe par le point D , donc une représentation paramétrique de cette droite peut être :

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Le point H appartient à Δ et à (ABC) si et seulement si il existe une valeur du paramètre t tel que :

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \\ 4x + 2y + 3z = 12 \end{cases}$$

En remplaçant x , y et z en fonction de t dans la dernière équation on trouve la condition :

$$4(-5 + 4t) + 2 \times 2t + 3(1 + 3t) = 12,$$

d'où $t = 1$ et les coordonnées du point H sont donc $(-1 ; 2 ; 4)$.

- (c) La distance de D au plan (ABC) est égale à DH puisque H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) . On trouve :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{(-1 + 5)^2 + (2 - 0)^2 + (4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{29}. \end{aligned}$$

1 V/F Généralités

10 min Corrigé p. 312

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Si A et B sont deux points distincts de l'espace et k un réel non nul, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} = k \cdot \vec{AB}$ est la droite (AB) .
- 2** Si A, B, C sont trois points distincts de l'espace et H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$.
- 3** Si A, B, C, D sont quatre points distincts de l'espace tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$ alors les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.
- 4** Le plan d'équation $x - 2y + 2z - 7 = 0$ est tangent à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 4 = 0$ au point A de coordonnées $(1 ; 1 ; 4)$.

2 V/F Produit scalaire dans l'espace

10 min Corrigé p. 312

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le vecteur \vec{u} de coordonnées $(0 ; 1 ; 2)$.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Il existe un unique vecteur \vec{v} de l'espace tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{i} = 0$.
- 2** L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{OM} = 0$ est un plan.
- 3** L'ensemble des vecteurs \vec{v} de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{i} = -1$ et $\vec{v} \cdot \vec{j} = 0$ est vide.
- 4** L'ensemble des vecteurs \vec{v} de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ $\vec{v} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{v} \cdot \vec{j} = 1$ est vide.

3 V/F Positions relatives de plans de l'espace

10 min Corrigé p. 312

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ trois plans tels que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \emptyset$, alors le système formé par les équations cartésiennes de ces trois plans n'admet aucune solution.
- 2** Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ trois plans tels que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \emptyset$, alors le plan \mathcal{P} est parallèle au plan \mathcal{Q} et le plan \mathcal{Q} est parallèle au plan \mathcal{R} .
- 3** Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ et $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$.
- 4** Soit m un réel, l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(m ; m ; 0)$ est le plan d'équation cartésienne $x - y = 0$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 **V/F** **Droites et plans de l'espace**

10 min Corrigé p. 313

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère quatre points $A(2; 4; 1)$, $B(0; 4; -3)$, $C(3; 1; -3)$ et $D(1; 0; -2)$.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 2y - z = 11$.
- 2** Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
- 3** Une représentation paramétrique de la droite (CD) est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 4** Le point I de coordonnées $\left(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5}\right)$ appartient à la droite (AB) .

5 **Avec un cube**

20 min Corrigé p. 313

Lycée Carnot, Dijon

Soit $ABCA'B'C'D'$ un cube d'arête a , où (AA') , (BB') , (CC') et (DD') sont parallèles.

Calculer les produits scalaires suivants en fonction de a .

$$\begin{aligned} &\vec{AB} \cdot \vec{AA'} \quad , \quad \vec{AB} \cdot \vec{CC'} \quad , \quad \vec{AB} \cdot \vec{DC'} \quad , \quad \vec{AB} \cdot \vec{CD'} \quad , \\ &\vec{AD} \cdot \vec{BC'} \quad , \quad \vec{AC} \cdot \vec{DB'} \quad , \quad \vec{AC'} \cdot \vec{DB'} \quad , \quad \vec{AC'} \cdot \vec{A'C'} \quad . \end{aligned}$$

6 **Étude d'un quadrilatère**

15 min Corrigé p. 314

Lycée Pasteur, Dole

Soit l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les 4 points $A(13; -11; 10)$, $B(13; 9; 25)$, $C(-7; 18; 13)$ et $D(-7; -2; -2)$.

Quelle est la nature de la figure $ABCD$?

7 **Arêtes orthogonales d'un tétraèdre**

15 min Corrigé p. 314

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

- 1** Montrer que pour tous points A , B , C et D de l'espace, on a :

$$\vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} + \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0.$$

- 2** En déduire que, si dans un tétraèdre deux couples d'arêtes opposées sont formés d'arêtes orthogonales, il en est de même du troisième.

8 Base orthonormée



10 min

Corrigé
p. 314

Lycée Condorcet, Paris

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient :

$$\vec{u} \left(-\frac{4}{9}; \frac{1}{9}; \frac{8}{9} \right) ; \quad \vec{v} \left(\frac{4}{9}; \frac{8}{9}; \frac{1}{9} \right) \quad \text{et} \quad \vec{w} \left(\frac{7}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{4}{9} \right).$$

Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée.

9 Équation cartésienne d'un plan



15 min

Corrigé
p. 315

Lycée Victor Hugo, Besançon

Soit l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les 2 points $A(-1; 0; 1)$ et $B(0; 3; 1)$.

- 1 Donner une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(0; 1; 1)$.
- 2 Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan d'équation $x + y - 2z = 4$ et passant par B .
- 3 Donner une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

10 Droites et plans de l'espace



25 min

Corrigé
p. 316

Lycée Jean Renoir, Bondy

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1; 0; 2) \quad , \quad (3; 2; -4) \quad , \quad (1; -4; 2) \quad \text{et} \quad (5; -2; 4).$$

On considère les points I, J, K définis par : I milieu du segment $[AB]$, K milieu du segment $[CD]$ et $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$.

- 1 Déterminer les coordonnées des points I, J et K .
- 2 (a) Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
(b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :
$$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$
- (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et démontrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.
- (d) Montrer que $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Aires et volumes



45 min

Corrigé
p. 318

Lycée Jean Renoir, Bondy

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(3 ; 0 ; 1)$, $B(0 ; -1 ; 2)$, $C(1 ; -1 ; 0)$ et $D(1 ; 1 ; -2)$.

- 1 (a) Démontrer que les vecteurs \vec{AC} et \vec{BC} sont orthogonaux.
(b) En déduire la nature du triangle ABC .
(c) Calculer l'aire de ce triangle.
- 2 (a) Vérifier que $\vec{u}(2 ; -5 ; 1)$ est un vecteur normal du plan (ABC) .
(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
(c) On admet le résultat suivant :
Soit \mathcal{P} un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz = d$.
Si M est un point quelconque, de coordonnées $(x ; y ; z)$, on a :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Déterminer la distance de D au plan (ABC) .

- 3 En utilisant les questions 1 et 2, déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.
- 4 (a) Déterminer un vecteur \vec{n} tel que $\vec{n} \cdot \vec{BC} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{CD} = 0$.
(b) En déduire une équation cartésienne du plan (BCD) .
- 5 Exprimer le volume du tétraèdre $ABCD$ en fonction de l'aire du triangle BCD .
- 6 Déterminer l'aire du triangle BCD .

12 Configuration remarquable



10 min

Corrigé
p. 320

Lycée de Montgeron

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le point H de coordonnées $(a ; b ; c)$ où a, b et c sont trois réels tels que $abc \neq 0$.

On pose $S = a^2 + b^2 + c^2$.

- 1 Déterminer une équation du plan \mathcal{P} passant par H et orthogonal à la droite (OH) .
- 2 Déterminer les coordonnées des points A, B et C d'intersection de \mathcal{P} avec les axes $x'Ox, y'Oy$ et $z'Oz$.
- 3 Vérifier que :

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}.$$

13 **Algorithme**



20 min

Corrigé
p. 321

Lycée Virlogeux, Riom

On considère une droite \mathcal{D} passant par le point $A(a ; b ; c)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(m ; n ; p)$, ainsi qu'un point $P(x ; y ; z)$.

On appelle distance de P à \mathcal{D} le minimum de la longueur PM lorsque le point M décrit la droite \mathcal{D} .

- 1 Écrire une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .
- 2 Calculer l'expression de la distance MP pour un point M quelconque de \mathcal{D} .
- 3 On considère l'algorithme suivant :

```

Initialisation
  t=0
  r=0,01
Entrées
  Donner les valeurs de a, b, c, m, n, p, x, y, z
Traitement
  Donner à I la valeur  $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ 
  Donner à D la valeur  $(x-a-rm)^2+(y-b-rn)^2+(z-c-rp)^2$ 
  Si  $D > I$  alors
    remplacer r par  $-r$ 
    Donner à D la valeur  $(x-a-rm)^2+(y-b-rn)^2+(z-c-rp)^2$ 
  Fin Si
  Tant que  $D < I$  Faire
    Donner à T la valeur t+r
    Donner à I la valeur D
    Donner à D la valeur  $(x-a-tm)^2+(y-b-tn)^2+(z-c-tp)^2$ 
  Fin de tant que
Sortie
  Afficher  $\sqrt{I}$ 
    
```

- Que fait calculer cet algorithme aux lignes (1) et (2) du traitement ?
 Expliquer quelle méthode il utilise pour obtenir une valeur approchée de la distance de P à \mathcal{D} .
 Que peut-on craindre avec cette méthode ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Généralités

Enoncé
p. 307

- 1 Faux. Si k est non nul, le point M ne pourra jamais être confondu avec A . L'ensemble obtenu sera donc la droite (AB) privée de A .
- 2 Vrai. Si le point C appartient à la droite (AB) alors $C = H$ et l'égalité est vraie. Sinon, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} + \vec{AB} \cdot \vec{HC}$. Or, les droites (AB) et (HC) sont orthogonales donc $\vec{AB} \cdot \vec{HC} = 0$.
Par suite, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$.
- 3 Faux. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$ équivaut à $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 0$ donc les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont orthogonaux et non colinéaires.
- 4 Vrai. On commence par transformer l'équation de la sphère en $x^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$. La sphère est de centre $I(0 ; 3 ; 2)$ et de rayon 3.
On s'assure que le point A appartient bien à cette sphère puisque ses coordonnées vérifient l'équation trouvée. Le plan tangent à la sphère au point A est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} \cdot \vec{IA} = 0$. En calculant ce produit scalaire, on obtient ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 7 = 0$.

2 V/F Produit scalaire dans l'espace

Enoncé
p. 307

- 1 Faux. Les vecteurs de coordonnées $(0 ; 2 ; -1)$ et $(0 ; 6 ; -3)$ vérifient tous les deux les conditions demandées.
- 2 Vrai. L'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{OM} = 0$ forme le plan d'équation : $y + 2z = 0$.
- 3 Faux. Le vecteur de coordonnées $(-1 ; 0 ; 0)$ convient.
- 4 Faux. Le vecteur de coordonnées $(1 ; 1 ; 0)$ convient.

3 V/F Positions relatives de plans de l'espace

Enoncé
p. 307

- 1 Vrai. Un triplet $(a ; b ; c)$ est solution du système formé par les équations cartésiennes de ces trois plans si et seulement si il vérifie ces trois équations, ce qui équivaut à dire que le point de coordonnées $(a ; b ; c)$ appartient simultanément aux trois plans. Or, par hypothèse, l'intersection des trois plans est vide.
- 2 Faux. Considérons les plans \mathcal{P} , \mathcal{Q} et \mathcal{R} d'équations cartésiennes respectives $x + y = 2$, $y + z = 3$ et $x + 2y + z = 0$. L'intersection de ces trois plans est clairement vide cependant ces plans ne sont pas parallèles.
- 3 Faux. Considérons les plans \mathcal{P} , \mathcal{Q} et \mathcal{R} d'équations cartésiennes respectives $x = 0$, $x + y = 2$ et $x = 3$. On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ puisque, par exemple

le point de coordonnées $(0 ; 2 ; 0)$ appartient à la fois à \mathcal{P} et à \mathcal{Q} . De même, on a $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ puisque le point de coordonnées $(3 ; -1 ; 0)$ appartient simultanément aux plans \mathcal{Q} et \mathcal{R} .

Cependant $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ puisqu'on ne peut avoir simultanément $x = 0$ et $x = 3$.

- 4 Faux. Le point de coordonnées $(1 ; 1 ; 1)$ appartient au plan d'équation cartésienne $x - y = 0$ mais ses coordonnées ne sont pas de la forme $(m ; m ; 0)$.

4 **v/f** Droites et plans de l'espace

Enoncé
p. 308

- 1 Vrai. On commence par vérifier que les points A , B et C ne sont pas alignés puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-2 ; 0 ; -4)$ et $\overrightarrow{AC}(1 ; -3 ; -4)$ ne sont pas colinéaires. Par suite, il existe un unique plan contenant les points A , B et C . Il ne reste plus qu'à s'assurer que les coordonnées des trois points vérifient l'équation proposée, ce qui est le cas.

- 2 Vrai. D'après la question précédente, les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $(-2 ; 0 ; -4)$.

On calcule de même celles du vecteur \overrightarrow{CD} soit $(-2 ; -1 ; 1)$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul donc ils sont orthogonaux et les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

- 3 Faux. Le point D n'appartient pas à la droite proposée. En effet, les équations $t - 1 = 0$ et $1 - t = -2$ sont incompatibles.

- 4 Vrai. On connaît les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} . On calcule celles du vecteur \overrightarrow{AI} soit $(-\frac{7}{5} ; 0 ; -\frac{14}{5})$. On a donc $\overrightarrow{AI} = \frac{7}{10}\overrightarrow{AB}$. Par suite, ces deux vecteurs sont colinéaires et les points A , I et B sont alignés.

5 Avec un cube

Enoncé
p. 308

Lycée Carnot, Dijon

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = a^2$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0$
- $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{DB'} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}) \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{BB'} = a^2$
- $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}) \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 2a^2$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

6 Étude d'un quadrilatère

Enoncé
p. 308

Lycée Pasteur, Dole

Calculons les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DC} et \overrightarrow{BC} :

$$\overrightarrow{AB}(0; 20; 15) \quad ; \quad \overrightarrow{DC}(0; 20; 15) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC}(-20; 9; -12).$$

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $ABCD$ est un parallélogramme. Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \times (-20) + 20 \times 9 + 15 \times (-12) = 0.$$

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} sont orthogonaux, donc $ABCD$ est un rectangle.

Enfin, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = 25$, donc $ABCD$ est un carré.

7 Arêtes orthogonales d'un tétraèdre

Enoncé
p. 308

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

- 1 On décompose les vecteurs \overrightarrow{DB} et \overrightarrow{DC} à l'aide de la relation de Chasles en introduisant le point A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\ &\quad + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \vec{0} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- 2 Les trois couples d'arêtes opposées sont $([DA],[BC])$, $([DB],[AC])$ et $([DC],[AB])$.

On applique alors l'égalité ci-dessus en supposant deux des trois produits scalaires nuls : le troisième est alors nul.

8 Base orthonormée

Enoncé
p. 309

Lycée Condorcet, Paris

Vérifions d'abord que les vecteurs sont unitaires :

$$\|\vec{u}\|^2 = \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{16 + 1 + 64}{81} = 1,$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{16 + 64 + 1}{81} = 1,$$

$$\|\vec{w}\|^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{49 + 16 + 16}{81} = 1.$$

Ensuite, calculons les produits scalaires suivants pour montrer que ces vec-

teurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{(-4) \times 4 + 1 \times 8 + 8 \times 1}{9 \times 9} = 0 ,$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{(-4) \times 7 + 1 \times (-4) + 8 \times 4}{9 \times 9} = 0 ,$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{4 \times 7 + 8 \times (-4) + 1 \times 4}{9 \times 9} = 0 .$$

Alors la famille de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée.

MÉTHODE

Pour prouver qu'une famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de trois vecteurs est une base orthonormée de l'espace, on montre que les normes des trois vecteurs sont égales à 1 (on dit alors que les vecteurs sont normés ou unitaires) puis que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

9 Équation cartésienne d'un plan

Enoncé
p. 309

Lycée Victor Hugo, Besançon

- 1** Comme \vec{n} est un vecteur normal au plan cherché, une équation cartésienne de celui-ci est :

$$y + z = d ,$$

où d est déterminé par le fait que A appartient au plan cherché, soit :

$$0 + 1 = d .$$

Le plan cherché admet donc pour équation cartésienne :

$$y + z = 1 .$$

- 2** Un plan parallèle au plan d'équation :

$$x + y - 2z = 4$$

admet pour équation :

$$x + y - 2z = a ,$$

où a est déterminé par le fait que B appartient au plan, soit :

$$3 - 2 = a .$$

Le plan cherché admet donc pour équation cartésienne :

$$x + y - 2z = 1 .$$

- 3** Le plan médiateur du segment $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et admet \vec{AB} comme vecteur normal.

Calculons les coordonnées du milieu de $[AB]$ ainsi que celles du vecteur \vec{AB} :

$$\text{Milieu de } [AB] : \left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; 1 \right) ; \quad \text{le vecteur } \vec{AB} : (1 ; 3 ; 0) .$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Le plan médiateur du segment $[AB]$ a donc pour équation :

$$x + 3y = c ,$$

avec :

$$-\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = c \quad , \quad \text{donc } c = 4.$$

Cette équation cartésienne est donc $x + 3y = 4$.

MÉTHODE

La première et la troisième question peuvent aussi être résolues avec les méthodes suivantes :

- Le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Si le point M a pour coordonnées $(x ; y ; z)$, on calcule alors les coordonnées du vecteur \vec{AM} puis on effectue le produit scalaire.
- Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et de B . Si le point M a pour coordonnées $(x ; y ; z)$, on calcule alors les distances MA et MB et on écrit l'égalité $MA^2 = MB^2$ qui après simplification fournira l'équation cherchée.

10 Droites et plans de l'espace

Enoncé
p. 309

Lycée Jean Renoir, Bondy

- 1** Les coordonnées respectives des points I et K sont :

$$I(1 ; 1 ; -1) \quad \text{et} \quad K(3 ; -3 ; 3).$$

Le point J est défini par la relation vectorielle $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$.

Soient $(x ; y ; z)$ les coordonnées du point J . Alors, les coordonnées du vecteur \vec{BJ} sont $(x - 3 ; y - 2 ; z + 4)$.

Les coordonnées du vecteur \vec{BC} sont $(-2 ; -6 ; 6)$.

Les coordonnées du point J s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} x - 3 = -\frac{1}{2} \\ y - 2 = -\frac{3}{2} \\ z + 4 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Le point J a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$.

- 2 (a)** Les vecteurs \vec{IK} et \vec{IJ} ont pour coordonnées respectives $(2 ; -4 ; 4)$

et $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Comme il n'existe pas de réel k tel que $\vec{IJ} = k\vec{IK}$, on en déduit que les vecteurs \vec{IK} et \vec{IJ} ne sont pas colinéaires donc les points I, J et K ne sont pas alignés.

- (b) Considérons le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne :

$$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

Il contient le point I puisque $8 \times 1 + 9 \times 1 + 5 \times (-1) - 12 = 0$. On montre de même que le plan \mathcal{P} contient aussi les points J et K . Or, d'après la question précédente, les points I, J, K ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan. Ce plan n'est donc autre que le plan \mathcal{P} . Par conséquent, une équation cartésienne du plan (IJK) est $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.

MÉTHODE

Pour résoudre cette question, on aurait pu aussi procéder de la manière suivante :

On commence par déterminer un vecteur \vec{n} à la fois orthogonal aux vecteurs \vec{IK} et \vec{IJ} . Un tel vecteur est donc un vecteur normal au plan (IJK) . Le plan (IJK) est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{n} \cdot \vec{IM} = 0$.

- (c) Le vecteur \vec{AD} a pour coordonnées $(6; -2; 2)$.
Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à la droite (AD) si et seulement si il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{AD}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AD) est donc :

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un point M de la droite (AD) appartient au plan (IJK) si et seulement si il existe un réel t tel que $8(6t - 1) - 18t + 5(2t + 2) - 12 = 0$.
En résolvant cette équation, on obtient $t = \frac{1}{4}$.

Le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

- (d) Le vecteur \vec{AD} a pour coordonnées $(6; -2; 2)$ et le vecteur \vec{AL} a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, ce qui établit la relation demandée.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Aires et volumes

Enoncé
p. 310

Lycée Jean Renoir, Bondy

- 1** (a) Les vecteurs \vec{AC} et \vec{BC} ont pour coordonnées respectives $(-2; -1; -1)$ et $(1; 0; -2)$. On calcule leur produit scalaire :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (-2) + (-1) \times (-2) = 0.$$

On en déduit que les vecteurs \vec{AC} et \vec{BC} sont orthogonaux.

- (b) On déduit de la première question que le triangle ABC est rectangle en C .
(c) L'aire du triangle ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AC \times BC,$$

soit :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sqrt{6} \times \sqrt{5}.$$

L'aire du triangle ABC est donc $\frac{\sqrt{30}}{2}$.

- 2** (a) On a vu que les points A, B, C ne sont pas alignés. Pour prouver que le vecteur \vec{u} est un vecteur normal au plan (ABC) , il suffit de prouver que ce vecteur est orthogonal à la fois aux vecteurs \vec{AC} et \vec{BC} . En effet, on sait d'après le cours que tout vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan \mathcal{P} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

On vérifie que $\vec{BC} \cdot \vec{u} = \vec{AC} \cdot \vec{u} = 0$ ce qui achève la preuve.

- (b) Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x; y; z)$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est

$$2x - 5y + z = 7.$$

- (c) Pour déterminer la distance de D au plan (ABC) , il suffit d'appliquer la formule donnée dans l'énoncé : soit \mathcal{P} un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz = d$.

Si M est un point quelconque, de coordonnées $(x; y; z)$, on a :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

On en déduit que la distance du point D au plan (ABC) est $\frac{|-12|}{\sqrt{30}}$

soit $\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

- 3** On considère comme base du tétraèdre $ABCD$ le triangle BCA . Son volume est alors :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A} \times \frac{2\sqrt{30}}{5},$$

soit $\mathcal{V} = 2$.

- 4 (a)** Soit \vec{n} un vecteur de coordonnées $(a ; b ; c)$.

En calculant ces produits scalaires, on montre que $\vec{n} \cdot \vec{BC} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{CD} = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ 2b - 2c = 0. \end{cases}$$

On peut donc choisir par exemple $\vec{n}(2 ; 1 ; 1)$.

ATTENTION

Il existe une infinité de vecteurs \vec{n} répondant à la question !

- (b)** Remarquons que les points B, C, D ne sont pas alignés (les vecteurs \vec{BC} et \vec{CD} ne sont pas colinéaires) donc ils déterminent un plan.

Le plan (BCD) est l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\vec{BM} \cdot \vec{n} = 0$. Une équation cartésienne du plan (BCD) est $2x + y + z = 1$.

- 5** On considère comme base du tétraèdre $ABCD$ le triangle BCD . Son volume est alors donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}' \times d,$$

où \mathcal{A}' représente l'aire du triangle BCD et d la distance du point A au plan (BCD) .

On calcule cette distance en utilisant la même formule qu'à la question **2.c**.

$$d = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

On a donc :

$$\mathcal{V} = \frac{\sqrt{6}}{3} \mathcal{A}'.$$

- 6** Le volume du tétraèdre ayant été calculé antérieurement, on peut ainsi déterminer l'aire du triangle BCD .

On a :

$$2 = \mathcal{A}' \times \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

On en déduit :

$$\mathcal{A}' = \sqrt{6}.$$

MÉTHODE

On retiendra la méthode utilisée dans cet exercice (un grand classique des sujets de baccalauréat antérieurs).

On considère un tétraèdre et, en calculant son volume de deux manières différentes, on déduit, selon les problèmes, soit l'aire d'une des faces triangulaires du tétraèdre soit la distance d'un des sommets au plan contenant la face opposée à ce sommet.

12 Configuration remarquable

Enoncé
p. 310

Lycée de Montgeron

1 Remarquons tout d'abord que comme $abc \neq 0$, les trois réels a , b et c sont non nuls.

Le vecteur \overrightarrow{OH} de coordonnées $(a ; b ; c)$ est normal au plan \mathcal{P} , qui a donc une équation du type :

$$ax + by + cz = d.$$

De plus, $H \in \mathcal{P}$ donc $ax_H + by_H + cz_H = d$.

Après calcul, $d = a^2 + b^2 + c^2 = S$, d'où :

$$ax + by + cz = S. \quad (\mathcal{P})$$

2 Équation :

$$\text{de } x'Ox : y = z = 0$$

$$\text{de } y'Oy : x = z = 0$$

$$\text{de } z'Oz : x = y = 0$$

Or, $A \in \mathcal{P} \cap (x'Ox)$ donc $y_A = z_A = 0$ et $ax_A = S$, d'où $A \left(\frac{S}{a} ; 0 ; 0 \right)$.

De façon analogue, on trouve : $B \left(0 ; \frac{S}{b} ; 0 \right)$ et $C \left(0 ; 0 ; \frac{S}{c} \right)$.

3 On a $OA^2 = \frac{S^2}{a^2}$, $OB^2 = \frac{S^2}{b^2}$, $OC^2 = \frac{S^2}{c^2}$.

$$\text{Donc } \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{S^2} = \frac{S}{S^2} = \frac{1}{S}.$$

Or, $OH^2 = S$ donc $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{S}$. Finalement on a bien :

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}.$$

13 Algorithmme

Enoncé
p. 311

Lycée Virlogeux, Riom

1 Une représentation paramétrique de \mathcal{D} est :

$$\begin{cases} x = a + tm \\ y = b + tn \\ z = c + tp \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2 $PM = \sqrt{(x - a - tm)^2 + (y - b - tn)^2 + (z - c - tp)^2}$.

3 La ligne (1) calcule le carré de la distance de P à A .

La ligne (2) calcule le carré la distance de P au point M de \mathcal{D} de paramètre $r = 0,01$.

Le test permet de voir si PM^2 est plus grand que PA^2 .

Dans ce cas, le point paramétré par t sur \mathcal{D} s'écarte, lorsque t augmente, de la position qui réalise la distance minimale PM . Alors on donne à r la valeur $-0,01$, ce qui fait « bouger » M dans l'autre sens.

On fait varier t de r à chaque boucle, et dès que la valeur D cesse de diminuer, on considère que la valeur précédente réalise à peu près la distance de P à la droite \mathcal{D} .

Avec ce procédé, on risque :

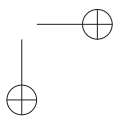
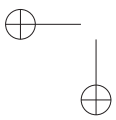
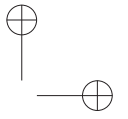
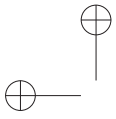
- soit d'obtenir un résultat assez éloigné du résultat exact si la norme du vecteur \vec{u} est grande, car les points choisis sur \mathcal{D} sont éloignés les uns des autres ;
- soit d'avoir un test très long à réaliser si au contraire la norme du vecteur \vec{u} est très petite.

On peut essayer de corriger ce défaut en modifiant correctement la valeur de r .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Probabilités conditionnelles

Plan du chapitre

1. Probabilités conditionnelles
2. Indépendance
3. Formule des probabilités totales

Exercice type

Lycée Virlogeux, Riom

Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. Ce test présente les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint de cette maladie ait un test positif est 0,95.
- la probabilité qu'un individu non atteint par cette maladie ait un test négatif est aussi 0,95.

On choisit un individu au hasard et on note M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « le test est positif ».

- 1** On réalise un dépistage dans une population donnée dans laquelle la proportion d'individus atteints de la maladie est 0,001.
 - (a) Construire un arbre représentant cette situation.
 - (b) Calculer la probabilité de l'événement T .
 - (c) Calculer la probabilité qu'un individu présentant un test positif soit atteint de la maladie. Cette probabilité est appelée valeur prédictive du test.
- 2** On veut étudier les variations de cette valeur prédictive selon la proportion d'individus atteints de la maladie dans la population.
 - (a) On considère une population à risque pour la maladie considérée : dans cette population, un quart des individus sont atteints. Quelle est alors la valeur prédictive du test ?
 - (b) On considère maintenant une population dans laquelle la proportion d'individus atteints de la maladie est x . Déterminer en fonction de x la valeur prédictive du test pour cette population. Pour quelle valeur de x un individu dont le test est positif a-t-il autant de chance d'être malade que d'être sain ?

1 Probabilités conditionnelles

Définition 1

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω et A un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement B , on appelle probabilité de B sachant A le réel :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Théorème 1

Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$. Alors :

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1.$$

2 Indépendance

Définition 2

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω . Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

L'indépendance peut résulter d'un dispositif expérimental : il faut y être vigilant en lisant l'énoncé. Par exemple, on peut effectuer des *expériences indépendantes*, simultanées ou successives. On attend d'un élève qu'il *mentionne* clairement cette indépendance dans sa copie avant d'appliquer la formule ci-dessus.

Propriété 1

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si :

$$P_A(B) = P(B)$$

ou

$$P_B(A) = P(A).$$

Propriété 2

Si A et B sont indépendants, alors \bar{A} et B , A et \bar{B} , et \bar{A} et \bar{B} le sont aussi.

3 Formule des probabilités totales

Définition 3

Les événements E_1, \dots, E_m forment une partition de Ω si et seulement si

- les E_i sont deux à deux incompatibles.
- aucun des E_i n'est impossible.
- la réunion des E_i est l'univers.

Remarque : on dit aussi que (E_1, \dots, E_m) forment un système complet d'événements.

Théorème 2

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω et E_1, \dots, E_m un système complet d'événements, alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \dots + P(B \cap E_m).$$

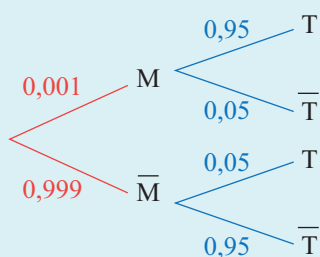
C'est l'importante *formule des probabilités totales*, qu'il faut écrire, quand c'est utile, directement sous la forme suivante :

$$P(B) = P_{E_1}(B) P(E_1) + P_{E_2}(B) P(E_2) + \dots + P_{E_m}(B) P(E_m).$$

Solution de l'exercice type

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 (a) On peut représenter la situation par l'arbre ci-dessous :



- (b) On calcule :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= 0,001 \times 0,95 + 0,999 \times 0,05 \\ &= 0,0509. \end{aligned}$$

(c) On a : $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,001 \times 0,95}{0,0509} \approx 0,0187.$

COURS

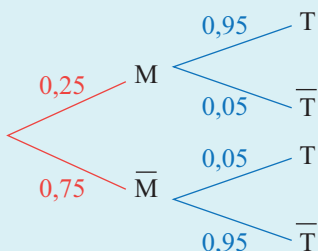
INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Virlogeux, Riom

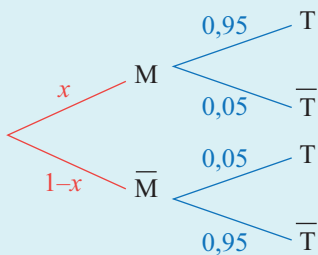
2 (a) On obtient le nouvel arbre :



En faisant le même calcul que précédemment, on obtient :

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,25 \times 0,95}{0,25 \times 0,95 + 0,75 \times 0,05} \approx 0,864.$$

(b) On obtient maintenant cet arbre :



En faisant le même calcul que précédemment, on obtient :

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{x \times 0,95}{x \times 0,95 + (1 - x) \times 0,05} = \frac{0,95x}{0,05 + 0,9x}.$$

$$\frac{0,95x}{0,05 + 0,9x} = 0,5 \iff 0,95x = 0,45x + 0,025$$

$$\iff 0,5x = 0,025$$

$$\iff x = 0,05.$$

Conclusion : un individu dont le test est positif a autant de chance d'être malade que sain lorsque 5% de la population est atteinte par cette maladie.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES • CHAP. 13

1 V/F Probabilités conditionnelles

10 min  Corrigé
p. 334

La bibliothèque d'un lycée comporte 150 romans policiers et 50 romans de science fiction. On sait que quarante pour cent des écrivains de romans policiers sont français et que soixante-dix pour cent des auteurs de science fiction sont français. Jacques choisit au hasard un ouvrage parmi les 200 livres de la bibliothèque.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 La probabilité que Jacques choisisse un roman policier est $\frac{1}{150}$.
- 2 La probabilité qu'il choisisse un roman policier français est 0,4.
- 3 La probabilité qu'il choisisse un ouvrage d'un auteur français est 0,475.
- 4 La probabilité qu'il choisisse un roman policier sachant que l'auteur est français est 0,3.

2 V/F Événements indépendants

10 min  Corrigé
p. 334

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir face au dixième lancer sachant qu'on a obtenu pile à tous les lancers précédents est strictement supérieure à 0,5.
- 2 Si A et B sont deux événements définis sur le même espace probabilisé tels que $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ et $P(A \cap \bar{B}) = \frac{4}{15}$, alors les événements A et B sont indépendants.
- 3 (a) Dans une classe de terminale S, les trois quarts des élèves sont des filles. Une fille sur trois a son permis de conduire du premier coup alors que cela n'est le cas que d'un garçon sur dix. On interroge au hasard un élève de la classe. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est 0,275.
(b) On interroge un élève ayant eu son permis du premier coup. La probabilité que ce soit un garçon est 0,1.

3 V/F Indépendance

10 min  Corrigé
p. 335

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Si deux événements de probabilité non nulle sont incompatibles, alors ils ne peuvent pas être indépendants.
- 2 Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements A et \bar{B} sont aussi indépendants.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 Si les événements A et B sont indépendants ainsi que les événements A et C alors les événements B et C sont indépendants.
- 4 Si les événements A et B sont indépendants ainsi que les événements A et C alors les événements A et $B \cap C$ sont indépendants.

4 V/F Intersection

25 min Corrigé p. 336

Pour chacune des propositions énoncées ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse.

Dans une mare vivent des grenouilles vertes et des rainettes. On observe que 30% des grenouilles sont des rainettes et donc 70% des grenouilles sont des grenouilles vertes.

Un héron mange 10% des rainettes et 20% des grenouilles vertes de cette mare.

Alors la probabilité

- 1 qu'une rainette soit mangée par le héron est $\frac{1}{10}$.
- 2 qu'une grenouille verte soit mangée par le héron est $\frac{1}{5}$.
- 3 qu'une grenouille soit mangée par le héron est $\frac{3}{10}$.
- 4 qu'une grenouille soit une rainette et mangée par le héron est $\frac{3}{100}$.
- 5 qu'une grenouille mangée par le héron soit une rainette est $\frac{1}{3}$.

5 Lancer de fléchettes

35 min Corrigé p. 337

Lycée Carnot, Dijon

Une épreuve consiste à jeter des fléchettes sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2 et 3. Deux concurrents A et B sont en présence. On admet que chaque joueur touche une case et une seule à chaque lancer, et que de plus les lancers sont indépendants. Pour le concurrent A , la probabilité de toucher les cases 1, 2 et 3 sont dans cet ordre :

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{3} \text{ et } \frac{7}{12}.$$

Le concurrent B a ses 3 éventualités équiprobables.

- 1 Le concurrent A lance 3 fléchettes.
- (a) Quelle est la probabilité qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?
- (b) Quelle est la probabilité qu'il atteigne les cases 1, 2 et 3 dans cet ordre ?

(c) Quelle est la probabilité qu'il atteigne les cases 1, 2 et 3 ?

2 On choisit un des 2 concurrents. La probabilité de choisir A est égale à $\frac{2}{3}$, celle de choisir B vaut $\frac{1}{3}$.

(a) Un seul lancer est effectué, quelle est la probabilité que la case 3 soit atteinte ?

(b) Un seul lancer est effectué et la case 3 est atteinte. Quelle est la probabilité que ce soit le concurrent A qui ait lancé la fléchette ?

6 Indépendance



15 min

Corrigé
p. 338

Lycée Marie Curie, Sceaux

On lance un dé non pipé 3 fois de suite. Soit x , y et z les chiffres obtenus lors des trois lancers.

On considère deux événements :

- $A = \ll x \times y \times z = 12 \gg$
- $B = \ll x + y = 4 \gg$.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

7 Espérance d'un gain



20 min

Corrigé
p. 339

Lycée Hoche, Versailles

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication. Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est livré au client. Sinon, il retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est livré au client, sinon il est détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 85% des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 60% d'entre eux passent le second test avec succès.

On note T_1 l'événement : « le premier test est positif ».

On note C l'événement : « l'écran est livré au client ».

- 1** Représenter les données de l'exercice par un arbre de probabilité.
- 2** On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
 - (a) Quelle est la probabilité de l'événement T_1 ?
 - (b) Quelle est la probabilité de l'événement C ?
- 3** La fabrication de l'écran revient à 150 euros au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois. Cela lui coûte 30 euros de plus si il doit être testé une seconde fois. Chaque écran livré est facturé n euros au client.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque écran fabriqué, associe le gain (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

- Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de n .
- Exprimer l'espérance de X en fonction de n .
- À partir de quelle valeur de n le fabricant peut-il espérer réaliser des bénéfices ? (Arrondir n à l'entier supérieur).

8 Sondages téléphoniques



50 min

Corrigé
p. 340

Lycée Paul Doumer, Le Perreux-sur-Marne

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1 On note :

- A_1 l'événement « la personne est absente lors du premier appel » ;
- R_1 l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Quelle est la probabilité de R_1 ?

2 Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois à une heure différente, et, alors, la probabilité qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- A_2 l'événement « la personne est absente lors du second appel » ;
- R_2 l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;
- R l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de R est de 0,176.

3 Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

4 On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants.

Un enquêteur a une liste de vingt personnes à contacter.
Quelle est la probabilité qu'une au moins des vingt personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

9 Limite d'une probabilité



35 min

Corrigé
p. 341

Lycée Hoche, Versailles

Une urne contient trois pièces de monnaie équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent une face « PILE » et une face « FACE ». La troisième est truquée et possède 2 faces « FACE ». On prend une pièce au hasard et on fait des lancers successifs de cette pièce.

On considère les événements suivants :

- B : « La pièce prise est normale »
- P : « On obtient PILE au premier lancer »
- F_n : « On obtient FACE pour les n premiers lancers »

- 1 Calculer la probabilité de $P \cap B$ et $P \cap \overline{B}$. En déduire la probabilité de P .
- 2 Calculer de même la probabilité de F_n .
- 3 Sachant que l'on a obtenu « FACE » lors des n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ?
- 4 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette probabilité.

10 Étude d'un jeu



40 min

Corrigé
p. 342

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

Juliette se prête à un jeu se déroulant en plusieurs manches.

- Elle a autant de chances de gagner que de perdre la 1^{re} manche.
- Si elle gagne une manche, la probabilité qu'elle gagne la suivante est 0,6.
- Si elle perd une manche, la probabilité qu'elle perde la suivante est 0,7.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements suivants :

G_n : « Juliette a gagné la n^e partie »

P_n : « Juliette a perdu la n^e partie »

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements G_n et P_n sont contraires.

- 1 (a) Construire un arbre rassemblant les différentes possibilités pour les 1^{re} et 2^e manches. On fera figurer les probabilités $p_{G_1}(G_2)$, $p_{P_1}(G_2)$, $p_{G_1}(P_2)$, $p_{P_1}(P_2)$, dont on justifiera les valeurs.
- (b) Calculer $p(G_2)$ et $p(P_2)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.
- (a) Calculer, pour un n arbitraire, $p_{P_n}(G_{n+1})$ et $p_{G_n}(P_{n+1})$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$$

- 3** On pose $a_n = x_n + y_n$ et $b_n = 4x_n - 3y_n$.
- (a) Démontrer que la suite (a_n) est constante et que (b_n) est géométrique.
- (b) En déduire l'expression de x_n en fonction de n . On ne demande pas y_n .
- (c) Démontrer que la suite (x_n) converge et trouver sa limite.

11 Étude d'une suite



45 min

Corrigé
p. 344

Lycée Eugène Delacroix, Maison-Alford

Une urne contient trois dés cubiques équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

- V l'événement : « le dé tiré est vert »,
- R l'événement : « le dé tiré est rouge »,
- S_1 l'événement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

- 1** On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.
- (a) Établir l'arbre de probabilité associé à cette expérience en utilisant les notations ci-dessus.
- (b) Calculer la probabilité $P(S_1)$.
- 2** On tire au hasard un dé de l'urne et on lance ce dé n fois de suite. On note S_n l'événement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_V(S_n)$ et $P_R(S_n)$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu 6 à chacun des n tirages.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.
- (d) Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES • CHAP. 13

3 Dans cette question, on admet que la suite (p_n) est croissante.
On s'intéresse au plus petit entier n_0 tel que $p_n > 0,999$ pour tout $n > n_0$.

- (a) Pourquoi peut-on, sans le calculer, affirmer qu'un tel entier n_0 existe ?
- (b) Recopier et compléter l'algorithme suivant de telle sorte qu'il affiche la valeur de n_0 recherchée dans cette question.

Variables
E est un réel strictement compris entre 0 et 1
N est un entier naturel non nul
Entrée
E prend la valeur ...
Traitement
N prend la valeur 1
Tant que ...
 N prend la valeur ...
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

- (c) Résoudre par le calcul l'inéquation $p_n > 0,999$ et en déduire la valeur de n_0 .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 **V/F** Probabilités conditionnelles

Enoncé
p. 327

1 Faux. Soit T l'événement « Jacques choisit un roman policier ». On suppose qu'on est en situation d'équiprobabilité.

$$\text{On a alors } P(T) = \frac{150}{200} = 0,75.$$

2 Faux. Soit F l'événement « Jacques choisit un ouvrage dont l'auteur est français ». On cherche à calculer $P(F \cap T)$:

$$P(F \cap T) = P(T)P_T(F) = 0,75 \times 0,4 \text{ soit } P(F \cap T) = 0,3.$$

3 Vrai. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (T, \bar{T}) :

$$\begin{aligned} P(F) &= P_T(F)P(T) + P_{\bar{T}}(F)P(\bar{T}) \\ &= 0,75 \times 0,4 + 0,25 \times 0,7 \\ &= 0,475. \end{aligned}$$

4 Faux. On a $P_F(T) = \frac{P(F \cap T)}{P(F)} = \frac{0,3}{0,475}$ soit $P_F(T) = \frac{12}{19}$.

2 **V/F** Événements indépendants

Enoncé
p. 327

1 Faux. La pièce étant parfaitement équilibrée, la probabilité d'avoir face à un lancer quelconque est de $\frac{1}{2}$. Les lancers successifs étant indépendants, le fait d'avoir obtenu neuf fois de suite pile lors des lancers antérieurs n'a aucune influence sur le dixième lancer ... même si l'intuition nous incite à penser qu'on devrait voir apparaître « face » !

2 Vrai. On commence par calculer $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{6}{15}.$$

$$\text{On compare ensuite avec le produit } P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}.$$

On a bien $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ce qui prouve l'indépendance des événements A et B .

3 (a) Vrai. On définit les événements :

S : « L'élève a réussi le permis de conduire ».

F : « L'élève interrogé est une fille ».

G : « L'élève interrogé est un garçon ».

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (F, G) :

$$P(S) = P_F(S)P(F) + P_G(S)P(G).$$

$$\text{On obtient alors } P(S) = 0,1 \times 0,25 + 0,75 \times \frac{1}{3} = 0,275.$$

- (b) Faux. On cherche à calculer $P_S(G)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, puisque $P(S)$ est non nul, on a :

$$P_S(G) = \frac{P(S \cap G)}{P(S)} = \frac{0,1 \times 0,25}{0,275} = \frac{1}{11}.$$

Une valeur approchée de $P_S(G)$ à 0,001 près est 0,091.

3 **V/F** Indépendance

Enoncé
p. 327

- 1** Vrai. Si deux événements A et B définis sur un même espace probabilisé sont incompatibles, alors $P(A \cap B) = 0$. Supposons que ces deux événements soient en même temps indépendants, on aurait alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et par suite, $P(A)P(B) = 0$ ce qui est contradictoire avec le fait que A et B sont deux événements de probabilité non nulle.

- 2** Vrai. Il s'agit d'une propriété du cours. Si deux événements A et B sont indépendants, alors A et \bar{B} sont indépendants ; B et \bar{A} sont indépendants ; \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

- 3** Faux. On lance un dé parfaitement équilibré. On désigne par A l'événement « Le résultat obtenu est strictement supérieur à 2 », par B l'événement « On obtient un nombre premier » et par C l'événement « On obtient un résultat pair ».

$P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ puisque B est réalisé si et seulement si on obtient 2, 3 ou 5 (on rappelle que 1 n'est pas un nombre premier). Enfin, $P(C) = \frac{1}{2}$. L'événement $A \cap B$ est réalisé si et seulement si on obtient

3 ou 5 donc $P(A \cap B) = \frac{1}{3} = P(A \cap C)$. On vérifie que les événements A et B sont bien indépendants ainsi que les événements A et C . Il existe une seule manière de réaliser l'événement $B \cap C$: obtenir le 2. Par suite, $P(B \cap C) = \frac{1}{6}$. Or, $P(B)P(C) = \frac{1}{4}$ donc les événements B et C ne sont pas indépendants.

- 4** Faux. Considérons le lancer de deux dés discernables équilibrés. On désigne par A l'événement « La somme des résultats obtenus sur les deux dés est impaire », par B l'événement « Le premier dé affiche un résultat pair » et par C l'événement « Le deuxième dé affiche un résultat pair ». Si on modélise un résultat par un couple d'entiers naturels entre 1 et 6, où la première composante du couple représente le résultat obtenu sur le premier dé et la deuxième composante le résultat obtenu sur le deuxième dé, l'univers des possibles contient 36 couples.

On obtient facilement $P(A) = P(B) = P(C) = 0,5$ et :

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0,25.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Par suite, les événements A et B d'une part et A et C d'autre part sont bien indépendants. Cependant, A n'est pas indépendant de $B \cap C$ puisque $P(A \cap B \cap C) = 0$ alors que le produit $P(A)P(B \cap C)$ est non nul. Il est en effet impossible d'obtenir simultanément une somme impaire et deux résultats pairs sur chacun des dés.

 **MÉTHODE**

Pour prouver qu'une affirmation est fautive, il suffit de trouver un contre-exemple.

4 **V/F** **Intersection**

 **Enoncé**
p. 328

1 Vrai.

Ceci résulte directement de l'énoncé : un héron mange 10% des rainettes.

2 Vrai.

Ceci résulte directement de l'énoncé : un héron mange 20% des grenouilles vertes de la mare.

3 Faux.

On considère les événements :

R : « La grenouille est une rainette ».

V : « La grenouille est une grenouille verte ».

M : « La grenouille est mangée par le héron ».

$(R; V)$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(M) = P(R) \times P_R(M) + P(V) \times P_V(M).$$

En remplaçant par les valeurs numériques fournies par l'énoncé, on obtient :

$$P(M) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{17}{100}.$$

4 Vrai. On a :

$$P(R \cap M) = P(R) \times P_R(M),$$

soit

$$P(R \cap M) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100}.$$

5 Faux. On a :

$$P_M(R) = \frac{P(R \cap M)}{P(M)},$$

soit, en utilisant les réponses obtenues dans les questions précédentes :

$$P_M(R) = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{17}{100}} = \frac{3}{17}.$$

MÉTHODE

Dans un exercice de probabilité, on attachera la plus grande importance à la lecture et à la compréhension de l'énoncé. Ainsi, ici, il est essentiel de ne pas confondre « une grenouille soit une rainette et mangée par le héron » qui correspond à une intersection et « une grenouille mangée par le héron soit une rainette » qui amène à un calcul de probabilité conditionnelle.

5 Lancer de fléchettes

Enoncé
p. 328

Lycée Carnot, Dijon

- 1 (a)** Le concurrent A touche la case 3 avec la probabilité $\frac{7}{12}$.

Les 3 lancers successifs étant indépendants les uns des autres, la probabilité que le joueur A touche 3 fois la case 3 vaut donc

$$\frac{7^3}{12^3} = \frac{343}{1\,728}.$$

- (b)** La probabilité qu'il atteigne la case 1 vaut $\frac{1}{2}$, celle pour qu'il atteigne la case 2 vaut $\frac{1}{3}$ et celle pour qu'il atteigne la case 3 vaut $\frac{7}{12}$.

La probabilité que le joueur A touche d'abord la case 1, puis la case 2 et enfin la case 3 vaut :

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{432}.$$

- (c)** Le joueur a alors plusieurs possibilités (l'ordre des cases n'est pas imposé), mais chacune des éventualités a une probabilité égale à $\frac{7}{432}$:

1 ^{re} case touchée	2 ^e case touchée	3 ^e case touchée
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

Ce qui fait 6 possibilités.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

La probabilité qu'il touche les cases 1, 2 et 3 vaut donc :

$$6 \times \frac{7}{432} = \frac{7}{72}.$$

- 2 (a)** Notons E_A l'événement « le joueur A est choisi » ; E_B l'événement « le joueur B est choisi » ; notons C l'événement « la case 3 est atteinte ».

Le couple $(E_A; E_B)$ constitue un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(E_A \cap C) + P(E_B \cap C)$$

Calculons la probabilité de $E_A \cap C$.

Si on choisit le joueur A (ceci avec une probabilité $\frac{2}{3}$), la case 3 est touchée avec une probabilité $\frac{7}{12}$.

On en déduit que :

$$P(E_A \cap C) = \frac{7}{12} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{18}.$$

Calculons la probabilité de $E_B \cap C$.

Si on choisit le joueur B (ceci avec une probabilité $\frac{1}{3}$), la case 3 est touchée avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On en déduit que :

$$P(E_B \cap C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

On conclut alors en calculant la probabilité de C :

$$P(C) = \frac{7}{18} + \frac{1}{9} = \frac{1}{2}.$$

- (b)** On cherche donc la probabilité de E_A sachant que C est réalisé. On calcule donc la probabilité suivante :

$$P_C(E_A) = \frac{P(E_A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{9}.$$

6 Indépendance

Enoncé
p. 329

Lycée Marie Curie, Sceaux

L'univers Ω est l'ensemble de tous les triplets (a, b, c) où a , b , et c sont trois entiers compris entre 1 et 6. Il existe ainsi 216 résultats possibles.

Le dé étant par hypothèse non pipé, on est en situation d'équiprobabilité.

La probabilité d'un événement élémentaire (a, b, c) est :

$$P(\{(a, b, c)\}) = \frac{1}{216}.$$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES • CHAP. 13

L'événement A est la réunion des événements élémentaires :

(1,2,6) ; (1,3,4) ; (1,4,3) ; (1,6,2) ; (2,1,6) ;
(2,2,3) ; (2,3,2) ; (2,6,1) ; (3,1,4) ; (3,2,2) ;
(3,4,1) ; (4,1,3) ; (4,3,1) ; (6,1,2) ; (6,2,1).

Donc :

$$P(A) = \frac{5}{72}.$$

L'événement B est la réunion des événements élémentaires :

(1,3, z) ; (2,2, z) ; (3,1, z) où z décrit $\{1, \dots, 6\}$.

Donc :

$$P(B) = \frac{1}{12}.$$

Or, l'événement $A \cap B$ est la réunion des événements élémentaires : (1,3,4), (2,2,3), (3,1,4).

Donc :

$$P(A \cap B) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72} \quad \text{et} \quad P(A)P(B) = \frac{5}{72} \times \frac{1}{12} = \frac{5}{864}.$$

Ainsi,

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B).$$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

MÉTHODE

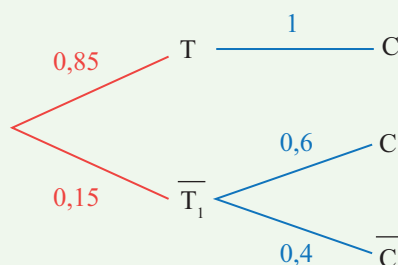
Pour savoir si deux événements sont indépendants, on calcule la probabilité de leur intersection et on la compare au produit de leurs probabilités. L'indépendance est une notion délicate et l'intuition est, en ce domaine, souvent mauvaise conseillère !

7 Espérance d'un gain

Lycée Hoche, Versailles

Enoncé
p. 329

1 On a l'arbre suivant :



2 (a) D'après l'énoncé, $P(T_1) = 0,85$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) Comme T_1 et \bar{T}_1 forment une partition de l'univers,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap T_1) + P(C \cap \bar{T}_1) \\ &= 0,85 \times 1 + 0,15 \times 0,6 \\ &= 0,94. \end{aligned}$$

3 (a) La variable aléatoire X prend les valeurs $n - 150$ dans le cas de l'événement T_1 , $n - (150 + 30)$ dans le cas $C \cap T_1$ et $-(150 + 30)$ si l'écran n'est finalement pas livré.

On obtient la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

x_i	$n - 150$	$n - 180$	-180
$P(X = x_i)$	0,85	0,09	0,06

(b) L'espérance de X est donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0,85(n - 150) + 0,09(n - 180) + 0,06 \times (-180) \\ &= 0,94n - 154,5. \end{aligned}$$

(c) L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices dès que $E(X) > 0$, c'est-à-dire $0,94n - 154,5 > 0$ soit $n > \frac{154,5}{0,94}$.

L'entreprise peut espérer un bénéfice à partir de $n = 165$.

8 Sondages téléphoniques

Enoncé
p. 330

Lycée Paul Doumer, Le Perreux-sur-Marne

1 D'après l'énoncé, $P(A_1) = 0,4$ et $P_{\bar{A}_1}(R_1) = 0,2$.

Comme la personne ne peut répondre au premier appel que dans le cas où elle est présente, on a :

$$R_1 = R_1 \cap \bar{A}_1.$$

On a donc :

$$P(R_1) = P_{\bar{A}_1}(R_1) \times P(\bar{A}_1),$$

soit :

$$P(R_1) = 0,2 \times (1 - 0,4) = 0,12.$$

2 La personne peut être appelée deux fois. Elle peut donc répondre au questionnaire soit au premier appel soit au second. On a donc :

$$P(R) = P(R_1 \cup R_2).$$

Or, les événements R_1 et R_2 sont incompatibles, d'où :

$$P(R) = P(R_1) + P(R_2).$$

$P(R_1)$ a été calculé à la question précédente. Il reste alors à calculer $P(R_2)$.

La personne répond au questionnaire au second appel dans le cas où elle a été absente au premier appel, présente au second et où elle a alors accepté de répondre au questionnaire. On a donc :

$$P(R_2) = P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap R_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(\bar{A}_2) \times P_{A_1 \cap \bar{A}_2}(R_2),$$

soit :

$$P(R_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,2 = 0,056.$$

On en déduit finalement :

$$P(R) = 0,12 + 0,056 = 0,176.$$

- 3** On sait que la personne a accepté de répondre au questionnaire donc l'événement R est réalisé. On calcule alors $P_R(R_1)$.

$$P_R(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)}.$$

Comme $R_1 \cap R = R_1$, alors :

$$P_R(R_1) = \frac{P(R_1)}{P(R)} = \frac{0,12}{0,176} \approx 0,682 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près.}$$

- 4** L'enquêteur répète 20 fois de manière identique et dans des conditions indépendantes la même épreuve : effectuer un sondage auprès d'une personne. D'après la question 2, la probabilité qu'une personne accepte de répondre au questionnaire est de 0,176.

Soit D l'événement « au moins une des vingt personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ».

\bar{D} est l'événement « aucune des vingt personnes n'accepte de répondre au questionnaire ».

Or, lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chaque résultat.

On en déduit que :

$$P(\bar{D}) = (1 - 0,176)^{20}.$$

D'où finalement :

$$P(D) = 1 - (0,824)^{20} \approx 0,979 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près.}$$

9 Limite d'une probabilité

Enoncé
p. 331

Lycée Hoche, Versailles

- 1** La probabilité de tirer une pièce normale vaut $\frac{2}{3}$, celle de tirer une pièce truquée vaut $\frac{1}{3}$. On a $P(B) = \frac{2}{3}$ et $P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$.

$P \cap B$ signifie « avoir tiré une pièce normale et tomber alors sur PILE ». Sa probabilité vaut donc :

$$P(P \cap B) = P(B) \times P_B(P) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Les événements « avoir une pièce truquée » et « obtenir PILE au premier tirage » sont incompatibles, $P \cap \bar{B}$ a donc une probabilité nulle.

Enfin, la pièce est soit normale soit truquée, donc les événements $P \cap B$ et $P \cap \bar{B}$ sont incompatibles et leur réunion vaut P : la probabilité de P vaut donc :

$$\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

- 2** L'événement $F_n \cap B$ signifie « avoir une pièce normale et tomber sur FACE n fois de suite », sa probabilité vaut donc :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{n-1}}.$$

L'événement $F_n \cap \bar{B}$ signifie « avoir la pièce truquée et tomber sur FACE n fois de suite ». Or si l'on a la pièce truquée, on obtient systématiquement FACE. Sa probabilité vaut donc $\frac{1}{3}$.

L'événement F_n est la réunion de $F_n \cap B$ et de $F_n \cap \bar{B}$. De plus, ces événements sont incompatibles. La probabilité de F_n est donc la somme des deux probabilités et vaut :

$$\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

- 3** Il s'agit d'un calcul de *probabilité conditionnelle*. L'événement connu est « tomber n fois de suite sur FACE ». C'est l'événement F_n . On cherche la probabilité de « la pièce prise est truquée » sachant F_n . C'est la probabilité de \bar{B} sachant F_n soit :

$$P_{F_n}(\bar{B}) = \frac{P(\bar{B} \cap F_n)}{P(F_n)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

- 4** Quand n tend vers l'infini, on sait que $1/2^{n-1}$ tend vers 0. On en conclut que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{F_n}(\bar{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}} = 1.$$

10 Étude d'un jeu

Enoncé
p. 331

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

- 1** (a) Les données de l'énoncé se traduisent ainsi :

$$p_{G_1}(G_1) = 0,5 \quad , \quad p_{P_1}(P_1) = 0,5$$

$$\text{et } p_{G_n}(G_{n+1}) = 0,6 \quad , \quad p_{P_n}(P_{n+1}) = 0,7.$$

Puisque les événements G_2 et P_2 sont contraires :

$$p_{G_1}(G_2) + p_{G_1}(P_2) = 1$$

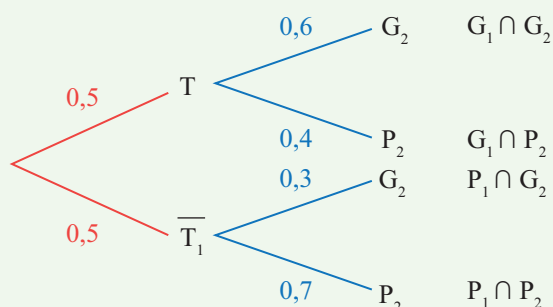
$$p_{G_1}(P_2) = 0,4.$$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES • CHAP. 13

Et aussi :

$$\begin{aligned} p_{P_1}(G_2) + p_{P_1}(P_2) &= 1 \\ p_{P_1}(G_2) &= 0,3. \end{aligned}$$

On construit alors facilement l'arbre des possibilités. On a indiqué entre parenthèses les probabilités calculées ci-dessus et non fournies par l'énoncé.



- (b) Les événements G_1 et P_1 étant contraires, ils forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(G_2) &= p(G_1) p_{G_1}(G_2) + p(P_1) p_{P_1}(G_2) \\ &= 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,3 \\ &= 0,45. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(P_2) &= p(G_1) p_{G_1}(P_2) + p(P_1) p_{P_1}(P_2) \\ &= 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,7 \\ &= 0,55. \end{aligned}$$

- 2** (a) Sur le même modèle qu'à la question **1.a** :

$$\begin{aligned} p_{P_n}(G_{n+1}) &= 1 - 0,7 = 0,3, \\ p_{G_n}(P_{n+1}) &= 1 - 0,6 = 0,4. \end{aligned}$$

- (b) Puis d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} x_{n+1} = p(G_{n+1}) &= p(G_n) p_{G_n}(G_{n+1}) + p(P_n) p_{P_n}(G_{n+1}) \\ &= x_n \times 0,6 + y_n \times 0,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = p(P_{n+1}) &= p(G_n) p_{G_n}(P_{n+1}) + p(P_n) p_{P_n}(P_{n+1}) \\ &= x_n \times 0,4 + y_n \times 0,7. \end{aligned}$$

- 3** (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= x_{n+1} + y_{n+1} \\ &= (0,6 + 0,4)x_n + (0,3 + 0,7)y_n \\ &= x_n + y_n = a_n. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= (4 \times 0,6 - 3 \times 0,4)x_n + (4 \times 0,3 - 3 \times 0,7)y_n \\ &= 1,2x_n - 0,9y_n \\ &= 0,3b_n. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (a_n) est constante et que la suite (b_n) est géométrique de raison 0,3.

- (b) Comme la suite (a_n) est constante, tous ses termes ont la même valeur et il suffit alors de calculer le premier terme.

On obtient : $a_n = a_1 = 0,5 + 0,5 = 1$.

La suite (b_n) étant géométrique de raison 0,3 et de premier terme $b_1 = 4 \times 0,5 - 3 \times 0,5 = 0,5$, on a alors, pour tout naturel n non nul,

$$b_n = 0,5 \times 0,3^{n-1}.$$

Il vient, en éliminant y_n entre les deux égalités :

$$7x_n = 3a_n + b_n \quad \text{d'où} \quad x_n = \frac{1}{7} (3 + 0,5 \times 0,3^{n-1}) = \frac{3}{7} + \frac{5}{21} 0,3^n.$$

- (c) Comme $0,3 \in [-1 ; 1]$, la suite géométrique de terme général $0,3^n$ converge vers 0. Alors :

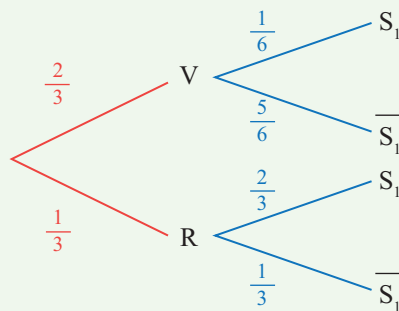
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{7}.$$

11 Étude d'une suite

➔ **Énoncé**
p. 332

Lycée Eugène Delacroix, Maison-Alford

- 1 (a) Arbre de probabilité de l'expérience :



- (b) Comme V et R forment une partition de l'univers, d'après la for-

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES • CHAP. 13

mule des probabilité totales :

$$\begin{aligned} P(S_1) &= P(V \cap S_1) + P(R \cap S_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- 2 (a)** Lorsqu'on a un dé vert, la probabilité d'obtenir 6 à un lancer est $\frac{1}{6}$.

Les lancers successifs étant indépendants, $P_V(S_n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

Lorsqu'on lance un dé rouge, la probabilité d'obtenir 6 à un lancer est $\frac{2}{3}$, donc $P_R(S_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- (b)** Par le même raisonnement qu'à la question **1.b**, on trouve :

$$\begin{aligned} P(S_n) &= P(V) \times P_V(S_n) + P(R) \times P_R(S_n) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

(c) $p_n = P_{S_n}(R)$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(R \cap S_n)}{P(S_n)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{2}\right)^n + 1} \\ &= \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}. \end{aligned}$$

- (d)** Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$.

- 3 (a)** D'après la définition de la limite d'une suite, si la limite est égale à 1, tout intervalle ouvert contenant 1 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Donc l'intervalle $]0,999 ; 1,001[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 , ce qui prouve l'existence de n_0 .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) L'algorithme complété est :

```

Variables
  E est un réel strictement compris entre 0 et 1
  N est un entier naturel non nul
Entrée
  E prend la valeur 0,999
Traitement
  N prend la valeur 1
  Tant que  $\frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \leq E$ 
    N prend la valeur N+1
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher N
    
```

Cet algorithme affiche le plus petit N tel que $p_N > 0,999$, c'est donc la valeur n_0 cherchée.

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} > 0,999 &\Leftrightarrow \frac{1}{0,999} > 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{0,999} - \frac{0,999}{0,999} > 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{0,001}{2 \times 0,999} \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{1\,998}.
 \end{aligned}$$

À l'aide de la fonction \ln , on obtient :

$$n \ln \left(\frac{1}{4}\right) < \ln \left(\frac{1}{1\,998}\right)$$

et donc :

$$n > \frac{\ln 1\,998}{\ln 4}.$$

La valeur de n_0 est donc 6.

Lois de probabilités continues

Plan du chapitre

1. Généralités sur les lois continues
2. Loi uniforme sur un intervalle
3. Loi exponentielle
4. Loi normale centrée réduite
5. Lois normales $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$

Exercice type 1

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 Trouver k pour que la fonction définie par $f(x) = kx^2$ soit une densité de probabilité sur $[0 ; 3]$.
- 2 Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[0 ; 3]$.
 - (a) Calculer $P(0,3 < X < 2)$.
 - (b) Quelle est la probabilité que X soit supérieure à 1 sachant que X est inférieure à 2 ?

1 Généralités sur les lois continues

1.1 Variable aléatoire continue

Définition 1

Une variable aléatoire continue est une fonction qui, à chaque issue d'une expérience, associe un nombre réel d'un intervalle de \mathbb{R} (qui peut être \mathbb{R} tout entier).

1.2 Loi de probabilité à densité

Soit X une variable aléatoire continue définie sur un intervalle $[a ; b]$ et x_0 un nombre réel de l'intervalle $[a ; b]$. Alors :

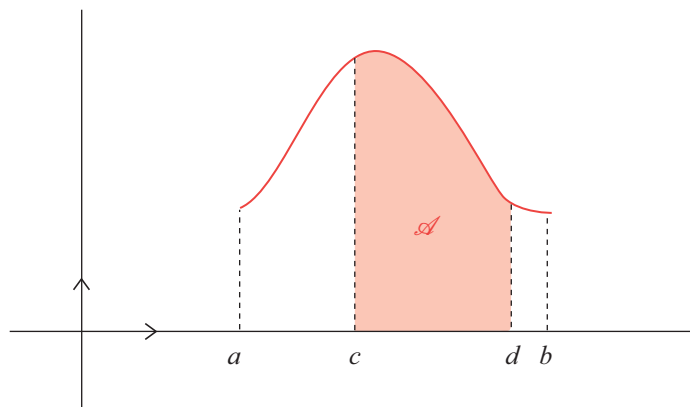
- $P(X = x_0) = 0$ pour tout x_0 .
- Il existe une fonction f continue et positive telle que $\int_a^b f(x) dx = 1$ et pour

tous c et d de $[a ; b]$ avec $c < d$,

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx.$$

Remarque : puisque $P(X = x_0) = 0$, cela ne change rien de mettre les inégalités strictes ou larges dans $P(c < X < d)$.

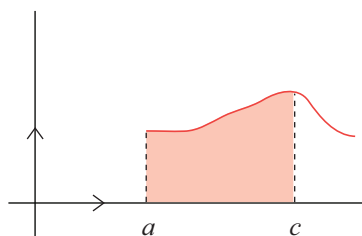
On en déduit donc que $P(c < X < d)$ est l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites d'équation $x = c$ et $x = d$.



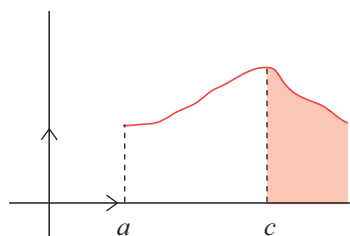
On a : $A = P(c < X < d) = P(c \leq X \leq d)$

Si X est définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$, alors pour tout $c \geq a$, on a :

$P(X > c) = 1 - P(a < X < c)$ (en raisonnant sur les aires)



$P(a < X < c)$



$P(X > c)$

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Virlogeux, Riom

1 On doit avoir $\int_0^3 kx^2 dx = 1$, et f positive sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} \int_0^3 kx^2 dx = 1 &\Leftrightarrow \left[\frac{kx^3}{3} \right]_0^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{k \times 3^3}{3} = 1 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

2 (a) $P(0,3 < X < 2) = \int_{0,3}^2 f(x) dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{9} \times \frac{x^3}{3} \right]_{0,3}^2 \\ &= \frac{2^3}{27} - \frac{0,3^3}{27} \\ &= \frac{7,973}{27} \\ &\approx 0,30. \end{aligned}$$

(b) Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle : on cherche $P_{(X < 2)}(X > 1)$.

$$\begin{aligned} P_{(X < 2)}(X > 1) &= \frac{P[(X < 2) \cap (X > 1)]}{P(X < 2)} \\ &= \frac{P(1 < X < 2)}{P(X < 2)} \\ &= \frac{\left[\frac{x^3}{27} \right]_1^2}{\left[\frac{x^3}{27} \right]_0^2} \\ &= \frac{\frac{8}{27} - \frac{1}{27}}{\frac{8}{27}} \\ &= \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Loi uniforme sur un intervalle

2.1 Loi uniforme sur $[a ; b]$

Définition 2

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, on dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a ; b]$ si sa densité de probabilité est une fonction f constante sur $[a ; b]$.

Propriété 1

Soit f la densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a ; b]$, alors, pour tout réel x de $[a ; b]$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

$$P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Définition 3

L'espérance d'une variable aléatoire de densité f sur un intervalle $[a ; b]$ est le nombre réel $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \int_a^b t f(t) dt.$$

En utilisant cette formule pour la loi uniforme on obtient :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

3 Loi exponentielle

Exercice type 2

Lycée Lafayette, Clermont-Ferrand

On sait que, pour un certain composant mécanique, la durée de vie moyenne est de 1 600 jours et que la variable aléatoire X donnant le nombre de jours de bon fonctionnement peut être modélisée par une loi exponentielle.

- 1 Donner le paramètre λ de cette loi. On donnera la valeur exacte, qu'on utilisera dans la suite de l'exercice, puis une valeur arrondie à 10^{-4} .

Exercice type 2 (suite)

Lycée Lafayette, Clermont-Ferrand

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis en centième.

- 2 Quelle est la probabilité qu'un de ces composants, choisi au hasard, ait une durée de vie inférieure à 2 années (non bissextiles) ?
- 3 Quelle est la probabilité qu'un de ces composants, choisi au hasard, ait une durée de vie supérieure à 4 ans (dont une bissextile) ?
- 4 Sachant qu'un composant est encore en état de bon fonctionnement au bout de 1 000 jours, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout du double ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3.1 Loi exponentielle de paramètre λ sur \mathbb{R}_+

Définition 4

On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi de densité f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, λ étant un réel strictement positif.

Propriété 2

Si X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ , alors pour tout intervalle $[a ; b]$ inclus dans $[0 ; +\infty[$:

- $P(c < X < d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
- $P(X > c) = e^{-\lambda c}$.

On a :

$$E(X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Solution de l'exercice type 2

Lycée Lafayette, Clermont-Ferrand

- 1 D'après le cours, $\lambda = \frac{1}{1\,600} \approx 0,000\,6$.
- 2 Il y a 730 jours dans deux années non bissextiles. On cherche donc $P(X < 730)$.

$$\begin{aligned} P(X < 730) &= \int_0^{730} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{730} \\ &= 1 - e^{-\frac{730}{1\,600}} \\ &\approx 0,37. \end{aligned}$$

➔ Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Lafayette, Clermont-Ferrand

3 On cherche $P(X > 1\,461)$.

$$\begin{aligned} P(X > 1\,461) &= 1 - P(X < 1\,461) \\ &= 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{1\,461} \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1\,461}{1\,600}}\right) \\ &= e^{-\frac{1\,461}{1\,600}} \\ &\approx 0,40. \end{aligned}$$

4 Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle : on cherche $P_{(X > 1\,000)}(X < 2\,000)$.

$$\begin{aligned} P_{(X > 1\,000)}(X < 2\,000) &= \frac{P[(X > 1\,000) \cap (X < 2\,000)]}{P(X > 1\,000)} \\ &= \frac{P(1\,000 < X < 2\,000)}{P(X > 1\,000)} \\ &= \frac{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{1\,000}^{2\,000}}{1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{1\,000}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1\,000}{1\,600}} - e^{-\frac{2\,000}{1\,600}}}{e^{-\frac{1\,000}{1\,600}}} \\ &\approx 0,46. \end{aligned}$$

🔧 MÉTHODE

En fait, cette probabilité n'est autre que $P(X < 1\,000)$.

Ceci ne devrait pas vous étonner : la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement : la probabilité que l'objet soit « vivant » au temps $t + h$ sachant qu'il est « vivant » au temps t ne dépend que de h et pas de t , donc la probabilité, ici, que le composant soit « vivant » au temps 2 000 sachant qu'il était « vivant » au temps 1 000 est la même que la probabilité qu'il soit « vivant » au temps 1 000 (sachant qu'il était « vivant » au temps 0).

4 Loi normale centrée réduite

Exercice type 3

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

D'après Wikipédia, concernant le quotient intellectuel (QI) : « La moyenne du QI standard est fixée à 100 pour des raisons historiques. L'écart type à 15 est arbitraire, mais il correspond à un écart probable de 10, ce qui veut dire qu'entre un QI de 90 et de 110, il y a 50% de la population. Pour les psychologues américains "un individu sur deux est normal", donc entre 90 et 110 se situe la zone de normalité. ».

- 1 Est-il exact qu'avec une moyenne (ou espérance) égale à 100 et un écart-type égal à 15, 50% de la population a un QI compris entre 90 et 110 ? Justifier.
- 2 Quelle est la probabilité, pour un individu choisi au hasard, d'avoir un QI inférieur à 80 ?
- 3 Une association de bienfaisance veut aider les personnes mentalement déficientes. Elle a décidé de s'occuper des 5% de personnes ayant le plus bas QI. Quel sera le QI maximal pour pouvoir être aidé par cette association ?

4.1 Définition

Définition 5

Si une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0 ; 1)$ alors sa densité de probabilité est la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

4.2 Propriétés sur la fonction de densité

Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

- La fonction f est continue sur \mathbb{R} (composée de fonctions continues).
- D'après la définition d'une loi de densité de probabilité, pour tous nombres réels a et b avec $a < b$, $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$. Cependant, on ne connaît pas de primitive de cette fonction.
- D'après les propriétés des lois de densité, f étant définie sur \mathbb{R} , l'aire totale sous la courbe représentative de f est égale à 1. Elle représente $P(X \in \mathbb{R})$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Cela entraîne que :
 - $P(X \in [0 ; +\infty[) = P(X \in]-\infty ; 0]) = 0,5$.
 - $P(X < -u) = P(X > u)$.
 - $P(X < -u) = 1 - P(X < u)$.

4.3 Propriété et valeurs particulières

Propriété 3

Pour tout nombre réel α appartenant à $]0 ; 1[$, il existe un unique nombre réel $u_\alpha > 0$ tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

On en déduit que $P(X \leq u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Valeurs à connaître :

- Si $\alpha = 5\%$, $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 0,95$, et à l'aide de la calculatrice, on trouve $u_{0,05} \approx 1,96$.
- Si $\alpha = 1\%$, $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 0,99$, et à l'aide de la calculatrice, on trouve $u_{0,01} \approx 2,58$.

On verra dans le chapitre suivant l'importance de ces valeurs.

4.4 Espérance et variance

Si X suit $\mathcal{N}(0 ; 1)$, $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

Remarque : par analogie avec les variables aléatoires discrètes,

$$V(X) = E[X^2] - [E(X)]^2.$$

4.5 Théorème de Moivre Laplace

Théorème 1 (admis)

Pour tout nombre entier naturel n non nul, X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.

$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est appelée variable normale centrée réduite associée à X_n .

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, $P(a \leq Z_n \leq b)$ tend vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque n tend vers $+\infty$, f étant la fonction définie au paragraphe 4.1.

5 Lois normales $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$

5.1 Définition

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $T = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

5.2 Propriété

Si X suit $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$, alors $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

5.3 Valeurs à connaître

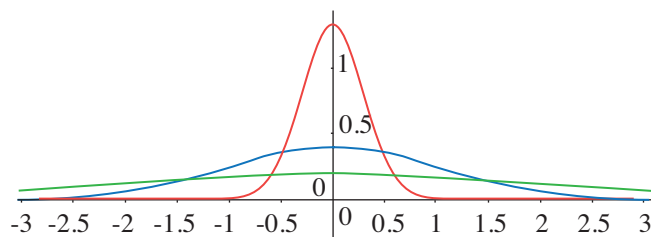
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$. Alors :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$.
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

5.4 Remarques

- On peut toujours si nécessaire (voir exercice 17) se ramener à la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$ en utilisant la définition.
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ signifie que la probabilité d'obtenir une valeur de X en dehors de l'intervalle $[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$ est quasiment nulle.
- La fonction densité de toute loi normale est représentée par une courbe « en cloche ». Le sommet (d'abscisse μ) est d'autant plus haut que σ est petit, et la « cloche » est d'autant plus élargie que σ est grand.

Ici sont représentées les lois normales d'espérance nulle et d'écart-type 2 (la plus plate), 1 et 0,2 (la plus pointue).



➔ Solution de l'exercice type 3

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

- 1 À la calculatrice, pour une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(100 ; 15)$, $P(90 < X < 110) \approx 0,495$, donc on n'est pas très loin du 50%.
- 2 Toujours à la calculatrice, $P(X < 80) \approx 0,09$.

🔧 MÉTHODE

Il convient de bien connaître le fonctionnement de sa calculatrice. Par exemple, pour un calculatrice TI83, La commande est la suivante :

```
normalcdf(-1E99,80,100,15)  
.0912112819
```

Le « -10^{99} » traduit le fait qu'on commence à $-\infty$, la loi étant définie sur \mathbb{R} , pour aller jusqu'à 80. Les paramètres de la loi normale sont ensuite donnés.

- 3 On cherche u tel que $P(X < u) = 0,05$.
À la calculatrice, on obtient sur une TI83 :

```
invNorm(.05,100,15)  
75.32719561
```

Donc on aidera les personnes dont le QI est inférieur à 75 (en arrondissant à l'unité).

LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES • CHAP. 14

1 QCM Généralités

15 min Corrigé p. 368

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la réponse exacte.

- 1 Soit $f(x)$ la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = kx + 1$. La valeur de k telle que f est une densité de probabilité est :

a $k = -\frac{1}{2}$ b $k = \frac{1}{2}$ c $k = 0$

- 2 La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - 1$. Alors la fonction f peut être une fonction de densité de probabilité sur :

a $\left[1 ; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$ b $[1 ; 2]$ c $\left[0 ; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$

- 3 Soit f une fonction de densité de probabilité définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 3x^2$. X est une variable aléatoire suivant cette loi sur $[0 ; 1]$. Alors $E(X)$ vaut :

a $\frac{1}{2}$ b $\frac{3}{4}$ c $\frac{1}{3}$

- 4 Soit f une fonction de densité de probabilité définie sur $[2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{k}{x^2}$. Alors k vaut :

a 1 b -2 c 2

2 QCM Loi uniforme

20 min Corrigé p. 368

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la réponse exacte.

- 1 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-2 ; 2]$. Alors $E(X)$ vaut :

a 0 b 2 c -2

- 2 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[2 ; 7]$. Alors $P_{(X>4)}(X < 6)$ est égale à :

a $\frac{2}{3}$ b 0,8 c 0,4

- 3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[2 ; 3]$. Alors la probabilité que le chiffre des centièmes de sa valeur soit 3 est :

a 0 b 0,1 c aucune de ces deux réponses

- 4 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1 ; 3]$. Alors la probabilité que X soit positive sachant que X est inférieure à 1,5 est :

a 0,375 b 0,5 c 0,6

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Si X est une variable suivant la loi normale centrée réduite. On pose $F(t) = P(X < t)$, alors :

a $P(X < -t) = -F(t)$

b $P(X > t) = 1 - 2F(t)$

c $P(-t < X < t) = 2F(t) - 1$

5 Lecture graphique de probabilité

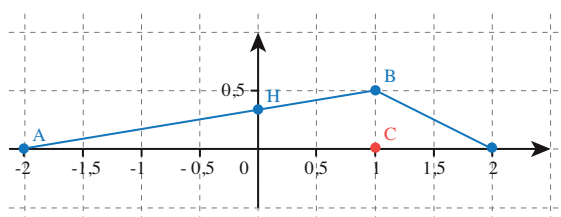


10 min

Corrigé p. 370

Lycée Jean Rostand, Villepinte

La variable aléatoire X a pour densité de probabilité la fonction f représentée ci-dessous.



1 Justifier que cette fonction définit bien une densité de probabilité.

2 Donner les probabilités suivantes :

(a) $P(X \leq 2)$ (b) $P(X = 1)$ (c) $P(X \in [-2; 0])$

(d) $P(-2 \leq X \leq 2)$ (e) $P(X \geq 1)$ (f) $P(0 \leq X \leq 2)$

6 Fonction densité de probabilité



20 min

Corrigé p. 370

Lycée Jean Rostand, Villepinte

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x^2 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1 Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Justifier que f peut être une densité de probabilité.

2 Soit X une variable aléatoire de densité f .

Calculer $E(X) = \int_{-1}^1 xf(x) dx$.

3 Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur de L au centième près telle que l'intervalle I de centre 0 et de longueur $2L$ soit tel que $P(X \in I) = 0,5$.

7 Fonction uniforme



10 min

Corrigé
p. 371

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pin-Justaret

On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[3 ; 7]$.

X est la variable aléatoire égale au nombre choisi.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

- 1 Quelle est la loi de probabilité de X ?
- 2 Quelle est sa fonction de densité ?
- 3 Calculer l'espérance de X .
- 4 Calculer la probabilité de choisir un nombre strictement inférieur à 5,5.
- 5 On sait qu'une personne a choisi un nombre supérieur à 5. Quelle est la probabilité que ce nombre soit inférieur à 6,2 ?

8 Temps d'attente



10 min

Corrigé
p. 372

Lycée Guynemer, Compiègne

Suite à un problème sur sa liste téléphonique, Christophe contacte le service après-vente de son opérateur. Le conseiller l'informe qu'un technicien le contactera pour une intervention à distance entre 18 et 19 heures.

Sachant que le technicien appelle de manière aléatoire sur le créneau indiqué, quelle est la probabilité que Christophe attende entre 15 et 40 min ?

9 Trouver le paramètre d'une loi exponentielle



15 min

Corrigé
p. 372

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ».

Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- 1 On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 h est égale à 0,6.
Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,131 comme valeur approchée de λ et on donnera les résultats à 10^{-2} près.

- 2 Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est 0,52.

- 3 Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
- 4 Sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des 4 premières heures, calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune panne pendant 5 heures supplémentaires.
- 5 Déterminer le réel a tel que $P(X > a) = P(X < a)$.
- 6 On prélève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
 - (a) Quelle est la loi suivie par Y ?
 - (b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
 - (c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

10 Durée de vie moyenne



20 min

Corrigé
p. 374

Lycée Charlemagne, Paris

La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant sa première panne est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ . Une étude statistique montre qu'environ 22% des appareils tombent en panne avant la fin de la deuxième année.

- 1
 - (a) Déterminer une valeur approchée de λ .
 - (b) Quelle est la probabilité qu'un de ces appareils fonctionne pendant au moins 10 ans ?
 - (c) Quelle est la durée de vie moyenne de ces appareils ?
- 2 On considère que la durée de vie d'un de ces appareils est indépendante de celle des autres appareils. Un magasin d'électroménager a acheté dix de ces appareils.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces appareils ait une durée de vie supérieure à 15 ans ?
 - (b) Déterminer le nombre minimal d'appareils que le magasin devrait acheter pour que la probabilité qu'au moins un d'entre eux fonctionne correctement pendant plus de quinze ans soit supérieure à 0,999.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Fonctions et probabilités



20 min

Corrigé
p. 375

Lycée Claude Monet, Paris

Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- 1 Étudier les variations de f et sa limite en $+\infty$.
- 2 Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point L d'abscisse 0.
- 3 Calculer l'abscisse du point E intersection de \mathcal{T} avec l'axe des abscisses.
- 4 Expliquer où peut se lire sur la courbe représentative de f la valeur du paramètre λ .
- 5 Représenter E , L et \mathcal{T} puis, à main levée, tracer la courbe \mathcal{C} , dans le cas où $\lambda = 0,5$.
- 6 X suit la loi de densité f . Interpréter graphiquement la probabilité $P(X < 1)$.

12 Avec une ROC



25 min

Corrigé
p. 376

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

- X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
- La fonction densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- L'espérance de X est donnée par $E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) dx$.

1 Déterminer les réels a et b tels que la fonction G définie par $G(x) = (ax + b)e^{-\lambda x}$ soit une primitive sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$.

2 Montrer que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

Un magasin vend des moteurs électriques, tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir qu'un moteur tombe en panne en moyenne au bout de 8 ans. On note X la variable aléatoire donnant la durée de vie, exprimée en années, sans panne, de chaque moteur électrique. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

- 1 Déterminer λ .

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,125$.

- 2 Calculer $P(X < 1)$ et interpréter le résultat.
- 3 Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
- 4 Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?

13 Contrôle de production



20 min

Corrigé
p. 377

Lycée Claude Monet, Paris

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le périmètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que l'écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

- 1 On prélève au hasard un cylindre dans la production.
 - (a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté avec ou sans modification est égale à $0,915$ à 10^{-3} près.
 - (b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
- 2 On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres est suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
 - (a) Quelle est la probabilité pour que les dix cylindres soit acceptés ?
 - (b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un cylindre soit refusé ?

14 Loi normale centrée réduite



10 min

Corrigé
p. 378

Lycée Guynemer, Compiègne

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite. Les résultats seront arrondis au millième.

- 1 Calculer :

(a) $P(X = 1)$	(b) $P(-1,5 < X < 2,2)$
(c) $P(X < 1,3)$	(d) $P(X > 0,22)$
- 2 On note A l'événement « $X > -0,38$ » et B l'événement « $X < 1,02$ ». Calculer $P_A(B)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

15 **Qualité de l'eau**



5 min

Corrigé
p. 378

Lycée Guynemer, Compiègne

Une étude menée sur l'eau du robinet provenant d'un certain captage affirme que la quantité en milligrammes par litre (mg.L^{-1}) de nitrates suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart type 8. Selon le code de santé publique, la teneur en nitrates doit être inférieure à 50 mg.L^{-1} afin d'assurer la protection des femmes enceintes et des nouveaux nés.

Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, que l'eau provenant de ce captage présente, par sa teneur élevée en nitrates, un risque pour la santé ?

16 **Approximation de la loi binomiale**



25 min

Corrigé
p. 378

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

Une entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite, on admet que la probabilité p qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant une période d'épidémie est égale à 0,05.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

1 (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

(b) Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart-type σ de la variable aléatoire X .

2 On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire par la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement « $Z < x$ » pour quelques valeurs du nombre réel x .

x	-1,55	-1,24	-0,93	-0,62	-0,31	0
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,176	0,268	0,378	0,5
x	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	
$P(Z < x)$	0,622	0,732	0,823	0,893	0,939	

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question **1.b**, une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES • CHAP. 14

17 Chaîne d'embouteillage



20 min

Corrigé
p. 379

Lycée Jules Ferry, Paris

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cl) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance maximum 110 cl peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 2$.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles contenant moins d'un litre.

- 1 À quelle valeur de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette règle ?
- 2 La machine étant réglée sur $\mu = 106,18$, quelle est la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?

18 Loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$



10 min

Corrigé
p. 379

Lycée Virlogeux, Riom

Une usine fabrique des composants mécaniques dont la durée de vie X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 5 ans et d'écart-type 6 mois.

Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard ait une durée de vie :

- 1 inférieure à 4 ans et 3 mois ?
- 2 supérieure à 5 ans et 3 mois ?
- 3 comprise entre 4 ans et 6 mois et 6 ans ?

19 Le paradoxe de Bertrand



30 min

Corrigé
p. 380

Lycée Virlogeux, Riom

Dans certains cas, l'expression « choisi au hasard » est trop imprécise pour répondre.

Voici la question posée à Bertrand : quelle est la probabilité qu'une corde choisie au hasard dans un cercle ait une longueur supérieure au côté d'un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle.

- 1 On considère un cercle de centre O et de rayon R et un triangle équilatéral ABC inscrit dans ce cercle. On trace la perpendiculaire à $[AB]$ passant par O . Elle coupe $[AB]$ en H .
 - (a) Prouver que H est le milieu de $[AB]$.
 - (b) Exprimer OH en fonction de R .
 - (c) Donner, en degrés, la mesure de \widehat{AOB} .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2** Il y a plusieurs façons de choisir une corde « au hasard ». On peut choisir un point M sur un rayon $[OP]$ quelconque et tracer la corde perpendiculaire à (OM) en M .
On appelle X la variable aléatoire égale à la longueur OM .
- (a) Quelle est la loi suivie par X ?
 - (b) Quelle est la probabilité que cette corde ait une longueur supérieure au côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?
 - (c) Obtient-on le même résultat si on choisit M au hasard sur un diamètre ?
- 3** Une autre façon de choisir une corde au hasard est de choisir un nombre Z au hasard entre 0 et 180, et de construire un angle au centre de mesure Z . La corde choisie au hasard est celle qui intercepte cet angle.
- (a) Quelle est la loi suivie par Z ?
 - (b) Quelle est la probabilité que cette corde ait une longueur supérieure au côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?

20 Variance et loi exponentielle



15 min

Corrigé
p. 380

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

On a vu dans le cours que l'espérance d'une variable aléatoire continue X de fonction de densité f est donnée par $E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt$, par analogie à la définition de l'espérance pour une variable aléatoire discrète. On sait que, pour une variable aléatoire discrète, la variance peut se calculer par :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Il semble donc logique de définir la variance d'une variable aléatoire continue par une formule analogue, le signe Σ étant remplacé par le signe \int , et la fonction densité f jouant le rôle des p_i de la formule discrète.

Alors,

$$V(X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t t^2 f(t) dt - [E(X)]^2.$$

On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ , on a donc :

$$V(X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t t^2 f(t) dt - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

- 1** Trouver a, b et c tels que $(at^2 + bt + c)e^{-\lambda t}$ soit une primitive de $t^2 \lambda e^{-\lambda t}$.
- 2** En déduire la variance, puis l'écart-type, d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

21 Rencontre et loi uniforme



30 min

Corrigé
p. 381

Lycée Virlogeux, Riom

Deux amis Claire et Patrick ont décidé de se rencontrer entre 12 h et 13 h, mais n'ont pas donné plus de précision, et arriveront l'un comme l'autre aléatoirement dans cette tranche horaire. Aucun des deux n'est très patient : Claire a décidé qu'elle n'attendrait pas plus de 10 min et Pierre qu'il n'attendrait pas plus d'un quart d'heure.

Quelle est la probabilité que les deux amis se rencontrent ?

22 Avec un algorithme



30 min

Corrigé
p. 383

Lycée Buffon, Paris

- 1 Dans un lycée donné, on sait que 55% des élèves sont des filles. On sait également que 35% des filles et 30% des garçons déjeunent à la cantine. On choisit, au hasard, un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
- 2 Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0,2. Écrire une formule donnant la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner ensuite la valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
- 3 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ .
 - (a) Donner, sans utiliser la calculatrice, à 10^{-2} près si nécessaire, les probabilités $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ et $P(X \geq \mu + \sigma)$.
 - (b) Déterminer dans chaque cas, en fonction de σ , le réel r tel que :
 - $P(\mu - r \leq X \leq \mu + r) = 0,95$
 - $P(\mu - r \leq X \leq \mu + r) = 0,99$
- 4 On considère l'algorithme suivant :

```

A et C sont des entiers naturels
Initialisation
  C prend la valeur 0
Traitement
  Pour i allant de 1 à 9
    A prend une valeur aléatoire entre 1 et 7
    Si A > 5
      Alors C prend la valeur C + 1
    Fin Si
  Fin Pour
Sortie
  Afficher C
    
```

Dans l'expérience aléatoire simulée dans l'algorithme ci-dessus, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.

Quelle loi suit la variable X ? Préciser le cas échéant ses paramètres.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 QCM Généralités

Enoncé
p. 357

1 Réponse **a**. En effet :

$$\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \left[-\frac{x^2}{4} + x\right]_0^2 = 1.$$

2 Réponse **a**. En effet, sur $\left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, la fonction n'est pas toujours positive, donc ne peut être une fonction densité de probabilité.

En revanche, f est positive pour $x > 0,5$, et :

$$\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2x - 1) dx = \left[x^2 - x\right]_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1.$$

3 Réponse **b**. En effet, $\int_0^1 x \times 3x^2 dx = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$.

4 Réponse **c**. En effet, $\int_2^a \frac{k}{x^2} dx = \left[-\frac{k}{x}\right]_2^a = -\frac{k}{a} + \frac{k}{2}$ et
 $\lim_{a \rightarrow +\infty} -\frac{k}{a} = 0$ donc il faut que $\frac{k}{2} = 1$ d'où $k = 2$.

Remarque : la réponse **b** est absurde car elle donne une fonction négative.

2 QCM Loi uniforme

Enoncé
p. 357

1 Réponse **a**. C'est le cours.

2 Réponse **a**. On a :

$$\begin{aligned} P_{(X>4)}(X < 6) &= \frac{P((X > 4) \cap (X < 6))}{P(X > 4)} \\ &= \frac{P(4 < X < 6)}{P(X > 4)} \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3 Réponse **b**. Le chiffre des centièmes est 3 sur les intervalles $[2,03; 2,04[$, $[2,13; 2,14[$, ..., $[2,93; 2,94[$, soit sur 10 intervalles d'amplitudes 0,01.

Donc la probabilité est $\frac{10 \times 0,01}{1} = 0,1$.

LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES • CHAP. 14

- 4 Réponse **c**. On cherche :

$$\begin{aligned} P_{(X < 1,5)}(X > 0) &= \frac{P((X < 1,5) \cap (X > 0))}{P(X < 1,5)} \\ &= \frac{P(0 < X < 1,5)}{P(X < 1,5)} \\ &= \frac{\frac{1,5}{4}}{\frac{2,5}{4}} \\ &= \frac{1,5}{2,5} \\ &= 0,6. \end{aligned}$$

3 QCM Loi exponentielle

Enoncé
p. 358

- 1 Réponse **a**. C'est le cours.
- 2 Réponse **a**. C'est le cours aussi.
- 3 Réponse **b**. Cela vient de la définition générale de l'espérance d'une variable aléatoire, donc de sa valeur moyenne.
- 4 Réponse **a**. Cela vient du fait que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement.

4 QCM Lois normales

Enoncé
p. 358

- 1 Réponse **a**. Cela vient de la définition.
- 2 Réponse **a**. En effet, on sait d'après le cours que :
 $P(8 < X < 12) \approx 0,68$ (un écart-type de part et d'autre de l'espérance),
donc $P(X < 12) > 0,68$.
Pour les autres réponses, d'après les valeurs à connaître :
 $P(X > 12) \approx 0,16$ et $P(6 < X < 14) \approx 0,95$ (deux écarts-types de part et d'autre de l'espérance).
- 3 Réponse **a**. En effet, si $P(0 < u) = 0,475$, $P(-u < X < u) = 0,95$, et on sait que cette valeur correspond à un intervalle d'amplitude deux écart-types de part et d'autre de la moyenne, donc $u = 14$.
- 4 Réponse **c**. $P(X > t) = 1 - F(t)$ et par symétrie,

$$P(X < -t) = 1 - F(t),$$

donc :

$$\begin{aligned} P(-t < X < t) &= F(t) - (1 - F(t)) \\ &= 2F(t) - 1. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 Lecture graphique de probabilité

Enoncé
p. 359

Lycée Jean Rostand, Villepinte

- 1 Tout d'abord, f est partout positive. Elle est intégrable car continue. De plus, l'aire sous la courbe est l'aire d'un triangle de base 4 et de hauteur 0,5, elle est donc bien égale à 1. Les conditions sont remplies pour que f puisse être une densité de probabilité.
- 2 (a) $P(X \leq 2) = 1$ puisqu'on prend toute l'aire sous la courbe.
- (b) $P(X = 1) = 0$. C'est une propriété du cours.
- (c) Il nous faut trouver l'ordonnée y du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction f avec l'axe des ordonnées. On peut par exemple utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{OH}{BC} = \frac{AO}{AC}$$

et donc :

$$OH = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent,

$$P(X \in [-2; 0]) = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

- (d) $P(-2 \leq X \leq 2) = 1$ puisqu'on prend là aussi toute l'aire sous la courbe.
- (e) $P(X \geq 1) = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.
- (f) $P(0 \leq X \leq 2) = 1 - P(X \in [-2; 0]) = \frac{2}{3}$.

Remarque : on aurait pu également ici faire la somme de l'aire d'un trapèze et d'un triangle, mais c'était plus long !

6 Fonction densité de probabilité

Enoncé
p. 359

Lycée Jean Rostand, Villepinte

- 1 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{4}x + \frac{3}{12}x^3 \right]_{-1}^1 = 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{12} \right) = 1$. (On a utilisé le fait que la primitive choisie est impaire pour alléger le calcul).
La fonction f est positive ou nulle sur \mathbb{R} . De plus, l'aire sous sa courbe représentative est égale à 1 donc elle peut être une densité de probabilité.
- 2 $\int_{-1}^1 xf(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^3 \right) dx$. La fonction à intégrer étant impaire, et l'intervalle d'intégration étant symétrique par rapport à 0, cette intégrale est nulle, donc $E(X) = 0$.
- 3 On veut trouver L tel que $P(-L \leq X \leq L) = 0,5$.

Ceci se traduit par : $\int_{-L}^L f(x) dx = 0,5$, ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^3 \right]_{-L}^L = 0,5 &\Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{4}L + \frac{1}{4}L^3 \right) = 0,5 \\ &\Leftrightarrow L + L^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow L^3 + L - 1 = 0. \end{aligned}$$

Posons $g(x) = x^3 + x - 1$.

L'intervalle I cherché est de la forme $[-L ; +L]$ d'après l'énoncé. Donc L est un nombre de l'intervalle $[0 ; 1]$, puisque $P(-1 < X < 1) = 1$.

Résoudre le problème revient à trouver une valeur L comprise entre 0 et 1 telle que $g(L) = 0$.

$g'(x) = 3x^2 + 1$, donc g' est positive et la fonction g est strictement croissante. Elle est continue car c'est une fonction polynôme. De plus, $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution entre 0 et 1.

À la calculatrice, on voit successivement que $g(0,6) < 0$ et $g(0,9) > 0$, puis que $g(0,68) < 0$ et $g(0,69) > 0$, donc une valeur approchée de L est 0,68.

7 Fonction uniforme

Enoncé
p. 360

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pin-Justaret

- 1 Puisqu'on choisit le nombre au hasard, la loi de probabilité de X est la loi uniforme sur $[3 ; 7]$.
- 2 L'intervalle a pour amplitude 4, donc la fonction densité est $f(x) = \frac{1}{4}$ sur l'intervalle $[3 ; 7]$ (et 0 ailleurs).
- 3 D'après le cours, $E(X) = \frac{3+7}{2} = 5$.
- 4 $P(X < 5,5) = \frac{5,5-3}{4} = \frac{2,5}{4} = \frac{5}{8}$.

Remarque : le « strictement » ne change rien au résultat.

- 5 Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P_{(X>5)}(X < 6,2) &= \frac{P((X > 5) \cap (X < 6,2))}{P(X > 5)} \\ &= \frac{P(5 < X < 6,2)}{P(X > 5)} \\ &= \frac{\frac{6,2-5}{4}}{\frac{7-5}{4}} \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

8 Temps d'attente

Enoncé
p. 360

Lycée Guynemer, Compiègne

Appelons X la variable aléatoire donnant le temps d'attente de Christophe.

Puisque l'opérateur appelle de façon aléatoire sur le créneau indiqué, la loi suivie par X est la loi uniforme sur $[18 ; 19]$.

Christophe attend entre 15 et 40 minutes si $19 \text{ h } 15 < X < 19 \text{ h } 40$.

$$P(19 \text{ h } 15 < X < 19 \text{ h } 40) = \frac{19 \text{ h } 40 - 19 \text{ h } 15}{1 \text{ h}},$$

et en passant en minutes :

$$P(19 \text{ h } 15 < X < 19 \text{ h } 40) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}.$$

9 Trouver le paramètre d'une loi exponentielle

Enoncé
p. 360

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

$$\begin{aligned} 1 \quad P(X < 7) = 0,6 &\Leftrightarrow \int_0^7 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,6 \\ &\Leftrightarrow [-e^{-\lambda x}]_0^7 = 0,6 \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-7\lambda} = 0,6 \\ &\Leftrightarrow e^{-7\lambda} = 0,4 \\ &\Leftrightarrow -7\lambda = \ln 0,4 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,4}{7} \end{aligned}$$

Ce qui donne en effet $\lambda \approx 0,131$.

$$2 \quad P(X > 5) = e^{-5\lambda} \text{ d'après le cours, donc } P(X > 5) \approx 0,52.$$

LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES • CHAP. 14

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3} \quad P(6 < X < 10) &= \int_6^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_6^{10} \\
 &= -e^{-10\lambda} + e^{-6\lambda} \\
 &\approx 0,19 \text{ (en utilisant la valeur approchée de } \lambda \text{ proposée).}
 \end{aligned}$$

4 Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle. On cherche $P_{(x>4)}(X > 9)$.

$$\begin{aligned}
 P_{(x>4)}(X > 9) &= \frac{P((X > 4) \cap (X > 9))}{P(X > 4)} \\
 &= \frac{P(X > 9)}{P(X > 4)} \\
 &= \frac{e^{-9\lambda}}{e^{-4\lambda}} \\
 &= e^{-5\lambda} \\
 &\approx 0,52.
 \end{aligned}$$

Remarque : cette probabilité est égale à la probabilité qu'il n'y ait pas de panne durant les 5 premières heures, ce qui justifie l'appellation de « loi de durée de vie sans vieillissement ».

$$\begin{aligned}
 \mathbf{5} \quad P(X > a) = P(X < a) &\Leftrightarrow e^{-a\lambda} = 1 - e^{-a\lambda} \\
 &\Leftrightarrow e^{-a\lambda} = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow -a\lambda = -\ln 2 \\
 &\Leftrightarrow a = \frac{\ln 2}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Remarque : cette valeur a est appelée *durée de demi-vie*.

6 (a) Il y a répétitions de façon indépendante d'une épreuve de Bernoulli, le succès étant « avoir une durée de vie supérieure ou égale à 5 heures ».

Y suit donc la loi binomiale de paramètres $(8 ; 0,52)$ d'après la question **2**.

$$\mathbf{(b)} \quad P(Y = 3) = \binom{8}{3} \times 0,52^3 \times (1 - 0,52)^{8-3} \approx 0,20.$$

(c) D'après le cours de première, $E(Y) = 8 \times 0,52 \approx 4$.

Remarque : cette question se rapporte au cours de première, qu'il convient donc de ne pas avoir oublié !

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

10 Durée de vie moyenne

Enoncé
p. 361

Lycée Charlemagne, Paris

- 1** (a) L'énoncé nous dit que $P(X < 2) = 0,22$ (approximativement).
Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,22 &\Leftrightarrow [-e^{-\lambda x}]_0^2 = 0,22 \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0,22 \\ &\Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0,78 \\ &\Leftrightarrow -2\lambda = \ln 0,78 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,78}{2}. \end{aligned}$$

On a donc $\lambda \approx 0,124$.

- (b) $P(X > 10) = e^{-10\lambda} \approx 0,289$.
(c) La durée moyenne de vie de ces appareils est, d'après le cours,
 $\frac{1}{\lambda} \approx 8$.

- 2** (a) Dans cette question, on fait appel à des notions vues en classe de première, ce qui montre qu'il ne faut pas avoir oublié ce qui a été appris l'année précédente (comme dans l'exercice précédent d'ailleurs).

La façon la plus simple de répondre à cette question est de passer par l'événement contraire : en effet, le contraire de « au moins un appareil a une durée de vie supérieure à 15 ans » est l'événement noté A : « tous les appareils ont une durée de vie inférieure à 15 ans ».

Il faut donc trouver la probabilité qu'un de ces appareils ait une durée de vie inférieure à 15 ans.

$$P(X < 15) = 1 - e^{-15\lambda} \approx 0,844.$$

Il y a 10 appareils, donc la probabilité que tous aient une durée de vie inférieure à 15 ans est :

$$P(A) = (0,844)^{10} \approx 0,183.$$

Donc la probabilité qu'au moins un ait une durée de vie supérieure à 15 ans est :

$$1 - P(A) \approx 0,817.$$

- (b) Il faut ici que $1 - 0,844^n > 0,999$.

$$\begin{aligned} 1 - 0,844^n > 0,999 &\Leftrightarrow 0,844^n < 0,001 \\ &\Leftrightarrow n \ln 0,844 < \ln 0,001 \end{aligned}$$

car \ln est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,844} \text{ car } \ln 0,844 < 0.$$

n étant un nombre entier, il faut donc que n soit au moins égal à 41.

MÉTHODE

Dans toute question de probabilités contenant l'expression « au moins », il faut envisager d'utiliser l'événement contraire. Le piège dans le type de calcul ci-dessus est d'oublier de se poser la question du signe du nombre par lequel on divise les deux membres d'une inéquation. Il faut garder à l'esprit que si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$.

11 Fonctions et probabilités

Enoncé
p. 362

Lycée Claude Monet, Paris

1 $f'(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$. Donc, $f'(x) < 0$ sur \mathbb{R}_+ , et f est strictement décroissante.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0 \text{ car } \lambda > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2 $f(0) = \lambda$; $f'(0) = -\lambda^2$.

Donc l'équation de la tangente \mathcal{T} au point L d'abscisse 0 est :

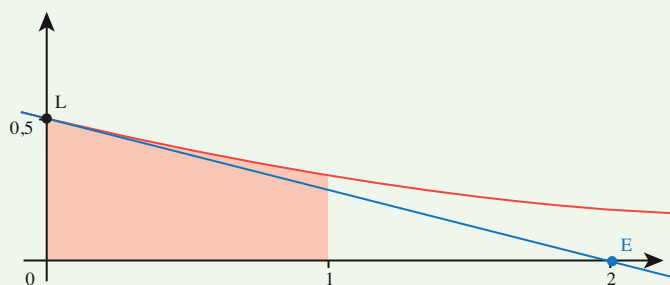
$$y = -\lambda^2 x + \lambda.$$

3 x_E est telle que $y_E = 0$, donc $-\lambda^2 x_E + \lambda = 0$. On a donc :

$$x_E = \frac{-\lambda}{-\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

4 λ est l'ordonnée du point L puisque $f(0) = \lambda$.

5 On a le graphique suivant :



La droite \mathcal{T} est la droite (LE) .

6 La partie colorée sous la courbe représente $P(X < 1)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

12 Avec une ROC

Enoncé
p. 362

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

Partie A

$$\begin{aligned} 1 \quad G'(x) &= ae^{-\lambda x} + (ax + b)(-\lambda e^{-\lambda x}) \\ &= e^{-\lambda x}(-\lambda ax + a - \lambda b). \end{aligned}$$

On souhaite que $G'(x) = g(x)$, donc :

$$e^{-\lambda x}(-\lambda ax + a - \lambda b) = \lambda x e^{-\lambda x}.$$

En identifiant les coefficients, on obtient : $-\lambda a = \lambda$, donc $a = -1$, et $a - \lambda b = 0$ donc $b = -\frac{1}{\lambda}$.

Par conséquent, $G(x) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}$.

$$\begin{aligned} 2 \quad E(X) &= \int_0^t xf(x) dx = \int_0^t g(x) dx \\ &= [G(x)]_0^t \\ &= \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \\ &= -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

D'après le cours, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$.

De plus, pour $\lambda > 0$,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\lambda x) &= -\infty \\ \lim_{a \rightarrow -\infty} (ae^a) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\lambda x e^{-\lambda x}) = 0,$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-\lambda x}) = 0$ en divisant par λ .

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t xf(x) dx = \frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Ce résultat est un résultat à retenir, mais ici, il s'agit d'une ROC !

Partie B

1 La notion de moyenne est similaire à celle d'espérance mathématique, donc on a $E(X) = 8$ (environ).

Donc d'après le résultat de la question de cours,

$$\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

$$2 \quad P(X < 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^1 = -e^{-\lambda} + 1 \approx 0,118.$$

Cela signifie que la probabilité qu'un moteur tombe en panne au cours de la première année est environ égale à 0,118.

3 On cherche $P(X > 3)$.

$$P(X > 3) = e^{-3\lambda} \approx 0,687.$$

4 Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle : On cherche :

$$\begin{aligned} P_{(X>1)}(X > 4) &= \frac{P((X > 1) \cap (X > 4))}{P(X > 1)} \\ &= \frac{P(X > 4)}{P(X > 1)} \\ &= \frac{e^{-4\lambda}}{e^{-\lambda}} \\ &= e^{-3\lambda} \\ &\approx 0,687. \end{aligned}$$

Remarque : on retrouve le résultat précédent ce qui est une propriété de la loi de durée de vie sans vieillissement.

13 Contrôle de production

Enoncé
p. 363

Lycée Claude Monet, Paris

Soit A l'événement « le cylindre est accepté », B l'événement « le cylindre a un écart à la valeur de réglage inférieur à 1 » et C l'événement « le cylindre a un écart à la valeur de réglage compris entre 1 et 2 ».

1 (a) •
$$\begin{aligned} P(B) &= \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^1 1,5e^{-1,5x} dx \\ &= [-e^{-1,5x}]_0^1 \\ &= -e^{-1,5} + 1 \\ &\approx 0,777. \end{aligned}$$

• $P(C) = [-e^{-1,5x}]_1^2 = -e^{-1,5 \times 2} + e^{-1,5} \approx 0,173.$

• $P(A) = P(B) + 0,8 \times P(C) \approx 0,915.$

(b) On cherche ici $P_A(C)$.

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(C)}{P(A)} \approx 0,189.$$

2 (a) La probabilité qu'un cylindre soit accepté est $P(A)$. Les tirages étant supposés indépendants, la probabilité que les dix cylindres

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

soient acceptés est :

$$(P(A))^{10} \approx 0,411.$$

- (b) Il s'agit ici de l'événement contraire du précédent, donc sa probabilité est :

$$1 - (P(A))^{10} \approx 0,589.$$

14 Loi normale centrée réduite

→ **Énoncé**
p. 363

Lycée Guynemer, Compiègne

- 1 (a) $P(X = 1) = 0$: comme pour toute loi continue, la probabilité d'obtenir une valeur précise est nulle.
 (b) À la calculatrice, $P(-1,5 < X < 2,2) \approx 0,919$.
 (c) De même, $P(X < 1,3) \approx 0,903$.
 (d) De même, $P(X > 0,22) \approx 0,413$.

2
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(-0,38 < X < 1,02)}{P(X > -0,38)} \approx \frac{0,494}{0,648} \approx 0,762.$$

15 Qualité de l'eau

→ **Énoncé**
p. 364

Lycée Guynemer, Compiègne

Si on appelle X la variable aléatoire donnant la teneur en nitrates, on cherche $P(X > 50)$.

À la calculatrice, on obtient 0,006 2.

16 Approximation de la loi binomiale

→ **Énoncé**
p. 364

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

- 1 (a) On a 220 répétitions de façon indépendante d'une épreuve de Bernoulli dont le succès « le salarié est malade », a pour probabilité 0,05.

Par conséquent X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(220 ; 0,05)$.

- (b) $\mu = E(X) = 220 \times 0,05 = 11$.

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} = \sqrt{10,45} \approx 3,233.$$

- 2 $7 \leq X \leq 15 \Leftrightarrow 7 - 11 \leq X - \mu \leq 15 - 11$

$$\Leftrightarrow -4 \leq X - \mu \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{4}{\sigma}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{\sigma} \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}$$

on cherche donc $P\left(-\frac{4}{\sigma} \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right)$, Z étant une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Or, $\frac{4}{\sigma} \approx 1,24$. D'après le tableau précédent,

$$P\left(-\frac{4}{\sigma} \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) \approx 0,893 - 0,108 \approx 0,785.$$

Donc la probabilité qu'entre 7 et 15 salariés soient absents au cours d'une semaine donnée est environ 0,785.

Remarque : cette valeur est assez éloignée de celle obtenue en calculant directement avec la loi binomiale (0,84). Il ne faut pas oublier que, dans le théorème de Moivre, on précise bien que n tend vers $+\infty$. Ici, $n = 220$.

17 Chaîne d'embouteillage

Enoncé
p. 365

Lycée Jules Ferry, Paris

- 1 On veut $P(X < 100) < 0,001$. Mais μ est inconnue. Il va donc falloir passer par la loi normale centrée réduite. On pose $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} P(X < 100) &= P(X - \mu < 100 - \mu) \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{100 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{100 - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve $P(Z < t) = 0,001$ pour $t \approx -3,090$, donc $\frac{100 - \mu}{\sigma} \approx -3,090$, et donc $100 - \mu \approx 2 \times (-3,090)$. On obtient donc $\mu \approx 106,18$ cl (on arrondit par excès pour être sûr que la probabilité sera bien inférieure à 1).

- 2 On cherche ici $P(X > 110)$, connaissant les paramètres de la loi normale. On peut donc utiliser directement la calculatrice. On obtient $P(X > 110) \approx 0,028$.

18 Loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

Enoncé
p. 365

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 On a ici $\sigma = 0,5$, d'où $P(X < 4,25) \approx 0,067$.
- 2 À la calculatrice, $P(X > 5,25) \approx 0,309$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 De même, $P(4,5 < X < 6) \approx 0,819$.

19 Le paradoxe de Bertrand

Enoncé
p. 365

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 (a) Le triangle ABC est équilatéral. Par conséquent, (AH) , hauteur, est aussi médiane et médiatrice. Donc H est le milieu de $[AB]$.
- (b) On sait que $[HC]$ est une médiane du triangle ABC , O est son centre de gravité, donc $OH = \frac{1}{3}HC = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$.
- (c) L'angle \widehat{AOB} est l'angle au centre interceptant l'arc \widehat{AB} . Il mesure donc le double de l'angle au sommet ABC interceptant le même arc, donc 120° , puis le triangle ABC est équilatéral.

- 2 (a) On a choisi un point quelconque sur un rayon de longueur R . La variable aléatoire X suit donc la loi uniforme sur $[0 ; R]$.
- (b) La corde aura une longueur supérieure au côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle si $OM < OH$.

$$P(X < OH) = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}.$$

- (c) Appelons Y la variable aléatoire Y qui donne l'abscisse du point M sur la droite (BH) munie d'un repère telle que l'abscisse de D soit R . Si on choisit M sur le diamètre, la loi suivie par Y est la loi uniforme sur $[-R ; R]$.

$$P\left(-\frac{1}{2}R < Y < \frac{1}{2}R\right) = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

Cela ne change pas la probabilité de choisir M au hasard sur un diamètre.

- 3 (a) La variable aléatoire Z suit la loi uniforme sur $[0 ; 180]$.
- (b) La corde aura une longueur supérieure à celle du côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle si $X > 120$.

$$P(Z > 120) = \frac{180 - 120}{180} = \frac{1}{3}.$$

20 Variance et loi exponentielle

Enoncé
p. 366

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

- 1 La fonction $F(t) = (at^2 + bt + c)e^{-\lambda t}$ est une primitive de $t^2\lambda e^{-\lambda t}$ si et seulement si $F'(t) = t^2\lambda e^{-\lambda t}$. On a :

$$\begin{aligned} F'(t) = t^2\lambda e^{-\lambda t} &\iff [2at + b - \lambda(at^2 + bt + c)]e^{-\lambda t} = t^2\lambda e^{-\lambda t} \\ &\iff -\lambda at^2 + t(2a - \lambda b) + b - \lambda c = t^2\lambda \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} -\lambda a = \lambda \\ 2a - \lambda b = 0 \\ b - \lambda c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{2}{\lambda} \\ c = -\frac{2}{\lambda^2}. \end{cases}$$

2 On a donc $F(t) = -\left(t^2 + \frac{2}{\lambda}t + \frac{2}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V(X) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 f(t) dt - [E(X)]^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 f(t) dt - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\left(t^2 + \frac{2}{\lambda}t + \frac{2}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t} \right]_0^x - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Donc $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ et l'écart-type est donc égal à $\frac{1}{\lambda}$ (λ est par définition un nombre positif).

21 Rencontre et loi uniforme

➔ **Énoncé**
p. 367

Lycée Virlogeux, Riom

On peut considérer que l'heure d'arrivée de Claire suit une loi uniforme sur $[0 ; 1]$, et celle de Patrick aussi. On peut donc représenter l'espace possible de leur rencontre par un carré de côté 1.

Si on appelle X l'heure d'arrivée (aléatoire) de Claire, et Y l'heure d'arrivée (aléatoire) de Pierre, l'énoncé nous dit que :

- $0 < X < 1$ (en considérant que 12h = 0h).
- $0 < Y < 1$
- $Y < X + \frac{1}{6}$, puisque Claire ne veut pas attendre plus de 10 minutes.
- $X < Y + \frac{1}{4}$, puisque Pierre ne veut pas attendre plus de 15 minutes.

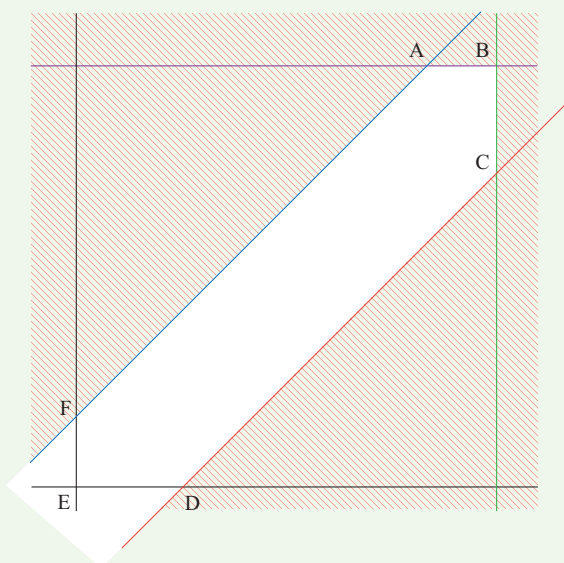
Ceci permet de déterminer l'espace des rencontres possibles de Claire et Patrick, et donc la probabilité qu'ils se rencontrent.

On obtient le graphique page suivante.

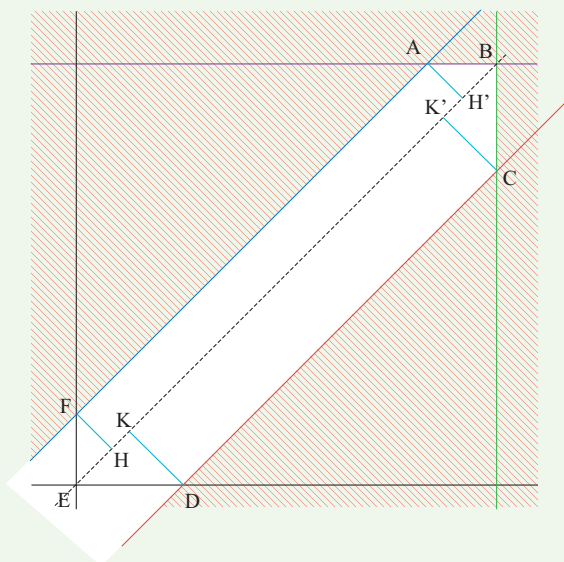
COURS

INTERROS

CORRIGÉS



La partie non hachurée correspond à la possibilité d'une rencontre.
 On trouve la probabilité d'une rencontre en faisant le rapport entre l'aire de cette portion de plan et l'aire du carré correspondant à la présence de l'un ou de l'autre, qui est égale à 1. Le polygone $ABCDEF$ est constitué de deux trapèzes.
 La droite (EB) est d'équation $y = x$.



Pour calculer la probabilité que Claire et Patrick se rencontrent, il faut ajouter les aires des triangles EFH et ABH' (de même aire), EKD et $CK'B$ (de

LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES • CHAP. 14

même aire) et des rectangles $FHH'A$ et $DKK'C$.
L'ordonnée de F est $\frac{1}{6}$, donc $2FH^2 = \frac{1}{36}$ et $FH = \frac{1}{6\sqrt{2}}$, donc la somme des aires des deux triangles EFH et ABH' est $\frac{1}{72}$.

L'abscisse de D est $\frac{1}{4}$ donc $2KD^2 = \frac{1}{16}$ et la somme des aires des triangles EKD et $CK'B$ est $\frac{1}{32}$.

Le rectangle $FHH'A$ a pour hauteur $HF = \frac{1}{6\sqrt{2}}$ et pour longueur :

$$HH' = EB - 2EH = \sqrt{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

Son aire est donc $\frac{1}{6\sqrt{2}} \times \frac{5\sqrt{2}}{6} = \frac{5}{36}$.

Le rectangle $KDCK'$ a pour hauteur $KD = \frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ et pour longueur

DC .
 $D\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ et $C\left(1; \frac{3}{4}\right)$ car C est sur la droite d'équation $y = x - \frac{1}{4}$.

$$\text{Donc } CD = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

L'aire de $KDCK'$ est donc $\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{16}$.

Finalement, la probabilité que Claire et Patrick se rencontrent est :

$$\frac{1}{72} + \frac{1}{32} + \frac{5}{36} + \frac{3}{16} = \frac{107}{288} \approx 0,37.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

22 Avec un algorithme

Enoncé
p. 367

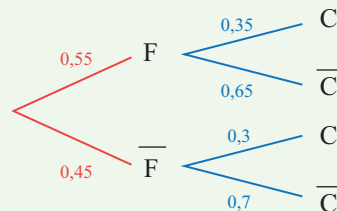
Lycée Buffon, Paris

Remarque : cet exercice balaye les programmes de première et de terminale, ce qui fait toute sa difficulté !

1 On note :

- F : « l'élève est une fille » ;
- C : « l'élève mange à la cantine ».

L'analyse de l'énoncé conduit à l'arbre ci-contre.



On cherche $P(\overline{C})$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(\overline{C}) = P(\overline{C} \cap F) + P(\overline{C} \cap \overline{F})$$

car F et \overline{F} forment une partition de l'univers.

On a donc :

$$P(\overline{C}) = 0,55 \times 0,65 + 0,45 \times 0,7 = 0,6725.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) \\ &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - 0,8^{20} - \binom{20}{1} \times 0,2 \times 0,8^{19} \\ &\approx 0,931. \end{aligned}$$

L'utilisation de l'événement contraire permet d'écrire une formule « relativement » simple.

3 (a) • Ceci est une propriété du cours : $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$.

$$\bullet P(X \geq \mu + \sigma) = \frac{1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)}{2} \approx 0,16.$$

On peut éventuellement s'aider de la fonction densité de probabilité d'une loi normale pour visualiser ce calcul.

(b) Là aussi il s'agit du cours :

$$\bullet P(\mu - r \leq X \leq \mu + r) = 0,95 \Leftrightarrow r \approx 2\sigma.$$

$$\bullet P(\mu - r \leq X \leq \mu + r) = 0,99 \Leftrightarrow r \approx 3\sigma.$$

4 À chaque étape du « Pour », on choisit un nombre entier parmi les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Donc la probabilité, à chaque étape, qu'il soit strictement supérieur à 5 est $\frac{2}{7}$.

On répète donc 9 fois une expérience de Bernoulli où le succès est obtenir un nombre strictement supérieur à 5, dont la probabilité est $\frac{2}{7}$. C compte le nombre de succès, donc C suit la loi binomiale de paramètres 9 et $\frac{2}{7}$.

Chapitre 15

Intervalle de fluctuation et estimation

Plan du chapitre

1. Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%
2. Estimation

Exercice type

Lycée Léonard de Vinci, Blanquefort

Une médium affirme être capable de deviner sans être sur place si une lampe est allumée dans une pièce ou non. Lors d'une expérience effectuée dans des conditions surveillées, la médium répond correctement 16 fois sur 25.

- 1 La médium affirme qu'elle répond correctement dans 75 % des cas.
 - (a) Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de réponses correctes selon la médium.
 - (b) Énoncer une règle de décision. Que peut-on conclure ?
- 2 Une personne qui ne croit pas aux phénomènes paranormaux affirme que, compte tenu des résultats de l'expérience, on peut tout aussi bien affirmer que la personne n'a aucun don particulier.
 - (a) Si la personne n'a aucun don particulier, quelle devrait être la proportion p de réponses correctes ?
 - (b) Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de p .
 - (c) Énoncer la règle de décision et l'appliquer. Conclure.
- 3 Comment peut-on réduire le risque d'arriver à ces deux conclusions différentes ?

1 Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

Définition 1

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ avec $p \in]0 ; 1[$. L'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

est appelé un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$.

On admet (mais cela peut se démontrer) que lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité que F_n prenne ses valeurs dans I_n tend vers 0,95.

Remarques

- On peut considérer que cet intervalle est utilisable si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
- On a déjà rencontré le nombre 1,96 : si Z est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) \approx 0,95$.
- Il est facile de montrer que l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, vu en seconde, contient l'intervalle de fluctuation asymptotique $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$, donc il n'y a pas contradiction entre les deux énoncés, celui de seconde étant seulement un énoncé simplifié.

2 Estimation

On utilise l'intervalle de fluctuation asymptotique quand on connaît une proportion « théorique » dans une population et qu'on veut savoir si un échantillon peut être considéré comme issu de cette population.

Dans ce paragraphe, la proportion théorique p de la population est inconnue et on cherche à l'estimer à partir d'un échantillon.

2.1 Intervalle de confiance

Définition 2

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $p \in]0; 1[$ et $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Soit f la fréquence observée dans un échantillon. On appelle intervalle de confiance de la proportion inconnue p avec un niveau de confiance 0,95 l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

Remarques

- On admet (mais on peut démontrer) que l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient, pour n assez grand, la proportion inconnue p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95. L'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est une réalisation de cet intervalle obtenue à partir d'un échantillon.
- On peut considérer que cet intervalle est utilisable si $n \geq 30$, $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$.
- On utilise aussi l'intervalle $\left[f - 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}; f + 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \right]$, au même niveau de confiance, dans certaines disciplines.
- À ce niveau de confiance, l'amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$. En jouant sur n , on peut obtenir un intervalle de longueur donné a : il suffit que n soit supérieur ou égal à $\frac{4}{a^2}$.

➔ Solution de l'exercice type

Lycée Léonard de Vinci, Blanquefort

Ici, la fréquence observée est $\frac{16}{25} = 0,64$.

1 (a) On a :

$$I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

Ici :

$$I = \left[0,75 - 1,96 \sqrt{\frac{0,75 \times 0,25}{25}}; 0,75 + 1,96 \sqrt{\frac{0,75 \times 0,25}{25}} \right]$$

$$\approx [0,58; 0,92].$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Léonard de Vinci, Blanquefort

(b) Si la proportion de réponses correctes n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, on rejette l'hypothèse que la médium répond correctement dans 75% des cas.

Ici, la fréquence observée est 0,64. Elle appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique. On ne rejette donc pas l'hypothèse que la médium répond correctement dans 75% des cas.

2 (a) Si la personne répond au hasard, elle a une chance sur 2 de répondre correctement, donc la proportion de réponses juste devrait être 0,5.

(b) Si la proportion de réponses correctes n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique autour de 0,5, on rejette l'hypothèse que la médium répond au hasard. On a :

$$J = \left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{25}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{25}} \right]$$

$$\approx [0,304; 0,696].$$

(c) Comme 0,64 appartient à J , on ne peut rejeter l'hypothèse que la médium répond au hasard.

3 La seule façon de parvenir à une unique conclusion est d'augmenter la taille de l'échantillon jusqu'à obtenir des intervalles I et J disjoints.

INTERVALLE DE FLUCTUATION ET ESTIMATION • CHAP. 15

1 QCM Intervalles de fluctuation asymptotique 15 min Corrigé p. 397

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la réponse exacte.

- 1 Une maladie touche 5 % de la population d'un pays. On prélève au hasard un échantillon de 100 personnes de cette population. L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de personnes atteintes par la maladie dans cet échantillon est, au centième près :
 - a [0,04 ; 0,06]
 - b [0,01 ; 0,09]
 - c Aucune de ces deux réponses
- 2 Lorsqu'on multiplie la taille d'un échantillon par deux, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est :
 - a divisé par 2
 - b multiplié par $\sqrt{2}$
 - c divisé par $\sqrt{2}$
- 3 On sait que, si on lance un dé équilibré, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{6}$. Carole a lancé 80 fois un dé et obtenu 20 fois 6. Elle peut en conclure, au seuil de 95 % :
 - a que le dé est sans doute équilibré
 - b que le dé est pipé
 - c rien du tout
- 4 Quelle serait la réponse si Carole obtient la même proportion de 6 mais en ne lançant le dé que 20 fois ?
 - a que le dé est sans doute équilibré
 - b que le dé est pipé
 - c rien du tout

2 QCM Intervalles de confiance 15 min Corrigé p. 397

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la réponse exacte.

- 1 Dans un village de Chine, on a observé 600 naissances de garçons sur 1000 naissances. On peut en conclure, au niveau de confiance 0,95, que :
 - a Il y a autant de naissances de filles que de garçons.
 - b Il y a une différence significative entre le nombre de naissances de filles et de garçons.
 - c Rien du tout.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2** Lors d'un sondage entre le premier tour et le deuxième tour d'une élection présidentielle, le candidat X a été crédité de 51,5% des intentions de votes. On négligera les votes blancs et les abstentions pour simplifier. La taille minimale de l'échantillon du sondage tel que X soit « presque » sûr de gagner est :
- a** 1 000 **b** 82 **c** 4 445
- 3** On a étudié, dans deux populations différentes A et B , la prévalence d'une maladie sur deux échantillons de taille 100. Pour la population A , on a trouvé 0,48% de malades, et pour la population B on a trouvé 0,33% de malades. On peut alors considérer que :
- a** La population A est beaucoup plus atteinte que la population B .
b Il n'y a pas de différence significative entre les deux populations.
c On ne peut rien dire.
- 4** Si, dans un échantillon de 1000 personnes, 60 % affirment qu'elles préfèrent la marque de jeans A , alors :
- a** On peut quasiment affirmer qu'entre 56% et 64% de la population préfère cette marque.
b On ne peut rien affirmer du tout.
c On peut quasiment affirmer qu'entre 60% et 80% de la population préfère cette marque, et rien de plus.

3 QCM Quel intervalle ?

20 min  Corrigé
p. 397

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la réponse exacte.

- 1** Un professeur a constaté sur un trimestre que sur les 60 élèves interrogés, 40 n'avaient pas correctement appris leur leçon. Le professeur peut en conclure, au niveau de confiance 0,95, que :
- a** Au moins 54% des élèves n'avaient pas appris leur leçon.
b $\frac{2}{3}$ des élèves n'avaient pas appris leur leçon.
c Ni l'un ni l'autre.
- 2** Dans une classe préparatoire aux grandes écoles scientifiques, il y a 10 filles et 20 garçons. À la fin de la première année, 4 filles et 10 garçons intègrent une des écoles les plus renommées (Polytechnique, Écoles normales, École des Mines). On peut considérer que :
- a** Il n'y a pas de différences entre les chances de réussite des filles et des garçons.
b Les garçons réussissent mieux que les filles.
c On ne peut rien dire.

- 3** Avant le deuxième tour d'une élection présidentielle, le candidat favori a commandé à deux instituts de sondage les intentions de votes de ses concitoyens. Le premier institut le donne gagnant avec 54% des voix sur un échantillon de 300 personnes, et le deuxième le donne favori avec 52% des voix sur un échantillon de 10000 personnes. Le candidat préféré :
- a** Le premier sondage car le pourcentage est plus élevé.
 - b** Le deuxième sondage car l'échantillon est plus grand.
 - c** Le deuxième sondage pour une autre raison.

4 **QCM** Conditions d'utilisation

20 min  Corrigé p. 398

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la réponse exacte.

- 1** Dans une population, la fréquence de la présence d'un gène est 0,005. On étudie un échantillon de 900 personnes. Alors :
- a** On peut définir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.
 - b** On ne peut définir aucun intervalle de fluctuation.
 - c** On peut définir un intervalle de fluctuation.
- 2** Dans un échantillon de 100 personnes issues d'une population, on a trouvé que 10% avaient les yeux bleus. Alors :
- a** On peut définir un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95.
 - b** On ne peut pas définir un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95.
 - c** Compte tenu de l'énoncé, on ne sait pas si on peut définir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.
- 3** L'intervalle de fluctuation $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ vu en seconde :
- a** est inclus dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.
 - b** Contient l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.
 - c** Ni l'un ni l'autre.
- 4** Le maximum de la fonction qui à x associe $f(x) = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}$ est atteint sur $[0 ; 1]$ pour :
- a** $x = 0$
 - b** $x = 1$
 - c** Une autre valeur à préciser.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 Élections



15 min

Corrigé
p. 398

Lycée Léonard de Vinci, Blanquefort

Un sondage réalisé avant le premier tour de l'élection présidentielle de 2002 sur un échantillon représentatif de la population française en âge de voter donnait : 20 % pour J. Chirac, 18 % pour L. Jospin, et 14 % pour J.M. Le Pen. L'échantillon comportait 989 personnes.

Comme on le sait si on fait une recherche sur le sujet, les deux candidats au deuxième tour ont été J. Chirac et J.M. Le Pen.

- 1 Donner, pour chaque candidat, un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 0,95, de la proportion de personnes votant pour ce candidat.
- 2 Peut-on s'étonner de ce qui s'est passé ?

6 Taille d'échantillon



10 min

Corrigé
p. 399

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Un candidat à une élection a commandé un sondage portant sur 1 000 personnes choisies au hasard. La proportion de personnes votant pour ce candidat dans l'échantillon est 0,53. Expliquer pourquoi le candidat n'est pas sûr d'être élu.
- 2 Quel devrait être la taille de l'échantillon pour que, avec la même proportion de personnes favorables au candidat, le candidat soit quasiment sûr d'être élu ?

7 Pièce normale ou pas ?



15 min

Corrigé
p. 399

Lycée Henri Matisse, Cugnaux

- 1 On jette 100 fois une pièce et on obtient 59 fois face. Peut-on considérer la pièce comme équilibrée ?
- 2 La réponse serait-elle la même en gardant la même proportion de faces avec 1 000 lancers ?
- 3 Quel est le nombre minimal de lancers qui permettra, en conservant la même proportion de face, de décider que la pièce n'est pas équilibrée ?

8 Marge d'erreur



15 min

Corrigé
p. 399

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Pour un sondage portant sur 1 000 personnes, on parle parfois de « marge d'erreur de 3% » au niveau de confiance de 95%. Comment pouvez-vous expliquer cette expression ?
- 2 Sur combien de personnes doit porter un sondage pour que l'on puisse de la même manière parler de « marge d'erreur de 1% » au niveau de confiance de 95% ?

INTERVALLE DE FLUCTUATION ET ESTIMATION • CHAP. 15

9 Retraits d'argent



15 min

Corrigé
p. 399

Lycée Guynemer, Compiègne

Une étude sur un distributeur de billets a montré que 65% des retraits effectués sont compris entre cinquante et quatre-vingt euros.

- 1 Sur une certaine journée, il a été effectué 150 retraits. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de retraits compris entre cinquante et quatre-vingt euros pour cette journée.
- 2 Dans quel intervalle peut-on estimer se trouver le nombre de retraits entre cinquante et quatre-vingt euros lors de cette journée ?

10 Barème d'un concours



15 min

Corrigé
p. 400

Lycée Pape-Clément, Pessac

Lors d'un écrit à un concours, on souhaite que environ 70% des personnes s'étant présentées à l'écrit soient admissibles pour passer l'oral. On note a le pourcentage d'admissibles.

- 1 On corrige, dans toutes les matières de l'écrit, les copies de 50 candidats, et parmi eux 27 sont admissibles. Expliquer pourquoi le jury décide de modifier les barèmes dans les différentes matières.
- 2 Avec les nouveaux barèmes, sur 60 candidats, 35 sont admissibles. Expliquer pourquoi le jury accepte ce barème.

11 Espérance de vie



20 min

Corrigé
p. 400

Lycée Léonard de Vinci, Blanquefort

- 1 Dans un certain pays, en 1980, la proportion de femmes vivant au-delà de 75 ans était, d'après un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, 60%.
Celle des hommes, pour un échantillon de même taille, était 53%.
Peut-on dire, au niveau de confiance 0,95, qu'en 1980, il y avait une différence significative pour l'espérance de vie des hommes et des femmes ?
- 2 Trente ans plus tard, sur des échantillons de même taille, la proportion de femmes vivant au-delà de 77 ans est 60%, et celle des hommes vivant au-dessus de 77 ans est 57%.
Peut-on dire, au niveau de confiance 0,95, qu'en 2010 il y a une différence significative pour l'espérance de vie des hommes et des femmes ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

12 N'oubliez pas la première !



20 min

Corrigé
p. 400

Lycée Hoche, Versailles

Dans une population de 100 000 personnes, une proportion p valant 35% de la population achètent régulièrement leurs chaussures sur internet. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'individus, dans un échantillon de 1 000 personnes tirées au hasard, achetant régulièrement leurs chaussures sur internet. Soit $F = \frac{X}{1\,000}$ la fréquence de ces individus dans l'échantillon. On admet que, compte tenu du nombre de personnes sondées par rapport à la taille de la population, on peut assimiler le tirage à un tirage avec remise.

- 1 Quelle est la loi suivie par X ?
- 2 Déterminer la loi de F .
- 3 Dans quel intervalle fluctue F ,
 - (a) avec une probabilité de 95%, en utilisant la loi binomiale ?
 - (b) en utilisant l'approximation par la loi normale et l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% ?

13 Sondages multiples



25 min

Corrigé
p. 401

Lycée Virlogeux, Riom

Lors d'un scrutin électoral, 6 instituts de sondages ont mené des enquêtes afin de connaître les intentions de vote en faveur d'un certain candidat « M ».

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Institut	1	2	3	4	5	6
Taille de l'échantillon	1 200	1 050	900	1 070	1 020	1 100
Pourcentage en faveur de M	45,7	48,1	50,2	48,3	46,9	53,1
Intervalle de confiance						

- 1 Compléter ce tableau par les intervalles de confiance à 95% pour les estimations de chaque institut.
- 2 Un institut peut-il affirmer que le candidat M atteindra fort probablement la majorité absolue (plus de 50% des votes), ou, au contraire, ne l'atteindra pas ?
- 3 On considère que les 6 enquêtes ont été menées de façon indépendante.
 - (a) Quel est la proportion de votes en faveur du candidat M parmi la totalité des personnes sondées par les 6 instituts ?
 - (b) Fournir un intervalle de confiance à 95% de la proportion de vote en faveur du candidat M pour l'estimation regroupant les résultats des 6 instituts. D'après vous, le candidat obtiendra-t-il la majorité ?

14 Un sujet complet



50 min

Corrigé
p. 402

Nouvelle-Calédonie

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

On précise que les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise produit en grande série des plaques métalliques rectangulaires pour l'industrie automobile.

Partie A. Loi binomiale

On note E l'événement : « une plaque prélevée au hasard dans la production d'une journée est défectueuse ».

On suppose que $P(E) = 0,02$.

On prélève au hasard 50 plaques dans la production de la journée pour vérification. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 plaques.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de plaques de ce prélèvement qui sont défectueuses.

- 1** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
- 2** Calculer les probabilités $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
- 3** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux plaques soient défectueuses.

B. Loi normale

Une plaque de ce type est conforme pour la longueur lorsque sa longueur L , exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[548 ; 552]$. Une plaque de ce type est conforme pour la largeur lorsque sa largeur ℓ , exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[108 ; 112]$.

- 1** On note L_1 la variable aléatoire qui, à chaque plaque de ce type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa longueur L . On suppose que la variable aléatoire L_1 suit la loi normale de moyenne 550 et d'écart type 1. Calculer $P(548 \leq L_1 \leq 552)$.
- 2** On note L_2 la variable aléatoire qui, à chaque plaque de ce type prélevée au hasard dans le stock, associe sa largeur ℓ . On admet que :
 $P(108 \leq L_2 \leq 112) = 0,95$.
On suppose que les variables aléatoires L_1 et L_2 sont indépendantes. Ce qui signifie que :

$$\begin{aligned} &P((548 \leq L_1 \leq 552) \cap (108 \leq L_2 \leq 112)) \\ &= P(548 \leq L_1 \leq 552) \times P(108 \leq L_2 \leq 112). \end{aligned}$$

On prélève une plaque au hasard dans le stock. Déterminer la probabilité qu'elle soit conforme pour la longueur et conforme pour la largeur.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie on considère une grande quantité de plaques devant être livrées à une chaîne de montage de véhicules électriques. On considère un échantillon de 100 plaques prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 94 plaques sont sans défaut.

- 1 Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des plaques de cette livraison qui sont sans défaut.
- 2 Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 plaques prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des plaques de cet échantillon qui sont sans défaut.

On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des plaques de la livraison qui sont sans défaut.

Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95%.

INTERVALLE DE FLUCTUATION ET ESTIMATION • CHAP. 15

1 QCM Intervalles de fluctuation asymptotique

Enoncé
p. 389

- Réponse **b** en utilisant la formule du cours.
- Réponse **c**. L'intervalle de fluctuation a pour amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}}$, donc si on multiplie la taille de l'échantillon par 2, l'amplitude est divisée par $\sqrt{2}$.
- Réponse **b**. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion $\frac{1}{6}$ dans un échantillon de taille 80 est $[0,085 ; 0,248]$. Il ne contient pas la proportion 0,25 obtenue.
- La réponse **a**. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour un échantillon de taille 20 est $[0,003 ; 0,33]$. Il contient la proportion 0,25.

2 QCM Intervalles de confiance

Enoncé
p. 389

- Réponse **b**. L'intervalle de confiance de la proportion du nombre de garçons est environ $[0,568 ; 0,632]$. Cet intervalle ne contient pas 0,5, donc il n'y a pas autant de naissances de filles que de garçons.
- Réponse **c**. Si la proportion observée est 0,515, la borne inférieure de l'intervalle de confiance est $0,515 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour être presque sûr de gagner, il suffit que 0,5 soit inférieur à cette borne, donc il suffit que $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,015$. Cela donne $n \geq 4\,445$.
- Réponse **b**. Pour la population A, l'intervalle de confiance de la prévalence de la maladie est, au niveau de confiance 0,95, $[0 ; 0,104\,8]$. En effet, on ne peut pas donner ici des pourcentages négatifs. Pour la population B, l'intervalle de confiance de la prévalence de la maladie est, au niveau de confiance 0,95, $[0 ; 0,103\,3]$. Ces deux intervalles ayant une intersection non vide, il n'y a pas de différence significative entre les prévalences de la maladie dans ces deux populations.
- Réponse **a**. En effet, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est environ $[0,568 ; 0,632]$.

3 QCM Quel intervalle ?

Enoncé
p. 390

- Réponse **a**. Le professeur ne sait pas le nombre exact d'élèves n'ayant pas appris leur leçon. on ne peut donc utiliser qu'un intervalle de confiance, au niveau de confiance 0,95. On obtient : $I \approx [0,538 ; 0,796]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Réponse **[c]**. On ne peut rien conclure car les conditions d'utilisation des intervalles de confiance ne sont pas remplies ($n \geq 30$, $nf \geq 5$ et $n(f-1) \geq 5$).

3 Réponse **[c]**. En effet, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 a pour borne inférieure 0,51, ce qui lui prédit une victoire.

4 QCM Conditions d'utilisation

→ **Énoncé**
p. 391

1 Réponse **[b]**. Les conditions ne sont pas remplies pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique car $900 \times 0,005 = 4,5 < 5$ et l'intervalle de fluctuation étudié en seconde ne s'applique pas non plus car p doit appartenir à $[0,2 ; 0,8]$, ce qui n'est pas le cas.

2 Réponse **[a]**. $n \geq 30$ $nf \geq 5$ $n(1-f) \geq 5$
On ne connaît pas la proportion théorique donc on ne peut pas déterminer un intervalle de fluctuation.

3 Réponse **[b]**. Étudions la fonction f qui à tout réel p de $[0 ; 1]$ associe $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. On calcule : $f'(p) = \frac{1-2p}{2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$, donc :

$$f'(p) > 0 \iff 1 - 2p > 0 \iff p < \frac{1}{2}.$$

La fonction f atteint son maximum pour $p = \frac{1}{2}$ et ce maximum est égal à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Donc : $p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ a pour maximum $0,5 + \frac{0,98}{\sqrt{n}}$ et $p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
a pour minimum $0,5 - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1 - \frac{0,98}{\sqrt{n}}$.

4 Réponse **[c]**. D'après l'étude de la question 3, le maximum est atteint pour $x = 0,5$.

5 Élections

→ **Énoncé**
p. 392

Lycée Léonard de Vinci, Blanquefort

1 Pour J. Chirac : $I_1 \approx [0,168 ; 0,232]$.
Pour L. Jospin : $I_2 \approx [0,148 ; 0,212]$.
Pour J.M. Le Pen : $I_3 \approx [0,108 ; 0,172]$.

2 Ces intervalles ont une intersection non vide, donc on ne peut pas s'étonner de ce qui s'est passé.

INTERVALLE DE FLUCTUATION ET ESTIMATION • CHAP. 15

6 Taille d'échantillon

→ **Énoncé**
p. 392

Lycée Hoche, Versailles

- 1 L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est environ $[0,498 ; 0,562]$. Cet intervalle contenant 0,5, le candidat n'est pas sûr d'être élu.
- 2 Il faudrait que $0,53 - \frac{1}{\sqrt{n}} > 0,5 \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,03 \iff n > 1\,112$.

7 Pièce normale ou pas ?

→ **Énoncé**
p. 392

Lycée Henri Matisse, Cugnaux

- 1 Si la pièce est équilibrée, la probabilité d'obtenir face est 0,5. On utilise donc l'intervalle de fluctuation asymptotique. $I = [0,402 ; 0,598]$. Le nombre 0,59 appartient à cet intervalle, donc on peut considérer la pièce comme équilibrée.
- 2 Avec 1 000 lancers, l'intervalle de fluctuation asymptotique est environ $[0,469 ; 0,531]$. Le nombre 0,59 n'appartient plus à cet intervalle, donc on ne peut plus considérer la pièce comme équilibrée.
- 3 Il faut que : $0,5 + 1,96 \frac{\sqrt{0,5^2}}{\sqrt{n}} < 0,59 \iff 0,09 > 1,96 \frac{0,5}{\sqrt{n}}$
 $\iff \sqrt{n} > 10,88$
 $\iff n > 119$.

Il faudrait donc 119 lancers pour être quasiment sûr que la pièce n'est pas équilibrée.

8 Marge d'erreur

→ **Énoncé**
p. 392

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Au niveau de confiance de 95%, la demi-amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Lorsque $n = 1\,000$, cela donne une demi-amplitude de $\frac{1}{\sqrt{1\,000}} \approx 0,03$. Cela signifie que, au niveau de confiance de 95%, la fréquence estimée dans la population diffère de celle obtenue d'au plus 3%.
- 2 Pour avoir une marge d'erreur de 1%, il faut que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$, donc $n \geq 10\,000$. Il peut être très coûteux de faire une estimation sur 10 000 individus ...

9 Retraits d'argent

→ **Énoncé**
p. 393

Lycée Guynemer, Compiègne

- 1 Ici, $n = 150$ et $p = 0,65$. Les conditions sont donc remplies pour calculer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$I = \left[0,65 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,65 \times 0,35}{150}} ; 0,65 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,65 \times 0,35}{150}} \right].$$

Donc $I \approx [0,574 ; 0,726]$.

- 2 Sur un total de 150 retraits, cela représente entre 87 et 108 retraits.

10 Barème d'un concours

Enoncé
p. 393

Lycée Pape-Clément, Pessac

- 1 Sur l'échantillon, la proportion d'admissibles est 54%. L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 de cette proportion est environ $[0,399 ; 0,682]$. Cet intervalle ne contient pas le pourcentage 70%, donc les barèmes ne conviennent pas.
- 2 Maintenant, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est environ $[0,454 ; 0,712]$. Cet intervalle contient 70%, donc est acceptable.

11 Espérance de vie

Enoncé
p. 393

Lycée Léonard de Vinci, Blanquefort

- 1 L'intervalle de confiance au seuil de 0,95 était en 1980, pour les femmes, environ $[0,568 ; 0,632]$. Celui des hommes était environ $[0,498 ; 0,562]$. Ces deux intervalles n'ayant pas de valeur commune, on peut dire qu'il y avait une différence significative en 1980.
- 2 L'intervalle de confiance au seuil de 0,95 est, en 2010, pour les femmes, environ $[0,568 ; 0,632]$ et pour les hommes $[0,538 ; 0,602]$. Cette fois-ci les intervalles ont une intersection non vide, donc on ne peut pas dire, au seuil de 0,95, qu'il y ait une différence significative entre les hommes et les femmes.

12 N'oubliez pas la première !

Enoncé
p. 394

Lycée Hoche, Versailles

- 1 X suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,35.
- 2 F prend les 1 001 valeurs de la forme $\frac{k}{1\,000}$, où k varie de 0 à 1 000, et $P\left(F = \frac{k}{1\,000}\right) = P(X = k)$.
- 3 (a) D'après le cours de première, F fluctue dans l'intervalle $\left[\frac{a}{1\,000} ; \frac{b}{1\,000}\right]$, où a est le plus petit entier tel que $P(X < a) \geq 0,025$, et b le petit entier tel que $P(X < b) \geq 0,975$.

INTERVALLE DE FLUCTUATION ET ESTIMATION • CHAP. 15

Il faut donc utiliser la table de la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,35.

c	$P(X < c)$
320	0,024 657 01
321	0,028 805 71
322	0,033 516 359

c	$P(X < c)$
379	0,974 237 842
380	0,977 921 071
381	0,981 148 452

On trouve $a = 321$ et $b = 380$, donc F fluctue dans l'intervalle $[0,320 ; 0,380]$.

- (b) En utilisant l'approximation par la loi normale, l'intervalle de fluctuation d'une proportion de 0,35 dans un échantillon de 1 000 individus est :

$$\left[0,35 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,35 \times 0,65}{1\,000}} ; 0,35 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,35 \times 0,65}{1\,000}} \right],$$

c'est-à-dire environ $[0,320\,4 ; 0,379\,6]$. Ce résultat est pratiquement identique à celui obtenu avec la loi binomiale.

13 Sondages multiples

Enoncé
p. 394

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 En appliquant la formule du cours,

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right],$$

et on obtient :

1	2	3
[0,428 ; 486]	[0,450 ; 0,512]	[0,469 ; 0,535]
4	5	6
[0,452 ; 0,514]	[0,438 ; 0,500]	[0,501 ; 0,561]

- 2 Lorsque l'intervalle de confiance contient des valeurs inférieures et supérieures à 50%. Il n'est donc pas possible de se prononcer, avec un risque inférieur à 5%, sur le fait que le candidat M atteindra ou non la majorité absolue.

L'institut 1 peut annoncer que selon ses estimations, le candidat n'obtiendra pas la majorité, alors que l'institut 6 peut affirmer le contraire !

- 3 (a) On calcule le nombre total de réponses en faveur du vote pour le candidat A :

$$\frac{1\,200 \times 45,7 + \dots + 1\,100 \times 53,1}{100} \approx 3\,085.$$

Cela représente une proportion d'environ 48,4% des 6 370 personnes interrogées.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) Un intervalle de confiance au seuil de 95% de cette proportion est :
[0,474 ; 0,499].

Avec l'ensemble des résultats, il semble donc que le candidat M n'obtienne pas la majorité.

14 Un sujet complet

Enoncé
p. 395

Nouvelle-Calédonie

Partie A. Loi binomiale

- 1 Les tirages pouvant être considérés comme indépendants, on peut considérer qu'il y a répétition d'un schéma de Bernoulli 50 fois, la probabilité de « succès » (plaque défectueuse) étant 0,02. Donc X suit la loi $\mathcal{B}(50 ; 0,02)$.
- 2 On a : $P(X = 0) = (1 - 0,02)^{50} \approx 0,364$ et
 $P(X = 1) = \binom{50}{1} \times 0,02 \times (1 - 0,02)^{50-1} \approx 0,372$.
- 3 On a : $P(X = 2) = \binom{50}{2} \times 0,02^2 \times 0,98^{48} \approx 0,186$ et
 $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,922$.

B. Loi normale

- 1 À la calculatrice, on trouve : $P(548 \leq L_1 \leq 552) \approx 0,9545$. Mais on peut aussi utiliser le résultat du cours en remarquant que :
$$548 = \mu - 2\sigma \quad \text{et} \quad 552 = \mu + 2\sigma,$$
et la valeur approchée de cette probabilité est 0,95.
- 2 La probabilité que la pièce soit conforme est $0,9545 \times 0,95$, soit environ 0,907.

C. Intervalle de confiance

- 1 On a : $p = 0,94$.
- 2 En appliquant la formule du cours qui donne l'intervalle de confiance au seuil de 0,95, on trouve :

$$I \approx \left[0,94 - 1,96 \sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{100}} ; 0,94 + 1,96 \sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{100}} \right]$$

$$\approx [0,893 ; 0,987].$$

Remarques

- Comme on ne connaît pas p , on l'estime par la fréquence observée sur l'échantillon.
- L'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0,93 ; 0,95]$ convient aussi.

Arithmétique (spécialité)

Plan du chapitre

1. Division Euclidienne
2. PGCD et algorithme d'Euclide
3. Nombres premiers entre eux, égalité de Bézout
4. Nombres premiers

1 Division Euclidienne

Exercice type 1

Lycée Courbet, Belfort

- 1 Calculer le reste de la division euclidienne de 1 000 par 37.
- 2 En déduire que si n s'écrit $1\,000 \times u + v$ alors :
$$n \text{ est divisible par } 37 \iff u + v \text{ est divisible par } 37.$$

Définition 1 (Diviseurs et multiples)

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et p un entier supérieur ou égal à 2. On dit que p *divise* n , et on écrit $p \mid n$, si et seulement si il existe un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = a \times p$.

On rencontre aussi les expressions : n est *multiple de* p , n est *divisible par* p .

Définition 2 (Congruence)

Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ et p un entier supérieur ou égal à 2. On dit que n est *congru à* m *modulo* p , et on note : $n \equiv m \pmod{p}$ si et seulement si $n - m$ est divisible par p .

Propriétés 1

Soient $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, et p un entier supérieur ou égal à 2. Alors :

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{p} \\ b \equiv c \pmod{p} \\ c \equiv d \pmod{p} \end{cases} \implies \begin{cases} a \equiv c \pmod{p} \\ a + c \equiv b + d \pmod{p} \\ a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{p} \end{cases}$$

Théorème 1 (Division euclidienne)

Soit $n \in \mathbb{Z}$, et p un entier supérieur ou égal à 2.

Il existe un unique $q \in \mathbb{Z}$ appelé *quotient*, et un unique entier $r \in [0 ; p - 1]$ appelé *reste*, tels que :

$$n = pq + r.$$

→ Solution de l'exercice type 1

Lycée Courbet, Belfort

- 1 Le quotient de la division de 1 000 par 37 vaut 27 et le reste vaut 1, en d'autres termes :

$$1\,000 \equiv 1 \pmod{37}.$$

- 2 Par la compatibilité des opérations avec la relation de congruence, nous avons :

$$1\,000 \cdot u + v \equiv u + v \pmod{37}.$$

De cette relation, nous tirons l'équivalence suivante :

$$1\,000 \cdot u + v \equiv 0 \pmod{37} \Leftrightarrow u + v \equiv 0 \pmod{37}.$$

2 PGCD et algorithme d'Euclide

Exercice type 2

Lycée Thiers, Marseille

Calculer le PGCD de 231 868 et de 8 190.

Théorème 2 (Algorithme d'Euclide)

Soient a et b deux entiers strictement positifs. On pose $A_0 = a$ et $B_0 = b$, on définit par récurrence deux suites d'entiers A_n et B_n comme suit :

$$A_{n+1} = B_n, \text{ et } B_{n+1} \text{ est le reste de la division de } A_n \text{ par } B_n.$$

Soit n_0 le plus petit entier tel que B_{n_0} soit nul. Alors, B_{n_0-1} est le pgcd de a et de b .

➔ Solution de l'exercice type 2

Lycée Thiers, Marseille

Mettons en place l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{cases} A_0 = 231\,868 \\ B_0 = 8\,190 \end{cases} \quad A_0 = 28 \times B_0 + 2\,548$$

$$\begin{cases} A_1 = 8\,190 \\ B_1 = 2\,548 \end{cases} \quad A_1 = 3 \times B_1 + 546$$

$$\begin{cases} A_2 = 2\,548 \\ B_2 = 546 \end{cases} \quad A_2 = 4 \times B_2 + 364$$

$$\begin{cases} A_3 = 546 \\ B_3 = 364 \end{cases} \quad A_3 = 1 \times B_3 + 182$$

$$\begin{cases} A_4 = 364 \\ B_4 = 182 \end{cases} \quad A_4 = 2 \times B_4 + 0.$$

Donc :

$$\text{pgcd}(8\,190, 231\,868) = 182.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 Nombres premiers entre eux, égalité de Bézout

Exercice type 3

Lycée Sainte-Croix, Neuilly

On considère l'équation $(E) : 12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4 ; 9)$ est solution, résoudre l'équation (E) .

Définition 3 (Entiers premiers entre eux)

Deux entiers strictement positifs m et n sont dits *premiers entre eux* lorsque l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\text{pgcd}(m, n) = 1$,
- Il existe deux entiers u et v tels que $u \cdot m + v \cdot n = 1$ (égalité de Bézout).

Propriété 2

L'entier d est le pgcd de n et de m si et seulement si les entiers $\frac{n}{d}$ et $\frac{m}{d}$ sont premiers entre eux.

Théorème 3 (Théorème de Gauss)

Si un entier n divise le produit ab et si n et a sont premiers entre eux, alors n divise b .

➔ Solution de l'exercice type 3

Lycée Sainte-Croix, Neuilly

On vérifie que $12 \times 4 - 5 \times 9 = 3$.
On a donc $12x - 5y = 12 \times 4 - 5 \times 9$.
Cette équation équivaut à :

$$12(x - 4) = 5(y - 9).$$

12 divise $12(x - 4)$ donc 12 divise $5(y - 9)$. Or, 12 est premier avec 5 donc, d'après le théorème de Gauss, 12 divise $(y - 9)$. Il existe donc un entier relatif k tel que $y - 9 = 12k$ soit $y = 12k + 9$.

En remplaçant y par $12k + 9$ dans l'équation initiale, on en déduit alors que $x = 5k + 4$.

Réciproquement, tout couple $(5k + 4 ; 12k + 9)$, où k désigne un entier relatif est solution de l'équation $12x - 5y = 3$ puisque $12(5k + 4) - 5(12k + 9) = 3$.

Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(5k + 4 ; 12k + 9)$, où k désigne un entier relatif.

4 Nombres premiers

Exercice type 4

Lycée Chaptal, Paris

Soit n un entier positif, on définit :

$$M_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Démontrer que si M_n est premier, alors n est premier.

Définition 4

On dit qu'un entier positif n différent de 1 est un *nombre premier* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- L'ensemble des diviseurs positifs de n est $\Delta(n) = \{1 ; n\}$, 1 et n étant distincts
- Soient p et q deux entiers positifs. Si $n = pq$ alors $p = 1$ ou $q = 1$.
- Tous les entiers compris entre 1 et $n - 1$ sont premiers avec n .

ATTENTION

1 n'est pas un nombre premier.

Théorème 4 (Euclide)

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 5 (Décomposition en facteurs premiers)

Pour tout entier n strictement plus grand que 1, il existe un unique k -uplet de nombres premiers $(p_1 ; \dots ; p_k)$, avec $p_1 < \dots < p_k$, et un unique k -uplet d'entiers strictement positifs $(a_1 ; \dots ; a_k)$ tel que :

$$n = p_1^{a_1} \times \dots \times p_k^{a_k}.$$

Propriété 3

Le PGCD de deux entiers est égal au produit de leurs facteurs premiers communs affectés de leur plus petit exposant.

Solution de l'exercice type 4

Lycée Chaptal, Paris

Supposons que n n'est pas premier. Il existe alors deux entiers p et q strictement supérieurs à 1 tels que M_n puisse s'écrire :

$$M_n = \left(\frac{3^{pq} - 1}{3^q - 1} \right) \left(\frac{3^q - 1}{3 - 1} \right).$$

Les deux facteurs du produit sont des entiers : le premier est la somme des p premiers termes de la suite géométrique de raison 3^q et de premier terme 1 ; le second est la somme des q premiers termes de la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1. Ce sont donc dans les deux cas des sommes d'entiers non nuls.

Comme M_n est premier, l'un de ces facteurs est égal à 1. Ceci implique que $p = 1$ ou $q = 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc n est premier.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F **Divisibilité dans \mathbb{N}**

10 min Corrigé p. 414

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Le nombre 8 775 possède 12 diviseurs.
- 2 Pour tout entier naturel n , l'entier $N = n^5 - n$ est divisible par 30.
- 3 L'équation $65x - 20y = 1$ n'a pas de solutions dans \mathbb{Z}^2 .
- 4 L'entier $80 \times 5^{469} - 1$ est multiple de 7.

2 V/F **PGCD**

10 min Corrigé p. 414

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Si deux entiers naturels sont divisibles respectivement par 6 et 10, alors leur PGCD est 2.
- 2 Soit a et b deux entiers naturels non nuls, s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$, alors le PGCD de a et de b est 2.
- 3 Si $n \equiv 1 \pmod{7}$ alors $\text{PGCD}(3n + 4, 4n + 3) = 7$.
- 4 Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur de $a + b$ qui ne soit pas égal à $a + b$.

3 V/F **Nombres premiers**

10 min Corrigé p. 415

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1 Si p est premier, alors $p^3 + 2$ aussi.
- 2 Si les entiers a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et $a - b$ le sont aussi.
- 3 Si b est premier, alors pour tout entier naturel a non nul, $\text{PGCD}(a, b) = 1$.
- 4 Si p est premier, alors l'entier $N = 3^p - p$ est divisible par p .

4 **Divisibilité**

15 min Corrigé p. 415

Lycée Marie Curie, Sceaux

- 1 Montrer que pour tout n entier positif, on a : $10^n \equiv 1 \pmod{9}$.
- 2 En déduire que si n s'écrit $10 \times u + v$, alors n est divisible par 9 si et seulement si $u + v$ est divisible par 9.
- 3 En déduire un critère de divisibilité par 9.

5 Critère de divisibilité par 4



10 min

Corrigé
p. 416

Lycée Arago, Perpignan

Montrer qu'un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre constitué de ses deux derniers chiffres en base 10 est divisible par 4.

6 Un algorithme



15 min

Corrigé
p. 416

Lycée Jean-de-La-Fontaine, Paris

On considère l'algorithme suivant :

```

Variables
  n, u entiers
Entrée
  Saisir la valeur de n
Traitement
  u prend la valeur abs(n)
  Tant que u ≥ 11
    u prend la valeur u - 11
  Fin de Tant que
Sortie
  Afficher u
Fin
    
```

- 1 Qu'obtient-on si on exécute l'algorithme avec $n = 37$?
- 2 Que fait, de façon générale, cet algorithme ?
- 3 On exécute cet algorithme avec un entier naturel a et on obtient 3.
On l'exécute ensuite avec un entier naturel b et on obtient 5.
Qu'obtiendra-t-on si on l'exécute avec $3a + b$?
- 4 A-t-on le même résultat si a et b sont des entiers relatifs de signes contraires ?

7 Équations diophantiennes



20 min

Corrigé
p. 416

Lycée Jean Monod, Clamart

Il s'agit de résoudre le système (S) :
$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{23} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

- 1 Déterminer un couple d'entiers $(\alpha ; \beta)$ solution de : $23\alpha + 7\beta = 1$.
- 2 En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution de l'équation ci-dessous, puis résoudre complètement cette équation :

$$23u - 7v = -6.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 Démontrer que x est solution de (S) si et seulement s'il existe $(u ; v)$ couple d'entiers vérifiant :
$$\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$$
 En déduire l'ensemble des solutions de (S) .
- 4 Déterminer la plus petite solution entier naturel x_0 divisible par 16.

8 Entiers premiers entre eux ★ 15 min Corrigé p. 418

Lycée Masséna, Nice

Soit n un entier positif, montrer que $2n + 3$ et $n^2 + 3n + 2$ sont premiers entre eux.

9 Décomposition en facteurs premiers ★ 10 min Corrigé p. 419

Lycée Jules Haag, Besançon

Soit u et v deux entiers premiers entre eux, avec $uv = n^2$.
Montrer que u et v sont eux-mêmes des carrés.

10 Divisibilité par 24 ★★ 20 min Corrigé p. 419

Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

- 1 Quels sont les restes possibles de la division d'un nombre premier p par 4 ?
- 2 Quels sont les restes possibles de la division d'un nombre premier p par 6 ?
- 3 En déduire que pour tout nombre premier $p \geq 5$, l'entier $p^2 - 1$ est divisible par 24.

11 Critère de divisibilité par 7 ★★ 20 min Corrigé p. 421

Lycée Buffon, Paris

Soit $a < 10\,000$. On peut l'écrire en base 10 :

$$a = a_3a_2a_1a_0 \quad \text{avec} \quad a_i \in \llbracket 0 ; 9 \rrbracket.$$

Posons $u = 2a_3 + a_1$ et $v = 2a_2 + a_0$.

Montrer que a est divisible par 7 si et seulement si $3u + v$ est divisible par 7.

12 Chiffres des unités d'une puissance ★★ 15 min Corrigé p. 421

Lycée Montesquieu, Herblay

- 1 Déterminer le plus petit entier naturel p non nul tel que $7^p \equiv 1 \pmod{10}$.

- 2 Trouver le chiffre des unités dans l'écriture décimale de :

$$A = 1\,997^{1\,999^{2\,001}}.$$

13 Nombres premiers



20 min

Corrigé
p. 421

Lycée Masséna, Nice

Soit $M_n = 1111 \dots 111$, le nombre constitué en base 10 par n chiffres «1». Montrer que si M_n est premier, n est premier.

14 Équation du second degré dans \mathbb{Z}



15 min

Corrigé
p. 422

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Soit p un nombre entier. Trouver les couples $(x ; y)$ tels que $x^2 - y^2 = p$.

15 Équations diophantiennes et algorithme



20 min

Corrigé
p. 422

Lycée Hoche, Versailles

On considère l'équation :

$$(E) : 7x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

- 1 Vérifier que $(15 ; 4)$ est une solution de (E) , puis résoudre l'équation (E) .

- 2 En déduire l'unique entier a tel que :

$$0 \leq a \leq 25 \quad \text{et} \quad 7a \equiv 1 \pmod{26}.$$

- 3 Pour obtenir a , on a écrit l'algorithme suivant :

```

Initialisation
  Affecter à p la valeur 0
Traitement
  Tant que ...
    Affecter à p la valeur p + 1
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher p
    
```

Que doit-on écrire à la place des pointillés pour que l'algorithme affiche la valeur de l'entier a ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

16 Cryptographie et algorithme



25 min

Corrigé
p. 423

Lycée Charlemagne, Paris

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```

Variables
  a est un entier naturel
  b est un entier naturel
  c est un entier naturel
Initialisation
  c prend la valeur 0
  Saisir la valeur de a
  Saisir la valeur de b
Traitement
  Tant que a > b
    Affecter à c la valeur c + 1
    Affecter à a la valeur a - b
  Fin de Tant que
Sortie
  Afficher c
  Afficher a
    
```

- 1** Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
- 2** Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- Étape 1 : À la lettre qu'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
- Étape 2 : on calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p .
- Étape 3 : au nombre p on associe la lettre correspondant dans le tableau.

- 1** Coder la lettre U .

- 2 Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p , calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

- 1 Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \pmod{26}$.
- 2 Démontrer alors l'équivalence :
$$9m + p \equiv p \pmod{26} \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15 \pmod{26}.$$
- 3 Décoder alors la lettre B.

17 Nombre de diviseurs d'un entier



20 min

Corrigé
p. 424

Lycée Courbet, Belfort

- 1 Soit a un entier dont $p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ est la décomposition en facteurs premiers. Montrer que le nombre de diviseurs positifs de a est $(1+a_1) \cdots (1+a_k)$.
- 2 Supposons que $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ avec $2^{n+1} - 1$ premier. Montrer qu'alors la somme des diviseurs positifs de a vaut $2a$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 **V/F** Divisibilité dans \mathbb{N}

Enoncé
p. 408

1 Faux. L'entier 8 775 possède 24 diviseurs. Pour calculer le nombre de diviseurs de 8 775, on le décompose en produit de facteurs premiers : $8\,775 = 3^3 \times 5^2 \times 13$. Le nombre de diviseurs de 8 775 est donc $N = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

Voir corrigé de l'exercice 17 pour une justification de ce calcul.

Sinon il « suffit » d'écrire tous les diviseurs ... en faisant attention à ne pas en oublier !

2 Vrai. Si $n = 0$ ou $n = 1$, alors $N = 0$ donc N est bien divisible par 5. Si $n > 1$, on écrit N sous forme factorisée : $N = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. On remarque que le nombre $n(n-1)(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs donc il est toujours pair et multiple de 3 donc divisible par 6. Il ne reste plus qu'à prouver que N est toujours multiple de 5 pour pouvoir conclure.

- Si $n = 5k$, n est évidemment divisible par 5 ;
- Si $n = 5k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n - 1$ est multiple de 5 donc N aussi ;
- Si $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n + 1$ est multiple de 5 donc N aussi ;
- Si $n = 5k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n^2 + 1$ est multiple de 5 donc N aussi ;
- Si $n = 5k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n^2 + 1$ est multiple de 5 donc N aussi.

On peut donc conclure que, pour tout entier naturel n , N est à la fois divisible par 6 et par 5. Comme 5 et 6 sont premiers entre eux, il en résulte que N est divisible par leur produit 30.

3 Vrai. En effet, 5 divise 65 et 20 donc il divise $65x - 20y$. Or 5 ne divise pas 1 donc il n'existe pas d'entiers relatifs x et y tels que $65x - 20y = 1$.

4 Vrai. On a $5^6 = 15\,625$, donc $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Or, $469 = 6 \times 78 + 1$. Donc $5^{469} = (5^6)^{78} \times 5$. Par conséquent, $5^{469} \times 5 \equiv 5 \pmod{7}$.

Or, $80 \equiv 3 \pmod{7}$ donc $80 \times 5^{469} \equiv 1 \pmod{7}$.

L'entier $80 \times 5^{469} - 1$ est donc un multiple de 7.

2 **V/F** PGCD

Enoncé
p. 408

1 Faux. 12 est divisible par 6 et 20 est divisible par 10, mais le PGCD de 12 et 20 est 4.

2 Faux. On considère les entiers $a = 3$ et $b = 4$. On prend $u = 6$ et $v = -4$. On a alors $au + bv = 2$, alors que le PGCD de a et de b est 1.

3 Vrai. Comme $n \equiv 1 \pmod{7}$ alors il existe un entier k tel que $n = 7k + 1$. On a alors $3n + 4 = 21k + 7 = 7(3k + 1)$ et $4n + 3 = 28k + 7 = 7(4k + 1)$

donc les entiers $3n + 4$ et $4n + 3$ sont tous les deux divisibles par 7. Il reste à prouver que $3k + 1$ et $4k + 1$ n'ont aucun diviseur commun.

On remarque que $4(3k + 1) - 3(4k + 1) = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, les entiers $3k + 1$ et $4k + 1$ sont premiers entre eux. Par suite, on a bien $\text{PGCD}(3n + 4, 4n + 3) = 7$.

- 4 Faux. Le PGCD de a et b est bien un diviseur de $a + b$, mais ce n'est pas toujours le plus grand diviseur propre. Pour $a = 6$ et $b = 4$, le PGCD de a et b est 2, mais la somme $a + b = 10$ est divisible par 5.

3 V/F Nombres premiers

Enoncé
p. 408

- 1 Faux. Il suffit de choisir $p = 2$. On a alors $p^3 + 2 = 10$. L'entier p est bien premier mais $p^3 + 2$ ne l'est pas.
- 2 Faux. Choisissons $a = 17$ et $b = 15$, les entiers a et b sont premiers entre eux. Cependant, comme $a + b = 32$ et $a - b = 2$, les entiers $a + b$ et $a - b$ ne sont pas premiers entre eux.
- 3 Faux. Si a est multiple de b , par exemple $a = 3b$, alors :
 $\text{PGCD}(a, b) = b$.
- 4 Faux : contre exemple pour $p = 2$. Le nombre $N = 7$, n'est pas divisible par 2.

4 Divisibilité

Enoncé
p. 408

Lycée Marie Curie, Sceaux

- 1 D'après la compatibilité de la multiplication avec la congruence et comme $10 \equiv 1 \pmod{9}$, on a :

$$10^n \equiv 10 \times 10 \times \dots \times 10 \equiv 1 \times 1 \times \dots \times 1 \equiv 1 \pmod{9}.$$

- 2 Il suffit de voir que l'on a :

$$10u + v \equiv u + v \pmod{9}.$$

Donc l'un des membres est congru à 0 modulo 9 si et seulement si l'autre membre est congru à 0 modulo 9.

- 3 Comme la relation de congruence est compatible avec la multiplication, nous avons, pour tout entier n positif, la relation suivante :

$$10^n \equiv 1 \pmod{9}.$$

Écrivons $n = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \dots + a_n \times 10^n$ en base 10, comme la relation de congruence est compatible avec l'addition, nous obtenons

$$n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \pmod{9}.$$

Ainsi 9 divise n si et seulement si 9 divise la somme des chiffres qui composent n en base 10.

5 Critère de divisibilité par 4

Enoncé
p. 409

Lycée Arago, Perpignan

Écrivons un entier $n = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$ en base 10. Posons en base 10, $m = a_1 a_0$ et $p = a_n a_{n-1} \dots a_2$. Nous avons l'égalité $n = 100p + m$. Comme $100 \equiv 0 \pmod{4}$, nous pouvons affirmer que $n \equiv m \pmod{4}$.

Ainsi 4 divise n si et seulement si 4 divise m .

6 Un algorithme

Enoncé
p. 409

Lycée Jean-de-La-Fontaine, Paris

- 1 • $u = 37$; $u \geq 11$, donc u prend comme nouvelle valeur $37 - 11 = 26$;
• $u \geq 11$, donc u prend comme nouvelle valeur $26 - 11 = 15$;
• $u \geq 11$, donc u prend comme nouvelle valeur $15 - 11 = 4$;
• $u < 11$, donc on l'affiche. On obtient en sortie 4.

2 Cet algorithme donne le reste de la division euclidienne de la valeur absolue de n par 11.

3 a et b sont égaux à leur valeur absolue puisque ce sont des entiers naturels.

Le reste de la division euclidienne de a par 11 étant 3, on a : $a \equiv 3 \pmod{11}$.

On a de même $b \equiv 5 \pmod{11}$.

Par conséquent, en utilisant les propriétés de la congruence, on a :

$$3a + b \equiv 3 \times 3 + 5 \pmod{11},$$

donc :

$$3a + b \equiv 14 \pmod{11}$$

Le reste est par conséquent 3, qui est la valeur obtenue en sortie.

4 On n'aura pas le même résultat car, si a et b sont de signes différents, $3a + b \neq |3a| + |b|$.

Par exemple : supposons $a = 36$. Le reste de la division par 11 est bien 3.

Prenons $b = -16$; u prend alors la valeur 16, et le reste de la division par 11 est bien 5.

On a $3a + b = 92$, et le reste de la division de 92 par 11 est 4.

7 Équations diophantiennes

Enoncé
p. 409

Lycée Jean Monod, Clamart

1 Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$$23 = 7 \times 3 + 2$$

$$7 = 2 \times 3 + 1.$$

Alors, $2 \times 3 = 7 - 1$.

Multiplions par 3 la première égalité :

$$\begin{aligned} 23 \times 3 &= 7 \times 9 + 2 \times 3 \\ &= 7 \times 9 + 7 - 1 \\ &= 7 \times 10 - 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$23 \times 3 - 7 \times 10 = -1,$$

d'où :

$$23 \times (-3) + 7 \times 10 = 1.$$

MÉTHODE

Comme 23 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout assure l'existence d'un couple d'entiers (α, β) tels que $23\alpha + 7\beta = 1$. L'algorithme d'Euclide permet ensuite de trouver un couple d'entiers répondant à la question.

- 2** Alors en multipliant par (-6) : $23 \times 18 - 7 \times 60 = -6$. Soit un couple d'entiers $(u ; v)$ vérifiant $23u - 7v = -6$:

$$\begin{aligned} 23u - 7v = -6 &\iff 23(u - 18) - 7(v - 60) = 0 \\ &\iff 23(u - 18) = 7(v - 60). \end{aligned}$$

Or, 23 et 7 sont premiers entre eux, d'où :

$$\begin{aligned} 23u - 7v = -6 &\iff 23 \mid (v - 60) \quad \text{et} \quad 7 \mid (u - 18) \\ &\text{et} \quad \frac{v - 60}{23} = \frac{u - 18}{7} \\ &\iff v = 60 + 23m \quad \text{et} \quad u = 18 + 7m \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc un couple vérifiant l'égalité est, par exemple, celui obtenu pour $m = 0$, soit $(60 ; 18)$.

- 3** Soit un entier x :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (S) &\iff \begin{cases} x = 10 + 23u & (u \in \mathbb{Z}) \\ 10 + 23u \equiv 4 & (7) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 10 + 23u & (u \in \mathbb{Z}) \\ 23u \equiv -6 & (7) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 10 + 23u & (u \in \mathbb{Z}) \\ 23u = -6 + 7v & (v \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}
 x \text{ solution de } (S) &\iff \begin{cases} x = 10 + 23u & (u \in \mathbb{Z}) \\ u = 18 + 7m & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \text{ d'après } \mathbf{2} \\
 &\iff x = 10 + 23(18 + 7m) = 424 + 161m \\
 &\text{pour un certain } m \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

4

m	1	2	3	4	5	6	7	8
x	585	746	907	1068	1229	1390	1551	1712
$= 424 + 161m$								$= 16 \times 107$

La plus petite solution x_0 divisible par 16 est 1 712.

8 Entiers premiers entre eux

Enoncé
p. 410

Lycée Masséna, Nice

Remarquons tout d'abord que :

$$n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$$

et

$$2n + 3 = (n + 1) + (n + 2).$$

Or, si un entier d divise deux entiers a et b alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ces deux entiers.

Posons $a = 2n + 3$ et $b = n^2 + 3n + 2$.

Soit d un diviseur commun à a et b .

Alors d divise $2b - (n + 1)a$ soit d divise $n + 1$.

Mais alors d divise aussi $(2n + 3) - 2(n + 1)$ soit d divise 1. On en déduit que $d = 1$. On peut alors conclure que le seul diviseur commun à $n^2 + 3n + 2$ et $2n + 3$ est 1, ce qui prouve que ces deux nombres sont premiers entre eux.

MÉTHODE

Pour montrer que deux entiers sont premiers entre eux, on dispose de quatre méthodes :

- On utilise le théorème de Bezout : deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
- On désigne par d un diviseur commun aux deux entiers, puis, en utilisant des combinaisons linéaires judicieusement choisies de ces deux entiers, on montre que $d = 1$.

...

MÉTHODE

- On montre, en le calculant (par exemple par l'algorithme d'Euclide), que le PGCD de ces deux entiers est égal à 1.
- On utilise un raisonnement par l'absurde (on suppose que les deux entiers ne sont pas premiers entre eux et on montre que ceci conduit à une contradiction).

9 Décomposition en facteurs premiers

Enoncé
p. 410

Lycée Jules Haag, Besançon

Considérons la décomposition de n en produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$$

où p_1, \dots, p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et a_1, \dots, a_k sont des entiers naturels non nuls.

On a alors :

$$n^2 = p_1^{2a_1} \times \cdots \times p_k^{2a_k},$$

soit, comme $n^2 = uv$:

$$uv = p_1^{2a_1} \times \cdots \times p_k^{2a_k}.$$

Comme p_1, \dots, p_k sont des nombres premiers, la décomposition de u et v en produits de facteurs premiers est de la forme :

$$u = p_1^{c_1} \times \cdots \times p_k^{c_k}$$

$$v = p_1^{d_1} \times \cdots \times p_k^{d_k}$$

où $c_i = 0$ dans le cas où le facteur premier p_i ne figure pas dans la décomposition de u , ou $c_i = 2a_i$ dans le cas contraire.

En effet, comme u et v sont premiers entre eux, ils ne peuvent avoir aucun facteur premier en commun.

On a de même $d_i = 0$ ou $d_i = 2a_i$.

Dans tous les cas, pour tout entier i compris entre 1 et k , c_i et d_i sont pairs, donc u et v sont des carrés.

10 Divisibilité par 24

Enoncé
p. 410

Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

1 Le reste ne peut être 0, p serait divisible par 4 (ce qui n'est pas possible puisque p est premier), le reste peut être 1.

Si le reste est 2, $p = 4k + 2 = 2(2k + 1)$. Ce nombre n'est premier que si $2k + 1 = 1$, soit $k = 0$; alors $p = 2$.

Enfin le reste peut être 3.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Le reste ne peut être 0, car alors p serait divisible par 6, il peut être 1. Si le reste est 2, $p = 6k + 2 = 2(3k + 1)$. Ce nombre n'est premier que si $3k + 1 = 1$, soit si $k = 0$, et alors $p = 2$.

Si le reste est 3, $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$; ce nombre n'est premier que si $2k + 1 = 1$, soit si $k = 0$, et alors $p = 3$. Le reste 4 n'est pas possible : en effet si $p = 6k + 4$, $p = 2(3k + 2)$; ce nombre ne peut être premier car il n'existe pas de valeur de k telle que $3k + 2 = 1$. 5 est un reste possible.

3 Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.

Les restes possibles dans la division de p par 4 sont 1 ou 3 (question **1**) et ceux de la division de p par 6 sont 1 ou 5 (question **2**).

On doit donc étudier quatre cas.

• Cas 1.

$$p \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{et} \quad p \equiv 1 \pmod{6}.$$

Il existe alors deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que :

$$p = 4n_1 + 1 \quad \text{et} \quad p = 6n_2 + 1.$$

On a donc :

$$4n_1 + 1 = 6n_2 + 1,$$

d'où :

$$2n_1 = 3n_2.$$

Comme 2 divise $3n_2$ et est premier avec 3, il résulte du théorème de Gauss que n_2 est pair.

Il existe donc un entier naturel k tel que $n_2 = 2k$.

On a alors :

$$p = 12k + 1 \quad \text{et} \quad p^2 - 1 = 24(6k^2 + k),$$

ce qui montre que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

• Cas 2.

$$p \equiv 3 \pmod{4} \quad \text{et} \quad p \equiv 5 \pmod{6}.$$

Il existe alors deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que :

$$p = 4n_1 + 3 \quad \text{et} \quad p = 6n_2 + 5.$$

On a donc :

$$4n_1 + 3 = 6n_2 + 5,$$

d'où :

$$2n_1 = 3n_2 + 1.$$

Par conséquent, $3n_2 + 1$ est pair, donc $3n_2$ est impair.

L'entier n_2 étant alors impair, il existe un entier k tel que $n_2 = 2k + 1$.

On en déduit que :

$$p^2 - 1 = (12k + 11)^2 - 1 = 24(k + 1)(6k + 5),$$

ce qui montre que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

- On étudierait de même le cas 3 :

$$p \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{et} \quad p \equiv 5 \pmod{6}$$

et le cas 4 :

$$p \equiv 3 \pmod{4} \quad \text{et} \quad p \equiv 1 \pmod{6}.$$

11 Critère de divisibilité par 7

Enoncé
p. 410

Lycée Buffon, Paris

Remarquons que :

$$10 \equiv 3 \pmod{7}, \quad 100 \equiv 2 \pmod{7} \quad \text{et} \quad 1000 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Donc $a_3a_2a_1a_0 \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 \pmod{7}$, le membre de gauche est congru à 0 si et seulement si le membre de droite l'est.

12 Chiffres des unités d'une puissance

Enoncé
p. 410

Lycée Montesquieu, Herblay

- 1 On a successivement :

$$7 \equiv 7 \pmod{10} \qquad 7^2 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$7^3 \equiv 7 \times 9 \equiv 3 \pmod{10} \qquad 7^4 \equiv 7 \times 3 \equiv 1 \pmod{10}$$

donc $p = 4$.

- 2 Bien sûr :

$$A \equiv 7^{1\,999^{2\,001}} \pmod{10}.$$

Notons r le reste de la division euclidienne de $1\,999^{2\,001}$ par 4, on a :

$$A \equiv 7^r \pmod{10}.$$

Or, $1\,999 \equiv 3 \pmod{4}$ donc il faut simplifier $3^{2\,001} \pmod{4}$.

Comme $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$, il vient $3^{2\,001} \equiv 3^1 \pmod{4}$. Alors :

$$A \equiv 7^3 \pmod{10} \quad \text{donc} \quad A \equiv 3 \pmod{10}.$$

Le chiffre des unités dans l'écriture décimale de A est 3.

13 Nombres premiers

Enoncé
p. 411

Lycée Masséna, Nice

Le nombre M_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de terme général :

$$V_n = 10^n, \quad M_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Supposons que $n = pq$ avec p et q deux entiers. Nous pouvons écrire la décomposition en M_n en deux facteurs :

$$M_n = \left(\frac{10^{pq} - 1}{10^q - 1} \right) \left(\frac{10^q - 1}{10 - 1} \right).$$

Ces deux termes sont des entiers (sommés des premiers termes de suites géométriques à termes entiers).

Comme M_n est premier, l'un de ces termes vaut 1, ce qui correspond à $p = 1$ ou à $q = 1$. Donc n est premier.

14 Équation du second degré dans \mathbb{Z}

Enoncé
p. 411

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Factorisons le premier membre de l'équation : $p = (x + y)(x - y)$.

Comme p est un nombre premier, l'un des deux facteurs est égal à 1 ou à -1 .

On a donc 4 possibilités :

- $x + y = 1$, et alors $x - y = p$; on a donc $x = \frac{1+p}{2}$ et $y = \frac{1-p}{2}$, p étant un nombre premier. Les solutions sont les couples $\left(\frac{1+p}{2}; \frac{1-p}{2} \right)$, p étant un nombre premier.
- $x - y = 1$ et alors $x + y = p$; les solutions sont alors les couples de la forme $\left(\frac{1+p}{2}; \frac{p-1}{2} \right)$, p étant un nombre premier.
- $x + y = -1$, et alors $x - y = -p$; les solutions sont alors les couples de la forme $\left(\frac{-p-1}{2}; \frac{p-1}{2} \right)$, p étant un nombre premier.
- $x - y = -1$, et alors $x + y = -p$ et $y = -x - p$; les solutions sont alors les couples de la forme $\left(\frac{-p-1}{2}; \frac{1-p}{2} \right)$, p étant un nombre premier.

15 Équations diophantiennes et algorithmes

Enoncé
p. 411

Lycée Hoche, Versailles

- 1 $7 \times 15 - 26 \times 4 = 1$ donc le couple $(15; 4)$ est solution.

On a donc :

$$\begin{cases} 7x - 26y & = 1 \\ 7 \times 15 - 26 \times 4 & = 1 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre, on obtient :

$$7(x - 15) - 26(y - 4) = 0,$$

ou encore :

$$7(x - 15) = 26(y - 4).$$

26 divise le produit $7(x - 15)$, et est premier avec 7, donc 26 divise $x - 15$, et il existe k tel que $x = 26k + 15$.

En reportant dans l'équation de départ, on a :

$$7(26k + 15) - 26y = 1 ,$$

soit :

$$26y = 182k + 104 ,$$

et donc $y = 7k + 4$.

On vérifie que les couples $(26k + 15 ; 7k + 4)$ sont bien solutions en remplaçant dans l'équation de départ :

$$7(26k + 15) - 26(7k + 4) = 105 - 104 = 1.$$

Par conséquent, $S = \{(26k + 15 ; 4 + 7k), k \in \mathbb{Z}\}$.

- 2 a est une de valeur possible pour x . On veut donc trouver k tel que $0 \leq 26k + 15 \leq 25$. La seule valeur possible est $k = 0$, et alors $a = 15$.
- 3 La ligne incomplète est : « Tant que $7p - 1$ n'est pas divisible par 26 ».

16 Cryptographie et algorithme

Enoncé
p. 412

Lycée Charlemagne, Paris

Partie A

- 1
 - $a > b$ donc c prend la valeur 1 et a prend la valeur $a - b = 9$;
 - $a > b$ donc c prend la valeur 2 et a prend la valeur $9 - 4 = 5$;
 - $a > b$ donc c prend la valeur 3 et a prend la valeur $5 - 4 = 1$;
 - $a < b$ donc on sort de la boucle ;
 - On affiche $c = 3$ et $a = 1$.
- 2 Cet algorithme donne le quotient (c) et le reste (a) dans la division euclidienne de a par b (la valeur initiale de a est perdue).

Partie B

- 1 À « U » correspond $m = 20$. Alors,

$$\begin{aligned} 9m + 5 &= 185 \\ &= 27 \times 6 + 3 , \end{aligned}$$

donc $p = 3$, et la lettre correspondante est « D ».

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Voici un algorithme qui convient :

```

Variables
    m est un entier naturel
    a est un entier naturel
    b est un entier naturel
Initialisation
    c prend la valeur 0
    Saisir la valeur de m
Traitement
    Tant que  $3m + 5 > 26$ 
        Affecter à c la valeur  $c + 1$ 
        Affecter à m la valeur  $m - 26$ 
    Fin de Tant que
Sortie
    Afficher m
    
```

Partie C

1 « 3 » convient car $9 \times 3 = 27$ et $27 \equiv 1 \pmod{26}$.

2 $9 \times 3 \equiv 1 \pmod{26} \Leftrightarrow 9 \times 3 \times m \equiv m \pmod{26}$
 $\Leftrightarrow 3(9m) \equiv m \pmod{26}$
 $\Leftrightarrow 3(p - 5) \equiv m \pmod{26}$ car $9m + 5 \equiv p \pmod{26}$
 $\Leftrightarrow 3p - 15 \equiv m \pmod{26}$

3 « B » correspond au nombre 1, donc $p = 1$. Alors, $3p - 15 = -12$, et $-12 \equiv 14 \pmod{26}$.

Donc la valeur de m est 14 et la lettre qui avait été encodée est O.

17 Nombre de diviseurs d'un entier

Enoncé
p. 413

Lycée Courbet, Belfort

1 Un diviseur d positif de a s'écrit de façon unique $p_1^{d_1} \cdots p_k^{d_k}$ avec pour tout i , $0 \leq d_i \leq a_i$.

Il y a donc autant de diviseurs de a que de mots de longueur k que l'on peut écrire avec $a_i + 1$ symboles à la place d_i , cela fait donc $(1 + a_1) \cdots (1 + a_k)$ mots possibles. Ce qui revient à dire que le nombre de diviseurs positifs de a est : $(1 + a_1) \cdots (1 + a_k)$.

2 Notons $P = 2^{n+1} - 1$. On applique le résultat ci-dessus et l'on trouve qu'il y a exactement $2(n + 1)$ diviseurs de a que l'on peut lister naïvement comme suit :

$$1, 2, \dots, 2^n, P, 2P, \dots, 2^n P.$$

La somme des diviseurs vaut donc :

$$(1 + P)(2^{n+1} - 1) = 2 \times 2^n(2^{n+1} - 1) = 2a.$$

Matrices et suites (Spécialité)

Plan du chapitre

1. Matrices et opérations
2. Systèmes linéaires
3. Marche aléatoire. Étude asymptotique
4. Suites de matrices

Exercice type 1

Lycée Charlemagne, Paris

1 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer A^2 .
- (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
$$(I_2 + A)^n = I_2 + nA.$$

2 Application.

- (a) Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la matrice M_1^n .
- (b) Même question pour la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$.

1 Matrices et opérations

1.1 Matrices

Définition 1

Soient m et n deux entiers naturels strictement positifs.

Une matrice de format (m, n) est un tableau à m lignes et n colonnes de nombres réels appelés coefficients.

La position d'un coefficient est indiquée en indice : a_{ij} est le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne.

Une matrice A dont les coefficients sont a_{ij} est parfois notée (a_{ij}) .

1.2 Matrices particulières

Définition 2

Une matrice de format (n, n) est appelée matrice carrée d'ordre n .

Une matrice de format $(m, 1)$ est appelée matrice colonne.

Une matrice de format $(1, n)$ est appelée matrice ligne.

1.3 Somme et produit par un réel

Soient A la matrice de format (m, n) de coefficients a_{ij} , et B la matrice de format (m, n) de coefficients b_{ij} .

Définition 3

La somme $A + B$ des deux matrices A et B est la matrice C de format (m, n) , de coefficients $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Le produit kA de la matrice A par un réel k est la matrice D de format (m, n) et de coefficients $d_{ij} = ka_{ij}$.

1.4 Produit de deux matrices

Définition 4

Soient n , m et p des entiers strictement positifs.

Soient A une matrice de format (m, p) et B une matrice de format (p, n) .

Le produit $A \times B$ (aussi noté AB) est la matrice de format (m, n) dont le coefficient c_{ij} est le produit terme à terme des coefficients de la i^{e} ligne de A par les coefficients de la j^{e} ligne de B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}.$$

Le schéma suivant indique comment on obtient le coefficient c_{12} de la matrice produit de $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{---} (7 \times 1 + 2 \times (-2)) \text{---} (7 \times 3 + 2 \times 5) \text{---} (7 \times 0 + 2 \times 2) \\ \text{---} (3 \times 1 + 4 \times (-2)) \text{---} (3 \times 3 + 4 \times 5) \text{---} (3 \times 0 + 4 \times 2) \end{matrix} \begin{matrix} \text{1}^{\text{e}} \text{ ligne} \\ \text{2}^{\text{e}} \text{ colonne} \end{matrix}$$

Le produit $A \times B$ est alors $\begin{pmatrix} 3 & 31 & 4 \\ -5 & 29 & 8 \end{pmatrix}$.

Propriété 1

Lorsqu'on fait le produit de deux matrices carrées d'ordre n , on obtient une matrice carrée d'ordre n .

Lorsqu'on fait le produit d'une matrice carrée A d'ordre n avec une matrice colonne P de format $(n, 1)$ on obtient une matrice colonne de format $(n, 1)$.

1.5 Cas particulier des matrices carrées

Propriété 2

Le produit de deux matrices carrées de même ordre est une opération associative et distributive par rapport à l'addition.

Soient A , B et C trois matrices carrées de même ordre, alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

Définition 5

Soit A une matrice carrée. Pour tout nombre entier strictement positif on appelle puissance n^{e} de A et on note A^n le produit de n matrices égales à A .

$$A^1 = A \quad A^2 = A \times A \quad A^{n+1} = A \times A^n = A^n \times A.$$

Définition 6

La matrice carrée I_n (parfois simplement notée I) dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n .

Propriété 3

Pour toute matrice carrée d'ordre n , $A \times I_n = I_n \times A = A$.

⚠ ATTENTION

Alors que l'addition de matrices carrées d'ordre n a les mêmes propriétés que l'addition des nombres réels, il n'en va pas de même pour la multiplication.

En particulier :

Il existe des matrices carrées A et B telles que $A \times B \neq B \times A$ (produit non commutatif). Il existe des matrices carrées A , B et C non nulles telles que $A \neq B$ mais $A \times C = B \times C$.

1.6 Inverse d'une matrice carrée

Définition 7

On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est inversible quand il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

La matrice B s'appelle la matrice inverse de la matrice A et se note A^{-1} .

Définition 8

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Le déterminant de A est le nombre $ad - bc$.

Théorème 1

La matrice A d'ordre 2 égale à $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Sa matrice inverse est alors : $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

↳ Solution de l'exercice type 1

Lycée Charlemagne, Paris

$$1 \quad (a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 4 \times (-1) & 2 \times 4 + 4 \times (-2) \\ -1 \times 2 - 2 \times (-1) & -1 \times 4 - 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) • Initialisation.

Pour $n = 1$, on a évidemment $I_2 + A = I_2 + A$. Donc la propriété est vraie au rang 1.

• Hérité.

Supposons que, pour un entier non nul k , $(I_2 + A)^k = I_2 + kA$. Montrons qu'alors :

$$(I_2 + A)^{k+1} = I_2 + (k+1)A.$$

On a :

$$\begin{aligned} (I_2 + A)^{k+1} &= (I_2 + A)(I_2 + A)^k \\ &= (I_2 + A)(I_2 + kA) \\ &= I_2^2 + kI_2 \times A + A \times I_2 + kA^2 \\ &= I_2 + kA + A \\ &= I_2 + (k+1)A. \end{aligned}$$

➔ **Solution de l'exercice type 1 (suite)**

Lycée Charlemagne, Paris

On a donc bien, pour tout entier naturel n non nul,

$$(I_2 + A)^{kn} = I_2 + nA.$$

- 2** (a) On remarque que $M_1 = I_2 + A$. Donc d'après la question **1.b** :

$$M_1^n = I_2 + nA = \begin{pmatrix} 2n+1 & 4n \\ -n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

- (b) Ici, $M_2 = I_2 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut constater facilement que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, en s'inspirant du travail fait en **1.b**, on a :

$$(I_2 + B)^n = I_2 + nB,$$

et donc :

$$M_2^n = I_2 + nB = \begin{pmatrix} -3n+1 & n \\ -9n & 3n+1 \end{pmatrix}.$$

2 **Systèmes linéaires**

Exercice type 2

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

- 1** Écrire le système suivant sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 3x + 2y - 2z & = 4 \\ x - y + z & = -2 \end{cases}$$

- 2** Résoudre le système à l'aide de la calculatrice.

COURS

INTERROS

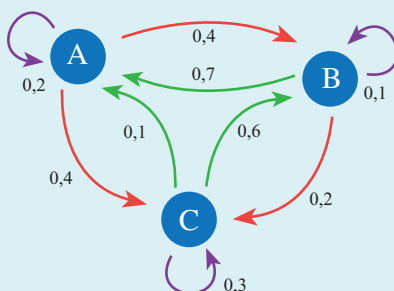
CORRIGÉS

3 Marche aléatoire. Étude asymptotique

Exercice type 3

Lycée Virlogeux, Riom

Voici un graphe probabiliste.
On considère dans l'ordre les positions A, B et C.
L'état probabiliste initial est $P_0 = (0,3 \quad 0,4 \quad 0,3)$.



- 1 Écrire la matrice de transition A du graphe probabiliste.
- 2 À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'état probabiliste au bout d'un grand nombre d'étapes.
- 3 On suppose que la suite des états probabilistes converge vers un état stable. Le déterminer par le calcul.

3.1 Marche aléatoire

Définition 10

Un processus aléatoire composé de N états, numérotés de 1 à N , est modélisé par une marche aléatoire sur un graphe. La probabilité de passer à l'état j sachant qu'on est à l'état i est notée a_{ij} . Cela définit une matrice $A = (a_{ij})$ appelée matrice de transition du graphe. La matrice A est carrée d'ordre N .

La matrice P_n est la matrice ligne de format $(1, N)$ dont le coefficient de la colonne k est la probabilité d'être dans l'état k à la n^{e} étape.

La suite (P_n) vérifie la relation de récurrence $P_{n+1} = P_n \times A$ avec P_0 qui est donné par l'état initial.

Remarque : pour tout entier naturel n , les N coefficients de P_n sont positifs et leur somme est 1.

Pour tous entiers i et j compris entre 0 et N , les coefficients a_{ij} sont compris entre 0 et 1 et la somme des N coefficients de chaque ligne de A vaut 1.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Remarque : dans certains contextes, les matrices d'état sont des matrices colonnes. Dans ce cas, chaque coefficient (a_{ij}) de la matrice de transition est la probabilité de passer à l'état i sachant qu'on est à l'état j , et alors $P_{n+1} = A \times P_n$. Pour tous entiers i et j compris entre 0 et N , les coefficients a_{ij} sont compris entre 0 et 1 et la somme des N coefficients de chaque colonne de A vaut 1.

3.2 Étude asymptotique

Définition 11

Dire qu'une suite de matrices (U_n) converge vers une matrice L de même format signifie que les suites des coefficients de mêmes indices des matrices U_n convergent vers le coefficient de mêmes indices de la matrice L .

Propriété 5

La suite (P_n) des états est définie par la relation de récurrence $P_{n+1} = P_n \times A$ et P_0 est défini par l'état initial.

Donc, pour tout entier naturel n , on a $P_n = P_0 \times A^n$ (on pose par convention $A^0 = I_N$).

Si la suite des états est une matrice colonne, on obtient $P_n = A^n \times P_0$.

Pour étudier la convergence de la suite (P_n) , il suffit donc théoriquement d'étudier la convergence de la suite des matrices A^n , ce qui n'est pas toujours aisé.

Définition 12

Dire qu'une matrice ligne S est un état stable du processus modélisable par une marche aléatoire de matrice de transition A signifie que :

$$S = S \times A \quad (\text{ou } S = A \times S \text{ pour les matrices colonnes}).$$

Propriété 6

Lorsque la suite (P_n) converge, elle converge vers un état stable du processus.

← Solution de l'exercice type 3

Lycée Virlogeux, Riom

1 $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}.$

2 Si on calcule $P_0 \times A^{10}$, on obtient $P_{10} \approx (0,347 \quad 0,354 \quad 0,299)$. Si on calcule P_{20} , on obtient $P_{20} \approx (0,347 \quad 0,354 \quad 0,299)$.
Donc l'état semble se stabiliser autour de ces valeurs.

➔ Solution de l'exercice type 3 (suite)

Lycée Virlogeux, Riom

3 Soit S l'état stable. S vérifie $S = SA$, donc $S \times (I_3 - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,4 \\ -0,7 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,6 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Posons $S = (x \quad y \quad z)$.

$$S \times (I_3 - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ conduit donc au système :}$$

$$\begin{cases} 0,8x - 0,7y - 0,1z = 0 \\ -0,4x + 0,9y - 0,6z = 0 \\ -0,4x - 0,2y + 0,7z = 0 \end{cases}$$

On sait de plus que $x + y + z = 1$.

En remplaçant z par $1 - x - y$ dans les deux premières équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0,9x - 0,6y = 0,1 \\ 0,2x + 1,5y = 0,6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 1 \\ 2x + 15y = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9x - 1}{6} \\ 2x + \frac{45x - 5}{2} = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9x - 1}{2} \\ 49x - 5 = 12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{49} \\ y = \frac{52}{147} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc $z = 1 - x - y = \frac{44}{147}$.

On vérifie dans la troisième équation du système :

$$-0,4 \times \frac{17}{49} - 0,2 \times \frac{52}{147} + 0,7 \times \frac{44}{147} = 0.$$

L'état stable est donc $S = \left(\frac{17}{49} \quad \frac{52}{147} \quad \frac{44}{147} \right)$.

On peut vérifier que $x \approx 0,347$, $y \approx 0,354$ et $z \approx 0,299$. On retrouve les valeurs approchées trouvées précédemment.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Suites de matrices

Exercice type 4

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

La suite de matrices colonnes (U_n) est définie par la donnée de U_0 et la relation $U_{n+1} = AU_n + B$, avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Trouver l'état stable de la suite.

4.1 État stable

On définit une suite (U_n) de matrices colonnes de format $(N, 1)$ par la relation de récurrence $U_{n+1} = A \times U_n + B$ et le premier terme U_0 .

Définition 13

Un état stable est une suite constante S qui vérifie la relation de récurrence, c'est-à-dire $S = A \times S + B$.

Propriété 7

Il existe un état stable S pour la relation de récurrence si et seulement si la matrice $(I - A)$ est inversible et $S = (I - A)^{-1} \times B$.

En effet, si $(I - A)$ est inversible,

$$\begin{aligned} S = A \times S + B &\iff I \times S - A \times S = B \\ &\iff (I - A) \times S = B \\ &\iff S = (I - A)^{-1} \times B. \end{aligned}$$

4.2 Étude de la convergence de (U_n)

Remarque : la situation ressemble à celle rencontrée pour les suites réelles arithmético-géométriques.

S'il existe un état stable S , on peut étudier la suite (V_n) de terme général $V_n = U_n - S$ et montrer qu'ainsi on se ramène à une suite vérifiant la relation de récurrence $V_{n+1} = A \times V_n$.

L'étude de la convergence de la suite (V_n) se fait alors en étudiant la convergence des N suites des coefficients de $A_n \times V_0$.

➔ Solution de l'exercice type 4

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

La matrice colonne S est un état stable de la suite si et seulement si :

$$S = A \times S + B ,$$

c'est-à-dire :

$$(I_3 - A) \times S = B .$$

Si la matrice est inversible, on aura alors :

$$S = (I_3 - A)^{-1} \times B .$$

La calculatrice nous permet de savoir que :

$$\det(I_3 - A) = 8 ,$$

donc cette matrice est inversible.

On calcule alors, à la calculatrice, $(I_3 - A)^{-1} \times B$, et on obtient comme état stable :

$$S = \begin{pmatrix} 0,625 \\ 3,75 \\ -6,125 \end{pmatrix} .$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F **Matrice**

10 min Corrigé
p. 444

Soient A , B et C des matrices.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** Si $A \times B = A \times C$ alors $B = C$.
- 2** Si on peut calculer $A \times B$ et $B \times A$, alors A et B sont des matrices carrées de même ordre.
- 3** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- 4** $(A + B)^2 = A^2 + 2A \times B + B^2$.

2 V/F **Systèmes**

10 min Corrigé
p. 444

Soient a , b et c des réels. On considère le système d'inconnues x , y et z :

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x - 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

- 1** La matrice du système est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 2** Le système admet un triplet unique solution quelles que soient les valeurs de a , b et c .
- 3** Si A est la matrice du système, alors la matrice des solutions est : $(a \ b \ c) \times A^{-1}$.
- 4** Si P est solution du système $A \times X = B$ et du système $A'X = B'$, alors P est solution du système $(A + A') \times X = B + B'$.

3 V/F **Suite de matrices**

10 min Corrigé
p. 444

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de format $(N, 1)$, qui vérifie la relation de récurrence $U_{n+1} = A \times U_n + B$.

- 1** La matrice A est de format $(1, N)$.
- 2** La matrice B est de format $(N, 1)$.
- 3** La matrice A est inversible.
- 4** La relation admet un état stable.

4 V/F QCM 4

10 min Corrigé p. 445

Une puce saute d'un sommet à l'autre d'un triangle. Arrivée à un sommet, elle saute sur un des deux autres choisis au hasard.

Les sommets sont numérotés 1, 2 et 3. On considère X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet atteint au n^{e} saut.

On note P_n la matrice ligne $(P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3))$.

La puce part du sommet 1.

- 1 La matrice de transition du graphe associé à cette marche aléatoire est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2 $P_0 = (0 \ 0 \ 0)$.

3 $P_1 = (0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2})$.

- 4 Après un grand nombre de sauts, la puce a moins de chance de se retrouver au sommet de départ qu'aux autres sommets.

5 Encore un Vrai/Faux

★ 20 min Corrigé p. 446

Lycée Hoche, Versailles

Dire, pour chacune des propositions ci-dessous, si elles sont vraies ou fausses. Justifier.

- 1 Pour toutes matrices carrées A et B de même ordre, on a :

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

- 2 Soit A une matrice carrée d'ordre p et I la matrice identité d'ordre p .
On a : $A^2 - I^2 = (A - I)(A + I)$.

- 3 Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors la matrice A est nécessairement la matrice nulle.

- 4 Soit a un nombre réel et A la matrice carrée définie par $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

La matrice A est inversible pour tout réel a .

- 5 Une écriture matricielle du système $\begin{cases} x + z = -1 \\ x - 2y = 0 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 6** Soit A une matrice carrée d'ordre p inversible.
On a : $A^3 \times A^{-1} = A^2$.

6 **Systèmes d'équations linéaires**



15 min

Corrigé
p. 446

Lycée Virlogeux, Riom

Donner l'écriture matricielle de chacun des systèmes suivants, puis les résoudre en effectuant des calculs matricielles à la calculatrice.

$$1 \quad S_1 : \begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad 2 \quad S_2 : \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + y - z = 4 \\ 4x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$$

7 **États probabilistes**



20 min

Corrigé
p. 446

Lycée Charlemagne, Paris

Deux fabricants de parfums lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils appellent Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité. L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires. Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20% des personnes interrogées préfèrent Aurore (et les autres préfèrent Boréale).

Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes interrogées préférant Aurore et 15% des personnes interrogées préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n , on désigne par la matrice ligne $P_n = (a_n \ b_n)$ l'état probabiliste la semaine n , où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité qu'une personne choisie au hasard préfère Boréale la semaine n .

- 1** (a) Donner la matrice P_0 .
(b) Cette situation peut être assimilée à une marche aléatoire sur un graphe à deux sommets.
Écrire la matrice de transition M entre les états de cette marche aléatoire.
- 2** (a) Calculer P_1 à la main, en détaillant le calcul.
(b) Exprimer, pour tout n , P_n en fonction de P_0 et n .
(c) En déduire P_4 à l'aide de la calculatrice (on donnera des valeurs approchées au centième) et interpréter ce résultat.

3 Que fait l'algorithme suivant ?

La matrice ligne P prend la valeur $(0,2 \quad 0,8)$.
 p_1 prend la valeur $0,2$
 p_2 prend la valeur $0,8$
 La matrice carrée M prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$
 Le nombre entier Semaine prend la valeur 0
 Tant que $p_1 < p_2$ ou Semaine < 10 faire
 P prend la valeur $P \times M$
 Semaine prend la valeur Semaine $+ 1$
 Fin de Tant que
 Si Semaine < 10
 Afficher : « le parfum Aurore sera préféré au parfum Boréale après un nombre de semaine égale à : »
 Afficher Semaine
 Sinon
 Afficher : « durant les dix premières semaines suivant le début de la campagne, le parfum Aurore ne sera pas préféré au parfum Boréale »
 Fin si

4 Le fabricant de parfum qui a lancé la campagne estime qu'en fait chaque semaine seuls 80% des consommateurs voient leur comportement influencé comme décrit ci-dessus par la publicité. Les 20% restants choisissent de façon équiprobable un des deux parfums. On garde les notations des autres questions (P_n et M)

- (a) Établir, pour tout $n \geq 0$, une relation entre P_{n+1} et P_n faisant intervenir la matrice M et la matrice ligne $N = (0,5 \quad 0,5)$.
- (b) Si les conditions initiales sont celles du début du problème, déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'état probabiliste des choix de parfums après 4 semaines de publicité (arrondir les résultats au centième).

8 Suites et matrices



25 min

Corrigé p. 447

Lycée Charlemagne, Paris

On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 8 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- 1** Calculer u_2 et u_3 .
- 2** Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme page suivante.

Variables
 a, b et c des nombres réels
 i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

Initialisation
 a prend la valeur 3
 b prend la valeur 8

Traitement
 Saisir n
 Pour i allant de 2 à n faire
 c prend la valeur a
 a prend la valeur b
 b prend la valeur ...
 Fin de Pour

Sortie
 Afficher b

- (a) Recopier la ligne de cet algorithme qui comporte des pointillés et la compléter.
- (b) On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342
n	12	13	14	15	
u_n	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582	

Quelle conjecture peut-on émettre sur la monotonie de la suite ?

- 3 Pour tout entier naturel n , on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
 On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = AC_n$.
 Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n , $C_n = A^n C_0$.
- 4 Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- (a) Calculer QP .
- (b) On admet que $A = PDQ$.
 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$A^n = PD^n Q.$$

- 5 À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, qu'on admet : pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^n & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n .

La suite u a-t-elle une limite ?

9 Suite de matrices



30 min

Corrigé
p. 448

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

Dans un pays, deux opérateurs de téléphonie mobile AFR et BFM se partagent le marché.

En 2005, AFR en contrôlait 80%, et BFM 20%. Mais la concurrence fait rage. On a observé, dans les années suivantes, que d'une année sur l'autre :

- 60% de la clientèle de AFR lui reste fidèle, tandis que 40% passent chez BFM.
- 70% de la clientèle de BFM lui reste fidèle, tandis que 30% passe chez AFR.

Ces proportions sont stables ; il n'y a pas de fuite de clientèle vers des opérateurs étrangers, et il n'y a pas d'abandon de consommation de ces produits.

Pour tout entier naturel n , on note respectivement a_n et b_n les parts de marché de AFR et BFM en l'année $(2005 + n)$. Ainsi, $a_0 = 0,8$ et $b_0 = 0,2$.

1 Traduire l'énoncé pour obtenir le système d'équations donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

2 On pose (U_n) la suite de matrices colonnes telle que $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

(a) Traduire le système d'équations sous forme matricielle $U_{n+1} = AU_n$. Donner A .

(b) En déduire l'expression de U_n en fonction de U_0 .

(c) À l'aide de la calculatrice, donner les parts de marché de AFR et BFM en 2020.

3 (a) De la relation $a_n + b_n = 1$, déterminer les matrices D et E telles que : $U_{n+1} = DU_n + E$, où D est une matrice diagonale et E une matrice colonne.

(b) Déterminer la matrice colonne C telle $C = DC + E$.

(c) On pose la suite de matrices (X_n) telle que pour tout entier naturel n , $X_n = U_n - C$.

Montrer que $X_{n+1} = DX_n$.

(d) En déduire l'expression de X_n , puis de U_n , en fonction de n .

(e) Montrer alors que U converge vers C . Interpréter.

10 Puissances d'une matrice



30 min

Corrigé
p. 450

Lycée Charlemagne, Paris

Soit la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

I est la matrice identité d'ordre 3.

- 1 (a) Calculer A^2 et montrer que $A^2 = A + 2I$.
(b) En déduire A^3 en fonction de A et de I .
- 2 Pour tout entier $n \geq 1$, montrer par récurrence qu'il existe des réels u_n et v_n tels que : $A^n = u_n A + v_n I$.
On précisera la valeur de u_1 et v_1 et on exprimera u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n .
- 3 Écrire un algorithme calculant et affichant, pour un entier n non nul donné, les valeurs de u_n et v_n .
- 4 Déterminer la matrice carrée M d'ordre 2 telle que :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

- 5 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = \frac{2^n}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 6 On admet que, pour tout entier n non nul, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$.
Calculer u_n et v_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n pour tout entier n non nul.

11 Famille de matrices



25 min

Corrigé
p. 452

Lycée Hoche, Versailles

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,
 a et b étant deux réels.

- 1 Prouver que la somme de deux matrices de E est une matrice de E , de même que le produit.
- 2 À quelle condition une matrice de E est-elle inversible ?
Donner alors son inverse.
- 3 Résoudre en étudiant tous les cas le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + ay = d \end{cases}$ d'inconnues x et y .
- 4 (a) On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer M^{-1} .
Calculer $B = M^{-1} \times A \times M$.
Conjecturer l'expression de B^n , n étant un entier naturel non nul.
Pour la suite, on admet la conjecture.

- (b) Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = M \times B^n \times M^{-1}.$$

En déduire l'expression de A^n .

- 5** On suppose maintenant que A est une matrice de transition probabiliste.

- (a) Que peut-on en déduire pour a et b ?
(b) Que devient alors l'expression de A^n ?
(c) Si $P_0 = (x_0 \ y_0)$ est l'état initial, donner P_1 et P_2 .
(d) Quel est l'état P_n ? Que devient P_n pour n très grand ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F **Matrice**

Enoncé
p. 436

1 Faux. Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors
 $AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $B \neq C$. Par contre cette implication est vraie si A est inversible.

2 Faux. Il suffit que A soit de format (m, n) et B de format (n, m) pour qu'on puisse calculer les deux produits quels que soient les entiers positifs m et n .

3 Faux. On applique la formule du cours pour calculer l'inverse de la matrice carrée d'ordre 2. Le déterminant de A est $2 \times 2 - 2 \times 4 = -4$. Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4 Faux. En appliquant la règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on obtient : $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Mais comme la multiplication n'est pas commutative, $AB + BA$ n'est en général pas égal à $2AB$.

2 V/F **Systèmes**

Enoncé
p. 436

1 Faux. La matrice associée est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Vrai. La calculatrice montre que la matrice associée est inversible, donc que le système a une solution unique pour toutes valeurs données aux constantes a , b et c .

3 Faux. Dans un système linéaire, on utilise des matrices colonnes. La matrice solution est alors $A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

4 Vrai. Si P est solution de chacun des systèmes, alors $AP = B$ et $A'P = B'$. Or, $(A + A')P = AP + A'P = B + B'$, ce qui montre que P est solution de $(A + A')X = B + B'$.

3 V/F **Suite de matrices**

Enoncé
p. 436

1 Faux. La matrice A est carrée de format (N, N) .

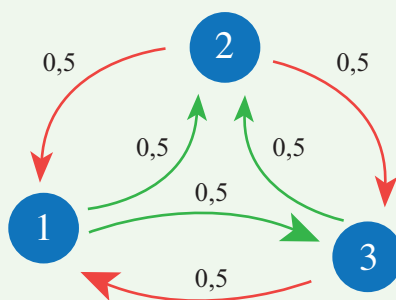
2 Vrai. La matrice B a le même format que U_n , donc est de format $(N, 1)$.

MATRICES ET SUITES (SPÉCIALITÉ) • CHAP. 17

- 3** Faux. La matrice A pourrait être la matrice nulle (tous les coefficients égaux à 0) qui n'est clairement pas inversible. Dans ce cas la suite (U_n) serait la suite constante égale à B .
- 4** Faux. Si A est la matrice identité et les coefficients de B ne sont pas tous nuls, alors la relation devient $U_{n+1} = U_n + B$. L'équation $S = S + B$ n'a pas de solution.

4 V/F QCM 4

Enoncé
p. 437



- 1** Faux. La puce n'a le choix qu'entre deux directions à partir de chaque sommet.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- 2** Faux. $P_0 = (1 \ 0 \ 0)$.
- 3** Vrai. $P_1 = P_0 \times M = (0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2})$.
- 4** Faux. Si $S = (a \ b \ c)$ est un état stable du système, alors $S = SM$ et a, b et c sont solution du système :

$$\begin{cases} 2a = b + c \\ 2b = a + c, \text{ avec } a + b + c = 1. \\ 2c = a + b \end{cases}$$

Chaque équation étant obtenue à partir d'une autre par permutation de a, b, c , on voit que s'il y a des solutions, alors $a = b = c$. Donc l'état stable correspond à l'équiprobabilité des 3 positions. Si l'état probabiliste converge, c'est vers l'état stable, donc au bout d'un grand nombre de sauts, la puce n'a donc pas plus de chance d'être sur un sommet plutôt qu'un autre.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 Encore un Vrai/Faux

Enoncé
p. 437

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Faux. $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$.
Mais en général, $AB \neq BA$, donc l'identité proposée est fautive.
- 2 Vrai. $(A - I)(A + I) = A^2 + AI - IA - I^2 = A^2 + A - A - I^2 = A^2 - I^2$.
- 3 Faux. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 4 Faux. Le déterminant de A est $a^2 - 1$, et il s'annule pour $a = 1$ et $a = -1$.
- 5 Faux. La matrice carrée est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- 6 Vrai. En effet, $A^3 \times A^{-1} = A^2 \times A \times A^{-1} = A^2 \times I = A^2$.

6 Systèmes d'équations linéaires

Enoncé
p. 438

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 L'écriture matricielle de S_1 est : $A \times X = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$X = A^{-1} \times B$, et la calculatrice donne :

$$S = \{(0,5 ; 0,5 ; 0,5)\}.$$

- 2 L'écriture matricielle de S_2 est $A \times X = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$X = A^{-1} \times B$.

À la calculatrice, on obtient :

$$S = \left\{ \left(\frac{11}{3} ; -\frac{14}{9} ; -\frac{17}{9} \right) \right\}.$$

7 États probabilistes

Enoncé
p. 438

Lycée Charlemagne, Paris

- 1 (a) $P_0 = (0,2 \quad 0,8)$.
- (b) $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

2 (a) $P_1 = P_0 \times M = (0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,15 \quad 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,85)$
 $= (0,3 \quad 0,7)$.

(b) $P_n = P_0 \times M^n$.

(c) $P_4 = P_0 \times M^4 \approx (0,47 \quad 0,53)$.

Au bout de 4 semaines, la probabilité qu'une personne interrogée préfère le parfum Aurore est environ 0,47, et la probabilité qu'elle préfère Boréale est environ 0,53.

3 Cet algorithme détermine au bout de combien de semaines la probabilité que le parfum Aurore soit préféré par une personne prise au hasard devient supérieure ou égale à celle que la personne préfère Boréale, si cela arrive avant la dixième semaine.

4 (a) $P_{n+1} = 0,8 \times P_n \times M + 0,2 \times N$.

(b) On obtient successivement :

• $P_1 = (0,34 \quad 0,66)$;

• $P_2 = (0,424 \quad 0,576)$;

• $P_3 = (0,4744 \quad 0,5256)$;

• $P_4 \approx (0,50 \quad 0,50)$.

8 Suites et matrices

Enoncé
p. 439

Lycée Charlemagne, Paris

1 On obtient : $u_1 = 22$ et $u_2 = 62$.

2 (a) On veut obtenir u_{n+2} à partir des termes précédents qui s'appellent ici : a pour u_{n+1} et c pour u_n . Donc la ligne complétée de l'algorithme est : « b prend la valeur $5a-6c$ ».

(b) La suite semble croissante (et semble tendre vers $+\infty$).

3 $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le résultat est assez évident, mais par rigueur on peut faire une récurrence.

- La propriété est évidemment vraie au rang 0.
- Supposons la propriété vraie au rang k , c'est-à-dire $C_k = A^k C_0$.
On a $C_{k+1} = AC_k$, donc $C_{k+1} = A \times A^k C_0 = A^{k+1} C_0$.

On a montré que la propriété est vraie au rang 0, et que, si elle est vraie à un rang k quelconque, elle est aussi vraie au rang $k + 1$, elle est donc vraie pour tout n .

4 (a) $QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Cela signifie que Q est l'inverse de P .

- (b) • Initialisation : $A^1 = PDQ$: c'est ce qu'on admet d'après l'énoncé donc la propriété est vraie au rang 1.
• Hérité : supposons la propriété vraie à un rang k supérieur ou égal à 1, c'est-à-dire : $A^k = PD^kQ$.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= PDQ \times PD^kQ \\ &= PD \times (QP) \times D^kQ \\ &= P \times D \times D^k \times Q \quad \text{car } QP = I_2 \\ &= P \times D^{k+1} \times Q \end{aligned}$$

Donc pour tout n , $A^n = PD^nQ$.

- 5 D'après ce qui précède on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De plus, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ (si vous n'êtes pas convaincus, cela se démontre aisément par récurrence).

On peut en déduire A^n , dont seuls deux termes nous intéressent. On en déduit donc en effectuant partiellement le produit matriciel :

$$u_n = 8(-2^n + 3^n) + 3(3 \times 2^n - 2 \times 3n) = 2^n + 2 \times 3^n.$$

2 et 3 étant supérieurs à 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

Par conséquent, la suite diverge vers $+\infty$.

9 Suite de matrices

Enoncé
p. 441

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

- 1 D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3b_n \\ b_{n+1} = 0,4a_n + 0,7b_n \end{cases}$$

- 2 (a) On a : $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Remarque : ceci diffère de la présentation du cours, où on avait plutôt $U_{n+1} = U_nA$. Il faut savoir s'adapter !

- (b) On a donc : $U_n = A^nU_0$.

- (c) On obtient alors $U_{15} \approx \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,57 \end{pmatrix}$.

3 (a) En utilisant $a_n + b_n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3b_n \\ b_{n+1} = 0,4a_n + 0,7b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3(1 - a_n) \\ b_{n+1} = 0,4(1 - b_n) + 0,7b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0,3a_n + 0,3 \\ b_{n+1} = 0,3b_n + 0,4 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}.$$

(b) On pose $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$C = DC + E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a \\ 0,3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}.$$

On a donc : $a = 0,3a + 0,3$ et $b = 0,3b + 0,4$, donc $a = \frac{3}{7}$ et

$$b = \frac{4}{7}, \text{ et donc } C = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= DU_n + E - C \\ &= DU_n - DC \\ &= D(U_n - C) \\ &= DX_n. \end{aligned}$$

(d) Par analogie avec les suites géométriques, on a donc :

$$X_n = D^n X_0 = \begin{pmatrix} 0,3^n & 0 \\ 0 & 0,3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \\ -\frac{13}{35} \end{pmatrix}$$

car :

$$X_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \\ -\frac{13}{35} \end{pmatrix}.$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} U_n &= X_n + C \\ &= \begin{pmatrix} 0,3^n & 0 \\ 0 & 0,3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \\ -\frac{13}{35} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \times 0,3^n + \frac{3}{7} \\ -\frac{13}{35} \times 0,3^n + \frac{4}{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(e) 0,3 est strictement compris entre -1 et 1 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$.

On peut donc en conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = C$.

Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, le marché va se stabiliser, AFR ayant 3 parts sur 7 et BFM 4 parts sur 7.

10 Puissances d'une matrice

Enoncé
p. 441

Lycée Charlemagne, Paris

1 (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A + 2I &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A^2. \end{aligned}$$

(b) $A^3 = A \times A^2$
 $= A \times (A + 2I)$
 $= A^2 + 2AI$
 $= A + 2I + 2A = 3A + 2I$.

2 • Initialisation : on a $A^1 = A = 1A + 0I$.

• Supposons qu'à un rang k , $A^k = u_k A + v_k I$.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= A(u_k A + v_k I) \\ &= u_k A^2 + v_k AI \\ &= u_k (A + 2I) + v_k A \\ &= (u_k + v_k)A + 2u_k I. \end{aligned}$$

Il existe donc bien deux réels u_{k+1} et v_{k+1} tels que :

$$A^{k+1} = u_{k+1}A + v_{k+1}I.$$

Donc pour tout entier naturel n non nul, $A^n = u_nA + v_nI$, et d'après ce qui précède on a :

$$u_{n+1} = u_n + v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n.$$

3 Voici un algorithme possible :

```
Entrée
  Saisir la valeur de n
Initialisation
  u prend la valeur 1
  v prend la valeur 0
Traitement
  Pour i allant de 2 à n
    c prend la valeur u + v
    v prend la valeur 2u
    u prend la valeur c
  Fin de Pour
Sortie
  Afficher u et v
```

4
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

5 • Initialisation :

$$\begin{aligned} & \frac{2^1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= M. \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité est vraie au rang 1.

• Hérédité : Supposons que, pour un rang k ,

$$M^k = \frac{2^k}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^k}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 M^{k+1} &= M^k \times M \\
 &= \frac{2^k}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^k}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{2^k}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^k}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{2^{k+1}}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^k}{3} (-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{2^{k+1}}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^{k+1}}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc on a bien pour tout n : $M^n = \frac{2^n}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 \text{6} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \left[\frac{2^{n-1}}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^{n-1}}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3} & \frac{2^{n-1}}{3} \\ \frac{2^n}{3} & \frac{2^{n-1}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{3} & \frac{(-1)^n}{3} \\ \frac{2(-1)^n}{3} & \frac{2(-1)^{n-1}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3} \\ \frac{2^n}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{3} \\ \frac{2(-1)^n}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{3} \\ \frac{2^n}{3} + \frac{2(-1)^n}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On a donc $A^n = \left(\frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{3} \right) A + \left(\frac{2^n}{3} + \frac{2(-1)^n}{3} \right) I$.

11 Famille de matrices

Enoncé
p. 442

Lycée Hoche, Versailles

1 Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ deux matrices de E .

- $A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix}$.

Les éléments situés sur la même diagonale sont égaux, donc $A + A'$ est bien une matrice de E .

- $A \times A' = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' + ba' \\ a'b + b'a & aa' + bb' \end{pmatrix}$.

Les éléments situés sur la même diagonale sont égaux, donc $A \times A'$ est une matrice de E .

2 Le déterminant de A est $a^2 - b^2$. Donc la matrice est inversible si b est différent de a et de $-a$.

Posons $A^{-1} = \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix}$. On doit avoir :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} ag + bi = 1 \\ ah + bj = 0 \\ bg + ai = 0 \\ bh + aj = 1 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire $j = -\frac{ah}{b}$, et en reportant dans la quatrième :

$$\begin{aligned} bh - \frac{a^2h}{b} = 1 &\Leftrightarrow \frac{h(b^2 - a^2)}{b} = 1 \\ &\Leftrightarrow h = \frac{b}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$j = \frac{-ab}{b(b^2 - a^2)} = \frac{a}{a^2 - b^2}.$$

De la troisième équation, on tire $i = -\frac{bg}{a}$, et en reportant dans la première équation :

$$\begin{aligned} ag - \frac{b^2g}{a} = 1 &\Leftrightarrow \frac{g(a^2 - b^2)}{a} = 1 \\ &\Leftrightarrow g = \frac{a}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Et finalement,

$$i = \frac{-ba}{a(a^2 - b^2)} = \frac{b}{b^2 - a^2}.$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - b^2} & \frac{b}{b^2 - a^2} \\ \frac{b}{b^2 - a^2} & \frac{a}{a^2 - b^2} \end{pmatrix}.$$

Remarque : cette matrice est aussi un élément de E.

- 3** • Si la matrice est inversible, c'est-à-dire si $a^2 \neq b^2$, on peut résoudre de façon matricielle le système : $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
On obtient donc ici :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - b^2} & \frac{b}{b^2 - a^2} \\ \frac{b}{b^2 - a^2} & \frac{a}{a^2 - b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \left(\frac{ac - bd}{a^2 - b^2} ; \frac{ad - bc}{a^2 - b^2} \right) \right\}.$$

- Si $a = b$, le système devient :
$$\begin{cases} ax + ay = c \\ ax + ay = d \end{cases}.$$

Plusieurs cas se présentent :

→ si $c = d$, et si $a \neq 0$, le système a une infinité de solutions.

$$S = \left\{ \left(x ; \frac{c}{a} - x \right) , x \in \mathbb{R} \right\}.$$

→ si $c = d = 0$ et si $a = 0$, $S = \mathbb{R}^2$.

→ si $c = d \neq 0$ et si $a = 0$, $S = \emptyset$.

→ si $c \neq d$, $S = \emptyset$.

- Si $b = -a$, le système devient :
$$\begin{cases} ax - ay = c \\ -ax + ay = d \end{cases}.$$

Là encore, il y a plusieurs cas :

→ si $c = -d$ et $a \neq 0$, le système a une infinité de solutions.

$$S = \left\{ \left(x ; x - \frac{c}{a} \right) , x \in \mathbb{R} \right\}.$$

→ si $c = -d = 0$ et $a = 0$, on est dans un cas déjà vu. $S = \mathbb{R}^2$.

→ si $c = -d \neq 0$ et si $a = 0$, $S = \emptyset$.

→ si $c \neq -d$, $S = \emptyset$.

4 (a) À la calculatrice :
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} a - b & 0 \\ 0 & a + b \end{pmatrix}.$$

On peut conjecturer que
$$B^n = \begin{pmatrix} (a - b)^n & 0 \\ 0 & (a + b)^n \end{pmatrix}.$$

(On peut calculer B^2 et B^3 pour s'en convaincre).

(b) • Initialisation : on a $B = M^{-1} \times A \times M$, donc :

$$M \times B = M \times M^{-1} \times A \times M = A \times M$$

et enfin :

$$M \times B \times M^{-1} = A \times M \times M^{-1} = A.$$

- Hérité : supposons que, pour k entier naturel non nul, $A^k = M \times B^k \times M^{-1}$.

$$A^{k+1} = A \times A^k$$

$$= M \times B \times M^{-1} \times M \times B^k \times M^{-1}$$

$$= M \times B \times B^k \times M^{-1}$$

$$= M \times B^{k+1} \times M^{-1}.$$

MATRICES ET SUITES (SPÉCIALITÉ) • CHAP. 17

Donc pour tout entier naturel n non nul, $A^n = M \times B^n \times M^{-1}$.

On a donc :

$$M \times B^n = \begin{pmatrix} (a-b)^n & (a+b)^n \\ -(a-b)^n & (a+b)^n \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\begin{aligned} & M \times B^n \times M^{-1} \\ &= A^n \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [(a-b)^n + (a+b)^n] & -\frac{1}{2} [-(a-b)^n + (a+b)^n] \\ -\frac{1}{2} [-(a-b)^n + (a+b)^n] & \frac{1}{2} [(a-b)^n + (a+b)^n] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5 (a) On a ici $a + b = 1$, donc $b = 1 - a$.

(b) A^n s'écrit donc uniquement en fonction de a et de n :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [(2a-1)^n + 1] & \frac{1}{2} [-(2a-1)^n + 1] \\ \frac{1}{2} [-(2a-1)^n + 1] & \frac{1}{2} [(2a-1)^n + 1] \end{pmatrix}.$$

(c) • $P_1 = P_0 \times A = (ax_0 + by_0 \quad bx_0 + ay_0)$.

• $P_2 = P_1 \times A$

$$= (x_0(a^2 + ab) + y_0(ab + b^2) \quad x_0(ab + b^2) + y_0(a^2 + ab)).$$

(d) $P_n = P_0 A^n$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} x_0 [(2a-1)^n + 1] + \frac{1}{2} y_0 [-(2a-1)^n + 1] \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} x_0 [-(2a-1)^n + 1] + \frac{1}{2} y_0 [(2a-1)^n + 1] \right). \end{aligned}$$

a est une probabilité donc $0 < a < 1$ (il ne peut y avoir égalité avec 0 ou 1 car sinon il n'y aurait pas de transition).

On a donc $-1 < 2a - 1 < 1$.

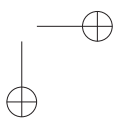
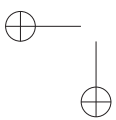
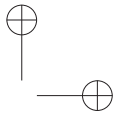
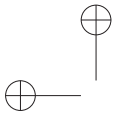
Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2a - 1)^n = 0$ et donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_0 & \frac{1}{2} y_0 \end{pmatrix}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Baccalauréat blanc

1 Exercice 1 (Polynésie, 2013)



50 min

Corrigé
p. 464

Commun à tous les candidats — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'enlève pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1 Soient $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. la forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :

- a $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2 L'équation $-z = \bar{z}$ d'inconnue complexe z , admet :

- a une solution
 b deux solutions
 c une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
 d une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3 Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1 ; 2 ; 3)$, $B(-1 ; 5 ; 4)$ et $C(-1 ; 0 ; 4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

- a $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ b $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- c $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ d $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan \mathcal{P} passant par le point $D(-1 ; 2 ; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3 ; -5 ; 1)$, et la droite

$$\Delta \text{ de représentation paramétrique : } \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- a** La droite Δ est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .
- b** La droite Δ est parallèle au plan \mathcal{P} et n'a pas de point commun avec le plan \mathcal{P} .
- c** La droite Δ et le plan \mathcal{P} sont sécants.
- d** La droite Δ est incluse dans le plan \mathcal{P} .

2 Exercice 2 (Antilles-Guyane, 2013)



80 min

Corrigé
p. 464

Commun à tous les candidats — 6 points

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} telle que :

$$f(x) = (x + 1)e^x.$$

- 1** Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (x + 2)e^x$.
- 3** Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Partie B

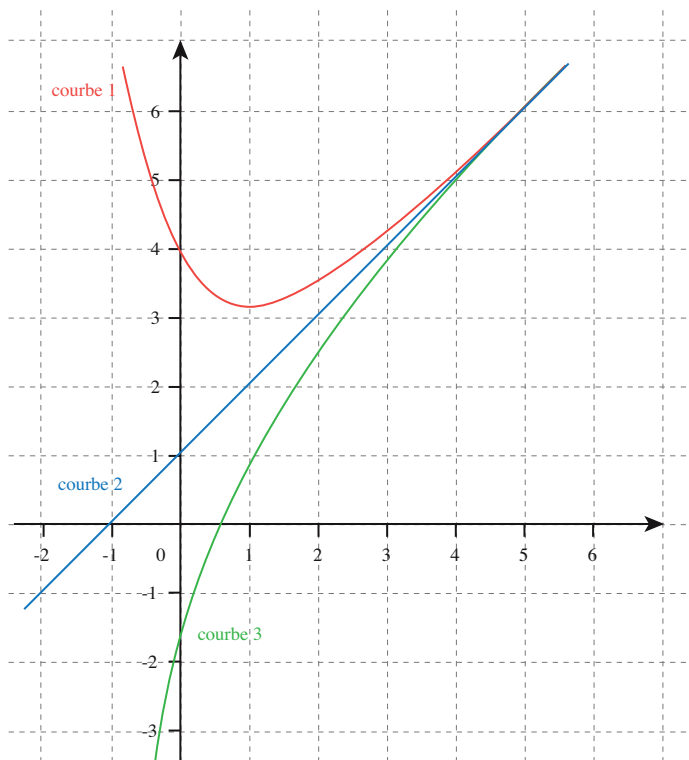
On définit la fonction g_m sur par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x},$$

et on note \mathcal{C}_m la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1** (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
(b) Dédurre de la partie A sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
- 2** On a représenté en annexe (voir page suivante) les courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_e et \mathcal{C}_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
En justifiant, identifier chacune de ces courbes.
- 3** Étudier la position de la courbe \mathcal{C}_m par rapport à la droite d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .
- 4** (a) On appelle \mathcal{D}_2 la partie du plan comprise entre les courbes \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = 2$. Hachurer \mathcal{D}_2 sur la figure précédente. (à rendre avec la copie)
(b) Dans cette question, a désigne un réel positif, \mathcal{D}_a la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.

Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.



3 Exercice 3 (Liban, 2013)



60 min

Corrigé
p. 466

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité — 5 points

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A

1 On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme 1.

Variables
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n
Faire
v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

Algorithme 2.

Variables
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme
Lire n
Pour i allant de 1 à n
Faire
v prend la valeur 1
Afficher v
v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
Fin pour
Fin algorithme

Algorithme 3.

Variables
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n
Faire
Afficher v
v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

- 2 Pour $n = 10$, on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

- 3 (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $0 < v_n < 3$.
(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}.$$

La suite (v_n) est-elle monotone ?

- (c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B : Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

- 1 Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
2 En déduire l'expression de w_n puis celle de v_n en fonction de n .
3 Déterminer la limite de la suite (v_n) .

4 Exercice 4 (Asie, 2013)



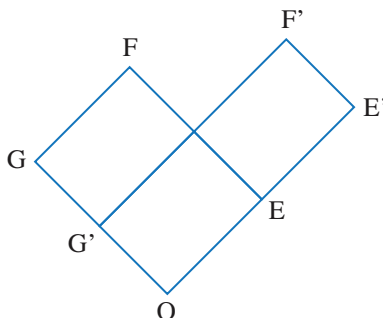
60 min

Corrigé
p. 467

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité — 5 points

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.

Ainsi, le rectangle initial $O E F G$ est transformé en un rectangle $O E' F' G'$, appelé image de $O E F G$.



L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points E , F et G ont pour coordonnées respectives $(2 ; 2)$, $(-1 ; 5)$ et $(-3 ; 3)$.

La transformation du logiciel associe à tout point $M(x ; y)$ du plan le point $M'(x' ; y')$ image du point M tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$$

- 1** Calculer les coordonnées des points E' , F' et G' images des points E , F et G par cette transformation.
- 2** Comparer les longueurs $O E$ et $O E'$ d'une part, $O G$ et $O G'$ d'autre part.
- 3** Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle $O E F G$ lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

- 1 On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.

Une erreur a été commise.

Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

```

Entrée
  Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation
  Affecter à x la valeur -1
  Affecter à y la valeur 5
Traitement
  Pour i allant de 1 à N
    Affecter à a la valeur  $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ 
    Affecter à b la valeur  $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ 
    Affecter à x la valeur a
    Affecter à y la valeur b
  Fin pour
Sortie
  Afficher x , afficher y.
    
```

- 2 On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,812 5	63,906 3	2 047,997 1	65 535,999 9
y	5,5	8,75	16,375	32,187 5	64,093 8	2 048,002 9	65 536,000 1

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F .

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle $O E F G$. On définit la suite des points $E_n(x_n ; y_n)$ du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, où x_{n+1} et y_{n+1} représentent les coordonnées du point E_{n+1} . Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

- 1 On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- 2 (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n , les coordonnées

$$(x_n ; y_n) \text{ du point } E_n \text{ vérifient : } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

5 Exercice 5 (Métropole, 2013)



50 min

Corrigé
p. 469

Commun à tous les candidats — 5 points

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

- 1** La machine A assure 40% de la production et la machine B en assure 60%.

On estime que 10% des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9% des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :

- A : « La pièce est produite par la machine A ».
- B : « La pièce est produite par la machine B ».
- D : « La pièce a un défaut ».
- \bar{D} : « L'évènement contraire de l'évènement D ».

- (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré .
- (b) Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.
- (c) Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à 0,094.
- (d) On constate que la pièce choisie a un défaut. Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

- 2** On estime que la machine A est convenablement réglée si 90% des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

- (a) Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
- (b) Dans cette question, on prend $n = 150$.
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95% de la variable aléatoire F_{150} .
- (c) Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.
Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

1 Exercice 1 (Polynésie, 2013)

Énoncé
p. 457

Commun à tous les candidats — 4 points

1 Réponse **d**. En effet,

$$\begin{aligned} i \frac{z_1}{z_2} &= e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}} \\ &= \sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}. \end{aligned}$$

2 Réponse **c**. On notant $z = x + iy$, l'équation donne :

$$-x - iy = x - iy,$$

c'est-à-dire $x = 0$.

Les solutions ont pour points images l'ensemble des points de la droite d'équation $x = 0$.

3 Réponse **a**. Un vecteur directeur de la droite (AB) a pour coordonnées $(-2 ; 3 ; 1)$; les systèmes **a**, **c** et **d** pourraient convenir. Puis si on remplace t par 0 dans le système **a**, on obtient le point de coordonnées $(-1 ; 0 ; 4)$, c'est-à-dire le point C .

4 Réponse **b**. La droite Δ a un vecteur directeur \vec{u} de coordonnées $(1 ; 1 ; 2)$. On a $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

La droite Δ est donc parallèle au plan \mathcal{P} ou incluse dans ce plan. Soit $A(-2 ; 3 ; 5)$ le point de Δ de paramètre 0. $A \in \mathcal{P}$ si et seulement si \vec{AD} est orthogonal à \vec{n} . Or, \vec{AD} a pour coordonnées $(1 ; -1 ; -2)$, donc $\vec{AD} \cdot \vec{n} = 3 + 5 - 6 \neq 0$. Par conséquent, $A \notin \mathcal{P}$, ce qui prouve que Δ n'est pas incluse dans le plan \mathcal{P} .

2 Exercice 2 (Antilles-Guyane, 2013)

Énoncé
p. 458

Commun à tous les candidats — 6 points

Partie A

1 Il est immédiat que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'autre part, on sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2 D'après la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + (x + 1)e^x \\ &= (x + 2)e^x. \end{aligned}$$

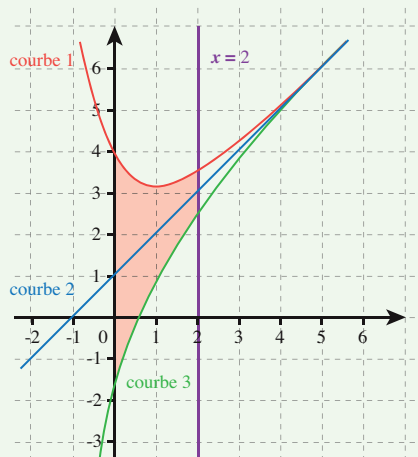
3 La dérivée $f'(x)$ est du signe de $x + 2$. On obtient donc le signe de $f'(x)$ ainsi que le tableau de variation de f : (voir page suivante)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	0		$+\infty$

\searrow \nearrow
 $-e^{-2}$

Partie B

- 1** (a) $g_m(x) = 0$ équivaut à $x + 1 - me^{-x} = 0$, c'est-à-dire $x + 1 = me^{-x}$.
 Ce qui revient à $(x + 1)e^x = m$, c'est-à-dire $f(x) = m$.
- (b) Un point d'intersection de C_m avec l'axe des abscisses correspond à une solution de l'équation $g_m(x) = 0$, c'est-à-dire aussi de l'équation $f(x) = m$.
- D'après le tableau de variation de f , on obtient que :
- si $m < -e^{-2}$, il n'y a pas de point d'intersection ;
 - si $m = -e^{-2}$, il y a un point d'intersection ;
 - si $-e^{-2} < m < 0$, il y a deux points d'intersection ;
 - si $m \geq 0$, il y a un point d'intersection.
- 2** Comme $-e < -e^{-2}$, la courbe C_{-e} ne coupe pas l'axe des abscisses, c'est la courbe 1.
 L'équation de C_0 est $y = x + 1$; C_0 est donc une droite : c'est la courbe 2.
 La courbe 3 correspond donc à C_e .
- 3** $g_m(x) - (x + 1) = -me^{-x}$. La différence est donc du signe opposé à m .
 Si $m > 0$, la courbe est sous la droite, si $m < 0$ la courbe est au-dessus de la droite, et si $m = 0$, la courbe est confondue avec la droite.
- 4** (a) Nous avons le graphique suivant :



(b) Comme \mathcal{C}_{-e} est au-dessus de \mathcal{C}_e , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) &= \int_0^a g_{-e}(x) - g_e(x) \, dx \\ &= \int_0^a (e \times e^{-x} + e \times e^{-x}) \, dx \\ &= \int_0^a 2e^{1-x} \, dx \\ &= [-2e^{1-x}]_0^a \\ &= 2e - 2e^{1-a}. \end{aligned}$$

Lorsque a tend vers $+\infty$, e^{1-a} tend vers 0, donc $\mathcal{A}(a)$ tend vers $2e$.

3 Exercice 3 (Liban, 2013)

Énoncé
p. 459

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité — 5 points

Partie A

- 1 L'algorithme 1 ne convient pas car il n'affiche que le dernier terme v_n .
L'algorithme 2 ne convient pas non plus, car pour chaque passage dans la boucle, il redonne à v la valeur 1.
En revanche, l'algorithme 3 réalise bien la tâche demandée.
- 2 La suite (v_n) semble croissante et converger vers 3.
- 3 (a) Démontrons que pour tout entier n , on a $0 < v_n < 3$.

- Initialisation : comme $v_0 = 1$, la proposition est vraie au rang 0.
- Hérédité : supposons que pour un certain entier k , $0 < v_k < 3$, alors successivement on a :

$$\begin{aligned} -3 &< -v_k < 0 \\ 3 &< 6 - v_k < 6 \text{ (ajouter 6)} \\ \frac{1}{6} &< \frac{1}{6 - v_k} < \frac{1}{3} \text{ (prendre l'inverse)} \\ \frac{3}{2} &< \frac{9}{6 - v_k} < 3 \text{ (multiplier par 9)}. \end{aligned}$$

Cela montre que $0 < v_{k+1} < 3$.

La proposition est donc vraie pour tout entier n .

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{9}{6 - v_n} - v_n \\
 &= \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} \\
 &= \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}.
 \end{aligned}$$

Comme pour tout n , $v_n < 3$, la différence précédente est toujours positive, ce qui montre que la suite (v_n) est croissante.

(c) La suite étant croissante et majorée par 3, elle est convergente.

Partie B

$$\begin{aligned}
 \text{1} \quad w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{v_{n+1} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} \\
 &= \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} \\
 &= \frac{6 - v_n}{-9 + 3v_n} - \frac{1}{v_n - 3} \\
 &= \frac{3 - v_n}{-9 + 3v_n} \\
 &= -\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
 \text{2} \quad w_n &= w_0 + nr \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} \\
 &= -\frac{3 + 2n}{6}. \\
 v_n &= \frac{1}{w_n} + 3 = -\frac{6}{3 + 2n} + 3.
 \end{aligned}$$

3 Comme la limite de $\frac{6}{3 + 2n}$ en $+\infty$ est 0, on en déduit que la limite de (v_n) est 3.

4 Exercice 4 (Asie, 2013)

Énoncé
p. 461

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité — 5 points

Partie A

$$\text{1} \quad E'(4 ; 4), F'(2,5 ; 5,5) \text{ et } G'(-1,5 ; 1,5).$$

$$\text{2} \quad OE = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \text{ et } OE' = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}, \text{ donc } OE' = 2OE.$$

$$OG = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \text{ et } OG' = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \text{ donc}$$

$$OG' = \frac{1}{2}OG.$$

$$\mathbf{3} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Partie B

1 Il faut faire afficher x et y avant de sortir de la boucle, c'est-à-dire avant la ligne « Fin pour », et supprimer l'instruction de sortie finale.

2 Les coordonnées des images successives de F semblent tendre vers $+\infty$, mais aussi leurs valeurs se rapprochent. Il semble donc que les images successives de F se rapprochent de la droite d'équation $y = x$, en s'éloignant de plus en plus de l'origine dans le quart de plan $x > 0$ et $y > 0$.

Partie C

$$\mathbf{1} \quad \bullet \text{ Initialisation : } A^1 = A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Or,

$$2^0 + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \alpha_1$$

et

$$2^0 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \beta_1.$$

La proposition est donc vraie au rang 1.

• Hérité : Supposons que la proposition soit vraie à un certain rang $k \geq 1$.

En effectuant le produit des matrices, on trouve :

$$\alpha_{k+1} = \frac{5}{4}\alpha_k + \frac{3}{4}\beta_k$$

et

$$\beta_{k+1} = \frac{3}{4}\alpha_k + \frac{5}{4}\beta_k.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{5}{4\left(2^{k-1} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)} + \frac{3}{4}\left(2^{k-1} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &= \frac{8}{4} \times 2^{k-1} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 2^{(k+1)-1} + \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta_{k+1} &= \frac{3}{4 \left(2^{k-1} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)} + \frac{5}{4} \left(2^{k-1} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &= \frac{8}{4} 2^{k-1} - \frac{2}{4} \times \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 2^{(k+1)-1} - \frac{1}{2^{(k+1)-1}}\end{aligned}$$

Cela montre donc que la proposition est vérifiée pour tout $n \geq 1$.

- 2 (a)** D'après la formule $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, on trouve :

$$x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n$$

et

$$y_n = 2\beta_n + 2\alpha_n,$$

ce qui montre que pour tout n , $x_n = y_n$.

Tous les points E_n sont donc sur la droite d'équation $y = x$.

- (b)** $x_n = 2 \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + 2 \left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$
 $= 2^{n+1}$
 $= y_n$.

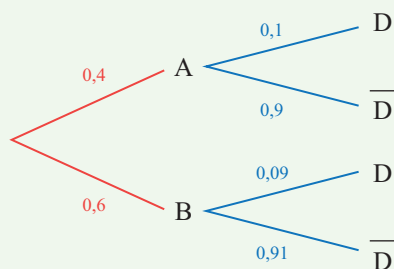
Alors $OE_n = 2^{n+1}\sqrt{2}$. Donc OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

5 Exercice 5 (Métropole, 2013)

Énoncé
p. 463

Commun à tous les candidats — 5 points

- 1 (a)** L'arbre est le suivant :



- (b)** $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$
 $= 0,4 \times 0,1$
 $= 0,04$.

- (c) Comme A et B forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= 0,04 + 0,6 \times 0,09 \\ &= 0,094. \end{aligned}$$

(d) $P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{0,04}{0,094} \\ &= \frac{20}{47} \\ &\approx 0,426. \end{aligned}$$

- 2** (a) Les tirages étant assimilés à des tirages successifs indépendants avec remise, on a n répétitions d'une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès (pièce conforme) est 0,9 si la machine est bien réglée.

X_n suit donc la loi binomiale de paramètres n et 0,9.

- (b) Ici $n > 30$, $np > 5$ et $n(1 - p) > 5$, on peut donc appliquer la formule de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion 0,9 dans un échantillon de 150 individus :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

ce qui donne environ $[0,852 ; 0,948]$.

- (c) Lors du test, la proportion de pièces conformes est $\frac{129}{150} \approx 0,86$. Cette valeur étant dans l'intervalle de fluctuation, il n'y a pas lieu de remettre en cause le réglage de la machine.