INTERROS des LYCÉES

Collection dirigée par Éric Maurette

Maths

Term ES·L

Spécifique + Spécialité ES

Spécialité

Anne Crouzier

Danièle Eynard

Stéphane Pasquet

Le papier de cet ouvrage est composé de fibres naturelles, renouvelables et fabriquées à partir de bois provenant de forêts gérées de manière responsable.

Nathan

09188097_Couv_MathsTerm.indd 1 29/04/15 15:33

Remerciements

Les auteurs et l'équipe de Prepamath Édition tiennent à remercier Jean-Côme Charpentier et Vanessa Arnoux pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Patrick Doan

Coordination éditoriale : François Déliac

Conception couverture : Marc & Yvette

Votre avis sur cet ouvrage nous intéresse : edition.prepamath.com

© Prepamath Édition 2016

© Éditions NATHAN 2016 - ISBN 978209 188097 6

Avant-propos

Cet ouvrage est conforme au programme de Mathématiques en vigueur dans les classes de Terminale ES et Terminale L. Sont traités dans cet ouvrage l'enseignement spécifique, la spécialité de Terminale ES et la spécialité de Terminale L.

La présente édition, revue et corrigée, est complétée de nouveaux exercices ainsi que de rabats incluant des mémentos de cours. Elle bénéficie d'une nouvelle maquette en couleur, pour une lecture encore plus aisée et efficace.

Dans chaque chapitre, on trouvera :

- un rappel de cours qui s'appuie sur la résolution pratique d'un ou plusieurs exercices-types, résumant de manière concise tout ce que l'on doit retenir du chapitre étudié ;
- des QCM ou des exercices de type vrai-faux, permettant de tester de manière rapide la connaissance du cours et sa réelle assimilation ;
- des énoncés d'exercices réellement posés dans les classes de Terminale ES ou L de différents lycées de France, triés par thèmes et ordre de difficulté croissante. Certains sont des applications immédiates du cours, tandis que d'autres nécessitent une réflexion approfondie et constituent un excellent entraînement pour la préparation au baccalauréat ;
- les solutions des exercices. Certaines sont parfois beaucoup plus détaillées que ce qui est normalement demandé à un élève de Terminale ES ou L. Le but est de l'aider à garder les idées claires sur les notions fondamentales du programme.

Enfin, pour synthétiser l'ensemble, un baccalauréat blanc est proposé en fin d'ouvrage.

Rappelons notre recommandation traditionnelle : il ne s'agit pas d'un manuel de classe. Les auteurs souhaitent que la lecture de ce livre ne se substitue pas au travail fait au lycée, mais qu'elle puisse être l'occasion d'un dialogue avec le professeur de mathématiques.

Nous remercions par avance tout lecteur qui nous fera part de ses remarques ou suggestions (edition.prepamath.com), afin d'améliorer encore cet ouvrage lors de futures rééditions.

Nous vous souhaitons une bonne et profitable lecture.

Les auteurs.

Table des matières

Chap 1 Suites numériques 1
- Cours 1
- Interros 8
- Corrigés 23

Chap 2 Dérivation et langage de la continuité 49
- Cours 49
- Interros 59
- Corrigés 69

Chap 3 Fonctions exponentielles 87
- Cours 87
- Interros 97
- Corrigés 107

Chap 4 Fonction logarithme népérien 125
- Cours 125
- Interros 132
- Corrigés 141

Chap 5 Fonctions convexes 163
- Cours 163
- Interros 169
- Corrigés 176

Chap 6 Primitive et intégration 185
- Cours 185
- Interros 194
- Corrigés 203

Chap 7 Probabilités conditionnelles 219
- Cours 219
- Interros 226
- Corrigés 239

Chap 8 Lois à densité 253
- Cours 253
- Interros 260
- Corrigés 267

Chap 9 Intervalle de fluctuation et estimation 277
- Cours 277
- Interros 282
- Corrigés 291

Chap 10 Matrices et suites (Spécialité ES) 299
- Cours 299
- Interros 305
- Corrigés 311

Chap 11 Théorie des graphes (Spécialité ES) 317
- Cours 317
- Interros 328
- Corrigés 341

Baccalauréat blanc 365
- Sujet 365
- Corrigé 370

Méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont utilisés par un grand nombre de majors des meilleures grandes écoles (Polytechnique, Normale Sup, ENA...), recommandés par de nombreux professeurs, et très souvent pratiqués par les professionnels de l'organisation.

Pour en savoir plus, nous vous recommandons la lecture du livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et E. Maurette, aux Éditions Prepamath.

Faire des « feed-back »

Le « feed-back » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral.

Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé.

Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- Idem pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de philosophie. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

Pour acquérir de la rapidité, trois voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.
- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoir surveillé. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.

Pendant une épreuve de type bac

- Il est important de lire au préalable le sujet dans son entier.
- Le nombre de points attribués à l'exercice donne des indications sur sa longueur, et par voie de conséquence sur le temps maximum qu'il faudra lui consacrer.
- Ne pas s'obstiner sur une question qui « résiste » ! Au contraire, passer à la question suivante pour essayer de traiter le maximum dans un exercice.
- Concernant les QCM, vous devez savoir que les réponses fausses sont parfois fortement pénalisées. Il est donc conseillé, dans ce cas, de ne répondre qu'à coup sûr. En revanche, si la réponse fausse n'est pas pénalisée, répondez à toutes les questions même si vous n'êtes pas sûr de vous.
- Organisez votre rédaction de façon logique (chaque exercice sur une copie séparée) et non pas chronologique. Cela permet de laisser de la place sur une copie pour éventuellement revenir à une question laissée en suspens dans un exercice. La correction de votre copie en sera d'autant plus facilitée…

Chapitre 1

Suites numériques

Plan du chapitre

1. Suites arithmétiques (Rappels)
2. Suites géométriques
3. Suites arithmético-géométriques

Exercice type 1 — Cité scolaire Internationale, Grenoble

1 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \ .$$

Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.

2 Montrer que la suite de terme général $w_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n+1}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.

3 La suite de terme général $3^{n+1} - 3^n$ est-elle arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre ?

Voir corrigé page 4

1 Suites arithmétiques (Rappels)

Définition 1

Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$; r est appelé la raison de la suite.

Propriété 1

Une suite arithmétique est telle que, pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = \text{constante}.$$

MÉTHODE

Utilisez la propriété ($u_{n+1} - u_n =$ constante) pour démontrer qu'une suite est arithmétique ou non.

COURS

Propriété 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tous n et p de $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr \text{ et } u_n = u_p + (n-p)r.$$

Propriété 3

Les entiers positifs forment une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
La somme des $n+1$ premiers entiers est égale à :

$$S = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2 Suites géométriques

2.1 Rappels

Définition 2

Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$; q est appelé la raison de la suite.

Propriété 4

Une suite géométrique non nulle est telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{constante}.$$

MÉTHODE

Utilisez la propriété $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{constante}\right)$ pour démontrer qu'une suite est géométrique ou non.

Propriété 5

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors, pour tous n et p de $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Propriété 6

Si (u_n) est une suite telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = aq^n$, a étant un nombre réel, alors (u_n) est une suite géométrique de raison q.

Cette propriété permet dans certains cas de reconnaître une suite géométrique sans calculs.

Somme des n + 1 premiers termes d'une suite géométrique

Théorème 1

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Théorème 2

La somme S des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique est égale à :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

À RETENIR

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Remarque : seule la somme $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ est au programme, mais celle donnée ici s'en déduit facilement.

2.2 Sens de variation (rappel)

Propriété 7

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$, q étant un nombre réel strictement positif.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.

Remarque : on peut en déduire facilement le sens de variation de toute suite géométrique.

2.3 Limite d'une suite géométrique de raison q > 0

Plusieurs cas se présentent :

- si $0 < q < 1$, alors le terme général de la suite devient de plus en plus proche de 0 quand n devient de plus en plus grand : on dit que u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- si $q = 1$, la suite est constante et égale au premier terme.

COURS

- si $q > 1$ et $u_0 > 0$, le terme général de la suite devient de plus en plus grand lorsque n devient de plus en plus grand : on dit que u_n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- si $q > 1$ et $u_0 < 0$, le terme général de la suite de la suite devient de plus en plus « grand » négatif lorsque n devient de plus en plus grand : on dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2.4 Limite de la somme des termes d'une suite géométrique

On ne s'intéressera ici qu'au cas où la raison q vérifie $0 < q < 1$. On sait alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On obtient alors, dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} S = u_0 \dfrac{1}{1-q}$.

Solution de l'exercice type 1

Cité scolaire Internationale, Grenoble

1 Pour montrer que la suite est arithmétique, on peut montrer que la différence de deux termes consécutifs est une constante :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \\ &= \frac{(n+2)(n+3) - 2(n+1)(n+2) + n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + 5n + 6 - 2n^2 - 6n - 4 + n^2 + n}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 1. Son premier terme est $v_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$.

Une autre méthode serait de chercher à exprimer v_n en fonction de n :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\frac{n+2-n}{2} \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

On obtient la forme générale d'une suite arithmétique $(u_0 + nr)$.
Cela montre que la suite (v_n) est la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Remarque : (u_n) est la somme des entiers naturels de 1 à n (voir propriété 2).

Solution de l'exercice type 1 (suite)

Cité scolaire Internationale, Grenoble

2 Ici aussi, on peut utiliser deux méthodes :

- Puisqu'aucun terme de la suite (w_n) ne s'annule :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2^{n+2}}{3^{2(n+1)+1}} \times \frac{3^{2n+1}}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3^2}$$

$$= \frac{2}{9}.$$

Comme le quotient de deux termes consécutifs est constant, cela montre que la suite (w_n) est géométrique, de raison $\frac{2}{9}$.

- On peut aussi écrire :

$$w_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n+1}}$$

$$= \frac{2 \times 2^n}{3 \times (3^2)^n}$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n .$$

Cette écriture est de la forme $u_0 q^n$, ce qui montre que la suite (w_n) est géométrique, de raison $\frac{2}{9}$ et de premier terme $\frac{2}{3}$.

3 Les trois premiers termes de cette suite sont 2, 6 et 18.
Comme $6 - 2 \neq 18 - 6$, cette suite ne peut pas être arithmétique.
Par contre, $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = 3$, cette suite pourrait être géométrique.
On remarque que :

$$3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n .$$

Cela montre que cette suite est bien géométrique, de premier terme 2 et de raison 3.

Remarque : seule une suite constante non nulle est à la fois arithmétique (de raison 0) et géométrique (de raison 1).

Voir énoncé page 1

COURS

3 Suites arithmético-géométriques

Exercice type 2 — Lycée Victor Duruy, Paris

On pose :

$$\begin{cases} V_1 = 120 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{4}V_n + 120. \end{cases}$$

1. Calculer V_2 et V_3.
2. Montrer que la suite (V_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. On pose $W_n = 160 - V_n$.
   - **(a)** Calculer W_1.
   - **(b)** Montrer que $W_{n+1} = \dfrac{1}{4}W_n$.
   - **(c)** Exprimer W_n puis V_n en fonction de n.

Voir corrigé page 6

Définition 3

Une suite (u_n) arithmético-géométrique est une suite définie par son premier terme et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = au_n + b$, a et b étant des réels non nuls, et a étant de plus différent de 1.

Remarques

- Si a était égal à 0, on aurait une suite constante.
- Si b était égal à 0, on aurait une suite géométrique.
- Si a était égal à 1, on aurait une suite arithmétique.

Il n'y a pas de résultat de cours à connaître sur ces suites, mais il est utile de savoir les reconnaître pour comprendre la démarche décrite dans un exercice.

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Victor Duruy, Paris

1. $V_2 = \dfrac{1}{4}V_1 + 120 = 150$ et $V_3 = \dfrac{1}{4}V_2 + 120 = 157{,}5$.
2. $V_2 - V_1 = 30$ et $V_3 - V_2 = 7{,}5$.
   Cela montre que la suite n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{150}{120} = 1{,}25$ et $\dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{157{,}5}{150} = 1{,}05$.
   La suite n'est donc pas non plus géométrique.

...

Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Victor Duruy, Paris

3 **(a)** $W_1 = 160 - V_1 = 160 - 120 = 40.$

(b) $$\begin{aligned} W_{n+1} &= 160 - V_{n+1} \\ &= 160 - \frac{1}{4}V_n - 120 \\ &= 40 - \frac{1}{4}V_n \\ &= 40 - \frac{1}{4}(160 - W_n) \\ &= \frac{1}{4}W_n \ . \end{aligned}$$

(c) Cela montre que la suite (W_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$, comme son terme de rang 1 est 40, on a $W_n = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Puis on calcule $V_n = 160 - W_n = 160 - 40\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Voir énoncé page 6

INTERROS

1 QCM Propriétés d'une suite géométrique

15 min — Corrigé p. 23

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1 u_{n+1} est égal à :

a $u_n + \frac{1}{2}$ b $\frac{1}{2}u_n$ c $(u_n)^{\frac{1}{2}}$

2 u_n est égal à :

a $2 + \frac{1}{2}n$ b 2^{1-n} c 2^{n+1}

3 $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ est égal à :

a $\frac{31}{8}$ b 15 c $\frac{15}{8}$

4 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égal à :

a $+\infty$ b 0 c 2

5 Soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ est égal à :

a $+\infty$ b 0 c 4

2 QCM Suites arithmétiques et géométriques

15 min — Corrigé p. 23

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 2$ est une suite :

a arithmétique. b géométrique. c minorée. d décroissante.

2 Le premier janvier 2010, Julie a placé 5 000 € à intérêts composés, au taux de 3 %. On note C_n le capital de Julie au 1er janvier $(2010 + n)$.

a Les intérêts acquis durant l'année 2011 se montent à 150 €.

b Pour tout entier positif n, $C_n = 5\,000 + 150n$.

c Le 1er janvier 2016, Julie pourra disposer de plus de 6 000 €.

d Le 1er janvier 2021, Julie disposera de moins de 7 000 €.

3 La suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ est une suite :

a décroissante b minorée

c croissante d définie par récurrence

4 Soit u la suite arithmétique de raison -3 telle que $u_1 = 77$.

u_{50} est égal à :

a 73 b -73 c -83 d -70

3 QCM Bac La Réunion juin 2007

20 min Corrigé p. 25

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = 1 - \frac{6}{n - 10{,}5}$$

[a] La suite (u_n) est croissante à partir du rang 11.

[b] La suite (u_n) est décroissante.

[c] La suite (u_n) est monotone pour tout n.

2 La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}1 \times u_n$

[a] La suite (u_n) est arithmétique.

[b] La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

[c] La suite (u_n) est géométrique.

3 Les ventes d'un nouveau roman ont régulièrement progressé de 2 % chaque semaine depuis sa parution. Au cours de la première semaine, il s'en était vendu dix mille exemplaires.

Arrondi à l'unité, le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 semaines écoulées depuis sa parution est :

[a] 23 900 [b] 718 927 [c] 743 306

4 La suite (u_n) est définie par :

Pour tout entier naturel n, $u_n = \mathrm{e}^{-n \ln 2}$:

[a] (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

[b] (u_n) est une suite géométrique de raison $-\ln 2$.

[c] (u_n) n'est pas une suite géométrique.

4 V/F Vrai ou faux

15 min Corrigé p. 26

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes et justifier.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 4$ et $u_0 = 9$.

1 La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 8$ est géométrique.

2 La suite (v_n) tend vers $+\infty$.

3 La suite (u_n) a pour limite 8.

4 v_n est inférieur à 10^{-4} dès que n est supérieur ou égal à 13.

5 V/F Logique

15 min — Corrigé p. 27

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 500$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}5u_n$.

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Il existe un nombre entier naturel n tel que $u_n < 100$.
2. Pour tout nombre entier naturel n, $u_n < 100$.
3. Il existe un nombre entier naturel n tel que $u_n = 0$.
4. Il existe un nombre entier naturel p tel que pour tout entier naturel n supérieur à p, on a $u_n < 5$.

6 QCM Interprétation de l'affichage

10 min — Corrigé p. 27

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1{,}2$.
On considère l'algorithme suivant :

```
U prend la valeur 1
S prend la valeur 1
Pour I entier variant de 1 à 5 Faire
    U prend la valeur U
    S prend la valeur S+U
Fin Pour
Afficher S
```

Cet algorithme affiche : (désigner la bonne réponse en justifiant)

a. le 5e terme de la suite (u_n).
b. le 6e terme de la suite (u_n).
c. La somme des 5 premiers termes de la suite (u_n).
d. La somme des 6 premiers termes de la suite (u_n).

7 QCM Variations en pourcentage

15 min — Corrigé p. 27

Pour chacune des questions, déterminer les réponses exactes. Justifier.

1. Océane vend un article par correspondance au prix unitaire de 10 €. Elle en vend 1 000. Chaque mois, elle diminue son prix unitaire de 21 % et en contre partie, la quantité vendue augmente de 26 %.

   La valeur de ses ventes au bout de n mois est :

   $$V_n = \text{prix unitaire} \times \text{quantité vendue.}$$

Alors :

a La suite (V_n) est croissante.

b La suite (V_n) est décroissante.

c À long terme, la valeur de V_n est nulle.

2 Anatole achète sa moto 10 000 €. Il apprend que sa valeur diminue de 10 % chaque année.

a Sa valeur est nulle au bout de 10 ans.

b Cinq ans après son achat, elle vaut 5 900 € à 10 euros près.

c À long terme, sa valeur devient constante.

Suites géométriques

8 Suite géométrique

★ 10 min Corrigé p. 28

Lycée Lamartine, Paris

Écrire les trois premiers termes des suites définies ci-après.

Peuvent-elles être géométriques ? Justifier.

Si la suite est géométrique, donner sa raison.

1 $u_n = 3^n + 4n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

9 Critère de choix

★ 10 min Corrigé p. 28

Lycée La Bruyère, Versailles

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 8$ et $u_2 = 32$.

Indiquer la bonne réponse sur la copie :

1 Est-on sûr que la suite (u_n) est ou n'est pas une suite arithmétique ?

2 Est-on sûr que la suite (u_n) est ou n'est pas une suite géométrique ?

10 Suites et puissances

★ 15 min Corrigé p. 29

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 4$.
Déterminer u_1, u_2 et u_3.

2 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2^{u_n}$.

(a) Déterminer les trois premiers termes de la suite (v_n).

(b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison.

11 Modifier un algorithme

★ 20 min Corrigé p. 29

Lycée Victor Duruy, Paris

On pose :

$$S = 1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

On se propose de trouver la plus petite valeur de n telle que S soit supérieur ou égal à A, où A est un nombre donné à l'avance.

On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir A
N prend la valeur 0
S prend la valeur 1
Tant que S<A faire
    N prend la valeur N+1
    S prend la valeur S+(4/3)^N
Fin tant que
Afficher N
Afficher S
```

Pour $A = 4$, détailler le déroulement de l'algorithme.

Indiquer la plus petite valeur de n telle que S soit supérieur ou égal à 4.

Quelle valeur de n obtient-on pour $A = 10$? Justifier.

12 Suite logarithmique

★ 30 min Corrigé p. 30

Lycée Chaptal, Paris

On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \ln(u_{n+1}) = 1 + \ln u_n. \end{cases}$$

On note e le nombre de Neper, tel que $\ln e = 1$.

1 Donner les valeurs exactes de u_1, u_2 et u_3 en fonction de e.

2 Montrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e.$$

En déduire u_n en fonction de n.

3 Préciser le sens de variation de la suite (u_n) et calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n.$$

4 Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} > 10^{10}$.

13 Comparaison de deux placements

★ — 30 min — Corrigé p. 30

Lycée Gabriel Fauré, Paris

Au 1er janvier 2004, Marcel place 10 000 € à un taux de 3 %. Au 1er janvier 2004, Édith place 9000 € à un taux 4 %. Les deux placements se font à intérêts annuels composés.

On note u_n (respectivement v_n) le capital dont dispose Marcel (resp. Édith) au 1er janvier de l'année 2004 + n.

1. Quel est le capital pour chacun au 1er janvier 2005 ?
2. Déterminer la nature des suites (u_n) et (v_n).
3. Exprimer les termes u_n et v_n en fonction de n.
4. Au bout de combien d'années le placement d'Édith sera-t-il plus rentable que celui de Marcel ?

14 Trouver la raison

★★ — 15 min — Corrigé p. 32

Lycée La Bruyère, Versailles

1. La suite (u_n) est une suite géométrique décroissante telle que $u_5 = 10$. Que peut-on dire de sa raison ?
2. La suite (u_n) est une suite géométrique décroissante telle que $u_5 = -10$. Que peut-on dire de sa raison ?

15 Retrouver la suite

★★ — 25 min — Corrigé p. 32

Lycée Victor Duruy, Paris

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante tels que :

$$\begin{cases} a+b+c=19 \\ 2a+b-c=5 \end{cases} \quad \text{(S)}$$

1. Expliquer pourquoi $b^2 = ac$.
2. On note q la raison de cette suite géométrique.
   Expliquer pourquoi $q > 0$.
3. Montrer que le système S est équivalent à :

$$\begin{cases} a(1+q+q^2)=19 \\ a(3+2q)=24 \end{cases} \quad \text{(S')}$$

4. Résoudre ce système S et déterminer les valeurs des nombres réels a, b et c.

16 Suite décrite par un algorithme

★★ 25 min Corrigé p. 33

Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

On donne l'algorithme suivant :

```
U prend la valeur 2
Pour i variant de 1 à 3
    U prend la valeur 4/3 U
Fin Pour
Afficher U
```

1 Que fait cet algorithme ?

2 Modifier cet algorithme pour qu'il donne le 5e terme de la suite géométrique de premier terme 100 et de raison 1,2.

3 On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $q = 1{,}2$.

(a) Exprimer, sans justifier, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n, puis u_n en fonction de n.

(b) Déterminer la limite de cette suite quand n tend vers $+\infty$.

(c) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$ des six premiers termes de cette suite.

17 Recherche de taux

★★ 30 min Corrigé p. 34

Lycée Jacques Monod, Clamart

Le 1er janvier 2002, René a placé 5 000 € à intérêts composés au taux annuel de 3 %. On note C_n le capital de René disponible au 1er janvier de l'année 2002 + n.

1 **(a)** Calculer C_1 et C_2.

(b) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et montrer que C_n peut s'écrire :

$$C_n = 1{,}03^n \times 5\,000.$$

2 Au 1er janvier 2010, René aura besoin d'une somme de 7 000 €.

(a) Le capital disponible au 1er janvier 2010 sera-t-il suffisant pour subvenir à cette dépense ?

(b) À quel taux minimal René aurait-il dû placer son capital le 1er janvier 2002 pour disposer d'au moins 7 000 € au 1er janvier 2010 ? Arrondir le résultat au dixième.

18 Exponentielle d'une suite arithmétique ★★★ 30 min Corrigé p. 35

Lycée Victor Duruy, Paris

Comme son titre l'indique, cet exercice ne pourra être traité qu'après avoir étudié la fonction exponentielle.

1 On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -1.

(a) Calculer u_1 et u_2.

(b) Exprimer u_n en fonction de n. En déduire u_{15}.

(c) On donne l'algorithme suivant :

```
Variable d'entrée
      N réel
Variables de sortie
      S, A réels
Traitement
      Saisir N
      A prend la valeur 2
      S prend la valeur 2
      Pour i= 1 à N faire
          A prend la valeur A-1
          S prend la valeur S+A
      FinPour
Sortie
      Afficher A
      Afficher S
```

Quels résultats obtient-on pour N=1, N=2 et N=3 ?

Que se passe-t-il si N=0 ?

Que représentent les valeurs A et S ?

(d) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Démontrer que :

$$S_n = \frac{(n+1)(4-n)}{2}.$$

2 On pose $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

(a) Calculer v_0, v_1 et v_2.

(b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison q.

(c) Déterminer v_n en fonction de n.

3 Soit $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$.
En utilisant le résultat de la question 1.d, exprimer P_n en fonction de n.

19 Suites extraites

★★★ 60 min Corrigé p. 36

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

Pour l'année en cours, le prix d'un objet est P_0 (€). Suite à l'inflation, le prix augmente chaque année.

1 On suppose une inflation des prix constante, de 3 % par an, pour les années à venir.

(a) Exprimer le prix P_n en fonction de n.

(b) Au bout de combien d'années le prix de l'objet aura-t-il doublé ? Le temps de doublement dépend-il du prix initial P_0 ?

2 On suppose maintenant qu'à une année d'inflation à 3 % succède une année de désinflation de 3 % (les prix baissent de 3 %) et vice-versa. Les taux d'inflation (en %) forment donc une suite alternée (3,-3,3,-3,...).

(a) Exprimer P_2 en fonction de P_0.

(b) Exprimer de même le prix P_{2n+2} en fonction de P_n. En déduire que la suite (P_{2n}) est géométrique.

(c) Exprimer P_{2n} et P_{2n+1} en fonction de n et de P_0.

(d) Reprendre la question précédente en supposant que les taux d'inflation et de désinflation sont respectivement de i % et $-i$ %.

(e) Étudier les variations des suites (P_{2n}) et (P_{2n+1}).

20 Étude d'un algorithme

★ 15 min Corrigé p. 38

Lycée Victor Duruy, Paris

On considère l'algorithme suivant où N désigne un entier naturel.

```
Entrée
      Saisir la valeur de N
Initialisation
      Affecter à I la valeur 0
      Affecter à P la valeur 63,2
Traitement
      Tant que I<N
           Affecter à I la valeur I+1
           Affecter à P la valeur 1,002P+0,1
Sortie
      Afficher P
```

Détailler le fonctionnement de l'algorithme pour $N = 4$ et donner la valeur affichée en sortie, arrondie au millième.

Suites arithmético-géométriques

21 Suite arithmético-géométrique ★★ 30 min Corrigé p. 38

Lycée Henri IV, Paris

Une observation faite par un journal sur ses abonnés a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement voisin de 80 %, ainsi que l'apparition d'environ 5000 nouveaux abonnés.

On note a_n le nombre d'abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

1 Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n,

$$a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 5000.$$

2 Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = 25\,000 - a_n.$$

(a) En exprimant u_{n+1} en fonction de u_n, montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) Exprimer u_n en fonction de n. En déduire que :

$$a_n = 25\,000 - 15\,000 \times 0{,}8^n.$$

(c) Déterminer la limite de la suite (a_n).

3 **(a)** Résoudre sur $\mathbb{N}$ l'inéquation $25\,000 - 15\,000 \times 0{,}8^x > 22\,000$.

(b) En déduire le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'abonnés dépasse 22 000.

22 Représentation graphique ★★ 30 min Corrigé p. 40

Lycée Joliot-Curie, Nanterre

Soit la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 0 \quad , \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1 Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3. La suite est elle arithmétique ? géométrique ?

2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(0\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, d'unité 2 cm, tracer les droites Δ d'équation $y = x$ et D d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$. Déterminer par le calcul les coordonnées de leur point d'intersection I.

3 Pour tout entier naturel n, on construit le point $A_n(u_n,0)$, puis le point M_n de D ayant pour abscisse u_n, puis le point R_n de Δ ayant pour ordonnée celle de M_n, puis le point A_{n+1} et ainsi de suite.

(a) Construire les points A_0, A_1, A_2, A_3 ainsi que M_0, M_1, M_2, M_3.

(b) Que peut-on conjecturer quant à la limite de la suite (u_n) ?

4 On considère maintenant la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$, pour tout entier naturel n.

(a) Calculer v_0 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2v_{n+1} = v_n$.

(b) En déduire la nature de la suite (v_n) et exprimer v_n en fonction de n.

5 Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de (u_n).

23 Double récurrence

★★ — 45 min — Corrigé p. 41

Lycée Henri IV, Paris

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1\,, \quad u_1 = 3\,, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}a^2 u_{n+1} + (a-3)u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

1 On pose d'abord $a = 2$. On a donc $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

(a) Vérifier que la suite (v_n) est constante.

(b) Déduire que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2. Exprimer le terme u_n puis $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, en fonction de n en observant que $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_0 + 2r$, …, $u_n = u_0 + nr$.

(c) En déduire la somme des entiers naturels impairs inférieurs à 100.

2 On pose maintenant $a = -4$.

(a) Vérifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 7. Exprimer v_n en fonction de n.

(b) Calculer $T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = u_{n+1} - 1$. En déduire u_n en fonction de n. La suite (u_n) est-elle convergente ?

24 Étude simultanée de suites

★★ — 45 min — Corrigé p. 43

Lycée Louis Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Un biologiste étudie les mutations génétiques entre deux types de cellules, A et B, évoluant dans un même milieu. Le nombre total de cellules reste constant (ni disparition ni création) ; mais d'un jour à l'autre 25 % des cellules de type A mutent vers des cellules de type B, et réciproquement.

On note a_n (resp. b_n) le nombre de cellules de type A (resp. de type B) au bout de n jours d'observation. Pour tout entier n, on a $a_n + b_n = 300$. Initialement, $a_0 = 100$ et $b_0 = 200$.

1 Montrer que pour tout entier naturel, on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{3}{4}b_n \end{cases}$$

2 En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 75$.

3 On pose $c_n = 150 - a_n$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que la suite (c_n) est géométrique.

(b) Exprimer c_n en fonction de n.
En déduire que $a_n = 150 - 50 \times 0{,}5^n$.

4 Étudier les variations de chacune des suites (a_n) et (b_n).

5 Déterminer la limite de chacune des suites. Interpréter les résultats vis-à-vis de la situation étudiée par le biologiste.

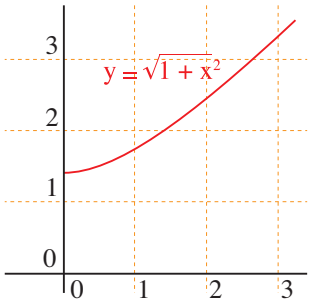
25 Représentation graphique

★★ — 20 min — Corrigé p. 44

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + (u_n)^2}$ et $u_0 = 1$.
On donne la représentation graphique de la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{2 + x^2} \qquad \text{sur } [0\,;+\infty[.$$



1 Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ sur le graphique.
Représenter sur le graphique u_0, u_1, u_2 et u_3, sans utiliser le calcul. Laisser apparents les traits de construction.

2 Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = (u_n)^2$ est arithmétique de raison 2.

3 Calculer v_0, puis v_n en fonction de n.
En déduire une expression de u_n en fonction de n.

INTERROS

26 Graphique et limite

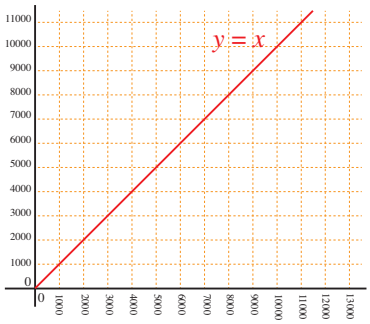
★★ 30 min Corrigé p. 45

Lycée Massena, Nice

Partie A

On considère la suite définie par $u_0 = 5\,500$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}68u_n + 3\,560$.

1 Utiliser les droites d'équation $y = x$ et $y = 0{,}68x + 3\,560$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique suivant :



2 Conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

Partie B

1 Quel est le rôle de l'algorithme suivant ?

```
A prend la valeur 5500
k prend la valeur 0
Tant que A<11000 faire
      k prend la valeur k+1
      A prend la valeur 0.68*A+3560
Fin Tant que
Afficher k
```

2 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n - 11\,125$.

(a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

(b) Exprimer pour tout entier n, v_n en fonction de n.

En déduire que pour tout entier n, $u_n = 11\,125 - 5\,625 \times 0{,}68^n$.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

27 Évolution d'un salaire

★★★ 30 min Corrigé p. 46

Lycée Dumont d'Urville, Toulon

Partie A

Soit la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 14\,000$ et par la relation :

pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n + 200$.

1 Calculer u_1 et u_2.

2 Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 5\,000$.

(a) Calculer v_0.

(b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(c) Exprimer v_n en fonction de n.

(d) En déduire que $u_n = 19\,000 \times 1{,}04^n - 5\,000$.

Partie B

On suppose que u_n représente le salaire annuel d'une personne pour l'année $2013 + n$, n étant un entier naturel.

1 Calculer le salaire annuel, arrondi à l'euro, de la personne en 2021.

2 **(a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x : $1{,}04^x > \dfrac{33}{19}$.

Remarque : si le cours sur la résolution de telles équations n'a pas encore été vu, remplacer la question par : déterminer l'ensemble des entiers n tels que $1{,}04^n > \dfrac{33}{19}$.

(b) À partir de quelle année le salaire annuel de cette personne aura-t-il doublé par rapport à celui de 2013 ?

3 **(a)** Lorsque l'on entre $S = 21\,000$ dans l'algorithme page suivante, l'affichage en sortie est $n = 8$.
Expliquer ce que fait cet algorithme.

(b) Quelle valeur faut-il donner à S pour retrouver le résultat de la question 2 ?

```
Variables :
      n, S : entiers
      A : réel
Début
      Entrer la valeur de S
      n prend la valeur 0
      A prend la valeur 14000
      Tant que A⩽S
            n prend la valeur n+1
            A prend la valeur 1,04*A+200
      Fin tant que
      Afficher n
Fin
```

28 Problème ouvert

★★★ 50 min Corrigé p. 47

Lycée Jean Jaurès, Chatenay-Malabry

Le client d'une banque a le choix entre deux types de placement :

- Soit le placement U, à intérêts simples : chaque année, le client verse 6 000 € sur son compte d'épargne et reçoit en fin d'année des intérêts égaux à 5 % du montant de son compte au 31 décembre. Ces intérêts sont versés sur un autre compte et seront donnés au client lorsqu'il clôturera son compte d'épargne. On note u_n le montant disponible à la fin de l'année n sur le compte épargne et i_n le montant total des intérêts cumulés jusqu'à l'année n.
- Soit le placement V, à intérêts composés : chaque année, le client verse 6 000 € sur son compte d'épargne et reçoit en fin d'année des intérêts égaux à 4 % du montant de son compte au 31 décembre. Ces intérêts sont ajouté à son compte d'épargne et produiront des intérêts les années suivantes. On note v_n le montant disponible sur le compte d'épargne l'année n.

Son banquier lui dit que l'algorithme suivant peut l'aider à choisir le placement qui lui convient le mieux en fonction du nombre d'années pendant lesquelles il compte épargner.

```
N prend la valeur 0
V=0
Tant que (V+6000)×1,04-6000N⩽150N(N+1)
      N prend la valeur N+1
      V prend la valeur (V+6000)×1,04
Fin Tant que
Afficher N.
```

Cet algorithme affiche 18. Comment interpréter ce résultat ?

1 QCM Propriétés d'une suite géométrique

Enoncé p. 8

1 Réponse **b** : (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$.

2 Réponse **b** : (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$, donc, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{2^n} = 2^{1-n}.$$

3 Réponse **a** :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= 2 \times \frac{31}{32} \times \frac{2}{1} = \frac{31}{8}.$$

4 Réponse **b** : La suite géométrique (u_n) a pour raison $\frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5 Réponse **c** :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4$.

2 QCM Suites arithmétiques et géométriques

Enoncé p. 8

1 Réponse **c** : Pour tout entier naturel n, $2n^2 \geq 0$ donc $2n^2 + 2 \geq 2$. La suite u est donc minorée par 2.

Remarques

- u n'est pas arithmétique car u_n n'est pas de la forme $u_n = an + b$.
- u n'est pas géométrique car u_n n'est pas de la forme $u_n = a \times q^n$.
- u est croissante car, pour tout n, $u_n = f(n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2$, or la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc la suite u est croissante.

CORRIGÉS

2 Réponse **d** : Le placement étant un placement à intérêts composés au taux de 3 %, pour tout entier naturel n, les intérêts acquis l'année $n+1$ sont égaux à $I_{n+1} = C_n \times 0{,}03$ et donc le capital l'année $n+1$ est égal à $C_{n+1} = C_n + I_{n+1} = C_n \times (1 + 0{,}03) = 1{,}03C_n$.
La suite (C_n) est donc une suite géométrique de raison 1,03 ; comme son premier terme C_0 est égal à 5 000, alors, pour tout entier naturel n, $C_n = 5\,000 \times (1{,}03)^n$.
Alors, le capital dont Julie peut disposer en 2011 est égal à :
$5\,000 \times 1{,}03 = 5\,150$, les intérêts acquis durant l'année 2011 sont donc égaux à $5\,150 \times 0{,}03 = 154{,}50$ €.

ATTENTION

La question posée est : « quels sont les intérêts acquis durant l'année 2011 ? » et non « durant l'année 2010 ». Il faut donc calculer les intérêts sur le capital dont Julie dispose en 2011 pour déterminer ces intérêts.

Le 1er janvier 2016 ($n = 6$), Julie pourra disposer de :

$$5\,000 \times (1{,}03)^6 \approx 5\,970\,€.$$

Le 1er janvier 2021 ($n = 11$), Julie pourra disposer de :

$$5\,000 \times (1{,}03)^{11} \approx 6\,921\,€.$$

3 Réponse **a** : v_n est de la forme $a \times q^n$ avec $a = -2$ et $q = \dfrac{3}{2}$, donc la suite v est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$. Comme $1 < \dfrac{3}{2}$, cette suite diverge.
La suite de terme général $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ est une suite croissante, donc $-2 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ est le terme général d'une suite décroissante.
Cette suite n'est pas minorée car sa limite est $-\infty$ donc il y a toujours des termes plus petits que n'importe quel nombre choisi. Elle n'est pas non plus définie par récurrence puisqu'elle est définie de façon explicite en fonction de n.

Remarques

- Toute suite convergente est bornée.
- La suite v n'est pas définie par récurrence.

Une suite est définie par récurrence si le terme u_{n+1} de rang $n+1$ est donné en fonction du terme u_n de rang n.

4 Réponse **d** : Pour toute suite arithmétique de raison r, on a, pour tous entiers n et p, $u_n = u_p + (n-p) \times r$.
La suite u est la suite arithmétique de raison -3 telle que $u_1 = 77$, donc :

$$u_{50} = u_1 + (50-1) \times (-3) = 77 + 49 \times (-3) = -70.$$

ATTENTION

L'énoncé donne u_1 et non u_0.

3 QCM Bac La Réunion juin 2007

Enoncé p. 9

1 Réponse **a** : calculons $u_{n+1} - u_n$.
Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{6}{(n+1)-10{,}5}\right) - \left(1 - \frac{6}{n-10{,}5}\right),$$

soit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 6\left(\frac{-1}{n-9{,}5} + \frac{1}{n-10{,}5}\right) \\ &= \frac{6\,(-n+10{,}5+n-9{,}5)}{(n-9{,}5)(n-10{,}5)} \\ &= \frac{6}{(n-9{,}5)(n-10{,}5)}. \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n$ est donc du signe de $(n-9{,}5)(n-10{,}5)$.
Pour $n \leqslant 9$, $u_{n+1} - u_n > 0$; pour $n \geqslant 11$, $u_{n+1} - u_n > 0$, mais pour $n = 10$, $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) n'est donc pas monotone pour tout n.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 11.

Remarque : si vous cherchez avec votre calculatrice, les valeurs de u_9, u_{10} et u_{11}, vous trouvez $u_9 = 5$, $u_{10} = 13$, $u_{11} = -11$, ce qui confirme le fait que la suite (u_n) n'est pas monotone.

2 Réponse **c** : pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} - u_n = 0{,}1 \times u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}1 \times u_n + u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = 1{,}1 \times u_n$.

La suite (u_n) est donc la suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme $u_0 = 2$.

3 Réponse **b** : soit u_n le nombre de romans vendus la n-ième semaine.
D'après l'énoncé, le nombre de romans vendus la $(n+1)$-ième semaine est en augmentation de 2 % par rapport au nombre de romans vendus la n-ième semaine ce qui se traduit par : $u_{n+1} = u_n \times 1{,}02$. La suite (u_n)

ainsi définie est donc la suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme $u_1 = 10\,000$.

$$u_1 + \cdots + u_n = u_1 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right).$$

Le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 semaines écoulées depuis sa parution est :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{45} = 10\,000 \times \frac{1-(1{,}02)^{45}}{1-1{,}02} \text{ soit } S \approx 718\,927.$$

ATTENTION

Ici, le premier terme est u_1 : le nombre de termes est donc 45.

4 Réponse **a** : pour tout entier naturel n,

$$u_n = \mathrm{e}^{-n\ln 2} \Leftrightarrow u_n = (\mathrm{e}^{-ln2})^n \Leftrightarrow u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4 V/F Vrai ou faux

Enoncé p. 9

1 Vrai. En effet, $v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = 0{,}5u_n + 4 - 8 = 0{,}5(u_n - 8) = 0{,}5v_n$.

2 Faux. La raison de cette suite géométrique est 0,5, donc comprise entre 0 et 1, par conséquent (v_n) tend vers 0.

3 Vrai. $u_n = v_n + 8$; or, (v_n) tend vers 0, donc (u_n) tend vers 8.

4 Faux. On peut soit afficher les termes successifs de la suite à la calculatrice, soit, si le chapitre a été traité, utiliser la fonction logarithme népérien : $v_n = v_0\,0{,}5^n$ et $v_0 = u_0 - 8 = 1$, donc :

$$v_n < 10^{-4} \Leftrightarrow 0{,}5^n < 10^{-4} \Leftrightarrow n\ln(0{,}5) < \ln(10^{-4})$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0{,}5)}.$$

n doit être supérieur ou égal à 14.

ATTENTION

ln(0,5) est négatif, donc quand on divise par ln(0,5), on doit changer le sens de l'inégalité.

5 V/F Logique

Enoncé p. 10

Le terme général de cette suite est $u_n = 500 \times 0{,}5^n$.

1. Vrai : par exemple $u_3 = 500 \times 0{,}5^3 = 62{,}5$.
2. Faux puisque au moins $u_0 > 100$.
3. Faux car $500 \times 0{,}5^n$ ne s'annule jamais.
4. Vrai : la suite est strictement décroissante puisque sa raison est strictement inférieure à 1 et son premier terme positif.
   On constate que, par exemple, $u_7 \approx 3{,}9$ donc $u_7 < 5$, et pour tout $n \geqslant 7$, on a $u_n \leqslant u_7 < 5$.

MÉTHODE

Pour montrer :

- « il existe un nombre… », il suffit de trouver un exemple pour montrer que c'est vrai.
- « pour tout nombre… », il suffit de trouver un contre-exemple pour prouver que c'est faux.

6 QCM Interprétation de l'affichage

Enoncé p. 10

Réponse **d** .

Lors de l'initialisation, U et S prennent la valeur $u_0 = 1$.

Dans la boucle, U rend successivement les valeurs u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 qui sont ajoutées à S.

Donc en sortie de boucle, $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.

7 QCM Variations en pourcentage

Enoncé p. 10

1. Réponse **b** . Chaque mois le prix unitaire est diminué de 21 %, donc multiplié par 0,79. Au bout de n mois, il devient donc $10 \times 0{,}79^n$.
   La quantité vendue augmente de 26 %, donc devient $1\,000 \times 1{,}26^n$.
   Alors,
   $$V_n = 10 \times 0{,}79^n \times 1\,000 \times 1{,}26^n = 10^4 \times 0{,}995\,4^n \ .$$
   (V_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison strictement inférieure à 1, elle est donc décroissante.
   Sa limite est nulle, mais V_n n'est jamais nul.
   (V_n représentant une somme en euros, sera inférieur à 1 centime d'euro pour n de l'ordre de 3 000, soit après 250 ans, on ne peut donc pas invoquer un arrondi pour dire qu'à long terme la valeur s'annule.)

2 Réponse **b**.
La valeur de la moto au bout de n années est $10\,000 \times 0{,}9^n$.
Cette valeur n'est jamais nulle, même si elle est strictement décroissante et tend vers 0.
Pour $n = 5$, on trouve $10\,000 \times 0{,}9^5 \approx 5\,904{,}9$, c'est-à-dire 5 900 à 10 euros près.

8 Suite géométrique

Enoncé p. 11

Lycée Lamartine, Paris

1 $u_0 = 2$, $u_1 = 3 + 4 + 1 = 8$ et $u_2 = 9 + 8 + 1 = 18$.
Comme $\dfrac{8}{2} \neq \dfrac{18}{8}$, cette suite ne peut pas être géométrique.

2 $u_0 = \dfrac{1}{3}$, $u_1 = \dfrac{2}{9}$ et $u_3 = \dfrac{4}{27}$.
On constate que $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{1} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4}{27} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{2}{3}$.
Cette suite pourrait donc être géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
Pour le prouver, en remarquant qu'aucun terme de la suite n'est nul, on fait le quotient de deux termes consécutifs pour n quelconque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}.$$

Ceci prouve que la suite est bien géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

9 Critère de choix

Enoncé p. 11

Lycée La Bruyère, Versailles

1 $u_1 - u_0 = 6$ et $u_2 - u_1 = 24$. Comme la différence de deux termes consécutifs n'est pas constante, on peut être sûr que la suite n'est pas arithmétique.

2 $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{8}{2} = 4$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{32}{8} = 4$. Comme ces deux quotients sont égaux, la suite pourrait être géométrique, mais on n'en est pas sûr car on ne connaît rien sur les autres termes.

MÉTHODE

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique (ou géométrique), il suffit de trouver trois termes consécutifs a, b et c tels que $b - a \neq c - b$ (ou $\dfrac{b}{a} \neq \dfrac{c}{b}$). Il suffit donc de trouver un contre exemple.
Par contre, pour montrer qu'une suite est arithmétique (ou géométrique), il faut démontrer que la différence (ou le quotient) de deux termes consécutifs quelconques est constante (constant).

10 Suites et puissances

Enoncé p. 11

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 $u_1 = u_0 + 2 = 6$, $u_2 = u_1 + 2 = 8$ et $u_3 = u_2 + 2 = 10$.

Remarque : la forme générale de u_n est $u_n = 4 + 2n$, ce qui sera utile pour la suite.

2 **(a)** $v_0 = 2^{u_0} = 2^4 = 16$; $v_1 = 2^{u_1} = 2^6 = 64$; $v_2 = 2^{u_2} = 2^8 = 256$.

(b) Pour tout entier naturel n, v_n est non nul et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{u_{n+1}}}{2^{u_n}} = \frac{2^{4+2(n+1)}}{2^{4+2n}} = 2^2 = 4.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4.

11 Modifier un algorithme

Enoncé p. 12

Lycée Victor Duruy, Paris

Initialisation		N	S
A = 4		0	1
Boucle « Tant que »	Test $S <$ A		
	1 < 4 : vrai	1	$1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$
	$\frac{7}{3} < 4$: vrai	2	$\frac{7}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{37}{9}$
	$\frac{37}{9} < 4$: faux		Fin de boucle

L'algorithme affiche N, la plus petite valeur de n telle que $S > 4$. On a ici $S = \frac{37}{9}$ pour $n = 2$.

Si A = 10, il faut modifier le test en comparant S à 10. Les premiers calculs sont identiques au cas précédent, puis :

Test $S <$ A	N	S
$\frac{37}{9} < 10$: vrai	3	$\frac{37}{9} + \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{175}{27}$
$\frac{175}{27} < 10$: vrai	4	$\frac{175}{27} + \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{781}{81}$
$\frac{781}{81} < 10$: vrai	5	$\frac{781}{81} + \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{3\,367}{243}$
$\frac{3\,367}{243} < 10$: faux		Fin de boucle

L'affichage est donc N = 5.

CORRIGÉS

12 Suite logarithmique

Enoncé p. 12

Lycée Chaptal, Paris

1 • $\ln u_1 = 1 + \ln 2 = \ln \mathrm{e} + \ln 2 = \ln 2\mathrm{e}$.
Par stricte monotonie de ln : $u_1 = 2\mathrm{e}$.

• $\ln u_2 = 1 + \ln u_1 = \ln \mathrm{e} + \ln 2\mathrm{e} = \ln(\mathrm{e} \times 2\mathrm{e}) = \ln\left(2\mathrm{e}^2\right)$.
D'où : $u_2 = 2\mathrm{e}^2$.

• $\ln u_3 = 1 + \ln u_2 = \ln \mathrm{e} + \ln 2\mathrm{e}^2 = \ln\left(\mathrm{e} \times 2\mathrm{e}^2\right) = \ln\left(2\mathrm{e}^3\right)$.
D'où : $u_3 = 2\mathrm{e}^3$.

2 De façon générale :

$$\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n) = \ln \mathrm{e} + \ln(u_n) = \ln(\mathrm{e} \times u_n)$$
$$\iff u_{n+1} = \mathrm{e} \times u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}.$$

Cette relation de récurrence définit (u_n) comme une suite géométrique. (u_n) est donc la suite géométrique de premier terme 2 et de raison e :

$$u_n = 2\mathrm{e}^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3 Comme la raison est supérieure à 1 ($\mathrm{e} > 1$) et que les termes sont positifs :

$$u_n < \mathrm{e} \times u_n \Longrightarrow u_n < u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante et divergente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

4 On cherche n tel que $u_n > 10^{10}$, c'est-à-dire : $2\mathrm{e}^n > 10^{10}$.
Sachant que ln est strictement croissante :

$$2\mathrm{e}^n > 10^{10} \iff \ln(2\mathrm{e}^n) > \ln\left(10^{10}\right) \iff \ln 2 + n\underbrace{\ln \mathrm{e}}_{1} > 10 \ln 10$$
$$\iff n > 10 \ln 10 - \ln 2 \iff n > 22{,}3 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

Le plus petit entier naturel qui satisfait la dernière condition est $n_0 = 23$.

13 Comparaison de deux placements

Enoncé p. 13

Lycée Gabriel Fauré, Paris

1 Au 1er janvier de l'année 2005, Marcel dispose de son capital de départ, soit 10 000 euros, augmentés des intérêts sur un an, soit 3 % de 10 000 euros :

$$u_1 = 10\,000 + 10\,000 \times \frac{3}{100} = 10\,000 + 300 = 10\,300 €.$$

De même, Édith dispose alors de :

$$v_1 = 9\,000 + 9\,000 \times \frac{4}{100} = 9\,000 + 360 = 9\,360 €.$$

2 Au début de l'année $2004+n+1$, Marcel dispose du capital u_n de l'année $2004+n$ augmenté des intérêts (3 % de u_n), soit :

$$\begin{cases} u_0 & = 10\,000 \\ u_{n+1} & = u_n + 0{,}03\,u_n = 1{,}03\,u_n. \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $u_0 = 10\,000$.

De même pour Édith :

$$\begin{cases} v_0 & = 9\,000 \\ v_{n+1} & = v_n + 0{,}04\,v_n = 1{,}04\,v_n. \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $v_0 = 9\,000$.

3 Les expressions des termes en fonction de n sont :

$$u_n = u_0 \times (1{,}03)^n \qquad v_n = v_0 \times (1{,}04)^n.$$

4 Il s'agit de trouver le plus petit entier n tel que $u_n < v_n$. On résout cette inéquation d'inconnue n en utilisant la croissance de la fonction logarithme :

$$\begin{aligned} u_n < v_n &\iff 10\,000 \times (1{,}03)^n < 9000 \times (1{,}04)^n \\ &\iff \left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right)^n > \frac{10\,000}{9000} \\ &\iff \ln\left[\left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right)^n\right] > \ln\frac{10}{9} \\ &\iff n \times \underbrace{\ln\left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right)}_{a>0} > \ln\left(\frac{10}{9}\right) \\ &\iff n > \underbrace{\ln\left(\frac{10}{9}\right) \times \left(\ln\frac{1{,}04}{1{,}03}\right)^{-1}}_{\approx 10{,}9}. \end{aligned}$$

Les solutions entières de cette inéquation vérifient donc $n \geq 11$. C'est donc au bout de 11 années de placement qu'Édith disposera d'un capital plus important que Marcel. Elle a placé moins d'argent, mais l'a mieux placé !

Si le chapitre logarithme n'a pas été traité, on peut aussi utiliser les tables de la calculatrice pour déterminer l'année où le capital d'Édith dépasse celui de Marcel. Ensuite, on est sûr qu'il restera supérieur puisque ses intérêts sont supérieurs.

CORRIGÉS

14 Trouver la raison

Enoncé p. 13

Lycée La Bruyère, Versailles

1 Si la suite est décroissante, alors $u_6 < u_5$, mais aussi $u_7 < u_6$ donc $10q^2 < 10q$, c'est-à-dire $q^2 < q$, soit $q(q-1) < 0$. Cela montre que $0 < q < 1$.

Cette condition est suffisante car si $u_5 = 10$, alors :

$$u_n = 10 \times q^{n-5} = \frac{10}{q^5} \times q^n .$$

La suite (q^n) est décroissante car $0 < q < 1$ et on obtient u_n en multipliant q^n par un nombre positif, donc la suite (u_n) est bien aussi décroissante.

Dans ce cas, la condition $0 < q < 1$ est nécessaire et suffisante.

2 Ici aussi la suite est décroissante donc $u_6 < u_5$, c'est-à-dire $-10q < -10$, ce qui donne $q > 1$.

On a alors $u_n = \dfrac{-10}{q^5} \times q^n$. Comme $q > 1$, la suite (u_n) est croissante, et multipliée par un nombre négatif, elle donne bien une suite décroissante. Cela montre que la condition $q > 1$ est nécessaire est suffisante.

15 Retrouver la suite

Enoncé p. 13

Lycée Victor Duruy, Paris

1 Comme la suite est géométrique, en notant q la raison, on a $b = aq$ et $c = aq^2$, donc :

$$b^2 = (aq)^2 = a \times aq^2 = ac.$$

2 Si q était négatif, les termes de la suite seraient alternativement positifs et négatifs. Dans ce cas, la suite ne peut pas être croissante. De plus, $q \neq 0$ sinon la suite serait constante à partir du rang 1. Par conséquent, $q > 0$.

3 Si q est la raison, alors $b = aq$ et $c = aq^2$.

En remplaçant la seconde équation de S par la somme des deux équations de départ, on a :

$$\begin{cases} a + b + c = 19 \\ 3a + 2b = 24 \end{cases}$$

Puis, en exprimant b et c en fonction de a :

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 19 \\ 3a + 2aq = 24 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$(\mathrm{S}') \quad \begin{cases} a(1 + q + q^2) = 19 \\ a(3 + 2q) = 24 \end{cases}$$

4 De ces deux équations, on déduit, par produit en croix :

$$24a(1+q+q^2) = 19a(3+2q)\ ,$$

et comme $a \neq 0$ (sinon la suite serait constante), on obtient :

$$24q^2 - 14q - 33 = 0\ .$$

Les deux solutions de cette équation sont : $\dfrac{14+58}{48}$ et $\dfrac{14-58}{48}$.

Comme $q > 0$, on en déduit que $q = \dfrac{3}{2}$.

Alors, d'après la seconde équation de S' : $a\left(3+2\times\dfrac{3}{2}\right) = 24$.

On trouve $a = 4$, puis $b = 4\times\dfrac{3}{2} = 6$ et $c = 6\times\dfrac{3}{2} = 9$.

16 Suite décrite par un algorithme

Enoncé p. 14

Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

1 L'algorithme affiche le terme u_3 de la suite géométrique de terme $u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{4}{3}$.

L'affichage sera donc : $2\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{128}{27}$.

2 Le 5e terme de la suite est le terme de rang 4 donc on modifie l'algorithme de la façon suivante :

```
U prend la valeur 100
Pour i variant de 1 à 4
    U prend la valeur 1,2U
Fin Pour
Afficher U
```

3 **(a)** $u_{n+1} = 1{,}2u_n$ et $u_n = 100\times 1{,}2^n$.

(b) Comme $1{,}2 > 1$, on sait que $1{,}2^n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. En multipliant par 100, qui est un nombre positif, on trouve que la limite de (u_n) est aussi $+\infty$.

(c)
$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + \cdots + u_5 \\ &= 100 + 100\times 1{,}2 + 100\times 1{,}2^2 + \cdots + 100\times 1{,}2^5 \\ &= 100\left(1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + 1{,}2^3 + 1{,}2^4 + 1{,}2^5\right) \\ &= 100\times\frac{1-1{,}2^6}{1-1{,}2} \\ &= 500\times\left(1{,}2^6 - 1\right) \\ &= 992{,}992. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

17 Recherche de taux

Enoncé p. 14

Lycée Jacques Monod, Clamart

1 **(a)** Après un an de placement, le capital disponible C_1 est la somme du capital initial C_0, et des d'intérêts, $0{,}03 \times C_0$. Donc

$$C_1 = 1{,}03 \times C_0 = 5\,150 \text{ (en euros).}$$

De même :

$$C_2 = C_1 + 0{,}03 \times C_1 = 1{,}03 \times C_1 = 5\,304{,}5 \text{ (en euros).}$$

(b) De façon générale, le capital disponible après n années de placement C_{n+1} est égal au capital disponible l'année précédente, C_n, augmenté des 3 % d'intérêts, $0{,}03 \times C_n$. D'où la relation de récurrence :

$$C_{n+1} = 1{,}03 \times C_n,$$

pour tout entier naturel n, qui prouve que (C_n) est la suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $C_0 = 5\,000$. Le terme général C_n s'exprime donc en fonction de n par :

$$C_n = 5\,000 \times 1{,}03^n.$$

2 **(a)** Le capital disponible au 1er janvier 2010 correspond à C_8. On le calcule à l'aide de la formule précédente. On constate qu'il est inférieur à la somme désirée.

$$C_8 = 5\,000 \times 1{,}03^8 \approx 6\,334 \text{ (euros).}$$

(b) Supposons que René place 5 000 euros le 1er janvier 2002 un placement au taux de t % (où t est un réel strictement positif). La nouvelle suite (C'_n) des capitaux est définie par la relation de récurrence :

$$C'_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right) C'_n.$$

Cette suite est donc géométrique de raison $1 + \dfrac{t}{100}$ et l'on a :

$$C'_n = 5\,000\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On recherche le plus petit taux $t > 0$ tel que $C'_8 \geqslant 7\,000$:

$$\begin{aligned}
5\,000\left(1+\frac{t}{100}\right)^8 \geqslant 7\,000 &\iff \left(1+\frac{t}{100}\right)^8 \geqslant \frac{7}{5}\\
&\iff \ln\left(\left(1+\frac{t}{100}\right)^8\right) \geqslant \ln\left(\frac{7}{5}\right)\\
&\iff 8\ln\left(1+\frac{t}{100}\right) \geqslant \ln 7 - \ln 5\\
&\iff \ln\left(1+\frac{t}{100}\right) \geqslant \frac{\ln 7 - \ln 5}{8}\\
&\iff 1+\frac{t}{100} \geqslant \exp\left(\frac{\ln 7 - \ln 5}{8}\right)\\
&\iff t \geqslant 4{,}3 \quad \text{(à 0,1 près).}
\end{aligned}$$

René aurait donc dû placer son capital au taux d'au moins 4,3 %.

Comme dans l'exercice précédent, si le chapitre sur les logarithmes n'a pas été traité, on peut programmer la fonction $5\,000\left(1+\frac{t}{100}\right)^8$ et faire afficher une table de valeurs avec la précision souhaitée pour obtenir le taux minimal nécessaire.

18 Exponentielle d'une suite arithmétique

Enoncé p. 15

Lycée Victor Duruy, Paris

1 **(a)** $u_1 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 = 1 - 1 = 0$.

(b) $u_n = u_0 + nr = 2 - n$ donc $u_{15} = 2 - 15 = -13$.

(c)
- Pour N=1, A=1 et S=3.
- Pour N=2, A=0 et S=3.
- Pour N=3, A=−1 et S=2.

Si N=0, A et S prennent la valeur 2 et gardent cette valeur : on n'entre pas dans la boucle car i ne peut pas prendre de valeur entre 1 et 0.

A est la valeur du terme de rang N de la suite arithmétique.
S est la somme des termes de rangs 0 à N de cette suite.

(d)
$$\begin{aligned}
S &= (u_0 - 0) + (u_0 - 1) + (u_0 - 2) + \cdots + (u_0 - n)\\
&= (n+1)u_0 - (0 + 1 + 2 + \cdots + n)\\
&= (n+1)u_0 - \frac{n(n+1)}{2}\\
&= (n+1)\left(2 - \frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{(n+1)(4-n)}{2}
\end{aligned}$$

2 **(a)** $v_0 = e^{u_0} = e^2$, $v_1 = e^{u_1} = e^1 = e$ et $v_2 = e^{u_2} = e^0 = 1$.

(b) Pour tout n, v_n est non nul donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Le quotient de deux termes consécutifs est constant, la suite (v_n) est donc géométrique, de raison $\frac{1}{e}$.

(c) $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{e^2}{e^n} = e^{2-n}$.

(d)
$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n \\ &= e^{u_0} \times e^{u_1} \times \cdots \times e^{u_n} \\ &= e^{u_0+u_1+\cdots+u_n} \\ &= e^{S_n} \\ &= e^{\frac{(n+1)(4-n)}{2}}. \end{aligned}$$

19 Suites extraites

Enoncé p. 16

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

1 D'une année à l'autre le prix augmente de 3%, c'est-à-dire est multiplié par 1,03 ; la suite des prix est en progression géométrique de raison 1,03.

$$P_{n+1} = P_n + 0{,}03 \times P_n = 1{,}03 \times P_n \quad \text{donc} \quad P_n = 1{,}03^n \times P_0$$

On cherche n tel que $P_n \geq 2P_0$, c'est-à-dire : $1{,}03^n P_0 \geq 2P_0$. On simplifie d'abord cette inéquation par P_0 (sans en changer le sens puisque P_0 est strictement positif). On résout en utilisant la stricte croissance de la fonction logarithme :

$$\begin{aligned} 1{,}03^n \geq 2 &\iff \ln(1{,}03^n) \geq \ln 2 \\ &\iff n \underbrace{\ln 1{,}03}_{>0} \geq \ln 2 \\ &\iff n \geq \underbrace{\frac{\ln 2}{\ln 1{,}03}}_{\approx 23{,}45} \end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel n_0 qui satisfasse cette condition est donc : $n_0 = 24$. Le prix double au bout de 24 ans. D'après la résolution précédente, la solution est indépendante de P_0.

2 Les prix ne suivent plus une progression géométrique puisque les taux changent d'une année à l'autre.

(a) On sait que $P_1 = 1{,}03P_0$ et $P_2 = 0{,}97P_1$. En substituant P_1 dans la deuxième égalité :

$$P_2 = 1{,}03 \times 0{,}97 \times P_0 = 0{,}9991P_0$$

(b) Pour un couple d'année $(2n+1, 2n+2)$:

$$\begin{cases} P_{2n+1} = 1{,}03 P_{2n} \\ P_{2n+2} = 0{,}97 P_{2n+1} \end{cases} \quad \text{donc} \quad P_{2n+2} = 0{,}9991 P_{2n}$$

On en déduit la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = 0{,}9991 u_n \quad \text{avec } u_n = P_{2n}$$

La suite (u_n), égale à la suite (P_{2n}), est donc géométrique de raison 0,9991 et de premier terme P_0.

(c) $P_{2n} = 0{,}9991^n P_0$ et $P_{2n+1} = 1{,}03 P_{2n} = 0{,}9991^n \times 1{,}03 P_0$.

(d) En généralisant avec un taux d'inflation de i% suivi d'une désinflation de $-i$% :

$$\begin{cases} P_{2n+1} = \dfrac{100+i}{100} P_{2n} \\ P_{2n+2} = \dfrac{100-i}{100} P_{2n+1} \end{cases} \quad \text{donc} \quad P_{2n+2} = \left(1 - \left(\frac{i}{100}\right)^2\right) P_{2n}$$

On obtient comme relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q u_n \quad \text{avec } u_n = P_{2n} \quad q = \left(1 - \left(\frac{i}{100}\right)^2\right)$$

La suite des prix (P_{2n}) est géométrique de raison q et de premier terme P_0. Par suite :

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \left(1 - \left(\frac{i}{100}\right)^2\right)^n P_0 \\ P_{2n+1} &= \left(1 + \frac{i}{100}\right) P_{2n} \\ &= \left(1 + \frac{i}{100}\right)\left(1 - \left(\frac{i}{100}\right)^2\right)^n P_0 \\ &= \left(1 - \left(\frac{i}{100}\right)^2\right)^n P_1 \end{aligned}$$

(e) La raison q est positive et strictement plus petite que 1, donc la suite (q^n) décroît et les deux suites de prix (P_{2n}) et (P_{2n+1}) aussi.

CORRIGÉS

20 Étude d'un algorithme

Enoncé p. 16

Lycée Victor Duruy, Paris

		I	P
Initialisation			
	N=4	0	63,2
Entrée dans la boucle	Test I<N		
1	$0 < 4$ Vrai	1	$1{,}002 \times 63{,}2 + 0{,}1 \approx 63{,}426$
2	$1 < 4$ Vrai	2	$1{,}002 \times P + 0{,}1 \approx 63{,}653$
3	$2 < 4$ Vrai	3	$1{,}002 \times P + 0{,}1 \approx 63{,}881$
4	$3 < 4$ Vrai	4	$1{,}002 \times P + 0{,}1 \approx 64{,}108$
5	$4 < 4$ Faux	Sortie de la boucle	Affichage du résultat 64,108

La valeur affichée est donc, arrondie au millième, 64,108.

Remarque : c'est le 4e terme de la suite arithmético-géométrique :

$$P_{n+1} = 1{,}002\,P_n + 0{,}1\,, \qquad \text{avec } P_0 = 63{,}2.$$

Attention à l'utilisation de la calculatrice : si à chaque étape, on utilise la valeur arrondie de P_n, on accumule les erreurs d'arrondi. Il est donc préférable de reprendre la valeur exacte trouvée par la calculatrice (touche ANS en général).

21 Suite arithmético-géométrique

Enoncé p. 17

Lycée Henri IV, Paris

1 Il y a 80 % de réabonnements par an soit, $\dfrac{80}{100}\,a_n = 0{,}8\,a_n$. Il y a en outre 5 000 nouveaux adhérents par an. Soit en tout,

$$a_{n+1} = \underbrace{\text{anciens lecteurs qui se réabonnent}}_{=0{,}8\,a_n} + \underbrace{\text{nouveaux abonnés}}_{=5000}$$
$$= 0{,}8\,a_n + 5\,000.$$

2 **(a)** On sait que : $u_n = 25\,000 - a_n \iff a_n = 25\,000 - u_n$.
On cherche à écrire une relation entre u_{n+1} et u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 25\,000 - a_{n+1} = 25\,000 - (0{,}8\,a_n + 5000) \\ &= 25\,000 - 0{,}8\,a_n - 5000 = 20\,000 - 0{,}8(25\,000 - u_n) \\ &= \underbrace{20\,000 - 0{,}8 \times 25\,000}_{=0} + 0{,}8\,u_n \\ &= 0{,}8\,u_n. \end{aligned}$$

(u_n) est donc la suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme :

$$u_0 = 25\,000 - a_0 = 25\,000 - 10\,000 = 15\,000.$$

(b) Le terme général u_n s'exprime en fonction de n par :

$$u_n = u_0 \times 0{,}8^n = 15\,000 \times 0{,}8^n.$$

On en déduit l'expression de a_n en fonction de n :

$$a_n = 25\,000 - u_n = 25\,000 - 15\,000 \times 0{,}8^n.$$

(c) La raison q de la suite géométrique (u_n) vérifie $0 < q < 1$, donc (u_n) converge vers zéro :

$$\lim_{n\to\infty} 0{,}8^n = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(25\,000 - 15\,000 \times 0{,}8^n\right)$$

$$= 25\,000 - 0 = 25\,000.$$

3 **(a)**

$$25\,000 - 15\,000 \times 0{,}8^x > 22\,000$$

$$\iff 0{,}8^x < \frac{25\,000 - 22\,000}{15\,000}$$

$$\iff 0{,}8^x < \frac{1}{5}$$

$$\iff \ln\left(0{,}8^x\right) < \ln\frac{1}{5} \qquad \text{(la fonction logarithme est croissante)}$$

$$\iff x\ln(0{,}8) < \ln\left(\frac{1}{5}\right) \qquad \text{(attention en divisant : } \ln(0{,}8) < 0\text{)}$$

$$\iff x > \frac{\ln\frac{1}{5}}{\ln(0{,}8)}.$$

Les solutions sont donc tous les entiers strictement supérieurs à 7.

(b) Le nombre n d'années recherché doit être solution de l'inéquation précédente : $n > 7{,}21$. Or le plus petit entier satisfaisant cette condition est : $n = 8$. On en conclut que 8 années sont nécessaires pour que le nombre d'abonnés dépasse 22 000. On peut aussi tabuler la suite sur la calculatrice, ce qui donne le même résultat.

CORRIGÉS

22 Représentation graphique

Enoncé p. 17

Lycée Joliot-Curie, Nanterre

1 Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique (resp. arithmétique) il suffit de montrer que *deux rapports particuliers* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (resp. deux différences $u_{n+1}-u_n$) ne sont pas égaux.

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{2}u_0+1=1 \\ u_2 &= \frac{1}{2}u_1+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2} \\ u_3 &= \frac{1}{2}u_2+1=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u_2}{u_1}=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{u_3}{u_2}=\frac{7}{6} \\ u_2-u_1=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_3-u_2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

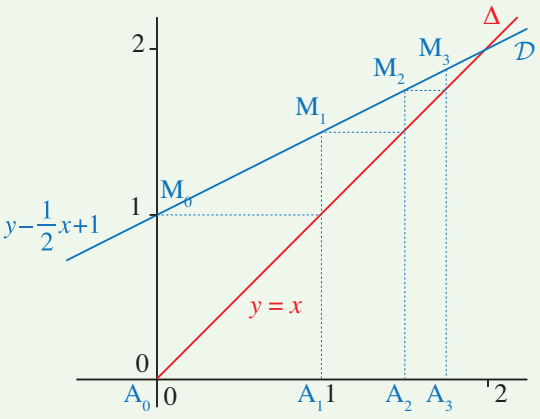
$$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2} \quad \text{et} \quad u_2-u_1 \neq u_3-u_2.$$

Donc la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2 La figure suivante montre la construction des droites $\mathcal{D}$ et Δ. Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ s'obtiennent en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} y &= x \\ x &= \frac{1}{2}x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= x \\ \frac{1}{2}x &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= 2 \\ x &= 2 \end{cases}$$

I a donc pour coordonnées le couple $(2\ ;\ 2)$.



3 **(a)** Voir la figure précédente.

(b) On conjecture grâce à la figure que la limite de la suite (u_n) vaut 2.

4 **(a)** On sait que :

$$\begin{cases} v_n &= u_n-2, \text{ et donc : } u_n=v_n+2. \\ v_0 &= u_0-2=-2. \end{cases}$$

On cherche une relation de récurrence pour v_{n+1} (v_{n+1} en fonction de v_n) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{2}(v_n + 2) - 1 \\ &= \frac{1}{2}v_n + 1 - 1. \end{aligned}$$

D'où : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

(b) (v_n) est donc la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -2. On a $v_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5 $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n + 2) = \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Finalement, la suite (v_n) converge vers 0 et la suite (u_n) converge donc vers 2.

23 Double récurrence

Enoncé p. 18

Lycée Henri IV, Paris

1 **(a)** Avec $a = 2$, on a donc : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n :

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = (2u_{n+1} - u_n) - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = v_n$.

De $v_{n+1} = v_n$ pour tout entier n, on déduit :

$$v_{n+1} = v_n = v_{n-1} = v_{n-2} \ldots = v_1 = v_0.$$

La suite (v_n) est constante et tous ses termes sont égaux à v_0 c'est-à-dire à 2.

(b) D'après la question précédente, on a :

$$v_n = 2 = u_{n+1} - u_n \quad \text{donc} \quad u_{n+1} = u_n + 2.$$

Ceci prouve que (u_n) est la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1, donc : $u_n = 1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après les formules de somme :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r + \cdots + u_0 + nr \\ &= (n+1)u_0 + r(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = (n+1) + n(n+1) = (n+1)^2. \end{aligned}$$

(c) (u_n) est la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1, c'est-à-dire la suite des nombres impairs : 1,3,5,7,9, etc.

Pour $n = 49$, $u_{49} = 1 + 2 \times 49 = 99 < 100$. Les entiers impairs inférieurs à 100 correspondent donc aux termes de la suite de u_0 à u_{49}.

$$1 + 3 + \cdots + 99 = S_{49} = 50^2 = 2500.$$

2 **(a)** Avec $a = -4$ on obtient : $u_{n+2} = 8u_{n+1} - 7u_n$.

Comme dans la question précédente, on cherche à déterminer une relation de récurrence pour (v_n) (écrire v_{n+1} en fonction de v_n) :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 8u_{n+1} - 7u_n - u_{n+1} = 7u_{n+1} - 7u_n = 7v_n.$$

Ainsi, (v_n) est la suite géométrique de raison 7 et de premier terme $v_0 = 2$. Son terme de rang n s'exprime en fonction de n par $v_n = 2 \times 7^n$.

(b)
$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + v_1 + \ldots + v_n \\ &= 2 + 2 \times 7^1 + 2 \times 7^2 + \cdots + 2 \times 7^n \\ &= 2 \times \left(1 + 7^1 + 7^2 + \cdots + 7^n\right) \\ &= 2 \times \frac{1 - 7^{n+1}}{1 - 7} \\ &= 2 \times \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} \\ &= \frac{7^{n+1} - 1}{3}. \end{aligned}$$

(c) En écrivant différemment la somme T_n, on obtient :

$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n \\ &= u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \ldots + u_{n+1} - u_n. \end{aligned}$$

Tous les termes sauf u_{n+1} et $-u_0$ se compensent ($u_1 - u_1$ par exemple). Il ne reste donc finalement que :

$$T_n = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - 1.$$

D'après la question précédente :

$$T_n = u_{n+1} - 1 = \frac{7^{n+1} - 1}{3}$$
$$\Rightarrow u_n - 1 = \frac{7^n - 1}{3} \Rightarrow u_n = \frac{7^n + 2}{3}.$$

Or la suite géométrique (7^n) diverge vers $+\infty$ (car $7 > 1$), donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7^n+2}{3} = +\infty$ c'est-à-dire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

24 Étude simultanée de suites

Enoncé p. 18

Lycée Louis Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1 Le nombre de cellules de type A le $(n+1)^{\text{e}}$ jour est : 75 % des cellules A du jour précédent (car 25 % de cellules A ont muté vers B) auquel s'ajoutent les 25 % de cellules B qui ont muté vers A. On obtient :

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n. \qquad (1)$$

Le raisonnement est similaire pour les cellules B :

$$b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n. \qquad (2)$$

2 Sachant que $a_n + b_n = 300$, on a $b_n = 300 - a_n$. En substituant dans l'équation 1, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}(300 - a_n) \\ &= \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}\times 300 \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{300}{4} \\ &= 0{,}5 \times a_n + 75. \end{aligned}$$

3 **(a)** On cherche une relation de récurrence pour (c_n), sachant que $c_n = 150 - a_n$ et donc $a_n = 150 - c_n$:

$$\begin{aligned} c_{n+1} = 150 - a_{n+1} &= 150 - (0{,}5 \times a_n + 75) \\ &= 75 - 0{,}5 \times a_n = 75 - 0{,}5(150 - c_n) \\ &= 75 - 75 + 0{,}5 \times c_n \\ &= 0{,}5 \times c_n. \end{aligned}$$

On reconnaît la relation de récurrence d'une suite géométrique de raison 0,5.

(b) On a $c_0 = 150 - a_0 = 50$, donc $c_n = c_0 \times 0{,}5^n = 50 \times 0{,}5^n$.
Comme $a_n = 150 - c_n$, on en déduit que $a_n = 150 - 50 \times 0{,}5^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

4 Puisque $0 < 0{,}5 < 1 : 0{,}5^n > 0{,}5^{n+1}$. Or,

$$\begin{aligned} 0{,}5^n > 0{,}5^{n+1} &\iff -50 \times 0{,}5^n < -50 \times 0{,}5^{n+1} \\ &\iff 150 - 50 \times 0{,}5^n < 150 - 50 \times 0{,}5^{n+1} \\ &\iff a_n < a_{n+1}. \end{aligned}$$

La suite (a_n) est donc croissante.
Un raisonnement analogue montre que la suite (b_n) est décroissante.

5 On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ (car $0 < 0{,}5 < 1$). On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} (150 - 50 \times 0{,}5^n) = 150\,,$$

et de même :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(150 + 50 \times 0{,}5^n\right) = 150.$$

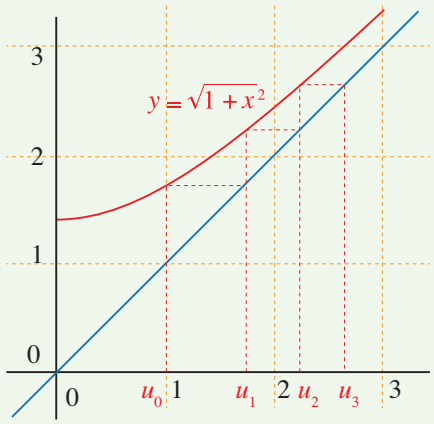
À long terme il y aura 50 % de cellules A et 50 % de cellules B.

25 Représentation graphique

Enoncé p. 19

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

1 Le graphique complété est le suivant :



2 $v_{n+1} = \left(u_{n+1}\right)^2 = 2 + \left(u_n\right)^2 = 2 + v_n$.
La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 2$.

3 $v_0 = \left(u_0\right)^2 = 1$ et $v_n = v_0 + nr = 1 + 2n$.
Comme $v_n = \left(u_n\right)^2$, cela donne $u_n = \sqrt{v_n}$ (en effet, $u_n \geqslant 0$ puisque les termes sont définis par une racine carrée dans la relation de récurrence, et $u_0 > 0$).
Par conséquent, $u_n = \sqrt{1 + 2n}$ pour tout entier naturel n.

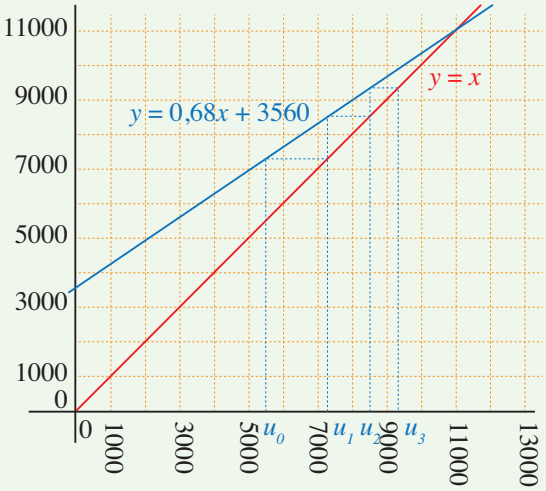
26 Graphique et limite

Enoncé p. 20

Lycée Massena, Nice

Partie A

1 On a le graphique suivant :



2 La suite (u_n) semble croissante.
En fonction du soin apporté au dessin, on peut conjecturer que la suite converge vers 11 000 ou vers une valeur légèrement supérieure, de l'ordre de 11 100.

Partie B

1 Dans cet algorithme, A représente le terme de rang k de la suite.
L'algorithme calcule les termes successifs de la suite, jusqu'au premier rang k tel que $u_k >\geqslant 11\,000$. Il affiche donc le plus petit rang k tel que $u_k \geqslant 11\,000$ à condition qu'il existe.
Si il n'existe pas, on ne peut pas sortir de la boucle.

2 **(a)** Si $v_n = u_n - 11\,125$, alors $u_n = v_n + 11\,125$.
Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 11\,125 \\ &= 0{,}68u_n + 3\,560 - 11\,125 \\ &= 0{,}68(v_n + 11\,125) - 7\,565 \\ &= 0{,}68v_n\ . \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,68 et de premier terme $v_0 = u_n - 11\,125 = -5\,625$.

(b) $v_n = -5\,625 \times 0{,}68^n$ et alors $u_n = 11\,125 - 5\,625 \times 0{,}68^n$, pour tout entier naturel n.

(c) Comme $0 < 0{,}68 < 1$, la limite en $+\infty$ de $0{,}68^n$ est 0. Alors, la limite de la suite (u_n) est 11 125.
La conjecture de la partie A est compatible avec ce résultat, car à l'échelle du dessin, il n'est pas raisonnable de penser lire exactement 11 125.

27 Évolution d'un salaire

Enoncé p. 21

Lycée Dumont d'Urville, Toulon

Partie A

1 $u_1 = 14\,760$ et $u_2 = 15\,550{,}4$.

2 **(a)** $v_0 = u_0 + 5\,000 = 19\,000$.

(b) Comme $v_n = u_n + 5\,000$, alors $u_n = v_n - 5\,000$. Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 5\,000 \\ &= 1{,}04u_n + 200 + 5\,000 \\ &= 1{,}04u_n + 5\,200 \\ &= 1{,}04\left(u_n + 5\,000\right) \\ &= 1{,}04v_n\ . \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 19\,000$ et de raison 1,04.

(c) $v_n = 19\,000 \times 1{,}04^n$.

(d) $u_n = v_n - 5\,000 = 19\,000 \times 1{,}04^n - 5\,000$.

Partie B

1 $2\,021 = 2\,013 + 8$; il faut donc calculer :

$$u_8 = 19\,000 \times 1{,}04^8 - 5\,000 \approx 21\,003.$$

2 **(a)** $1{,}04^x > \dfrac{33}{19}$ donne, en prenant le logarithme des deux membres, et en utilisant la croissance de la fonction ln : $x \ln 1{,}04 > \ln \dfrac{33}{19}$, et comme $\ln 1{,}04 > 0$, on a : $x > \dfrac{\ln \frac{33}{19}}{\ln 1{,}04}$.

En posant $a = \dfrac{\ln \frac{33}{19}}{\ln 1{,}04}$, l'ensemble des solutions est $[a\ ;\ +\infty[$, avec $a \approx 14{,}07$.

Si on n'utilise pas le logarithme, on peut rechercher les solutions entières de cette inéquation. La suite de terme général $1{,}04^n$ est une suite géométrique strictement croissante car $1{,}04 > 1$. Il suffit donc de trouver le premier entier n tel que $1{,}04^n > \dfrac{33}{19}$.

À la calculatrice, on trouve $1{,}04^{14} < \dfrac{33}{19}$ et $1{,}04^{15} > \dfrac{33}{19}$. Par conséquent, les solutions sont tous les entiers supérieurs ou égaux à 15.

(b) On cherche n tel que $u_n \geqslant 2u_0$, c'est-à-dire :

$$19\,000 \times 1{,}04^n - 5\,000 > 2 \times 14\,000\ ,$$

ce qui équivaut à :

$$1{,}04^n > \frac{28\,000 + 5\,000}{19\,000}\ ,$$

qui se simplifie en $1{,}04^n > \dfrac{33}{19}$.

La solution est donc le plus petit entier trouvé dans la question précédente, c'est-à-dire 15.

Le salaire aura donc doublé en $2013 + 15$, soit en 2028.

3 **(a)** L'algorithme donne le nombre d'années nécessaires pour que le salaire A devienne strictement supérieur à un montant S.

D'après la question 1 de la partie B, il faut bien 8 années pour que le salaire dépasse 21 000 euros.

(b) Il faut donner à S la valeur $2u_0$, c'est-à-dire 28 000.

28 Problème ouvert

Enoncé p. 22

Lycée Jean Jaurès, Chatenay-Malabry

Pour choisir le meilleur placement, il faut comparer les sommes disponibles à la fin de chaque année dans chacun des cas.

- Pour le placement U, la somme u_n sur le compte épargne est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 6 000, donc $u_n = 6\,000n$.
Chaque année, l'intérêt est égal à 5 % de la somme placée, donc au bout de n années, on a :

$$\begin{aligned} i_n &= 0{,}05 \times u_1 + 0{,}05 \times u_2 + \cdots + 0{,}05u_n \\ &= 0{,}05 \times 6\,000(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= 0{,}05 \times 6\,000 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 150n(n+1). \end{aligned}$$

La somme disponible au bout de n années est donc dans ce cas :
$6\,000n + 150n(n+1)$.

- Pour le placement V, la somme v_n est une suite arithmético-géométrique : $v_{n+1} = 1{,}04 \times (v_n + 6\,000)$ car chaque année il est déposé 6 000 € de plus, et la totalité de la somme rapporte 4 % d'intérêts.
Le placement V est le plus intéressant lorsque $v_n > 6\,000n + 150n(n+1)$, donc $v_n - 6\,000n > 150n(n+1)$.

Dans l'algorithme, le nombre N d'années augmente tant que cette inégalité n'est pas vérifiée, donc le nombre N affiché correspond à la durée minimale de l'épargne pour que le placement le plus avantageux soit le placement V.

Pour une épargne inférieure ou égale à 17 ans, il vaut mieux prendre le placement U, si l'épargne est plus longue, le placement V est plus intéressant.

Chapitre 2

Dérivation et langage de la continuité

Plan du chapitre

1. Continuité
2. Rappels sur la dérivation
3. Applications de la dérivation

1 Continuité

Exercice type 1 — Lycée François Couperin, Fontainebleau

On considère la fonction définie sur $I = [-10\,;\,10]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3.$$

1 Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur I.

2 **(a)** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-10\,;\,10]$ notée a.

(b) Encadrer a par deux entiers relatifs consécutifs.

3 On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
      a prend la valeur -1
      b prend la valeur 0.
      d prend la valeur 0,1
Traitement
      Tant que b-a>d
          m prend la valeur (a+b)/2
          Si f(m)>0
              Alors b prend la valeur m
          Sinon
              a prend la valeur m
          Fin de Si
      Fin de Tant que
Sortie
      Afficher a et b.
```

…

COURS

Exercice type 1 (suite) — **Lycée François Couperin, Fontainebleau**

(a) Remplir le tableau ci-dessous en s'arrêtant quand on sort du « Tant que » (il y a peut-être trop, ou pas assez, de colonnes).

On arrondira les résultats au centième à chaque étape.

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6	Étape 7
a	-1						
b	0						
m							
$f(m)$							
Signe de $f(m)$							

Quelle seront alors les valeurs de a et b en sortie ?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

(c) Expliquer, par exemple à l'aide d'un graphique, le rôle du « Si » dans cet algorithme.

4 Donner une valeur approchée de a à 10^{-3} près en utilisant la calculatrice.

5 En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Voir corrigé page 51

1.1 Notion de continuité

La définition mathématique de la notion de continuité n'est pas au programme.

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle I si la courbe représentative de la fonction f pour x appartenant à I se trace « sans lever le crayon ».

Théorème 1

Les fonctions usuelles sont continues sur chacun des intervalles de leur ensemble de définition.

Convention :

Dans un tableau de variations de fonction, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Remarques

- Si f est continue sur I et a appartient à I alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La notion de continuité n'a de sens que sur un intervalle.

1.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2

Si f est continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = \lambda$.

Remarque : cela veut dire que l'équation $f(x) = \lambda$ a, sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, au moins une solution c comprise entre a et b.

1.3 Unicité de la solution de l'équation $f(x) = \lambda$

Théorème 3

Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique c comprise entre a et b.

Remarques

- Utilisez ce théorème pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation $f(x) = \lambda$ sur un intervalle I.
- Ce théorème ne vous permet pas de trouver la solution exacte. Vous pouvez seulement trouver un encadrement de la solution, pour cela, utilisez le menu « table » de votre calculatrice.

Solution de l'exercice type 1 — Lycée François Couperin, Fontainebleau

1 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 = 24$. L'équation $f'(x) = 0$ a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{24}}{6} = 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Dans I, le trinôme est positif à l'extérieur des racines, et négatif entre les racines.

Donc f est croissante sur $[-10\,;\,x_1]$ et sur $[x_2\,;\,10]$, et décroissante sur $[x_1\,;\,x_2]$.

$f(-10) = -1\,307$; $f(10) = 713$; $f(x_1) \approx 3{,}1$; $f(x_2) \approx 0{,}9$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1\,307$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	711

Solution de l'exercice type 1

Lycée François Couperin, Fontainebleau

2 f est une fonction polynôme, elle est donc continue sur I.

Sur $[-10\,;x_1]$, f est strictement croissante et 0 appartient à $[f(-10)\,;\,f(x_1)]$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[-10\,;x_1]$.

Sur $[x_1\,;10]$, $f(x)$ est positif puisque le minimum est atteint en x_2 et est environ égal à 0,9. Donc sur cet intervalle, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

Il y a donc bien une solution unique sur I.

De plus $f(-1)=-2$ et $f(0)=3$, donc en reprenant le même raisonnement, $-1<a<0$.

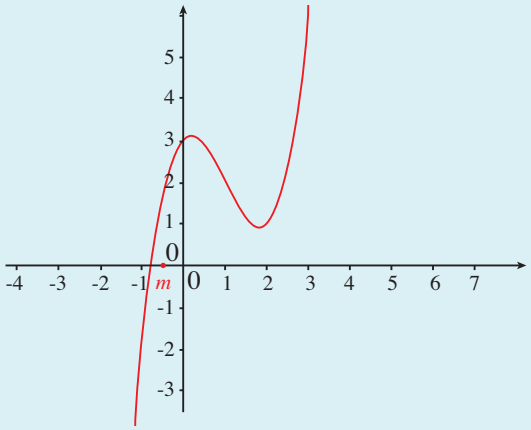
3 **(a)** Nous avons le tableau suivant :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5
a	-1	-1	-1	$-0{,}875$	$-0{,}81$
b	0	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}75$	$-0{,}75$
m	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}875$	$-0{,}813$	
$f(m)$	1,63	0,14	$-0{,}84$	$-0{,}33$	
Signe de $f(m)$	+	+	−	−	

À l'étape 5, le test $b-a>d$ est faux puisque $b-a\approx 0{,}06$.

La sortie sera donc $a=-0{,}81$ et $b=-0{,}75$.

(b) On obtient un encadrement de la solution de l'équation $f(x)=0$ d'amplitude inférieure ou égale à 0,1.



Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée François Couperin, Fontainebleau

(c) On a représenté à la question 3.b la fonction f.
Initialement, $a = -1$ et $b = 0$, donc $m = -0{,}5$.
Or, $f(-0{,}5)$ est positif, donc la nouvelle valeur de b sera $-0{,}5$: la solution de l'équation est maintenant encadrée par -1 et $-0{,}5$.
À chaque étape, l'amplitude de l'encadrement est divisé par 2.

4 Par balayage à la calculatrice, on trouve $-0{,}77 < a < -0{,}769$. Donc une valeur approchée de a à 10^{-3} près est $-0{,}770$.

5 D'après le tableau de variations de f, puisque $f(a) = 0$, $f(x)$ est négatif pour x appartenant à $[-10\,;\,a[$ et positif ensuite.

Voir énoncé page 49

2 Rappels sur la dérivation

Exercice type 2 — Lycée Calmette, Nice

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

(a) Déterminer une équation des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f aux points d'abscisses -1 ; 0 ; 1 et 4.

(b) Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$.

(c) Montrer que la fonction f est bornée sur $[-5\,;\,5]$.

2 Construire la courbe sur $[-5\,;\,5]$ et les quatre tangentes déterminées.

Voir corrigé page 55

2.1 Nombre dérivé

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dérivable en un réel a de I si le taux de variation de f entre a et $a+h$, c'est-à-dire $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est notée $f'(a)$ et appelée nombre dérivé de f en a.

Remarque : en économie, si $f(x)$ désigne le coût de production d'une quantité d'objets x, le taux de variation mesure le coût de production par objet supplémentaire lorsqu'on augmente la production de a à $a+h$.

COURS

2.2 Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en un réel a de I alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point A d'abscisse a d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

2.3 Fonction dérivée

Définition 2

Si une fonction f est dérivable en tout réel x d'un intervalle I, la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque : en économie, on assimile le coût marginal à la dérivée du coût total.

2.4 Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
k réel	0	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

2.5 Dérivées et opérations

Théorème 4

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel, alors les fonctions λu, $u+v$ et uv sont dérivables sur I et

$$(\lambda u)' = \lambda u' \qquad (u+v)' = u' + v' \qquad (uv)' = u'v + uv'.$$

De plus, si v ne s'annule pas sur I, les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Solution de l'exercice type 2

Lycée Calmette, Nice

1 **(a)** f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son intervalle de définition $]-\infty\,;+\infty[$.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 1$ alors $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$ alors, pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}.$$

(b) $f'(-1) = 0$; la courbe $\mathcal{C}$ admet donc au point d'abscisse -1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale). Comme de plus $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, la courbe $\mathcal{C}$ admet au point $A\left(-1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ une tangente d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$.

$f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$; au point d'abscisse 0, la courbe $\mathcal{C}$ admet donc une tangente d'équation $y = 1 \times (x - 0) + 0$, soit $y = x$.

$f'(1) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$; la courbe $\mathcal{C}$ admet au point d'abscisse 1 une tangente horizontale d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

$f'(4) = -\dfrac{15}{289}$ et $f(4) = \dfrac{4}{17}$; la courbe $\mathcal{C}$ admet donc au point d'abscisse 4 une tangente d'équation $y = -\dfrac{15}{289}(x-4) + \dfrac{4}{17}$, soit :

$$y = -\frac{15}{289}x + \frac{128}{289}.$$

(c) On a, pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$.

La dérivée est donc sur $\mathbb{R}$ du signe de $1 - x^2$, soit en utilisant la règle du signe du trinôme :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{sur }]-\infty\,;-1[\text{ et sur }]1\,;+\infty[\\ f'(x) > 0 & \text{sur }]-1\,;1[\\ f'(x) = 0 & \text{pour } x = -1 \text{ et } x = 1 \end{cases}$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]1\,;+\infty[$, strictement croissante sur $]-1\,;1[$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

COURS

Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Calmette, Nice

Cela nous permet de construire le tableau de variations de f :

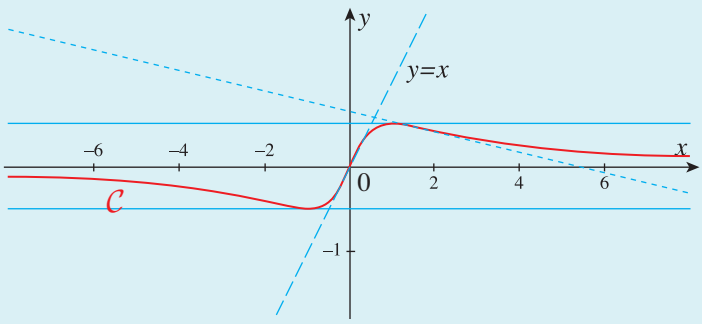
x	-5		-1		0		1		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{5}{26}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{5}{26}$

(d) D'après le tableau de variations, $-0{,}5$ est le minimum de f sur l'intervalle considéré et $0{,}5$ est le maximum. Donc la fonction f est bornée, sur $[-5\,;\,5]$ par $-0{,}5$ et $0{,}5$.

MÉTHODE

Vérifiez vos résultats à l'aide de votre calculatrice.

2



Remarque : le point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f est ce qu'on appelle un point d'inflexion (voir chapitre 5) : la courbe est au-dessus de sa tangente à gauche de ce point et en-dessous de sa tangente à droite.

Voir énoncé page 53

3 Applications de la dérivation

3.1 Sens de variation

Théorème 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I ;
- Si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I ;
- Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

À RETENIR

Le sens de variation d'une fonction se déduit du signe de sa dérivée.

3.2 Continuité

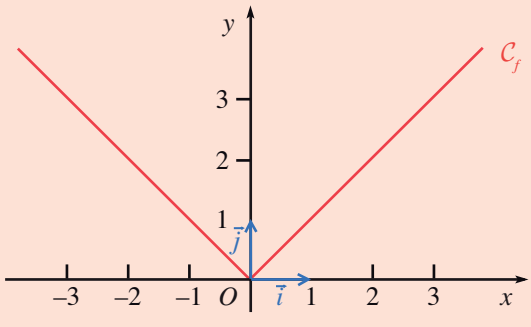
Théorème 6

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I.

Remarque : justifiez la continuité d'une fonction à l'aide de ce théorème

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse.
Voici un contre-exemple : soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0]$ par $f(x) = -x$ et sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x$.
Cette fonction est continue en 0 (elle se trace sans lever le crayon). Cependant, la fonction n'est pas dérivable en 0.



COURS

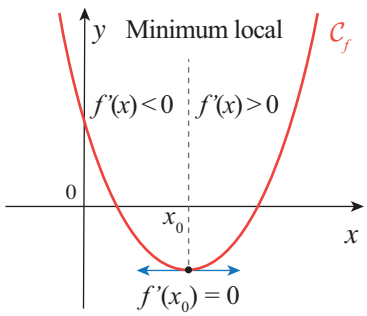
ATTENTION

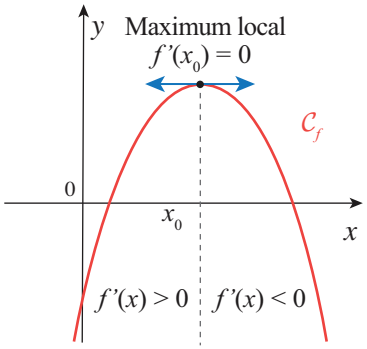
On peut observer ici pour $x = 0$ une demi-tangente à gauche d'équation $y = -x$ (confondue avec la courbe), et une demi-tangente à droite d'équation $y = x$ (là aussi confondue avec la courbe). Donc on n'a pas une unique valeur pour le coefficient directeur de la tangente, et f n'est pas dérivable en 0.

3.3 Extremum

Théorème 7

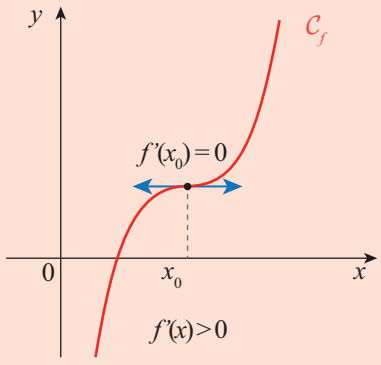
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
f admet un extremum local en x_0 de I si et seulement si f' s'annule en x_0 en changeant de signe.





ATTENTION

Le fait que la dérivée s'annule en x_0 ne suffit pas à prouver l'existence d'un extremum. Il faut en plus que la dérivée change de signe en x_0.



1 QCM Dérivées et applications

10 min — Corrigé p. 69

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

Soit la fonction f définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = -x + 3 - \dfrac{4}{x-2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1 Soit f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

a $f'(x) = -1 - \dfrac{4}{(x-2)^2}$ **b** $f'(x) = \dfrac{x(4-x)}{(x-2)^2}$

c $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{(x-2)^2}$

2 Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 est :

a $y = -x + 3$ **b** $y = 3x - 13$ **c** $y = -5x + 18$

3 La fonction f :

a est croissante sur $]2\,;+\infty[$

b est décroissante sur $]2\,;+\infty[$

c n'est pas monotone sur $]2\,;+\infty[$

4 La fonction f admet :

a un maximum sur $]2\,;+\infty[$ **b** un minimum sur $]2\,;+\infty[$

c ni maximum, ni minimum

5 L'équation $f(x) = 0$ admet sur $]2\,;+\infty[$:

a 0 solution **b** 1 solution **c** 2 solutions

2 QCM Bac Asie juin 2007

10 min — Corrigé p. 69

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte. On considère une fonction f définie sur $[-10\,;+\infty[$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	-10		-2		2		$+\infty$
$f(x)$	8	↘	-1	↗	0	↘	

1 Dans $[-10\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

a une unique solution **b** 2 solutions distinctes

c 3 solutions distinctes

INTERROS

2 Dans $[-10\,;+\infty[$, l'inéquation $f(x) > 2$:

a n'a pas de solution **b** a toutes ses solutions positives
c a toutes ses solutions négatives

3 Soit g une fonction définie sur $]-\infty\,;3[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		-2		2		3
$g(x)$		↘	0	↘	-2	↗	0	↗	

On peut affirmer que :

a $g(0) < 0$ **b** $g(0) = 0$ **c** $g(0) > 0$

4 Soit h une fonction définie sur $[-6\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-6		-4		$-3{,}5$		-3		2		$+\infty$
$h(x)$	7	↗	8	↘	0	↘	‖	↘	4	↗	

Dans l'ensemble $[-6\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$, l'équation $h(x) = 4$ admet :

a 0 solution **b** 1 solution **c** 2 solutions **d** 3 solutions

3 V/F Vrai ou faux

10 min — Corrigé p. 70

On considère une fonction f dérivable sur $[-3\,;6]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-3		1		4		6
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	↘	-1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses, ou ne peut-on pas conclure ? Justifier chaque réponse sur votre copie.

1 L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3\,;6]$.

2 La droite d'équation $y = 4$ est tangente à la courbe représentative de f.

3 Pour tout réel de $[-3\,;4]$, $f(x) > 0$.

4 Pour tout réel de $[-3\,;4]$, $f'(x) \geqslant 0$.

4 V/F Vrai ou faux

15 min — Corrigé p. 70

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes et justifier :

1. L'équation $x^5 + 2x - 6 = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 30 = 0$ n'admet aucune solution dans $[0\,;2]$.
3. Il est possible de déterminer un intervalle tel que l'équation :
$$x^5 - 10x + 7 = 0$$
ait une solution unique.
4. On peut trouver une équation de la forme $f(x) = 0$ dont les seules solutions sont 1, 2 et 3, et telle que $f(5) = 10$.

5 V/F Dérivée et propriété de fonctions

10 min — Corrigé p. 71

Les assertions suivantes sont-elles fausses ou vraies ? Justifier la réponse (en fournissant au besoin un contre-exemple).

1. $f'(x_0) = 0$, donc f atteint un maximum ou un minimum en x_0.
2. $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [a\,;b]$, donc f est croissante sur $x \in [a\,;b]$.

Continuité

6 Nombre de solutions d'une équation ★

10 min — Corrigé p. 72

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-10\,;10]$:

x	-10		-1		0		3		10
$f(x)$	1	↘	-2	↗	-1	↘	-4	↗	2

1. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -3$.

7 Équation du type $f(x) = 0$ ★

20 min — Corrigé p. 73

Lycée Virlogeux, Riom

Soit l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.

1. Programmer la fonction à la calculatrice. Combien l'équation semble-t-elle avoir de solutions ?

2 Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2\,,$$

et vérifier votre conjecture.

3 Le tableau de variations donne une des solutions. Trouver a, b et c tels que $f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. Donner la valeur exacte de chacune des solutions.

8 Nombre de solutions d'une équation ★ 15 min Corrigé p. 73

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x) = x^3 - 5x$.

1 Justifier la continuité de f sur $[-1\,;3]$.

2 Justifier que l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution dans $[-1\,;3]$ si $-4 \leqslant a \leqslant 12$.

3 Tracer la représentation graphique de f sur l'écran de votre calculatrice.

4 Par lecture graphique, donner, suivant les valeurs de a compris entre 0 et 12 le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

9 Signe d'une fonction ★ 15 min Corrigé p. 74

Lycée Descartes, Cournon

f est la fonction définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.

1 Dresser le tableau de variations de f.

2 Calculer $f(-10)$. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. Donner la valeur exacte de ces solutions.

Dérivabilité

10 Condition de dérivabilité ★ 5 min Corrigé p. 74

Lycée Stanislas, Nice

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

1 Préciser les conditions de dérivabilité de f.

2 Calculer la fonction dérivée f'.

11 Calcul de dérivées, nombre dérivé

★ — 5 min — Corrigé p. 75

Lycée Victor Hugo, Poitiers

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes et le nombre dérivé en 1 :

$$f(x) = 2x + 3x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$
$$g(x) = \sqrt{x} + 3x \quad \text{pour } x > 0.$$

12 Dérivées et opérations

★ — 20 min — Corrigé p. 75

Lycée Claude Monet, Paris

Dériver f sur l'ensemble proposé, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2 \quad \text{sur } I = \mathbb{R}.$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3} + 5 \quad \text{sur } I = \mathbb{R}.$
3. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1} \quad \text{sur } I = \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[.$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \quad \text{sur } I =]0\,;+\infty[.$

13 Équations de tangentes

★ — 10 min — Corrigé p. 76

Lycée Léonard de Vinci, Melun

Calculer l'équation de la tangente en $M_0\big(x_0\,;\,f(x_0)\big)$ à la courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, où :

$$f(x) = 3x^2 - x + 1, \quad x_0 = 1.$$

14 Continuité

★★ — 30 min — Corrigé p. 77

Lycée Camille Claudel, Palaiseau

1. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2x-3)(x+1)}.$$

Déterminer l'ensemble de définition de f et les plus grands intervalles où f est continue.

2. Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+3}.$$

Déterminer l'ensemble de définition de g et les plus grands intervalles où g est continue.

INTERROS

3 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -3x - 4 \text{ pour } x \in]-\infty ; -1[.$$
$$h(x) = -x^2 + 2 \text{ pour } x \in [-1 ; +\infty[.$$

La fonction h est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Applications de la dérivation

15 Utiliser une représentation graphique ★★

20 min — Corrigé p. 78

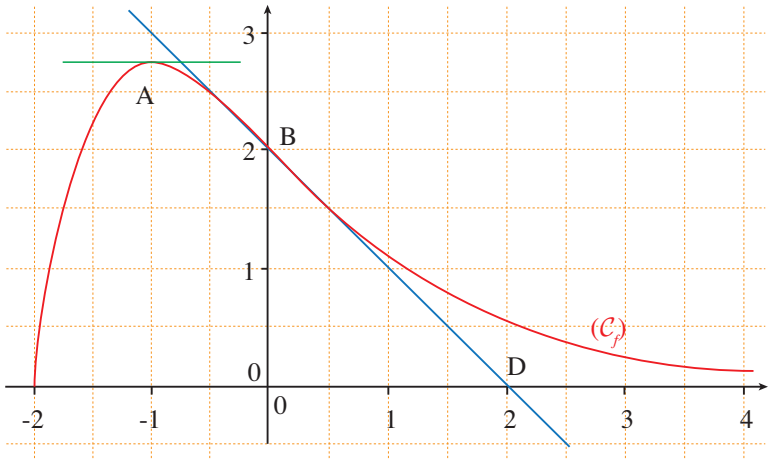
Cité scolaire internationale, Grenoble

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2 ; 4]$.

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

La courbe admet au point A d'abscisse -1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ en B$(0 ; 2)$ passe par D$(2 ; 0)$.



1 En utilisant les données graphiques, donner, sans justifier :

(a) Le nombre de solutions sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ de l'équation $f(x) = 1$ et un encadrement d'amplitude 0,25 des solutions éventuelles.

(b) La valeur de $f'(-1)$.

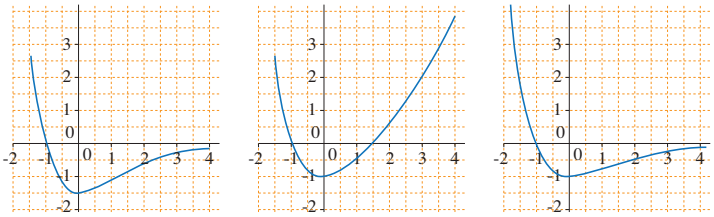
(c) Le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

2 Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Donner en justifiant :

(a) Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$.

(b) Celle des trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ représentées ci-dessous qui représente la fonction dérivée f' de f.
Écrire « $\mathcal{C}_1$ », « $\mathcal{C}_2$ » et « $\mathcal{C}_3$ » sous les courbes.



16 Un problème complet

★★ 30 min Corrigé p. 78

Lycée Victor Duruy, Paris

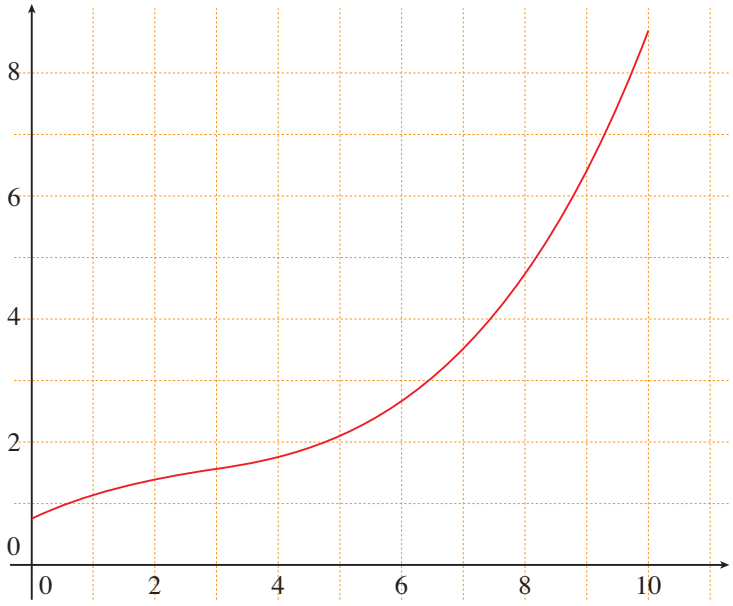
L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 m de large et pour une longueur x exprimée en kilomètres, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donnée en fonction de la longueur x par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique suivant donne la représentation graphique de la fonction C.

Les graduations sur l'axe vertical sont en milliers d'euros.



INTERROS

Les deux parties A et B de cet exercices sont indépendantes.

Partie A : étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égale à $R(x) = px$.

1 Tracer sur le graphique donné page précédente la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = 400x$.

Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est à 400 euros.

2 Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 €.

(a) Tracer sur le graphique ci-dessus la droite d'équation $y = 680x$.

Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le graphique) pour quelles quantités produites et vendues l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est 680 euros.

(b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$B(x) = 680x - C(x).$$

Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,10]$, on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

(c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0\,;\,10]$. Dresser son tableau de variations complet.

En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1 Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,10]$, on a : $C'_M(x) = \dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.

2 **(a)** Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $x - 5$.

En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

(b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimal ? Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

17 Point mort

★★ — 15 min — Corrigé p. 80

Lycée Victor Duruy, Paris

En situation de monopole pur, les points morts d'une firme correspondent aux quantités pour lesquels le bénéfice de la firme est nul.

Le coût de fabrication d'un produit est composé d'un coût fixe de 20 000 € et d'un coût variable de 100 € par unité produite.

Le revenu, en euros, pour ce produit, est donné par $R(q) = q(750 - 5q)$ pour une quantité q variant de 0 à 100 unités.

1. **(a)** Déterminer l'expression du coût total $C(q)$ en fonction de la quantité q.
   (b) Exprimer le bénéfice $B(q)$ de cette firme pour une quantité q produite et vendue.
2. Déterminer les points morts de la firme.
3. Déterminer la quantité produite pour laquelle le bénéfice est maximum, et la valeur de ce bénéfice.

18 Variations

★★ — 10 min — Corrigé p. 81

Lycée Charlemagne, Paris

Soit la fonction rationnelle :

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}.$$

Calculer f' la fonction dérivée de f. En déduire les variations de f.

19 Étude de fonction rationnelle

★★★ — 45 min — Corrigé p. 82

Lycée Descartes, Tours

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}.$$

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Calculer la dérivée de f. Montrer que f' s'écrit pour tout x :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}.$$
   En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$. Montrer qu'il existe un et un seul point A de $\mathcal{C}_f$ tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A soit parallèle à $\mathcal{D}$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

20 Théorème des valeurs intermédiaires ★★★

15 min — Corrigé p. 83

Lycée Jacques Monod, Clamart

1. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction :
$$f : x \mapsto \sqrt{x^3 + 2x^2 - 1} + 1$$
est définie et continue.
Pour factoriser $x^3 + 2x^2 - 1$, on remarquera que :
$$x^3 + 2x^2 - 1 = (x^3 + x^2) + (x^2 - 1).$$
2. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I = [1\,;2]$.
3. En déduire le nombre de solutions dans I de l'équation : $f(x) = 3$.
Déterminer une valeur approchée à 0,01 près des éventuelles solutions.

21 Discussion du nombre de solutions ★★★

20 min — Corrigé p. 85

Lycée Virlogeux, Riom

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = 2x^3 - 6x$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Soit k un nombre réel. Discuter, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

22 Tangentes ★★★

20 min — Corrigé p. 85

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - x^3$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2, puis de la tangente $\mathcal{D}_2$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Donner les coordonnées du point d'intersection A de ces deux tangentes.
4. Existe-t-il une autre tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à $\mathcal{D}_1$?

1 QCM Dérivées et applications

Enoncé p. 59

1 Réponse **b** : f est dérivable sur $]2\,;+\infty[$ et, pour tout x de $]2\,;+\infty[$,

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2)^2+4}{(x-2)^2} = \frac{-x^2+4x}{(x-2)^2} \text{ ou } \frac{x(4-x)}{(x-2)^2}.$$

2 Réponse **b** : f est dérivable sur $]2\,;+\infty[$ donc en 3, donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente au point d'abscisse 3.

$f(3) = -4$, $f'(3) = 3$, une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 est donc :

$$y = 3(x-3) - 4, \text{ soit } y = 3x - 13.$$

3 Réponse **c** : sur $]2\,;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $4-x$, d'où f est croissante sur $]2\,;4]$ et décroissante sur $[4\,;+\infty[$, la fonction n'est donc pas monotone sur $]2\,;+\infty[$.

4 Réponse **a** : la dérivée $f'(x)$ s'annule pour $x = 4$, elle est positive sur $]2\,;4[$ et négative sur $]4\,;+\infty[$, la fonction admet donc un maximum sur $]2\,;+\infty[$ pour $x = 4$.

5 Réponse **a** : La fonction f admet un maximum pour $x = 4$ égal à $f(4) = -3$, donc pour tout réel x de $]2\,;+\infty[$, $f(x) \leq -3$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]2\,;+\infty[$.

2 QCM Bac Asie juin 2007

Enoncé p. 59

1 Réponse **b** : d'après le tableau de variations, f est continue et strictement décroissante sur $[-10\,;-2]$, $f(-10) = 8$ et $f(-2) = -1$; comme $0 \in [-1\,;8]$, il existe un réel unique $x_1 \in [-10\,;-2]$ tel que $f(x_1) = 0$.

D'après le tableau de variations, 0 est le maximum strict de f sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$ car f est strictement croissante sur $[-2\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$. Alors, pour tout x de $[-2\,;+\infty[$, on a $f(x) < 0$ si $x \neq 2$ et $f(2) = 0$. Il existe donc un réel unique $x_2 = 2$ dans $[-2\,;+\infty[$, tel que $f(x) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc 2 solutions distinctes.

2 Réponse **c** : sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$, la fonction f admet un maximum en 2 qui est égal à 0 ; donc, sur cet intervalle $f(x) \leq 0 < 2$: l'inéquation n'a pas de solution dans cet intervalle.

Sur $]-10\,;-2[$, la fonction f est continue et strictement décroissante, $f(-10) = 8$ et $f(-2) = -1$; comme $2 \in]-1\,;8[$, il existe un unique

réel $\alpha \in]-10\,;-2[$ telle que $f(\alpha) = 2$. De plus comme f est décroissante, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est l'intervalle $[-10\,;\alpha[$ et comme $\alpha < 0$, l'inéquation a bien toutes ses solutions négatives.

3 Réponse **a** : sur l'intervalle $]-2\,;2[$, d'après son tableau de variations, g est continue et strictement croissante ; or, $g(2) = 0$ donc, pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;2[$, $g(x) < 0$, en particulier $g(0) < 0$.

4 Réponse **c** : sur l'intervalle $]-6\,;-4[$, la fonction h est strictement croissante et $h(-6) = 7$, donc $h(x) \geqslant 7$.

Sur l'intervalle $[-4\,;-3{,}5]$, la fonction h est continue et strictement décroissante, et 4 appartient à $[h(-3{,}5)\,;h(-4)]$ donc l'équation $h(x) = 4$ admet une solution.

Sur $[-3{,}5\,;-3[$, h est strictement décroissante donc $h(x) < h(-3{,}5)$. Il n'y a donc pas de solution dans cet intervalle.

Sur $]-3\,;+\infty[$, la fonction est continue et passe par un minimum qui est justement 4. Il y a donc une solution unique dans cet intervalle.

En résumé, l'équation admet deux solutions dans l'ensemble considéré.

3 V/F Vrai ou faux

Enoncé p. 60

1 Vrai. En effet, sur l'intervalle $[-3\,;4]$, $f(x)$ est positif puisque le minimum est 1 sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[4\,;6]$, f est strictement décroissante et continue (c'est la signification de la flèche « descendante »), et 0 appartient à $[f(6)\,;f(4)]$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle, et donc une unique solution sur $[-3\,;6]$.

2 On ne peut pas conclure. Pour que cette droite soit tangente à la courbe, il faut que la dérivée s'annule pour une valeur de x, mais elle peut s'annuler sans que cela corresponde à un extremum et donc, comme le tableau de variations ne contient pas la ligne concernant la dérivée, on ne peut pas savoir si la dérivée s'annule ou pas.

3 Vrai. Sur cet intervalle, le minimum de la fonction est 1, donc on a bien $f(x) > 0$.

4 Faux. Sur cet intervalle, la fonction est tout d'abord décroissante, puis croissante, ce qui signifie que la dérivée est tout d'abord négative, puis positive.

4 V/F Vrai ou faux

Enoncé p. 61

1 Vrai : si $f(x) = x^5 + 2x - 6$, $f'(x) = 5x^4 + 2$, donc pour tout x réel, $f'(x)$ est positif, ce qui signifie que f est strictement croissante.

Or, $f(-2) = -42$, et $f(2) = 30$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2\,;\,2]$.

La fonction étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle n'en admet pas d'autre.

2 Faux : en programmant la fonction sur la calculatrice, il semble qu'il y ait une solution entre 1 et 2.

$$f'(x) = 4x^3 + 15x^2 + 30x = x(4x^2 + 15x + 30).$$

Pour x positif, $f'(x)$ est positif, ce qui signifie que, sur $\mathbb{R}_+$, f est strictement croissante.

Or, $f(0) = -30$ et $f(2) = 86$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[0\,;\,2]$.

3 Vrai :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 10 = 5(x^4 - 2) = 5(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) \\ &= 5\left(x - \sqrt{\sqrt{2}}\right)\left(x + \sqrt{\sqrt{2}}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Tous les facteurs de cette dérivée sont positifs pour tout x, sauf $x - \sqrt{\sqrt{2}}$.

$f(2) = 19, \quad f\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right) \approx -2{,}51.$

Or, d'après la factorisation ci-dessus, sur $\left[\sqrt{\sqrt{2}}\,;\,2\right]$, f est strictement croissante, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle .

4 Vrai : pour $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, l'équation $g(x) = 0$ a pour solutions 1, 2 et 3. Cependant $g(5) = 24$. Il suffit donc de poser $f(x) = \dfrac{10}{24}g(x)$, soit $f(x) = \dfrac{5}{12}g(x)$ pour satisfaire les conditions.

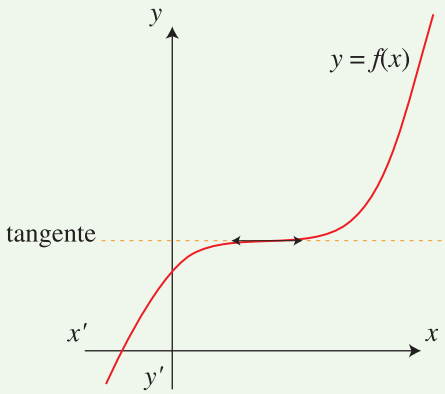
$$f(x) = \frac{5}{12}(x-1)(x-2)(x-3).$$

5 V/F Dérivée et propriété de fonctions

Enoncé p. 61

1 Faux. $f'(x_0) = 0$ veut dire par exemple que la tangente à la courbe en x_0 est horizontale (puisque son coefficient directeur vaut 0). Cela ne veut pas dire pour autant que la fonction admette un maximum ou un minimum, comme on peut le voir sur le dessin.

Une fonction admet un maximum ou un minimum là où sa dérivée s'annule ET change de signe (voir figure page suivante).



2 Vrai. Cela résulte du théorème 5.

6 Nombre de solutions d'une équation

Enoncé p. 61

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 f est continue et strictement décroissante sur $[-10\,;\,-1]$ et 0 appartient à l'intervalle $\big[f(-1)\,;\,f(-10)\big]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-10\,;\,1]$.

En suivant le même raisonnement, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[3\,;\,10]$, mais n'en admet pas dans l'intervalle $[-1\,;\,3]$.

Donc, finalement l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2 De même, f est strictement monotone dans $[-10\,;\,-1]$ et dans $[-1\,;\,0]$; mais -3 n'appartient ni à $\big[f(-1)\,;\,f(-10)\big]$ ni à $\big[f(-1)\,;\,f(0)\big]$. L'équation $f(x) = -3$ n'admet donc aucune solution dans ces intervalles. Cette équation admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,3]$ et une solution unique dans l'intervalle $[3\,;\,10]$, puisque f est strictement monotone sur chacun de ces intervalles et que -3 appartient à $\big[f(3)\,;\,f(0)\big]$ et à $\big[f(3)\,;\,f(10)\big]$.

Il y a donc en tout deux solutions à l'équation $f(x) = -3$.

7 Équation du type $f(x) = 0$

Enoncé p. 61

Lycée Virlogeux, Riom

1 Apparemment, l'équation a deux solutions.

2 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	4	↘	0	↗	

D'après ce tableau, l'équation $f(x) = 0$ admet comme solution 1. De plus, $f(-3) = -16$ et $f(-1) = 4$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution dans l'intervalle $[-3\,;-1]$. Elle n'en admet pas d'autre car, sur $[-1\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.

Donc cette équation admet exactement deux solutions.

3 On a : $x^3-3x+2 = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.
Par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = -3 \\ -c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$$

$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$.

Or, $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, donc les solutions de cette équation sont 1 et -2 (1 étant racine double).

8 Nombre de solutions d'une équation

Enoncé p. 62

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

2 $f'(x) = 3x^2 - 5$, d'où le tableau de variations suivant :

x	-1		$\sqrt{\frac{5}{3}}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘		↗	12

On a : $f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \approx -4{,}3$.

3 Si a est compris entre $f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ (exclu) et 4, l'équation admet deux solutions dans $]-1;3]$. Si $a = f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ ou si $a > 4$, l'équation admet une seule solution.

4 Il semblerait que cette équation ait deux solutions.

Remarque : $x^3 - 5x = x(x^2-5) = x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.
Cette factorisation montre que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$, dont deux dans $[-1\,;3]$.

9 Signe d'une fonction

Enoncé p. 62

Lycée Descartes, Cournon

1 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2+2x-3) = 3(x-1)(x+3)$ (cette factorisation s'obtient facilement en factorisant le trinôme x^2+2x-3).
Ceci permet d'obtenir le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	

2 $f(-10) = -605$.
Donc, d'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions continues strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]-10\,;-3[$, et 1 comme deuxième solution.
En programmant la fonction pour les valeurs entières de x sur la calculatrice, on voit que $f(-5) = 0$.
Donc les deux solutions sont -5 et 1.

10 Condition de dérivabilité

Enoncé p. 62

Lycée Stanislas, Nice

1 x^2-1 s'annule pour $x = 1$ et $x = -1$; par conséquent, d'après le cours, f est dérivable sur tout intervalle où x^2-1 ne s'annule pas. f est donc dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$.

2 D'après la formule de dérivée d'une fonction inverse :

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

11 Calcul de dérivées, nombre dérivé

Enoncé p. 63

Lycée Victor Hugo, Poitiers

1 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.

$$f'(x) = 2 \times 1 + 3 \times 2x = 2 + 6x.$$
$$f'(1) = 2 + 6 \times 1 = 8.$$

2 g est dérivable sur $I =]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables.

$$g(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{u(x)} + \underbrace{3x}_{v(x)}.$$

$$g'(x) = u'(x) + v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3.$$

$$g'(1) = \frac{1}{2 \times 1} + 3 = \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{7}{2}.$$

12 Dérivées et opérations

Enoncé p. 63

Lycée Claude Monet, Paris

1 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ sur $I = \mathbb{R}$. f est dérivable sur I comme polynôme.
$f'(x) = 3x^{3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 0 = 3x^2 - 10x$.

2 $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3} + 5$ sur $I = \mathbb{R}$. f est une fonction polynôme, donc dérivable sur I.

$$f'(x) = x + \frac{1}{3}.$$

3 f est dérivable en tant que fonction rationnelle définie sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$:

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Or,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - (x-3) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{7}{(2x+1)^2}.$$

4 On a :

$$x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \text{ sur } I =]0\,;+\infty[.$$

Les fonctions au numérateur et au dénominateur sont dérivables sur I car la fonction racine est dérivable sur I. Le dénominateur ne s'annule

par sur I, donc f est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+2\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}.$$

13 Équations de tangentes

Enoncé p. 63

Lycée Léonard de Vinci, Melun

On remarque tout d'abord que $D_f = \mathbb{R}$.

En $x_0 = 1$, $x_0 \in D_f$ et f est dérivable en x_0, donc la tangente au point d'abscisse 1 existe. Soit $\mathcal{T}_1$ cette tangente. Si on ne se rappelle plus la formule de l'équation de la tangente, on la cherche sous la forme : $y = mx + p$. On sait que le coefficient directeur m de $\mathcal{T}_1$ est égal au nombre dérivé en 1, soit $f'(1)$.

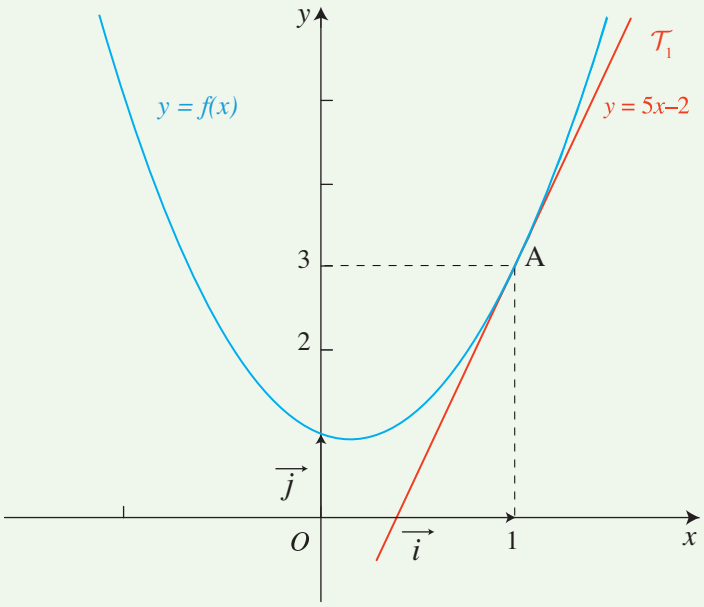
$$f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(1) = 6 - 1 = 5 \Rightarrow m = f'(1) = 5.$$

Par ailleurs, le point $A\big(1\,;\,f(1)\big)$ est le point de contact de la courbe et de la tangente ; ses coordonnées satisfont l'équation de $\mathcal{T}_1$:

$$\mathcal{T}_1 : y = \underbrace{m}_{5}x + p \Rightarrow f(1) = 5 \times 1 + p$$

$$\Rightarrow p = f(1) - 5 = -2.$$

Une équation de $\mathcal{T}_1$ est donc : $y = 5x - 2$



14 Continuité

Enoncé p. 63

Lycée Camille Claudel, Palaiseau

1 Considérons :

$$x \mapsto f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2x-3)(x+1)}.$$

- f est définie partout où son dénominateur ne s'annule pas.

$$(2x-3)(x+1) = 0 \iff 2x-3=0 \quad \text{ou} \quad x+1=0$$
$$\iff x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x=-1.$$

On a donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-1\,;\,\frac{3}{2}\right\}.$$

Remarque : une fois le domaine de définition trouvé, on peut simplifier l'expression par $x+1$. Mais ensuite, on ne voit plus apparaître le fait que f n'est pas définie en -1. Il faut donc déterminer l'ensemble de définition *avant* d'entreprendre une quelconque simplification.

- La fonction f est un quotient :

$$f = \frac{u}{v}, \text{ avec } u(x) = (x+1)(x-1),\ v(x) = (2x-3)(x+1).$$

Les fonctions u et v sont des polynômes, donc sont continues sur $\mathbb{R}$. D'après les théorèmes sur les fonctions continues, le quotient f sera donc continu sur tout intervalle I où son dénominateur ne s'annule pas. Donc f est continue sur chacun des intervalles suivants :

$$I_1 =]-\infty\,;-1[\,, \qquad I_2 = \left]-1\,;\frac{3}{2}\right[\,, \qquad I_3 = \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[\,.$$

2 Considérons :

$$x \mapsto g(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+3}.$$

La fonction g est définie et continue sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas. Le discriminant du trinôme se trouvant au dénominateur vaut : $\Delta = 9-12 = -3 < 0$.

Δ étant strictement négatif, on sait que le trinôme est de signe constant et ne s'annule donc jamais. Donc $D_g = \mathbb{R}$ et g est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Sur l'intervalle $I =]-\infty\,;-1[$, h coïncide avec la fonction affine :

$$h_1 : x \mapsto -3x-4\,,$$

donc elle est continue sur I. Sur $J = [-1\,;+\infty[$, h coïncide avec la fonction polynôme :

$$h_2 : x \mapsto -x^2+2\,,$$

donc elle est continue sur J.

Il reste à savoir si h est continue en -1.

Or, $h_1(-1) = -1$, donc la courbe $\mathcal{C}_1$ représentant h_1 est une demi-droite privée de son origine A_1 de coordonnées $(-1\,;\,-1)$.
De plus, $h_2(-1) = 1$ donc la courbe $\mathcal{C}_2$ représentant h_2 sur J est un arc de parabole d'origine A_2 de coordonnées $(-1\,;\,1)$.
Ces deux points étant différents, la courbe représentative de h n'est pas d'un seul tenant. Donc h n'est pas continue en -1, et h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

15 Utiliser une représentation graphique

Enoncé p. 64

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 **(a)** Il y a deux solutions : ce sont les abscisses a et b des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 1$.
En traçant cette droite, on peut voir que $-2 < a < -1{,}75$ et $1 < b < 1{,}25$.

(b) $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1. Puisque la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, $f'(-1) = 0$.

(c) Sur $[-2\,;\,-1]$, la fonction est croissante donc la dérivée est positive.
Sur $[-1\,;\,4]$, la fonction est décroissante donc la dérivée est négative. La dérivée s'annule pour $x = -1$.

2 **(a)** Le coefficient directeur est égal à -1.

(b) Puisque f est croissante sur $[-2\,;\,-1]$, la dérivée doit être positive (donc la représentation doit être au-dessus de l'axe des abscisses) sur cet intervalle.
Puis, comme f est décroissante sur $[-1\,;\,4]$, la dérivée doit être négative sur cet intervalle, donc la courbe représentative de f' doit rester sous l'axe des abscisses.
Ceci élimine la courbe $\mathcal{C}_2$.
Par ailleurs, d'après la question 2.a, $f'(0) = -1$ car le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé.
La bonne courbe est donc la courbe $\mathcal{C}_3$.

16 Un problème complet

Enoncé p. 65

Lycée Victor Duruy, Paris

1 La figure sur la page suivante sert pour les questions 1. et 2. La droite d'équation $y = 400x$ est celle en vert.

On constate que la courbe représentant la recette est toujours en dessous de celle qui représente les coûts. Par conséquent, on ne peut réaliser ainsi aucun bénéfice.

2 **(a)** La droite d'équation $y = 680x$ est en bleu. Cette fois ci, elle coupe la courbe qui représente les coûts.

On réalise un bénéfice dès lors que la recette est supérieure aux coûts, soit approximativement pour une longueur produite comprise entre 2 et 8,8 km.

(b) On a : $B(x) = 680x - C(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

Donc : $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$.

(c) $\Delta = 240^2 + 4 \times 45 \times 180 = 90\,000$.

Les deux racines du trinôme $B'(x)$ sont donc :

$$x_1 = \frac{-240 - 300}{2 \times (-45)} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-240 + 300}{2 \times (-45)} = -\frac{2}{3}.$$

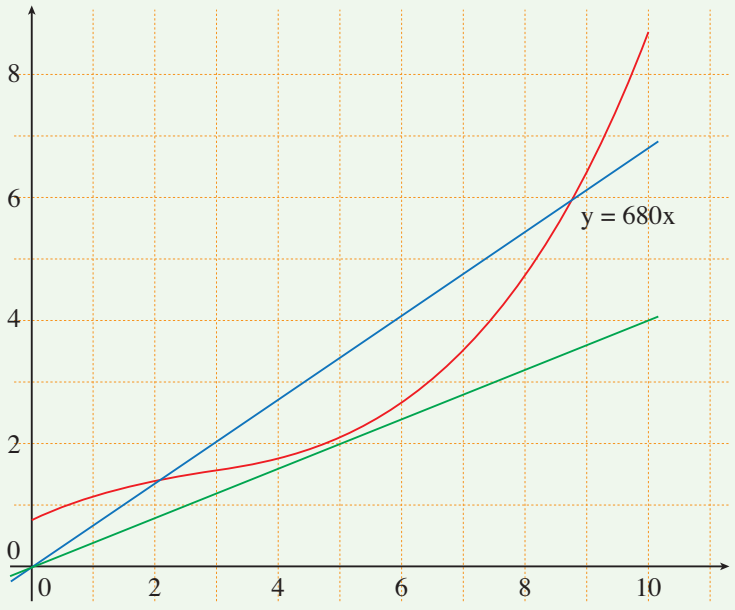
Par conséquent, en utilisant la règle du signe du trinôme, $B'(x)$ est positif pour x appartenant à $[0\,;\,6]$ et négatif pour x appartenant à $[6\,;\,10]$.

$B(0) = -750\,;\ B(6) = 1\,410\,;\ B(10) = -1\,950$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		6		10
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	−750	↗	1 410	↘	−1 950

Le bénéfice est donc maximal pour une longueur de 6 km, et il est égal à 1 410 euros.



Partie B

1 $C_M(x) = \dfrac{15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}{x} = 15x^2 - 120x + 500 + \dfrac{750}{x}$.

Donc : $C'_M(x) = 30x - 120 - \dfrac{750}{x^2} = \dfrac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x^2}$.

Or,

$$\begin{aligned}30(x-5)(x^2+x+5) &= (30x-150)(x^2+x+5)\\ &= 30x^3 + 30x^2 + 150x - 150x^2 - 150x - 750\\ &= 30x^3 - 120x^2 - 750.\end{aligned}$$

On a donc bien $C'_M(x) = \dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$.

2 **(a)** 30 et x^2 sont évidemment positifs.

De plus, le discriminant de x^2+x+5 est -19, donc ce trinôme est toujours positif (du signe de 1, coefficient de x^2).

Donc C'_M est bien du signe de $x-5$.

Par conséquent, C_M est décroissante sur $[0\,;5]$ et croissante sur $[5\,;10]$.

(b) Le coût moyen de production est donc minimal pour une production de 5 km de tissu.

Le coût moyen vaut alors $C_M(5) = 425$ euros, et le coût total $C(5) = 2\,125$ euros.

17 Point mort

Enoncé p. 67

Lycée Victor Duruy, Paris

1 **(a)** $C(q) = 20\,000 + 100q$.

(b) $$\begin{aligned}B(q) &= q(750-5q) - C(q)\\ &= 750q - 5q^2 - 20\,000 - 100q\\ &= -5q^2 + 650q - 20\,000.\end{aligned}$$

2 Il faut résoudre $B(q) = 0$ soit :

$$\Delta = 650^2 - 4 \times 5 \times 20\,000 = 22\,500 = 150^2.$$

Il y a donc deux solutions :

$$q_1 = \frac{-650-150}{2\times(-5)} = 80 \qquad \text{et} \qquad q_2 = \frac{-650+150}{2\times(-5)} = 50.$$

Les deux points morts correspondent à une production de 50 ou 80 unités.

3 On a : $B'(q) = -10q + 650$.

$$B'(q) > 0 \iff -10q + 650 > 0 \iff q < 65.$$

La fonction B est donc croissante pour $q < 65$ et décroissante ensuite.
Le bénéfice est donc maximal pour $q = 65$.
On a alors $B(65) = 1\,125$ euros.

18 Variations

Enoncé p. 67

Lycée Charlemagne, Paris

En tant que fonction rationnelle (quotient de polynômes), f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,-4\}$ et dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition. Les numérateur et dénominateur vont se dériver comme des produits.

On pose :

$$\begin{cases} g(x) = (x+1)(x+2) & g'(x) = 1(x+2) + (x+1)1 = 2x+3 \\ h(x) = (x+3)(x+4) & h'(x) = 1(x+3) + (x+4)1 = 2x+7 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} \\ f'(x) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2} \\ &= \frac{(2x+3)(x+3)(x+4) - (2x+7)(x+1)(x+2)}{(x+3)^2(x+4)^2} \\ &= \frac{(2x^2+9x+9)(x+4) - (2x^2+9x+7)(x+2)}{(x+3)^2(x+4)^2} \\ &= \frac{(4x^2+20x+22)}{(x+3)^2(x+4)^2} \\ &= \frac{2(2x^2+10x+11)}{(x+3)^2(x+4)^2} \quad \text{(on a développé, ordonné et simplifié !)} \end{aligned}$$

Les variations de f se déduisent du signe de f'. Ici, la dérivée f' est suffisamment factorisée pour commencer l'étude de signe (les facteurs sont tous de degré 1 ou 2 ; on sait étudier leur signe). *On cherche les facteurs de signe constant.*

Les facteurs se trouvant au dénominateur de f' sont toujours positifs, car ce sont des carrés.

La dérivée f' est donc du signe du trinôme $2x^2 + 10x + 11$. On en étudie le signe :

$$\Delta = 10^2 - 8 \times 11 = 100 - 88 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2.$$

$2x^2 + 10x + 11$ a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-10 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-5 - \sqrt{3}}{2} \approx -3{,}37 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{3}}{2} \approx -1{,}63.$$

$$2x^2+10x+11=0 \iff x=x_1 \quad \text{ou} \quad x=x_2$$
$$2x^2+10x+11>0 \iff x\in\,]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$$

En conclusion :

- f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-4[$, $]-4\,;x_1[$ et $]x_2\,;+\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $]x_1\,;-3[$ et $]-3\,;x_2[$.

19 Étude de fonction rationnelle

Enoncé p. 67

Lycée Descartes, Tours

1 Une fonction rationnelle n'est pas définie là où son dénominateur s'annule.

Or, ici :

$$x^2+3\geqslant 3>0 \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 On a :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x+3)(x^2+3)-2x(x^3-x^2+3x+5)}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{x^4+6x^2+9-16x}{(x^2+3)^2}.$$

Il suffit de développer l'expression proposée pour démontrer l'égalité :

$$\frac{(x-1)^2(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{(x^2-2x+1)(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{x^4+2x^3+9x^2-2x^3-4x^2-18x+x^2+2x+9}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2}.$$

Les variations de f se déduisent du signe de sa dérivée. Examinons quels facteurs de f' peuvent changer de signe.

- Pour tout x, $(x-1)^2\geqslant 0$ et $(x-1)^2=0$ pour $x=1$.
- Pour tout x, $(x^2+3)^2>0$.
- Le trinôme x^2+2x+9 a pour discriminant : $\Delta=4-4\times 9=-32<0$. Il n'y a donc aucune racine et le trinôme est de signe constant, positif.

Tous les facteurs de f' sont donc positifs ou nuls. f' est donc toujours strictement positive, sauf en $x=1$ où elle s'annule (un tableau de signe

n'est pas utile). On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (bien que de pente nulle en 1).

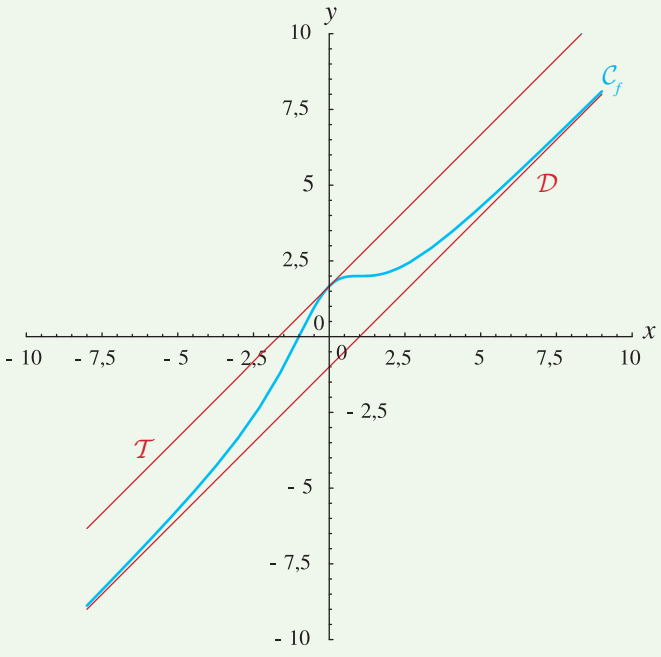
3 Si la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en A est parallèle à $\mathcal{D}$, cela signifie que $\mathcal{T}$ a même coefficient directeur que $\mathcal{D}$. Le point cherché $A\big(a, f(a)\big)$ est donc tel que $f'(a) = 1$ puisque le coefficient directeur de $\mathcal{D} : y = x - 1$ vaut 1.

$$\begin{aligned}
& f'(a) = 1 \\
\iff & \frac{(a-1)^2(a^2+2a+9)}{(a^2+3)^2} = 1 \\
\iff & a^4 + 2a^3 + 9a^2 - 2a^3 - 4a^2 - 18a + a^2 + 2a + 9 = a^4 + 6a^2 + 9 \\
\iff & 6a^2 - 16a = 6a^2 \\
\iff & 16a = 0 \\
\iff & a = 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, $f(0) = \dfrac{5}{3}$. Le point recherché est donc $A\left(0\,;\dfrac{5}{3}\right)$.

La droite recherchée est d'équation : $y = x + \dfrac{5}{3}$.

4 Courbe représentative de f dans un repère orthonormé :



CORRIGÉS

20 Théorème des valeurs intermédiaires

Enoncé p. 68

Lycée Jacques Monod, Clamart

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^3+2x^2-1}+1$.

1 Il s'agit d'une fonction composée, dans l'ordre, d'un polynôme du troisième degré, de la fonction racine, et de la fonction affine $x \mapsto x+1$:

$$x \mapsto x^3+2x^2-1 \mapsto \sqrt{x^3+2x^2-1} \mapsto \sqrt{x^3+2x^2-1}+1.$$

Comme la fonction racine n'est définie que sur $[0\,;+\infty[$, la composée f n'est définie que sur un intervalle I sur lequel x^3+2x^2-1 est positif. On est donc amené à étudier le signe du polynôme $P(x)=x^3+2x^2-1$.

- On a :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^3+x^2)+(x^2-1) \\ &= x^2(x+1)+(x+1)(x-1) \\ &= (x+1)(x^2+x-1). \end{aligned}$$

- Le trinôme (x^2+x-1) a pour discriminant :

$$\Delta = 1^2-4\times 1\times(-1)=5.$$

Il a donc deux racines :

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1{,}6 \quad \text{et} \quad \beta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}6.$$

- D'où le tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$		α		-1		β		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x^2+x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite $D_f=[\alpha\,;1]\cup[\beta\,;+\infty[$.

La fonction f est continue sur $I_1=[\alpha\,;-1]$ et sur $I_2=[\beta\,;+\infty[$.

2 f est bien définie sur $I=[1\,;2]$ puisque $I\subset[\beta\,;+\infty[$.

f est de la forme $\sqrt{u}+1$, avec $u(x)=x^3+2x^2-1$ donc :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2-1}}=\frac{x(3x+4)}{2\sqrt{x^3+2x^2-1}}.$$

Sur I, $x>0$, $3x+4>0$ et $2\sqrt{x^3+2x^2-1}>0$ donc $f'(x)>0$ sur I.

La fonction f est donc strictement croissante sur I.

3 Vu que $f(1)=1+\sqrt{2}$ et $f(2)=1+\sqrt{15}$, on a $f(1)<3<f(2)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, f prend au moins une fois la valeur 3 sur l'intervalle $[1\,;2]$. Comme f est strictement croissante, elle prend la valeur 3 exactement une seule fois. Donc $f(x)=3$ admet une unique solution γ.

En programmant la calculatrice avec un pas de calcul de 0,01, on obtient une valeur approchée de γ à 0,01 près : $\gamma \approx 1{,}24$.

x	1,24	γ	1,25
$f(x)$	$\approx 2{,}995$ ↗	0	↗ $\approx 3{,}019$

21 Discussion du nombre de solutions

Enoncé p. 68

Lycée Virlogeux, Riom

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = 2x^3 - 6x$.

1 On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6 \\ &= 6(x^2 - 1) \\ &= 6(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

La règle du signe du trinôme donne le signe de $f'(x)$, d'où le tableau de variations :

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	4	↘	-4	↗	4

2 $f(-2) = -4$ et $f(-1) = 4$. f est continue et strictement croissante sur $[-2\,;-1]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle.

En utilisant le même raisonnement, on trouve une solution unique sur l'intervalle $[-1\,;1]$ et sur l'intervalle $[1\,;2]$, donc en tout exactement 3 solutions.

3 Si $k < -4$, il n'y a pas de solutions.
Si $k = -4$, il y a deux solutions, -2 et 1.
Si $-4 < k < 4$, il y a trois solutions.
Si $k = 4$, il y a deux solutions, -1 et 2.
Si $k > 4$, il n'y a pas de solution.

22 Tangentes

Enoncé p. 68

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - x^3$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

CORRIGÉS

1 On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 - 3x^2 \\ &= 3(1 - x^2) \\ &= 3(1 - x)(1 + x). \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-2	↗	2	↘	

2 $f(2) = -2$; $f'(2) = -9$. L'équation de $\mathcal{D}_1$ est donc $y = -9(x-2) - 2$ ou $y = -9x + 16$.

$f(0) = 0$; $f'(0) = 3$. L'équation de $\mathcal{D}_2$ est donc $y = 3x$.

3 Les coordonnées du point A vérifient :

$$\begin{cases} y &= 3x \\ y &= -9x + 16 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 12x = 16 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = 4 \end{cases}$$

A a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3} ; 4\right)$.

4 Cette tangente, si elle existe, a pour coefficient directeur -9. Il faut donc trouver x différent de 2 tel que $f'(x) = -9$.

$$\begin{aligned} f'(x) = -9 &\iff 3 - 3x^2 = -9 \\ &\iff 12 = 3x^2 \\ &\iff x^2 = 4 \\ &\iff x = 2 \text{ et } x = -2. \end{aligned}$$

Donc la tangente parallèle à $\mathcal{D}_1$ se trouve au point d'abscisse -2.

$f(-2) = 2$.

Elle a donc pour équation $y = -9(x+2) + 2$ ou encore $y = -9x - 16$.

Chapitre 3

Fonctions exponentielles

Plan du chapitre

1. Fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$
2. Fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$
3. Fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

1 Fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$

Exercice type 1 — Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

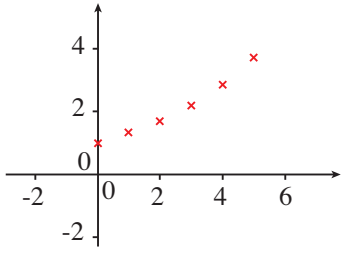
Le jour de sa naissance, la mère de Clara a placé 2 000 euros sur un livret A au taux annuel de 2,25 % à intérêts composés. On suppose que le taux reste constant pendant toute la durée du placement.

1. En supposant que Clara ne touche pas à cet argent, quelle sera la somme acquise le jour de ses 18 ans ?
2. Combien de temps supplémentaire devrait-elle attendre pour que la somme atteigne 4 000 euros ? (on arrondira à l'année supérieure).
3. Quel aurait dû être le taux, arrondi au centième, pour que cette somme soit atteinte le jour de ses 18 ans ?

Voir corrigé page 89

1.1 Représentation d'une suite géométrique et propriété des puissances

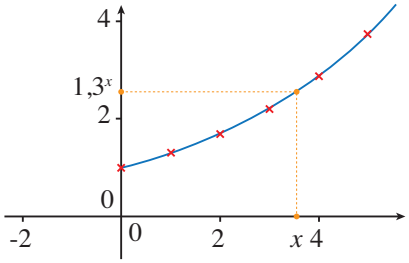
Exemple : Prenons la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1,3. On obtient la représentation de ses 6 premiers termes :



En joignant le plus régulièrement possible les points, on obtient une courbe.

COURS

Pour tout réel x, on décide de noter $1{,}3^x$ l'image de x par la fonction ainsi définie. En programmant sur la calculatrice la fonction $x \mapsto 1{,}3^x$, on obtient une courbe qui joint les points représentant la suite géométrique précédente :



1.2 Fonction exponentielle de base q

Rappel : pour tous n et n' de $\mathbb{N}$,

$$q^n \times q^{n'} = q^{n+n'}.$$

Définition 1

Soit q un nombre réel strictement positif. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- pour tout n de $\mathbb{N}$, $f(n) = q^n$;
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
- pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

La fonction f est appelée fonction exponentielle de base q, et on note, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = q^x$.

Remarque : la relation $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ est appelée relation fonctionnelle.

Propriétés 1

Pour tous x et y réels :

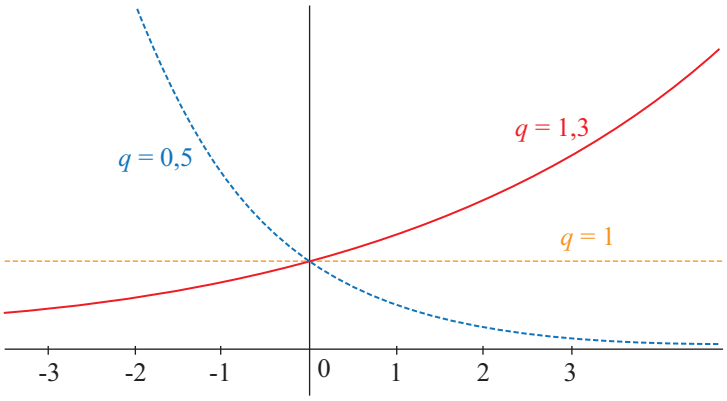
- $q^0 = 1$.
- $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.
- $q^x > 0$ pour tout x.
- $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$.
- $(q^x)^y = q^{yx}$ pour x et y réels.
- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \iff q^{x+y} = q^x \times q^y$.

1.3 Sens de variation de la fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$

Propriété 2 (admise)

- Si $0 < q < 1$, la fonction est décroissante (comme la suite géométrique associée)
- Si $q = 1$, la fonction est constante (comme la suite géométrique associée).
- Si $q > 1$, la fonction est croissante (comme la suite géométrique associée).

On obtient donc trois types de courbes, ici pour $q = 0{,}5$, $q = 1$ et $q = 1{,}3$:



Solution de l'exercice type 1

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 Au bout d'une année, le capital de Clara sera

$$2\,000 + 0{,}022\,5 \times 2\,000 = 2\,000(1 + 0{,}022\,5) = 1{,}022\,5 \times 2\,000.$$

En refaisant le même raisonnement, au bout de 18 ans, les intérêts étant intégrés au capital à la fin de chaque année, son capital sera :

$$2\,000 \times 1{,}022\,5^{18} \approx 2\,985{,}17.$$

2 On programme la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = 1{,}022\,5^x \times 2\,000\ ,$$

et on réalise une table de valeurs par pas de 1. On obtient la table suivante :

X	Y_1
28.000	3729.1
29.000	3813.0
30.000	3898.8
31.000	3986.5
32.000	4076.2
33.000	4167.9

Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Donc Clara devra attendre ses 32 ans, donc 14 ans de plus, les intérêts étant versés à la fin de chaque année.

3 On cherche t tel que $2\,000 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^{18} = 4\,000$. On programme la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 2\,000(1 + 0{,}01x)^{18}$, et on tabule cette fonction. On cherche la valeur de x pour laquelle $f(x) = 4\,000$. On obtient successivement les trois tables suivantes en augmentant la précision :

X	Y_1
0.0000	2000.0
1.0000	2392.3
2.0000	2856.5
3.0000	3404.9
4.0000	4051.6
5.0000	4813.2
6.0000	4708.7

X	Y_1
3.4000	3650.9
3.5000	3715.0
3.6000	3780.1
3.7000	3846.3
3.8000	3913.7
3.9000	3982.1
4.0000	4051.6

X	Y_1
3.9000	3982.1
3.9100	3989.0
3.9200	3995.9
3.9300	4002.8
3.9400	4009.8
3.9500	4016.7
3.9600	4023.7

Le taux doit donc au moins être égal à 3,93%.

Voir énoncé page 87

2 Fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$

Exercice type 2 — Cité scolaire internationale, Grenoble

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;5[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 8$.

1 Montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^x$.

2 Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

3 Dresser le tableau de variations complet de f sur son ensemble de définition.

4 **(a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0\,;5[$ une unique solution que l'on notera a.

(b) Montrer que $2{,}040 < a < 2{,}041$.

(c) En utilisant les questions précédentes, donner le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x sur $[0\,;5[$.

...

Exercice type 2 (suite) — Cité scolaire internationale, Grenoble

Partie B

Une entreprise fabrique x milliers d'objets, avec x appartenant à $[0\,;\,5]$.
La fonction f de la partie A modélise les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en centaines d'euros.
Pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise des bénéfices, et si x est négatif l'entreprise subit une perte.
En utilisant les résultats de la partie A, déterminer à partir de combien d'objets produits l'entreprise commence à réaliser des bénéfices.

Voir corrigé page 93

2.1 Définition

Définition 2

Il existe une unique fonction de la forme $x \mapsto q^x$ qui admet pour nombre dérivé 1 en 0. La base de cette fonction est appelée e, et $e \approx 2{,}718$. La fonction se note exp : $x \mapsto e^x$.

Remarque : quand on parle de la fonction exponentielle, il s'agit explicitement de la fonction exponentielle de base e.

2.2 Propriétés

Propriétés 3

Ces propriétés se déduisent directement de la définition ou des propriétés générales des fonctions exponentielles :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$; $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.
- La fonction étant strictement croissante :
$$e^a < e^b \iff a < b \quad \text{et} \quad e^a = e^b \iff a = b.$$
- Propriétés algébriques : pour tout n et tous x et y réels :

$e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$; $(e^x)^n = e^{nx}$; $e^x > 0$;

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$; $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; $e^x > 1 \iff x > 0$.

COURS

2.3 Étude de la fonction exponentielle

2.3.1 - Dérivée

Propriété 4

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée : $\exp'(x) = \exp(x)$.

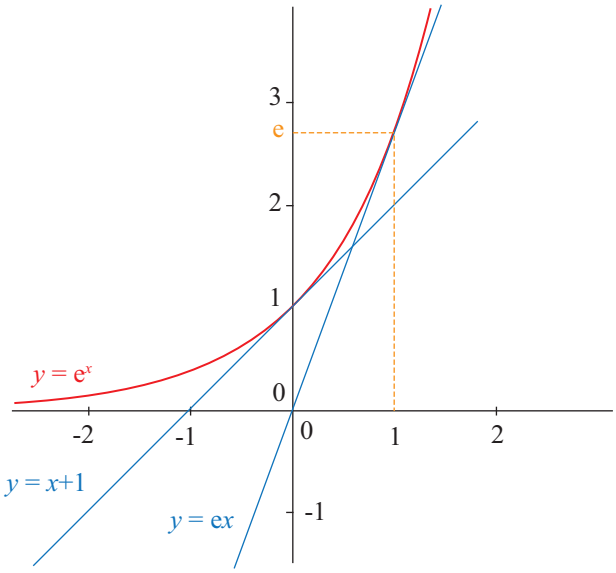
On en déduit donc le tableau de variations suivant pour $f(x) = \exp(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$			$+$				
$\exp(x)$		↗		↗	e	↗	
			1				

2.3.2 - Tangentes à connaître

- La tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.
- La tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 a pour équation $y = ex$.

2.3.3 - Représentation graphique



Solution de l'exercice type 2 — Cité scolaire internationale, Grenoble

1 $f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$.

2 Au point d'abscisse 0, on a $f'(0) = 0$ et $f(0) = -9$.
Donc l'équation de la tangente est $y = -9$ (il s'agit d'une tangente horizontale).

3 Sur $[0\,;5[$, $x > 0$, et $e^x > 0$. Donc la dérivée est positive.
$f(0) = -9$, et $f(5) = 5e^5 - e^5 - 8 = 4e^5 - 8 \approx 585{,}65$.
On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-9	↗	$4e^5 - 8$

4 **(a)** Sur $[0\,;5]$, f est continue par composée de sommes et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Elle est également strictement croissante et 0 appartient à $\big[f(0)\,;\,f(5)\big]$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\,;5]$.

(b) À la calculatrice, on trouve $f(2{,}040) < 0$ et $f(2{,}041) > 0$, donc $2{,}040 < a < 2{,}041$.

(c) D'après ce qui précède, $f(x) < 0$ pour x appartenant à $[0\,;a[$, et $f(x) > 0$ pour x appartenant à $]a\,;5]$.

Partie B

Pour cette question, aucun nouveau calcul n'est nécessaire, il faut juste faire attention aux unités. L'entreprise réalise des bénéfices dès lors qu'elle produit au moins 2 041 objets.

Voir énoncé page 90

3 Fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Exercice type 3 — Cité scolaire internationale, Grenoble

On considère la fonction f définie sur $I = [-1\,;8]$ par $f(x) = (2x-6)e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1 Compléter le tableau de valeurs en arrondissant au centième :

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$										

…

COURS

Exercice type 3 (suite) — Cité scolaire internationale, Grenoble

2. Montrer que $f'(x) = (8 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur I et dresser le tableau de variations de f.
4. Quelle est l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ?
5. Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions sur I ?
   Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur I.

Voir corrigé page 95

3.1 Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Propriété 5

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et pour tout réel de I,

$$\left(\mathrm{e}^u\right)'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

ATTENTION

D'après cette propriété, contrairement à ce que de nombreux élèves écrivent, la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ *n'est pas* e^{-x}, mais :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

Remarque : La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u.

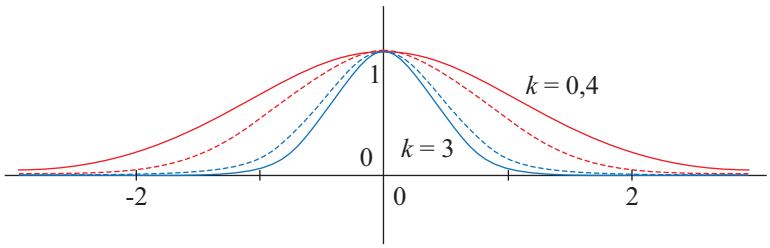
3.2 Un exemple important pour la suite

Comme on le verra aux chapitres 8 et 9, les fonctions de la forme $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx^2}$, k étant un nombre réel strictement positif, jouent un rôle important en probabilités et statistiques. $f_k'(x) = -2kx\mathrm{e}^{-kx^2}$. On obtient donc :

- le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		↗	1	↘	

- les courbes représentatives sur la page suivante, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (ici avec $k = 3\,;\ 2\,;\ 0{,}8\,;\ 0{,}4$, les courbes étant de plus en plus étalées quand k se rapproche de 0) :



Solution de l'exercice type 3

Cité scolaire internationale, Grenoble

1

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-21{,}75$	$-6{,}00$	$-1{,}47$	$-0{,}27$	$0{,}00$

x	4	5	6	7	8
$f(x)$	$0{,}04$	$0{,}03$	$0{,}01$	$0{,}01$	$0{,}00$

2

ATTENTION

La fonction dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\mathrm{e}^{-x} + (2x-6)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(2 - 2x + 6) \\ &= (8-2x)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

3 Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $8 - 2x$.
Par conséquent, $f'(x) > 0$ si $x < 4$, et $f'(x) > 0$ si $x > 4$.
$f(-1) = -8\mathrm{e}$; $f(4) = 2\mathrm{e}^{-4}$; $f(8) = 16\mathrm{e}^{-8}$.
On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-1		4		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-8\mathrm{e}$	↗	$2\mathrm{e}^{-4}$	↘	$10\mathrm{e}^{-8}$

4 $f(0) = -6$; $f'(0) = 8$.
Donc l'équation de $\mathcal{T}$ est : $y = 8x - 6$.

5 f est continue comme produit de fonctions continues. Elle est strictement croissante sur $[-1\,;4]$, et 0 appartient à $\left[f(-1)\,;f(4)\right]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur cet intervalle, que l'on notera a.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Solution de l'exercice type 3 (suite)

Cité scolaire internationale, Grenoble

Sur $[4\,;\,8]$, le minimum de la fonction est atteint en 8 et est positif (même si très proche de 0), donc la fonction ne peut s'annuler sur cet intervalle. Donc sur I, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.
D'après ce qui précède, sur $[-1\,;\,a[$, $f(x)$ est négatif, et sur $]a\,;\,8]$, $f(x)$ est positif.

Voir énoncé page 93

1 QCM Fonction $x \mapsto q^x$

15 min — Corrigé p. 107

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

Margot a placé 7 000 euros en vue de pouvoir s'acheter une voiture qui coûte 10 000 euros.

1 Si elle place son argent au taux de 5 %, il lui faudra, pour avoir ses 10 000 euros :

a 5 ans b 7 ans c 8 ans

2 Le taux minimal pour que, en plaçant la même somme, elle n'attende pas plus de 6 ans, serait, arrondi au dixième :

a 6 % b 7 % c 6,2 %

3 La somme minimale qu'elle devrait placer au taux de 3 % pour pouvoir s'acheter sa voiture au bout de 3 ans est :

a 9 152 € b 8 500 € c 9 750 €

4 Pour pouvoir s'acheter sa voiture au bout de 3 ans, avec un placement au taux de 2,5 %, il faudrait qu'elle place :

a 9 750 € b 9 286 € c 7 500 €

2 QCM Fonction $x \mapsto e^x$

20 min — Corrigé p. 107

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 Pour tous nombres réels a et b :

a $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{\frac{a}{b}}$ b $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ c $\dfrac{e^a}{e^b} = e^a - e^b$

2 Pour tout x réel et tout n entier relatif :

a $(e^x)^n = e^{x^n}$ b $(e^x)^n = e^{nx}$ c $(e^x)^n = e^{x+n}$

3 L'équation $e^{x^2-4x} = e^{-4}$ a :

a une solution b deux solutions c aucune solution

4 L'ensemble $\mathcal{S}$ solution de l'inéquation $e^{x^2-x-3} \leq \sqrt{e}$ est :

a $\left]\dfrac{1-\sqrt{15}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{15}}{2}\right[$ b $\left[\dfrac{1-\sqrt{15}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{15}}{2}\right]$

c l'ensemble vide

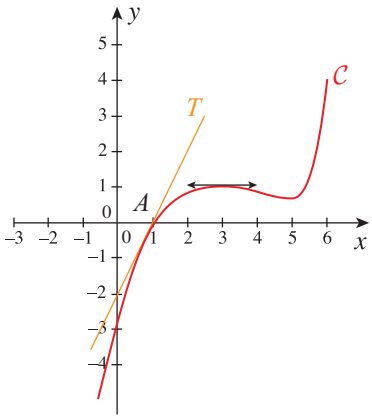
3 QCM Interprétation d'un graphique

20 min — Corrigé p. 108

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

On considère la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f définie et dérivable sur $]-\infty ; 6]$. La fonction dérivée de f est notée f'. La droite $\mathcal{T}$ est la

tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(1\,;\,0)$. On admet que la courbe $\mathcal{C}$ est située sous cette tangente $\mathcal{T}$ sur $]-\infty\,;\,6]$.



Partie A

1 L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :

a $y = x - 1$ **b** $y = x - 2$ **c** $y = 2(x - 1)$

2 L'équation $f'(x) = 0$ admet :

a 1 solution **b** 2 solutions **c** aucune solution

Partie B

Dans cette partie du QCM, on appelle g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,6]$ par son expression $g(x) = \exp\big(f(x)\big)$.

1 La fonction g est strictement croissante sur :

a $]-\infty\,;\,3]$ **b** $]1\,;\,6]$ **c** $]-\infty\,;\,6]$

2 $g'(1)$ est égal à :

a 2 **b** 0 **c** 2e

3 La fonction g s'annule exactement :

a 1 fois **b** 2 fois **c** 0 fois

4 QCM Fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

20 min Corrigé p. 108

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 4e^{x}$.

1 La fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a $f'(x) = e^{2x} - 4e^{x}$ **b** $f'(x) = 2e^{x}(e^{x} - 2)$

c Ni l'un ni l'autre

2 f est :

a décroissante puis croissante b croissante puis décroissante
c toujours croissante

3 L'équation $f(x) = 0$ admet :

a une solution b deux solutions c aucune solution

4 L'équation $f(x) = 2$ admet :

a une solution b deux solutions c aucune solution

5 Propriétés algébriques

★ 5 min Corrigé p. 109

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Simplifier et factoriser si possible les expressions suivantes :

$$A = \frac{e^{x+y}}{e^x} - e^{2y} \qquad B = \frac{e^{2x+2y}}{e^x e^{2y}}.$$

6 Équation

★ 5 min Corrigé p. 109

Lycée Lacordaire, Marseille

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{e^{3x}e^x}{e^{2x}} - e^x = 0.$$

7 Équation

★ 5 min Corrigé p. 109

Lycée Le Corbusier, Poissy

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$e^{3x-1} \times e^{x+2} = 1.$$

8 Valeurs intermédiaires

★ 20 min Corrigé p. 110

Lycée Victor Hugo, Carpentras

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{e^x + 2}.$$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

Indication : Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

9 Fonction exp[$u(x)$]

★★ 20 min Corrigé p. 110

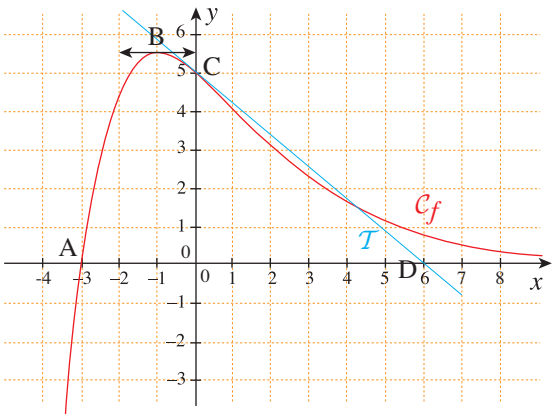
Lycée Victor Duruy, Paris

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points $A(-3\,;0)$, $B(-1\,;5{,}5)$ et $C(0\,;5)$.

La droite (CD) est la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en C, et D a pour coordonnées $(6\,;0)$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer, en justifiant, $f'(-1)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre graphiquement $\exp\big(f(x)\big) = 1$.
3. Déterminer une expression de $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$, et calculer $g'(0)$ et $g'(1)$.
   Dresser le tableau de variations de f puis celui de g sur l'intervalle $[-3\,;6]$.

10 Calcul de dérivée

★ 5 min Corrigé p. 111

Lycée Emmanuel Mounier, Grenoble

Calculer la dérivée de la fonction u : $x \mapsto \mathrm{e}^{3x^2+1}$.

11 Calcul de dérivée

★ 5 min Corrigé p. 112

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[$ par :

$$f(x) = \exp\left(4x - \frac{1}{x}\right).$$

12 À l'aide du graphique

★★ 40 min Corrigé p. 112

Lycée Corneille, La-Celle-Saint-Cloud

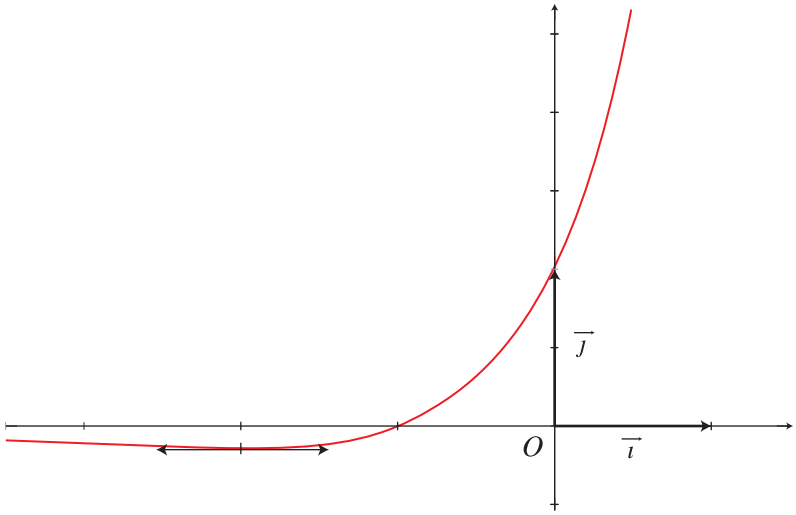
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-après représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x,$$

où a et b sont deux nombres que l'on se propose de déterminer.

La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse -2.



1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.
2. À l'aide des informations de l'énoncé, déterminer les valeurs de a et b.
3. Étudier les variations de la fonction f. Dresser son tableau de variations sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$.
4. Discuter, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$:

$$(x + 1)\mathrm{e}^x = m.$$

13 Valeurs intermédiaires

★ 30 min Corrigé p. 114

Lycée Galilée, Gennevilliers

Montrer que l'équation :

$$\mathrm{e}^{3x+4} = -x + 3$$

admet une solution unique α.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Indication : on étudiera les variations d'une fonction bien choisie.

INTERROS

14 Solutions d'équation

★★ — 20 min — Corrigé p. 114

Lycée Virlogeux, Riom

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}$.

1. Dresser le tableau de variations de f et donner la valeur exacte de son minimum.
2. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $\mathbb{R}_+$. Donner un encadrement au centième de cette solution.

15 Élimination d'un médicament

★★ — 15 min — Corrigé p. 115

Lycée Victor Duruy, Paris

Un groupe de chercheurs étudie l'élimination d'un médicament dans le sang.

À partir d'un instant initial, on mesure pendant 24 heures la concentration en grammes par litre ($g \cdot \mathrm{L}^{-1}$) de médicament restant dans le sang du patient.

Si t mesure le temps en heures, la concentration $f(t)$ à l'instant t est donnée par la formule :

$f(t) = 1{,}2 \times 0{,}67^{t}$, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,24]$.

1. Quel est le sens de variation de f ? Est-il conforme au phénomène étudié ?
2. Les chercheurs utilisent l'algorithme suivant :

```
Entrée
    Saisir une concentration C
Initialisation
    t prend la valeur 0
Traitement
    Tant que 1,2×0,67^t ⩾ C
        t prend la valeur t+1
    Fin de Tant que
Sortie
    Afficher t
```

   (a) Quel est le rôle de cet algorithme ?

   (b) Quelle valeur obtient-on en sortie de l'algorithme lorsque :

   - $C = 0{,}5$?
   - $C = 0{,}2$?

3. On admet que le médicament est éliminé lorsque la concentration est inférieure à $0{,}06\ g \cdot \mathrm{L}^{-1}$. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le médicament sera éliminé.

16 Fonction exponentielle et algorithme ★★

25 min — Corrigé p. 116

Cité scolaire internationale, Grenoble

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{0,25x} - 5\ ,$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1 **(a)** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- Affirmation 1 : La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe une et une seule fois l'axe des abscisses.
- Affirmation 2 : La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe la droite d'équation $y = 5$.
- Affirmation 3 : il existe un unique point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2 On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
      P est un réel strictement positif
Initialisation
      X prend la valeur 0 et Y prend la valeur -1
Traitement
      Tant que Y < 0
          Donner à X la valeur X + P
          Donner à Y la valeur f(X)
          (f étant la fonction définie précédemment)
      Fin de Tant que
Sortie
      Afficher X-P et X
```

(a) On entre $P = 0,1$. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

(b) Que fait cet algorithme ?

(c) On fait fonctionner l'algorithme avec une certaine valeur de P et on obtient en sortie les valeurs 0,892 et 0,893.
Quelle valeur de P avait-on choisi en entrée ?

(d) On entre une valeur de P égale à 0,000 1. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

17 Un graphique incomplet ★★

25 min — Corrigé p. 117

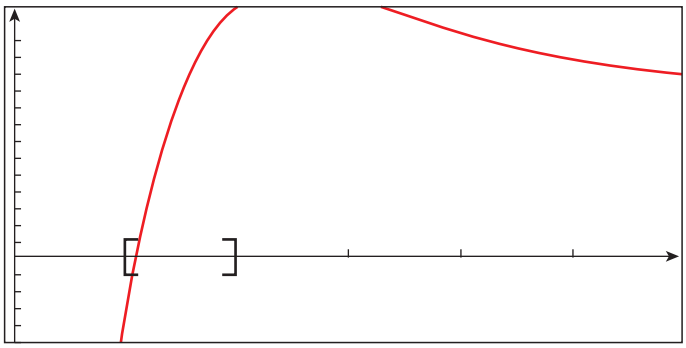
Cité scolaire internationale, Grenoble

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par :

$$f(x) = (200x - 300)\mathrm{e}^{-x-1} + 10.$$

INTERROS

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$:



Partie A : objectif « réaliser un bénéfice maximal »

Alix a mal choisi sa fenêtre d'affichage et on ne peut déterminer le bénéfice maximal.

On va donc étudier la fonction pour trouver ce bénéfice.

1. Donner, pour tout x de $[0\,;\,6]$, $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
   Ce tableau est-il compatible avec le graphique incomplet ci-dessus ?
3. En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
   Quel est le bénéfice maximal, arrondi à l'euro ?
4. Proposer une fenêtre graphique permettant de visualiser le maximum de la fonction.

Partie B : objectif « ne pas vendre à perte »

1. Au vu du graphique ci-dessus, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?
2. Démontrer que sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée a.
3. Donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.
4. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.

18 Étude de fonction

★★ 30 min Corrigé p. 118

Lycée Mezeray, Argentan

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^3-3x}$.

1. Étudier les variations de f et donner son tableau de variations sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. En utilisant la courbe, donner en fonction du réel m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

19 Étude de fonction et équation

★★ 20 min Corrigé p. 119

Lycée Virlogeux, Riom

Soit f la fonction définie sur $]-2\,;2[$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
3. Donner une valeur approchée de la ou les solution(s) à 10^{-2} près.

20 Conjecture et preuve

★★ 25 min Corrigé p. 119

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

1. Tracer la fonction sur la calculatrice et faire une conjecture concernant un encadrement possible de $f(x)$ pour tout x.
2. Prouver que, pour tout x, $-1 < f(x) < 1$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Donner, à 10^{-2} près, en expliquant votre méthode, la plus petite valeur de x telle que $1 - f(x) < 0{,}001$.

21 Positivité d'une fonction

★★ 20 min Corrigé p. 120

Lycée Descartes, Cournon

Soit a un nombre réel. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x + a$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer les valeurs de a telles que, pour tout x, $f(x) \geqslant 0$.

22 Coût moyen minimal

★★★ 80 min Corrigé p. 121

Lycée Chaptal, Paris

Une entreprise achète une machine 30 000 euros. Elle peut la revendre au bout de t années au prix de :

$$v(t) = \frac{30}{0{,}5t + 1} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 8\,,$$

où t est exprimé en années et $v(t)$ en milliers d'euros (k€).

1 **(a)** Au bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50 % de sa valeur d'achat ?

(b) Quelle est sa valeur de revente au bout de 4 ans ?

(c) La différence, exprimée en k€, entre le prix d'achat de la machine et son prix de revente au bout de t années est : $D(t) = 30 - v(t)$.

Montrer que D est une fonction croissante sur l'intervalle $[0\,;\ 8]$.

2 On peut exprimer le coût total d'entretien de la machine en k€, pour une durée de t années d'utilisation, par :

$$E(t) = 2{,}5\,\mathrm{e}^{0{,}4\,t} - t - 2{,}5.$$

(a) Calculer $E'(t)$, où E' désigne la fonction dérivée de E.

(b) Montrer que E est une fonction croissante sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

3 **(a)** Vérifier que le coût d'usage total, en k€, de cette machine est :

$$C(t) = D(t) + E(t) = 27{,}5 - \frac{30}{0{,}5t + 1} + 2{,}5\mathrm{e}^{0{,}4t} - t.$$

(b) Déduire des questions précédentes le sens de variation de C sur $[0\,;\,8]$.

(c) Tracer la courbe représentative Γ de C, dans un plan muni d'un repère orthogonal, avec pour unités : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 4 k€ sur l'axe des ordonnées.

On pourra utiliser le tableau de valeurs suivant :

t	0	1	2	3	4
$C(t)$	0	10,23	16,06	20,80	25,88

t	4,5	5	6	7	8
$C(t)$	28,90	32,40	41,56	54,94	74,83

4 Le coût moyen d'utilisation, en k€ et au bout de t années, est égal à :

$$U(t) = \frac{C(t)}{t} \text{ avec } 1 \leqslant t \leq 8.$$

(a) Soit M le point d'abscisse t de la courbe Γ. Montrer que $U(t)$ est le coefficient directeur de la droite (OM).

(b) Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle $U(t)$ est minimal.

1 QCM Fonction $x \mapsto q^x$

Enoncé p. 97

1 Réponse **c** : en effet, $\begin{cases} 7\,000 \times 1{,}05^7 < 10\,000, \\ 7\,000 \times 1{,}05^8 > 10\,000. \end{cases}$

2 Réponse **c** : en effet, $\begin{cases} 7\,000\left(1+\dfrac{6{,}1}{100}\right)^6 \approx 9\,986, \\ 7\,000\left(1+\dfrac{6{,}2}{100}\right)^6 \approx 10\,042. \end{cases}$

3 Réponse **a** : en effet, $\dfrac{10\,000}{1{,}03^3} \approx 9\,152.$

4 réponse **b** : en effet $\dfrac{10\,000}{1{,}025^3} \approx 9\,286.$

2 QCM Fonction $x \mapsto e^x$

Enoncé p. 97

1 Réponse **b** : $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

2 Réponse **b** d'après le cours.

3 Réponse **a** :

$$\begin{aligned} e^{x^2-4x} = e^{-4} &\iff x^2-4x = -4 \\ &\iff x^2-4x+4 = 0 \\ &\iff (x-2)^2 = 0 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

4 Réponse **b** :

$$\begin{aligned} e^{x^2-x-3} \leq \sqrt{e} &\iff x^2-x-3 \leq \frac{1}{2} \\ &\iff x^2-x-\frac{7}{2} \leq 0. \end{aligned}$$

Or le discriminant du trinôme est $\Delta = 15$; ses deux racines sont $\dfrac{1-\sqrt{15}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$. D'après la règle du signe du trinôme,

$$\mathcal{S} = \left[\frac{1-\sqrt{15}}{2}\,;\,\frac{1+\sqrt{15}}{2}\right].$$

CORRIGÉS

3 QCM Interprétation d'un graphique

Enoncé p. 97

Partie A

1 Réponse c : le coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ est 2, la seule réponse possible est donc $y = 2(x - 1)$.

Remarque : de plus, la droite d'équation $y = 2(x - 1)$ passe bien par le point $A(1 ; 0)$.

2 Réponse b : Graphiquement, $f'(x) = 0$ aux points où la tangente est horizontale. Une seule tangente est marquée comme horizontale, mais la fonction change de sens de variation deux fois, et f est dérivable, donc il y a un autre point où la tangente est horizontale. L'équation $f'(x) = 0$ admet donc deux solutions.

Partie B

1 Réponse a : comme la fonction exp est strictement croissante, par composition, la fonction $g = \exp(f)$ a le même sens de variation que la fonction f sur $]-\infty ; 6]$, comme f est strictement croissante sur $]-\infty ; 3]$, g est strictement croissante sur $]-\infty ; 3]$.

2 Réponse a : par opérations sur les fonctions dérivables, g est dérivable sur $]-\infty ; 6]$ et pour tout réel x de $]-\infty ; 6]$, $g'(x) = f'(x)\exp(f(x))$, donc $g'(1) = f'(1)\exp(f(1))$.
Or, $f'(1) = 2$ et $f(1) = 0$ donc $g'(1) = 2\exp(0)$, soit $g'(1) = 2$.

3 Réponse c : On a $g = \exp(f)$; or, la fonction exponentielle est toujours strictement positive, donc la fonction g est toujours strictement positive donc ne s'annule jamais.

4 QCM Fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Enoncé p. 98

1 Réponse b : $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$.

2 Réponse a : la dérivée s'annule pour $e^x = 2$, et la fonction exponentielle étant croissante, elle est négative pour x tel que $e^x < 2$ et positive ensuite, donc elle passe par un minimum.

3 Réponse a : $f(x) = e^x(e^x - 4)$. On a un produit de facteurs.
Pour tout x, $e^x > 0$, donc la seule possibilité est $e^x = 4$.
Cette équation admet une solution unique car la fonction exponentielle est strictement croissante, continue, et 4 appartient à $]0 ; +\infty[$ (d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones).

4 Réponse a : $e^{2x} - 4e^x = 2 \iff e^{2x} - 4e^x - 2 = 0$.

Posons $e^x = X$.

$$e^{2x} - 4e^x - 2 = 0 \iff \begin{cases} e^x = X \\ X^2 - 4X - 2 = 0 \end{cases}$$

Le trinôme a pour discriminant 24, et deux racines $X_1 = 2 - \sqrt{6}$ et $X_2 = 2 + \sqrt{6}$.

e^x étant strictement positif pour tout x, la première solution ne convient pas car elle est négative.

Il reste donc $e^x = 2 + \sqrt{6}$.

En reprenant le raisonnement de la question 3, cette équation a une solution unique, donc l'équation $f(x) = 2$ a une solution unique.

5 Propriétés algébriques

Enoncé p. 99

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

On utilise ici les propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

$$A = e^{x+y-x} - e^{2y} = e^y - e^{2y} = e^y(1 - e^y).$$

$$B = e^{2x+2y-x-2y} = e^x.$$

6 Équation

Enoncé p. 99

Lycée Lacordaire, Marseille

Une simplification est possible en se ramenant à une situation $e^U = e^V$:

$$\begin{aligned} e^{3x+x-2x} - e^x = 0 &\iff e^{3x+x-2x} = e^x \\ &\iff e^{2x} = e^x \\ &\iff 2x = x \quad \text{par stricte croissance de exp} \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

7 Équation

Enoncé p. 99

Lycée Le Corbusier, Poissy

$$\begin{aligned} e^{3x-1} \times e^{x+2} = 1 &\iff e^{(3x-1)+(x+2)} = 1 \\ &\iff e^{4x+1} = e^0 \\ &\iff 4x + 1 = 0 \quad \text{(par stricte croissance de exp)} \\ &\iff x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

La solution de (F) est donc : $-\frac{1}{4}$.

CORRIGÉS

8 Valeurs intermédiaires

Enoncé p. 99

Lycée Victor Hugo, Carpentras

Un tel énoncé doit faire penser au théorème des valeurs intermédiaires, puisqu'on demande de prouver *l'existence d'une racine*, et non pas de la déterminer exactement.

Posons :

$$g(x) = f(x) - x = \frac{2}{\mathrm{e}^x + 2} - x.$$

Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont celles de l'équation $f(x) = x$. En effet :

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff g(x) = 0.$$

On va étudier les variations de g pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Montrons d'abord que g est dérivable. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + 2$ est non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}$; par inverse puis différence avec $x \mapsto x$, g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{-2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2} - 1 = \frac{-2\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x+2)^2}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = -\frac{\overbrace{2\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^x+2)^2}^{>0}}{\underbrace{(\mathrm{e}^x+2)^2}_{>0}} < 0.$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $g(0) = \dfrac{2}{3} > 0$ et $g(1) = \dfrac{2}{\mathrm{e}+2} - 1 < 0$. L'équation admet donc une unique solution α dans $\mathbb{R}$, comprise entre 0 et 1.

Par balayage à la calculatrice, on obtient que :

$$g(0{,}5) \approx 0{,}05 > 0, \qquad g(0{,}6) \approx -0{,}08 < 0.$$

Comme g est strictement décroissante de $[0{,}5\,;\,0{,}6]$ dans $\big[g(0{,}6)\,;\,g(0{,}5)\big]$, c'est que la solution α est située dans $[0{,}5\,;\,0{,}6]$.

En conclusion, α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$. On a :

$$\alpha \approx 0{,}5 \text{ à } 0{,}1 \text{ près par défaut.}$$

9 Fonction exp[$u(x)$]

Enoncé p. 100

Lycée Victor Duruy, Paris

1 $f'(-1) = 0$. En effet, en B, il y a une tangente horizontale.
$f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite (CD).
Donc : $f'(0) = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0-5}{6-0} = -\dfrac{5}{6}$.

2 $\exp\big(f(x)\big) = 1 \iff f(x) = 0$.
Graphiquement, les solutions sont -3 et 6.

3 La fonction dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$, donc $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$.

Donc $g'(0) = f'(0)e^{f(0)} = -\dfrac{5}{6}e^5$.

De plus, $g'(-1) = f'(-1)e^{f(-1)} = 0$ car $f'(-1) = 0$.

4 • On obtient pour f :

x	-3		-1		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$5{,}5$	↘	$f(6)$

Remarque : le graphique ne permet pas de donner une valeur exacte pour $f(6)$, donc on écrit $f(6)$ dans le tableau de variations.

• Pour g, le sens de variation sera le même que celui de f. En effet, la fonction exponentielle est croissante, donc :

• lorsque f est croissante :

$$x < y \iff f(x) < f(y) \iff \exp\big(f(x)\big) < \exp\big(f(y)\big),$$

ce qui signifie que g est croissante.

• lorsque f est décroissante :

$$x < y \iff f(x) > f(y) \iff \exp\big(f(x)\big) > \exp\big(f(y)\big),$$

ce qui signifie que g est décroissante.

Par ailleurs, $g(-3) = \exp\big(f(-3)\big) = \exp(0) = 1$.
$g(-1) = \exp\big(f(-1)\big) = \exp(5{,}5)$.
$g(6) = \exp\big(f(6)\big)$.
Le tableau de variations de g est donc :

x	-3		-1		6
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	$e^{5{,}5}$	↘	$e^{f(6)}$

10 Calcul de dérivée

Enoncé p. 100

Lycée Emmanuel Mounier, Grenoble

Il s'agit ici de la dérivée d'une fonction composée d'exponentielle, dont l'exposant est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$u(x) = e^{f(x)}, \text{ avec } \begin{cases} f(x) = 3x^2 + 1, & (f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}) \\ f'(x) = 6x \end{cases}$$

$$u'(x) = f'(x) \times e^{f(x)} = 6xe^{3x^2+1}.$$

CORRIGÉS

11 Calcul de dérivée

Enoncé p. 100

Lycée Montesquieu, Bordeaux

On pose ici : $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$; $u(x) = 4x - \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et :

$$u'(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$$

La fonction composée $f = \mathrm{e}^u$ est donc dérivable sur $]-\infty\,;0[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{u(x)},\\ f'(x) &= u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}\\ &= \left(4 + \frac{1}{x^2}\right) \times \mathrm{e}^{4x-\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

12 À l'aide du graphique

Enoncé p. 101

Lycée Corneille, La-Celle-Saint-Cloud

1 La fonction f est le produit uv, avec :

$$u(x) = (ax+b) \text{ et } v(x) = \mathrm{e}^x.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f l'est aussi par produit.

$$f' = u'v + uv' \Rightarrow f'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = (ax+a+b)\mathrm{e}^x.$$

2 D'après ce qui précède, on sait que $f'(-2) = (-2a+a+b)\mathrm{e}^{-2}$.

D'après l'énoncé, la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2 est horizontale, donc son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $f'(-2) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(-2) = 0 &\iff (-2a+a+b)\mathrm{e}^{-2} = (b-a)\underbrace{\mathrm{e}^{-2}}_{\neq 0} = 0\\ &\iff b - a = 0 \iff a = b \end{aligned}$$

Par ailleurs, $A \in \mathcal{C}$ donc $f(0) = 1$ (1 unité en ordonnées prend deux graduations).

$$f(0) = 1 \iff b\underbrace{\mathrm{e}^0}_{=1} = 1 \iff b = 1.$$

Finalement, on obtient $a = b = 1$ et $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.

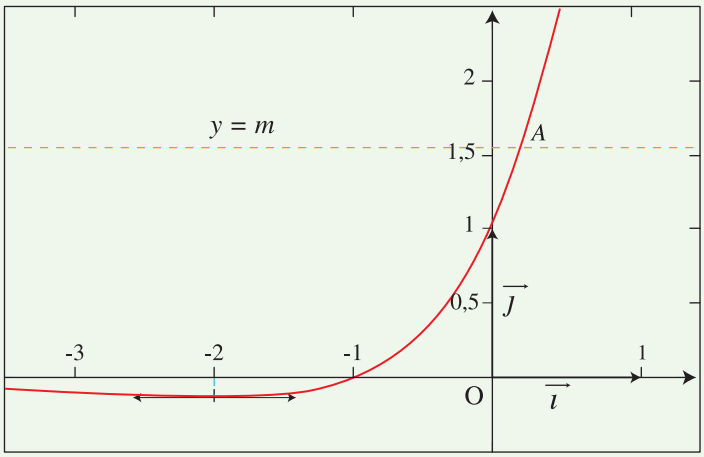
3 En substituant les valeurs de a et b dans le calcul précédent de $f'(x)$:

$$f'(x) = (x+2)\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\text{positif}} \text{ et } f'(x) > 0 \iff x+2 > 0 \iff x > -2.$$

x	-3		-2		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2\mathrm{e}^{-3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}$

$f(-2) = (-2+1)\mathrm{e}^{-2} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$; $f(-2) \approx -0{,}14$ à 10^{-2} près.

4 Il s'agit de résoudre $f(x) = m$, autrement dit, de discuter du nombre d'antécédents de m par f. On va utiliser le tableau de variations de f et le théorème des valeurs intermédiaires sur des intervalles où f est continue et strictement monotone. On peut aussi s'aider d'une résolution graphique, mais celle-ci est malaisée sur $[-3\,;\,1]$.



- Comme f admet pour minimum $-\dfrac{1}{e^2}$, si $m < -\dfrac{1}{e^2}$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution.
- Si $m = -\dfrac{1}{e^2}$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution, -2.
- Si $-\dfrac{1}{e^2} < m \leqslant -2e^{-3}$:

  – f est continue et strictement décroissante sur $[-3\,;\,-2[$ et $f\big([-3\,;\,-2[\big) = \left]-\dfrac{1}{e^2}\,;\,-2e^{-3}\right]$.
  Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, tout m appartenant à $\left]-\dfrac{1}{e^2}\,;\,-2e^{-3}\right]$ admet un unique antécédent x par f dans l'intervalle $[-3\,;\,-2[$, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans $[-3\,;\,-2[$.

  – Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-2\,;\,-1[$ et $f\big(]-2\,;\,-1[\big) = \left]-\dfrac{1}{e^2}\,;\,0\right[$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, tout m appartenant à $\left]-\dfrac{1}{e^2}\,;\,0\right[$ admet un unique antécédent par f dans l'intervalle $]-2\,;\,-1[$, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans $]-2\,;\,-1[$.

D'après les deux tirets précédents, si $-\dfrac{1}{e^2} < m \leqslant -2e^{-3}$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions, une dans $[-3\,;-2[$ et l'autre dans $]-2\,;-1[$.

- Si $2e^{-3} < m \leqslant 2e$, f est continue et strictement croissante sur $]-2\,;1]$, donc l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-2\,;1[$, et elle n'en admet pas ailleurs car sur l'intervalle $[-3\,;-2]$, $f(x) < 2e^{-3}$.
- Si $m > 2e$, l'équation n'admet aucune solution car $2e$ est le maximum absolu de la fonction sur $[-3\,;1]$.

13 Valeurs intermédiaires

Enoncé p. 101

Lycée Galilée, Gennevilliers

On demande de montrer qu'il *existe* une solution et on parle de valeur *approchée*. Clairement, il faut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

On étudie la fonction différence des deux membres de l'équation :

$$f : x \mapsto e^{3x+4} - (-x+3).$$

$f'(x) = 3e^{3x+4} + 1$, donc $f'(x) > 0$ pour tout x ; f est donc continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(-1) \approx -1{,}28$ et $f(0) \approx 51{,}6$.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, 0 appartient à $\big[f(-1)\,;\,f(0)\big]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions continues strictement monotones, $f(x)$ prend la valeur 0 pour une valeur x unique appartenant à l'intervalle $]-1\,;0[$.

x	$-0{,}89$	α	$-0{,}88$
$f(x)$	$\approx -0{,}109$	0	$\approx 0{,}02$

On encadre la solution α grâce à la calculatrice à 10^{-2} près :

$$-0{,}89 < \alpha < -0{,}88, \quad \alpha \approx -0{,}88.$$

14 Solutions d'équation

Enoncé p. 102

Lycée Virlogeux, Riom

1 $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$.

Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$.

Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2 On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

3 $f(1) = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$, $f'(1) = 2\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)$, donc l'équation de la tangente est :

$$y = 2\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)(x-1) + \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$$

$$\text{soit : } y = 2\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)x - \mathrm{e}^2.$$

4 $f(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 2)$; e^x est toujours positif, donc la seule solution possible pour l'équation $f(x) = 0$ est $\mathrm{e}^x - 2 = 0$.
Or, $f(x)$ est négative sur $]-\infty\,;\,0]$ car sur cet intervalle, $\mathrm{e}^x - 1 < 0$.
Par ailleurs, sur $]0\,;\,+\infty[$, f est strictement croissante et continue, $f(0)$ est négatif, $f(1) \approx 1{,}95$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0\,;\,+\infty[$, cette solution étant comprise entre 0 et 1.
En utilisant la calculatrice, on peut encadrer cette solution entre 0,69 et 0,70.

Remarque : lorsque le chapitre sur les logarithmes aura été traité, on pourra trouver la valeur exacte de la solution.
En effet, $\mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$, et $\ln 2$ est environ égal à 0,69.

15 Élimination d'un médicament

Enoncé p. 102

Lycée Victor Duruy, Paris

1 $0 < 0{,}67 < 1$, donc d'après le cours, la fonction $t \mapsto 0{,}67^t$ est décroissante, et la fonction f aussi. Cela est logique pour le phénomène considéré car on sait qu'un médicament est progressivement éliminé dans le sang.

2 **(a)** Cet algorithme détermine au bout de combien d'heures la concentration du médicament dans le sang devient strictement inférieure à une valeur C donnée.
Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la concentration obtenues pour les valeurs successives de t en faisant tourner l'algorithme.

t	0	1	2	3	4	5	6
Concentration dans le sang	1,2	0,804	0,539	0,361	0,242	0,162	0,109

- Si $C = 0{,}5$, on sort du « Tant que » lorsque $t = 3$.
- Si $C = 0{,}2$, on sort du « Tant que » lorsque $t = 5$.

3 Le médicament sera éliminé au bout de 8 heures car $f(7) \approx 0{,}073$ et $f(8) \approx 0{,}049$.

CORRIGÉS

16 Fonction exponentielle et algorithme

Enoncé p. 103

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 **(a)** $f'(x) = 4 \times 0{,}25\mathrm{e}^{0{,}25x} = \mathrm{e}^{0{,}25x}$.

$f'(x)$ est positif pour tout x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) • Affirmation 1 : vraie.

$f(0) = -1$; $f(1) \approx 0{,}136$.

f est une fonction continue et strictement croissante ; de plus, 0 appartient à $\left[f(0)\,;\,f(1)\right]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$, et elle ne peut en admettre d'autre dans $\mathbb{R}$ puisqu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ceci signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe une fois et une seule l'axe des abscisses.

• Affirmation 2 : vraie.

$f(3) \approx 3{,}468$ et $f(4) \approx 5{,}873$.

Donc, en faisant le même raisonnement que précédemment, l'équation $f(x) = 5$ admet une solution et, par conséquent, $\mathcal{C}_f$ coupe la droite d'équation $y = 5$.

• Affirmation 3 : faux.

La dérivée ne s'annule jamais donc il n'y a aucun point où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2 **(a)** Le tableau ci-dessous donne les valeurs successives de X et Y, Y étant arrondi au 1 000e inférieur.

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	-1	$-0{,}899$	$-0{,}795$	$-0{,}689$	$-0{,}580$

X	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Y	$-0{,}468$	$-0{,}353$	$-0{,}235$	$-0{,}115$	0,010

Dans la dernière colonne, Y est positif. Donc les valeurs affichées seront 0,8 et 0,9.

(b) Cet algorithme donne un encadrement d'amplitude P de la solution de l'équation $f(x) = 0$. On démarre à $Y = -1$ car c'est la valeur de $f(0)$.

(c) Ici, l'encadrement a pour amplitude 0,001 donc $P = 0{,}001$.

(d) On peut programmer l'algorithme comme suggéré, mais aussi utiliser la fonction table de la calculatrice, ce qui est plus rapide puisqu'on a déjà un encadrement d'amplitude 0,01.

On obtient en sortie 0,892 5 et 0,892 6.

17 Un graphique incomplet

Enoncé p. 103

Cité scolaire internationale, Grenoble

Partie A

1 $f'(x) = 200\mathrm{e}^{-x-1} + (200x - 300)\left(-\mathrm{e}^{-x-1}\right)$
$= \mathrm{e}^{-x-1}(200 - 200x + 300)$
$= (500 - 200x)\mathrm{e}^{-x-1}$.

2 $\mathrm{e}^{-x-1} > 0$ pour tout x, donc la dérivée est du signe de $500 - 200x$.

Pour $0 < x < 2{,}5$: $500 - 200x > 0$; par conséquent, la dérivée est positive et f est croissante.

Pour $2{,}5 < x < 6$: $500 - 200x < 0$; par conséquent, la dérivée est négative et la fonction est décroissante.

$f(0) = -300\mathrm{e}^{-1} + 10$; $f(2{,}5) = 200\mathrm{e}^{-3{,}5} + 10 \approx 16{,}039$;
$f(6) = 900\mathrm{e}^{-7} + 10$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$2{,}5$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-300\mathrm{e}^{-1}$	↗	$f(2{,}5)$	↘	$f(6)$

3 Il faut vendre 2,5 centaines d'objets, soit 250 objets, et le bénéfice sera alors environ 16,039 milliers d'euros, soit environ 16 039 euros.

4 Compte tenu du bénéfice maximal, il faut prendre X entre 0 et 6, et Y entre -4 (ceci n'a pas vraiment d'importance) et 17.

Partie B

1 La courbe coupe l'axe des abscisses tout près de 1, donc il faudrait vendre au moins 100 objets, mais ce n'est pas très précis.

2 f est continue et strictement croissante sur $[1 ; 2]$ d'après le tableau de variations.

De plus, $f(1) \approx -3{,}5$ et $f(2) \approx 15$, donc 0 appartient à $\left[f(1) ; f(2)\right]$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1 ; 2]$.

3 D'après la calculatrice, $f(1{,}09) < 0$ et $f(1{,}1) > 0$, donc $a \approx 1{,}1$.

4 Il faut produire 110 objets pour ne pas vendre à perte.

CORRIGÉS

18 Étude de fonction

Enoncé p. 105

Lycée Mezeray, Argentan

f est une fonction composée e^u, avec $u : x \mapsto x^3 - 3x$.

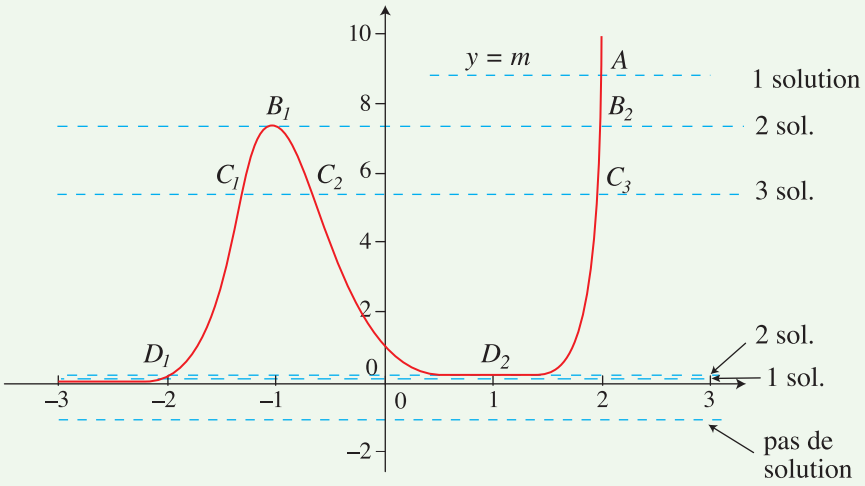
1 La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3x^2 - 3$. Par composition, f est dérivable et $f' = u'e^u$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 3)e^{x^3-3x} \\ &= 3(x^2 - 1)e^{x^3-3x} \\ &= 3(x - 1)(x + 1)e^{x^3-3x}. \end{aligned}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $(x - 1)(x + 1)$ (car $e^{x^3-3x} > 0$ pour tout x). Le trinôme $(x - 1)(x + 1)$ est positif à l'extérieur de l'intervalle de ses racines -1 et 1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	e^2	$\searrow$	e^{-2}	$\nearrow$	

2 On obtient :



3 On fait varier les positions des droites horizontales d'équation $y = m$ et on compte les points d'intersection avec la courbe :

- Si $m \leqslant 0$, il n'y a aucune solution ;
- Si $0 < m < \dfrac{1}{e^2}$, il y a 1 solution ;
- Si $m = \dfrac{1}{e^2}$, alors il y a 2 solutions ;

- Si $m \in \left]\frac{1}{e^2} ; e^2\right[$, alors il y a 3 solutions ;
- Si $m = e^2$, alors il y a 2 solutions ;
- Si $m > e^2$, alors il y a 1 solution.

19 Étude de fonction et équation

Enoncé p. 105

Lycée Virlogeux, Riom

1 On a :

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(2+x)e^x.$$

$f'(x)$ est donc du signe de $x(x+2)$, c'est-à-dire négatif pour x compris entre -2 et 0 ; et positif pour x compris entre 0 et 2.

x	-2		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$\frac{1}{4e^2}$	↘	0	↗	$4e^2$

2 On a $f(-2) \approx 0{,}54$ et f est décroissante sur $[-2 ; 0]$.

Par conséquent, $f(x) < 1$ sur cet intervalle.

L'équation $f(x) = 1$ n'a donc pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[0 ; 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante. 1 est compris entre $f(0)$ et $f(2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe un réel unique a dans $[0 ; 2]$ tel que $f(a) = 1$.

L'équation $f(x) = 1$ admet donc une solution unique sur $[-2 ; 2]$.

3 Grâce à la table de valeurs de f on trouve :

$$f(0{,}7) \approx 0{,}987 \quad \text{et} \quad f(0{,}71) \approx 1{,}025.$$

Puisque f est croissante sur $[0 ; 2]$, cela signifie que a tel que $f(a) = 0$ est compris entre 0,7 et 0,71.

Une valeur approchée de la solution à 10^{-2} près peut donc être 0,71.

20 Conjecture et preuve

Enoncé p. 105

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 À la calculatrice, il semble que pour tout x, $f(x)$ soit compris entre -1 et 1.

2 Pour tout x, $e^{2x} - 1 < e^{2x} + 1$ et comme $e^{2x} > 0$, on a aussi :

$$-e^{2x} - 1 < e^{2x} - 1 ,$$

ce qui donne la double inégalité :

$$-(e^{2x}+1) < e^{2x} - 1 < e^{2x} + 1.$$

En divisant chaque membre par $e^{2x}+1$ qui est strictement positif on trouve l'inégalité cherchée :

$$-1 < f(x) < 1.$$

3 On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$
$$= \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

On constate que $f'(x) > 0$ pour tout x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

4 On cherche la plus petite valeur de x telle que $1 - f(x) < 0{,}001$, c'est-à-dire telle que $f(x) > 0{,}999$. Notons a cette valeur.

On programme la fonction f à la calculatrice, puis on affiche un premier tableau de valeurs par pas de 1 à partir de 0.

Comme $f(3) < 0{,}999 < f(4)$, on en déduit que a est compris entre 3 et 4.

On tabule à nouveau la fonction à partir de 3 par pas de 0,1. On trouve $f(3{,}8) < 0{,}999 < f(3{,}9)$.

On recommence à tabuler à partir de 3,8 par pas de 0,01 et on trouve finalement $f(3{,}8) < 0{,}999 < f(3{,}81)$.

La valeur cherchée est donc $a = 3{,}81$.

21 Positivité d'une fonction

Enoncé p. 105

Lycée Descartes, Cournon

1 Pour tout réel x, $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$. Comme e^x est strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $1+x$, donc positif pour $x > -1$ et négatif sinon. Sachant que $f(-1) = a - e^{-1}$, on peut établir le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$a - \frac{1}{e}$	$\nearrow$	

2 D'après le tableau de variations, le minimum de f est atteint en -1 et vaut $a - \frac{1}{e}$.

On a alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout x si et seulement si $a - \frac{1}{e} \geqslant 0$, c'est-à-dire $a \geqslant \frac{1}{e}$.

22 Coût moyen minimal

Enoncé p. 106

Lycée Chaptal, Paris

1 **(a)** $v(t) = \dfrac{30}{0{,}5t+1} \Rightarrow v(0) = \dfrac{30}{0{,}5\times 0+1} = 30 = v_0$.

On retrouve bien la valeur d'achat annoncée.

On cherche t_0 tel que $v(t_0) \leq 0{,}5\, v_0$, soit :

$$\frac{30}{0{,}5t_0+1} \leq \frac{1}{2} \times 30 \frac{1}{0{,}5t_0+1} \leq \frac{1}{2}$$
$$\iff 0{,}5t_0+1 \geq 2 \iff t_0 \geq 2.$$

La machine aura perdu la moitié de sa valeur initiale au bout de 2 ans.

(b) Au bout de 4 ans, l'entreprise pourra revendre la machine au prix de $v(4)$:

$$v(4) = \frac{30}{0{,}5\times 4+1} = \frac{30}{3} = 10.$$

La valeur de revente de la machine au bout de 4 ans est de 10 000 €.

(c)
$$\begin{aligned} D(t) &= 30 - v(t) \\ &= 30 - \frac{30}{0{,}5t+1} \\ &= 30\left(1 - \frac{1}{0{,}5t+1}\right) \\ &= 30 \times \frac{0{,}5t+1-1}{0{,}5t+1} \\ &= \frac{15t}{0{,}5t+1}. \end{aligned}$$

On calcule la dérivée de D par la formule du quotient :

$$D'(t) = \frac{15(0{,}5t+1) - 15t \times (0{,}5)}{(0{,}5t+1)^2} = \frac{15}{(0{,}5t+1)^2}.$$

On observe que $D'(t) > 0$ (le dénominateur est un carré) ; donc D est une fonction strictement croissante sur son ensemble de définition $[0\,;\,8]$.

2 **(a)** $E(t) = 2{,}5\mathrm{e}^{0{,}4t} - t - 2{,}5$ est dérivable en tant que somme d'une exponentielle et d'une fonction affine (sur tout $\mathbb{R}$ donc *a fortiori* sur $[0\,;8]$) :

$$E'(t) = 2{,}5 \times 0{,}4 \times \mathrm{e}^{0{,}4t} - 1 = \mathrm{e}^{0{,}4t} - 1.$$

(b) On sait, d'après l'ensemble de définition, que $t \geq 0$. Cherchons le signe de $E'(t)$.

$$\begin{aligned} E'(t) = 0 &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} - 1 = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} = 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} = \mathrm{e}^{0} \\ &\iff t = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'(t) > 0 &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} - 1 > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} > 1 \\ &\iff 0{,}4t > 0 \\ &\iff t > 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, E' est strictement positive sur $]0\,;8]$ et nulle en $t = 0$. E est donc une fonction strictement croissante sur $[0\,;8]$.

3 **(a)** Le coût total de la machine est composé de la partie d'investissement « utilisée » depuis son achat, à laquelle il faut rajouter le prix de son entretien.

$$\begin{aligned} C(t) &= D(t) + E(t) \\ &= \underbrace{30 - \frac{30}{0{,}5t+1}}_{D(t)=30-v(t)} + 2{,}5\mathrm{e}^{0{,}4\times t} - t - 2{,}5 \\ &= 27{,}5 - \frac{30}{0{,}5t+1} + 2{,}5\mathrm{e}^{0{,}4\times t} - t. \end{aligned}$$

(b) On a $C(t) = D(t) + E(t)$. Or, d'après les questions précédentes, D et E sont des fonctions strictement croissantes sur $[0\,;8]$. Leur somme C est donc elle aussi strictement croissante sur $[0\,;8]$. Il est inutile d'étudier de signe de la dérivée.

(c) On trace la courbe en utilisant les points fournis par l'énoncé (attention aux unités graphiques). L'allure de la courbe est indiquée sur le schéma de la page suivante. Une unité sur les abscisses représente une année et une unité sur les ordonnées représente 10 k€.

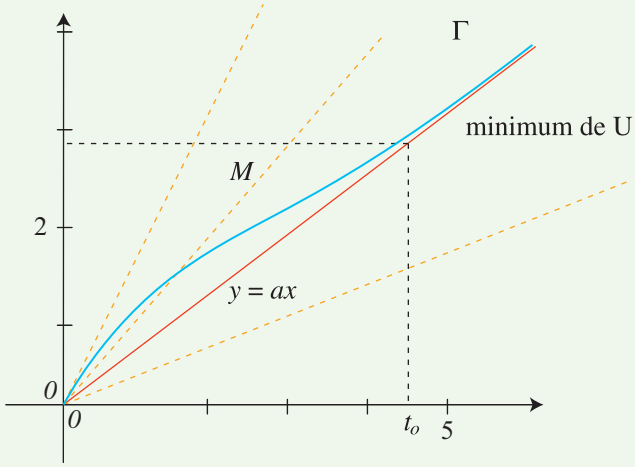
4 **(a)** Le point M d'abscisse $x_M = t$ appartient à Γ si et seulement ses coordonnées vérifient l'équation de Γ : $y = C(t)$.
Donc $y_M = C(t)$. Le coefficient directeur a de la droite (OM) vaut donc :

$$a = \frac{y_M}{x_M} = \frac{C(t)}{t} = U(t).$$

(b) Faire varier le point M sur la courbe Γ, c'est faire varier la droite (OM). Plusieurs positions de (OM) sont indiquées en pointillés sur le graphique.

Comme (OM) passe par l'origine, elle a pour équation $y = ax$. En diminuant son coefficient directeur a, (OM) se rapproche de l'horizontale. Or diminuer a, c'est diminuer $U(t)$. Le coefficient directeur minimal de (OM) est obtenu quand (OM) est tangente à Γ et sous Γ. Cela correspond à une abscisse d'environ 4,5.

Donc, le coût minimum est atteint pour 4 années et demi, environ.



Chapitre 4

Fonction logarithme népérien

Plan du chapitre

1. Fonction logarithme népérien
2. Résolution d'équations du type $x^n = k$ (k réel > 0, n entier > 0)

Exercice type — Lycée Évariste Galois, Sartrouville

1 Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

(a) $\frac{1}{3}\ln 9 - 4\ln\sqrt{3} - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ **(b)** $\frac{\ln 36}{\ln 3 + \ln 2}$ **(c)** $\frac{\ln 5 - \ln 10}{2\ln\sqrt{2}}$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3$

(b) $\ln\left(1-x^2\right) = \ln(2x-1)$

(c) $\left(\ln x\right)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

(d) $\ln x + \ln(x+3) \leq \ln 2 + \ln(x+1)$

3 Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $\frac{2\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1} = 3$ **(c)** $\mathrm{e}^{-0{,}01x} < 0{,}05$

(b) $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x - 4 = 0$ **(d)** $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 < 0$

Voir corrigé page 127

1 Fonction logarithme népérien

Définition 1

Pour tout réel strictement positif x, l'équation $\mathrm{e}^y = x$ (d'inconnue y) admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$. Ce réel y solution est noté $\ln x$. On définit ainsi une fonction appelée *logarithme népérien* :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x.$$

COURS

Le symbole ln obéit aux mêmes conventions d'écriture que exp, et souvent des parenthèses sont inutiles. Par exemple : $\ln 1 = 0$.

À RETENIR

Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $B \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$A = \mathrm{e}^B \iff B = \ln A.$$

Corollaire 1

Si le repère est orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Théorème 1

La fonction ln est continue, dérivable, strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
On a :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0\ ,$$

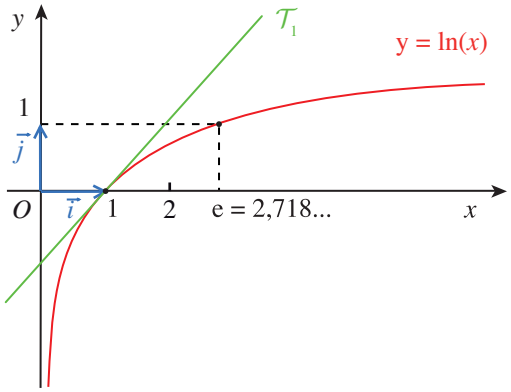
$$\ln(1) = 0.$$

Conséquence : la fonction logarithme étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il en résulte que, pour tous réels x et y strictement positifs :

$$\ln x < \ln y \iff x < y.$$
$$\ln x = \ln y \iff x = y.$$

Remarque : la dérivée de la fonction ln vaut 1 pour $x = 1$, et l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de la fonction ln est $y = x - 1$.

Complément : la courbe représentative de la fonction logarithme est partout au-dessous de sa tangente.



Théorème 2 (Relation fonctionnelle)

Pour tous réels x et y strictement positifs :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Conséquence : pour tout réel x strictement positif et tout entier relatif m :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x, \qquad \ln(x^m) = m \ln x.$$

ATTENTION

Faire preuve de rigueur lors de l'utilisation de la relation fonctionnelle : ne pas scinder $\ln(xy)$ en somme de deux logarithmes sans avoir vérifié et mentionné la stricte positivité de x et y.

2 Résolution d'équations du type $x^n = k$ (k réel > 0, n entier > 0)

On a vu dans le paragraphe 1 que $\ln a = \ln b \iff a = b$ pour tous nombres a et b strictement positifs. Donc, ici, $x^n = k \iff \ln(x^n) = \ln(k)$, ces deux nombres étant positifs. Grâce aux propriétés algébriques des logarithmes, on obtient :

$$\begin{aligned} x^n = k &\iff \ln(x^n) = \ln(k) \\ &\iff n\ln(x) = \ln(k) \\ &\iff \ln(x) = \frac{\ln(k)}{n} \\ &\iff x = \mathrm{e}^{\frac{\ln(k)}{n}}. \end{aligned}$$

Il n'est évidemment pas question d'apprendre cela par cœur, mais de connaître la méthode pour pouvoir l'appliquer lorsqu'elle est utile.

Solution de l'exercice type — Lycée Évariste Galois, Sartrouville

1 **(a)** $a = \frac{1}{3}\ln(3^2) - 4\ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right) - \ln\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ln 3 - \frac{4}{2}\ln 3 + \ln 3$, d'où :

$$a = -\frac{1}{3}\ln 3.$$

(b) $b = \dfrac{\ln(2\times 3)^2}{\ln 3 + \ln 2} = \dfrac{2\times(\ln 2 + \ln 3)}{\ln 3 + \ln 2}$, d'où $b = 2$.

(c) $c = \dfrac{\ln 5 - \ln(2\times 5)}{2\ln(2)^{1/2}} = \dfrac{\ln 5 - \ln 2 - \ln 5}{2\times\frac{1}{2}\ln 2}$ d'où $c = -1$.

Solution de l'exercice type

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

2 N'oubliez pas de déterminer l'ensemble de validité de l'équation ou de l'inéquation et de vérifier que les solutions trouvées appartiennent à cet ensemble.

MÉTHODE

Pour résoudre ces équations (inéquations), ramenez-vous à

$$\ln u = \ln v \quad (\ln u < \ln v)$$

après avoir déterminé l'ensemble de validité.

(a) L'équation est valide pour $1-2x > 0$ et $x+2 > 0$, ce qui équivaut à $x < \dfrac{1}{2}$ et $x > -2$.

L'équation est donc valide sur $\left]-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$. Pour tout x de $\left]-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$:

$$\begin{aligned}
&\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3\\
\iff\ &\ln(1-2x) = \ln\big(3(x+2)\big)\\
\iff\ &1-2x = 3x+6\\
\iff\ &-5x = 5 \iff x = -1
\end{aligned}$$

-1 appartient à l'intervalle $\left]-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ donc l'ensemble des solutions est $S = \{-1\}$.

(b) L'équation est valide si $1-x^2 > 0$ et $2x-1 > 0$, ce qui équivaut à $-1 < x < 1$ et $x > \dfrac{1}{2}$.

L'équation est donc valide sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$. Pour tout x de $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$,

$$\begin{aligned}
\ln\big(1-x^2\big) = \ln(2x-1) &\iff 1-x^2 = 2x-1\\
&\iff -x^2-2x+2 = 0.
\end{aligned}$$

L'équation $-x^2-2x+2=0$ a pour discriminant :

$$\Delta = 12 = \big(2\sqrt{3}\big)^2.$$

Les solutions de l'équation $-x^2-2x+2=0$ sont donc :

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{-2} = -1-\sqrt{3},$$

$$x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = -1+\sqrt{3}.$$

Or, $-1+\sqrt{3} \approx 0{,}732$ et $-1-\sqrt{3} \approx -2{,}732$, donc $-1+\sqrt{3}$ appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$, mais non $-1-\sqrt{3}$.

Solution de l'exercice type — Lycée Évariste Galois, Sartrouville

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation

$$\ln(1-x^2) = \ln(2x-1)$$

est $S = \{-1+\sqrt{3}\}$.

(c) On résout cette équation au moyen d'un changement de variable : $X = \ln x$ avec $x > 0$:

$$(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0 \iff \begin{cases} X^2 + 2X - 3 = 0 \\ X = \ln x. \end{cases}$$

L'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16$ et pour solutions : $X_1 = 1$ et $X_2 = -3$. Alors :

$$(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0 \iff \begin{cases} \ln x = 1 \\ \text{ou} \\ \ln x = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \mathrm{e} \\ \text{ou} \\ x = \mathrm{e}^{-3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$ est donc $S = \left\{\mathrm{e}\,;\, \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right\}$.

(d) L'inéquation $\ln x + \ln(x+3) \leq \ln 2 + \ln(x+1)$ est valide pour $x > 0$, $x + 3 > 0$ et $x + 1 > 0$, ce qui équivaut à $x > 0$.

L'inéquation est donc valide sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$\ln x + \ln(x+3) \leq \ln 2 + \ln(x+1)$$
$$\iff \ln\big(x(x+3)\big) \leq \ln\big(2(x+1)\big).$$

Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$\ln\big(x(x+3)\big) \leq \ln\big(2(x+1)\big) \iff x(x+3) \leq 2(x+1)$$
$$\iff x^2 + x - 2 \leq 0.$$

Le trinôme du second degré $x^2 + x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 9$ et pour racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

L'inéquation $x^2 + x - 2 \leq 0$ a donc pour ensemble de solutions l'intervalle $[-2\,;1]$.

L'inéquation $\ln x + \ln(x+3) \leq \ln 2 + \ln(x+1)$ étant valide sur $]0\,;+\infty[$, l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S =]0\,;1]\,.$$

COURS

Solution de l'exercice type

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

3 La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par opérations sur les fonctions dérivables, et pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x.$$

Comme $f'(x) = \ln x$, alors $f'(x) < 0$ sur $]0\,;1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

4 **(a)** L'équation est valide pour $\mathrm{e}^x - 1 \neq 0 \iff x \neq 0$.
Pour tout x réel différent de 0 :

$$\begin{aligned}\frac{2\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1} = 3 &\iff 2\mathrm{e}^x + 1 = 3(\mathrm{e}^x - 1)\\ &\iff 2\mathrm{e}^x + 1 = 3\mathrm{e}^x - 3\\ &\iff \mathrm{e}^x = 4\\ &\iff x = \ln 4.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \{\ln 4\}$.

(b) L'équation est valide sur $\mathbb{R}$.
On résout cette équation au moyen d'un changement de variable : $X = \mathrm{e}^x$.

$$\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x - 4 = 0 \iff \begin{cases} X^2 - 3X - 4 = 0\\ X = \mathrm{e}^x\end{cases}.$$

L'équation $X^2 - 3X - 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 25$ et pour solutions $X_1 = -1$ et $X_2 = 4$. Alors :

$$\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x - 4 = 0 \iff \begin{cases} \mathrm{e}^x = -1\\ \text{ou}\\ \mathrm{e}^x = 4\end{cases} \iff x = \ln 4$$

car l'équation $\mathrm{e}^x = -1$ n'a pas de solution. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \{\ln 4\}$.

(c) L'inéquation est valide sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-0{,}01x} < 0{,}05 &\iff -0{,}01x < \ln 0{,}05\\ &\iff x > \frac{\ln 0{,}05}{-0{,}01}\\ &\iff x > -100\ln 0{,}05.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$S =]-100\ \ln(0{,}05)\,;+\infty[\,.$$

Solution de l'exercice type (suite) — Lycée Évariste Galois, Sartrouville

(d) L'inéquation est valide sur $\mathbb{R}$.
On résout cette inéquation à l'aide d'un changement de variable : $X = \mathrm{e}^x$:

$$\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 < 0 \iff \begin{cases} X^2 - 2X - 3 < 0 \\ X = \mathrm{e}^x \end{cases}.$$

Le trinôme du second degré $X^2 - 2X - 3$ a pour discriminant $\Delta = 16$ et pour racines $X_1 = -1$ et $X_2 = 3$.
$X^2 - 2X - 3 < 0$ équivaut à $-1 < X < 3$.
D'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 < 0 &\iff -1 < \mathrm{e}^x < 3 \\ &\iff \mathrm{e}^x < 3 \\ &\iff x < \ln 3. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc

$$S =]-\infty\,;\ln 3[\,.$$

Voir énoncé page 125

INTERROS

1 QCM Propriétés du logarithme

5 min — Corrigé p. 141

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 Soit a un réel strictement positif, $\ln\left(\frac{a^2}{25}\right)$ est égal à :

a $2(\ln a - \ln 5)$ b $(\ln a)^2 - (\ln 5)^2$ c $\left(\ln \frac{a}{5}\right)^2$

2 $\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1)$ est égal à :

a 0 b $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$ c $\ln 2$

3 Pour tout réel x strictement supérieur à 2, $\ln(x^2-4) - \ln(x-2)$ est égal à :

a $\ln(x+2)$ b $\ln(x^2-x-2)$ c $\ln(x-2)$

4 $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 - \left(\ln \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$ est égal à :

a 0 b -3 c $\mathrm{e}^2 - 1$

2 QCM Dérivées

10 min — Corrigé p. 141

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 Si $f(x) = (\ln x)^2$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $f'(x)$ est égal à :

a $\frac{1}{x^2}$ b $2\ln x$ c $\frac{2\ln x}{x}$

2 Si $f(x) = \ln(x^2)$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $f'(x)$ est égal à :

a $\frac{2}{x}$ b $2\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$ c $\frac{2\ln x}{x}$

3 Si $f(x) = x\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $f'(x)$ est égal à :

a $\frac{1}{x}$ b $1+\ln x$ c $1+\frac{1}{x}$

3 QCM Équations et inéquations

15 min — Corrigé p. 142

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2\right) = 0$ est :

a 0 b 1 c $\{-1\,;1\}$

2 L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2 - x\right) = 0$ est :

a $\{0\,;1\}$ b $\{1\,;\mathrm{e}\}$ c $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

3 L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - x\ln(0{,}5) \geq 0$ est :

a $]-\infty\,;\ln(0{,}5)]$ **b** $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{\ln(0{,}5)}\right]$ **c** $\left[\dfrac{1}{\ln(0{,}5)}\,;+\infty\right[$

4 Le nombre t tel que $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^6 = 2$ est, arrondi au centième :

a 10,5 **b** 12,24 **c** 12,25

4 QCM Généralités

5 min — Corrigé p. 143

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 Le nombre réel $\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}$ est égal à :

a $\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **b** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **c** $\dfrac{1}{2}$

2 Pour tout réel x strictement inférieur à 1, $\ln(1-x) < 1$ est équivalent à :

a $x < 1$ **b** $x > 1 - \mathrm{e}$ **c** $x > 0$

3 Une ville a vu sa population augmenter de 20 % par an pendant quatre années consécutives, puis de 7 % par an durant les cinq années suivantes, et enfin de 6 % la dixième année. Le pourcentage d'augmentation annuel moyen sur la décennie qui vient de s'écouler s'élève à environ :

a 12,1 % **b** 208 % **c** 11,9 %

4 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(2x+1)$:

a n'a pas de solution

b admet exactement une solution

c admet exactement deux solutions

5 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f'. On donne ci-dessous son tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	↗	e	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

L'équation $f(x) = 4$ admet dans $\mathbb{R}$:

a 3 solutions **b** 2 solutions **c** 1 solution

6 La fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{1+\ln x}$:

a est croissante sur $]0\,;+\infty[$ **b** est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

c n'est pas monotone sur $]0\,;+\infty[$

INTERROS

5 V/F Logarithme et exponentielle

10 min Corrigé p. 144

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 2$.
2. Pour tout réel x, $\ln(e^x + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1)$.
3. Pour tout réel x différent de -1, $\ln(x^3 + 1)^2 = 2\ln(x^3 + 1)$.
4. Pour tout réel x, $\ln(e^{3x} + 1)^2 = 2\ln(e^{3x} + 1)$.

Propriétés de la fonction logarithme népérien

6 Propriétés algébriques ★

10 min Corrigé p. 144

Lycée Berlioz, Vincennes

Exprimer à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$:

- $\ln 4$
- $\ln 36$
- $\ln \dfrac{2}{27}$
- $\ln \sqrt{6}$
- $\ln \dfrac{9}{8}$
- $\ln\left(3e^5\right)$

7 Propriétés algébriques ★

5 min Corrigé p. 145

Lycée Delacroix, Maisons - Alfort

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$$A = 2\ln 4 + \ln 27 - 4\ln 18 + 4\ln\sqrt{6} - \ln\frac{9}{16}.$$

Équations comportant des logarithmes

8 Équations ★

10 min Corrigé p. 145

Lycée Bonaparte, Toulon

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(2x) = -3$
2. $\dfrac{1}{2}\ln(3x+1) = 1$
3. $3\ln(3x^2+1) = 6$

9 Équations ★

10 min Corrigé p. 146

Lycée Hoche, Versailles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln\left(x^2 - 4\right) = \ln(2x + 11)$
2. $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(2x+11)$

10 Équations

★ — 12 min — Corrigé p. 147

Lycée René Cassin, Gonesse

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $2\ln(4x) = \ln 16$

2 $\ln(3x+2) - \ln x = 1$

3 $\ln\big((x-5)(x-1)\big) = 3\ln 2$

11 Équations logarithmiques

★★ — 30 min — Corrigé p. 148

Lycée Henri IV, Paris

1 **(a)** Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout réel X :

$$-X^3 + 2X^2 + X - 2 = (X^2 - 1)(aX + b).$$

(b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels les équations suivantes :

(i) $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$

(ii) $-(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$

2 **(a)** On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30.$$

(i) Vérifier que :

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + x - 15).$$

(ii) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $P(x) = 0$.

(b) Utiliser la question précédente pour résoudre l'équation :

$$2\ln x + \ln(2x-3) = \ln(17x - 30).$$

Inéquations comportant des logarithmes

12 Inéquations

★ — 15 min — Corrigé p. 150

Lycée Galilée, Gennevilliers

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $\ln(-3x+4) \leq 3$

2 $\ln(x^2 - 4) < \ln\big(2x(x+2)\big)$

13 Étude de signe

★ 15 min Corrigé p. 151

Lycée Robespierre, Arras

1 Vérifier que pour tout nombre réel x :

$$3e^{2x} - 4e^x + 1 = (3e^x - 1)(e^x - 1).$$

2 Étudier le signe de $3e^x - 1$ et celui de $e^x - 1$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.
En déduire le signe de $3e^{2x} - 4e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

14 Inéquation

★ 10 min Corrigé p. 152

Lycée Champollion, Grenoble

Résoudre l'inéquation suivante après en avoir précisé les conditions de définition :

$$(\ln x)^2 - 4\ln x + 3 < 0.$$

15 Inéquation

★★ 15 min Corrigé p. 153

Lycée Michelet, Marseille

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 1.$$

Étude de fonctions

16 Étude d'une fonction logarithmique

★ 45 min Corrigé p. 154

Lycée Maximilien Sorre, Cachan

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 3 - x - \ln x$.

1 Étudier les variations de f.

2 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $[2\,;3]$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

3 Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$.

1. Calculer $g'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ et montrer que : $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
2. En déduire les variations de g.
3. En utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, montrer que $g(\alpha) = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
4. En déduire un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 0,02.
5. Étudier le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

17 Problème de synthèse

★★★ 60 min Corrigé p. 157

Lycée Descartes, Antony

Partie 1

Soit la fonction g définie sur $I = [1\,;5]$ par :

$$g(x) = \frac{1 - x\ln x}{x}.$$

1. Étudier le sens de variation de g sur I.
   Construire le tableau de variations de la fonction g.
2. Montrer qu'il existe un unique nombre $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Montrer que $1{,}76 < \alpha < 1{,}77$.
3. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x \in I$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $I = [1\,;5]$ par :

$$f(x) = x + (1-x)\ln x.$$

On désignera par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   Étudier les variations de f sur I.
2. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Soit la fonction k définie sur I par :

   $$k(x) = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x) - x(1 - \ln x).$$

   Calculer la fonction dérivée k' de k. Vérifier que : $k'(x) = f(x) - x$ pour tout $x > 0$.

18 Avec un algorithme

★★ 20 min Corrigé p. 159

Cité scolaire internationale, Grenoble

Partie A

f est la fonction définie sur $[3\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{x+5\ln x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[3\,;+\infty[$.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $[3\,;+\infty[$.
3. Montrer que sur l'intervalle $[3\,;50]$, l'équation $f(x)=0{,}5$ possède une unique solution a puis, à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à l'entier supérieur de a.

Partie B

L'organisation chargée de vendre les billets pour assister aux différentes épreuves d'une grande compétition sportive a mis en vente ces billets environ deux ans avant le début des épreuves.

Une étude portant sur la progression des ventes de ces billets à partir du troisième jour de mise en vente a permis de modéliser l'évolution des ventes de billets selon la fonction f étudiée dans la partie A.

La proportion des ventes effectuées par rapport à l'ensemble des billets x jours après le début de la mise en vente est donnée par la valeur de $f(x)$, arrondie au millième, pour tout x entier de l'intervalle $[3\,;700]$.

Ainsi la valeur approchée de $f(3)$, arrondie au millième, est 0,353. Cela signifie que trois jours après le début de la mise en vente des billets, 35,3 % des billets étaient déjà vendus.

1. En utilisant la partie A, déterminer le nombre de jours nécessaires à la vente de 50 % de l'ensemble des billets.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
      Affecter à X la valeur 3
      Affecter à Y la valeur f(X)
Entrée
      Saisir un nombre P
Traitement
      Tant que Y<P
           Affecter à X la valeur X+1
           Affecter à Y la valeur f(X)
      Fin du Tant que
Sortie
      Afficher X.
```

(a) Si l'utilisateur de cet algorithme choisit 0,8 comme valeur de P, la valeur de sortie de l'algorithme est 90. Que signifie ce résultat pour les organisateurs ?

(b) Si l'utilisateur a choisi 0,4 comme valeur de P, quelle valeur apparaîtra à la sortie de cet algorithme ?

Résolution d'équations du type $x^n = k$ (k réel > 0, n entier > 0)

19 Suites et logarithmes

★★ 25 min Corrigé p. 160

Lycée Turgot, Paris

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'évolution naturel et annuel de 14 pour 1 000. De plus, chaque année, 10 000 personnes arrivent dans ce pays et 3 000 personnes le quittent.

En 2005, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants.

On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.

On note p_n la population de l'année $2005 + n$ exprimée en milliers d'habitants.

1 **(a)** Calculer p_0, p_1 et p_2.

(b) La suite de terme général p_n est-elle géométrique ?
Justifier la réponse.

2 Expliquer pourquoi on obtient, pour tout entier naturel n :

$$p_{n+1} = 1{,}014p_n + 7.$$

3 Démontrer que le suite u définie par $u_n = p_n + 500$ pour tout entier n est géométrique.
Déterminer sa raison et son premier terme.

4 **(a)** Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.

(b) Déterminer la limite de la suite p.

5 **(a)** Combien d'habitants peut-on prévoir en 2014 ?

(b) Étudier les variations de la suite p.

(c) En quelle année la population dépassera-t-elle le double de la population de 2005 ?

INTERROS

20 Placement à intérêt composé

★★ 20 min Corrigé p. 161

Cité scolaire internationale, Grenoble

Un banquier désire calculer le nombre d'années n nécessaire à un placement à intérêts composés au taux t% afin qu'il soit au minimum doublé.

1 **(a)** Vérifier que cela revient à résoudre l'inéquation $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^n \geqslant 2$.

(b) Démontrer que n vérifie alors : $n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}$.

(c) Déterminer n pour les taux suivants : 2 ; 2,5 ; 3 ; 4 ; 6.

2 En 1494, Luca Pacioli écrit qu'un capital placé à intérêts composés au taux t nécessite approximativement $\dfrac{72}{t}$ années pour doubler.

(a) Vérifier l'approximation de Luca Pacioli sur les résultats de la question 1.c.

(b) Qu'y a-t-il d'étonnant dans la conjecture de Pacioli ?

3 Une autre conjecture fut réalisée postérieurement. En voici la démarche :

(a) Compléter le tableau suivant :

x	0,92	0,95	1	1,03	1,1
$x-1$					
$\ln x$					

(b) En déduire que pour des valeurs proches de 1, on peut conjecturer : $\ln x \approx x-1$.

(c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1. Expliquer la conjecture de la question 3.b.

(d) Justifier que pour de petites valeurs de t, $1+\dfrac{t}{100}$ est proche de 1.

Par quelle valeur peut-on alors approximer $\ln\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$?

(e) Montrer que le nombre d'années nécessaires pour qu'un capital double est approximativement $\dfrac{100\ln 2}{t}$. Que penser alors des observations de Pacioli ?

1 QCM Propriétés du logarithme

Enoncé p. 132

1 Réponse **a** : $\ln\left(\dfrac{a^2}{25}\right) = \ln(a^2) - \ln 25 = \ln(a^2) - \ln 5^2$ or $a > 0$ donc $\ln(a^2) = 2\ln a$ d'où :

$$\ln\left(\frac{a^2}{25}\right) = 2\ln a - 2\ln 5 = 2(\ln a - \ln 5)$$

ATTENTION

Ne confondez pas $\ln(a^2) = \ln(a \times a)$ et $(\ln a)^2 = (\ln a) \times (\ln a)$.
Si $a < 0$, alors $\ln(a^2) = 2\ln(-a)$.

2 Réponse **a** :

$$\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) = \ln\big((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\big)$$
$$= \ln\big((\sqrt{2})^2 - 1\big) = \ln 1 = 0.$$

3 Réponse **a** : $\ln(x^2-4) - \ln(x-2) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right) = \ln(x+2)$.

4 Réponse **b** : $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 - \left(\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = 2\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) - \left(\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$.

Or, $\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}} = -\ln \mathrm{e} = -1$ donc :

$$\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 - \left(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = -2 - 1 = -3.$$

2 QCM Dérivées

Enoncé p. 132

1 Réponse **c** : f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par opérations sur les fonctions dérivables. Posons $u(x) = \ln x$; f peut alors s'écrire :

$$f = u^2 = u \times u \qquad \text{et donc :} \qquad f' = u'u + uu' = 2uu',$$

d'où, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}.$$

2 Réponse **a** : puisque x est strictement positif, $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

Donc $f'(x) = \dfrac{2}{x}$.

3 Réponse **b** : f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par opérations sur les fonctions dérivables. Posons $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$, f peut alors s'écrire $f = uv$ et donc $f' = u'v + uv'$. D'où, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

CORRIGÉS

3 QCM Équations et inéquations

Enoncé p. 132

1 Réponse **c** .

L'équation est valide pour $x^2 > 0$ soit sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Pour tout x de $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}\ln\left(x^2\right) = 0 &\iff \ln\left(x^2\right) = \ln 1\\ &\iff x^2 = 1\\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = 1.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2\right) = 0$ est donc $\{-1\,;1\}$.

2 Réponse **c** . L'équation est valide si $x^2 - x > 0$ soit si $x(x-1) > 0$.

L'ensemble de validité de l'équation est donc $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$.

Pour tout x de $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}\ln(x^2 - x) = 0 &\iff \ln(x^2 - x) = \ln 1\\ &\iff x^2 - x = 1\\ &\iff x^2 - x - 1 = 0.\end{aligned}$$

L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 5$ et pour solutions $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ces deux solutions appartiennent à l'ensemble $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2 - x\right) = 0$ est :

$$\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

3 Réponse **c** . L'inéquation est valide sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel,

$$1 - x\ln(0{,}5) \geqslant 0 \iff -x\ln(0{,}5) \geqslant -1 \iff x\ln(0{,}5) \leqslant 1.$$

Or, $0{,}5 < 1$; donc $\ln(0{,}5) < 0$, soit :

$$x\ln(0{,}5) \leqslant 1 \iff x \geqslant \frac{1}{\ln(0{,}5)}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - x\ln(0{,}5) \geqslant 0$ est donc :

$$\left[\frac{1}{\ln(0{,}5)}\,;+\infty\right[.$$

Remarque : comme $\ln(0{,}5) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$, l'ensemble des solutions peut s'écrire aussi :

$$\left[-\frac{1}{\ln 2}\,;+\infty\right[.$$

4 Réponse **c** .

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^6 = 2 \iff \ln\left[\left(1+\frac{t}{100}\right)^6\right] = \ln 2$$
$$\iff 6\ln\left(1+\frac{t}{100}\right) = \ln 2$$
$$\iff \ln\left(1+\frac{t}{100}\right) = \frac{\ln 2}{6}$$
$$\iff 1+\frac{t}{100} = \exp\left(\frac{\ln 2}{6}\right)$$
$$\iff \frac{t}{100} = \exp\left(\frac{\ln 2}{6}\right) - 1$$
$$\iff t = 100\exp\left(\frac{\ln 2}{6}\right) - 100$$
$$\iff t \approx 12{,}25.$$

4 QCM Généralités

Enoncé p. 133

1 Réponse **c** . En effet, $\ln \mathrm{e} = 1$ et $\ln(\mathrm{e}^2) = 2\ln \mathrm{e} = 2$.

2 Réponse **b** . En effet,

$$\ln(1-x) < 1 \iff \ln(1-x) < \ln \mathrm{e}$$
$$\iff 1-x < \mathrm{e}$$
$$\iff x > 1-\mathrm{e}.$$

(L'équation est définie pour $1-x > 0$, donc pour $x < 1$).

3 Réponse **c** . Le coefficient multiplicateur pour les dix années écoulées est : $1{,}2^4 \times 1{,}07^5 \times 1{,}06 \approx 3{,}082$.

Si on appelle t le taux d'augmentation moyen, on a :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{10} \approx 3{,}082$$
$$\iff \ln\left[\left(1+\frac{t}{100}\right)^{10}\right] \approx \ln 3{,}082$$
$$\iff 10\ln\left(1+\frac{t}{100}\right) \approx \ln 3{,}082$$
$$\iff 1+\frac{t}{100} \approx \exp\left(\frac{\ln 3{,}082}{10}\right) \approx 1{,}119.$$

Par conséquent, le pourcentage d'augmentation annuel moyen est environ 11,9 %.

CORRIGÉS

4 Réponse **b** . Il faut d'abord chercher le domaine de validité de l'équation. On veut $x+4>0$, $x-2>0$ et $2x+1>0$. Ces trois conditions sont remplies si $x>2$, donc $D=]2\,;+\infty[$.

Dans D,

$$\begin{aligned}&\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)\\ \iff&\ln\big[(x+4)(x-2)\big]=\ln(2x+1)\\ \iff&(x+4)(x-2)=2x+1\\ \iff&x^2+2x-8-2x-1=0\\ \iff&x^2-9=0.\end{aligned}$$

Cette équation a, dans $\mathbb{R}$, deux solutions : 3 et -3.

Cependant, -3 n'appartient pas à D, donc l'équation de départ a une seule solution : 3.

5 Réponse **c** . Sur $]-\infty\,;1]$, la fonction f admet pour maximum e (environ 2,72) donc l'équation $f(x)=4$ n'a pas de solution. Par contre, sur $]1\,;+\infty[$, 4 appartient à $\big]\sqrt{2}\,;+\infty\big[$, donc l'équation admet une solution.

6 Réponse **a** . En effet, $f'(x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{1+\ln x}$ car $f(x)$ est de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$.

Cette dérivée est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$, donc f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

5 V/F Logarithme et exponentielle

Enoncé p. 134

1 Faux. Comme $-\ln 3=\ln\dfrac{1}{3}$, ce nombre est égal à $5+\dfrac{1}{3}$.

2 Vrai. Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x+1)=\ln\big[\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})\big]$. Comme e^x et $1+\mathrm{e}^{-x}$ sont tous les deux strictement positifs,

$$\ln(\mathrm{e}^x+1)=\ln\mathrm{e}^x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x}).$$

Or, $\ln\mathrm{e}^x=x$. Donc $\ln(\mathrm{e}^x+1)=x+\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)$.

3 Faux. Le nombre x^3+1 peut être négatif, par exemple dans le cas où $x=-2$. Or, la formule $\ln a^n=n\ln a$ n'est valable que lorsque a est un réel strictement positif.

4 Vrai. Le nombre $\mathrm{e}^{3x}+1$ est toujours strictement positif donc on peut appliquer la formule : $\ln a^n=n\ln a$.

6 Propriétés algébriques

Enoncé p. 134

Lycée Berlioz, Vincennes

- $\ln 4=\ln\left(2^2\right)=2\ln 2$.
- $\ln 36=\ln(4\times 9)=\ln\left(2^2\times 3^2\right)=2\ln 2+2\ln 3$.

- $\ln \dfrac{2}{27} = \ln\left(2 \times 3^{-3}\right) = \ln 2 - 3\ln 3.$
- $\ln \sqrt{6} = \ln\left((2 \times 3)^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(2 \times 3) = \dfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3).$
- $\ln \dfrac{9}{8} = \ln 3^2 - \ln(2^3) = 2\ln 3 - 3\ln 2.$
- $\ln\left(3\mathrm{e}^5\right) = \ln 3 + 5\underbrace{\ln \mathrm{e}}_{1} = \ln 3 + 5.$

7 Propriétés algébriques

Enoncé p. 134

Lycée Delacroix, Maisons - Alfort

$$\begin{aligned} A &= 2\ln 4 + \ln 27 - 4\ln 18 + 4\ln\sqrt{6} - \ln\frac{9}{16} \\ &= 2\ln 2^2 + \ln 3^3 - 4\ln(2 \times 3^2) + 4\ln\left((2 \times 3)^{\frac{1}{2}}\right) - (\ln 3^2 - \ln 2^4) \\ &= 4\ln 2 + 3\ln 3 - 4(\ln 2 + 2\ln 3) + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) - 2\ln 3 + 4\ln 2 \\ &= 4\ln 2 + 3\ln 3 - 4\ln 2 - 8\ln 3 + 2\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 3 + 4\ln 2 \\ &= 6\ln 2 - 5\ln 3. \end{aligned}$$

8 Équations

Enoncé p. 134

Lycée Bonaparte, Toulon

1 La condition de validité pour $\ln(2x) = -3$ est que $x > 0$.

$$\begin{aligned} \ln(2x) = -3 &\iff \ln(2x) = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) \\ &\iff 2x = \mathrm{e}^{-3} \text{ (par stricte monotonie).} \end{aligned}$$

Donc la solution est $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3}$ (car $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3} > 0$).

2 L'équation $\dfrac{1}{2}\ln(3x+1) = 1$ n'est valide que si $3x + 1 > 0$ c'est à dire $x > -\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln(3x+1) = 1 &\iff \ln(3x+1) = 2 \iff \ln(3x+1) = \ln(\mathrm{e}^2) \\ &\iff 3x + 1 = \mathrm{e}^2 \quad \text{(par stricte monotonie)} \\ &\iff x = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^2 - 1). \end{aligned}$$

Ceci vérifie la condition de validité, donc $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^2 - 1)$ est solution.

CORRIGÉS

3 L'équation $3\ln(3x^2+1) = 6$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque le trinôme $3x^2+1$ est toujours strictement positif.

$$3\ln(3x^2+1) = 6 \iff \ln(3x^2+1) = 2 \iff \ln(3x^2+1) = \ln \mathrm{e}^2$$
$$\iff 3x^2+1 = \mathrm{e}^2 \iff x^2 = \underbrace{\frac{\mathrm{e}^2-1}{3}}_{>0}$$
$$\iff x = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^2-1}{3}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{\mathrm{e}^2-1}{3}}.$$

L'équation a pour ensemble de solutions $\left\{-\sqrt{\frac{\mathrm{e}^2-1}{3}}\,;\sqrt{\frac{\mathrm{e}^2-1}{3}}\right\}$.

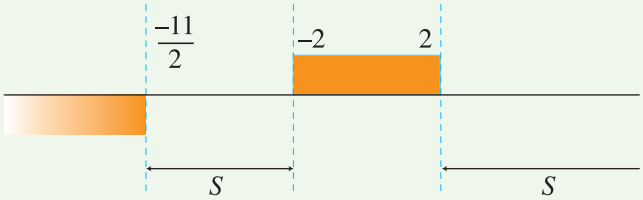
9 Équations

Enoncé p. 134

Lycée Hoche, Versailles

1 D'abord, on s'occupe des conditions d'existence des logarithmes :

$$\begin{cases} x^2-4>0 & \iff x \in]-\infty,-2[\cup]2\,;+\infty[\\ 2x+11>0 & \iff x > -\dfrac{11}{2} \end{cases}$$



Finalement, la condition de validité est :

$$x \in D \text{ avec } D = \left]-\frac{11}{2}\,;-2\right[\cup]2\,;+\infty[.$$

Si $x \in D$, on transforme l'équation sachant que la fonction ln est strictement croissante :

$$\ln\left(x^2-4\right) = \ln(2x+11) \iff x^2-4 = 2x+11$$
$$\iff x^2-2x-15 = 0.$$

Le discriminant du trinôme vaut : $\Delta = 4+4\times 15 = 64 = 8^2$.

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{2-8}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Ces racines sont bien des solutions valides car elles sont dans D. L'équation a donc pour ensemble de solutions : $\{-3\,;5\}$.

2 Cette fois, on doit avoir :

$$\begin{cases} x-2>0 & \iff x>2, \\ x+2>0 & \iff x>-2, \\ 2x+11>0 & \iff x>-\dfrac{11}{2}. \end{cases}$$

Donc on résout dans $D=\,]2\,;+\infty[$:

$$\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln\left[(x-2)(x+2)\right]=\ln\left(x^2-4\right).$$

D'où :

$$\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(2x+11) \iff \ln\left(x^2-4\right)=\ln(2x+11).$$

On est ramené à l'équation de la question 1. Attention, cela ne veut pas dire que l'on va trouver les mêmes solutions, car on ne résout pas dans le même ensemble. En réduisant l'équation, on obtient les mêmes racines : $x_1=-3$ et $x_2=5$. Mais cette fois-ci, on voit que $x_1 \notin D$. Seule x_2 est donc solution.

L'équation admet donc une seule solution : 5.

10 Équations

Enoncé p. 135

Lycée René Cassin, Gonesse

1 On veut résoudre $2\ln(4x)=\ln 16$.

On s'intéresse d'abord aux conditions de définition du logarithme. On pose donc la condition de validité : $4x>0$ c'est-à-dire $x>0$.

Pour résoudre, on se ramène à une équation de la forme $\ln U=\ln V$ afin de pouvoir simplifier :

$$2\ln(4x)=\ln 16 \iff \begin{cases} \ln(16x^2)=\ln 16 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 16x^2=16 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2=1 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ x>0. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions se réduit à $\{1\}$, car la valeur -1 ne satisfait pas la condition de validité $x>0$.

2 Considérons l'équation $\ln(3x+2)-\ln(x)=1$. Pour que les logarithmes soient définis, il faut :

$$\begin{cases} 3x+2>0 \\ x>0 \end{cases}$$

La condition la plus restrictive est $x > 0$. On résout donc :

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{3x+2}{x}\right) = 1 = \ln(\mathrm{e}) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3x+2}{x} = \mathrm{e} \\ x > 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (3-\mathrm{e})x = -2 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3-\mathrm{e}} \\ x > 0. \end{cases}$$

Les deux conditions sont incompatibles ; l'équation n'a donc aucune solution.

3 Soit l'équation $\ln\big((x-5)(x-1)\big) = 3\ln 2$.

$(x-5)(x-1)$ est une fonction polynôme du second degré. Elle est positive à l'extérieur de ses racines 1 et 5. Le logarithme est défini à condition que : $x \in]-\infty\,;1[\cup]5\,;+\infty[$.

Comme ln est strictement croissante :

$$\ln\big((x-5)(x-1)\big) = \underbrace{3\ln 2}_{=\ln(2^3)=\ln 8} \iff (x-5)(x-1) = 8.$$

D'où une équation du second degré à résoudre :

$$x^2 - 6x + 5 = 8 \iff x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\Delta = 36 + 12 = 48 = (4\sqrt{3})^2.$$

$$x_1 = \frac{6-4\sqrt{3}}{2} = 3 - 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+4\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}.$$

Il reste à vérifier si les solutions conviennent.

On voit que x_1 est négatif, donc *a fortiori* inférieur à 1.

Pour x_2, nous allons le vérifier formellement (on peut certes utiliser la calculatrice).

$$3 + 2\sqrt{3} > 5 \iff 2\sqrt{3} > 2 \iff \underbrace{\sqrt{3} > 1.}_{\text{vrai !}}$$

Les deux solutions conviennent, et l'ensemble des solutions est :

$$\left\{3 - 2\sqrt{3}\,;\, 3 + 2\sqrt{3}\right\}.$$

11 Équations logarithmiques

Enoncé p. 135

Lycée Henri IV, Paris

1 **(a)** On pose la factorisation du polynôme par $X^2 - 1$ et on raisonne par identification :

$$\begin{cases} (X^2-1)(aX+b) &= aX^3 + bX^2 - aX - b \\ &= -X^3 + 2X^2 + X - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Donc : $-X^3 + 2X^2 + X - 2 = (X^2-1)(-X+2)$.

(b) **(i)** On utilise la forme factorisée, pour résoudre l'équation polynomiale (en x) :

$$\begin{aligned}-x^3+2x^2+x-2=0 &\iff (x^2-1)(-x+2)=0\\ &\iff x^2-1=0 \text{ ou } -x+2=0\\ &\iff x=1 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=2.\end{aligned}$$

(ii) Soit à résoudre (E) : $-(\ln x)^3+2(\ln x)^2+\ln x-2=0$.
Cette équation est valide pour $x>0$.
Pour se ramener à l'équation précédente, on pose $X=\ln x$.

$$(E) \iff \begin{cases}-X^3+2X^2+X-2=0\\ X=\ln x\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\ln x=-1\\ \text{ou}\\ \ln x=1\\ \text{ou}\\ \ln x=2\end{cases} \iff \begin{cases}x=\mathrm{e}^{-1}\\ \text{ou}\\ x=\mathrm{e}\\ \text{ou}\\ x=\mathrm{e}^2\end{cases}$$

2 **(a)** **(i)**
$$\begin{aligned}(x-2)(2x^2+x-15)&=2x^3+x^2-15x-4x^2-2x+30\\ &=2x^3-3x^2-17x+30\\ &=P(x).\end{aligned}$$

(ii) $P(x)=0 \iff x-2=0$ ou $2x^2+x-15=0$.
Le polynôme $2x^2+x-15$ a deux racines réelles (car $\Delta=1+120=121=11^2>0$) :

$$x_1=\frac{-1-11}{4}=-3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1+11}{4}=\frac{5}{2}.$$

$$P(x)=0 \iff x=2 \text{ ou } x=-3 \text{ ou } x=\frac{5}{2}.$$

(b) $2\ln x+\ln(2x-3)=\ln(17x-30)$.
On commence par poser les conditions de validité :

$$\begin{cases}x>0\\ 2x-3>0\\ 17x-30>0\end{cases} \iff \begin{cases}x>0\\ x>\dfrac{3}{2}\\ x>\dfrac{30}{17}.\end{cases} \iff x>\frac{30}{17}$$

On résout ensuite l'équation :

$$\begin{aligned}2\ln x+\ln(2x-3)&=\ln x^2+\ln(2x-3)\\ &=\ln\left(x^2(2x-3)\right)\\ &=\ln\left(2x^3-3x^2\right).\end{aligned}$$

D'où, pour $x > \dfrac{30}{17}$:

$$\ln\left(2x^3 - 3x^2\right) = \ln(17x - 30)$$
$$\iff 2x^3 - 3x^2 = 17x - 30 \iff P(x) = 0.$$

D'après la question précédente, $P(x) = 0$ équivaut à $x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = \dfrac{5}{2}$.

Parmi ces solutions, -3 ne satisfait pas la condition de validité car : $-3 < \dfrac{30}{17}$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{2\,;\,\dfrac{5}{2}\right\}$.

12 Inéquations

Enoncé p. 135

Lycée Galilée, Gennevilliers

1 On doit résoudre $\ln(-3x + 4) \leq 3$.

La condition de validité est :

$$-3x + 4 > 0 \iff x < \frac{4}{3}.$$

On se ramène à une situation de référence où l'on pourra utiliser la propriété : $\ln(x) \leqslant \ln(y) \iff x \leqslant y$ pour x et y réels strictement positifs. Il faut « équilibrer » l'inéquation en faisant apparaître un logarithme à droite. On écrit 3 sous forme d'un logarithme : $3 = 3 \times \ln \mathrm{e} = \ln \mathrm{e}^3$.

$$\ln(-3x + 4) \leq 3 \iff \ln(-3x + 4) \leq \ln \mathrm{e}^3$$
$$\iff -3x + 4 \leq \mathrm{e}^3 \quad \text{(stricte monotonie de ln)}$$
$$\iff x \geq \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{-3}$$
(l'inégalité change de sens en divisant par -3)
$$\iff x \geq \frac{4 - \mathrm{e}^3}{3}.$$

On obtient finalement deux conditions :

$$x \in \left]-\infty\,;\,\frac{4}{3}\right[\quad \text{et} \quad x \geq \frac{4 - \mathrm{e}^3}{3}.$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\left[\frac{4 - \mathrm{e}^3}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right[.$$

2 On commence par poser les conditions de validité, garantissant l'existence de chaque logarithme.

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ 2x(x+2)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-2 \text{ ou } x>2 \\ x<-2 \text{ ou } x>0 \end{cases}$$ (trinôme positif à l'extérieur des racines)

$$\iff \begin{cases} x\in\,]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[\,, \\ x\in\,]-\infty\,;-2[\cup]0\,;+\infty[\,. \end{cases}$$

Donc :

$$x\in\,]-\infty\,;-2[\cup]2\;+\infty[\,. \qquad (1)$$

Noter que l'on a pris la conjonction des deux conditions, c'est-à-dire l'intersection des ensembles solutions de ces conditions. La condition (1) signifie que l'on doit résoudre dans $]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$.

Par stricte monotonie, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(x^2-4\right)<\ln\left(2x(x+2)\right) &\iff x^2-4<2x(x+2) \\ &\iff x^2-4-2x(x+2)<0. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} x^2-4-2x(x+2) &= (x-2)(x+2)-2x(x+2) \\ &= (x+2)(x-2-2x) \\ &= (x+2)(-x-2) \\ &= -(x+2)(x+2) \\ &= -(x+2)^2. \end{aligned}$$

Donc, l'inégalité équivaut à :

$$(x+2)^2>0. \qquad (2)$$

Le carré $(x+2)^2$ étant positif ou nul pour tout $x\in\mathbb{R}$, la condition (2) équivaut à $x\neq -2$. En résumé, les solutions de l'inéquation doivent vérifier :

$$x\in\,]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[\,, \qquad (1)$$

$$x\neq -2. \qquad (3)$$

La condition (3) est une conséquence de (1). Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[\,.$$

13 Étude de signe

Enoncé p. 136

Lycée Robespierre, Arras

1 Il suffit de développer le second membre pour trouver le résultat :

$$(3\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-1)=3\mathrm{e}^{x+x}-\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+1=3\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^x+1.$$

2 On a :

$$3e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{3} \iff x > \ln\left(\frac{1}{3}\right) \iff x > -\ln 3.$$

De la même façon,

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0.$$

On peut dresser un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\ln 3$		0		$+\infty$
$3e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3e^{2x} - 4e^x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

14 Inéquation

Enoncé p. 136

Lycée Champollion, Grenoble

On a :

$$(\ln x)^2 - 4\ln x + 3 < 0.$$

On résout cette inéquation par un changement de variable : $X = \ln x$, avec $x > 0$.

$$(\ln x)^2 - 4\ln x + 3 < 0 \iff \begin{cases} X^2 - 4X + 3 < 0 \\ X = \ln x. \end{cases}$$

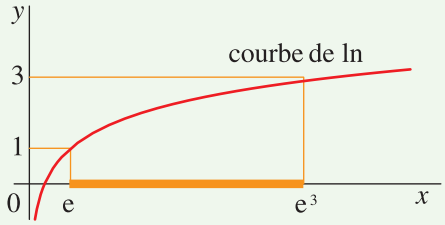
Résoudre $X^2 - 4X + 3 < 0$ est un problème classique de signe d'un trinôme du second degré.

- Le discriminant vaut : $\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4 = 2^2$.
- Il y a donc deux racines qui sont :

$$X_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

- Par la règle du signe d'un trinôme, on déduit que $X^2 - 4X + 3$ est négatif (du signe opposé du coefficient de X^2, qui est 1) entre les racines. On obtient donc :

$$X^2 - 4X + 3 < 0 \iff X \in]1\,;\,3[$$



Il faut maintenant revenir à la variable initiale x :

$$\left.\begin{array}{l} X \in]1\,;\,3[\\ X = \ln x \end{array}\right\} \iff 1 < \ln x < 3 \iff \ln e < \ln x < \ln e^3.$$

Comme ln est strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$\ln \mathrm{e} < \ln x < \ln \mathrm{e}^3 \iff \mathrm{e} < x < \mathrm{e}^3.$$

Les solutions vérifient donc :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad x \in \left]\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^3\right[.$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle : $\left]\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^3\right[$.

15 Inéquation

Enoncé p. 136

Lycée Michelet, Marseille

Soit à résoudre :

$$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 1.$$

Comme toujours, il faut d'abord déterminer la condition d'existence du logarithme. On étudie donc le signe du quotient sous le logarithme.

Le signe du quotient $\dfrac{x+2}{x-2}$ est égal au signe du produit $(x+2)\times(x-2)$. C'est un trinôme, dont les racines sautent aux yeux : $\{-2\,;2\}$, et qui est donc strictement positif à l'extérieur des deux racines.

L'inéquation équivaut au système :

$$\begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 2 & (1)\\ \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right) > \underbrace{1}_{=\ln(\mathrm{e}^1)} \iff \dfrac{x+2}{x-2} > \mathrm{e}. & (2)\end{cases}$$

Résolvons (2) (attention, ne pas multiplier par $x-2$ car son signe est variable !) :

$$\frac{x+2}{x-2} > \mathrm{e} \iff \frac{x+2}{x-2} - \mathrm{e} > 0 \iff \frac{x+2-\mathrm{e}(x-2)}{x-2} > 0$$
$$\iff \frac{(1-\mathrm{e})x + 2(1+\mathrm{e})}{x-2} > 0.$$

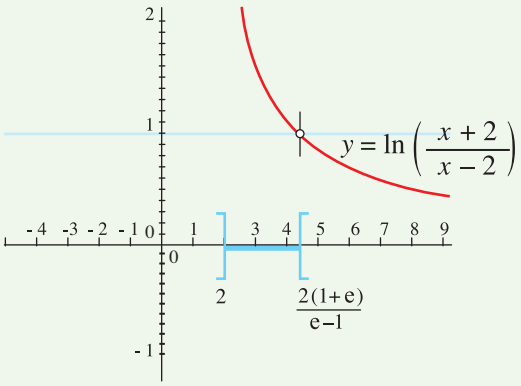
Le numérateur s'annule en $\alpha = \dfrac{2(\mathrm{e}+1)}{\mathrm{e}-1}$. On remarque que son coefficient $(1-\mathrm{e})$ est négatif.

x	$-\infty$		2		α		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-\mathrm{e})x+2(1+\mathrm{e})$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{(1-\mathrm{e})x+2(1+\mathrm{e})}{x-2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Finalement, l'inéquation a pour solutions les nombres x satisfaisant les conditions (1) et (2) en même temps :

(1) $\quad x \in]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[\,,$ $\qquad$ (2) $\quad x \in \left]2\,;\dfrac{2(1+\mathrm{e})}{\mathrm{e}-1}\right[$

L'ensemble des solutions est l'intervalle : $\left]\,2\,;\dfrac{2(1+\mathrm{e})}{\mathrm{e}-1}\,\right[$.



16 Étude d'une fonction logarithmique

Enoncé p. 136

Lycée Maximilien Sorre, Cachan

Partie A

1 La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ d'après les opérations sur les fonctions dérivables.

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x}.$$

Pour tout réel x strictement positif on a $f'(x) < 0$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

On dresse alors le tableau de variations de la fonction f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖	↘

2 La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[2\,;3]$. D'autre part, $f(2) = 1 - \ln 2$ et $f(3) = -\ln 3$, donc $f(2) > 0$ et $f(3) < 0$. Il en résulte, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;3]$.

À l'aide d'un balayage à la calculatrice, on obtient ensuite l'encadrement :

$$2{,}20 \leq \alpha \leq 2{,}21.$$

MÉTHODE

Il importe de bien différencier les questions où l'on demande de résoudre effectivement une équation et celles où l'on demande seulement de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution.
Dans le premier cas, on a en général recours à une résolution algébrique alors que dans le second cas, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones.
On notera que ce type de questions est souvent suivi d'une recherche d'encadrement de la solution à l'aide de la calculatrice puis d'une étude du signe de la fonction.

3 La fonction f s'annule en α et elle est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. On en déduit que f est strictement positive sur $]0\,;\alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

1 La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}(2-\ln x) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Soit : $g'(x) = \dfrac{3-x-\ln x}{x^2} = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

2 Comme x^2 est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$, $g'(x)$ a même signe que $f(x)$. On en déduit que $g'(x)$ est strictement positif sur $]0\,;\alpha[$ et strictement négatif sur $]\alpha\,;+\infty[$.
Il en résulte que la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$. Elle admet un maximum en α.
On dresse alors le tableau de variations de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$g(\alpha)$	↘	

3 On a :

$$g(\alpha) = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(2-\ln\alpha).$$

Or, $f(\alpha) = 0$ donc $3-\alpha-\ln\alpha = 0$.

On en déduit que $\ln \alpha = 3 - \alpha$.
En remplaçant cette valeur dans l'expression de $g(\alpha)$, on obtient :

$$g(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(-1 + \alpha)\ ,$$

soit, après transformation :

$$g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}.$$

4 À la question 2 de la partie A, on a établi l'encadrement :

$$2{,}20 < \alpha < 2{,}21.$$

On peut alors utiliser le résultat de la question précédente :

$$g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

pour donner un encadrement de $g(\alpha)$.
La fonction carré étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$1{,}2^2 < (\alpha - 1)^2 < 1{,}21^2.$$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$\frac{1}{2{,}21} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2{,}20}.$$

On en déduit alors, par produit de nombres positifs :

$$\frac{1{,}2^2}{2{,}21} < \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} < \frac{1{,}21^2}{2{,}20}.$$

À l'aide de la calculatrice, on peut alors donner un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 0,02 :

$$0{,}65 < g(\alpha) < 0{,}67.$$

5 En remarquant que $g(1) = g(\mathrm{e}^2) = 0$ et en exploitant le tableau de variations de la fonction g obtenu à la question 2 de la partie B, on déduit le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
$g(x) < 0$ sur $]0\,;1[$ et sur $]\mathrm{e}^2\,;+\infty[$ et $g(x) > 0$ sur $]1\,;\mathrm{e}^2[$.

17 Problème de synthèse

Enoncé p. 137

Lycée Descartes, Antony

Partie 1

1 On a $g(x) = \dfrac{1 - x\ln x}{x}$.

On détermine les variations de g en étudiant le signe de sa fonction dérivée.

$$g'(x) = \frac{\left(-\frac{x}{x} - 1 \times \ln x\right) x - (1 - x\ln x) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{-x - x\ln x - 1 + x\ln x}{x^2}$$

$$= -\frac{x+1}{x^2}.$$

$g'(x) < 0$ puisque $x > 0 \Longrightarrow x + 1 > 0$ et que $x^2 > 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur I.

D'où le tableau de variations de g :

x	1		5
$g(x)$	1	↘	$\frac{1-5\ln 5}{5}$

2 Le tableau de variations de g montre qu'elle est continue et strictement décroissante sur $I = [1\,;5]$. De plus, $g(1) = 1$ et $g(5) \approx 1{,}41$, donc g s'annule pour une unique valeur $\alpha \in I$ (on a $g(\alpha) = 0$).

Grâce à la calculatrice (avec un pas de calcul de 1 puis de 0,01) on vérifie que :

$$g(1{,}77) \approx -0{,}006 < 0 < g(1{,}76) \approx 0{,}002\,9.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a : $1{,}76 < \alpha < 1{,}77$.

3 On détermine le signe de la fonction g connaissant sa racine α. En effet, g est décroissante et $g(\alpha) = 0$, donc :

$$x < \alpha \iff g(x) > \underbrace{g(\alpha)}_{=0} \iff g(x) > 0.$$

$$g(x) > 0 \iff x < \alpha$$
$$g(x) < 0 \iff x > \alpha$$
$$g(x) = 0 \iff x = \alpha$$

x	1		α		5
$g(x)$		+	0	−	

Partie 2

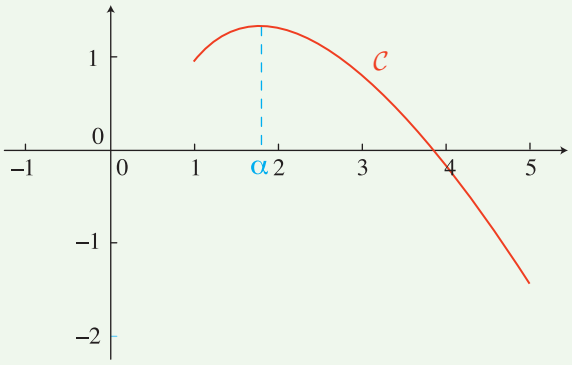
1 Calculons f' :

$$f'(x) = 1 + (-1)\ln x + (1-x)\frac{1}{x} = 1 - \ln x + \frac{1}{x} - 1$$
$$= \frac{1}{x} - \ln x = \frac{1 - x\ln x}{x} = g(x)$$

$f'(x)$ a le même signe que $g(x)$, qu'on connaît d'après la Partie 1.

x	1		α		5
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	

2



3 On va dériver :

$$k : x \mapsto \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x) - x(1 - \ln x)$$

comme la différence des fonctions u et v suivantes :

$u(x) = \dfrac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$ (un produit) $\quad v(x) = x(1 - \ln x)$ (un produit)

$u'(x) = \dfrac{2x}{4}(1 - 2\ln x) + \dfrac{x^2}{4}\left(-2\dfrac{1}{x}\right) \quad v'(x) = 1(1 - \ln x) + x\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{x}{2}(1 - 2\ln x) - \dfrac{2x^2}{4x} \qquad = 1 - \ln x - 1$

$= \dfrac{x}{2} - x\ln x - \dfrac{x}{2} = -x\ln x \qquad = -\ln x$

Finalement :

$$k'(x) = u'(x) - v'(x) = -x\ln x + \ln x = (1-x)\ln x.$$

On reconnaît un « morceau » de $f(x)$: $k'(x) = f(x) - x$.

18 Avec un algorithme

Enoncé p. 138

Cité scolaire internationale, Grenoble

Remarque : ce sujet est très largement inspiré d'un sujet du baccalauréat 2012.

Partie A

1 $f'(x) = \dfrac{1(x+5\ln x) - x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{(x+5\ln x)^2} = \dfrac{5(\ln x - 1)}{(x+5\ln x)^2}$.

2 $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$.

Or, $\ln x - 1 > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > \text{e}$.

Comme l'intervalle de définition de f est $[3\,;+\infty[$, et que $\text{e} < 3$, sur $f'(x) > 0$. f est donc croissante sur $[3\,;+\infty[$.

$f(3) = \dfrac{3}{3+5\ln 3} \approx 0{,}353$.

On obtient le tableau suivant :

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(3)$ ↗	

3 $f(50) \approx 0{,}719$. f est continue, strictement croissante sur $[3\,;50]$, et $0{,}5$ appartient à $\big[f(3)\,;\,f(50)\big]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[3\,;50]$. C'est d'ailleurs aussi l'unique solution sur $[3\,;+\infty[$ d'après la stricte croissance de f.

À la calculatrice, on obtient 13 comme valeur arrondie à l'unité supérieure de a.

Partie B

1 D'après la question 3. de la partie A, il faudra 13 jours pour vendre 50 % des billets.

2 **(a)** Cela signifie que, au bout de 90 jours, on aura vendu 80 % des billets.

(b) On doit chercher, à l'aide de la table de la calculatrice, à partir de quelle valeur de x on obtient $f(x) \geqslant 0{,}4$. On obtient $x = 6$.

CORRIGÉS

19 Suites et logarithmes

Enoncé p. 139

Lycée Turgot, Paris

1 **(a)** $p_0 = 75\,000$ (attention, la population est exprimée en milliers d'habitants).

$p_1 = 1{,}014p_0 + 10 - 3 = 1{,}014p_0 + 7 = 76\,057$.

$p_2 = 1{,}014p_1 + 7 = 77\,129$ (on arrondit bien évidemment à l'unité).

(b) $\dfrac{p_1}{p_0} \approx 1{,}014\,093$ et $\dfrac{p_2}{p_1} \approx 1{,}014\,095$.

Ces quotients n'étant pas égaux, la suite n'est pas géométrique.

2 D'après l'évolution naturelle, la population est chaque année multipliée par $1 + \dfrac{14}{1\,000} = 1{,}014$. De plus, les flux migratoires conduisent à une augmentation de 7 000 personnes, donc 7 milliers de personnes.

3 $$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} + 500 \\ &= 1{,}014p_n + 7 + 500 \\ &= 1{,}014(u_n - 500) + 507 \\ &= 1{,}014u_n. \end{aligned}$$

Donc u est la suite géométrique de raison 1,014 et de premier terme $u_0 = p_0 + 500 = 75\,500$.

4 **(a)** $u_n = u_0 q^n$ pour une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Donc ici, $u_n = 75\,500 \times 1{,}014^n$, et
$p_n = u_n - 500 = 75\,500 \times 1{,}014^n - 500$.

(b) La raison de u est supérieure à 1, donc u_n tend vers $+\infty$, et p_n aussi.

5 **(a)** $2\,014 = 2\,005 + 9$, donc on calcule p_9.

$p_9 = 75\,500 \times 1{,}014^9 - 500 = 85\,064$ en arrondissant à l'unité.

(b) Comme 1,014 est supérieur à 1 et le premier terme positif, la suite u est croissante, et donc p aussi.

(c) On cherche le plus petit n tel que $p_n > 2p_0$.

$$\begin{aligned} p_n > 2p_0 &\iff 75\,500 \times 1{,}014^n - 500 > 150\,000 \\ &\iff 75\,500 \times 1{,}014^n > 150\,500 \\ &\iff 1{,}014^n > \frac{1\,505}{755} \\ &\iff \ln\left(1{,}014^n\right) > \ln\left(\frac{1\,505}{755}\right) \\ &\iff n\ln(1{,}014) > \ln\left(\frac{1\,505}{755}\right) \end{aligned}$$

$$p_n > 2p_0 \iff n > \frac{\ln\left(\frac{1\,505}{755}\right)}{\ln(1{,}014)} \quad \text{car } \ln(1{,}014) > 0.$$

On obtient donc, en arrondissant à l'entier supérieur, $n = 50$.
$2\,005 + 50 = 2\,055$, donc la population aura doublé en 2056.

Remarque : seule la dernière question nécessite l'utilisation des logarithmes. On aurait même pu s'en passer en cherchant avec la table de la calculatrice, par tâtonnement. Mais il n'est pas inutile de retravailler sur les chapitres précédents !

20 Placement à intérêt composé

Enoncé p. 140

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 **(a)** Soit C_n le capital l'année n. On veut trouver n tel que $C_n \geqslant 2C_0$.
Or, pour un placement à intérêts composés, $C_n = C_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ (suite géométrique).
On veut donc $C_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geqslant 2C_0$, ce qui conduit bien à $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geqslant 2$.

(b) $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geqslant 2 \iff \ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geqslant \ln 2$

$$\iff n\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) \geqslant \ln 2$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)} \text{ car } \ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) > 0.$$

(c) On arrondit à l'unité supérieure.
Pour $t = 2$, $n = 36$; pour $t = 2{,}5$, $n = 29$; pour $t = 3$, $n = 24$; pour $t = 4$, $n = 18$; pour $t = 6$, $n = 12$.

2 **(a)** $\frac{72}{2} = 36$; $\frac{72}{2{,}5} = 28{,}8$; $\frac{72}{3} = 24$; $\frac{72}{4} = 18$; $\frac{72}{6} = 12$.

(b) Ces approximations sont étonnamment bonnes sans qu'on sache pourquoi.

3 **(a)** On a le tableau complété suivant :

x	0,92	0,95	1	1,03	1,1
$x - 1$	−0,08	−0,05	0	0,03	0,1
$\ln x$	−0,083	−0,051	0	0,030	0,095

(b) D'après le tableau, $\ln x \approx x - 1$ pour x proche de 1.

(c) $\ln(1) = 0$ et la dérivée en 1 vaut 1.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1 est donc : $y = x - 1$.
Or, lorsque x est proche de 1, la tangente est très proche de la courbe représentative de la fonction ln, et donc $\ln(x)$ est proche de $x - 1$.

(d) t est divisé par 100, donc si t est déjà un petit nombre, $\dfrac{t}{100}$ est encore plus petit.
$\ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \approx 1 + \dfrac{t}{100} - 1$ d'après ce qui précède, donc on peut approximer $\ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$ par $\dfrac{t}{100}$.

(e) On avait en question 1.b. :

$$n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}\ .$$

En remplaçant le dénominateur du second membre par son approximation, on obtient :

$$n \geqslant \frac{\ln 2}{\frac{t}{100}}\ ,$$

donc :

$$n \geqslant \frac{100 \ln 2}{t}.$$

Or, $100 \ln 2 \approx 69{,}3$. On n'est pas très loin du 72 de Luca Pacioli !

Chapitre 5

Fonctions convexes

Plan du chapitre

1. Fonction convexe, fonction concave
2. Convexité et dérivée
3. Positions relatives de courbes

Exercice type — **Lycée Montesquieu, Bordeaux**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 8\ln x$.

1 Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f''(x)$.

2 Étudier le signe de f'' sur $]0\,;+\infty[$.

3 En déduire l'étude de la convexité de f sur $]0\,;+\infty[$ et , le cas échéant, préciser les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion de sa courbe représentative.

Voir corrigé page 167

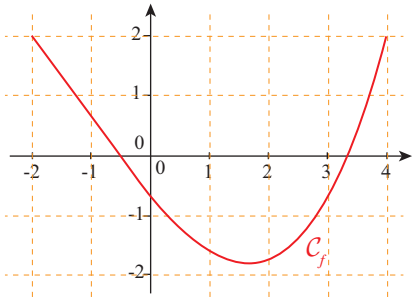
1 Fonction convexe, fonction concave

1.1 Convexité et concavité

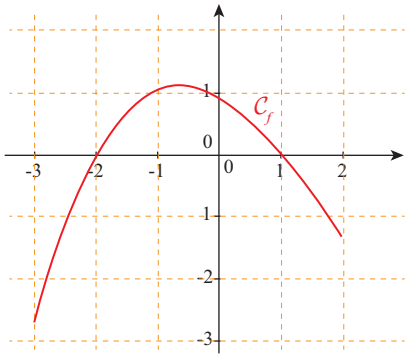
Définitions 1

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère, sur l'intervalle I.

- On dit que f est convexe sur l'intervalle I si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que f est concave sur l'intervalle I si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est entièrement en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe sur $[-2\,;4]$



Fonction concave sur $[-3\,;2]$

COURS

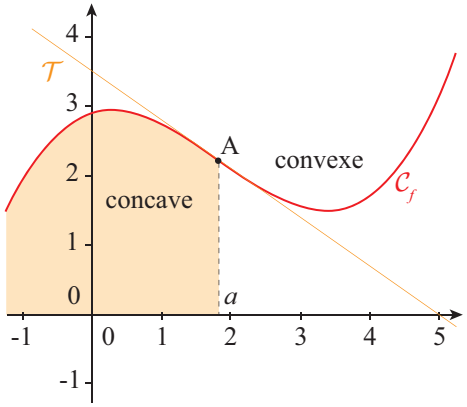
1.2 Point d'inflexion

Définition 2

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative dans un repère de la fonction f dérivable sur l'intervalle I et $a \in I$.
Dire que le point A de coordonnées $\big(a\,;\,f(a)\big)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ signifie qu'en ce point A, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente (en A).

Propriété 1

Si a est l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe de f, alors en a, la fonction f passe de concave à convexe ou de convexe à concave.

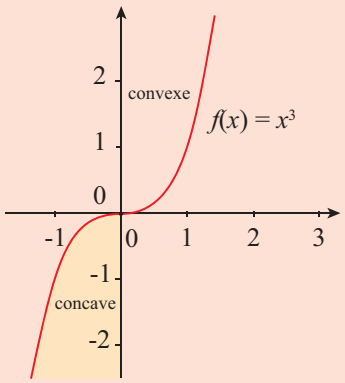


Sur ce graphique, la courbe de f est en dessous de sa tangente $\mathcal{T}$ en A pour $x < a$, coupe cette tangente en A, puis est au-dessus de $\mathcal{T}$ pour $x > a$.

Sur l'intervalle où est représentée f, la fonction f est concave pour $x < a$, puis devient convexe pour $x > a$.

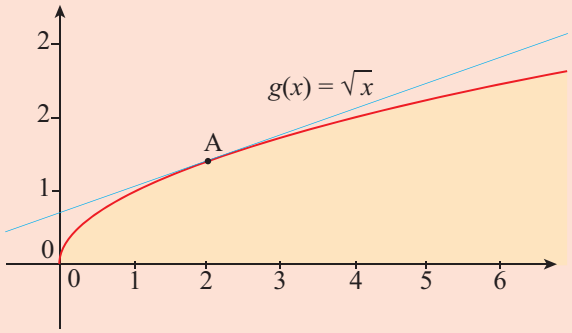
À RETENIR

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet un point d'inflexion en l'origine O du repère.
La fonction est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.



À RETENIR

La fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Cette fonction est concave sur $]0\,;+\infty[$:



2 Convexité et dérivée

2.1 Convexité de f et sens de variation de f'

Propriétés 2

La fonction f est dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si sa fonction dérivée f' est **croissante** sur I.
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si sa fonction dérivée f' est **décroissante** sur I.

2.2 Convexité et signe de la dérivée seconde f''

Définition 3

f est une fonction dérivable sur I et sa fonction dérivée f' est elle même dérivable.
On dit alors que f est deux fois dérivable sur I et admet une dérivée seconde, notée f'', qui est la dérivée de f'.

Propriétés 3

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$,
$$f''(x) \geq 0.$$
- La fonction f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$,
$$f''(x) \leq 0.$$

COURS

2.3 Point d'inflexion

Propriété 4

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. La courbe représentative de f admet un point d'inflexion en A de coordonnées $(a\,;\,f(a))$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a.

3 Positions relatives de courbes

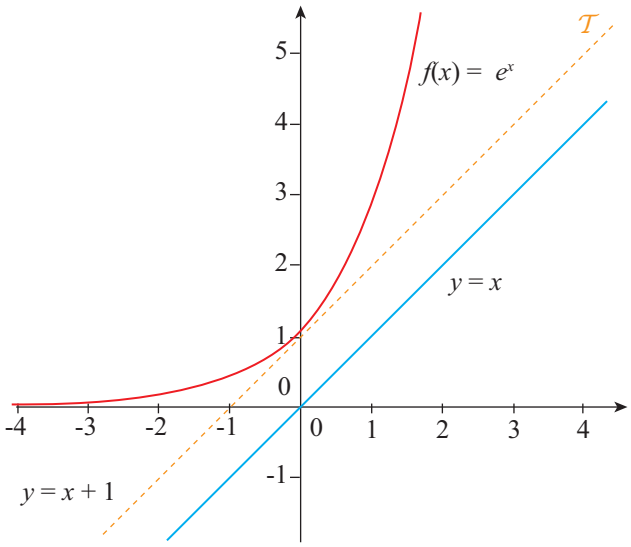
3.1 Fonction exponentielle

Propriété 5

La fonction exponentielle est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriété 6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > x$.



Remarque : cette propriété est une conséquence simple d'un résultat plus fort.
La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 (en pointillés sur le schéma ci-dessus) a pour équation $y = x + 1$. Comme la fonction exponentielle est convexe, la courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de $\mathcal{T}$ pour tout x.
Cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > x + 1$.

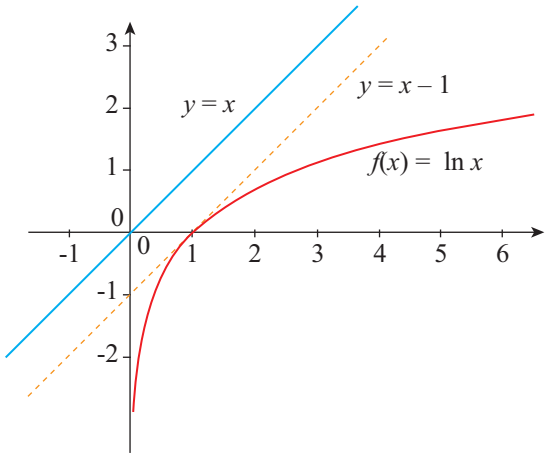
3.2 Fonction logarithme népérien

Propriété 7

La fonction logarithme népérien est une fonction concave sur $]0\,;+\infty[$.

Propriété 8

Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln x < x$.



Remarque : on démontre que la courbe de la fonction ln est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x - 1$. Donc pour tout $x > 0$, on a $\ln x < x - 1$.
La propriété précédente en est une conséquence.

3.3 Comparaison de ln x et e^x

Une conséquence directe des propriétés précédentes est :

Propriété 9

Pour tout $x > 0$, on a $\ln x < x < e^x$.

Solution de l'exercice type — Lycée Montesquieu, Bordeaux

1 La fonction f est la somme de la fonction carré qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction ln qui est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$.

Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Montesquieu, Bordeaux

La fonction f' est la somme d'une fonction affine, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction inverse, dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f''(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$.

2 $f''(x) > 0 \iff 2 - \dfrac{8}{x^2} > 0 \iff x^2 > 4$. Ceci équivaut à $x > 2$ car f n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$. On en déduit que f'' est négative sur $]0\,;2[$, s'annule en 2, et devient positive sur $]2\,;+\infty[$.

3 f'' est négative sur $]0\,;2[$, la fonction f est donc concave sur cet intervalle. f'' est positive sur $]2\,;+\infty[$, la fonction f est donc convexe sur $]2\,;+\infty[$. De plus f'' s'annule et change de signe pour $x = 2$, cela signifie que le point d'abscisse 2, et d'ordonnée $f(2) = 4 + 8\ln 2$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f, et c'est le seul.

Voir énoncé page 163

1 QCM Convexité et variations

10 min — Corrigé p. 176

Pour chacune des questions suivantes, désigner la bonne réponse.

f est une fonction définie et dérivable deux fois sur un intervalle I.

1 Si la fonction f est convexe sur I, alors :

- **a** f est croissante sur I
- **b** f' est croissante sur I
- **c** f'' est croissante sur I
- **d** f est décroissante puis croissante sur I

2 Si la fonction f est concave sur I, alors :

- **a** f admet un maximum sur I
- **b** f est décroissante sur I
- **c** f' est croissante sur I
- **d** f'' est négative sur I

3 Si la courbe représentative de f admet un point d'inflexion A au point d'abscisse a de I, alors :

- **a** f admet un extremum en a
- **b** f' admet un maximum en a
- **c** f' change de signe en a
- **d** f' admet un extremum en a

4 a, b et c sont trois réels de I avec $a < b < c$. Si la fonction f est convexe sur $[a\,;b]$ et concave sur $[b\,;c]$, alors :

- **a** f admet un minimum en b
- **b** f' s'annule en b
- **c** f'' s'annule en b
- **d** f est décroissante sur $[a\,;c]$

2 QCM Lecture graphique

10 min — Corrigé p. 176

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f de la page suivante, définie et deux fois dérivable sur $[-3\,;5]$. La droite bleue est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. De plus $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en B et en C. Par lecture graphique, pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

1 La fonction f est convexe sur l'intervalle :

- **a** $[-3\,;1]$
- **b** $[-1\,;5]$
- **c** $[2\,;4]$

2 La courbe $\mathcal{C}_f$ admet :

- **a** un point d'inflexion
- **b** trois points d'inflexion
- **c** aucun point d'inflexion

3 La fonction dérivée f' est :

- **a** positive ou nulle sur $[-3\,;-1]$ et $[3\,;5]$
- **b** croissante sur $[-3\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;5]$
- **c** admet un minimum en 3

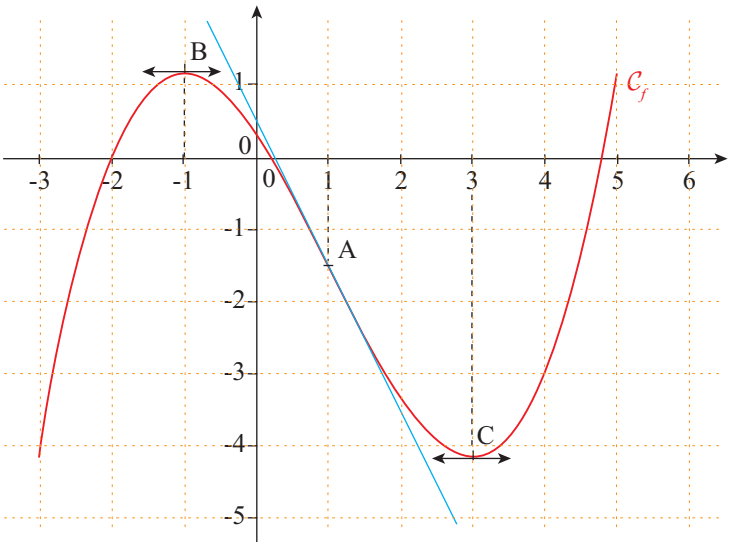
INTERROS

4 La fonction dérivée seconde f'' :

a est négative lorsque $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'axe des abscisses

b est négative ou nulle pour $x \in [-1\,;\,3]$

c est négative lorsque f' est décroissante



3 QCM Étude de la dérivée seconde

10 min — Corrigé p. 176

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 12x - 5$.

Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse :

1 $f'(x)$ a le même signe que :

a $x^2 + 2x + 4$ **b** $3x^2 + 12x - 5$ **c** $f''(x)$

2 $f''(x)$ est égale à :

a $2x + 2$ **b** $6x + 6$ **c** $3x^2 + 12$

3 $f''(x)$:

a s'annule en un seul réel **b** ne s'annule jamais

c est toujours positif

4 La fonction f est :

a concave sur $[-1\,;\,+\infty[$ **b** convexe sur $[-1\,;\,+\infty[$

c ni l'un ni l'autre

4 QCM Fonction exponentielle

15 min — Corrigé p. 176

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2)\mathrm{e}^x$.
Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse :

1 La dérivée seconde de f est égale à :

[a] $2\mathrm{e}^x$ [b] $(x^2 + 4x + 4)\mathrm{e}^x$
[c] $(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^x$

2 $f''(x)$ s'annule :

[a] en une valeur réelle [b] jamais
[c] en deux valeurs réelles distinctes

3 La représentation graphique de f admet :

[a] un point d'inflexion [b] deux points d'inflexions
[c] aucun point d'inflexion

4 La dérivée $f'(x)$:

[a] change de signe au moins une fois sur $\mathbb{R}$
[b] s'annule sans changer de signe [c] ne s'annule pas

5 Étude de convexité ★

7 min — Corrigé p. 177

Lycée Victor Duruy, Paris

1 Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 4x + 1$.

2 Donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

6 Convexité et inégalité ★

15 min — Corrigé p. 177

Cité scolaire internationale, Grenoble

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O.

1 Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2 Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

3 **(a)** Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

(b) En déduire que $f(0{,}0001) > 0{,}0001$.

INTERROS

7 Application économique

★★ 20 min Corrigé p. 177

Lycée Victor Duruy, Paris

Soit la fonction f définie sur $I = [0\,;5]$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x+4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Partie A

1. Calculer $f(0)$. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité.
2. Calculer $f'(x)$. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x sur I, puis dresser le tableau de variations de f.
3. Calculer $f"(x)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées, et étudier la convexité de f.

Partie B

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour. Le bénéfice, en milliers d'euros , réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$. Pour des raisons techniques, l'entreprise vend entre 180 litres et 450 litres par jour.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé pour la vente de 400 litres.
2. Déterminer la quantité minimale de litres à vendre par jour pour ne pas vendre à perte.
3. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est alors, arrondi à l'unité, ce bénéfice ?

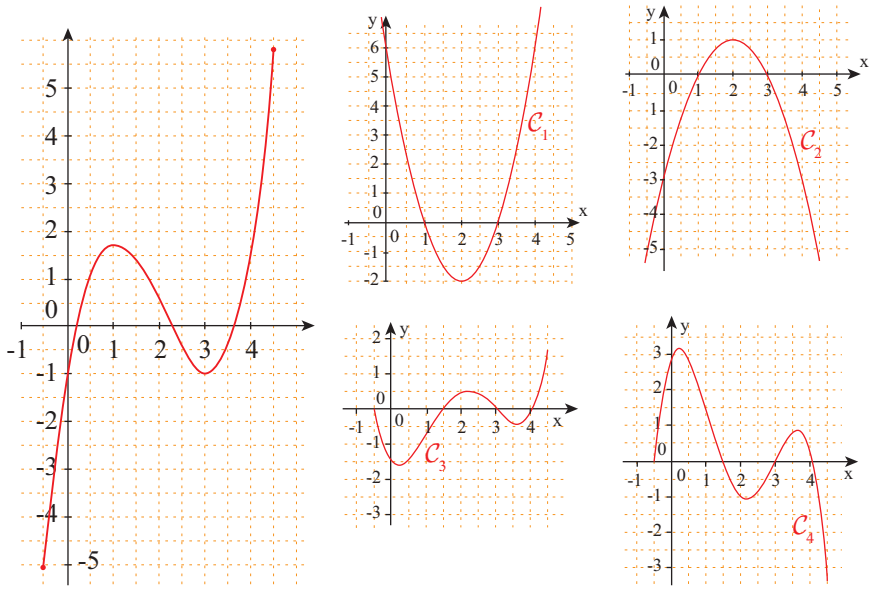
8 Avec des représentations graphiques

★★ 20 min Corrigé p. 178

Lycée Virlogeux, Riom

On a représenté sur la page suivante la courbe $\mathcal{C}'$ représentant la fonction dérivée d'une fonction f deux fois dérivable sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{9}{2}\right]$, à gauche, et quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, à droite.

1. **(a)** Résoudre l'équation $f'(x) = 0$, avec la précision permise par le graphique.
   (b) Indiquer le signe de $f'(x)$.
2. **(a)** Dresser le tableau de variations de f'.
   (b) On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f. $\mathcal{C}$ admet-elle un (ou des) point(s) d'inflexion ? Justifier soigneusement.
3. Parmi les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, préciser en justifiant celle qui peut représenter la fonction f et celle qui peut représenter la fonction f''.



9 Point d'inflexion et tangente

★★ — 20 min — Corrigé p. 179

Cité scolaire internationale, Grenoble

Soit $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $I = [-2\,;\,4]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

On nomme A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives -1 et 0.

1. Donner les coordonnées exactes de A et B.
2. Étudier les variations de f sur I.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions a et b dans I. Donner les valeurs arrondies à 10^{-2} de a et b.
4. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f. On indiquera les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
5. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$ au point B.
6. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur I.
7. Résoudre l'inéquation $f(x) < -x + 2$.

10 Recherche d'équation et convexité

★★★ — 30 min — Corrigé p. 180

Lycée Victor Duruy, Paris

Le plan est muni d'un repère d'origine O, d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

INTERROS

1 Une courbe $\mathcal{C}$ représente dans ce repère une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On sait que :

- cette courbe est tangente à la droite d'équation $y = -1$ au point A d'abscisse 0 ;
- cette courbe admet au point B d'abscisse $\frac{2}{3}$ une tangente horizontale ;
- cette courbe admet au point C d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 3$.

Déterminer les réels a, b, c et d.

2 Soit f la fonction définie sur $[-2\,;\,2]$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

(a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $[-2\,;\,2]$.

(c) Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

3 **(a)** Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f sur $[-2\,;\,2]$.

(b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

4 **(a)** Compléter le tableau suivant, en arrondissant les valeurs au dixième, puis tracer les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions g et h définies sur $[-2\,;\,2]$ par $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3 - 1$ dans le repère défini précédemment.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$g(x)$									
$h(x)$									

(b) Montrer que $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ se coupent en un unique point M dont on exprimera les coordonnées en fonction de a.

11 Point d'inflexion et vitesse

★★★ 25 min Corrigé p. 182

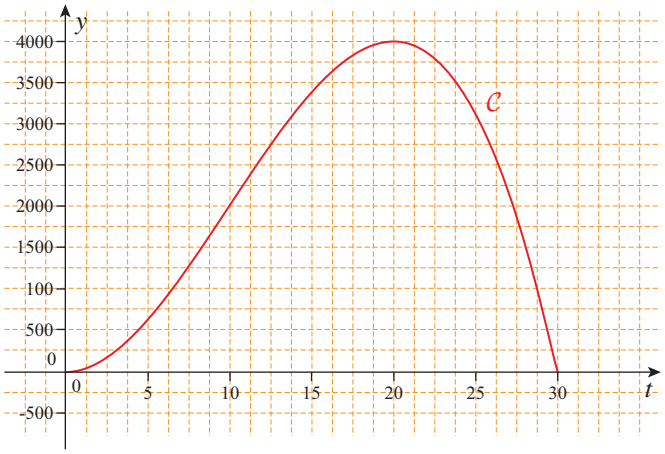
Lycée Virlogeux, Riom

Une épidémie a frappé les habitants d'une ville.

Partie A : Lectures graphiques

La courbe $\mathcal{C}$ sur la page suivante représente le nombre de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en jours, depuis le début de la maladie.

La vitesse de propagation de la maladie au jour t est assimilée au nombre dérivé de la fonction au jour t.



On expliquera les réponses.

1. Donner les jours où il y a 2 000 malades.
2. Donner le jour où le nombre de malades est maximal. Quel est alors le nombre de malades ?
3. Estimer le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus grande.

Partie B : Étude théorique

Le nombre de personnes malades en fonction du temps t, en jours, peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,30]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 30t^2.$$

1. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations sur I.
2. **(a)** Déterminer le nombre de solutions sur I de l'équation $f(t) = 2\,000$.
   (b) Déterminer un encadrement à l'entier près de la solution non entière.
3. **(a)** Calculer $f''(t)$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction dérivée f'.
   En déduire la convexité de la fonction f.
   (c) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet sur I un unique point d'inflexion.
   (d) En donner une signification concrète.
   (e) Calculer la vitesse de propagation le 10^{e} jour.

CORRIGÉS

1 QCM Convexité et variations

Enoncé p. 169

1. Réponse **b** d'après la définition.
2. Réponse **d** d'après le cours.
3. Réponse **d** : si A est un point d'inflexion d'abscisse a, alors la dérivée f' change de sens de variation, elle admet donc un extremum en a qui peut être un maximum mais aussi un minimum.
4. Réponse **c** : comme f passe de convexe à concave en b, cela signifie que b est l'abscisse d'un point d'inflexion de la courbe de f, donc $f''(b) = 0$.

2 QCM Lecture graphique

Enoncé p. 169

1. Réponse **c** : la fonction est convexe sur tout intervalle compris dans $[1\,;5]$
2. Réponse **a** : un point d'inflexion est un point où la courbe traverse la tangente en ce point. Sur ce graphique, cela se réalise au point A uniquement.
3. Réponse **a** : ce sont les intervalles où f est croissante, donc sa dérivée est positive ou nulle
4. Réponse **c** : le signe de f'' donne les sens de variation de f'.

3 QCM Étude de la dérivée seconde

Enoncé p. 170

On commence par calculer $f'(x) = 3x^2 + 6x + 12$ et $f''(x) = 6x + 6$.

1. Réponse **a** car $f'(x) = 3(x^2 + 2x + 4)$.
2. Réponse **b** par le calcul.
3. Réponse **a** : $f''(x)$ s'annule pour $x = -1$ et change de signe.
4. Réponse **b** : lorsque $x \geq -1$, $f''(x) \geq 0$, donc la fonction f est convexe sur l'intervalle.

4 QCM Fonction exponentielle

Enoncé p. 171

1. Réponse **b** : on calcule $f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + (x^2+2)\mathrm{e}^x = (x^2+2x+2)\mathrm{e}^x$. Puis $f''(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+4x+4)\mathrm{e}^x$.
2. Réponse **a** : $x^2+4x+4 = (x+2)^2$, et comme e^x ne s'annule jamais, alors $f''(x)$ ne s'annule que pour $x = -2$.

3 Réponse **c** : comme $f''(x) = (x+2)^2 e^x$, alors $f''(x)$ est toujours positif ou nul, donc la fonction est toujours convexe et il n'y a pas de point d'inflexion.

4 Réponse **c** : il faut prendre l'expression de $f'(x) = (x^2+2x+2)e^x$. Le discriminant de l'équation $x^2+2x+2=0$ est négatif (il vaut -4), donc x^2+2x+2 ne s'annule pas.

5 Étude de convexité

Enoncé p. 171

Lycée Victor Duruy, Paris

1 $f'(x) = 3x^2 - 4$, et $f''(x) = 6x$.
$f''(x) < 0 \iff x < 0$, donc f est concave sur $\mathbb{R}_-^*$, et f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Le point $A(0\,;1)$ est le seul point d'inflexion, car 0 est la seule valeur de x pour laquelle $f''(x)$ s'annule et change de signe.

6 Convexité et inégalité

Enoncé p. 171

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.
$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

2 $f''(x) > 0 \iff x > -2$.
Par conséquent, f est concave sur $]-\infty\,;-2]$ et convexe sur $[-2\,;+\infty[$.

3 **(a)** L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :
$y = f'(0)x + f(0)$, donc $y = x$.

(b) f est convexe sur $[-2\,;+\infty[$. 0,0001 fait partie de cet intervalle, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, dont l'équation est $y = x$.
On a donc $f(0{,}0001) < 0{,}0001$ car à gauche se trouve l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0,0001 et à droite l'ordonnée du point de la tangente en O d'abscisse 0,0001 également.

7 Application économique

Enoncé p. 172

Lycée Victor Duruy, Paris

Partie A

1 $f(0) = -2e^4 \approx -109$.

2 $f'(x) = e^{-x+4} - (x-2)e^{-x+4} = e^{-x+4}(-x+3)$.
$f'(x)$ est du signe de $-x+3$ car e^{-x+4} est positif pour tout x.

$f'(x) > 0 \iff x < 3$, d'où le tableau de variations :

x	0		3		5
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-2e^4$	↗	e	↘	$3e^{-1}$

3 $f''(x) = -e^{-x+4}(-x+3) - e^{-x+4} = e^{-x+4}(x-4)$.
f'' s'annule et change de signe en $x = 4$ donc le point de coordonnées $(4\,;\,f(4))$ est point d'inflexion.
Le point $A(4\,;2)$ est donc point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
$f''(x)$ est négative pour $x < 4$ et positive pour $x > 4$, donc f est concave pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;4]$ et convexe pour x appartenant à $[4\,;5]$.

Partie B

1 $f(4) = 2$, donc le bénéfice obtenue pour la vente de 400 litres est 2 000 euros. Attention aux unités !

2 $f(x) > 0 \iff (x-2)e^{-x+4} > 0 \iff x > 2$.
Donc il faut vendre au moins 200 litres par jour pour ne pas vendre à perte.

3 D'après le tableau de variations, le bénéfice maximum est atteint quand on produit 300 litres, et il est de 2 718 euros, en arrondissant à l'unité.

8 Avec des représentations graphiques

Enoncé p. 172

Lycée Virlogeux, Riom

1 **(a)** L'équation $f'(x) = 0$ a trois solutions a, b et c.
$a \approx 0{,}2$; $b \approx 2{,}2$ et $c \approx 3{,}6$.

(b) $f'(x) > 0$ si x appartient à $]a\,;b[\cup \left]c\,;\dfrac{9}{2}\right[$, et $f'(x) < 0$ si x appartient à $\left[-\dfrac{1}{2}\,;a\right[\cup]b\,;c[$.

2 **(a)** Dans le tableau de variations de f' suivant, on a rajouté le signe de $f''(x)$, f'' étant la fonction dérivée de la fonction f'.

x	$-\frac{1}{2}$		1		3		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		↗		↘		↗	
Signe de $f''(x)$		+	0	−	0	+	

(b) D'après le tableau de signes de f'', f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 1$ et $x = 3$. Il y a donc deux points d'inflexion d'abscisses 1 et 3.

3 D'après la question 1.b., f' est négative, puis positive, puis négative, puis positive.

Donc f doit être décroissante jusqu'à a, croissante entre a et b, décroissante entre b et c puis finalement croissante.

C'est la courbe $\mathcal{C}_3$ qui convient.

Quant à f'', elle doit être positive jusqu'à 1, négative entre 1 et 3, puis à nouveau positive.

C'est la courbe $\mathcal{C}_1$ qui convient.

9 Point d'inflexion et tangente

Enoncé p. 173

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 $f(-1) = \mathrm{e}$, donc $A(-1\,;\,\mathrm{e})$; $f(0) = 2$, donc $B(0\,;\,2)$.

2 f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables et $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}(x+2) = \mathrm{e}^{-x}(-x-1)$.

$f'(x) > 0 \iff x < -1$ car e^{-x} est positif pour tout x.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	-2		-1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e	↘	$6\mathrm{e}^{-4}$

3 f est continue sur I.

Sur $[-2\,;\,-1]$, f est strictement croissante, et 1 appartient à $\big[f(-2)\,;\,f(-1)\big]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[-2\,;\,-1]$.

Sur $[-1\,;\,4]$, f est strictement décroissante, et 1 appartient à $\big[f(4)\,;\,f(-1)\big]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[-1\,;\,4]$.

Donc sur I, l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions.

À la calculatrice, on obtient $a \approx -1{,}84$ et $b \approx 1{,}14$.

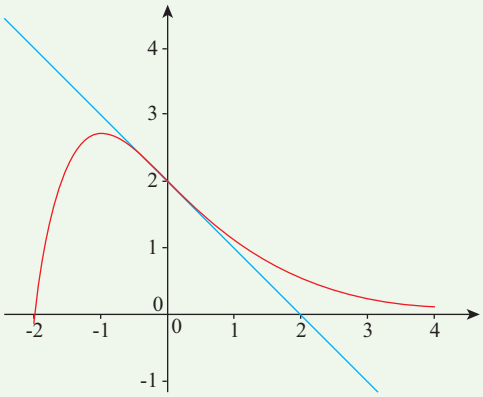
4 $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-x-1) - \mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$.

Par conséquent, f est convexe si $x \geqslant 0$ et f est concave si $x \leqslant 0$.

Le point d'inflexion est donc le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0, c'est B.

5 L'équation de la tangente en B à $\mathcal{C}$ est $y = f'(0)x + f(0)$, donc $y = -x + 2$.

6



7 Résoudre cette inéquation revient à savoir quand $\mathcal{C}$ est sous $\mathcal{D}$. Or, d'après l'étude de convexité, $\mathcal{C}$ est sous chacune de ses tangentes pour $x < 0$. Donc pour $x \in [-2\,;0]$, $\mathcal{C}$ est sous toutes ses tangentes, donc entre autre sous la tangente en $A(0\,;2)$, d'équation $y = -x + 2$.

Par contre, pour $x \in [2\,;4]$, f est convexe, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes, donc entre autre de la tangente en $(0\,;2)$.

Donc $S = [-2\,;0[$.

10 Recherche d'équation et convexité

Enoncé p. 173

Lycée Victor Duruy, Paris

Remarque : seule une question concerne la convexité, comme ce sera souvent le cas dans les exercices du baccalauréat... mais il n'est pas mauvais de faire des révisions !

1 La première condition donnée nous permet d'affirmer que $k(0) = -1$ et $k'(0) = 0$ puisqu'on a une tangente horizontale.

$k(0) = -1 \iff d = -1$.

$k'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $k'(0) = 0 \iff c = 0$.

On sait donc déjà que $k(x)$ est de la forme $k(x) = ax^3 + bx^2 - 1$.

La deuxième condition donnée se traduit par $k'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} k'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 &\iff 3a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2b\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \\ &\iff \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}b = 0 \\ &\iff b = -a. \end{aligned}$$

La troisième condition donne $k'(1) = 1$ (coefficient directeur de la tangente).

$$k'(1) = 1 \iff 3a + 2b = 1.$$

En remplaçant b par $-a$ dans cette dernière équation, on obtient $a = 1$, et par conséquent $b = -1$.
Finalement, $k(x) = x^3 - x^2 - 1$.

Remarque : il est bien rassurant de retrouver cette expression dans la question suivante : k n'est autre que f.

2 **(a)** $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$.
$f'(x)$ est un trinôme du second degré qui s'annule pour $x = 0$ et $x = \frac{2}{3}$. $f'(x)$ est donc positif sur $[-2\,;0] \cup \left[\frac{2}{3}\,;2\right]$ et négatif ailleurs, d'où le tableau de variations suivant :

x	-2		0		$\frac{2}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-13	↗	-1	↘	$-\frac{31}{27}$	↗	3

(b) Sur $\left[-2\,;\frac{2}{3}\right]$, $f(x) < 0$ puisque le maximum est -1, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
Sur $\left[\frac{2}{3}\,;2\right]$, f est continue car c'est une fonction polynôme, elle est strictement croissante et 0 appartient à $\left[f\left(\frac{2}{3}\right)\,;\,f(2)\right]$; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[\frac{2}{3}\,;2\right]$.
L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution a sur $[-2\,;2]$.

(c) À la calculatrice, on obtient $a \approx 1{,}5$.

3 **(a)** $f''(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$.
$f''(x) > 0 \iff x > \frac{1}{3}$. Par conséquent, f est concave sur $\left[-2\,;\frac{1}{3}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{1}{3}\,;2\right]$.

(b) D'après ce qui précède, le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\frac{1}{3}$ est point d'inflexion.
$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - 1 = -\frac{29}{27}$. Donc le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{29}{27}\right)$ est le seul point d'inflexion de $\mathcal{C}$ sur $[-2\,;2]$.

4 **(a)** On a :

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$g(x)$	4	$2{,}3$	1	$0{,}3$	0	$0{,}3$	1	$2{,}3$	4
$h(x)$	-9	$-4{,}4$	-2	$-1{,}1$	-1	$-0{,}9$	0	$2{,}4$	7

(b) L'abscisse du point d'intersection m des deux courbes est donc a et son ordonnée est $g(a) = a^2$. Donc $M\left(a\,;\,a^2\right)$.

Remarque : on aurait aussi pu dire que l'ordonnée de M est $h(a) = a^3 - 1$.

11 Point d'inflexion et vitesse

Enoncé p. 174

Lycée Virlogeux, Riom

Partie A

1 On trace sur le graphique donné la droite d'équation $y = 2\,000$.
Il y a 2 000 malades au dixième jour, et environ au vingt-septième jour.

2 Le nombre de malades est maximal le vingtième jour, et il atteint 4 000.

3 La vitesse de propagation est la plus grande quand la pente de la tangente à la courbe est la plus élevée, puisque la vitesse de propagation est assimilée au nombre dérivé. On cherche en fait le point d'inflexion.
Il semble que ce soit aux alentours de $t = 10$, en tout cas entre 7 et 12.

Partie B

1 $f'(t) = -3t^2 + 60t = -3t(t - 20)$.
$f'(t)$ est un trinôme du second degré qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 20$, et il est négatif à l'extérieur des racines car le coefficient de t^2 est négatif.
On obtient donc, sur $[0\,;\,30]$:

x	0		20		30
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$4\,000$	↘	0

2 **(a)** f est une fonction polynôme donc continue.
Sur $[0\,;\,20]$, f est strictement croissante et 2 000 appartient à $\left[f(0)\,;\,f(20)\right]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 2\,000$ admet une solution sur $[0\,;\,20]$.
Sur $[20\,;\,30]$, f est strictement décroissante et 2 000 appartient à $\left[f(30)\,;\,f(20)\right]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 2\,000$ admet une solution sur $[20\,;\,30]$.

Finalement, sur $[0\,;30]$, l'équation $f(x) = 2\,000$ admet exactement deux solutions.

(b) Vérifions que $f(10) = 2\,000$:

$f(10) = -1\,000 + 3\,000 = 2\,000$, donc la plus petite solution de l'équation $f(x) = 2\,000$ est 10, et elle est entière.

$f(27) = 2\,187$ et $f(28) = 1\,568$, par conséquent, d'après le théorème utilisé précédemment, la solution non entière est comprise entre 27 et 28, ce qui confirme notre lecture graphique.

3 **(a)** $f''(t) = -6t + 60 = -6(t - 10)$.

(b) $f''(t) > 0 \iff t < 10$, donc f' est croissante sur $[0\,;10]$ et décroissante sur $[10\,;30]$.

f est donc convexe sur $[0\,;10]$ et concave ensuite.

(c) D'après ce qui précède, le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 10 est point d'inflexion.

Avant $x = 10$, la dérivée est croissante, ce qui signifie que la vitesse de propagation de la maladie augmente, alors qu'après, cette vitesse diminue (même si le nombre de malades continue à augmenter jusqu'à $t = 20$). Donc 10 jours après le début de la maladie est le moment où l'épidémie commence à ralentir.

(d) $f'(10) = 300$.

On peut traduire cela par le fait qu'à ce moment là, il y a 300 malades supplémentaires chaque jour.

Chapitre 6

Primitive et intégration

Plan du chapitre

1. Intégrale d'une fonction continue
2. Primitive et intégrale
3. Valeur moyenne

Exercice type — Lycée Calmette, Nice

1 Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles proposés :

(a) f définie par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

(b) f définie par $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$.

(d) f définie par $f(x) = x(x^2-1)$ sur $\mathbb{R}$.

(e) f définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

2 Déterminer la primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 4x - 3,$$

qui s'annule en 1.

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x}$.

(a) Calculer $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2+2x-3}{x}\,\mathrm{d}x$.

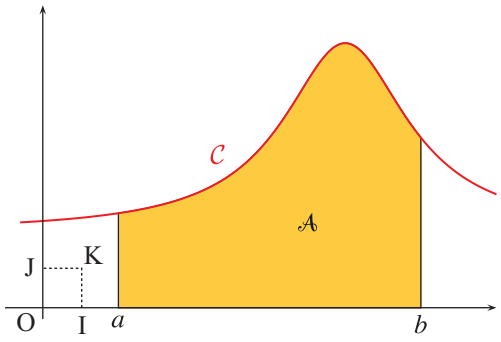
(b) Comment interpréter cette intégrale en terme d'aire ?

Voir corrigé page 190

COURS

1 Intégrale d'une fonction continue

1.1 Intégrale et aire



Définition 1

Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\right)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$ construit à partir des points O, I et J.
L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$ et délimitée par l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
On la note :

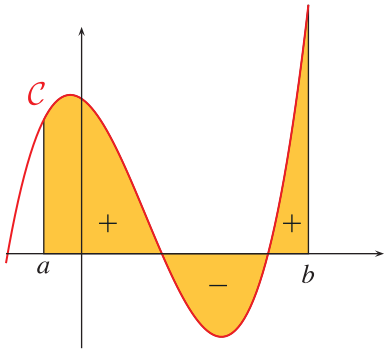
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 2

Soit f une fonction *continue* et *négative* sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Le nombre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égal à l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On étend la définition de l'intégrale aux fonctions continues *changeant de signe* un nombre fini de fois, comme étant la somme algébrique des aires sur les intervalles où f est de signe constant, chaque terme étant affecté du signe de f sur cet intervalle.

L'*aire algébrique* ainsi calculée est appelée *intégrale de* f *sur* $[a\,;b]$.



À RETENIR

Pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes représentatives des fonctions f et g, on commence par étudier le signe de $f(x)-g(x)$.
Si $f(x)-g(x)$ est positif sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors :

$$\mathcal{A}=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Si $f(x)-g(x)$ est négatif sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors :

$$\mathcal{A}=\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

On étend la définition du symbole $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas $a>b$ en posant alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est l'*intégrale de a à b* de f (attention à ne pas évoquer l'*intervalle* $[a\,;\,b]$ si $a>b$).

1.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 1 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a,b,c trois réels appartenant à I, alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

ATTENTION

Il n'existe aucune condition d'ordre entre les réels a, b et c. La relation de Chasles n'impose pas d'avoir $a<b<c$.

COURS

Théorème 2 (Linéarité de l'intégrale)

Quelles que soient les fonctions continues f et g, quels que soient les réels λ et μ :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriétés 1 (Positivité de l'intégrale)

1. Si pour tout nombre réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

   Si pour tout nombre réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$.

2. Si pour tout nombre réel x de $[a\,;b]$, $g(x) \leq f(x)$, alors

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2 Primitive et intégrale

2.1 Définition et existence

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une *primitive* de f sur I est, *si elle existe*, une fonction F dérivable sur I vérifiant $F' = f$ sur I.

Théorème 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f admet une primitive F sur I, alors elle en admet une infinité.
Si G est une autre primitive, il existe une constante réelle c telle que, sur I :

$$G = F + c.$$

À RETENIR

Si elles existent, les primitives de f sur I *diffèrent d'une constante*.

Propriété 2

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I, soit x_0 un point de I et y_0 un réel quelconque fixé.
Il existe alors une *unique* primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème 4

Tout fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque : ce théorème permet de prouver l'existence de primitives d'une fonction mais ne permet pas de les calculer. Il sera aussi souvent utilisé pour prouver l'existence d'intégrales.

Théorème 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, la fonction :

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est *la* primitive de f sur I qui s'annule en a.

MÉTHODE

On peut étudier facilement les variations de la primitive F de la fonction f, sans calculer l'intégrale, dans la mesure où on connaît sa dérivée qui n'est autre que la fonction f.

Soit F une fonction définie sur un intervalle I, et soient $a, b \in I$. On note :

$$\left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Théorème 6

Soit f une fonction continue et F une primitive de f. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b.$$

2.2 Primitives usuelles

Un tableau de dérivées usuelles donne, par lecture inverse, un tableau de primitives à connaître. Précisons une dernière fois qu'on ne parle de primitives que sur un *intervalle*.

La fonction usuelle	Ses primitives
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$	$x \mapsto \dfrac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$	$x \mapsto \ln x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

COURS

2.3 Primitives et fonctions composées

Il est souvent possible de mettre en évidence la dérivée d'une fonction composée. Le tableau suivant regroupe les quelques cas exigibles en TES ou en TL (u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I).

Fonction f	Les primitives F	Remarques
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$u(x) \neq 0$ sur I.
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + k$ avec $k \in \mathbb{R}$	
$x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$	$x \mapsto \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$	

3 Valeur moyenne

Définition 4

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$ $(a < b)$ est le nombre réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Solution de l'exercice type — Lycée Calmette, Nice

1 **(a)** Les fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ ont pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$, k réel.

Les primitives de f définie par $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - x + 4$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}x^6 + x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + k,\ \ k \text{ réel.}$$

(b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ a pour primitives sur $]0\,;+\infty[$ les fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x} + k$, k réel.

Solution de l'exercice type — Lycée Calmette, Nice

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour primitives sur $]0\,;+\infty[$ les fonctions $x \mapsto -\dfrac{1}{x} + k$, k réel.

D'où les primitives de f définie par $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions :

$$F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + k, \quad k \text{ réel.}$$

(c) Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$.

Posons $u(x) = 3x - 1$; alors $u'(x) = 3$ et f peut s'écrire :

$$f = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u^2}.$$

MÉTHODE

Faites bien apparaître le u' dans l'écriture de f.

Les primitives des fonctions $\dfrac{u'}{u^2}$, sur un intervalle où u ne s'annule pas, sont les fonctions $-\dfrac{1}{u} + k$, k réel.

Les primitives de f sont donc les fonctions :

$$F : x \mapsto -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x-1} + k, \quad k \text{ réel.}$$

MÉTHODE

Dérivez la fonction F trouvée pour vérifier votre calcul ; vous devez retrouver f.

(d) Soit f définie par $f(x) = x(x^2-1)$ sur $\mathbb{R}$. Posons $u(x) = x^2 - 1$ alors $u'(x) = 2x$ et f peut s'écrire $f = \dfrac{1}{2}u'u$.

Les primitives des fonctions $u'u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont les fonctions $\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$, k réel.

Les primitives de f sont donc les fonctions :

$$F : x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{(x^2-1)^2}{2} + k,$$

soit les fonctions :

$$F : x \mapsto \frac{(x^2-1)^2}{4} + k, \quad k \text{ réel.}$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Solution de l'exercice type — Lycée Calmette, Nice

(e) Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $u(x) = x^2+1$, $u'(x) = 2x$ et f peut s'écrire $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u^2}$.

Les primitives des fonctions $\dfrac{u'}{u^2}$ sont les fonctions $-\dfrac{1}{u} + k$, k réel.

Les primitives de f sont donc les fonctions :

$$F : x \mapsto \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) + k,$$

soit les fonctions :

$$F : x \mapsto -\frac{1}{2(x^2+1)} + k, \ k \text{ réel.}$$

2 Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x - 3$ sont les fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 3x + k, \ k \text{ réel}$$

La primitive F qui s'annule en 1 est telle que $F(1) = 0$ ce qui implique $\dfrac{1}{2} + 2 - 3 + k = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$.

D'où :

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 3x + \frac{1}{2}.$$

3 **(a)** Pour calculer l'intégrale, on recherche une primitive de f. Pour cela on modifie l'écriture :

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x} = x + 2 - \frac{3}{x}.$$

Sur l'intervalle $[2\,;4]$,

une primitive de $x \mapsto x+2$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 2x$,

une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln x$ car $x > 0$,

donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{x}$ est $x \mapsto 3\ln x$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)\,dx &= \int_2^4 \left(x + 2 - \frac{3}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - 3\ln x\right]_2^4 \\ &= \frac{16}{2} + 8 - 3\ln 4 - \frac{4}{2} - 4 + 3\ln 2 \\ &= 10 + 3(\ln 2 - 2\ln 2) = 10 - 3\ln 2.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice type (suite) **Lycée Calmette, Nice**

(b) Étudions le signe de $f(x)$ sur $[2\,;4]$. Sur cet intervalle, $f(x)$ est du signe de x^2+2x-3 car $x>0$. Le polynôme admet deux racines : 1 et -3. D'après la règle du signe du trinôme du second degré, on obtient alors que $f(x)$ est positif pour $x>1$ ou $x<-3$ (« à l'extérieur des racines »).

Comme la fonction f est positive sur $[2\,;4]$, avec bien sûr $2<4$, $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2+2x-3}{x}\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

Voir énoncé page 185

INTERROS

1 QCM Recherche de primitives

15 min — Corrigé p. 203

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 Si la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x^3+6x^2+\dfrac{1}{2x^2}+3$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$, alors :

a $f(x)=3x^2+12x-\dfrac{1}{x^3}$ **b** $f(x)=3x^2+12x+\dfrac{1}{4x}$

c $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+2x^3+3x-\dfrac{1}{2x}$

2 Si $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$, alors une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ est définie par :

a $F(x)=\dfrac{3x\sqrt{x}}{2}$ **b** $F(x)=x\sqrt{x}+5$

c $F(x)=x\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}x$

3 Si $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$, alors une primitive F de f sur $]-1\,;+\infty[$ est définie par :

a $F(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}$ **b** $F(x)=\dfrac{-1}{x+1}$

c $F(x)=\dfrac{-1}{2(x+1)}$

4 Si $f(x)=x(x^2+1)$, alors une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a $F(x)=(x^2+1)^2$ **b** $F(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x^2+1)^2$

c $F(x)=\dfrac{(x^2+1)^2}{4}$

2 QCM Exponentielle et logarithme

15 min — Corrigé p. 203

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}$. Une primitive G de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$ est :

a $G : x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{2x}}$ **b** $G : x\mapsto\dfrac{2(\mathrm{e}^x+x)}{\mathrm{e}^{2x}}$

c $G : x\longmapsto\dfrac{1+2\mathrm{e}^x}{-2\mathrm{e}^{2x}}$

2 Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, alors une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ est définie par :

a $F(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+1}$ **b** $F(x) = x + \mathrm{e} + \ln x$

c $F(x) = x \ln x$

3 Une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$ est :

a $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ **b** $x \mapsto x \ln x - x + 3$

c $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2$

4 Une primitive de la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$ est définie par :

a $F(x) = -\dfrac{2}{x^2}$ **b** $F(x) = \ln(2x)$ **c** $F(x) = \ln(x^2)$

3 V/F Aire sous la courbe

15 min — Corrigé p. 204

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

$\mathcal{A}$ désigne l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1 Si $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a = 2$ et $b = 3$, alors $\mathcal{A} = \ln 2 - \ln 3$.

2 Si $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$, $a = -1$ et $b = 3$, alors $\mathcal{A} = \dfrac{32}{3}$.

3 Si $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$, $a = 0$ et $b = 2$, alors $\mathcal{A} = 2\mathrm{e} - 4$.

4 Si $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+5)^2}$, $a = -4$ et $b = -2$, alors $\mathcal{A} = \dfrac{4}{3}$.

4 V/F Calcul d'intégrales

10 min — Corrigé p. 205

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1 $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$

2 $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = -2$

3 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

4 $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$

INTERROS

5 V/F Propriétés de l'intégrale

10 min — Corrigé p. 206

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1 $\displaystyle\int_2^3 \frac{-x-5}{x^2-5x+4}\,\mathrm{d}x = 2\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - 3\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-4}$.

2 $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (x^2+x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x < 0$.

3 Si f est intégrable sur $[-1\,;2]$ et si $x \leq f(x) \leq x+1$, alors $1 \leq \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leq 5$.

4 Si f est intégrable sur $[-1\,;3]$ et si $f(x) \leq 3x+2$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{-3} \big((3x+2) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Primitives

6 Primitive d'un polynôme ★

5 min — Corrigé p. 207

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0, pour f définie par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 5.$$

7 Dérivée et primitives ★

15 min — Corrigé p. 207

Lycée Alain, Le Vésinet

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $I = \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{5x^2-7x+9}{3x-1}$$

et

$$g(x) = \frac{5x^2-16x+12}{3x-1}.$$

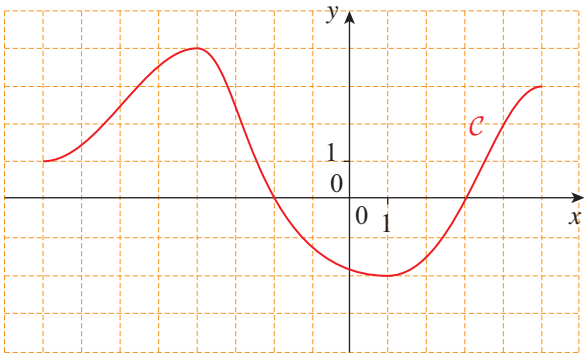
f et g sont-elles deux primitives de la même fonction sur I ?

8 Lecture graphique

★ 10 min Corrigé p. 208

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

La courbe tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur $[-8\,;\,5]$.



On appelle G une primitive de g sur l'intervalle $[-8\,;\,5]$.

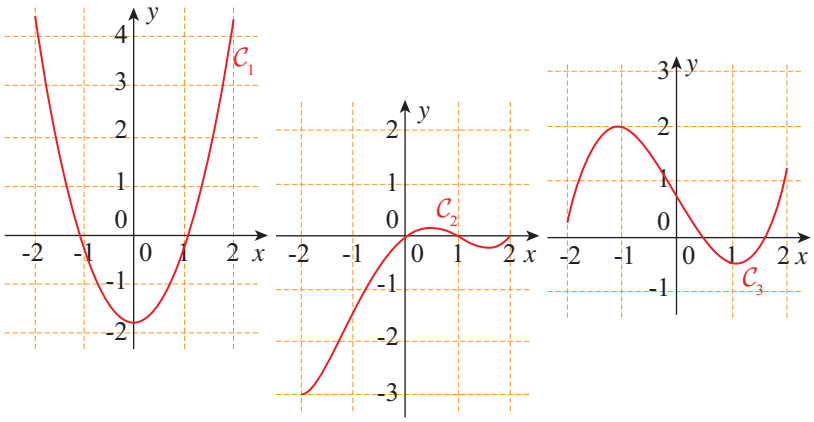
Établir le tableau de variations de G sur $[-8\,;\,5]$ en précisant en quelles valeurs de x elle atteint ses extrema locaux sur $]-8\,;\,5[$.

9 Dérivée et primitive

★★ 15 min Corrigé p. 208

Lycée Victor Duruy, Paris

Voici les représentations graphiques d'une fonction f, de sa dérivée f' et d'une de ses primitives F. Attribuer le graphique qui convient à chaque fonction.



INTERROS

10 Primitives d'une fonction rationnelle ★★

15 min — Corrigé p. 208

Lycée Kléber, Strasbourg

On considère la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x^3-5x^2+4x}{(x-1)^2}.$$

Déterminer a, b et c réels tels que, pour tout x de $]1\,;+\infty[$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}.$$

En déduire les primitives de f sur $]1\,;+\infty[$.

11 Primitives d'une fonction rationnelle ★★

20 min — Corrigé p. 209

Lycée Richelieu, Rueil-Malmaison

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-8}{(2x+1)^2}.$$

Déterminer les nombres réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur l'intervalle donné sachant que :

$$F(x)=\frac{ax^2+bx+c}{2x+1} \quad \text{et} \quad F(-1)=-6.$$

Intégrales

12 Primitive et calcul d'aire ★

10 min — Corrigé p. 210

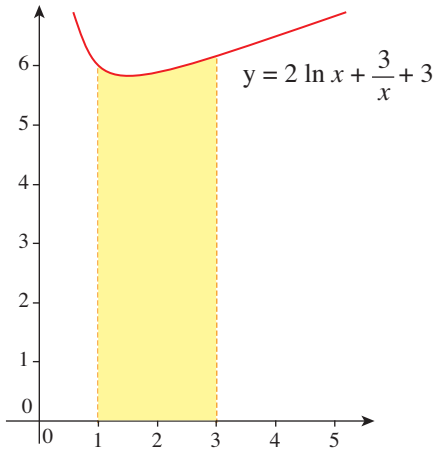
Lycée Bonaparte, Toulon

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2\ln x+\frac{3}{x}+3.$$

1 On définie la fonction F sur $]0\,;+\infty[$ par :
$F(x)=(2x+3)\ln x+x$.
Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2 Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine colorié sur la graphique ci-contre.



13 À l'aide de primitives

★ — 20 min — Corrigé p. 211

Lycée Montaigne, Paris

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^3 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x$.
2. $J = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x-4)\,\mathrm{d}x$.
3. $K = \int_4^2 \frac{1}{(4-3x)^2}\,\mathrm{d}x$.

14 Bénéfice moyen

★★ — 20 min — Corrigé p. 212

Cité scolaire internationale, Grenoble

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec x appartenant à $[0\,;5]$.

Les bénéfices ou les pertes de l'entreprise sont modélisés par la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 8$. Pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice, et si $f(x)$ est négatif, l'entreprise subit une perte.

1. **(a)** Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 8x$ sur $[0\,;5]$ est une primitive de f sur $[0\,;5]$.

   (b) Calculer la valeur exacte de $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets.

Déterminer la valeur moyenne du bénéfice sur $[3\,;5]$. Donner l'arrondi à l'euro près.

15 Domaine entre deux courbes

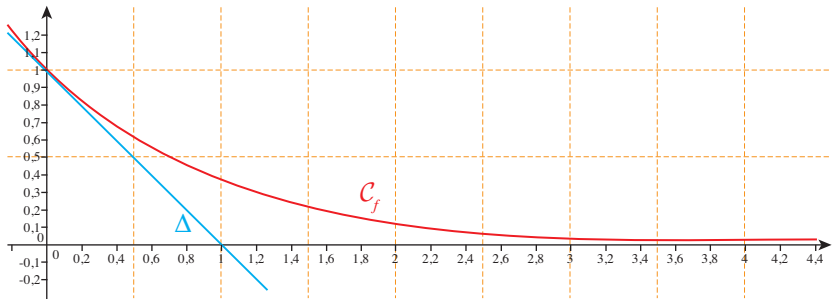
★★ — 30 min — Corrigé p. 213

Cité scolaire internationale, Grenoble

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $g(x) = 1 - x$ et $h(x) = f(x) - g(x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.



INTERROS

Partie A : position relative de $\mathcal{C}_f$ et d'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant les questions précédentes, étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B : calcul d'aire.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit a un nombre entier vérifiant $a > 1$. On appelle $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$.
   On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.
   (a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique ci-dessus pour $a = 3$.
   (b) Déterminer, en fonction de a, la valeur de $\mathcal{A}$.
   (c) Que devient $\mathcal{A}$ quand a tend vers $+\infty$?

16 Étude de fonction et calcul d'aire

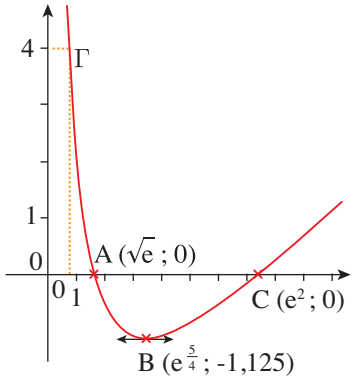
★★★ — 60 min — Corrigé p. 214

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

Partie 1 : lecture graphique.

La courbe Γ ci-contre représente une fonction g définie et dérivable sur $]0\,;\,15]$.
On précise que :

- Γ passe par les points : $A\left(\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,0\right)$, $B\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\,;\,-1{,}125\right)$ et $C\left(\mathrm{e}^2\,;\,0\right)$.
- La tangente à Γ en B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement un encadrement d'amplitude 0,5 de la solution α de l'équation $g(x) = 4$.
2. Résoudre graphiquement dans $]0\,;\,15]$ les inéquations suivantes :
   (a) $g'(x) < 0$ (g' désigne la fonction dérivée de g).
   (b) $g(x) \geq 0$.
3. La fonction g est la dérivée d'une fonction Φ définie sur $]0\,;\,15]$.
   Déterminer le sens de variation de Φ sur $]0\,;\,15]$.

Partie 2 : étude de fonction.

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,15]$ par :

$$f(x) = x\left[2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11\right].$$

1 **(a)** Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 2(\ln x - 0{,}5)(\ln x - 2)$.

(b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

2 Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant par des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de $f(x)$.

x	1,00	2,00	5,00	10,00	15,00
$f(x)$					

3 Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie 3 : calcul d'aire.

On considère la fonction F définie sur $[1\,;\,15]$ par :

$$F(x) = x^2\left(a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right) \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$$

1 Déterminer a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $[1\,;\,15]$.

2 Calculer, en centimètres carrés, l'aire A du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \mathrm{e}$ et $x = \mathrm{e}^2$.

17 Suite et algorithme

★★★ 20 min Corrigé p. 217

Lycée Victor Dupuy, Paris

La suite (u_n) est définie pour tout n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

1 **(a)** Calculer u_0 et u_1.

(b) Calculer u_n en fonction de n.

2 Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

3 Donner une interprétation géométrique de S_n.

4 Déterminer la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

On remarquera que $\mathrm{e}^{-n} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

5 *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Louen a écrit l'algorithme ci-dessous pour trouver la limite de S_n à 10^{-A} près, avec A entier positif.

```
Variables
      A et K sont entiers naturels
      S est réel
Entrée
      Donner une valeur à A
Traitement
      K prend la valeur 0
      S prend la valeur 0
      U prend la valeur 1-e^-1
      Tant que U⩾10^-A Faire :
          S prend la valeur S+U
          K prend la valeur K+1
          U prend la valeur e^-K - e^-(K+1)
      Fin de Tant que
Sortie
          Afficher S
```

Après avoir programmé sa calculatrice, il obtient 0,993 262 053 pour $A = 2$ et considère que son algorithme répond à la question posée.

Par contre, si on entre $A = 1$, il s'affiche 0,864 664 716 et pour $A = 4$, il s'affiche 0,999 876 590.

Justifier que ce ne sont pas des approximations ni à 10^{-1} ni à 10^{-4} près de la limite de S_n.

Quelle erreur a fait Louen en concevant son algorithme ?

1 QCM Recherche de primitives

Enoncé p. 194

1 Réponse **a** . En effet, on calcule la dérivée de F :

$$F'(x) = 3x^2 + 12x - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^4} = 3x^2 + 12x - \frac{1}{x^3}.$$

2 Réponse **b** . Dans le tableau donnant les primitives, aucune ne donne celle de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, le plus simple ici est donc de dériver les fonctions données :

- **Cas a** : $F'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = \frac{9}{4}\sqrt{x}.$
- **Cas b** : $F'(x) = \left(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$
- **Cas c** : $F'(x) = \left(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{3}{2} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{x} + 1)$.

3 Réponse **b** . Ici, nous pouvons encore dériver les fonctions F données, mais on peut déterminer les primitives de f à l'aide des théorèmes du cours.
En effet, posons $u(x) = x + 1$; alors $u'(x) = 1$, et donc f peut s'écrire $f = \frac{u'}{u^2}$.
Les primitives de f sont donc les fonctions F définies sur $]-1\,;+\infty[$ par $F(x) = \frac{-1}{u(x)} + k$, soit $F(x) = \frac{-1}{x+1} + k$, k réel.

4 Réponse **c** . Ici, nous pouvons aussi, à l'aide des théorèmes du cours, déterminer les primitives de f.
Posons $u(x) = x^2 + 1$; alors $u'(x) = 2x$, et donc f peut s'écrire $f = \frac{1}{2}u'u$.
Les primitives de f sont donc les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}u^2(x) + k, \text{ soit } F(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^2 + k, \ k \text{ réel.}$$

2 QCM Exponentielle et logarithme

Enoncé p. 194

1 Réponse **c** . Il suffit de dériver les différentes fonctions proposées.
Si $G(x) = \frac{e^x}{2e^{2x}}$, alors $G(x) = \frac{1}{2e^x}$ et $G'(x) = \frac{-1}{2e^x}$.
Si $G(x) = \frac{2(e^x + x)}{e^{2x}}$, alors :

$$G'(x) = \frac{2(e^x+1)(e^{2x}) - 2(e^x+x)(2e^{2x})}{(e^{2x})^2} = \frac{2 - 4x - 2e^x}{e^{2x}}.$$

Si $G(x) = \dfrac{1+2\mathrm{e}^x}{-2\mathrm{e}^{2x}}$, alors :

$$G'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x(-2\mathrm{e}^{2x}) - (1+2\mathrm{e}^x)(-4\mathrm{e}^{2x})}{(-2\mathrm{e}^{2x})^2} = \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}.$$

C'est donc cette fonction qui convient.

2 Réponse **b** : f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc f admet des primitives sur $]0\,;+\infty[$.

f n'a aucune forme connue. Transformons son écriture.

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f(x) = 1+\dfrac{1}{x}$; les primitives de f sur $]0\,;+\infty[$ sont donc les fonctions $F_k(x) = x + \ln x + k$, k réel.

En particulier, pour $k = \mathrm{e}$, on trouve $F(x) = x + \mathrm{e} + \ln x$.

3 Réponse **b** : pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$.

4 Réponse **c** : en effet comme $x > 0$, $\ln(x^2) = 2\ln x$. La dérivée de la fonction F telle que $F(x) = 2\ln x$ est bien $F'(x) = \dfrac{2}{x}$.

3 V/F Aire sous la courbe

Enoncé p. 195

ATTENTION

N'oubliez pas de justifier que f est positive sur l'intervalle considéré.

1 Faux : sur $[2\,;3]$, une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(x)$.

Alors, $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln x\big]_2^3 = \ln 3 - \ln 2$.

2 Vrai : la fonction $f : x \mapsto -x^2+2x+3$ est définie et dérivable sur $[-1\,;3]$, donc admet des primitives sur $[-1\,;3]$. De plus, le trinôme du second degré $-x^2+2x+3$ admet deux racines -1 et 3 et donc $-x^2+2x+3 \geq 0$ pour tout x de $[-1\,;3]$. Alors, l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire est :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^3 \left(-x^2+2x+3\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^3$$
$$= (-9+9+9) - \left(\frac{1}{3}+1-3\right) = \frac{32}{3}.$$

3 Vrai : la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$ est définie et dérivable sur $[0\,;2]$, donc admet des primitives sur $[0\,;2]$. De plus :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \geq \mathrm{e}^0 \iff \frac{x}{2} \geq 0 \iff x \geq 0,$$

donc f est positive sur $[0\,;2]$. Alors, l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire est :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) dx = \left[2e^{\frac{x}{2}} - x\right]_0^2 = (2e - 2) - (2 - 0) = 2e - 4.$$

4 Faux : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+5)^2}$ est définie et dérivable sur $[-4\,;-2]$, donc admet des primitives sur $[-4\,;-2]$. De plus, f est positive sur $[-4\,;-2]$.

Posons $u(x) = x + 5$; alors $u'(x) = 1$ et f peut s'écrire $f = \dfrac{u'}{u^2}$; une primitive de f sur $[-4\,;-2]$ est donc $F : x \mapsto -\dfrac{1}{x+5}$.

Alors, l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire est :

$$\mathcal{A} = \int_{-4}^{-2} \frac{1}{(x+5)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x+5}\right]_{-4}^{-2} = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}.$$

4 V/F Calcul d'intégrales

Enoncé p. 195

1 Vrai : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Posons $u(x) = x^2 + 1$ alors $u'(x) = 2x$ et f peut s'écrire $f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^2}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $F = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{u}\right)$ soit :

$$F : x \mapsto \frac{-1}{2(x^2+1)}.$$

Alors :

$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^2 = -\frac{1}{2\times 5} - \left(-\frac{1}{2\times 1}\right) = \frac{2}{5}.$$

2 Faux : on pourrait calculer une primitive de cette fonction, mais on peut décider autrement : la fonction à intégrer est négative sur $[0\,;1]$ et on l'intègre de 1 à 0, donc l'intégrale est positive.

ATTENTION

Dans une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, on n'a pas toujours $a < b$.

3 Vrai : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est définie et dérivable sur $[1\,;e]$, donc admet des primitives sur $[1\,;e]$.

Posons $u(x) = \ln x$; alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et f peut s'écrire $f = u'u$. Une primitive de f sur $[1\,;e]$ est donc $F = \dfrac{1}{2}u^2$, soit $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

Alors :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \left(\frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2\right) - \left(\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right) = \frac{1}{2}.$$

4 Faux : la fonction $f : x \mapsto x(x^2+1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Posons $u(x) = x^2+1$; alors $u'(x) = 2x$ et f peut s'écrire $f = \frac{1}{2}u'u$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $F = \frac{1}{4}u^2$, soit $F : x \mapsto \frac{1}{4}(x^2+1)^2$.

Alors :

$$\int_{-2}^{-1} x(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}(x^2+1)^2\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{4}\times 4 - \frac{1}{4}\times 25 = -\frac{21}{4}.$$

5 V/F Propriétés de l'intégrale

Enoncé p. 196

1 Vrai : par linéarité,

$$2\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - 3\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-4} = \int_2^3 \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-4}\right)\mathrm{d}x\ .$$

Or :

$$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-4} = \frac{2(x-4)-3(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{-x-5}{x^2-5x+4},$$

donc :

$$\int_2^3 \frac{-x-5}{x^2-5x+4}\,\mathrm{d}x = 2\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - 3\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-4}.$$

2 Faux : pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$, et comme le trinôme x^2+x+1 a pour discriminant $\Delta = -3$, $x^2+x+1 > 0$. La fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}$; alors comme $-2 < -1$:

$$\int_{-2}^{-1} (x^2+x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

3 Vrai : comme $-1 < 2$, si $x \leq f(x) \leq x+1$, alors :

$$\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{2} (x+1)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

et

$$\int_{-1}^{2} (x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{2} + 2 - \left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{9}{2}.$$

D'où $\frac{3}{2} \leq \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \leq \frac{9}{2}$, et *a fortiori*, $1 \leq \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \leq 5$.

4 Faux : si, pour tout réel x, $f(x) \leq 3x+2$, alors $(3x+2) - f(x) \geq 0$; or, $-1 > -3$, donc :

$$\int_{-1}^{-3} \big((3x+2) - f(x)\big)\,dx \leq 0.$$

6 Primitive d'un polynôme

Enoncé p. 196

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer cette primitive, on applique la formule pour les primitives de x^n :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Or, $F(0) = 0$, donc : $F(0) = 0 + 0 + 0 + k = 0$, donc : $k = 0$.

Finalement, *la* primitive de f qui s'annule en 0 est F, avec :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x.$$

7 Dérivée et primitives

Enoncé p. 196

Lycée Alain, Le Vésinet

Une solution est de dériver séparément les deux fonctions et comparer les dérivées. Si elles sont égales, les fonctions f et g sont bien primitives d'une même fonction.

Une variante est de calculer la différence des deux fonctions. Si c'est une fonction constante, alors cela prouve que ce sont deux primitives d'une même fonction (la dérivée d'une fonction constante est nulle).

Cette méthode est un peu plus rapide car on n'a pas besoin de dériver.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{5x^2 - 7x + 9}{3x-1} - \frac{5x^2 - 16x + 12}{3x-1} \\ &= \frac{5x^2 - 7x + 9 - 5x^2 + 16x - 12}{3x-1} = \frac{9x-3}{3x-1} = 3. \end{aligned}$$

Comme $f - g$ est une fonction constante sur I, $(f-g)' = 0$ et donc $f' = g'$.

CQFD
(« Ce Qu'il Fallait Démontrer »)

CORRIGÉS

8 Lecture graphique

Enoncé p. 197

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

La fonction g est la fonction dérivée de G. Le signe de g donne donc les variations de G. De plus, lorsque g s'annule en changeant de signe, G admet un extrémum local.

x	-8		-2		3		5
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de G		↗		↘		↗	

Donc G atteint ses extremums locaux en -2 et 3.

9 Dérivée et primitive

Enoncé p. 197

Lycée Victor Duruy, Paris

Pour reconnaître les différentes fonctions, on utilise le fait que le signe de la dérivée donne les variations de la fonction.

Sur l'intervalle $[1\,;2]$, la fonction 3 est négative puis positive. Si c'est la dérivée d'une fonction, cela signifie que cette fonction est décroissante puis croissante sur cet intervalle. Ce serait la fonction 2. Par contre, la fonction 2 est négative sur $[1\,;2]$, elle ne peut pas être la dérivée de la fonction 1 qui est croissante sur l'intervalle $[1\,;2]$, ni de la fonction 3 qui est croissante sur une partie de l'intervalle.

D'après cette étude, il semble donc que F est la fonction 2, la fonction f, dérivée de F, est la fonction 3 et f' est la fonction 1.

Vérifions que les variations des fonctions correspondent aux signes des dérivées ainsi désignées :

x	-2		$-1{,}1$		$0{,}6$		$1{,}1$		$1{,}6$		2
signe de f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
variations fonction f		↗		↘		↘		↗		↗	
signe de f		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
variations de F		↗		↗		↘		↘		↗	

10 Primitives d'une fonction rationnelle

Enoncé p. 198

Lycée Kléber, Strasbourg

On va raisonner par identification :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + c}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b+c}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^3-5x^2+4x}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b-2a=b-4=-5 \\ a-2b=2-2b=4 \\ b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \qquad f(x)=2x-1+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

La primitive d'une somme est la somme des primitives (à une constante près bien sûr).

- une primitive de $x \mapsto 2x-1$ est $x \mapsto x^2-x$.
- une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x-1}$.
- f admet donc pour primitives les fonctions de la forme :

$$x \mapsto x^2-x-\frac{1}{x-1}+k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

11 Primitives d'une fonction rationnelle

Enoncé p. 198

Lycée Richelieu, Rueil-Malmaison

En remplaçant x par -1 dans l'expression de F :

$$F(-1)=-6 \quad \text{soit} \quad \frac{a-b+c}{-1}=-6 \iff a-b+c=6.$$

Calculons par ailleurs $F'(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient :

$$F'(x) = \frac{(2ax+b)(2x+1)-2(ax^2+bx+c)}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2(4a-2a)+x(2a+2b-2b)+(b-2c)}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{2ax^2+2ax+b-2c}{(2x+1)^2}.$$

Comme F est une primitive de f, on a pour tout $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$:

$$F'(x)=f(x) \iff \frac{2ax^2+2ax+b-2c}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-8}{(2x+1)^2}$$
$$\left(\text{car } (2x+1)^2 \neq 0\right)$$
$$\iff 2ax^2+2ax+b-2c=2x^2+2x-8$$

Les deux polynômes sont donc égaux ; on identifie les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2c = -8 \\ a - b + c = 6 \text{ car } F(-1) = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b - 2c = -8 \\ -b + c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

Donc :

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x + 1}.$$

Certain(e)s pourraient se demander pourquoi on a trouvé *la* primitive et non pas *une* primitive à une constante près. C'est bien sûr à cause de la condition $F(-1) = -6$ qui impose une valeur bien particulière à la constante.

12 Primitive et calcul d'aire

Enoncé p. 198

Lycée Bonaparte, Toulon

1 F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Calculons la dérivée de F :

$$F'(x) = 2\ln x + (2x + 3) \times \frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 2 + \frac{3}{x} + 1 = f(x).$$

La fonction F est donc bien une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2 La fonction f est positive sur $[2 ; 3]$. L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ est donc égale à l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x &= \big[f(x)\big]_1^3 \\ &= F(3) - F(1) \\ &= (9\ln 3 + 3) - (5\ln 1 + 1) \\ &= 9\ln 3 + 2. \end{aligned}$$

MÉTHODE

Il est souvent demandé de vérifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f. Dans ce cas, il suffit de dériver F et vérifier que l'on obtient effectivement f. Il est totalement inutile d'essayer de trouver par soi-même une primitive de f et cela n'est parfois même pas possible avec les outils disponibles d'après les programmes.

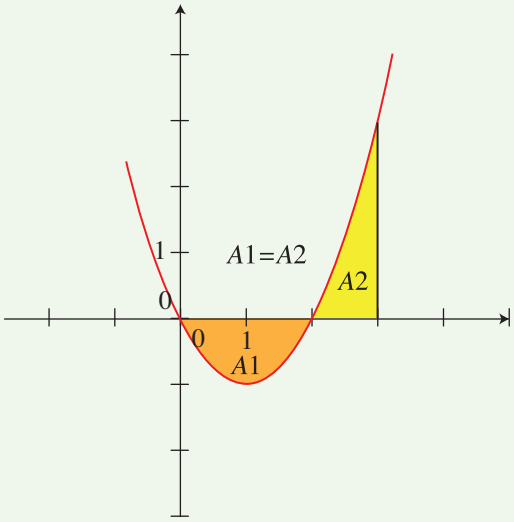
13 À l'aide de primitives

Enoncé p. 199

Lycée Montaigne, Paris

1 Il s'agit d'intégrer un polynôme (fonction continue sur $\mathbb{R}$). L'intégrale I existe donc.

$$I = \int_0^3 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^3 = \left(\frac{27}{3} - 9\right) - (0 - 0) = 0.$$



Remarque : une fonction non nulle peut avoir une intégrale nulle si elle change de signe sur l'intervalle d'intégration (cf. le cours). C'est le cas ici :

$$\int_0^3 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \underbrace{(x^2 - 2x)}_{<0}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \underbrace{(x^2 - 2x)}_{>0}\,\mathrm{d}x = 0.$$

2 Posons $u(x) = x^2 + x - 4$, donc : $u'(x) = 2x + 1$.

L'expression $(2x + 1)(x^2 + x - 4)$ est la dérivée $u'u$ de $\frac{1}{2}u^2$. Alors :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (2x + 1)(x^2 + x - 4)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u'(x) \times u(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}u(x)^2\right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{2}(x^2 + x - 4)^2\right]_0^1 = -6. \end{aligned}$$

3 Posons $u(x) = 4 - 3x$, donc : $u'(x) = -3$. On cherche à reconnaître sous l'intégrale la dérivée de $\frac{1}{u}$:

$$\frac{1}{(4-3x)^2} = \frac{1}{-3} \times \frac{-3}{(4-3x)^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{u'(x)}{u(x)^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{-u'(x)}{u(x)^2}\right)$$

Donc : $x \mapsto \dfrac{1}{(4-3x)^2}$ a pour primitive : $x \mapsto \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{u(x)}$.

$$\begin{aligned}
\int_4^2 \frac{1}{(4-3x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_4^2 \frac{1}{3}\left(\frac{-u'(x)}{u(x)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_4^2 \left(\frac{-u'(x)}{u(x)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4-3x}\right]_4^2 \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4-6} - \frac{1}{4-12}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{-4+1}{8}\right) \\
&= -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

14 Bénéfice moyen

Enoncé p. 199

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 **(a)** $F'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 8$
$= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 8$
$= f(x)$.

La fonction F est donc une primitive de f sur $[0\,;5]$.

(b) $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_3^5$
$= F(5) - F(3)$
$= \left(5\mathrm{e}^5 - 2\mathrm{e}^5 - 40\right) - \left(3\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^3 - 24\right)$
$= 3\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 - 16.$

2 La valeur moyenne du bénéfice pour une production entre 3 et 5 milliers d'objets est égale à la moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[3\,;5]$, c'est-à-dire à :

$$\frac{1}{5-3}\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(3\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 - 16\right) \approx 205 \text{ euros.}$$

15 Domaine entre deux courbes

Enoncé p. 199

Cité scolaire internationale, Grenoble

Partie A

1 Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Or, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ donc $f'(0) = -1$ et d'autre part, $f(0) = 1$.
L'équation de la tangente est donc $y = -x + 1$, ce qui montre que la droite Δ est bien la tangente.

2 $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Comme la dérivée seconde de f est toujours positive, cela montre que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3 Comme la fonction f est convexe, sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se trouve entièrement au-dessus de toutes ses tangentes, et en particulier au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, donc elle est au-dessus de Δ.

Partie B

1 Une primitive de $f - g$ est la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\mathrm{e}^{-x} - x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - 1 + \frac{1}{2} + \mathrm{e}^0 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

2 **(a)** On a :

(b) La droite Δ coupe l'axe des abscisses en 1, et $\mathcal{C}_f$ est toujours au dessus de Δ, on peut alors décomposer le domaine $\mathcal{D}$ en deux parties :

- Celle qui est comprise entre la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$, qui a pour aire :

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

- Celle comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$, qui a pour aire :

$$\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^a$$
$$= \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^a}.$$

$\mathcal{A}$ est donc égale à la somme de ces deux aires :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^a}.$$

- Comme $0 < \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, la suite géométrique de raison $\frac{1}{\mathrm{e}}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et par conséquent $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^a$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand a tend vers $+\infty$.

16 Étude de fonction et calcul d'aire

Enoncé p. 200

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

Partie 1 : lecture graphique.

1 $0{,}5 < \alpha < 1$.

2 **(a)** $g'(x) < 0$ si et seulement si g est strictement décroissante. D'après le dessin, c'est le cas sur l'intervalle :

$$]0, x_B[=]0, \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}[.$$

(b) $g(x) \geq 0 \iff x \in]0\,;\,x_A] \cup [x_C\,;\,15] =]0\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}] \cup [\mathrm{e}^2\,;\,15]$.

3 On sait que le sens de variation de Φ dépend du signe de g car $\Phi' = g$.

- Pour $x \in]0\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}]$ et $[\mathrm{e}^2\,;\,15]$, $g(x) \geq 0$ donc Φ est croissante.
- Pour $x \in [\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}^2]$, $g(x) \leq 0$ donc Φ est décroissante.

Partie 2 : étude d'une fonction.

1 **(a)** On a $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11]$. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ (car f s'obtient à partir de la fonction ln par produit et composition avec une fonction polynôme).

$$f'(x) = 1 \times \left[2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11\right] + x\left(\frac{4\ln x}{x} - \frac{9}{x}\right)$$
$$= 2(\ln x)^2 - (9-4)\ln x + 11 - 9$$
$$= 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2.$$

On vérifie qu'on a bien la forme factorisée annoncée :

$$\begin{aligned}2(\ln x - 0{,}5)(\ln x - 2) &= 2\left((\ln x)^2 - 2{,}5\ln x + 1\right)\\ &= 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2.\end{aligned}$$

(b) On étudie le signe de f' sous sa forme factorisée :

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\iff \ln x - 0{,}5 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln x - 2 = 0\\ &\iff x = \sqrt{\mathrm{e}} \quad \text{ou} \quad x = \mathrm{e}^2\end{aligned}$$

$$\ln x - 0{,}5 > 0 \iff \ln x > \frac{1}{2} \iff x > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \iff x > \sqrt{\mathrm{e}}$$

$$\ln x - 2 > 0 \iff \ln x > 2 \iff x > \mathrm{e}^2.$$

Calculons les extrema de f :

$$\begin{aligned}f(\sqrt{\mathrm{e}}) &= \sqrt{\mathrm{e}}\left(2\left(\ln\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 - 9\ln\sqrt{\mathrm{e}} + 11\right)\\ &= \sqrt{\mathrm{e}}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9\frac{1}{2} + 11\right)\\ &= \sqrt{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 11\right)\\ &= 7\sqrt{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\mathrm{e}^2) &= \mathrm{e}^2\left(2(\ln \mathrm{e}^2)^2 - 9\ln \mathrm{e}^2 + 11\right)\\ &= \mathrm{e}^2\left(2(2)^2 - 9\times 2 + 11\right)\\ &= \mathrm{e}^2.\end{aligned}$$

$$f(15) = 15\left(2(\ln 15)^2 - 9\ln 15 + 11\right) \approx 19{,}4.$$

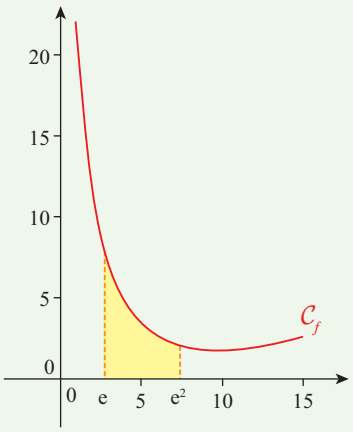
D'où le tableau de variations de f :

x	1		$\sqrt{\mathrm{e}}$		e^2		15
$\ln x - 0{,}5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	$\nearrow$	$7\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$f(15)$

2

x	1,00	2,00	5,00	10,00	15,00
$f(x)$	11,00	11,45	8,48	8,81	19,42

3



Partie 3 : calcul d'aire.

1 F est une primitive de f sur $I =]0, +\infty[$ à condition que F soit dérivable et $F' = f$ sur I. Or, F est bien dérivable sur I (mêmes raisons que pour f).

$$F(x) = x^2\left(a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x\left(a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right) + x^2\left(2a\frac{\ln x}{x} + \frac{b}{x}\right) \\ &= 2ax\,(\ln x)^2 + (2bx + 2ax)\ln x + (2cx + bx) \\ &= x\left(2a(\ln x)^2 + (2b + 2a)\ln x + (2c + b)\right) \\ f(x) &= x\left(2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11\right) \end{aligned}$$

En divisant par x (sachant que $x \neq 0$) :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x > 0$$
$$\iff 2a(\ln x)^2 + (2b + 2a)\ln x + (2c + b) = 2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11$$

On se ramène à identifier deux polynômes en posant $X = \ln x$:

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{pour tout } x > 0)$$
$$\iff 2aX^2 + (2b + 2a)X + (2c + b) = 2X^2 - 9X + 11 \quad (\text{pour tout } X \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2b + 2a = -9 \\ 2c + b = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{-9 - 2a}{2} \\ c = \dfrac{11 - b}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{11}{2} \\ c = \dfrac{33}{4} \end{cases}$$

$$F(x) = x^2\left((\ln x)^2 - \frac{11}{2}\ln x + \frac{33}{4}\right).$$

2 L'aire recherchée A est telle que :

$$A = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,dx = F(\mathrm{e}^2) - F(\mathrm{e}) \quad \text{unités d'aire (ici, le cm}^2\text{)}$$
$$= \mathrm{e}^4\left(4 - \frac{11}{2}\times 2 + \frac{33}{4}\right) - \mathrm{e}^2\left(1 - \frac{11}{2} + \frac{33}{4}\right) = \frac{5}{4}\mathrm{e}^4 - \frac{15}{4}\mathrm{e}^2$$
$$= \frac{5\mathrm{e}^2}{4}\left(\mathrm{e}^2 - 3\right) \approx 40{,}54\,\text{cm}^2 \quad (\text{à } 10^{-2} \text{ près}).$$

17 Suite et algorithme

Enoncé p. 201

Lycée Victor Dupuy, Paris

1 **(a)** $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \left(-\mathrm{e}^0\right) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

$u_1 = \displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^2 = -\mathrm{e}^{-2} - \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

(b) $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{n+1}$

$= -\mathrm{e}^{-(n+1)} - \left(-\mathrm{e}^{-n}\right)$

$= \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}$.

2 $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$= \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_0^{n+1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale

$= 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}$.

3 S_n est l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n + 1$.

4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\right] = 0$ car $0 < \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

5 Comme la limite de S_n est 1, on voit que les écarts avec 1 sont strictement supérieurs à 10^{-1} ou 10^{-4}. On pourrait imaginer que c'est juste un problème d'arrondi des valeurs par la calculatrice, mais c'est en réalité une erreur de la part de Louen. En effet, il arrête la boucle, dès que le terme $u_i < 10^{-A}$, mais il n'est pas certain qu'en ajoutant plusieurs termes inférieurs à 10^{-A}, il n'obtient pas une quantité plus grande que 10^{-A}.

Chapitre 7

Probabilités conditionnelles

Plan du chapitre

1. Probabilités (rappels)
2. Conditionnement

Exercice type — Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

À Probabland, de tout temps, il naît 40 % de garçons et 60 % de filles. Dans ce pays, le daltonisme (déformation génétique bénigne qui rend incapable de voir certaines couleurs) touche dès la naissance 30 % des bébés filles et 25 % des bébés garçons.

1. La petite Ève vient de naître à Probabland. Quelle est la probabilité qu'Ève soit atteinte par le daltonisme ?
2. Le petit Tom vient de naître à Probaland. Quelle est la probabilité que Tom soit daltonien ?
3. Paul et Marie viennent de se marier. Quelle est la probabilité que leur futur bébé soit une fille daltonienne ?
4. Quelle est la probabilité que ce futur bébé soit daltonien ?
5. Dans les familles probablandaises de trois enfants, quelle est la probabilité d'avoir un enfant daltonien et un seul ?
6. Que devient cette probabilité dans les familles de quatre enfants ?
7. Donner la loi de probabilité suivie par le nombre d'enfants daltoniens dans une famille de quatre enfants.
8. Quel est en moyenne le nombre d'enfants daltonien par famille de quatre enfants ?

On donnera les résultats arrondis à 10^{-3} près.

Voir corrigé page 222

COURS

1 Probabilités (rappels)

1.1 Vocabulaire

Propriétés 1

Pour tous événements A et B :

- On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A. On a alors : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$;
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

À RETENIR

Utilisez $\bar{A}$ lorsque l'intitulé de A contient « au moins un… ». $\bar{A}$ s'exprime alors avec « aucun », il est donc en général facile de calculer $p(\bar{A})$, et on obtient alors : $p(A) = 1 - p\left(\bar{A}\right)$.

Théorème 1

Dans le cas d'équiprobabilité :

- pour tout événement élémentaire e_i,
$$p(e_i) = \frac{1}{\text{nombre total d'événements élémentaires}}$$
- pour tout événement A,
$$p(A) = \frac{\text{nombre d'événements élémentaires constituant A}}{\text{nombre total d'événements élémentaires}}.$$

1.2 Loi binomiale

Définitions 1

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues.
Soit un entier naturel n non nul et un nombre réel p de l'intervalle $[0\,;1]$.
Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p correspond à la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, p désignant la probabilité de succès.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus lors d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Lors d'un schéma de Bernoulli formé de n épreuves répétées, on appelle coefficient binomial « k parmi n » le nombre de chemins menant à k succès.

Propriété 2

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout entier k, avec $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

À RETENIR

Le nombre $\binom{n}{k}$ s'obtient à la calculatrice à l'aide des séquences suivantes :

- Sur CASIO : n OPTN PROB nCr k
- Sur TI : n math PRB 3 : Combinaison k

Remarque : la calculatrice peut également calculer directement $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$:

	CASIO	TI
Syntaxe	OPTN STAT puis DIST, BINM, Bpd ou Bcd	Menu DISTRIB (2nd var), puis BinomFdp ou BinomFRep
$P(X = k)$	BinomialPD(k,n,p)	BinomFdp(n,p,k)
$P(X \leq k)$	BinomialCD(k,n,p)	BinomFRep(n,p,k)

Propriété 3

L'espérance de X suivant la loi binomiale de paramètres n et p est $E(X) = np$.

2 Conditionnement

2.1 Probabilité d'un événement B sachant A

Définition 2

A et B sont deux événements d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$, la probabilité de l'événement B sachant A, notée $p_A(B)$ est $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Remarques

- La probabilité de B sachant A est la probabilité que B soit réalisé dans l'univers A.
- Dans le cas d'équiprobabilité,

$$p_A(B) = \frac{\text{nombre d'événements élémentaires de } A \cap B}{\text{nombre d'événements élémentaires de } A}.$$

COURS

À RETENIR

Pour calculer $p_A(B)$, vous pouvez

- soit utiliser la définition si vous connaissez $p(A \cap B)$ et $p(A)$;
- soit déterminer les résultats qui réalisent A et, parmi ceux-ci, calculer la probabilité de ceux qui réalisent B.

Propriété 4

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B).$$

2.2 Formule des probabilités totales

Définition 3

Les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω, si les B_i sont non vides, deux à deux disjoints et que leur réunion est Ω.

Théorème 2

Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω, alors, pour tout événement A,

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \ldots + p(A \cap B_n),$$

soit

$$p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + p_{B_2}(A) \times p(B_2) + \cdots + p_{B_n}(A) \times p(B_n)$$

Conséquence

Pour tout événement A et tout événement B de probabilité non nulle,

$$p(A) = p(A \cap \bar{B}) + p(A \cap B) = p_{\bar{B}}(A) \times p(\bar{B}) + p_B(A) \times p(B).$$

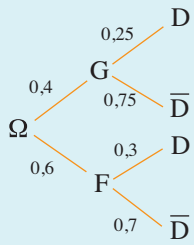
Solution de l'exercice type — **Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine**

Notons F, G, D les événements « être une fille », « être un garçon », « être daltonien ».
Traduisons les données en termes de probabilités :
il nait 40 % de garçons soit $p(G) = 0{,}4$;
il nait 60 % de filles soit $p(F) = 0{,}6$;
parmi les filles, 30 % sont daltoniennes soit $p_F(D) = 0{,}3$;
parmi les garçons, 25 % sont daltoniens soit $p_G(D) = 0{,}25$.

…

Solution de l'exercice type — Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Nous pouvons alors construire l'arbre pondéré ci-dessous :



1 On sait que Ève est un bébé fille donc la probabilité qu'elle soit atteinte de daltonisme est $p_F(D) = 0{,}3$.

2 De même, la probabilité que Tom soit daltonien est $p_G(D) = 0{,}25$.

3 On ne sait pas à l'avance le sexe du bébé.

On cherche donc la probabilité pour que le bébé soit une fille et que le bébé soit daltonien soit $p(F \cap D)$.

$$p(F \cap D) = p(F) \times p_F(D) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18.$$

La probabilité pour que le futur bébé soit une fille daltonienne est 0,18.

4 Le bébé est daltonien soit si c'est une fille daltonienne, soit si c'est un garçon daltonien, comme les événements F et G forment une partition de l'univers Ω, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(D) = p(F \cap D) + p(G \cap D)$$

Or,

$$p(G \cap D) = p(G) \times p_G(D) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1.$$

Donc :

$$p(D) = 0{,}1 + 0{,}18 = 0{,}28.$$

La probabilité que ce futur bébé soit daltonien est 0,28.

5 Les familles de n enfants, n étant fixé, obéissent à un schéma de Bernoulli à n épreuves, la i-ième épreuve étant associée à la naissance du i-ième enfant.

À chaque naissance, ou bien l'enfant est daltonien (succès) ou bien le contraire (échec).

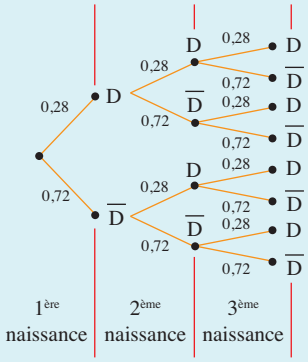
Les naissances étant indépendantes les unes des autres, la probabilité du succès est $p(D) = 0{,}28$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

COURS

Solution de l'exercice type — **Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine**

Représentons le cas d'une famille de trois enfants à l'aide d'un arbre :



Daltonisme dans les familles de trois enfants

Un résultat pour une famille correspond à un chemin dans l'arbre.

Il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ cas possibles. Il y a 3 résultats où la famille a un seul enfant daltonien : $\left(D, \bar{D}, \bar{D}\right)$ ou $\left(\bar{D}, D, \bar{D}\right)$ ou $\left(\bar{D}, \bar{D}, D\right)$, et

$$p\left(D, \bar{D}, \bar{D}\right) = p\left(\bar{D}, D, \bar{D}\right) = p\left(\bar{D}, \bar{D}, D\right) = 0{,}28 \times 0{,}72^2.$$

D'où, la probabilité, dans une famille de trois enfants, d'avoir un enfant daltonien et un seul est égale à $3 \times 0{,}28 \times 0{,}72^2 \approx 0{,}435$.

6 Pour une famille de quatre enfants, le raisonnement est le même.

Il y a quatre résultats où la famille a un seul enfant daltonien, ces résultats ont la même probabilité, d'où, la probabilité dans une famille de quatre enfants d'avoir un enfant daltonien et un seul est égale à $4 \times 0{,}28 \times 0{,}72^3 \approx 0{,}418$.

7 Ici, nous sommes en présence de la répétition de 4 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité $p = 0{,}28$, la loi de probabilité du nombre d'enfants daltoniens est donc la loi binomiale de paramètres 4 et 0,28.

Notons $p(k)$ la probabilité d'avoir k enfants daltoniens dans une famille de quatre enfants.

$k = 0$ correspond a une famille n'ayant aucun enfant daltonien, soit le résultat $\left(\bar{D}, \bar{D}, \bar{D}, \bar{D}\right)$, d'où $p(0) = 0{,}72^4 \approx 0{,}269$.

$k = 1$ correspond a une famille ayant un seul enfant daltonien sur quatre. D'après la question précédente :

$$p(1) = 4 \times 0{,}28 \times 0{,}72^3 \approx 0{,}418.$$

$k = 2$ correspond à une famille ayant deux enfants daltoniens sur quatre. Il y a six résultats possibles et donc $p(2) = 6 \times 0{,}28^2 \times 0{,}72^2 \approx 0{,}244$.

Solution de l'exercice type (suite) **Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine**

$k = 3$ correspond à une famille ayant trois enfants daltoniens sur quatre. Il y a quatre résultats possibles et donc ;

$$p(3) = 4 \times 0{,}28^3 \times 0{,}72 \approx 0{,}063.$$

$k = 4$ correspond à une famille ayant quatre enfants daltoniens sur quatre. Il y a un seul résultat possible et donc $p(4) = 0{,}28^4 \approx 0{,}006$.

D'où le tableau suivant donnant la loi de probabilité du nombre d'enfants daltoniens dans une famille de quatre enfants :

Nombre d'enfants daltoniens (k)	0	1	2	3	4	Total
$p(k)$	0,269	0,418	0,244	0,063	0,006	1

Remarque : vérifiez bien que la somme des probabilités est égale à 1.

8 Le nombre d'enfants daltoniens en moyenne dans une famille de quatre enfants est l'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres $(4 ; 0{,}28)$ soit :

$$E = 4 \times 0{,}28 = 1{,}12.$$

Remarque : l'espérance se calcule aussi à l'aide des résultats trouvés comme une moyenne soit :

$E = 0{,}269 \times 0 + 0{,}418 \times 1 + 0{,}244 \times 2 + 0{,}063 \times 3 + 0{,}006 \times 4 \approx 1{,}119.$

La différence entre les deux résultats s'explique par les arrondis.

Remarque : les questions 5, 6, 7 et 8 font appel au programme de première, qu'il faut connaître aussi pour le baccalauréat.

Voir énoncé page 219

INTERROS

1 QCM Propriétés des probabilités

15 min — Corrigé p. 239

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 A et B sont deux événements relatifs à une même épreuve tels que $p(A) = 0{,}3$, $p_A(B) = 0{,}4$ et $p_{\bar{A}}(B) = 0{,}2$.

a $p(B) = 0{,}26$ b $p(A \cap B) = 0{,}4$ c $p(A \cup B) = \dfrac{109}{130}$

2 A et B sont des événements relatifs à une même épreuve tels que $p(A) = 0{,}6$, $p(A \cup B) = 0{,}8$ et $p(A \cap B) = p(A)p(B)$. Alors

a $p(A \cap B) = 0{,}48$ b $p(B) = 0{,}2$ c $p_A(B) = 0{,}5$

3 A et B sont deux événements relatifs à une même épreuve tels que $p(A \cap B) = 0{,}8$ et $p_A(B) = 0{,}25$.

a $p(A) = 0{,}2$ b C'est impossible c $p(B) = 0{,}9$

4 A et B sont deux événements relatifs à une même épreuve tels que $p(A \cap B) = 0{,}12$ et $p(\bar{A} \cap B) = 0{,}36$.

a $p_B(A) = 0{,}24$ b $p_B(A) = 0{,}48$ c $p_B(A) = 0{,}25$

2 QCM D'après Bac Asie juin 2008

10 min — Corrigé p. 239

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

Les élèves de deux classes de terminale ES (désignées par TE 1 et TE 2) sont répartis selon leur spécialité (qui sont abrégées en SES, LV, Math) de la façon suivante :

Spécialité	TE 1	TE 2	Total
SES	16	8	24
LV	12	14	26
Math	6	10	16
Total	34	32	66

On interroge un élève au hasard. Les données précédentes sont à utiliser pour les quatre questions suivantes :

1 La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE 1 est égale à :

a $\dfrac{1}{66}$ b $\dfrac{1}{34}$ c $\dfrac{17}{33}$

2 La probabilité que l'élève interrogé suive l'enseignement de spécialité Math ou appartienne à la TE 1 est égale à :

a $\dfrac{2}{3}$ b $\dfrac{25}{33}$ c $\dfrac{1}{11}$

3 La probabilité que l'élève interrogé suive la spécialité Math sachant qu'il appartient à la TE 1 est égale à :

a $\frac{1}{34}$ **b** $\frac{1}{11}$ **c** $\frac{3}{17}$

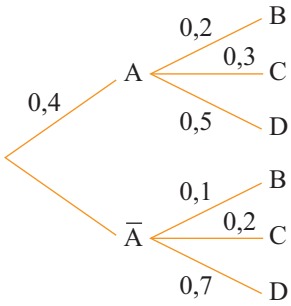
4 La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE 1 sachant qu'il suit la spécialité Math est égale à :

a $\frac{3}{17}$ **b** $\frac{14}{17}$ **c** $\frac{3}{8}$

3 V/F Interprétation d'un arbre

15 min Corrigé p. 240

On a résumé des informations d'une expérience dans l'arbre ci-dessous :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations ci-dessous :

1 $p_A(D) = 0{,}2$

2 $p(C) = 0{,}2$

3 $p(B) = 0{,}14$

4 $p_D(A) = \frac{5}{16}$

4 V/F Test de dépistage

20 min Corrigé p. 240

Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. Ce test présente les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint de cette maladie ait un test positif est 0,95.
- la probabilité pour qu'un individu non atteint par cette maladie ait un test négatif est aussi 0,95.

On choisit un individu au hasard et on note : M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « le test est positif ».

Répondre par vrai ou faux aux affirmations ci-dessous :

1 On réalise un dépistage dans une population donnée dans laquelle la proportion d'individus atteints de la maladie est 0,001.
Alors $p(T) = 0{,}050\,9$.

2 $p_T(M) = 0{,}001$ à 10^{-3} près.

3 La valeur de $p_T(M)$ diminue lorsque la proportion de personnes atteintes de la maladie dans la population augmente.

4 Dans cette question, on choisit au hasard et de façon indépendante quatre personnes dans la population. La probabilité qu'au moins une personne ait un test positif est comprise entre 0,188 et 0,189.

Conditionnement

5 Génétique

★ 30 min Corrigé p. 241

Lycée Stanislas, Paris

Une population est constituée de 100 personnes (40 hommes et 60 femmes), telles que :

- 50 personnes ont les yeux bleus,
- 60 % des hommes ont les yeux bleus.

On choisit au hasard une personne. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

Calculer, sous forme de fraction irréductible, les probabilités des événements suivants :

1 A : « Avoir choisi un homme ».

2 B : « Avoir choisi un homme aux yeux bleus ».

3 C : « Avoir choisi une femme aux yeux bleus ».

4 D : « Avoir choisi une personne aux yeux bleus, sachant que c'est une femme ».

5 E : « Avoir choisi une femme, sachant que c'est une personne ayant les yeux bleus ».

6 Arbre pondéré

★ 20 min Corrigé p. 242

Lycée Virlogeux, Riom

Dans une ville , une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio ;
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :

- T l'événement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\bar{T}$ son événement contraire ;
- B l'événement « le ménage consomme des produits bio » et $\bar{B}$ son événement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Donner sans justification la probabilité $p(T)$ de l'événement T.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. **(a)** Calculer la probabilité de l'événement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio »

   (b) Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.
4. Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième).

7 Médailles de judo

★★ 20 min Corrigé p. 243

Bac métropole, septembre 2011

Pierre, le président d'un club de judo. veut acheter 60 médailles ayant la même référence. Elles sont gravées à l'effigie d'une ou d'un champion Doullet, Rinar ou Vécosse. Il passe commande chez un grossiste qui travaille avec deux fournisseurs A et B. Le tableau suivant indique les caractéristiques du colis contenant les 60 médailles envoyées par le grossiste :

	Doullet	Rinar	Vécosse	Total
Fournisseur A	10	10	10	30
Fournisseur B	5	10	15	30
Total	15	20	25	60

Pierre reçoit le colis, et tire au hasard une médaille. Dans la suite de l'exercice, on suppose que chaque médaille a la même probabilité d'être tirée.

1. **(a)** Montrer que la probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse est égale à $\frac{5}{12}$.

   (b) Quelle est la probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse et provienne du fournisseur B ?

   (c) Pierre constate que la médaille tirée est à l'effigie de Vécosse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B ?

2 Pierre remet la médaille dans le colis et répète maintenant trois fois de suite les mêmes gestes :

- il tire au hasard une médaille ;
- il note l'effigie du champion et remet la médaille dans le colis.

Quelle est la probabilité qu'au moins une des médailles soit à l'effigie de Vécosse ?

8 Pannes électroniques

★ — 20 min — Corrigé p. 243

Lycée Voltaire, Paris

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.

1 On note F l'événement :« l'appareil fonctionne parfaitement », et $\overline{F}$ l'événement contraire de F. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{F}$.

2 On fait subir à chaque appareil un test avant la livraison ; on constate que :

- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test.
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.

On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

(a) Montrer que les probabilités des événements « T et F » et « T et $\overline{F}$ » sont respectivement égales à $\frac{9}{10}$ et $\frac{1}{110}$.

(b) En déduire la probabilité de T.

(c) Calculer la probabilité de F sachant T.

9 Arbre pondéré

★★ — 40 min — Corrigé p. 244

Lycée Galilée, Gennevilliers

Pour payer ses études de médecine, Watson est gardien de nuit dans une grande résidence de 100 appartements. Celle-ci est munie d'un système anti-intrusion (antivol) ultra-moderne, mais qui provoque quelquefois de fausses alarmes.

D'après le constructeur du système, la probabilité d'une fausse alarme, c'est-à-dire que l'alarme se déclenche alors qu'il n'y a pas d'intrusion, est de 0,02.

Par ailleurs, les statistiques sur les trois dernières années montrent que :

Année	1999	2000	2001
Nombre d'intrusions	28	30	26
Nombre d'intrusions qui ont déclenché l'alarme	25	28	23

On effectuera tous les calculs avec une précision de 0,001.

1 D'après ces données, et en interprétant les fréquences statistiques comme des probabilités, montrer que :

(a) La probabilité d'avoir une intrusion un jour quelconque de l'année est de 0,077 (à 0,001 près).

(b) La probabilité qu'il y ait une intrusion et que l'alarme se déclenche est de 0,069 (à 0,001 près).

2 Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche sachant qu'il y a eu une intrusion ?

3 Représenter les résultats précédents sous forme d'arbre pondéré.
Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche ?

4 Une nuit Watson est réveillé en sursaut par l'alarme. Il consulte son ami Sherlock pour connaître la probabilité qu'il s'agisse d'une intrusion.
Quelle réponse donne Sherlock ?

10 Tickets de péage

★★ 30 min Corrigé p. 246

Lycée Virlogeux, Riom

Dans tout cet exercice, on donnera la valeur exacte de chaque résultat.

Grâce à un système de détecteur, une borne de péage automatique peut délivrer des tickets à deux hauteurs différentes selon le véhicule détecté afin que le conducteur ne soit pas obligé de sortir pour le saisir :

- s'il s'agit d'une voiture, d'une moto ou d'une camionnette, le ticket sort en bas ;
- s'il s'agit d'un camion, le ticket sort en haut.

La société d'autoroute a modélisé le fonctionnement défectueux du détecteur de l'une de ces bornes :

- lorsqu'un camion passe, il n'est correctement détecté que deux fois sur trois ;
- lorsqu'un autre type de véhicule passe, son conducteur est contraint d'en sortir pour saisir son ticket en haut une fois sur quatre.

On estime qu'à cette borne de péage, 60 % des véhicules sont des camions.

On considère les événements suivants :

- C : « Le véhicule qui se présente est un camion » ;
- H : « Le ticket sort en haut » ;
- B : « Le ticket sort en bas ».

Notation : pour tout événement E et tout événement F de probabilité non nulle, on note $p(E)$ la probabilité de l'événement E et $p_F(E)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.

1. Donner les probabilités : $p(C), p_{\bar{C}}(H)$ et $p_{\bar{C}}(B)$.
2. Construire un arbre probabiliste présentant la situation.
3. Calculer la probabilité que le ticket sorte en haut.
4. Montrer que la probabilité qu'un conducteur ne soit pas obligé de sortir de son véhicule pour saisir le ticket vaut 0,7.
5. Trois véhicules se présentent l'un après l'autre à cette borne de péage défectueuse. On modélise cette situation comme un tirage avec remise.
   Calculer la probabilité qu'au moins l'un des conducteurs soit contraint de descendre de son véhicule pour saisir son ticket.

11 Arbre et recherche de loi

★★ — 45 min — Corrigé p. 246

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

- un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients ;
- une part de tarte Tatin, choisie par 30 % des clients.

20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte Tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

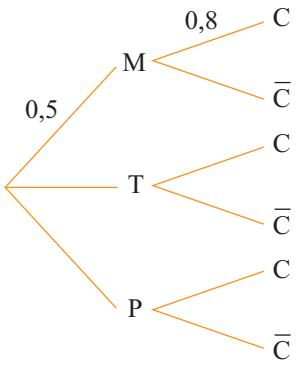
On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note p la probabilité associée à cette expérience aléatoire.

On note :

- M l'événement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'événement : « Le client prend une part de tarte Tatin » ;
- P l'événement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'événement : « Le client prend un café » et $\bar{C}$ l'événement contraire.

1 En utilisant l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ et celle de $p_T(C)$, probabilité de l'événement C sachant que T est réalisé.

2 Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3 **(a)** Exprimer par une phrase ce que représente l'événement $M \cap C$, puis calculer $p(M \cap C)$.

(b) Montrer que $p(C) = 0{,}76$.

4 Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (*On donnera le résultat arrondi au centième*).

5 Un assortiment de macarons est vendu 6 € , une part de tarte Tatin est vendue 7 € et un café est vendu 2 € .

Chaque client prend un plat (et un seul) au prix unique de 18 € , ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

(a) Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?

(b) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

Sommes s_i	18	20	24	...	...	...
$p(s_i)$	0,02	0,18	...	...	...	...

(c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

12 Gain espéré

★★ 40 min Corrigé p. 247

Lycée Victor Duruy

Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.

INTERROS

L'éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.

On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale a 0,2 ; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale a 0,4 ; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à 0,1.

Partie A

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.

On note :

- A l'événement : « la personne s'abonne à l'édition papier »,
- B l'événement : « la personne s'abonne à l'édition électronique »,
- $\bar{A}$ l'événement contraire de A,
- $\bar{B}$ l'événement contraire de B.

1 **(a)** Traduire les données de l'exercice à l'aide d'un arbre pondéré.

(b) Donner la probabilité de $\bar{B}$ sachant A et la probabilité de $\bar{B}$ sachant $\bar{A}$.

2 **(a)** Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

(b) Justifier que la probabilité de l'événement B est égale à 0,16.

3 On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?

Partie B

Pour chacune des personnes contactées, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue :

- 2 € si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
- 10 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
- 15 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
- 20 € si la personne s'abonne aux deux éditions.

1 Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau de la page suivante donnant la loi de probabilité de la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

Somme reçue (en €)	2	10	15	20
Probabilité				

2 Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5 000 lecteurs potentiels.

13 Loi binomiale

★★ 25 min Corrigé p. 248

Lycée René Descartes, Cournon

Une chaîne de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que :

- 12 % des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur ;
- parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20 % ont un défaut dans la forme ;
- parmi les vêtements n'ayant pas de défaut dans la couleur, 8 % présentent un défaut dans la forme.

On appelle :

- C l'événement : « le vêtement présente un défaut dans la couleur » et $\overline{C}$ l'événement contraire ;
- F l'événement : « le vêtement présente un défaut dans la forme » et $\overline{F}$ l'événement contraire.

Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1 Le directeur de l'usine affirme que 92 % des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut.

Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier.

2 Les employés de l'usine sont autorisés à acheter des vêtements à tarif préférentiel.

L'un d'entre eux choisit au hasard cinq vêtements. Le nombre de vêtements fabriqués est suffisamment grand pour considérer les cinq choix comme indépendants.

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au plus deux de ces vêtements choisis présentent un défaut ?

14 Loi binomiale

★★ 20 min Corrigé p. 249

D'après baccalauréat 2008

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5 % des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10 % des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20 % des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc.

On note les événements suivants :

N : « L'ordinateur est neuf »

R : « L'ordinateur est récent »

A : « L'ordinateur est ancien »

D : « L'ordinateur est défaillant »

$\bar{D}$ l'événement contraire de D.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.
3. Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,132 5.
4. Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.
5. Pour équiper le centre de ressources de l'établissement, on choisit au hasard 3 ordinateurs dans le parc. On admet que le parc est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

15 Prise d'initiative

★★ 25 min Corrigé p. 250

Lycée Sophie Germain, Paris

Une coopérative d'achat mène une enquête auprès de ses adhérents et leur fait remplir un questionnaire à propos de leur équipement en Smartphone.

L'enquête révèle que 80 % des adhérents possèdent un Smartphone. Mais aussi que 15 % de ceux qui n'en ont pas vont en acheter un dans l'année, alors que 30 % de ceux qui sont déjà équipé vont renouveler leur équipement.

On choisit au hasard le questionnaire d'un des adhérents.

1. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation, en définissant précisément les événements considérés.
2. Quelle est la probabilité de choisir le questionnaire d'un adhérent déjà équipé et qui va renouveler son matériel ?

3 Si au moins 25 % des adhérents souhaitent acheter un Smartphone cette année, la coopérative va mettre en place un service spécial d'information pour faciliter le choix de l'équipement. D'après cette enquête, va-t-elle le mettre en place ?

4 Sachant que la personne va acheter un Smartphone dans l'année, quelle est la probabilité que ce soit son premier équipement ?

16 Sondage anonyme

★★★ 20 min Corrigé p. 250

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

Voici une technique pour permettre des réponses anonymes à une question. On propose à chaque personne sondée de faire comme ci-dessous :

- Lancez une pièce de monnaie. Si elle tombe sur pile, répondez à la question : « Est-ce que vous fumez plus d'un paquet de cigarette par jour ? ».
- Si elle tombe sur face, relancez la pièce une deuxième fois, et répondez à la question : « Êtes-vous tombé sur pile au deuxième lancer ? ».

Chacune des personnes sondées répond en cochant la case oui ou la case non au bas de la fiche explicative. On ne sait donc pas à quelle question elle a répondu oui, ou non. Il y a donc plus de chance que les personnes répondent honnêtement.

1 Modéliser la situation par un arbre en notant r la proportion (inconnue) de gros fumeurs parmi les personnes interrogées.

2 Sur un grand nombre de personnes, on a obtenu 45 % de oui. À combien peut-on estimer la proportion de personnes fumant plus d'un paquet de cigarettes par jour ?

3 Inversement, quelle devrait être la proportion de oui pour que la proportion de gros fumeurs (plus d'un paquet par jour) soit inférieure à 10 % ?

17 Probabilités et suites

★★★ 45 min Corrigé p. 251

Lycée Blaise Pascal, Clermont Ferrand

Pierre et Jean-Philippe jouent souvent au ping-pong ensemble, et lorsqu'ils jouent, ils font de nombreuses parties d'affilée. Lors de la première partie, ils ont autant de chance de gagner l'un que l'autre.

Ils ont remarqué que, si Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,6, alors que s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,7.

On note G_n l'événement « Pierre gagne la n-ième partie ».

1 **(a)** Donner les valeurs de $p(G_1)$ et de $p(\bar{G}_1)$.

(b) Calculer $p(G_2)$ et $p(\bar{G}_2)$.

2 (u_n) et (v_n) sont les deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = p(G_n) \quad \text{et} \quad v_n = p(\bar{G}_n).$$

(a) Construire un arbre pondéré pour la n-ième et la $(n+1)$-ième partie.

(b) En déduire que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}3v_n, \\ v_{n+1} = 0{,}4u_n + 0{,}7v_n. \end{cases}$$

(c) Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante. Donner la valeur de $u_n + v_n$ pour tout n.

(d) Démontrer que la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique.
Exprimer $4u_n - 3v_n$ en fonction de n.

3 **(a)** En utilisant les résultats des questions 2.c et 2.d, exprimer u_n et v_n en fonction de n.

(b) Si les deux amis font un très grand nombre de parties, qui a le plus de chances de gagner la dernière ?

1 QCM Propriétés des probabilités

Enoncé p. 226

1 Réponse **a** :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A)p_A(B) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B)$$
$$= 0{,}3 \times 0{,}4 + (1 - 0{,}3) \times 0{,}2 = 0{,}26.$$

ATTENTION

Il ne faut pas confondre $p(A \cap B)$ avec $p_A(B)$, la réponse **b** est donc fausse.

2 Réponse **c** : si A et B sont tels que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, alors

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$= p(A) + p(B) - p(A) \times p(B),$$

d'où :

$$0{,}8 = 0{,}6 + p(B) - 0{,}6 \times p(B)$$
$$\iff 0{,}4 \times p(B) = 0{,}2 \iff p(B) = 0{,}5.$$

Donc

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A)p(B)}{p(A)} = p(B) = 0{,}5$$

3 Réponse **b** . En effet, $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Comme $p(A) \leq 1$, cela montre que $p_A(B)$ doit être supérieur ou égal à $p(A \cap B)$. Il n'est donc pas possible d'avoir les valeurs annoncées.

4 Réponse **c** : comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0{,}12 + 0{,}36 = 0{,}48.$$

Comme $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}48}$, alors $p_B(A) = 0{,}25$.

2 QCM D'après Bac Asie juin 2008

Enoncé p. 226

1 Réponse **c** : l'ensemble des élèves des deux classes comportent 66 élèves.

On interroge un élève au hasard, il y a donc équiprobabilité des choix des élèves interrogés.

N'oubliez pas de justifier l'équiprobabilité, ici, par le mot « hasard ».

Soit E_1 l'événement « l'élève choisi appartient à la TE 1 ».

Alors $p(E_1) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{34}{66} = \dfrac{17}{33}$.

CORRIGÉS

2 Réponse **a** : Soit M l'événement « l'élève choisi suit l'enseignement spécialité Math » et E l'événement « l'élève choisi suit l'enseignement de spécialité Math ou appartient à la TE 1 ».

L'événement E est la réunion des deux événements M et E_1 et donc

$$p(E) = p(M \cup E_1) = p(M) + p(E_1) - p(M \cap E_1).$$

Il y a toujours équiprobabilité des choix des élèves interrogés, d'où

$$p(M) = \frac{16}{66} = \frac{8}{33} \quad \text{et} \quad p(M \cap E_1) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}.$$

On en déduit que : $p(E) = \frac{8}{33} + \frac{17}{33} - \frac{3}{33} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$.

3 Réponse **c** : L'événement « l'élève interrogé suit la spécialité Math sachant qu'il appartient à la TE 1 » est l'événement « M sachant E_1 » et $p_{E_1}(M) = \dfrac{p(M \cap E_1)}{p(E_1)}$, d'où $p_{E_1}(M) = \frac{1}{11} \times \frac{33}{17} = \frac{3}{17}$.

4 Réponse **c** : L'événement « l'élève interrogé appartient à la TE 1 sachant qu'il suit la spécialité Math » est l'événement « E_1 sachant M » et $p_M(E_1) = \dfrac{p(M \cap E_1)}{p(M)}$ d'où $p_M(E_1) = \frac{1}{11} \times \frac{33}{8} = \frac{3}{8}$.

Remarque : ne confondez pas la probabilité de l'événement « M sachant E_1 » qui est la probabilité que M se réalise dans l'univers E_1 et la probabilité de l'événement « E_1 sachant M » qui est la probabilité que E_1 se réalise dans l'univers M.

3 V/F Interprétation d'un arbre

Enoncé p. 227

1 Faux : $p_A(D) = 0{,}5$.

2 Faux : $p(C) = p(A)p_A(C) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(C) = 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}24$

3 Vrai : $p(B) = p(A)p_A(B) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B) = 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}14$

4 Faux : $p_D(A) = \dfrac{p(D \cap A)}{p(D)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}5}{0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}7} = \dfrac{0{,}2}{0{,}62} = \dfrac{10}{31}$.

4 V/F Test de dépistage

Enoncé p. 227

L'énoncé nous indique que :

$$p(M) = 0{,}001, \quad p_M(T) = 0{,}95, \quad p_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0{,}95.$$

1 Vrai : d'après les données de l'énoncé,

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M)p_M(T) + p(\bar{M})p_{\bar{M}}(T) \\ &= 0{,}001 \times 0{,}95 + 0{,}999 \times 0{,}05 = 0{,}050\,9 \end{aligned}$$

2 Faux : $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0{,}001 \times 0{,}95}{0{,}050\,9} \approx 0{,}018\,7$.

3 Faux : appelons x la proportion de malades dans la population.

$$p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{x \times 0{,}95}{x \times 0{,}95 + (1-x) \times 0{,}05}$$
$$= \frac{0{,}95x}{0{,}90x + 0{,}05}.$$

Étudions le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{0{,}95x}{0{,}9x + 0{,}05}$:

$$f'(x) = \frac{0{,}95(0{,}9x + 0{,}05) - 0{,}95x \times 0{,}9}{(0{,}9x + 0{,}05)^2}$$
$$= \frac{0{,}047\,5}{(0{,}9x + 0{,}05)^2}.$$

$f'(x)$ est positive pour tout x, donc la fonction est croissante.

4 Vrai : soit X le nombre de personnes malades parmi les quatre choisies au hasard. Comme il y a indépendance, X suit la loi binomiale $B(4\,;0{,}050\,9)$ (voir question 1).

L'événement contraire de celui dont on cherche la probabilité est l'événement « aucune des quatre personnes n'a un test positif », et sa probabilité est $(1 - 0{,}050\,9)^4$.

La probabilité cherchée est donc $1 - (1 - 0{,}050\,9)^4$, et ce nombre est bien compris entre 0,188 et 0,189.

5 Génétique

Enoncé p. 228

Lycée Stanislas, Paris

Un tel énoncé se traduit bien à l'aide d'un tableau à deux entrées. Il est facile de calculer les quelques effectifs qui ne sont pas donnés dans l'énoncé :

Il y a $0{,}6 \times 40 = 24$ hommes aux yeux bleus, donc $50 - 24 = 26$ femmes aux yeux bleus.

Il reste donc $40 - 24 = 16$ hommes qui n'ont pas les yeux bleus et $60 - 26 = 34$ femmes qui n'ont pas les yeux bleus.

	Homme	Femme	Total
Yeux bleus	24	26	50
Pas les Yeux bleus	16	34	50
Total	40	60	100

Comme toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies, on est en situation d'équiprobabilité.

La probabilité est donc égale au nombre de personne dans l'événement choisi, divisé par le nombre de personne de l'univers de référence.

1 A : choisir un homme dans la population totale : $p(A) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$.

2 B : choisir un homme aux yeux bleus dans la population totale :
$p(B) = \dfrac{24}{100} = \dfrac{6}{25}$.

3 C : choisir une femme aux yeux bleus parmi la population totale :
$p(C) = \dfrac{26}{100} = \dfrac{13}{50}$.

4 D : choisir une personne aux yeux bleus, parmi la population des femmes :
$p(D) = \dfrac{26}{60} = \dfrac{13}{30}$.

5 E : choisir une femme parmi la population des personnes aux yeux bleus :
$p(E) = \dfrac{26}{50} = \dfrac{13}{25}$.

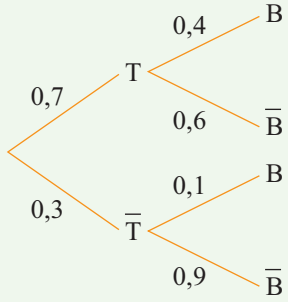
6 Arbre pondéré

Enoncé p. 228

Lycée Virlogeux, Riom

1 $p(T) = 0{,}7$ (le 70 % de l'énoncé !).

2 $p_T(B) = 0{,}4$ et $p_{\bar{T}}(B) = 0{,}1$ (là encore, c'est dans l'énoncé).
Les autres probabilités sont obtenues en utilisant le fait que la somme des probabilités des branches partant d'un nœud est toujours égale à 1.



3 **(a)** $p(T \cap B) = p(T) \times p_T(B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$.

(b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(T \cap B) + p(\bar{T} \cap B) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}28 + 0{,}03 \\ &= 0{,}31. \end{aligned}$$

4 $p_B(T) = \dfrac{p(B \cap T)}{p(B)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}31} \approx 0{,}90$.

7 Médailles de judo

Enoncé p. 229

Bac métropole, septembre 2011

1 **(a)** On a : $P(V) = \dfrac{25}{60} = \dfrac{5}{12}$.

(b) On a : $P(V \cap B) = \dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$.

(c) On a : $P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{12}{5} = \dfrac{3}{5}$.

(ou bien, d'après le tableau, $P_V(B) = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$)

2 **MÉTHODE**

Quand un énoncé de probabilité contient les mots « au moins un » (ou « au moins une »), il faut penser à l'événement contraire.

Ici en particulier, il est plus simple de chercher d'abord la probabilité de l'événement contraire, qui est : « aucune médaille n'est à l'effigie de Vécosse ». Sa probabilité est $\left(1 - \dfrac{5}{12}\right)^3 = \left(\dfrac{7}{12}\right)^3$, et la probabilité qu'au moins une des médailles soit à l'effigie de Vécosse est donc :

$1 - \left(\dfrac{7}{12}\right)^3 = \dfrac{1385}{1728} \approx 0{,}8$.

8 Pannes électroniques

Enoncé p. 230

Lycée Voltaire, Paris

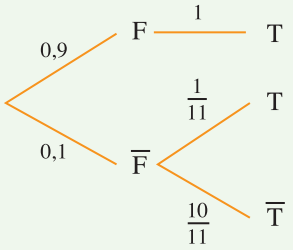
1 On sait que $p(F) + p(\overline{F}) = 1$ par la loi des contraires.

On sait par ailleurs que $p(F) = \dfrac{9}{10}$. Donc :

$$p(\overline{F}) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

2 On représente sous forme d'un arbre pondéré, les événements en jeu et les probabilités données directement par l'énoncé.

On note que $p_F(T) = 1$ car, si l'appareil est bon, il passe toujours le test avec succès.



(a) Un appareil défectueux ($\overline{F}$) passe le test avec succès (T) avec une probabilité $\frac{1}{11}$. On peut donc écrire :

$$p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{11}.$$

Utilisons maintenant les probabilités conditionnelles.
On cherche $p(T \cap \overline{F})$ en fonction de $p_{\overline{F}}(T)$.
On va donc utiliser la formule des probabilités conditionnelles :

$$p(T \cap \overline{F}) = \underbrace{p(\overline{F})}_{\frac{1}{10}} \times \underbrace{p_{\overline{F}}(T)}_{\frac{1}{11}} = \frac{1}{10 \times 11} = \frac{1}{110}.$$

De la même façon :

$$p(T \cap F) = \underbrace{p(F)}_{\frac{9}{10}} \times \underbrace{p_F(T)}_{1} = \frac{9}{10}.$$

(b) Réaliser T s'obtient en réalisant ou bien $T \cap F$ ou bien $T \cap \overline{F}$. On utilise ici la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(T \cap F) + p(T \cap \overline{F}) \\ &= \frac{9}{10} + \frac{1}{110} \\ &= \frac{9 \times 11 + 1}{110} \\ &= \frac{100}{110} \\ &= \frac{10}{11}. \end{aligned}$$

(c) On demande $p_T(F)$ On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$p_T(F) = \frac{p(T \cap F)}{p(T)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{11}} = \frac{9 \times 11}{10 \times 10} = \frac{99}{100}.$$

Un appareil ayant passé le test avec succès a donc 99 % de chances d'être bon.

9 Arbre pondéré

Enoncé p. 230

Lycée Galilée, Gennevilliers

On va noter A : « L'alarme s'est déclenchée » et I : « Il y a eu intrusion ».

Il convient de remarquer que 2000 est une année bissextile.

1 **(a)** Cette question renvoie aux liens entre statistiques et probabilités, et notamment à la loi des grands nombres (la fréquence d'un événement converge vers sa probabilité) qui autorise à interpréter les

fréquences statistiques comme des probabilités. La fréquence statistique i des intrusions par jour se calcule par :

$$i = \frac{28 + 30 + 26}{2 \times 365 + 366} \approx 0{,}076\,6.$$

On en déduit que la probabilité d'une intrusion est de $p(I) = 0{,}077$ à 10^{-3} près. Puis que $p(\bar{I}) = 0{,}923$ à 10^{-3} près.

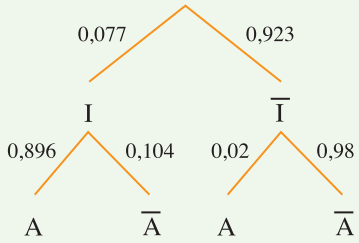
(b) D'après le tableau statistique, on peut également calculer la probabilité $p(I \cap A)$ en tant que fréquence du nombre d'intrusions ayant déclenché l'alarme :

$$p(I \cap A) = \frac{25 + 28 + 23}{2 \times 365 + 366} \approx 0{,}069\,3.$$

2 On demande la probabilité conditionnelle $p_I(A)$. L'énoncé ne nous la donne pas directement, donc il faut utiliser la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$p_I(A) = \frac{p(A \cap I)}{p(I)} \approx \frac{0{,}069}{0{,}077} \approx 0{,}896.$$

3 On peut maintenant représenter les données sous forme d'arbre :



On demande $p(A)$ qu'on va calculer avec la loi des probabilités totales :

$$A = (I \cap A) \cup (\bar{I} \cap A)$$

$$p(A) = \underbrace{p(I \cap A)}_{\text{calculé précédemment}} + p(\bar{I} \cap A)$$

$$p(\bar{I} \cap A) = p(\bar{I}) \times p_{\bar{I}}(A) \approx 0{,}923 \times 0{,}02 \approx 0{,}018.$$

$$p(A) \approx 0{,}069 + 0{,}018 \approx 0{,}087.$$

4 Dans cette question, on sait que l'alarme s'est déclenchée. On demande la probabilité qu'il s'agisse d'une intrusion sachant que l'alarme s'est déclenchée, soit $p_A(I)$. Par définition des probabilités conditionnelles :

$$p_A(I) = \frac{p(I \cap A)}{p(A)} \approx \frac{0{,}069}{0{,}087} \approx 0{,}793.$$

Sherlock répondra qu'il y a plus de 3 chances sur 4 qu'il y ait eu intrusion.

CORRIGÉS

10 Tickets de péage

Enoncé p. 231

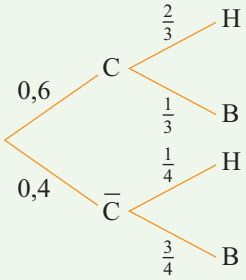
Lycée Virlogeux, Riom

1 **MÉTHODE**

L'énoncé dit *donner* les probabilités : il ne s'agit pas de les calculer, elles sont dans l'énoncé ou s'en déduisent directement.

$$p(C) = 0{,}6\ ; \quad p_{\bar{C}}(H) = 0{,}25\ ; \quad p_{\bar{C}}(B) = 0{,}75.$$

2



3 $p(H) = p(H \cap C) + p(H \cap \bar{C}) = 0{,}6 \times \dfrac{2}{3} + 0{,}4 \times \dfrac{1}{4} = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5.$

4 La probabilité cherchée est :

$$p(H \cap C) + p(B \cap \bar{C}) = 0{,}6 \times \frac{2}{3} + 0{,}4\frac{3}{4} = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

5 On cherche la probabilité de l'événement contraire : aucun des conducteurs n'est contraint de descendre de son véhicule. Cette probabilité est égale à $0{,}7^3$. Donc la probabilité cherchée est $1 - 0{,}7^3 = 0{,}657$.

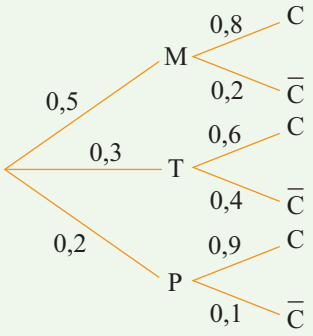
11 Arbre et recherche de loi

Enoncé p. 232

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 $p(T) = 0{,}3$; $p_T(C) = 0{,}6$.

2



3 **(a)** La personne prend un assortiment de macarons et un café.

$$p(M \cap C) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4.$$

(b) $p(C) = p(M \cap C) + p(T \cap C) + p(P \cap C)$
$= 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}76$

4 $p_C(M) = \dfrac{p(M \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}76} \approx 0{,}53.$

5 **(a)** Un client peut dépenser 18 € (plat seul), 20 € (plat et café), 24 € (plat et macarons), 25 € (plat et tarte Tatin), 26 € (plat, macarons et café) ou 27 € (plat, tarte Tatin et café).

(b)

Sommes s_i	18	20	24	25	26	27
$p(s_i)$	0,02	0,18	0,1	0,12	0,4	0,18

MÉTHODE

Vérifier que la somme de probabilités inscrites dans le tableau est bien égale à 1.

ATTENTION

Les lois de probabilités sont au programme de première, mais cela fait néanmoins partie du programme du bac !

(c) $E = 0{,}02 \times 18 + 0{,}18 \times 20 + 0{,}1 \times 24$
$+ 0{,}12 \times 25 + 0{,}4 \times 26 + 0{,}18 \times 27 = 24{,}62.$

Cela signifie que, sur un grand nombre de clients, le restaurateur peut espérer gagner en moyenne 24,62 € par client.

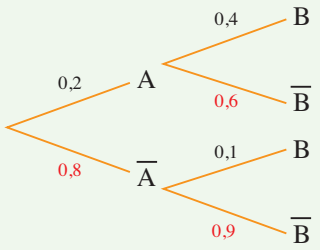
12 Gain espéré

Enoncé p. 233

Lycée Victor Duruy

Partie A

1 **(a)** L'arbre est le suivant :



Les données en noir sur l'arbre sont celles données par l'énoncé.
Les données en rouge sont obtenues par le calcul, en utilisant le fait que la somme de la probabilité d'un événement et de son événement contraire est égale à 1.

(b) $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$
$P_A\left(\bar{B}\right) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$
$P_{\bar{A}}\left(\bar{B}\right) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$

2 **(a)** $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08.$

(b) D'après la formule des probabilités totales,
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}08 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}16.$

3 $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}16} = 0{,}5.$

Partie B

1

Somme reçue (en €)	2	10	15	20
Probabilité	0,72	0,08	0,12	0,08
	$P\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right)$	$P\left(\bar{A} \cap B\right)$	$P\left(A \cap \bar{B}\right)$	$P(A \cap B)$

2 L'espérance de cette loi de probabilité est :

$$0{,}72 \times 2 + 0{,}08 \times 10 + 0{,}12 \times 15 + 0{,}08 \times 20 = 5{,}64.$$

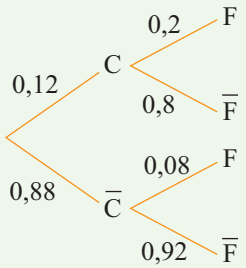
Cela signifie que sur un très grand nombre d'appels, le centre peut espérer gagner 5,64 € par appel. Donc pour 5 000 appels, le centre peut estimer recevoir $5\,000 \times 5{,}64 = 28\,200$ €.

13 Loi binomiale

Enoncé p. 235

Lycée René Descartes, Cournon

1 On peut résumer les données dans l'arbre ci-dessous :



$p(\bar{C} \cap \bar{F}) = 0{,}88 \times 0{,}92 = 0{,}809\,6$. Donc l'affirmation est incorrecte.

2 Au plus deux signifie 0, 1 ou 2. D'autre part, les choix sont indépendants d'après l'énoncé, donc on peut utiliser la loi binomiale.

Soit X le nombre de vêtements présentant un défaut parmi les 5 choisis. X suit la loi $B(5\,;\,1-0{,}809\,6)$ d'après ce qui précède, donc la loi $B(5\,;\,0{,}190\,4)$. D'où :

$$\begin{aligned}&p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)\\&=0{,}809\,6^5+5\times0{,}190\,4\times0{,}809\,6^4+10\times0{,}190\,4^2\times0{,}809\,6^3\\&\approx0{,}95.\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser directement la calculatrice : $P(X\leq k)\approx0{,}95$ en tapant :

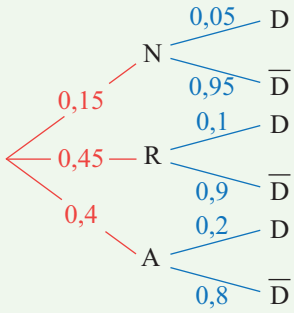
- sur CASIO : BinomialCD(2,5,0.1904)
- sur TI : BinomFRep(5,0.1904,2)

14 Loi binomiale

Enoncé p. 235

D'après baccalauréat 2008

1 L'arbre pondéré s'obtient à partir des données de l'énoncé :



2 $P(N\cap D)=P(N)\times P_N(D)=0{,}15\times0{,}05=0{,}007\,5$.

3 D'après la formule des probabilités totales, $P(D)=P(N\cap D)+P(R\cap D)+P(A\cap D)$.
D'où $P(D)=0{,}007\,5+0{,}45\times0{,}1+0{,}4\times0{,}2=0{,}132\,5$.

4 $P_D(A)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}4\times0{,}2}{0{,}132\,5}\approx0{,}603\,8$.

5 On effectue une répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès (« être défaillant ») 0,132 5. On obtient une loi binomiale de paramètres 3 et 0,132 5.
À la calculatrice, la probabilité d'obtenir un succès est 0,299 1.

CORRIGÉS

15 Prise d'initiative

Enoncé p. 236

Lycée Sophie Germain, Paris

On note :

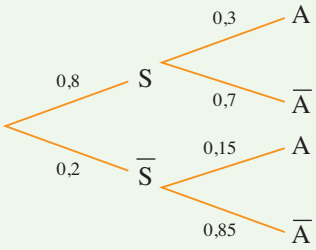
- S l'événement : « l'adhérent a déjà un Smartphone »,
- A l'événement : « l'adhérent va acheter un Smartphone dans l'année ».

On assimile les pourcentages aux probabilités d'obtenir les différents événements si l'on choisit un adhérent au hasard.

1 D'après les données de l'énoncé :

- $P(S) = 0{,}8$ donc $P\left(\bar{S}\right) = 0{,}2$;
- $P_S(A) = 0{,}3$ et $P_{\bar{S}}(A) = 0{,}15$.

Cela donne l'arbre ci-contre :



2 On cherche : $P(S \cap A) = P(S) \times P_S(A) = 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}24$.

3 Il faut calculer $P(A)$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A \cap S) + P\left(A \cap \bar{S}\right) = 0{,}24 + 0{,}2 \times 0{,}15 = 0{,}27.$$

Cela signifie que $P(A) > 0{,}25$. La probabilité qu'un adhérent achète un Smartphone dans l'année est donc supérieure à 25 %, la coopérative peut donc mettre en place son service.

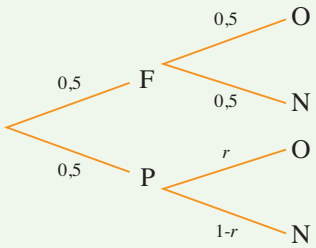
4 Il faut ici calculer : $P_A\left(\bar{S}\right) = \dfrac{P(A \cap \bar{S})}{P(A)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}27} = \dfrac{1}{9}$.

16 Sondage anonyme

Enoncé p. 237

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

1 O correspond à l'événement « la personne répond oui », F (respectivement P) à l'événement « la personne a obtenu face (respectivement pile) au premier lancer ». Comme il y a autant de chances d'obtenir pile que face, on obtient l'arbre suivant :



2 $p(\text{O}) = 0{,}45$. Or, $p(\text{O}) = p(\text{F} \cap \text{O}) + p(\text{P} \cap \text{O}) = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5r$. On a donc $0{,}45 - 0{,}25 = 0{,}5r$, d'où $0{,}5r = 0{,}2$ et $r = 0{,}4$. Il y a donc environ 40 % de gros fumeurs.

3 $p(\text{O})$ est maintenant inconnue. On cherche $p(\text{O})$ telle que :

$$p(\text{O}) = 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}3.$$

Il faudrait obtenir 30 % de oui pour avoir 10 % de gros fumeurs.

17 Probabilités et suites

Enoncé p. 237

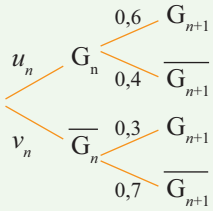
Lycée Blaise Pascal, Clermont Ferrand

1 **(a)** $p(G_1) = 0{,}5$ et $p(\bar{G}_1) = 0{,}5$.

(b) $p(G_2) = p(G_1)p_{G_1}(G_2) + p(\bar{G}_1)p_{\bar{G}_1}(G_2)$
$= 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}45.$
$p(\bar{G}_2) = p(G_1)p_{G_1}(\bar{G}_2) + p(\bar{G}_1)p_{\bar{G}_1}(\bar{G}_2)$
$= 0{,}5 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}7 = 0{,}55.$

Remarque : on vérifie que $p(G_2) + p(\bar{G}_2) = 1$.

2 **(a)**



(b) $u_{n+1} = p(G_{n+1}) = 0{,}6u_n + 0{,}3v_n$,
$v_{n+1} = p(\overline{G_{n+1}}) = 0{,}4u_n + 0{,}7v_n$.

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} + v_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}3v_n + 0{,}4u_n + 0{,}7v_n = u_n + v_n.$$

Donc la suite $(u_n + v_n)$ est constante. On sait que $u_1 + v_1 = 1$, donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n + v_n = 1$.

Remarque : ceci est logique : à chaque étape, il n'y a que deux événements incompatibles : Pierre gagne ou perd ! Donc la somme des probabilités de ces événements doit être égale à 1.

(d) $4u_{n+1} - 3v_{n+1} = 4(0{,}6u_n + 0{,}3v_n) - 3(0{,}4u_n + 0{,}7v_n)$
$= 1{,}2u_n - 0{,}9v_n = 0{,}3(4u_n - 3v_n).$
Donc la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique de raison 0,3. Son premier terme est $4u_1 - 3v_1 = 0{,}5$. Donc $4u_n - 3v_n = 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1}$.

3 **(a)** On a le système :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} u_n + v_n = 1, \\ 4u_n - 3v_n = 0{,}05 \times 0{,}3^{n-1} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} v_n = 1 - u_n, \\ 4u_n - 3(1 - u_n) = 0{,}05 \times 0{,}3^{n-1} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} v_n = 1 - u_n, \\ 7u_n = 3 + 0{,}05 \times 0{,}3^{n-1} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} u_n = \dfrac{3}{7} + \dfrac{0{,}05}{7} \times 0{,}3^{n-1}, \\ \\ v_n = 1 - u_n = \dfrac{4}{7} - \dfrac{0{,}05}{7} \times 0{,}3^{n-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Comme $0 < 0{,}3 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}03^{n-1} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{4}{7}.$$

Par conséquent au bout d'un grand nombre de parties, Jean-Philippe a plus de chances de gagner que Pierre.

Chapitre 8

Lois à densité

Plan du chapitre

1. Généralités sur les lois continues
2. Loi uniforme
3. Loi normale centrée réduite
4. Loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$

Exercice type 1 — **Lycée Montesquieu, Bordeaux**

1 Trouver k pour que la fonction définie par $f(x) = kx^4$ soit une densité de probabilité sur $[0 ; 1]$.

2 X est une variable aléatoire de densité f sur $[0 ; 1]$.

(a) Calculer $P(0{,}2 < X < 0{,}3)$.

(b) Quelle est la probabilité que X soit supérieure à $0{,}5$ sachant que X est inférieure à $0{,}7$?

Voir corrigé page 255

1 Généralités sur les lois continues

1.1 Variable aléatoire continue

Définition 1

Une variable aléatoire continue est une fonction qui, à chaque issue d'une expérience, associe un nombre réel d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (qui peut être $\mathbb{R}$ entier).

1.2 Loi de probabilité à densité

X est une variable aléatoire continue définie sur un intervalle $[a ; b]$.

La loi de probabilité à densité P associée à X vérifie :

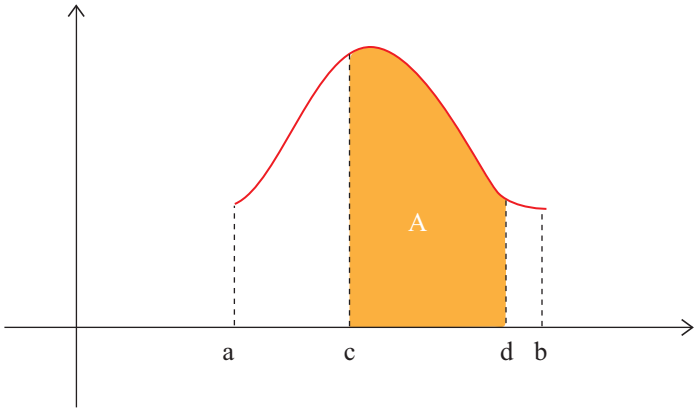
- $P(X = x_0) = 0$ pour tout x_0 de $[a,b]$.
- Il existe une fonction f continue et positive telle que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \\ P(c < X < d) = \displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tous } c, d \text{ dans } [a ; b] \quad (c < d) \end{cases}$$

COURS

Remarque : puisque $P(X = x_0) = 0$, cela ne change rien de mettre des inégalités strictes ou larges dans $P(c < X < d)$.

On en déduit donc que $P(c < X < d)$ est l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites d'équation $x = c$ et $x = d$.

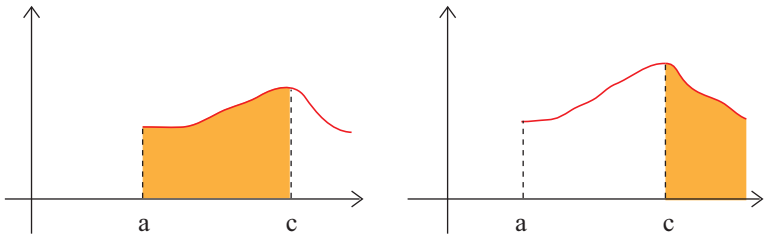


On a : $A = P(c \leq X \leq d) = P(c < X < d) = P(X < d) - P(X < c)$.

Si X est définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$,

$$P(X > c) = 1 - P(a < X < c)$$

puisque $P(X \in [a\,;+\infty[) = 1$.



P (a < X < c) P (X > c)

On a : $P(a \leq X \leq c) + P(X > c) = 1$.

Définition 2

L'espérance d'une variable aléatoire de densité f sur un intervalle $[a\,;b]$ est le nombre réel $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Montesquieu, Bordeaux

1 f est une densité de probabilité sur $[0\,;1]$, si et seulement si elle est positive et si :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \iff \left[k\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 \iff \frac{k}{5} = 1 \iff k = 5.$$

On constate que f est bien positive sur $[0\,;1]$. On a donc $f(x) = 5x^4$.

2 **(a)** $P(0{,}2 < X < 0{,}3) = \displaystyle\int_{0{,}2}^{0{,}3} 5x^4\,\mathrm{d}x = \left[x^5\right]_{0{,}2}^{0{,}3} = 0{,}002\,11.$

(b) Il s'agit d'une probabilité conditionnelle, on procède comme pour les probabilités discrètes.

$$P_{X<0{,}7}(X > 0{,}5) = \frac{P\big((X < 0{,}7) \cap (X > 0{,}5)\big)}{P(X < 0{,}7)}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{0{,}5}^{0{,}7} 5x^4\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{0{,}7} 5x^4\,\mathrm{d}x} = \frac{\left[x^5\right]_{0{,}5}^{0{,}7}}{\left[x^5\right]_0^{0{,}7}} = \frac{0{,}136\,82}{0{,}168\,07} \approx 0{,}814.$$

Voir énoncé page 253

2 Loi uniforme

Définition 3

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ si sa densité de probabilité est une fonction f constante sur $[a\,;b]$.

Propriété 1

Soit f une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$, alors, pour tout réel x de $[a\,;b]$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

En utilisant cette formule pour la loi uniforme on obtient :

Propriété 2

L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un intervalle $[a\,;b]$ est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

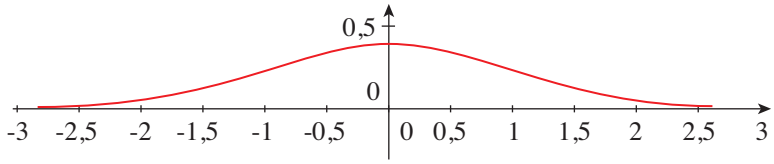
COURS

3 Loi normale centrée réduite

3.1 Définition

Définition 4

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0\,;1)$ si et seulement si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, dont la courbe représentative, dite « en cloche », est donnée ci-dessous :



3.2 Propriétés

X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(0\,;1)$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions continues).
- D'après la définition d'une loi de densité de probabilité, pour tous nombres réels a et b, avec $a < b$, $P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Cependant, on ne connaît pas de primitive de cette fonction.
- D'après les propriétés des lois de densité, f étant définie sur $\mathbb{R}$, l'aire totale sous la courbe représentative de f est égale à 1. Elle représente $P(X \in \mathbb{R})$.
- La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Cela entraîne que :
  - $P\big(X \in [0\,;+\infty[\big) = P\big(X \in]-\infty\,;0]\big) = 0{,}5$.
  - $P(X < -u) = P(X > u)$.
  - $P(X < -u) = 1 - P(X < u)$.
- Pour tout c positif, $P(-c < X < c) = 1 - 2P(X < -c) = 1 - 2P(X > c)$.

3.3 Valeur particulière

Il faut se souvenir que si X suit la loi normale centrée réduite,

$$P\big(X \in [-1{,}96\,;1{,}96]\big) \approx 0{,}95.$$

On verra dans le chapitre suivant l'importance de cette valeur.

3.4 Espérance et variance

Si X suit $\mathcal{N}(0\,;1)$, $E(X)=0$ et $V(X)=1$.
La valeur de $E(X)$ pourrait se trouver en utilisant la définition générale de l'espérance donnée au paragraphe 2.

Remarque : par analogie avec les variables aléatoires discrètes,

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2,$$

mais cette formule n'est pas au programme.

3.5 Théorème de Moivre-Laplace : lien avec la loi binomiale

Théorème 1 (admis)

Pour tout nombre entier naturel n, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$.

$Z_n=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est appelée variable normale centrée réduite associée à X_n.

Pour tous nombres a et b tels que $a<b$, $P(a\leq Z_n\leq b)$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$, f étant la fonction définie ci-dessus.

4 Loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2\right)$

Exercice type 2 — Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Les tests de QI sont conçus de façon à ce que, pour une population donnée, le QI moyen soit 100 et l'écart-type 15. Les résultats au QI sont distribués suivant une loi normale.

1. Quel est le pourcentage de la population ayant un QI en-dessous de 60 ?
2. Quel est le pourcentage de la population ayant un QI entre 95 et 115 ?
3. Il a été décidé dans un certain pays de donner des cours de soutien aux 10 % d'élèves ayant les QI les moins élevés.
   Quel QI maximal faudra-t-il avoir pour bénéficier de ces cours ?

Voir corrigé page 259

COURS

4.1 Définition

Définition 5

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

4.2 Propriété

Propriété 3

Si X suit $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, alors $E(X)=\mu$ et $V(X)=\sigma^2$.

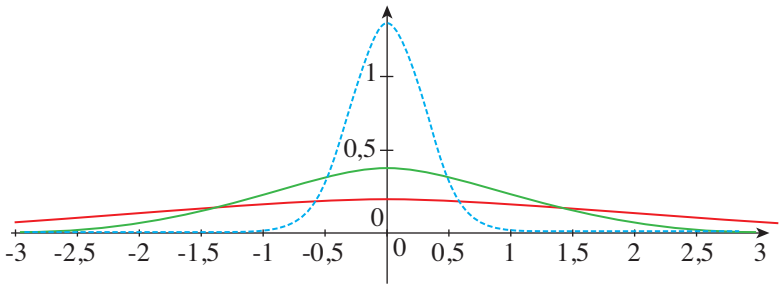
4.3 Valeurs à connaître

X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$. Alors :

- $P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)\approx 0{,}68$;
- $P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)\approx 0{,}95$;
- $P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$.

4.4 Remarques

- On peut toujours si nécessaire (voir par exemple exercice 17) se ramener à la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$ en utilisant la définition.
- $P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$ signifie que la probabilité d'obtenir une valeur de X en dehors de l'intervalle $[\mu-3\sigma\,;\mu+3\sigma]$ est quasiment nulle.
- La fonction densité de toute loi normale est représentée par une courbe « en cloche ». Le sommet est d'autant plus haut que σ est petit, et la « cloche » d'autant plus élargie que σ est grand. Ici sont représentées les lois normales d'écart-type 2 (la plus plate), 1 et 0,2.



- Du fait de la symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, on a : pour tout c positif, $P(\mu - c < X < \mu + c) = 1 - 2P(X > \mu + c)$.
- Pour calculer à la calculatrice $P(X \leq a)$, on peut utiliser l'approximation $P(-10^{99} \leq X \leq a)$; de même, pour $P(X \geq a)$, on peut utiliser l'approximation $P(a \leq X \leq 10^{99})$.

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 Ceci revient à chercher $P(X < 60)$, X étant une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(100\,;\,15^2)$. À la calculatrice, on obtient $P(X < 60) \approx 0{,}003\,8$, donc environ 0,38 % de la population a un QI inférieur à 60.

2 $P(95 < X < 115) \approx 0{,}472$, donc environ 47,2 % de la population a un QI compris entre 95 et 115.

3 Il faut résoudre $P(X < a) = 0{,}1$. À la calculatrice, on obtient qu'il faudra avoir un QI inférieur à 81 (en arrondissant à l'unité).

MÉTHODE

Il est indispensable de connaître comment utiliser sa calculatrice pour calculer les probabilités associées à la loi normale.

Voir énoncé page 257

4.5 Utilisation de la calculatrice

Considérons X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

	CASIO	TI
Syntaxe	OPTN STAT puis DIST, NORM, Normcd ou InvNormCD	Menu DISTRIB (2nd var), puis NormFrep ou FracNormale
$P(c \leq X \leq d)$	NormCD(c,d,σ,μ)	NormFRep(c,d,μ,σ)
On cherche a tel que $P(X \leq a)$	InvNormCD(a,σ,μ)	FracNormale(a,μ,σ)

INTERROS

1 QCM Lois à densité

15 min — Corrigé p. 267

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 La fonction définie par $f(x) = 3x^2$ est une fonction de densité de probabilité sur :

a [0 ; 3] b [0 ; 1]
c aucun de ces deux intervalles

2 La fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-3}{4}$ est une fonction de densité de probabilité sur :

a [0 ; 4] b $\left[0 ; \dfrac{5}{2}\right]$
c aucun de ces deux intervalles

3 Si une fonction f est une loi de densité de probabilité sur un intervalle I, alors :

a pour tout x de I, $f(x) \geq 0$ b f est décroissante sur I
c f est croissante sur I

4 Si on sait que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, alors :

a pour tous c et d tels que $a < c < d < b$, on a $\displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x < 1$
b f est une fonction de densité de probabilité sur $[a ; b]$
c on ne peut rien déduire

2 QCM Loi uniforme

20 min — Corrigé p. 267

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 La loi uniforme entre -1 et 1 a pour densité de probabilité :

a $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ b $f(x) = 0$ c $f(x) = \dfrac{1}{2}$

2 X suit la loi uniforme sur $[0 ; 4]$. Alors $P_{X>2}(X < 3) =$

a $\dfrac{1}{4}$ b $\dfrac{3}{4}$ c $\dfrac{1}{2}$

3 On choisit de façon aléatoire un point sur un segment $[AB]$ de longueur 8. I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AI]$. La probabilité que M soit plus près de J que de A sachant qu'il est plus près de A que de B est :

a $\dfrac{3}{4}$ b $\dfrac{1}{2}$ c $\dfrac{1}{4}$

4 X suit la loi uniforme sur $[-2\,;2]$. Alors :

a $P_{X>1}(X<3)=P_{X<1}(X>-2)$
b $P_{X<1}(X>-2)>P_{X<1}(X<2)$
c $P_{X>-2}(X<2)>P_{X>-2}(X<3)$

3 QCM Loi normale centrée réduite

15 min — Corrigé p. 268

Pour toutes les questions, X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

1 $P(X<1{,}5)$ est égale à 10^{-2} près à :

a -1 b $0{,}77$ c $0{,}93$

2 La valeur a telle que $P(X<a)=0{,}90$ est, à 10^{-2} près :

a $-1{,}28$ b $0{,}87$ c aucun des deux

3 La valeur arrondie au centième de b telle que $P(X>b)=0{,}8$ est :

a $-0{,}84$ b $0{,}84$ c aucun des deux

4 La valeur arrondie au centième de c tel que $P(-c<X<c)=0{,}9$ est :

a $-1{,}5$ b $1{,}96$ c $1{,}64$

4 QCM Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

20 min — Corrigé p. 268

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 2. Alors :

1 Au centième près, $P(X<2)$ est égale à :

a 1 b $0{,}1$ c $0{,}07$

2 Au centième près, $P(-1<X<2)$ est égale à :

a 0 b $0{,}16$ c $0{,}07$

3 Le nombre a tel que $P(X<a)=0{,}8$ est :

a $6{,}68$ b $0{,}02$ c aucun des deux

4 Le nombre b tel que $P(X>b)=0{,}7$ est :

a $6{,}05$ b $3{,}95$ c $0{,}84$

INTERROS

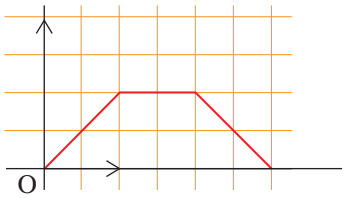
Généralités sur les lois à densité

5 Loi définie par un graphe

★ 10 min Corrigé p. 269

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ par la courbe ci-dessous, composée de segments de droites.



1. Vérifier que f peut être une fonction de densité de probabilité sur $[0\,;\,3]$.
2. X est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[0\,;\,3]$ qui a f pour densité de probabilité. Calculer $P(0{,}5 < X < 2)$ et $P_{X>1}(X < 2)$.

6 Avec la fonction densité

★★ 10 min Corrigé p. 269

Lycée Virlogeux, Riom

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{100}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{10}\right)^2}$. On admet que f est une fonction de densité de probabilité sur $]0\,;+\infty[$. Soit X une variable aléatoire de densité f.

1. Déterminer la probabilité $P(-5 < X < 10)$.
2. Déterminer le réel t tel que $P(X \geqslant t) = 0{,}8$.

Loi uniforme

7 Loi uniforme

★ 10 min Corrigé p. 270

Lycée François Mauriac, Bordeaux

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,2]$

1. Quelle est la probabilité que X soit comprise entre 0,33 et 0,57 ?
2. Quelle est la probabilité que son chiffre des centièmes soit 4 ?

8 Modélisation d'une situation

★ — 10 min — Corrigé p. 270

Lycée Saint-Genès, Bordeaux

Tous les soirs, Hervé joue au scrabble avec son père entre 18 h 30 et 20 h. Charline a décidé d'aller le voir à un moment quelconque entre son retour du lycée (17 h 30) et 19 h 30.

1. Quelle est la probabilité qu'elle interrompe la partie de scrabble ?
2. Sachant qu'elle arrive après le début du jeu, quelle est la probabilité qu'elle arrive avant que la moitié du temps consacré au jeu se soit écoulé ?

9 Modélisation par une loi

★★ — 15 min — Corrigé p. 270

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?
Si on choisit au hasard un nombre dans l'intervalle [0 ; 2], il est plus probable d'avoir son carré supérieur à 3 que sa moitié supérieure à 0,9.
Justifier.

Loi normale

10 Production hors normes

★ — 10 min — Corrigé p. 271

Lycée Élie Faure, Lormont

Une entreprise qui produit du papier recyclé, a été créée en l'année 2000.

Une commande de bobines de papier de 2,20 m de large et pesant chacune environ 500 kg est faite à cette entreprise. Le poids d'une bobine varie en fonction de nombreux facteurs.

Soit X la variable aléatoire qui, à toute bobine choisie au hasard dans cette commande, associe son poids. On admet que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma^2 = 4$.

1. Toute bobine dont le poids est inférieur à 496 kg est refusée.
   Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande soit refusée ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4}.
2. L'entreprise perd de l'argent pour toute bobine dont le poids est supérieur à 506 kg.
   Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande fasse perdre de l'argent à l'entreprise ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4}.

INTERROS

11 Autonomie d'une batterie

★ 15 min Corrigé p. 271

Lycée Victor Duruy, Paris

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.

Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier votre réponse.

12 Probabilité maximale

★ 15 min Corrigé p. 272

Lycée Dumont d'Urville, Toulon

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Déterminer par des considérations graphiques le réel T tel que la probabilité $P(T < X < T + 2)$ soit maximale.

13 Évolution « normale »

★ 15 min Corrigé p. 272

Lycée François Couperin, Fontainebleau

Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots de vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. Une étude effectuée auprès d'un millier de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois.

La distribution des âges étant normale,

1. évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 10 mois ;
2. évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 18 mois ;
3. évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots entre 8 mois et 12 mois.

14 Loi normale

★ 15 min Corrigé p. 273

Lycée Élie Faure, Lormont

On s'intéresse au temps de parcours d'une régate. Sur les nombreux participants à cette course, la moyenne a été de 6 h 15 min et l'écart-type de 75 min.

On considère que le temps de parcours d'un participant suit une loi normale dont les paramètres sont donnés ci-dessus.

1. On prend au hasard la fiche d'un participant et on regarde son temps de parcours.
   - **(a)** Quelle est la probabilité que ce temps de parcours ait été inférieur à 5 h 30 min ?
   - **(b)** Quelle est la probabilité que le temps de parcours ait été supérieur à 10 h ?
2. Il y avait en fait 500 participants. À combien peut-on évaluer le nombre de participants étant arrivés moins de 6 h après leur départ ?
3. 10 % des participants à la course seront récompensés, selon leur durée de parcours. Quelle est la durée maximale pour être récompensé ?

15 Un test comportemental

★★ — 20 min — Corrigé p. 273

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Dans cet exercice, les probabilités obtenues seront arrondies au millième.

Un test comportemental a été étalonné auprès d'une population de 3 500 personnes. On sait que la moyenne au test est de 54,24 et que l'écart type est de 6,82.

On appelle X la variable aléatoire qui, à un individu tiré au hasard, associe sa moyenne au test. On sait en outre que X suit une loi normale.

1. Quelle est la proportion d'individus qui ont une note supérieure à 62 ? Quel est leur nombre ?
2. Quelle est la proportion d'individus qui ont une note comprise entre 45 et 70 ? Quel est leur nombre ?
3. Quelle est la valeur de la variable correspondant au premier quartile (Q_1) de la série des moyennes de cette population ?
   Même question pour le troisième quartile (Q_3).

16 Trouver une moyenne

★★ — 20 min — Corrigé p. 273

Lycée Stanislas, Nice

Une machine remplit des sachets de farine de type 55. On admet que la masse des sachets suit une loi d'espérance μ, réglable, et d'écart-type 0,05 (en kg).

1. À combien doit-on régler la valeur de μ pour que 95 % des sachets contiennent une masse de farine supérieure ou égale à celle annoncée de 1 kg ?
2. Une amélioration de la machine permet de réduire l'écart-type de moitié.
   À combien faut-il régler alors μ pour que 95 % des sachets contiennent une masse de farine supérieure ou égale à celle annoncée de 1 kg ?

17 Trouver moyenne et écart-type

★★★ 30 min Corrigé p. 274

Lycée Tivoli, Bordeaux

X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.

On sait que $P(X<1)=0{,}3$ et que $P(X<4)=0{,}9$.

1. Quelle est la loi suivie par $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$?
2. En déduire un système d'équations vérifié par μ et σ.
3. Donner les valeurs arrondies au millième de μ et σ.

18 Durée de jeu

★★★ 40 min Corrigé p. 275

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20\,;120]$.
   - **(a)** Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
   - **(b)** Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.
2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minutes) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120\,;400)$.
   - **(a)** Donner l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.
   - **(b)** Montrer l'équivalence :
   $$90<J<180 \iff -1{,}5<\frac{J-120}{20}<3.$$
   - **(c)** On définit la variable aléatoire X par $X=\dfrac{J-120}{2}$.
   Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.
   - **(d)** Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.
   - **(e)** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On donne un extrait de la table de probabilité de la loi normale centrée réduite.

$P(X<0{,}5)$	$P(X<1)$	$P(X<1{,}5)$	$P(X<2)$	$P(X<2{,}5)$	$P(X<3)$
0,691	0,841	0,933	0,977	0,994	0,999

   Expliquer comment retrouver le résultat de la question 2.d à l'aide de cette table, sans utiliser la calculatrice.

1 QCM Lois à densité

Enoncé p. 260

1 Réponse **b** . On a $\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_0^1 = 1$. De plus, la fonction f est positive sur $[0\,;1]$. Elle est donc une fonction densité de probabilité sur cet intervalle.

2 Réponse **c** . Attention : si on calcule $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, on trouve bien 1. Mais sur $[0\,;4]$, la fonction f n'est pas toujours positive, donc elle ne peut être une fonction de densité de probabilité. $f(x)$ ne devient positive que lorsque x est supérieur à 1,5. Sur l'autre intervalle, l'intégrale n'est pas égale à 1, donc cela ne convient pas non plus.

3 Réponse **a** . C'est la seule condition nécessaire.

4 Réponse **c** . On ne peut rien déduire : en effet on peut aussi avoir $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, et comme on n'a pas la condition de positivité, on ne peut affirmer que f est une fonction densité de probabilité.

2 QCM Loi uniforme

Enoncé p. 260

1 Réponse **c** . En effet, il faut que $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ et que f soit une fonction constante.

2 Réponse **c** . $P_{X>2}(X<3) = \dfrac{P\big((X>2)\cap(X<3)\big)}{P(X>2)}$

$$= \frac{P(2<X<3)}{P(X>2)} = \frac{\dfrac{3-2}{4}}{\dfrac{4-2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

3 Réponse **a** . On munit la droite (AB) d'un repère d'origine A tel que l'abscisse de B soit 8 . L'abscisse de I est 4 et l'abscisse de J est 2. Le choix aléatoire de M sur $[AB]$ correspond au choix aléatoire d'un nombre dans l'intervalle $[0\,;8]$. Si on appelle X la variable aléatoire donnant l'abscisse de M, X suit la loi uniforme sur $[0\,;8]$.

On cherche : $P_{X<4}(X>1) = \dfrac{P(1<X<4)}{P(X<4)} = \dfrac{\dfrac{4-1}{8}}{\dfrac{4}{8}} = \dfrac{3}{4}$.

4 Réponse **a** . $P_{X>1}(X<3) = \dfrac{P(1<X<3)}{P(X>1)} = \dfrac{\dfrac{2-1}{4}}{\dfrac{2-1}{4}} = 1$.

Mais en fait, en observant soigneusement cette probabilité conditionnelle, même sans la calculer, on sait qu'elle est égale à 1, car si $X > 1$, X est toujours compris entre 1 et 3, et même entre 1 et 2.

De même, si X est inférieur à 1, la probabilité que X soit supérieur à -2 est également 1 compte tenu que X est définie sur $[-2 ; 2]$.

On a donc $P_{X<1}(X > -2) = 1$. Les deux probabilités sont donc égales.

Dans les propositions **b** et **c**, les deux probabilités sont là aussi égales à 1, les inégalités strictes sont donc fausses.

ATTENTION

Il ne faut pas aller au-delà de l'intervalle où la variable aléatoire est définie, même si l'énoncé présente un piège.

3 QCM Loi normale centrée réduite

Enoncé p. 261

Tout cet exercice se traite à la calculatrice, mais certaines réponses peuvent être éliminées en sachant le cours.

1 Réponse **c**. La réponse -1 est absurde, une probabilité est toujours positive.

2 Réponse **c**. La réponse **a** ne peut être la bonne car $P(X < 0) = 0{,}5$, donc $P(X < -1{,}28) < 0{,}5$.

3 Réponse **a**. $P(X > b) = 0{,}8$, $P(X < b) = 0{,}2$, ce dont on a besoin pour utiliser la calculatrice.
On sait que la valeur de b est négative avec le même raisonnement qu'au 2, donc on écarte la réponse **b**.

4 Réponse **c**. On sait déjà que c est un nombre positif.

$$P(-c < X < c) = 0{,}9 \iff P(X < -c) = \frac{1 - 0{,}9}{2} = 0{,}05$$

car $P(-c < X < c) = 1 - 2P(X < -c)$ équivaut à :

$$P(X < -c) = \frac{1 - P(-c < X < c)}{2}.$$

À la calculatrice on obtient $-c \approx -1{,}64$, donc $c \approx 1{,}64$.

4 QCM Loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$

Enoncé p. 261

Tout cet exercice se traite à la calculatrice, mais certaines réponses peuvent être éliminées en sachant le cours.

1 Réponse **c**. Cette probabilité doit être petite car 2 est égal à l'espérance diminuée de 1,5 fois l'écart-type.

2 Réponse **c** . 0 est une réponse absurde, et cette probabilité doit par contre être assez petite car on est assez loin de l'espérance.

3 Réponse **a** . La réponse **b** est à écarter car le nombre cherché doit être supérieur à l'espérance.

4 Réponse **b** . $P(X > b) = 0{,}7 \iff P(X < b) = 0{,}3$. La calculatrice donne $b \approx 3{,}95$.
La réponse **a** est à écarter car b est nécessairement plus petit que l'espérance. Quant à la réponse **c** , elle correspond à :

$$P(X > \mu - \sigma) = \frac{0{,}68}{2} + 0{,}5 \approx 0{,}84.$$

5 Loi définie par un graphe

Enoncé p. 262

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 L'aire sous la courbe est de 8 carreaux, soit une unité d'aire d'après le repère choisi. De plus, la fonction densité est positive sur $[0\,;3]$. Donc f peut être une fonction densité de probabilité sur $[0\,;3]$.

2 $P(0{,}5 < X < 2) = \dfrac{1{,}5+4}{8} = \dfrac{55}{80} = \dfrac{11}{16}$ (on compte le nombre de carreaux et on divise par 8, puisqu'une unité est égale à 8 carreaux).

$$P_{X>1}(X < 2) = \frac{P\big((X > 1) \cap (X < 2)\big)}{P(X > 1)} = \frac{P(1 < X < 2)}{P(X > 1)} = \frac{\frac{4}{8}}{\frac{6}{8}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

6 Avec la fonction densité

Enoncé p. 262

Lycée Virlogeux, Riom

1 $P(X < 10) = \displaystyle\int_0^{100} \frac{2x}{10} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{10}\right)^2} \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{10}\right)^2}\right]_0^{10}$

$$= -\mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}632.$$

2 $P(X \geqslant t) = 1 - P(X < t) = 1 - \displaystyle\int_0^t \frac{2x}{100} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{10}\right)^2} \mathrm{d}x$

$$= 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{10}\right)^2}\right]_0^t = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{10}\right)^2}.$$

Alors, $P(X \geqslant t) = 0{,}8 \iff \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{10}\right)^2} = 0{,}8$.
En prenant le logarithme des deux membres on obtient :

$$-\left(\frac{t}{10}\right)^2 = \ln 0{,}8 \iff t^2 = -100 \ln 0{,}8.$$

Comme $\ln 0{,}8 < 0$, cette équation a une solution dans $]0\,;+\infty[$:

$$t = 10\sqrt{-\ln 0{,}8} \approx 4{,}72.$$

CORRIGÉS

7 Loi uniforme

Enoncé p. 262

Lycée François Mauriac, Bordeaux

1 D'après le cours, cette probabilité est égale à $\dfrac{0{,}57-0{,}33}{2-0}=0{,}12$.

2 Le chiffre des centièmes sera 4 sur les intervalles $[0{,}04\,;\,0{,}05[$, $[0{,}14\,;\,0{,}15[$, etc., $[1{,}94\,;\,1{,}95[$.
Il y a 20 tels intervalles, d'amplitude 0,01. Donc la probabilité que le chiffre des centièmes soit 4 est égale à $\dfrac{20\times 0{,}01}{2}=0{,}1$.

8 Modélisation d'une situation

Enoncé p. 263

Lycée Saint-Genès, Bordeaux

1 L'heure d'arrivée X de Charline suit la loi uniforme sur $[17{,}5\,;\,19{,}5[$ puisque le texte dit qu'elle arrivera à un moment quelconque.
Elle interrompra la partie de scrabble si elle arrive entre 18 h 30 et 19 h 30. Donc la probabilité qu'elle interrompe le jeu est :

$$\frac{19{,}5-18{,}5}{19{,}5-17{,}5}=\frac{1}{2}.$$

2 On cherche ici $P_{X>18{,}5}(X<19{,}25)$.

$$P_{X>18{,}5}(X<19{,}25)=\frac{P\big((X>18{,}5)\cap(X<19{,}25)\big)}{P(X>18{,}5)}$$
$$=\frac{P(18{,}5<X<19{,}25)}{P(X>18{,}5)}=\frac{\frac{0{,}75}{2}}{\frac{1}{2}}=0{,}75.$$

9 Modélisation par une loi

Enoncé p. 263

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Soit X le nombre choisi. X suit la loi uniforme sur $[0\,;\,2]$.

$P\left(X^2>3\right)=P\left(X\in\left[\sqrt{3}\,;\,2\right]\right)$, donc :

$$P\left(X^2>3\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{2-0}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}13.$$

$P\left(\dfrac{X}{2}>0{,}9\right)=P(X>1{,}8)$, donc $P\left(\dfrac{X}{2}>0{,}9\right)=\dfrac{2-1{,}8}{2}=0{,}10$.

Donc l'affirmation est vraie.

10 Production hors normes

Enoncé p. 263

Lycée Élie Faure, Lormont

1 À la calculatrice on trouve : $P(X < 496) \approx 0{,}022\,8$.

ATTENTION

On pourrait avoir remarqué que $496 = \mu - 2\sigma$ et vouloir utiliser la probabilité du cours : $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.
On trouve alors :

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 1 - 2P(X < \mu - 2\sigma)$$

et donc :

$$P(X < \mu - 2\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0{,}95}{2} \approx 0{,}025.$$

Ce résultat n'est pas en contradiction avec le précédent, mais n'est pas assez précis puisque la valeur 0,95 est une valeur approchée au centième.

2 À la calculatrice on trouve : $P(X > 506) \approx 0{,}001\,3$.
Comme dans la question précédente, on remarque que $506 = \mu + 3\sigma$ et donc :

$$P(X > \mu + 3\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0{,}997}{2} \approx \frac{0{,}003}{2} \approx 0{,}001\,5.$$

Là encore, on n'obtient pas la précision demandée car la valeur approchée connue n'est qu'à 10^{-3} près.

11 Autonomie d'une batterie

Enoncé p. 264

Lycée Victor Duruy, Paris

1 La voiture n'atteint pas la ville si la distance parcourue est comprise entre 0 et 160 km, donc la probabilité de ne pas atteindre cette ville est $P(0 < X < 160) \approx 0{,}16$.

Remarque : on obtient le même résultat en calculant $P(X < 160)$. En effet, la probabilité de parcourir une distance négative est pratiquement nulle avec ce modèle car $0 < \mu - 3\sigma$.

2 $P(X > 320) \approx 0{,}001\,3$. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour est donc inférieure à 0,01.

CORRIGÉS

12 Probabilité maximale

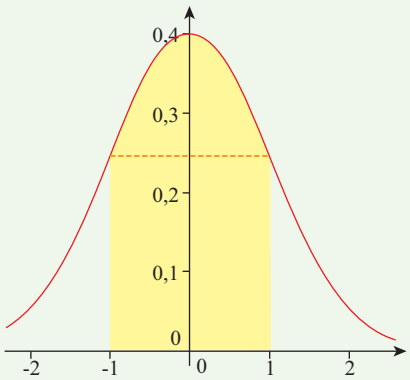
Enoncé p. 264

Lycée Dumont d'Urville, Toulon

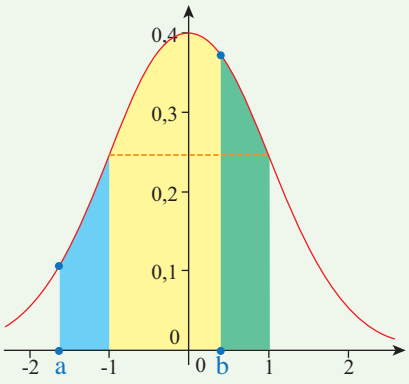
Pour que la probabilité de l'événement $(T < X < T + 2)$ soit maximale, il faut que l'aire sous la courbe de la fonction densité soit maximale.

Il semble que ce soit le cas pour $T = -1$.

Comme la fonction densité admet son maximum en 0, qu'elle est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et que pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, alors pour tout $x < -1$ ou $x > 1$, on a $f(x) < f(1)$ et par conséquent, si on a $T < -1$ ou $T + 2 > 1$, le graphique montre que l'aire sous la courbe n'est pas la plus grande.



$P(-1 < X < 1)$



$P(a < X < b)$ avec $b = a + 2$

On constate que, dans tous les cas, si on cherche l'aire sous la courbe pour a et b décalés par rapport à -1 et 1, l'aire ajoutée (en bleu) est plus petite que l'aire enlevée (en vert).

Si l'intervalle $[a\,;b]$ est totalement disjoint de l'intervalle $[-1\,;1]$, le maximum de la fonction sur l'intervalle $[a\,;b]$ est inférieur à son minimum sur $[-1\,;1]$, donc l'aire sera plus petite entre a et b.

13 Évolution « normale »

Enoncé p. 264

Lycée François Couperin, Fontainebleau

X est la variable aléatoire donnant l'âge d'acquisition des premiers mots.

X suit la loi normale $\mathcal{N}(11{,}5\,;3{,}2^2)$.

1. $P(0 < X < 10) \approx 0{,}319$. La proportion est d'environ 32 %.
2. $P(X > 18) \approx 0{,}021$. La proportion est d'environ 2 %.
3. $P(8 < X < 12) \approx 0{,}425$. La proportion est d'environ 43 %.

14 Loi normale

Enoncé p. 264

Lycée Élie Faure, Lormont

ATTENTION

Il faut tout exprimer dans la même unité (par exemple, en heure).
Alors, 6 h 15 min = 6,25 h et 75 min = 1,25 h.

1 **(a)** $P(X < 5{,}5) \approx 0{,}274\,3$.

(b) $P(X > 10) \approx 0{,}0013$.

2 $P(X < 6) \approx 0{,}420\,7$. Donc on peut évaluer le nombre de participants étant arrivés moins de 6 heures après leur départ à 210.

3 On cherche b tel $P(X < b) = 0{,}1$.
On a $b \approx 4{,}648$, soit environ 4 h 39 min.

15 Un test comportemental

Enoncé p. 265

Lycée Montesquieu, Bordeaux

1 La moyenne suit la loi normale $\mathcal{N}(54{,}24\,;\,6{,}82^2)$.

À la calculatrice on obtient : $P(X > 62) \approx 0{,}128$.

Comme $3\,500 \times 0{,}128 = 448$, il y a environ 448 sujets ayant une note supérieure à 62.

2 $P(45 < X < 70) \approx 0{,}902$. Le nombre d'individus est alors 3 157.

3 On cherche Q_1 tel que $P(X \leqslant Q_1) = 0{,}25$. À la calculatrice on obtient : $Q_1 \approx 49{,}64$.

De même, $P(X \leqslant Q_3) = 0{,}75$ pour $Q_3 \approx 58{,}84$.

16 Trouver une moyenne

Enoncé p. 265

Lycée Stanislas, Nice

1 Soit X la masse d'un paquet de farine. On veut $P(X > 1) = 0{,}95$.

Si X suit le loi $\mathcal{N}(\mu;\ 0{,}05^2)$, $Z = \dfrac{X-\mu}{0{,}05}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$$P(X > 1) = 0{,}95 \iff P\left(\frac{X-\mu}{0{,}05} > \frac{1-\mu}{0{,}05}\right) = 0{,}95$$
$$\iff P\left(Z > \frac{1-\mu}{0{,}05}\right) = 0{,}95$$
$$\iff P\left(Z < \frac{1-\mu}{0{,}05}\right) = 0{,}05.$$

On obtient alors à la calculatrice : $\dfrac{1-\mu}{0{,}05} \approx -1{,}644\,9$.

$$\frac{1-\mu}{0{,}05} = -1{,}644\,9 \iff 1-\mu \approx -0{,}082\,243 \iff \mu \approx 1{,}082.$$

2 On reprend les calculs avec un écart-type égal à 0,025 :

Si X suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,0{,}025^2\right)$, $Z = \dfrac{X-\mu}{0{,}025}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$$\begin{aligned} P(X>1) = 0{,}95 &\iff P\left(\frac{X-\mu}{0{,}025} > \frac{1-\mu}{0{,}025}\right) = 0{,}95 \\ &\iff P\left(Z > \frac{1-\mu}{0{,}025}\right) = 0{,}95 \\ &\iff P\left(Z < \frac{1-\mu}{0{,}025}\right) = 0{,}05. \end{aligned}$$

On obtient alors à la calculatrice : $\dfrac{1-\mu}{0{,}025} \approx -1{,}644\,9$

$$\frac{1-\mu}{0{,}025} = -1{,}644\,9 \iff 1-\mu \approx -0{,}041\,121\,3 \iff \mu \approx 1{,}041.$$

Remarque : on n'avait pas vraiment besoin de refaire tous les calculs, il suffisait d'observer le rôle joué par l'écart-type dans ces calculs.

17 Trouver moyenne et écart-type

Enoncé p. 266

Lycée Tivoli, Bordeaux

1 Z suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

2
$$\begin{aligned} P(X<1) = 0{,}3 &\iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}3 \\ &\iff P\left(Z < \frac{1-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}3. \\ P(X<4) = 0{,}9 &\iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \\ &\iff P\left(Z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9. \end{aligned}$$

La calculatrice permet d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1-\mu}{\sigma} & \approx -0{,}524\,4, \\ \dfrac{4-\mu}{\sigma} & \approx 1{,}281\,6. \end{cases}$$

On considérera par la suite pour faciliter les écritures qu'il y a égalité, même s'il faut garder à l'esprit qu'avec la loi normale, on travaille tou-

jours avec des valeurs approchées.

$$\begin{cases} \dfrac{1-\mu}{\sigma} = -0{,}524\,4 \\ \dfrac{4-\mu}{\sigma} = 1{,}281\,6 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-\mu = -0{,}524\,4\,\sigma \\ 4-\mu = 1{,}281\,6\,\sigma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 1 + 0{,}524\,4\,\sigma \\ 3 = 1{,}806\,\sigma \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma \approx 1{,}661 \\ \mu \approx 1{,}871 \end{cases}$$

18 Durée de jeu

Enoncé p. 266

Lycée Montesquieu, Bordeaux

1 **(a)** On cherche la probabilité pour que la durée D soit inférieure ou égale à 60 secondes.

$$P(D \leqslant 60) = P(20 \leqslant D \leqslant 60) = \frac{60-20}{120-20} = 0{,}4.$$

(b) Par définition, $E(D) = \dfrac{20+120}{2} = 70$. Cela signifie que, sur un grand nombre de parties, la durée moyenne nécessaire pour que les quatre joueurs soient réunis est de 70 secondes.

2 **(a)** Comme J suit la loi normale de paramètres 120 et 400, cela signifie que l'espérance de J est égale à 120 min et sa variance est égale à 400. La variance étant le carré de l'écart-type, on trouve que l'écart-type est égal à 20 min.

(b) En enlevant 120 puis en divisant par 20 on obtient successivement :

$$90 < J < 180 \iff -30 < J - 120 < 60 \iff -1{,}5 < \frac{J-120}{20} < 3.$$

(c) D'après le cours, dire que J suit la loi normale de paramètres μ et σ^2 signifie que X suit la loi normale centrée réduite. Par conséquent, comme J est de paramètres 120 et 400, alors la variable aléatoire $X = \dfrac{J-120}{20}$ suit la loi normale centrée réduite.

(d) À la calculatrice on trouve : $P(90 < J < 180) \approx 0{,}932$.

(e) D'après les questions 2.b et 2.c :
$P(90 < J < 180) = P(-1{,}5 < X < 3)$, où X suit la loi normale centrée réduite.
D'après les propriétés de la courbe de la fonction densité de la loi normale centrée réduite :

$$P(X < -1{,}5) = P(X > 1{,}5) = 1 - P(X < 1{,}5).$$

Alors :

$$\begin{aligned} P(-1{,}5 < X < 3) &= P(X < 3) - P(X < -1{,}5) \\ &= P(X < 3) - 1 + P(X < 1{,}5) \\ &\approx 0{,}999 - 1 + 0{,}933 \approx 0{,}932. \end{aligned}$$

Chapitre 9

Intervalle de fluctuation et estimation

Plan du chapitre

1. Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %
2. Estimation

Exercice type — **Lycée Élie Faure, Lormont**

1 **(a)** On jette 100 fois un dé cubique, on obtient 10 fois la face « 6 ». Peut-on considérer que ce dé est équilibré ?

(b) La réponse serait-elle la même si on obtient 100 fois la face « 6 » sur 1 000 lancers ?

2 Sur un échantillon de 400 personnes, 73 ont vu un certain spot publicitaire à la télévision.

(a) Au niveau de confiance de 95 %, dans quel intervalle se trouve le pourcentage de ceux qui ont vu le spot dans la population totale ?

(b) Combien faudrait-il interroger de personnes pour que cet intervalle ait une amplitude inférieure à 2 % ?

Voir corrigé page 280

1 Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

Définition 1

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ avec $p \in]0\,;\,1[$. L'intervalle $I_n = \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire fréquence $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

COURS

Propriété 1

Lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité que F_n prenne ses valeurs dans I_n tend vers 0,95 (c'est ce qui explique le terme « asymptotique au seuil de 95 % » utilisé ici).

Remarque : le nombre 1,96 est celui qui apparaît dans le chapitre 8 : si Z est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$, alors $P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) \approx 0{,}95$.

La définition précédente parle de variable aléatoire ; elle entre donc dans le domaine des probabilités.

L'utilisation en statistique est une conséquence de la loi des grands nombres et de la propriété 1.

À RETENIR

En statistique, on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique d'une proportion p au seuil de 95 % quand :

- on connaît la proportion p dans la population totale ;
- la taille n de l'échantillon étudié est telle que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
- on cherche à savoir si la fréquence f observée dans l'échantillon n'est pas incompatible (au seuil de 95 %) avec la proportion connue p.

Remarque : l'intervalle de fluctuation vu en seconde :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

contient l'intervalle de fluctuation asymptotique :

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right],$$

donc il n'y a pas contradiction entre les deux énoncés, celui de seconde étant seulement un énoncé simplifié.

2 Estimation

On utilise l'intervalle de fluctuation asymptotique quand on connaît une proportion « théorique » dans une population et qu'on veut savoir si un échantillon peut être considéré comme issu de cette population.

Dans ce paragraphe, la proportion théorique p de la population est inconnue et on cherche à l'estimer à partir d'un échantillon.

2.1 Intervalle de confiance

Propriété 2

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ avec $p \in]0\,;\,1[$ et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

L'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion inconnue p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

C'est un résultat probabiliste. En statistique, on ne parle pas de la variable aléatoire F_n, mais de la fréquence f observée, parfois appelée réalisation de F_n, sur un échantillon de la population.

Définition 2

p représente la proportion inconnue d'individus ayant une certaine propriété dans la population totale.
Soit f la fréquence observée de la propriété étudiée, dans un échantillon de taille n. On appelle intervalle de confiance de la proportion inconnue p avec un niveau de confiance 0,95 l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Remarques

On utilise l'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 % quand :

- on observe une proportion f dans un échantillon de taille n ;
- la taille n de l'échantillon étudié est telle que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ (dans la pratique les deux dernières inégalités ne seront contrôlées qu'après coup puisque p est inconnue) ;
- on cherche à déterminer un intervalle dans lequel se situe la proportion inconnue p dans la population totale, avec un niveau de confiance de 95 %.

Remarques

- À ce niveau de confiance, l'amplitude de l'intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On obtient donc un intervalle de confiance d'amplitude inférieure à a dès que n est supérieur ou égal à $\dfrac{4}{a^2}$.
- Dans certaines disciplines, on utilise aussi, au niveau de confiance 95 %, l'intervalle $\left[f - 1{,}96\dfrac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\,;\,f + 1{,}96\dfrac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$.

COURS

Solution de l'exercice type

Lycée Élie Faure, Lormont

1 **(a)** Pour un dé bien équilibré, on connaît la proportion $p = \dfrac{1}{6}$.

De plus, les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont vérifiées. On peut donc utiliser l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

$$I = \left[\frac{1}{6} - 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}{\sqrt{100}} ; \frac{1}{6} + 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}{\sqrt{100}}\right],$$

ce qui donne environ $[0{,}093 ; 0{,}240]$.

Si on obtient 10 fois face sur 100 lancers, la fréquence d'apparition du 6 est égale à 0,1. Cette fréquence appartient à l'intervalle I, il n'y a donc pas de raison, au seuil de 95 %, de rejeter l'hypothèse que le dé est bien équilibré.

(b) Si l'échantillon est de taille 1 000, l'intervalle de fluctuation devient :

$$J = \left[\frac{1}{6} - 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}{\sqrt{1\,000}} ; \frac{1}{6} + 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}}{\sqrt{1\,000}}\right],$$

soit environ $[0{,}143 ; 0{,}190]$.

Cela signifie que si sur 1 000 lancers, on n'obtient que 10 % de face « 6 », on peut, au seuil de 95 %, rejeter l'hypothèse que le dé est bien équilibré.

2 Dans cette situation, la proportion p dans la population est inconnue. On va chercher un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %.

(a) La proportion observée est $f = \dfrac{73}{400}$, donc l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % est :

$$\left[\frac{73}{400} - \frac{1}{\sqrt{400}} ; \frac{73}{400} + \frac{1}{\sqrt{400}}\right],$$

c'est-à-dire environ $[0{,}132 ; 0{,}233]$.

On peut donc, au niveau de confiance de 95 %, dire que la proportion p de ceux qui on vu le spot dans la population totale est comprise entre 0,132 et 0,233.

Solution de l'exercice type (suite) — Lycée Élie Faure, Lormont

(b) L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Donc cette amplitude est inférieure à 2 % dès que $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$, c'est-à-dire $n \geq \left(\frac{2}{0{,}02}\right)^2$, ce qui donne $n \geq 10\,000$.

Économiquement, un tel sondage peut coûter très cher ; on ne cherchera que rarement à avoir une telle précision !

Voir énoncé page 277

MÉTHODE

Pour calculer les intervalles de fluctuation ou de confiance, la borne inférieure de l ?intervalle est toujours arrondie par défaut et la borne supérieure par excès.

INTERROS

1 QCM Intervalle de fluctuation

15 min — Corrigé p. 291

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la bonne réponse.
Une certaine année, le taux de réussite au bac ES en France a été de 75 %.

1 La meilleure approximation de l'intervalle de fluctuation asymptotique de cette proportion au seuil de 95 % dans un échantillon 100 élèves est :

a [0,65 ; 0,85] b [0,665 ; 0,835] c [0,74 ; 0,76]

2 Si on multiplie par deux la taille de l'échantillon, la longueur de l'intervalle de fluctuation est :

a multipliée par 2 b divisée par 2
c multipliée par $\sqrt{2}$ d divisée par $\sqrt{2}$

3 Dans un lycée, sur 57 élèves qui se présentaient au bac ES, 49 élèves ont été reçus.

On veut tester l'hypothèse selon laquelle les résultats du lycée sont remarquables. Au seuil de 95 %,

a on ne rejette pas l'hypothèse que les résultats sont remarquables.
b on rejette l'hypothèse que les résultats sont remarquables.
c il n'y a pas assez d'élèves pour conclure.

4 Dans un lycée plus grand, il y avait deux fois plus de candidats, mais aussi deux fois plus de reçus. Au seuil de 95 %,

a on ne rejette pas l'hypothèse que les résultats sont remarquables.
b on rejette l'hypothèse que les résultats sont remarquables.
c c'est la même réponse que dans la question précédente car il y a le même pourcentage de reçus.

2 QCM Intervalle de confiance

15 min — Corrigé p. 291

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la bonne réponse.

Lors d'un vote, les bulletins sont dépouillés par lots de 100 enveloppes prises au hasard dans l'urne. Dans le premier lot, il y a 31 bulletins pour le candidat A. Il y a eu au total 680 votants dans ce bureau de vote.

1 D'après ce résultat, l'intervalle de confiance au seuil de 95 % du pourcentage de voix recueillies par le candidat A est :

a $\left[0{,}31 - \dfrac{\sqrt{0{,}31 \times 0{,}69}}{\sqrt{100}} ; 0{,}31 + \dfrac{\sqrt{0{,}31 \times 0{,}69}}{\sqrt{100}}\right]$

b $\left[0{,}31 - \dfrac{1}{\sqrt{100}} ; 0{,}31 + \dfrac{1}{\sqrt{100}}\right]$

c $\left[0{,}31 - \dfrac{1}{\sqrt{680}} ; 0{,}31 + \dfrac{1}{\sqrt{680}}\right]$

2 Dans le même lot de bulletins, le candidat B recueille 16 voix.

a Le candidat A est certain d'arriver devant le candidat B dans ce bureau de vote.

b Au niveau de confiance de 95 %, on peut dire que le candidat A devance le candidat B.

c Si les pourcentages en faveur de chaque candidat restent les mêmes après le dépouillement de 200 votes, le candidat A est presque sûr d'être devant le candidat B.

3 Un électeur qui assiste au dépouillement veut attendre qu'il y ait assez de bulletins dépouillés pour avoir un intervalle de confiance de longueur inférieure à 5 %.

Il suffit qu'on ait dépouillé :

a 200 bulletins **b** 400 bulletins **c** tous les bulletins

4 Le bureau de vote concerné est considéré comme représentatif de la population nationale.

Le candidat A obtient 26 % des voix dans ce bureau.

L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % du résultat national du candidat A est :

a $\left[0{,}26 - \dfrac{1}{\sqrt{100}} ; 0{,}26 + \dfrac{1}{\sqrt{100}}\right]$

b $\left[0{,}26 - \dfrac{1}{\sqrt{680}} ; 0{,}26 + \dfrac{1}{\sqrt{680}}\right]$

c On ne peut pas savoir car on ne connaît pas le nombre total de votants au plan national.

3 QCM Le bon intervalle

15 min — Corrigé p. 291

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la réponse exacte.

1 Une proportion théorique dans une population de 20 000 est égale à 0,1 %. Dans un échantillon de 60 personnes, cela a du sens de chercher :

a un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

b un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %

c aucun des deux

2 Une proportion théorique dans une population est égale à 0,25. Dans un échantillon de 60 personnes, cela a du sens de chercher :

a un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

b un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %

c aucun des deux

INTERROS

3 Dans un échantillon de 500 personnes, on constate une fréquence de 0,72. Cela a du sens de chercher :

a un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %
b un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %
c aucun des deux

4 On a constaté dans un échantillon de taille 20 issu d'une population de 100 personnes, que 50 % possèdent une certaine propriété. Cela a du sens de chercher :

a un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %
b un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %
c aucun des deux

4 QCM Pas de conclusion hâtive

10 min Corrigé p. 292

Pour chacune des questions ci-dessous, choisir la réponse exacte.

1 On lance 20 fois une pièce, on obtient 10 fois « face ».

a On peut affirmer avec certitude que la pièce est bien équilibrée.
b On peut, au seuil de 95 %, rejeter l'hypothèse que la pièce est truquée.
c On ne peut pas se prononcer à l'aide des notions du cours.

2 Dans un plan d'eau, certains poissons souffrent d'une malformation de la nageoire dorsale. Un pêcheur a constaté que sur les 200 poissons attrapés pendant la saison, 5 montraient une malformation de la nageoire dorsale. Le pêcheur peut en conclure, au niveau de confiance 0,95, que :

a Il y a certainement plus que 2,5 % des poissons souffrant de cette malformation.
b Il est vraisemblable que moins de 10 % des poissons souffrent de cette malformation.
c Ni l'un ni l'autre.

3 30 étudiants (10 filles et 20 garçons) recherchent un travail pour l'été. Parmi eux, 4 filles et 10 garçons trouvent un emploi sans problème. On peut considérer que :

a Il n'y a pas de différence entre les chances de trouver un travail pour les filles et les garçons.
b Les garçons trouvent plus facilement un travail que les filles.
c On ne peut rien dire.

4 Avant le deuxième tour d'une élection présidentielle, un institut de sondage donne à un candidat 46 % des voix sur un échantillon de 300 personnes. Un sondage sur Facebook lui attribue 48 % des voix sur un échantillon de 10 000 personnes.

Le candidat préfère :

a Le deuxième sondage car l'échantillon est plus grand.

b Le deuxième sondage car le pourcentage est plus élevé.

c Le premier sondage.

Intervalle de fluctuation

5 Produit préféré

★ 15 min Corrigé p. 292

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Une société spécialisée dans la commercialisation de fruits secs propose deux nouveaux produits :

- produit 1 : mélange mangue et amandes grillées
- produit 2 : mélange ananas et noix de cajou.

Un sondage réalisé sur 60 consommateurs montre que 56 % d'entre eux préfèrent le produit 1.

La société peut-elle, au risque de 5 %, considérer que le produit 1 est nettement préféré au produit 2 par les consommateurs ?

6 Pièce truquée

★ 20 min Corrigé p. 292

Lycée Élie Faure, Lormont

Le petit frère de Jonathan revient un jour du collège tout excité car un copain lui a donné une pièce truquée pour jouer à pile ou face. Quand il l'avait utilisée au collège, sur 30 lancers, il n'avait obtenu face que 11 fois.

1. Le copain lui a dit qu'elle était déséquilibrée en ne montrant face que dans 25 % des cas seulement.
   - **(a)** Si tel est bien le cas, quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de face dans un échantillon de 30 lancers ?
   - **(b)** Énoncer une règle de décision qui permet d'avoir un avis sur l'affirmation du copain puis l'appliquer.
2. Jonathan met tout de même en doute la propriété de cette pièce.
   - **(a)** En supposant que la pièce est bien équilibrée, quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de face dans un échantillon de 30 lancers ?
   - **(b)** Énoncer une règle de décision et l'appliquer à la supposition de Jonathan.
3. Comment peut-on éviter le risque d'arriver à deux conclusions différentes ?

INTERROS

7 Publicité

★★ 25 min Corrigé p. 293

Lycée Élie Faure, Lormont

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1 Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.

(a) Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

(b) Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

2 Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.

Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.

(a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.

(b) Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées.

Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.

Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

8 Respect des proportions

★★ 30 min Corrigé p. 294

Lycée Turgot, Paris

Partie A

La direction d'une société fabriquant des composants électroniques impose à ses deux sites de production de respecter les proportions ci-dessous en termes de contrat d'embauche du personnel :

- 80 % de CDI (contrat à durée indéterminée) ;
- 20 % de CDD (contrat à durée déterminée).

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Effectif total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1 Calculer le pourcentage de CDI sur chaque site de production.

2 Pour une proportion $p = 0{,}8$, déterminer les intervalles de fluctuation asymptotiques au seuil de 95 % relatifs aux échantillons de taille n, pour $n = 421$ et pour $n = 68$.

3 Comment la direction de la société peut-elle interpréter les intervalles obtenus dans la question précédente ?

Partie B

Dans cette partie, on convient que l'on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, où p désigne la proportion dans une population et n désigne la taille d'un échantillon de cette population.

La direction de cette même société tolère 7 % de composants défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7 %.

Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1 S'il prélève un échantillon de 50 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.

2 S'il prélève un échantillon de 100 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.

3 Le responsable du site de production prélève un échantillon de taille 100, dans lequel 9 composants électroniques s'avèrent défectueux. Comment peut-il interpréter ce résultat ?

Intervalle de confiance

9 Barème

★ — 15 min — Corrigé p. 295

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Lors d'un concours, le jury souhaite que la moitié des candidats présents à l'écrit soient admissibles à l'oral.

1 Après correction d'un échantillon de 50 copies, on constate que seules 27 ont la moyenne.
Le jury hésite à déclarer admissibles des candidats qui n'ont pas la moyenne. Expliquer pourquoi il décide alors de modifier son barème.

2 Avec les nouveaux barèmes, sur 60 copies, 38 ont la moyenne.
Expliquer pourquoi le jury accepte ce barème.

INTERROS

10 Intervalle de confiance

★ 15 min Corrigé p. 295

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

1 Lors d'un sondage avant une élection, on interroge 800 personnes (constituant un échantillon représentatif). 424 d'entre elles déclarent qu'elles voteront pour le candidat H.

Soit p la proportion d'électeurs de la population qui comptent voter pour H.

Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion p ?

a [0,46 ; 0,60] **b** [0,48 ; 0,58] **c** [0,49 ; 0,57] **d** [0,51 ; 0,55]

2 Dans une commune comptant plus de 100 000 habitants, un institut réalise un sondage auprès de la population. Sur 100 personnes interrogées, 55 affirment être satisfaites de leur maire.

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la cote de popularité du maire est :

a [0,452 ; 0,648] **b** [0,45 ; 0,65] **c** [0,50 ; 0,60] **d** [0,547 ; 0,553]

3 Une entreprise informatique produit et vend des clés USB. La vente de ces clés est réalisée par des commerciaux qui se déplacent aux frais de l'entreprise.

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Pour contrôler la qualité du stock formé par des milliers de clés USB fabriquées chaque année, on sélectionne au hasard un échantillon de 4 000 clés. Parmi ces clés, 210 sont défectueuses.

Le directeur des ventes doit stopper toute la chaîne de fabrication des clés USB si la borne supérieure de l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, dépasse 7 %.

Affirmation : « À l'issue du contrôle, le directeur des ventes stoppera toute la chaîne de fabrication ».

11 Électeurs déçus

★ 15 min Corrigé p. 295

Lycée Virlogeux, Riom

Lors d'une élection, le candidat A a été élu avec 54 % des suffrages. Quelques mois après son élection, un sondage est réalisé auprès de 1 050 personnes prises au hasard parmi les votants du scrutin précédent.

À la question : « Si un nouveau scrutin avait lieu aujourd'hui, voteriez-vous pour le candidat A ? », les réponses sont les suivantes :

Oui : 512 Non : 538

Au risque de 5 %, peut-on en conclure que l'opinion des électeurs a changé depuis le scrutin ?

12 Taille de l'échantillon

★★ 15 min Corrigé p. 296

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Une agence de voyage propose en option, dans un de ses circuits, un dîner dans un restaurant gastronomique.

En prélevant au hasard 60 fiches parmi celles de ses 2 457 clients, on constate que seuls 14 clients ont pris cette option.

1. Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion de clients de l'agence qui ont pris cette option.
2. L'un des responsables de l'agence décide que si moins du quart des clients est intéressé par cette option, elle sera supprimée. Pourquoi ne peut-il pas décider, au vu de cet échantillon, de supprimer l'option ?
3. On suppose que la proportion de clients choisissant l'option est 23,3 %. Combien de fiches faudrait-il au moins étudier pour que l'agence puisse, au seuil de 95 %, décider que moins de 25 % des clients sont intéressés par l'option ?
   Que peut-on dire sur ce résultat ?

13 Articles indisponibles

★★ 20 min Corrigé p. 296

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Lorsque Florine fait une commande sur le site pasdechance.com, la probabilité que l'article ne soit pas disponible est 0,6. Mais lorsqu'il est disponible, il est vraiment bon marché, donc elle est une cliente fidèle.

1. Chaque mois, Florine tente de commander 5 articles. X est la variable qui donne le nombre d'articles disponibles sur les 5 commandés dans le mois.
   (a) Quelle est la loi suivie par X ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'exactement un article soit disponible dans le mois ?
   (c) Quelle est l'espérance de X ?
2. Un responsable du site prétend cependant que les articles sont disponibles dans plus de 50 % des cas. Est-ce que sur un an, l'expérience de Florine permet de rejeter cette affirmation au seuil de 95 % ?

14 Notation

★★ 40 min Corrigé p. 297

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis au dix millième, ou sous forme de pourcentage arrondis à 0,01 %.

1. Le lendemain d'une épreuve de mathématiques au baccalauréat, on corrige un échantillon de 160 copies choisies au hasard parmi l'ensemble

des copies et on a observé que 78 copies ont obtenu une note supérieure ou égale à 10.

(a) Déterminer la proportion des copies de l'échantillon ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10.

(b) Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion des copies qui obtiendront une note supérieure ou égale à 10 dans l'ensemble des copies.

(c) Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % d'amplitude inférieure ou égale à 0,04 ?

2 À l'issue du premier groupe d'épreuves, on désigne par X la variable aléatoire qui, à un candidat choisi au hasard parmi l'ensemble des candidats, associe sa moyenne générale.

Un correcteur propose de considérer que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 10,5 et d'écart-type 2.

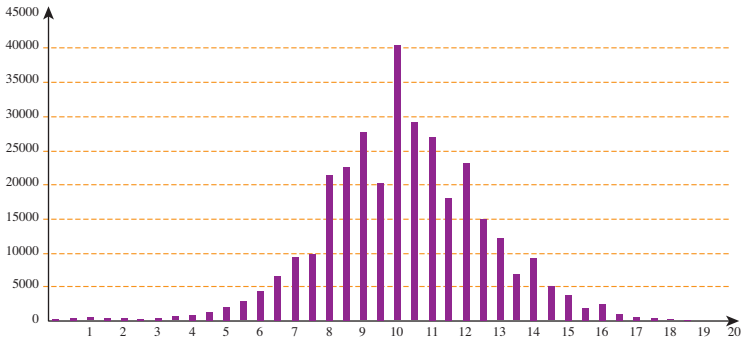
(a) Si ce correcteur a raison, quel intervalle centré en 10,5 devrait contenir environ 95 % des moyennes des candidats ?

(b) À l'aide de la calculatrice, calculer $P(X > 12)$.

(c) Lors des délibérations de jury à l'issue du premier groupe d'épreuves, les candidats ayant obtenu une moyenne supérieure ou égale à 10 sont déclarés admis. Il est aussi d'usage, par exemple, lorsqu'un candidat a obtenu une moyenne inférieure mais très proche de 10 et lorsque le dossier de ce candidat met en avant la qualité de son travail au cours de l'année, de le déclarer admis et de porter à 10 sa moyenne.

Le graphique ci-dessous permet de visualiser les notes moyennes d'environ 330 000 candidats à l'issue des délibérations des jurys du premier groupe d'épreuves du baccalauréat 2001.

Commenter la forme du graphique et ses éventuelles irrégularités.



Source : Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche, juillet 2001.

1 QCM Intervalle de fluctuation

Enoncé p. 282

1 Réponse **b** . On applique la formule :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

avec $p = 0{,}75$ et $n = 100$.

2 Réponse **d** . La longueur de l'intervalle est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{n}}$, donc si on multiplie n par 2, cette longueur est divisée par $\sqrt{2}$.

3 Réponse **b** . Le taux de réussite est $\frac{49}{57} \approx 0{,}860$. Pour 57 élèves, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % du taux de réussite national est $[0{,}637 ; 0{,}863]$. Le taux observé appartient à cet intervalle. On rejette l'hypothèse que les résultats sont remarquables.

4 Réponse **a** . Le taux est le même, mais l'échantillon est deux fois plus grand. L'intervalle de fluctuation asymptotique est alors $[0{,}67 ; 0{,}83]$. Le taux observé n'est pas dans cet intervalle, on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse que les résultats soient remarquables.

2 QCM Intervalle de confiance

Enoncé p. 282

1 Réponse **b** d'après le cours.

2 Réponse **c** . Avec 100 votes, l'intervalle de confiance pour le candidat A est $[0{,}21 ; 0{,}41]$ et celui du candidat B est $[0{,}06 ; 0{,}26]$. Ces intervalles ne sont pas disjoints, alors qu'avec 200 votes dépouillés, les intervalles de fluctuations sont disjoints.

3 Réponse **c** . La longueur de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}05$ pour $n > 1\,600$. Comme il n'y a que 680 votants dans ce bureau, il faut avoir tout dépouillé. La notion d'intervalle de confiance n'a d'ailleurs alors plus de sens !

4 Réponse **b** d'après le cours.

3 QCM Le bon intervalle

Enoncé p. 283

1 Réponse **c** . On connaît la proportion dans la population, mais $np = 0{,}06$ et $np > 5$ n'est pas vérifiée.

2 Réponse **a** . On connaît la proportion dans la population, et les conditions sur n et p sont vérifiées.

3 Réponse **b** . On cherche la proportion dans la population, et les conditions sur n et p sont vérifiées.

4 Réponse **c** . On cherche la proportion dans la population, mais $n = 20$, donc la condition $n \geq 30$ n'est pas vérifiée.

4 QCM Pas de conclusion hâtive

Enoncé p. 284

1 Réponse **c** . Il n'y a pas assez de lancers pour appliquer l'intervalle de confiance.

2 Réponse **b** . L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est $[0 ; 0{,}096]$. Donc le pourcentage de poissons souffrant de la malformation est vraisemblablement inférieur à 10 %.

3 Réponse **c** . Il n'y a pas assez de filles (10) et de garçons (20) pour utiliser un intervalle de confiance.

4 Réponse **c** . C'est le seul sondage dont l'intervalle de confiance contient un taux supérieur à 50 %.

5 Produit préféré

Enoncé p. 285

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Dans cet exercice, comme dans les suivants, il faut bien penser à vérifier les conditions sur n et p.

On cherche à savoir si on pourrait avoir 50 % des consommateurs qui préfèrent le produit 2 ; l'intervalle de confiance de la fréquence des consommateurs préférant le produit 2 est :

$$\left[0{,}44 - \frac{1}{\sqrt{60}} ; 0{,}44 + \frac{1}{\sqrt{60}}\right] \approx [0{,}311 ; 0{,}570] .$$

Cet intervalle contient 50 %, on ne peut donc pas dire qu'il y a certainement une majorité de consommateurs qui préfèrent le produit 1.

Ces calculs justifient a posteriori l'utilisation de l'intervalle de confiance au seuil de 95 % car $n > 30$ et l'intervalle de confiance permet de considérer que la proportion $p > 0{,}3$ donc $np > 9 > 5$ et $(1 - p) > 1 - 0{,}3$, donc $n(1 - p) > 21 > 5$.

6 Pièce truquée

Enoncé p. 285

Lycée Élie Faure, Lormont

1 **(a)** On a :

$$\left[0{,}25 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}25(1-0{,}25)}}{\sqrt{30}} ; 0{,}25 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}25(1-0{,}25)}}{\sqrt{30}}\right]$$

ce qui donne $[0{,}095 ; 0{,}405]$.

(b) Si la fréquence d'apparition de face appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique, on ne rejette pas son affirmation ; sinon on rejette, au risque de 95 % l'affirmation que la pièce montre face dans 25 % des cas. Avec 11 faces sur 30 lancers, la fréquence d'apparition observée est environ 0,367. Elle est dans l'intervalle de fluctuation, on ne peut donc pas rejeter l'affirmation du copain.

2 **(a)** Si la pièce est bien équilibrée, l'intervalle de fluctuation est [0,321 ; 0,679].

(b) Comme te taux d'apparition de face est dans l'intervalle de fluctuation, on ne rejette pas l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée.

3 Pour éviter des conclusions différentes, il suffit que les intervalles de fluctuations des proportions 25 % et 50 % soient disjoints, donc que la borne inférieure de l'intervalle centré en 0,5 soit supérieure à la borne supérieure de l'intervalle centré en 0,25. On a :

$$0{,}25 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}25(1-0{,}25)}}{\sqrt{n}} < 0{,}5 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{\sqrt{n}}.$$

Pour cela, il faut choisir n assez grand. Par exemple $n = 60$ suffit.

7 Publicité

Enoncé p. 286

Lycée Élie Faure, Lormont

1 **(a)** À la calculatrice, on trouve : $P(30 < X < 35) \approx 0{,}133$.

(b) $P(X > 55) \approx 0{,}113$.

2 **(a)** Dans un échantillon de taille 1 000, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des prêts accordés est :

$$\left[0{,}75 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}75 \times 0{,}25}{1\,000}} ; 0{,}75 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}75 \times 0{,}25}{1\,000}}\right],$$

soit à peu près : [0,723 ; 0,777].

(b) Dans cette agence bancaire, la fréquence des prêts accordés est $\frac{600}{1\,000} = 0{,}6$.

On choisit comme règle de décision, au niveau de confiance de 95 %, de ne pas valider le slogan publicitaire si la fréquence observée dans l'agence n'est pas dans l'intervalle de fluctuation. Sinon on valide le slogan.

Dans ce cas, comme 0,6 n'est pas dans l'intervalle de fluctuation asymptotique, on ne valide pas le slogan qui promet des taux significativement supérieurs à celui observé.

CORRIGÉS

8 Respect des proportions

Enoncé p. 286

Lycée Turgot, Paris

Partie A

1 La proportion de CDI sur le site A est $\frac{315}{421} \approx 0{,}748$ et sur le site B, $\frac{52}{68} \approx 0{,}765$.

2 Dans cette situation, les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont vérifiées.
L'intervalle de fluctuation de 0,8 dans un échantillon de taille 421 est :

$$\left[0{,}8 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8 \times 0{,}2}{421}} ; 0{,}8 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8 \times 0{,}2}{421}}\right],$$

soit : $[0{,}761 ; 0{,}839]$.
Dans un échantillon de taille 68, il est égal à :

$$\left[0{,}8 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8 \times 0{,}2}{68}} ; 0{,}8 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8 \times 0{,}2}{68}}\right],$$

soit : $[0{,}704 ; 0{,}896]$.

3 La proportion de CDI sur le site A n'est pas dans l'intervalle de fluctuation correspondant à un échantillon de taille 421. La direction doit donc, au risque d'erreur de 5 %, considérer que le pourcentage souhaité de CDI sur ce site n'est pas atteint et faire modifier les modes de recrutement.
En revanche, sur le site B, bien que le pourcentage de CDI soit inférieur à 0,8, il se trouve dans l'intervalle de fluctuation. La direction n'a pas de raison particulière d'intervenir sur le recrutement dans ce site B.

Partie B

Dans cette partie, il faut bien vérifier que les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont remplies.

1 Si $n = 50$ et $p = 0{,}07$, alors $np = 3{,}5$. La condition $np \geq 5$ n'est pas remplie, donc on ne peut pas utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.

2 Si $n = 100$ et $p = 0{,}07$, alors $np = 7$ et $n(1-p) = 93$. Les trois conditions sont donc remplies, et on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.

3 La fréquence des composants défectueux dans l'échantillon de taille 100 est 0,09.
L'intervalle de fluctuation asymptotique du taux toléré de 0,07 dans un échantillon de taille 100 est :

$$\left[0{,}07 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}07 \times 0{,}93}{100}} ; 0{,}07 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}07 \times 0{,}93}{100}}\right],$$

soit à peu près : $[0{,}02 ; 0{,}12]$.
Comme la fréquence est dans l'intervalle de fluctuation, le responsable du site n'a pas lieu de s'inquiéter à propos de la qualité des composants produits.

9 Barème

Enoncé p. 287

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 Si sur un échantillon de 50 copies, 27 ont la moyenne, le jury peut, au niveau de confiance de 95 %, s'attendre à avoir entre 40 % et 68 % des candidats qui ont la moyenne. Avec 40 %, cela signifie qu'en déclarant admissibles 50 % des candidats, ils risquent de déclarer admissibles des candidats qui n'ont pas la moyenne.

2 Avec le nouveau barème, l'intervalle de confiance montre qu'entre 50,4 % et 76,3 % des candidats ont la moyenne ; il y a donc peu de risques de déclarer admissible un candidat qui n'a pas la moyenne à l'écrit.

MÉTHODE

Pour choisir entre intervalle de fluctuation et intervalle de confiance, il est essentiel de comprendre si la proportion dans la population est connue ou non.
Dans cet exercice, 50 % est un objectif qui n'a aucune raison d'être réalisé avec le barème initial.

10 Intervalle de confiance

Enoncé p. 288

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

1 Réponse **c**. $\frac{424}{800} - \frac{1}{\sqrt{800}} \approx 0{,}494\,6$, arrondi à 0,49 et $\frac{424}{800} + \frac{1}{\sqrt{800}} \approx 0{,}565\,4$, arrondi à 0,57.

2 Réponse **b**. $\frac{55}{100} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 0{,}45$ et $\frac{55}{100} + \frac{1}{\sqrt{100}} = 0{,}65$.

3 L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % est :

$$\left[\frac{210}{4\,000} - \frac{1}{\sqrt{4\,000}} ; \frac{210}{4\,000} + \frac{1}{\sqrt{4\,000}}\right].$$

La borne supérieure est environ égale à 0,069 et ne dépasse donc pas 7 %.
L'affirmation est donc fausse, le directeur des ventes ne doit pas stopper la chaîne de fabrication.

11 Électeurs déçus

Enoncé p. 288

Lycée Virlogeux, Riom

Dans cette situation, on veut savoir, à partir de l'échantillon de 1 050 personnes, si, aujourd'hui, il y aurait encore 54 % de votes favorables au candidat A.

On utilise donc l'intervalle de confiance de la proportion de votes favorables au candidat A dans l'échantillon de taille 1 050.

$f = \dfrac{512}{1\,050} \approx 0{,}488$.

Les conditions d'application des formules sont bien remplies ($n \geq 30$, $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$).

L'intervalle de confiance au risque de 5 % est :

$$\left[0{,}488 - \frac{1}{\sqrt{1\,050}} ; 0{,}488 + \frac{1}{\sqrt{1\,050}}\right] \approx [0{,}456 ; 0{,}519] .$$

La proportion 0,54 n'appartient pas à l'intervalle de confiance. On peut donc dire, au risque d'erreur de 5 % que l'opinion des électeurs a changé depuis le scrutin et que moins d'électeurs sont favorables au candidat A. Il n'est pourtant pas exclu qu'il soit élu si le vote avait lieu aujourd'hui puisque 0,51 appartient à l'intervalle de confiance.

12 Taille de l'échantillon

Enoncé p. 289

Lycée Montesquieu, Bordeaux

1 On obtient : [0,104 ; 0,363].

2 Le nombre 0,25 appartient à l'intervalle de confiance, donc il est possible que plus de 25 % des clients prennent l'option.

3 On cherche n tel que la borne supérieure de l'intervalle de confiance soit inférieure à 0,25, donc tel que $0{,}233 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}25$. Cela donne $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}017$ c'est-à-dire $n > 3\,460$.

Il faudrait donc constater cette proportion sur au moins 3 461 fiches étudiées pour que l'intervalle de confiance ne contiennent pas 0,25.

Comme l'agence n'a que 2 457 clients, ce n'est pas réalisable. Il faut par contre étudier toutes les fiches pour prendre une décision.

13 Articles indisponibles

Enoncé p. 289

Lycée François Mauriac, Bordeaux

1 **(a)** Chaque commande d'un article est une expérience de Bernoulli de probabilité 0,4. X suit donc la loi binomiale de paramètres 5 et 0,4.

(b) On obtient : $P(X = 1) = 5 \times 0{,}4 \times 0{,}6^4 = 0{,}259\,2$.

(c) On a : $E(X) = np = 2$.

2 Sur un an, Florine a effectué la commande de $12 \times 5 = 60$ articles.

Si comme l'affirme le site, les articles sont disponibles dans 50 % des cas, l'intervalle de fluctuation asymptotique de cette proportion pour un échantillon de taille 60 est [0,373 ; 0,627]. Le taux de disponibilité de 40 % constaté par Florine lors de ses commandes n'est pas en contradiction avec l'affirmation du responsable du site.

14 Notation

Enoncé p. 289

Lycée Montesquieu, Bordeaux

1 **(a)** La proportion des copies ayant obtenu une note supérieur ou égale à 10 est $\frac{78}{160} = 0{,}487\,5$.

(b) L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, d'après le résultat de cet échantillon de taille 160 est :

$$\left[0{,}487\,5 - \frac{1}{\sqrt{160}} ; 0{,}487\,5 + \frac{1}{\sqrt{160}}\right] \approx [0{,}408\,4 ; 0{,}566\,6] .$$

(c) L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$, où n est la taille de l'échantillon.

Si l'on veut une amplitude inférieure ou égale à 0,04, on doit prendre un échantillon de taille n telle que $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}04$, c'est-à-dire $\sqrt{n} \geq \frac{2}{0{,}04}$ donc, en élevant au carré : $n \geq 2\,500$. L'échantillon doit donc compter au moins 2 500 copies.

2 **(a)** Si X suit la loi normale de paramètre $\mu = 10{,}5$ et $\sigma^2 = 2^2$, alors on sait que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

L'intervalle $]10{,}5 - 4 ; 10{,}5 + 4[$, c'est-à-dire $]6{,}5 ; 14{,}5[$ devrait contenir 95 % des moyennes.

(b) À la calculatrice : $P(X > 12) \approx 0{,}226\,6$.

(c) Le graphique a, à peu près, la forme d'une courbe en cloche, caractéristique d'une loi normale. Son sommet correspond aux moyennes entre 10 et 10,5, ce qui correspond à la modélisation proposée par le correcteur.

On remarque cependant que certaines moyennes sont sous représentées pour avoir une courbe régulière. Cela correspond à l'intervention du jury qui augmente dans certains cas la moyenne d'un candidat.

Les moyennes juste en dessous de 8 sont majorées pour atteindre 8 et permettre au candidat de passer les épreuves du second groupe.

Les moyennes un peu inférieures à 10 sont arrondies à 10 pour que le candidat soit tout de suite reçu.

De même les moyennes légèrement inférieures à 12, 14 et 16 sont majorées afin de donner une mention au candidat.

On constate que suite à ces modifications, les moyennes 8, 10, 12, 14 et 16 sont légèrement surreprésentées par rapport à ce qu'on attendrait pour une loi normale.

Chapitre 10

Matrices et suites (Spécialité ES)

Plan du chapitre

1. Matrices et opérations
2. Systèmes linéaires

1 Matrices et opérations

Exercice type 1 — Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On pose :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- $F = \begin{pmatrix} 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Effectuer les opérations suivantes si elles sont possibles :

$$A \times B \quad , \quad B \times A \quad , \quad C \times D \quad , \quad F \times A \quad , \quad B \times C.$$

Voir corrigé page 301

1.1 Matrice carrée

Définition 1

n est un entier naturel strictement positif.
Une matrice carrée d'ordre n est un tableau à n lignes et n colonnes de nombres réels appelés coefficients.

La position d'un coefficient est indiquée en indice : a_{ij} est le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne.
Une matrice A dont les coefficients sont a_{ij} est parfois notée (a_{ij}).

COURS

1.2 Matrices colonne, matrice ligne

Définition 2

Une matrice colonne de taille n est un tableau à une colonne de n coefficients.
Une matrice ligne de taille n est un tableau à une ligne de n coefficients.
Généralisation : On peut effectuer le produit de deux matrices non carrées, à condition que le nombre p de colonnes de la première (à gauche) soit égal au nombre de lignes de la deuxième. On a alors, en appelant c_{ik} le terme de ligne i et de colonne k de la matrice produit, a_{ij} le terme général de la première matrice et b_{jk} celui de la deuxième : $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$.

1.3 Somme et produit par un réel

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n de coefficients respectifs a_{ij} et b_{ij}.

Définition 3

La somme $A + B$ des deux matrices A et B est la matrice C d'ordre n, de coefficients $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Le produit kA de la matrice A par un réel k est la matrice D d'ordre n et de coefficients $d_{ij} = ka_{ij}$.

1.4 Produit de deux matrices

Définition 4

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.
Le produit $A \times B$ (aussi noté AB) est la matrice C d'ordre n dont le coefficient c_{ij} est le produit terme à terme des coefficients de la i^{e} ligne de A par les coefficients de la j^{e} ligne de B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Le schéma suivant indique comment on obtient le coefficient c_{21} de la matrice produit de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times (-2) & 1 \times 4 + 2 \times 5 \\ 3 \times 2 + 4 \times (-2) & 3 \times 4 + 4 \times 5 \end{pmatrix}$$

2^{e} ligne

1^{e} colonne

Le produit $A \times B$ est alors $\begin{pmatrix} -2 & 14 \\ -2 & 32 \end{pmatrix}$.

Propriété 1

Le produit de deux matrices carrées de même ordre est une opération associative et distributive par rapport à l'addition.
A, B et C sont trois matrices carrées de même ordre, alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

Notation : lorsque M est une matrice carrée et p un entier naturel non nul, on note M^p le produit de p matrices M :

$$M^p = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{p \text{ facteurs}}.$$

ATTENTION

Alors que l'addition de matrices carrées d'ordre n a les mêmes propriétés que l'addition des nombres réels, il n'en va pas de même pour la multiplication.

En particulier :
Il existe des matrices carrées A et B telles que $A \times B \neq B \times A$ (produit non commutatif).
Il existe des matrices carrées A, B et C non nulles telles que $A \neq B$ mais $A \times C = B \times C$.

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On obtient :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \times 6 + 5 \times 5 & 2 \times (-1) + 5 \times 4 \\ -3 \times 6 + 0 \times 5 & (-3) \times (-1) + 0 \times 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 37 & 18 \\ -18 & 3 \end{pmatrix}$$
$$B \times A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ -2 & 25 \end{pmatrix}$$

COURS

Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée Camille Jullian, Bordeaux

$$C \times D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3-4+1 \\ 9+6+5 \\ -12+0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$F \times A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 35 \end{pmatrix}$$

$B \times C$: ce produit n'est pas possible à cause de la taille des matrices.

Voir énoncé page 299

1.5 Inverse d'une matrice carrée

Définition 5

La matrice carrée I_n (parfois simplement notée I) dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n.
$I_n = (c_{ij})$, avec $c_{ii} = 1$ et $c_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 2

Pour toute matrice carrée d'ordre n, $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Définition 6

On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est inversible quand il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

La matrice B s'appelle la matrice inverse de la matrice A et se note A^{-1}.

L'inverse d'une matrice peut se calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul.

2 Systèmes linéaires

Exercice type 2 — Lycée Élie Faure, Lormont

Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 2 tel que $P(1) = 4$, $P(2) = 5$ et $P(-1) = 8$.

Voir corrigé page 304

2.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 7

Un système de n équations linéaires à n inconnues, x_1 , x_2, … x_n est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On appelle matrice du système la matrice carrée A d'ordre n définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, on obtient l'écriture matricielle du système : $A \times X = B$.

Propriété 3

Lorsque A est une matrice carrée, le système d'équations linéaires dont l'écriture matricielle est $A \times X = B$, admet une solution unique si et seulement si A est inversible.
La solution est alors $X = A^{-1} \times B$.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Élie Faure, Lormont

On cherche un polynôme de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$. Les 3 valeurs données permettent d'écrire le système :

$$\begin{cases} P(1) = 4 \\ P(2) = 5 \\ P(-1) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ a - b + c = 8 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système on peut introduire l'écriture matricielle du système.

On pose alors $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Le système s'écrit alors $AX = B$, donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (les calculs se font directement à la calculatrice).

Le polynôme recherché est donc $P(x) = x^2 - 2x + 5$.

Voir énoncé page 303

1 QCM Matrices

10 min Corrigé p. 311

Soient A, B et C des matrices.

Pour chacune des questions, choisir la bonne réponse.

1 Si $A \times B = 0$ (0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls) alors :

a $A = 0$ ou $B = 0$ b $A = 0$ et $B = 0$

c On ne peut pas savoir.

2 Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors :

a $B \times A = A \times C$ b $A \times B = C \times A$

c Les coefficients de $B \times A$ et $A \times C$ ont les mêmes valeurs.

3 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors A^{-1} est égal à :

a $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4 On note M^2 le produit $M \times M$. Alors $(A + B)^2$ est égal à :

a $A^2 + B^2$ b $A^2 + 2(A \times B) + B^2$

c $A \times (A + B) + B \times (A + B)$

2 QCM Recherche d'un polynôme

10 min Corrigé p. 311

Une courbe C est donnée dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On souhaite déterminer s'il existe un polynôme $P(x)$ de degré 3 dont la courbe représentative passe des points donnés de C.

Pour chacune des questions, choisir la bonne réponse.

1 Le nombre de coefficients à trouver pour définir $P(x)$ est :

a 3 b 4 c celui qu'on veut.

2 Le nombre minimum de points à connaître pour déterminer $P(x)$ est :

a 2 b 3 c 4

3 Si on note X la matrice colonne des n coefficients inconnus de P, et B la matrice colonnes de n valeurs prises par P, alors il existe une matrice A, carrée d'ordre n dont les termes sont obtenus directement à l'aide des coordonnées des points connus, telle que :

a $AX = B$ b $AB = X$ c $AX = BA$

4 Avec les notations de la question 3, en supposant que A est inversible, on a :

a $B = XA^{-1}$ b $X = A^{-1}B$ c $X = BA^{-1}$

INTERROS

3 QCM Produit de matrices

10 min — Corrigé p. 311

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour chacune des questions, choisir la bonne réponse.

1 La matrice A^2 qui désigne le produit $A \times A$ est égale à :

a $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$

2 Le produit $A \times B$ est égal à :

a $B \times A$ b $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

3 Le produit $A \times C$:

a est égal à $\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$ b est égal à $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c ne peut pas se calculer

4 Le produit $C \times B$:

a est égal à $\begin{pmatrix} 25 & 6 \end{pmatrix}$ b est égal à $\begin{pmatrix} 25 \\ 6 \end{pmatrix}$

c ne peut pas se calculer

4 Opérations sur les matrices ★

10 min — Corrigé p. 312

Lycée Victor Duruy, Paris

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -6 & 8 & -6 \\ -6 & 9 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & 3 & -2 \\ -6 & y & -6 \\ -6 & 9 & z \end{pmatrix}.$$

Déterminer les réels x, y et z tels que la matrice $A \times B$ soit la matrice nulle, c'est-à-dire telle que tous ses termes soient égaux à 0.

On donnera les détails des calculs de matrices.

5 Coûts de chantiers ★★

25 min — Corrigé p. 312

Lycée Massena, Nice

Pour la réalisation de ses deux chantiers A et B, une entreprise de gros œuvre du bâtiment achète, auprès de deux fournisseurs X et Y, le béton (en m^3), les briques (en nombre de palettes), et les charpentes (en m^2).

Sa commande de matériaux pour le premier semestre 2013 est représentée par la matrice $S_1 = \begin{pmatrix} 125 & 102 \\ 79 & 95 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$, en notant dans la première colonne les

quantités de béton, de briques et de charpentes nécessaires au chantier A et dans la deuxième colonne, celles nécessaires au chantier B.

La commande pour le deuxième semestre 2013 est représentée par la matrice $S_2 = \begin{pmatrix} 157 & 75 \\ 95 & 101 \\ 14 & 31 \end{pmatrix}$.

1 Représenter par une matrice notée S la commande de matériaux pour l'année 2013.

2 Les prix unitaires de chaque matériau sont représentés par la matrice $P_1 = \begin{pmatrix} 275 & 515 & 2\,518 \\ 297 & 495 & 2\,425 \end{pmatrix}$, en notant dans la première ligne les prix unitaires du béton, des briques et des charpentes chez le fournisseur X, et dans la deuxième ligne ceux chez le fournisseur Y.

Au second semestre, ces prix ont globalement augmenté de 2 % chez les deux fournisseurs.

Représenter par une matrice notée P_2 les prix unitaires chez chaque fournisseur au second semestre.

3 Donner à l'aide des matrices définies précédemment le calcul permettant d'obtenir la matrice M des coûts totaux pour chaque fournisseur en 2013.

Calculer M.

4 Quel est le fournisseur le moins cher ?

6 Puissances de matrices

★ — 15 min — Corrigé p. 313

Cité scolaire internationale, Grenoble

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1 Calculer A^2 et A^3.

2 Conjecturer la valeur de A^n pour $n \geq 2$.

7 Déterminer une fonction

★★ — 25 min — Corrigé p. 313

Lycée Victor Duruy, Paris

Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets. Le coût total de fabrication de x objets est donné par $C(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des coefficients à déterminer.

On sait que le coût de fabrication de 4 objets est 80 €, que celui de 10 objets est 140 €, et que celui de 20 objets est 400 €.

INTERROS

1 Montrer que les informations sur C peuvent se traduire sous la forme $AX = B$, où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et où A et B sont deux matrices à préciser.

2 À l'aide d'un calcul matriciel et de la calculatrice, déterminer a, b et c et donner l'expression de $C(x)$.

8 Production

★★ 20 min Corrigé p. 313

Lycée Virlogeux, Riom

Une entreprise fabrique des jouets en bois qui nécessitent :

- 2 kg de bois et 3 h de travail pour une automobile ;
- 500 g de bois et 4 h de travail pour un camion ;
- 800 g de bois et 3 h 30 de travail pour un pantin.

1 Calculer le nombre de kg de bois et d'heures de travail nécessaires pour fabriquer 7 automobiles, 12 camions et 20 pantins.

2 Pendant une journée, on a fabriqué 89 objets au total, utilisé exactement 91 kg de bois, et travaillé 313 h.

Déterminer le nombre d'automobiles x, de camions y et de pantins z fabriqués pendant cette journée.

9 Équilibre économique

★★ 20 min Corrigé p. 314

Lycée Victor Duruy, Paris

Dans un pays imaginaire, la population vit en autarcie. Elle compte deux secteurs d'activités, l'agriculture et l'artisanat.

Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de la production de l'autre secteur et d'une partie de sa propre production. Ces deux secteurs doivent en outre satisfaire les besoins de la population.

Le tableau des entrées-sorties est donné ci-dessous :

	Consommation pour produire une unité d'agriculture	Consommation pour produire une unité d'artisanat	Consommation par la population
Unité d'agriculture	0,125	**0,25**	250 unités
Unité d'artisanat	0,625	0,25	150 unités

Par exemple, une unité d'agriculture consomme 0,125 unité d'agriculture et 0,625 unité d'artisanat.

1 Interpréter en termes d'économie, la donnée en gras.

2 On note x (respectivement y) le nombre d'unités produites par l'agriculture (respectivement l'artisanat) durant une année.

(a) Expliquer pourquoi $0{,}125x + 0{,}25y + 250 = x$.

(b) Écrire une équation analogue pour le secteur de l'artisanat.

(c) Montrer que le système obtenu s'écrit aussi $A \times P + D = P$, avec $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \end{pmatrix}$ et A une matrice que l'on précisera.

(d) Montrer que résoudre l'équation $A \times P + D = P$ revient à résoudre l'équation $(I_2 - A)P = D$, I_2 étant la matrice identité d'ordre 2.

3 Calculer, à l'aide de la calculatrice, P.

4 Quelle doit être la production de chaque secteur pour que l'économie soit équilibrée ?

10 Étude d'un marché

★★ 20 min Corrigé p. 315

Lycée Magendie, Bordeaux

Un marchand ambulant s'installe à midi à la sortie du lycée pour proposer à la vente des boissons fraîches, des boissons chaudes et des confiseries.

Voici le tableau de ses ventes sur trois mois qui donne la quantité vendue de chaque consommation :

	Mars	Avril	Mai
Boisson froide	72	45	137
Boisson chaude	43	30	22
Confiserie	126	70	106
Revenu en euros	347	210	340

On note x le prix de vente unitaire des boissons froides, y celui des boissons chaudes et z celui des confiseries.

1 En utilisant le tableau, écrire le système d'équations qui permet de déterminer x, y et z.

2 Donner l'écriture matricielle de ce système, puis le résoudre.

3 Le marchand pense que s'il avait vendu ses boissons, froides et chaudes, 10 % moins cher, le nombre total de ses ventes (y compris des confiseries) aurait augmenté de 10 % (arrondir à l'entier le plus proche). Si tel est vraiment le cas, aurait-il eu intérêt à le faire ?

INTERROS

11 Modèle ouvert de Léontief

★★ 20 min Corrigé p. 315

Lycée Camille Julian, Bordeaux

Dans un pays imaginaire, l'économie dépend de trois secteurs : l'énergie, l'agriculture et les biens manufacturés. L'unité est le milliard de la monnaie locale.

Le tableau donne la consommation (en pourcentage) de chaque secteur de la production des trois secteurs de l'économie.

consomme ↱	Énergie	Agriculture	Biens manufacturés
Énergie	0,05	0,3	0,2
Agriculture	0,4	0	0,1
Biens manufacturés	0,4	0,1	0,3

De plus, la population a besoin de 20 unités d'énergie, 13 unités d'agriculture et 7 unités de biens manufacturés.

Déterminer le nombre d'unités que doit produire chaque secteur pour que cette économie soit équilibrée.

12 Modèle de Léontief

★★★ 30 min Corrigé p. 316

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Un modèle économique se divise en trois secteurs : Charbon (C), Électricité (E) et Acier (A). Le tableau montre les achats en proportion de la valeur de la production de chaque secteur.

achète ↱	Charbon	Électricité	Acier
Charbon	0	0,4	0,6
Électricité	0,7	0,2	0,2
Acier	0,3	0,4	0,2

Déterminer la production de chaque secteur qui permet d'équilibrer le système.

1 QCM Matrices

Enoncé p. 305

1 Réponse **c** . En effet le produit de deux matrices est nul si l'une des deux est nulle, mais ce n'est pas nécessaire, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Réponse **c** . $BA = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$. Ce résultat est en partie dû à la symétrie de la matrice A par rapport à sa première diagonale.
La réponse **a** est fausse car BA est une matrice ligne et AC une matrice colonne, donc elles ne peuvent pas être égales. La réponse **b** est fausse car on ne peut pas calculer $A \times B$.

3 Réponse **b** . Il suffit de regarder si le produit de A et des différentes matrices proposées est égal à la matrice identité.

4 Réponse **c** . La multiplication des matrices est une loi distributive par rapport à l'addition.
La réponse **a** ne convient pas, car lors du développement il apparaît le produit $A \times B$. La réponse **b** ne convient pas, car contrairement à l'identité remarquable dans $\mathbb{R}$, en général, $A \times B \neq B \times A$ et on ne peut pas faire apparaître le « double produit ».

2 QCM Recherche d'un polynôme

Enoncé p. 305

1 Réponse **b** . Comme P est de degré 3, $P(x)$ est de la forme :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Il faut donc trouver 4 coefficients.

2 Réponse **c** . Pour déterminer 4 coefficients, il est nécessaire d'avoir 4 conditions . Il faut donc au minimum 4 points qui permettent d'écrire chacun une équation.

3 Réponse **a** . Cela découle des règles de multiplication des matrices.

4 Réponse **b** . On multiplie $AX = B$ à gauche par A^{-1}.

3 QCM Produit de matrices

Enoncé p. 306

1 Réponse **c** . En particulier ce n'est pas **a** , car le carré d'une matrice ne s'obtient pas en élevant ses coefficients au carré.

2 Réponse **b** . Il faut faire les calculs.

3 Réponse **c** . On ne peut pas multiplier une matrice carrée par une matrice ligne dans cet ordre .

4 Réponse **a** . Le calcul est immédiat.

4 Opérations sur les matrices

Enoncé p. 306

Lycée Victor Duruy, Paris

On a : $A \times B = \begin{pmatrix} -3x-6 & 3y-27 & -2z-12 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$.

Le reste est inutile, sauf pour vérification.

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} -3x-6=0 \\ 3y-27=0 \\ -2z-12=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=9 \\ z=-6 \end{cases}$$

On a donc $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -6 \\ -6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$, et il est alors facile de vérifier que

$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5 Coûts de chantiers

Enoncé p. 306

Lycée Massena, Nice

1 $S = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} 282 & 177 \\ 174 & 196 \\ 38 & 51 \end{pmatrix}$.

2 $P_2 = 1{,}02 \times P_1 = \begin{pmatrix} 280{,}50 & 525{,}30 & 2\,568{,}36 \\ 302{,}94 & 504{,}90 & 2\,473{,}50 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M &= P_1 \times S_1 + P_2 \times S_2 \\ &= \begin{pmatrix} 275 & 515 & 2\,518 \\ 297 & 495 & 2\,425 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 125 & 102 \\ 79 & 95 \\ 24 & 20 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 280{,}50 & 525{,}30 & 2\,568{,}36 \\ 302{,}94 & 504{,}90 & 2\,473{,}50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 157 & 75 \\ 95 & 101 \\ 14 & 31 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 265\,391{,}04 & 281\,046{,}96 \\ 264\,586{,}08 & 276\,212{,}90 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sur chacun des deux chantiers, le fournisseur Y est le plus rentable.

6 Puissances de matrices

Enoncé p. 307

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -6 & -8 & -3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} = A$.

2 Par conséquent, on peut conjecturer que si n est pair, $A^n = A^2$, et que si n est impair, $A^n = A$.

7 Déterminer une fonction

Enoncé p. 307

Lycée Victor Duruy, Paris

1 D'après l'énoncé on a :

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 80 \\ 100a + 10b + c = 140 \\ 400a + 20b + c = 400 \end{cases}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 100 & 20 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \\ 400 \end{pmatrix}$, on a $AX = B$.

2 À la calculatrice, on constate que A est inversible, donc $X = A^{-1} \times B$, et on obtient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Donc $C(x) = x^2 - 4x + 80$.

8 Production

Enoncé p. 308

Lycée Virlogeux, Riom

1 On utilise $7 \times 2 + 12 \times 0{,}5 + 20 \times 0{,}8 = 36$ kg de bois et il faudra $7 \times 3 + 12 \times 4 + 20 \times 3{,}5 = 139$ heures de travail.

2 Appelons x, y et z le nombre de voitures, de camions et de pantins fabriqués.

On a :

$$\begin{cases} x + y + z = 89 \\ 2x + 0{,}5y + 0{,}8z = 91 \\ 3x + 4y + 3{,}5z = 313 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ avec :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 3 & 4 & 3{,}5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 89 \\ 91 \\ 313 \end{pmatrix}$.

À la calculatrice, on constate que A est inversible, et on a donc $X = A^{-1} \times B$.

On obtient $X = \begin{pmatrix} 23 \\ 26 \\ 40 \end{pmatrix}$ donc pendant cette journée, on a fabriqué 23 voitures, 26 camions et 40 pantins.

9 Équilibre économique

Enoncé p. 308

Lycée Victor Duruy, Paris

1 Une unité d'artisanat consomme 0,25 unité d'agriculture.

2 **(a)** Les x unités d'agriculture sont consommées par l'agriculture $(0{,}125x)$, par l'artisanat $(0{,}25y)$ et par les consommateurs (250 unités).

On a donc bien $x = 0{,}125x + 0{,}25y + 250$.

(b) On a aussi : $0{,}625x + 0{,}25y + 150 = y$.

(c) On obtient le système :

$$\begin{cases} 0{,}125x + 0{,}25y + 250 = x \\ 0{,}625x + 0{,}25y + 150 = y \end{cases}$$

qui s'écrit de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}25 \\ 0{,}625 & 0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Donc $A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}25 \\ 0{,}625 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

(d) $A \times P + D = P \iff P - A \times P = D$

$\iff I_2 \times P - A \times P = D$

$\iff (I_2 - A)P = D.$

3 $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0{,}875 & -0{,}25 \\ -0{,}625 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.

$(I_2 - A)P = D \iff P = (I_2 - A)^{-1} \times D.$

À la calculatrice, on obtient $P = \begin{pmatrix} 450 \\ 575 \end{pmatrix}$.

4 L'économie sera équilibrée si on produit 450 unités d'agriculture et 575 unités d'artisanat.

10 Étude d'un marché

Enoncé p. 309

Lycée Magendie, Bordeaux

1 Pour chaque mois on a une équation, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 72x + 43y + 126z = 347 \\ 45x + 30y + 70z = 210 \\ 137x + 22y + 106z = 340. \end{cases}$$

2 L'écriture matricielle du système est $\begin{pmatrix} 72 & 43 & 126 \\ 45 & 30 & 70 \\ 137 & 22 & 106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 347 \\ 210 \\ 340 \end{pmatrix}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 72 & 43 & 126 \\ 45 & 30 & 70 \\ 137 & 22 & 106 \end{pmatrix}$.

À la calculatrice, on voit que A est inversible et on trouve :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

3 Si les boissons coûtent 10 % de moins, le prix de la boisson froide devient 0,90 € et celui des boissons chaudes 1,80 €.
Si les ventes augmentent de 10 %, le nombre de boissons froides vendues devient :

$$1{,}1 \times 254 \approx 279,$$

celui des boissons chaudes :

$$1{,}1 \times 95 \approx 105,$$

et celui des confiseries :

$$1{,}1 \times 302 \approx 332.$$

Le chiffre d'affaire du marchand serait alors de :

$$0{,}90 \times 279 + 1{,}80 \times 105 + 1{,}5 \times 332 = 938{,}1 \text{ €}.$$

Le chiffre d'affaire réalisé a été :

$$1 \times 254 + 2 \times 95 + 1{,}5 \times 302 = 897 \text{ €}.$$

Cela aurait donc été théoriquement intéressant de modifier les prix.

11 Modèle ouvert de Léontief

Enoncé p. 310

Lycée Camille Julian, Bordeaux

On note x, y, z le nombre d'unités de production respectivement d'énergie, d'agriculture et de biens manufacturés. Étant donnés les besoins de la popu-

lation, l'économie est équilibrée lorsque :

$$\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & 1 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice inverse, on obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 39 \\ 32 \\ 37 \end{pmatrix}$.

12 Modèle de Léontief

Enoncé p. 310

Lycée Montesquieu, Bordeaux

On appelle x, y, z les valeurs des productions respectives des secteurs Charbon, Électricité et Acier.

On cherche les valeurs qui permettent une économie équilibrée, donc x, y et z doivent vérifier le système matriciel :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & -0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 0{,}4y + 0{,}6z = 0 \\ 0{,}7x - 0{,}8y + 0{,}2z = 0 \\ 0{,}3x + 0{,}4y - 0{,}8z = 0 \end{cases}$$

On constate que la somme des deux premières équations donne l'opposé de la troisième, le système ne donne donc que deux équations :

$$\begin{cases} -x + 0{,}4y + 0{,}6z = 0 \\ 0{,}7x - 0{,}8y + 0{,}2z = 0 \end{cases}$$

Si la valeur de production du secteur charbon est 10 unités, alors le système devient :

$$\begin{cases} 0{,}4y + 0{,}6z = 10 \\ 0{,}8y - 0{,}2z = 7 \end{cases}$$

qui a pour solution $y \approx 11{,}07$ et $z \approx 9{,}29$.

L'économie est donc équilibrée si, quand le charbon a une production de valeur 10, la production d'électricité est de valeur 11,07 et celle de l'acier est de valeur 9,29.

Chapitre 11

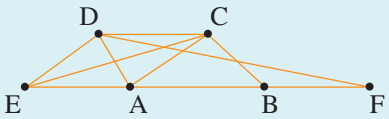
Théorie des graphes (Spécialité ES)

Plan du chapitre

1. Graphes non orientés
2. Graphes orientés
3. Recherche de la plus courte chaîne
4. Graphes probabilistes

Exercice type — **Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine**

1 Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hifi, ...) notés A, B, C, D, E et F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



Faire un tableau donnant le degré de chaque sommet du graphe.

Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois. Démontrer que son souhait est réalisable.

2 On considère quatre villes v_1, v_2, v_3, v_4 dans un pays où le trafic aérien est encore très réduit. Il existe seulement un vol direct de v_1 vers v_2 et vers v_4, de v_2 vers v_3, de v_3 vers v_1 et vers v_4, de v_4 vers v_2.

(a) Représenter ces données par un graphe.

(b) Montrer que pour deux villes quelconques $v_i, v_j\,(i \neq j)$ il existe au moins un vol de v_i vers v_j comportant au plus deux escales.

3 Une grande entreprise propose à ses employés deux types d'horaires mensuels : fixes ou variables. Chaque trimestre, tous les employés sont consultés sur le type d'horaires qu'ils désirent adopter au trimestre suivant.

Au début de l'expérience, 60 % des employés sont favorables aux horaires fixes. Autrement dit l'état probabiliste initial est décrit par la matrice ligne $E_0 = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$.

On estime qu'un employé préférant les horaires fixes un trimestre garde sept fois sur dix le même avis au trimestre suivant, alors qu'un employé préférant les horaires variables change d'avis une fois sur cinq au trimestre suivant.

...

COURS

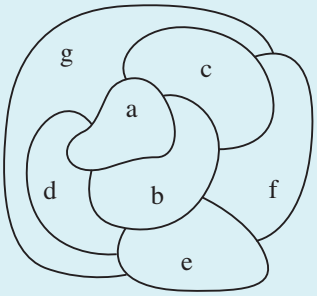
Exercice type (suite) **Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine**

(a) Traduire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.

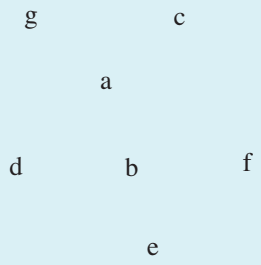
(b) Donner l'état probabiliste deux trimestres après le début de l'expérience.

(c) Déterminer l'état probabiliste stable. Interpréter le résultat obtenu.

4 Le plan d'une série de parcelles est donnée sur la page suivante. On ne veut pas avoir deux cultures identiques sur des parcelles adjacentes. Combien faut-il cultiver de plantes différentes, et comment organiser les cultures pour y parvenir ?



Plan



Graphe

Les sommets du graphe $\mathcal{G}$ représentent les champs, les arêtes représentent les bordures communes.

(a) Tracer les arêtes d'après le plan.

(b) Colorier le graphe $\mathcal{G}$ et en déduire une répartition possible des cultures.

Voir corrigé page 323

1 Graphes non orientés

1.1 Généralités

Définitions 1

- Un graphe non orienté est constitué de sommets dont certains sont reliés par des arêtes.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents.
- Un graphe complet est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.
- Le nombre de sommets présents dans un graphe est l'ordre du graphe.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- Un sous-graphe d'un graphe $\mathcal{G}$ d'ordre k est constitué de k sommets de $\mathcal{G}$ et de toutes les arêtes de $\mathcal{G}$ reliant deux de ces k sommets.

Théorème 1

La somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

1.2 Matrice associée à un graphe non orienté

Définition 2

La matrice d'adjacence associée à un graphe non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est la matrice carrée symétrique d'ordre n où le terme à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est égal au nombre d'arêtes reliant i et j (on mettra 0 s'il n'y a pas d'arête entre i et j).

1.3 Chaîne et cycle

Définitions 3

- Une chaîne est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
- La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.
- Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Un cycle est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.
- La distance entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.
- Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets du graphe.

Théorème 2

Si A est la matrice d'adjacence associée à un graphe, le terme a_{ij} (ligne i, colonne j) de la matrice A^r donne le nombre de chaînes de longueur r reliant i à j.

1.4 Graphe connexe

Définition 4

On dit qu'un graphe est connexe s'il existe toujours une chaîne entre deux sommets distincts.

COURS

1.5 Chaîne eulérienne et cycle eulérien

Définition 5

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient une et une seule fois chaque arête du graphe. Si cette chaîne est un cycle, on parle de cycle eulérien.

Théorème 3 (d'Euler)

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.
Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Algorithme d'Euler

Cet algorithme sert à déterminer une chaîne eulérienne dans le cas où le théorème d'Euler a prouvé son existence.

1 • s'il y a deux sommets de degré impair, on construit une chaîne joignant ces deux sommets (peu importe la chaîne).

• s'il n'y a pas deux sommets de degré impair (seul autre cas possible), on construit un cycle à partir d'un sommet quelconque.

Si toutes les arêtes sont marquées, on a obtenu une chaîne eulérienne, sinon :

2 On choisit un sommet de la chaîne précédente et on insère une chaîne fermée, donc allant de ce sommet à ce même sommet, ne contenant pas deux fois la même arête et, bien sûr, ne contenant aucune des arêtes déjà utilisées.

Si toutes les arêtes sont marquées, on a obtenu une chaîne eulérienne.

Sinon, on recommence cette deuxième étape jusqu'à ce que toutes les arêtes soient marquées.

1.6 Coloration d'un graphe

Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chaque sommet, de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Le nombre chromatique du graphe est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à son coloriage.

Voici une méthode pour colorier un graphe :

Algorithme de Welch-Powell

1 Ranger les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leurs degrés (pour les ex-æquo, faire un choix arbitraire).

2 Choisir une nouvelle couleur, dite « courante » et colorier ainsi le premier sommet de la liste non encore colorié.

3 Dans la liste des sommets, colorier avec la couleur courante, en suivant l'ordre choisi initialement, tous les sommets non encore coloriés et qui ne sont pas adjacents à un sommet colorié avec cette couleur.

4 Si tous les sommets ne sont pas encore coloriés, revenir à l'étape 2.

Cette technique peut être utile quand on a des incompatibilités entre deux « tâches » : des exemples de sujets font référence à des produits ne pouvant pas être transportés dans le même camion, ou des poissons ne pouvant cohabiter dans le même aquarium par exemple.

2 Graphes orientés

2.1 Généralités

Définitions 6

- Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées. Une boucle est une arête orientée dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes.
- On définit de même une chaîne orientée, une chaîne eulérienne orientée, un cycle orienté.

2.2 Matrice d'adjacence associée à un graphe orienté

Définition 7

La matrice d'adjacence associée à un graphe orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est une matrice carrée d'ordre n, où le terme à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est égal au nombre d'arêtes dont l'origine est i et l'extrémité j.
Comme il y a souvent au maximum une arête allant de i à j, la matrice ne comprend très souvent que des 1 et des 0.

Théorème 4

Si A est la matrice d'adjacence associée à un graphe, le terme a_{ij} (ligne i, colonne j) de la matrice A^r donne le nombre de chaînes de longueur r partant de i et aboutissant en j.

COURS

2.3 Graphe étiqueté

Définitions 8

- Un graphe étiqueté est un graphe orienté dont les arêtes sont affectées d'étiquettes (mots, nombres, ...).
- Un graphe pondéré est un graphe étiqueté dont toutes les étiquettes sont des nombres positifs.
- Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes orientées qui la composent.
- Une plus courte chaîne entre deux sommets est parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.

3 Recherche de la plus courte chaîne

Dans plusieurs situations, il est intéressant de trouver la plus courte chaîne allant d'un sommet à un autre d'un graphe pondéré connexe.
L'algorithme de Dijkstra permet dans des cas assez simples de résoudre ce problème. En voici une description :

Algorithme de la plus courte chaine ou algorithme de Dijkstra

1. Placer tous les sommets du graphe dans la 1re ligne d'un tableau.
   Sur la 2e ligne du tableau, écrire le coefficient « 0 » sous le point de départ E et le coefficient « ∞ » sous les autres sommets.
2. Repérer le sommet X de coefficient minimal. Commencer une nouvelle ligne et rayer toutes les cases vides sous X.
3. Pour chaque sommet Y adjacent à X, calculer la somme p du coefficient de X et du poids de l'arête reliant X à Y ;
   - Si p est strictement inférieur au coefficient de Y, inscrire p et X dans la case correspondante de la colonne « Y » ;

   Pour les sommets non adjacents à X, compléter la ligne par les coefficients de la ligne précédente.
4. S'il reste des sommets non sélectionnés, retourner à l'étape 2.
   Sinon, passer à l'étape 5.
5. La longueur minimale est le nombre lu sur la dernière ligne et on l'obtient en remontant les lettres.

4 Graphes probabilistes

Définitions 9

- Un graphe probabiliste est un graphe orienté, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet donné vaut 1. Les sommets du graphe sont les états possibles et le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j.
- L'état probabiliste est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles représentée par une matrice ligne, donc la somme des termes vaut 1.
- La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n. Le terme à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne a pour valeur le poids de l'arête allant de i vers j si cette arête existe, 0 sinon, les sommets du graphes étant numérotés de 1 à n.

Remarque : on peut donc vérifier que la somme des termes de chaque ligne est égale à 1.

Théorème 5

Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_k l'état probabiliste à l'étape k, on a $P_k = P_0 \times M^k$.

Théorème 6

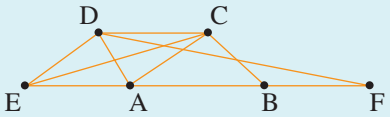
Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice ne comporte pas de 0, l'état P_k à l'étape k, converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0. De plus, on a : $P = PM$.

P est appelé l'état stable du graphe probabiliste.

Remarque : consultez le site WIMS http://wims.auto.u-psud.fr pour des exercices interactifs sur les graphes (notamment sur l'algorithme de Dijkstra).

Solution de l'exercice type — **Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine**

1 Le graphe ci-dessous donne la liaison entre les différents secteurs de la grande surface.



Solution de l'exercice type

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Le degré de chaque sommet du graphe est donné par le tableau suivant :

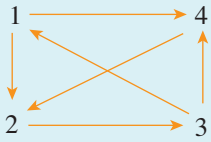
Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	3	4	4	3	2

Ce graphe est connexe, de plus il y a exactement 2 sommets de degré impair donc, d'après le théorème d'Euler, le graphe admet une chaîne eulérienne, ce qui veut dire qu'il existe une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Cela veut dire *qu'il est possible de parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois*. Par exemple le chemin : EDCBFDAECAB (E et B sont les deux sommets de degré impair).

Remarque : un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.

2 **(a)** Représentons les données par un graphe orienté à quatre sommets numérotés 1 à 4, le sommet i représentant la ville v_i, une arête orientée allant de i vers j s'il existe un vol de la ville v_i vers la ville v_j.

Le graphe est représenté ci-dessous :



(b) La question revient à montrer qu'il existe toujours un chemin de longueur inférieure ou égale à 3 (au plus deux escales, donc au plus trois étapes par vol) allant d'un sommet quelconque i à un sommet quelconque j $(i \neq j)$.

La matrice M associée au graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons les matrices M^2 et M^3 avec une calculatrice :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le coefficient α_{ij} de la matrice M donne le nombre de vols entre i et j en une étape (vol direct).

Solution de l'exercice type — Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Le coefficient α_{ij} de la matrice M^2 donne le nombre de vols entre i et j en deux étapes.

Le coefficient α_{ij} de la matrice M^3 donne le nombre de vols entre i et j en trois étapes.

Soit la matrice $S = M + M^2 + M^3$, $S = (s_{ij})$.

Le nombre de chemins allant du sommet i au sommet j de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire le nombre de vols recherchés de la ville i à la ville j est donné par s_{ij}.

Déterminons S :

$$S = M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, il existe 3 vols en 1, 2 ou 3 étapes reliant la ville v_3 à la ville v_2.

Il n'y a aucun 0 dans la matrice S, il existe donc toujours un vol de v_i vers v_j comportant au plus deux escales.

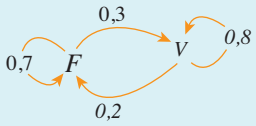
3 **(a)** On définit un graphe $\mathcal{G}$ à deux états (sommets) : F (horaires fixes) et V (horaires variables).

Une arête de $\mathcal{G}$ représente une transition entre deux états d'un trimestre à l'autre.

Sachant que les employés ayant des horaires fixes un trimestre conserve cet état le trimestre suivant sept fois sur dix, la boucle $F \to F$ est pondérée par 0,7.

De même, l'arête $V \to F$ est pondérée par 0,2 car les employés ayant des horaires variables un trimestre change d'état le trimestre suivant une fois sur cinq.

On obtient le graphe probabiliste ci-dessous :



(b) Les sommets F et V étant nommés dans cet ordre (comme pour E_0), la matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

L'état probabiliste deux trimestres après le début de l'expérience est $E_2 = E_0 \times M^2$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

COURS

Solution de l'exercice type — Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

On trouve $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $E_2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, soit $E_2 = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

(c) Le graphe probabiliste est d'ordre 2 et sa matrice ne comporte pas de 0, l'état E_k à l'étape k, converge vers un état E indépendant de l'état initial E_0, de plus $E = E \times M$.

Soit $E = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec x et y réels positifs et $x + y = 1$.

$$E = E \times M \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7x + 0{,}2y & 0{,}3x + 0{,}8y \end{pmatrix}$$

Il faut les deux réels x et y positifs tels que $E = E \times M$ et $x + y = 1$.

On aboutit aux systèmes suivants :

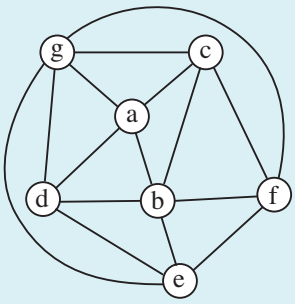
$$\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}2y = x \\ 0{,}3x + 0{,}8y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}3x + 0{,}2y = 0 \\ 0{,}3x - 0{,}2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}3x = 0{,}2y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On obtient finalement $x = 0{,}6$ et $y = 0{,}4$.

L'état probabiliste stable E du graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, après un très grand nombre de trimestres, 60 % du personnel sera favorable aux horaires variables et seulement 40 % aux horaires fixes.

4 **(a)** Voici le graphe complété par ses arêtes :



Solution de l'exercice type (suite) — Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

(b)

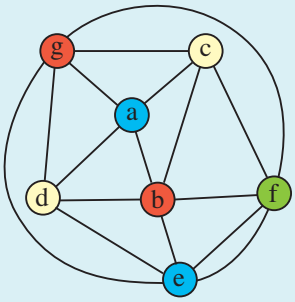
Sommet	b	g	a	c	d	e	f
Degré	5	5	4	4	4	4	4

On choisit par exemple la couleur rouge, qu'on affecte à b, puis à g qui n'est pas adjacent. Tous les autres sommets sont adjacents à b, donc on prend une autre couleur, par exemple bleu, et on l'affecte au sommet suivant de la liste, donc a, ainsi que e qui ne lui est pas adjacent. Les sommets restants sont adjacents à a ou à e, ou déjà coloriés.

On choisit donc une troisième couleur, jaune, et on l'affecte à c et à d. Tous les autres sommets sont soit coloriés, soit adjacents à c ou à d.

Il nous faut donc une quatrième couleur, par exemple vert, pour colorier f.

graphe G



Donc il faudra faire une première culture sur b et g, une deuxième sur a et e, une troisième sur c et d, et une dernière sur f.

Voir énoncé page 317

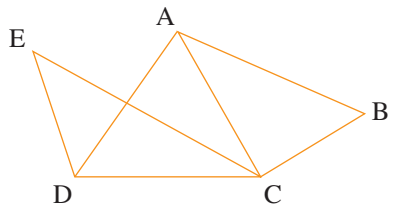
INTERROS

1 V/F Graphe non orienté

5 min Corrigé p. 341

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous a pour sommets les points A,B,C,D et E.



1. Le graphe $\mathcal{G}$ est d'ordre 5.
2. Le diamètre de $\mathcal{G}$ est 3.
3. $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne issue de D.
4. $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien.
5. La chaîne BCADCED est eulérienne.

2 V/F Matrice d'un graphe non orienté

5 min Corrigé p. 341

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

Les matrices M et M^3 ci-dessous sont telles que M soit la matrice associée à un graphe $\mathcal{G}$ non orienté de sommets A,B,C,D et E dans cet ordre :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

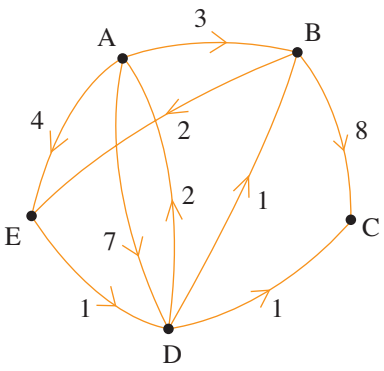
1. Le graphe $\mathcal{G}$ a 12 arêtes.
2. Il y a 6 chaînes de longueur 3 reliant A à D.
3. Il n'y a pas de cycle de longueur 3.
4. Il est toujours possible de joindre deux points quelconques par une chaîne de longueur 3.
5. Il y a 16 chaînes de longueur 3 d'origine B.

3 V/F Graphe orienté

5 min Corrigé p. 342

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

Le graphe $\mathcal{G}$ suivant a pour sommets les points A,B,C,D et E.



1. La matrice associée à $\mathcal{G}$ est symétrique.
2. Il existe 2 chemins de longueur 3 reliant A à C.
3. Le chemin ADBC a pour poids 16.
4. Il n'existe pas de cycle de longueur 4 issu de A.
5. Le chemin de poids minimum reliant A à C a pour poids 7.

4 V/F Graphe probabiliste

5 min Corrigé p. 343

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

A et B sont deux événements complémentaires d'un univers (c'est-à-dire $B = \bar{A}$). Soit n un entier naturel.

- a_n est la probabilité que l'événement A soit réalisé à l'étape n ;
- b_n est la probabilité que l'événement B soit réalisé à l'étape n.

La matrice $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste à l'étape n.

On a $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition de l'étape n à l'étape $n+1$.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}26 \\ 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ représente l'état stable associé à l'évolution.

1. Si A est réalisé à l'étape n, la probabilité que B soit réalisé à l'étape $n+1$ est égale à 0,5.

2 Si B est réalisé à l'étape n, la probabilité que A soit réalisé à l'étape $n+1$ est égale à 0,2.

3 $b_2 = 0{,}35$.

4 $x = 0{,}8x + 0{,}5y$.

5 À long terme, la probabilité que A soit réalisé est $\frac{5}{7}$.

5 V/F Vocabulaire

10 min Corrigé p. 344

On donne la matrice A d'un graphe $\mathcal{G}$ de sommets A, B, C, D et E, utilisés dans l'ordre alphabétique dans la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant uniquement la matrice, répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes en justifiant :

1 L'ordre du graphe est 5.

2 Le graphe $\mathcal{G}$ est non orienté.

3 Le graphe $\mathcal{G}$ comporte 12 arêtes.

4 Le sommet D est de degré 3.

5 Le graphe $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne.

6 Le graphe $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien.

7 Il y a 8 chemins de longueur 3 partant de B et arrivant à D.

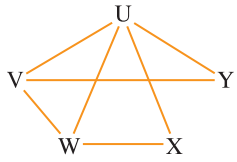
Graphes non orientés

6 Propriétés ★

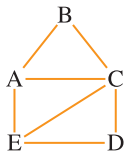
20 min Corrigé p. 344

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 Les graphes ci-dessous sont-ils susceptibles de décrire la même situation ?



Graphe $\mathcal{G}_1$



Graphe $\mathcal{G}_2$

2 Le graphe $\mathcal{G}_2$ ci-dessus représente les rues d'un quartier d'une ville et les carrefours qui sont à leur intersection.

(a) Comment sont représentés les rues et les carrefours dans $\mathcal{G}_2$?

(b) Calculer le degré de chaque sommet de $\mathcal{G}_2$.

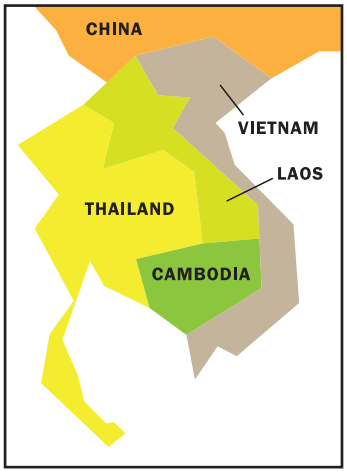
(c) Montrer qu'il existe un parcours dans la ville empruntant une fois et une seule chaque rue. Donner un tel parcours.

7 Cycle eulérien et chaîne eulérienne

★ — 15 min — Corrigé p. 346

Lycée Galilée, Gennevilliers

Un voyageur veut visiter les cinq pays d'Asie indiqués sur le schéma ci-dessous.



1 S'il arrive et repart de Bangkok, peut-il visiter les cinq pays :

(a) sans passer deux fois par une même frontière ?

(b) en traversant exactement une fois toutes les frontières ?

2 Reprendre la question 1 en rajoutant une frontière maritime entre la Thaïlande et la Chine (traversée par bateau).

3 Si le voyageur peut arriver dans un pays et repartir de n'importe quel autre, peut-il visiter les cinq pays, en passant une seule fois par toutes les frontières, et sans prendre le bateau ?

Sachant que les demandes de visas pour le Laos et le Vietnam doivent préciser le nombre d'entrées dans le pays, que devra-t-il demander ?

8 Transports interplanétaires

★★ — 25 min — Corrigé p. 347

Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

Nous sommes en 2951. Il existe un transport interplanétaire entre les planètes du système solaire que l'Homme a fini de coloniser depuis un siècle. Des nefs spatiales assurent les liaisons régulières suivantes :

Terre-Mercure ; Pluton-Vénus ; Terre-Pluton ; Pluton-Mercure ; Mercure-Vénus ; Uranus-Neptune ; Neptune-Saturne ; Saturne-Jupiter ; Jupiter-Mars ; Mars-Uranus.

1 Construire un graphe (non orienté car les liaisons existent dans les deux sens) représentant ces liaisons. Chaque sommet sera nommé à l'aide des deux premières lettres de la planète considérée.

2 Rappeler la définition d'un graphe connexe. Ce graphe est-il connexe ? Peut-on aller de la Terre vers Mars ?

3 La SITS (Société Interplanétaire des Transports Spatiaux) décide de réorganiser ses liaisons. Une liaison Pluton-Uranus est ajoutée, tandis que la ligne Mars-Uranus est abandonnée, faute d'une rentabilité suffisante. Par ailleurs une liaison Mars- Mercure est ajoutée.

Construire le nouveau graphe après cette réorganisation.

4 Ce graphe est-il connexe ? Peut-on désormais aller de la terre vers Mars ? Donner dans ce cas le chemin comportant le moins d'escales.

5 Préciser les degrés de tous les sommets et le nombre d'arêtes. Vérifier le théorème liant ces deux notions.

6 Existe-t-il un cycle eulérien qui permet d'effectuer le tour des planètes du système solaire à partir de la Terre ? Si oui, donner un tel cycle.

7 Les sommets du second graphe sont numérotés comme suit :

1 : Terre ; 2 : Mercure ; 3 : Mars ; 4 : Vénus ; 5 : Pluton ; 6 : Uranus ; 7 : Jupiter ; 8 : Neptune ; 9 : Saturne.

Donner la matrice M associée à ce second graphe. Calculer M^2. Que signifie l'élément a_{25} de M^2 ? Donner les chaînes correspondantes.

9 Raisonnement combinatoire

★★ 30 min Corrigé p. 348

Lycée Marie-Curie, Sceaux

On doit former des couples d'équipiers (pilote et copilote) pour un rallye automobile de plusieurs jours.

Pilote	Nation
Paul	UK
Brian	US
John	A
Marlène	F
Charles	UK
Olfa	B

Copilotes	Nation
Thomas	F
Karim	Ma
Victor	Ca
Eva	US
Alain	B
Fiona	Ca

Les nationalités sont : Australie (A), Canada (Ca), France (F), Grande Bretagne (UK), États Unis (US), Maroc (Ma) et Belgique (B). Les marocains, les belges et les français sont uniquement francophones. Les canadiens sont anglophones et francophones, et les autres ne parlent qu'anglais.

1 On veut que les équipiers aient une langue commune. Proposer une composition possible des équipes.

Quel nombre maximum d'équipes peut-on former ?

De combien de façons différentes peut-on former les équipes ?

2 On décide de former les équipes indépendamment du critère des langues. De combien de façons différentes peut-on les sélectionner ?

Indications : Un graphe bien sûr, mais représenté par le tableau donnant pour chaque sommet la liste de ses sommets adjacents. Trouver une façon d'énumérer les choix possibles en raisonnant avec le tableau.

Graphes orientés

10 Construction d'un graphe orienté ★ 5 min Corrigé p. 351

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

Construire un graphe $\mathcal{G}$ défini par le tableau ci-dessous.

Sommet	A	B	C	D	E
Successeur	B, D	A, C, E	A	C	C

11 Nombre d'arêtes d'un graphe ★★ 20 min Corrigé p. 351

Lycée Hoche, Versailles

On note $\mathcal{K}_n$ le graphe simple non orienté complet à n sommets.

1 **(a)** Représenter les graphes simples non orientés complets $\mathcal{K}_5$ et $\mathcal{K}_6$.

(b) Montrer que le nombre d'arêtes de $\mathcal{K}_n$ est égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(c) Combien un graphe simple *orienté* complet possède-t-il d'arêtes ?

2 Applications :

(a) Un tournoi d'escrime réunit dans une salle d'armes 4 équipes durant un week-end. Chaque équipe rencontre une et une seule fois toutes les autres. Combien de matchs dispute chaque équipe ? Combien de matchs seront disputés au cours du week-end ?

(b) Les douze membres d'une famille fêtent Noël. Ils veulent tous chanter en duo, tous les couples possibles de chanteurs devant chanter une fois exactement. Combien y aura-t-il de duos ?

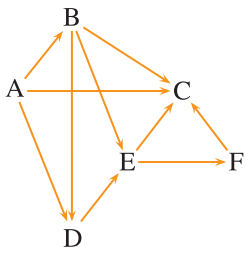
(c) Les douze membres de la famille précédente, au lieu de se faire des cadeaux à Noël, décident de jouer l'argent équivalent au loto (ils espèrent gagner le gros lot). Sachant que la dépense moyenne par cadeau est de 20 € et que chacun fait un cadeau à tous les autres, sauf lui-même, combien vont-ils jouer ?

12 Longueur de chemins

★ 20 min Corrigé p. 352

Lycée Saint-Rosaire, Sarcelles

On donne le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous qui représente un réseau routier. Soit M la matrice associée au graphe, les sommets étant numérotés par ordre alphabétique.



1 Avant d'écrire M explicitement, expliquer pourquoi M comporte :

- uniquement des 0 ou des 1 ;
- une ligne ne comportant que des zéros ;
- une colonne de zéros ;
- une colonne comportant 4 fois le nombre 1.

2 Écrire la matrice M.

3 Calculer M^2 et en déduire le nombre de chemins de longueur 2 allant de A à E.

4 Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 ? Existe-t-il des chemins de longueur supérieure ou égale à 6 ?

13 Recherche de chemins

★★ 30 min Corrigé p. 354

Lycée Galilée, Gennevilliers

Cet exercice est une variante de problèmes très connus (« les missionnaires et les cannibales », « le loup, la chèvre et le chou ») qui sont utilisés pour tester des algorithmes d'exploration dans les graphes.

Les porte-parole de quatre partis politiques, les partis Bleu, Jaune, Rouge et Vert, doivent se rendre du Sénat à l'Élysée. Il y a des divergences d'opinion très fortes, si bien qu'on ne peut absolument pas laisser en tête à tête les couples de personnes suivants :

- le représentant Vert et le représentant Bleu ;
- le représentant Jaune et le représentant Rouge ;

On met une voiture sans chauffeur à leur disposition. La voiture ne peut prendre que deux passagers à la fois ; il faut prévoir plusieurs allers et retours pour les transporter tous. Comment organiser les voyages successifs en ne laissant jamais en tête à tête deux personnes qui ne s'entendent pas ?

Indications : Définir un graphe orienté dont les sommets représentent les groupes de personnes pouvant se trouver ensemble au Sénat à un moment donné, et dont les successeurs d'un sommet sont les groupes possibles après un voyage. Représenter le tableau des successeurs par sommet du graphe. Trouver un chemin reliant le sommet de départ au sommet arrivée.

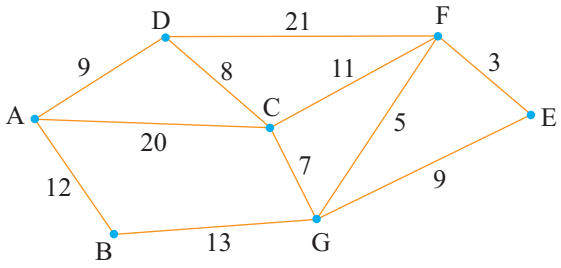
Recherche de la plus courte chaîne

14 Distance minimale

★ — 20 min — Corrigé p. 355

Lycée Virlogeux, Riom

Le technicien d'une coopérative agricole prépare sa tournée. Sur le graphe ci-dessous, les lettres représentent les exploitations agricoles des membres de la coopérative, les arêtes représentent les routes, pondérées par la distance à parcourir (en kilomètres).



Il lui faut absolument commencer par l'exploitation A et terminer par l'exploitation E. Par quelles autres exploitations peut-il passer tout en réalisant le trajet le plus court ? Quelle est alors la distance parcourue ?

15 Recherche de durée minimale

★★ — 20 min — Corrigé p. 356

Lycée Flora Tristan, Noisy-le-Grand

Le Kougelhof est un délice mais un casse-tête à préparer. Il faut :

- Préparer d'abord le levain et laisser fermenter 30 minutes.
- Tremper les raisins secs dans de l'eau additionnée de rhum au moins 15 minutes.
- Mélanger farine, œufs, beurre et sucre et pétrir la pâte pendant 15 minutes.
- Incorporer le levain à la pâte et la faire lever pendant 3 heures (première « poussée »).
- Rompre la pâte pour y incorporer les raisins secs. Laisser pousser la pâte dans son moule pendant 2 heures.
- Enfourner pendant 1 heure.
- Laisser refroidir deux heures minimum.
- Entre temps, il faut préparer les asperges strasbourgeoises : les éplucher prend 15 minutes, les cuire 30 minutes, les laisser refroidir 2 heures.
- La cuisson du rôti prend une heure.
- L'ordre de cuisson est d'abord le kougelhof, puis les asperges, puis le rôti.

1 Représenter sous forme d'un graphe pondéré $\mathcal{G}$ les contraintes d'ordre entre ces tâches.

2 Quelle est la chaîne de poids maximal du graphe ? Quelle est la chaîne la plus longue ?

3 En regroupant des tâches pouvant être menées en parallèle, proposer une planification « optimale » des préparatifs du repas (minimisant la durée totale de préparation). À quelle heure au plus tard doit-on commencer les préparatifs si le repas est prévu à 20 h ?

16 Recherche de distance minimale

★★ — 25 min — Corrigé p. 358

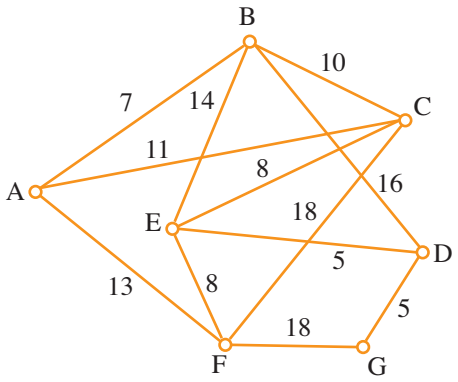
Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

Une grande ville a mis en place un système de locations de bicyclettes en libre service.

Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix.

La ville compte 7 stations nommées A, B, C, D , E , F et G.

Les stations sont reliées entre elles (ou pas) par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe suivant :



1 Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables.

(a) A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables ?

(b) À la fin de ce parcours, si cela est possible, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ?

2 On appelle M la matrice associée à ce graphe.

(a) Parmi les deux matrices ci-dessous, dire sans aucun calcul celle qui peut être la matrice M^3. Justifier la réponse.

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son trajet, il est passé par exactement deux autres stations. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Justifier.

3 Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement la station G en partant de la station A. À l'aide d'un algorithme, déterminer le parcours adéquat et donner le temps nécessaire pour l'effectuer.

Graphes probabilistes

17 Graphe probabiliste, état stable

★ 30 min Corrigé p. 358

Lycée Gaston Bachelard, Chelles

Une société de location de voitures à la semaine possède une agence à Lyon et une autre à Paris. A l'ouverture des deux agences, le parc automobile comprenait 300 voitures à Lyon et 500 à Paris. On a constaté qu'à la fin de chaque semaine, 70 % des voitures louées à Paris retournaient dans l'agence parisienne, les autres étant rendues à Lyon, et que 60 % des voitures louées à Lyon retournaient dans l'agence lyonnaise, les autres étant rendues à Paris.

On choisit une voiture au hasard dans le parc automobile.

On note l_n (resp. p_n) la probabilité que la voiture soit rendue à Lyon (resp. à Paris) à la fin de la n-ième semaine.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste $\mathcal{G}$, dont vous donnerez la matrice de transition M et l'état probabiliste initial E_0.
2. Calculer l'état probabiliste du graphe $\mathcal{G}$: au bout d'une semaine, au bout de 10 semaines.
3. Déterminer l'état stable du graphe $\mathcal{G}$.
4. Au bout d'un grand nombre de semaines, comment se répartira le parc automobile entre les deux agences ?

18 Graphe probabiliste, état stable

★★★ 45 min Corrigé p. 360

Lycée Jacques Monod, Clamart

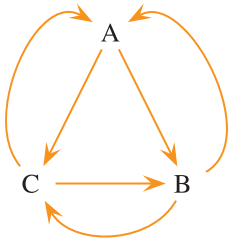
On s'intéresse au trafic aérien long courrier entre trois aéroports, notés A, B et C. Le graphe ci-dessous décrit les liaisons aériennes entre ces aéroports (les autres liaisons sont ignorées). Un vol durant plusieurs heures, un avion vole une fois par jour exactement.

On note a_n (resp. b_n, c_n) le nombre d'avions partis de A (resp. B, C) le jour donné n. La capacité totale des trois aéroports est constante, donc pour tout n, $a_n + b_n + c_n = 600$.

On définit E_n, l'état du trafic le jour n, par la matrice ligne : $E_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

On suppose comme trafic initial (au jour noté 0) :

$$E_0 = \begin{pmatrix} 200 & 200 & 200 \end{pmatrix}.$$



Partie A

Les fréquences de destinations au départ d'un aéroport sont données ci-dessous. Ainsi, 40 % des avions partant de A volent vers B et 60 % vers C.

	Vers A	Vers B	Vers C
De A	0	40 %	60 %
De B	40 %	0	60 %
De C	40 %	60 %	0

1. À l'aide des données précédentes, définir le graphe probabiliste $\mathcal{G}$ représentant le trafic aérien entre ces trois aéroports. Déterminer sa matrice de transition M (les sommets seront numérotés par ordre alphabétique).
2. Quel est l'état du trafic le jour suivant ? deux jours plus tard ?
3. Si E_n est l'état du trafic un jour donné n, montrer que l'état du trafic le jour suivant vérifie : $E_{n+1} = E_n \times M$. En déduire que l'état du trafic le jour n est défini par $E_n = E_0 \times M^n$.

4 À l'aide d'une calculatrice, calculer M^{10} puis M^{20} (arrondir les coefficients à 10^{-3} près) et les états du trafic E_{10} puis E_{20} (à un avion près). Conjecturer l'état du trafic à long terme.

5 Montrer par le calcul algébrique qu'il existe un unique état du trafic $E = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$E = E \times M \quad \text{et} \quad a + b + c = 600.$$

6 En admettant que la suite des états (E_n) converge vers l'état E défini précédemment, comment se répartira le trafic entre les trois aéroports à long terme ?

Partie B

On veut équilibrer à long terme le trafic entre les trois aéroports. On conçoit que cela doit se traduire par un état stable du trafic $E = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$E = E \times M \quad \text{et} \quad a = b = c = 200.$$

Comment modifier les probabilités du graphe probabiliste $\mathcal{G}$ précédent pour satisfaire cette condition d'équilibre ?

19 Exercice de synthèse

★★★ 30 min Corrigé p. 363

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

Chaque mois, un institut de sondage donne la cote de popularité d'une personnalité politique dans l'opinion publique.

Les personnes sondées sont soit favorables, soit défavorables à cette personnalité.

Initialement, il y a 80 % de personnes favorables à cette personnalité.

De chaque mois au suivant, on considère que :

- 30 % des personnes qui étaient favorables à cette personnalité ne le sont plus.
- 10 % des personnes qui n'étaient pas favorables à cette personne le deviennent.

On note, pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois soit favorable à cette personnalité.
- b_n la probabilité qu'une personne interrogée au bout de n mois ne soit pas favorable à cette personnalité.
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste au bout de n mois.

INTERROS

Partie A

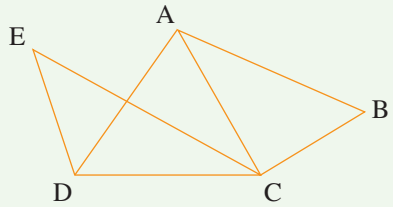
1. Déterminer la matrice P_0 donnant l'état probabiliste initial.
2. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à la situation.
3. **(a)** Déterminer la matrice de transition M.
   (b) Déterminer la matrice P_2.
4. Déterminer l'état stable et interpréter ce résultat.

Partie B

1. Montrer que $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}1$ pour tout entier naturel n.
2. On considère la suite w telle que $w_n = a_n - 0{,}25$ pour tout entier naturel n.
   (a) Démontrer que la suite w est géométrique.
   (b) En déduire que $a_n = 0{,}25 + 0{,}55 \times 0{,}6^n$ pour tout entier naturel n.
   (c) Calculer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.
   Comment interpréter cette limite ?
   (d) Déterminer après combien de mois la popularité de la personnalité sera inférieure à 25,1 %.

1 V/F Graphe non orienté

Enoncé p. 328



1 Vrai. L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe donc le graphe $\mathcal{G}$ est d'ordre 5.

2 Faux. Le diamètre d'un graphe est la plus grande des distances entre deux sommets quelconques du graphe.

On a : d(A,B)=1, d(A,C)=1, d(A,D)=1, d(A,E)=2, d(B,C)=1, d(B,D)=2, d(B,E)=2, d(C,D)=1, d(C,E)=1 et d(D,E)=1.

Le diamètre du graphe est donc 2.

3 Vrai. Déterminons le degré de chacun des sommets.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	3	2	4	3	2

Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe, il a exactement deux sommets A et D de degré impair, il admet donc une chaîne eulérienne d'origine l'un de ces deux sommets, donc $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne issue de D.

4 Faux. Le graphe $\mathcal{G}$ n'admet pas de cycle eulérien car il a des sommets de degré impair.

5 Faux. B n'est pas un des sommets de degré impair, la chaîne BCADCED n'est donc pas eulérienne.

Remarque : vous pouviez aussi compter le nombre d'arêtes de la chaîne BCADCED. Il y a 6 arêtes alors que le graphe admet 7 arêtes, le nombre d'arêtes étant égal à la moitié de la somme des degrés des sommets du graphe.

2 V/F Matrice d'un graphe non orienté

Enoncé p. 328

1 Faux. La matrice d'un graphe non orienté est symétrique ; le nombre de 1 est donc le double de celui des arêtes : le graphe comporte donc 6 arêtes.

2 Vrai. Le nombre situé à l'intersection de la 1re ligne et de la 4e colonne de la matrice M^3 indique le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à D soit 6 chaînes de longueur 3 reliant A à D.

3 Faux. Il y a par exemple 4 cycles de longueur 3 reliant A à A car le nombre 4 figure à l'intersection de la 1re ligne et de la 1re colonne.

4 Faux. Il y a un 0 dans la matrice M^3, il n'est donc pas toujours possible de joindre deux points quelconques par une chaîne de longueur 3.

Remarque : il n'y a pas de cycle de longueur 3 reliant E à E.

5 Vrai. Le nombre de chaînes de longueur 3 d'origine B est la somme des nombres situés sur la 2e ligne de la matrice M^3.
Il y a donc $6+2+5+2+1=16$ chaînes de longueur 3 d'origine B.

3 V/F Graphe orienté

Enoncé p. 329

1 Faux. La matrice associée au graphe $\mathcal{G}$ de sommets A, B, C, D et E dans cet ordre est :

Colonne B (extrémité)

1 chemin reliant A à B

$$M=\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

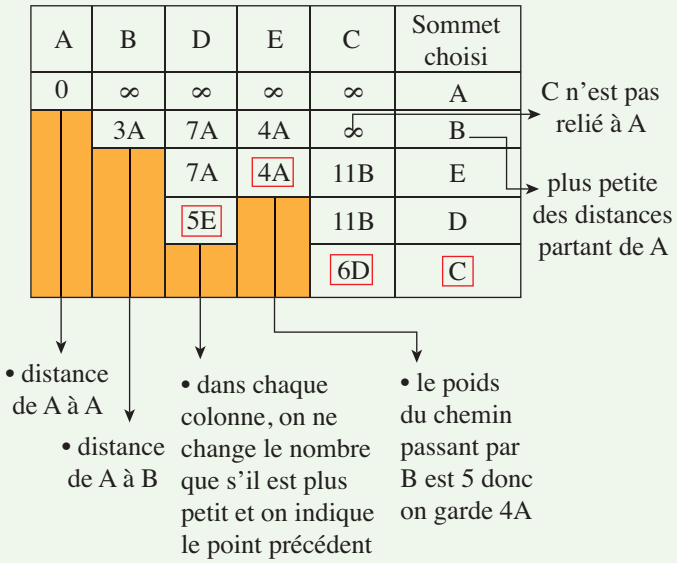
Ligne A (origine)

2 Vrai. On a $M^3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Il y a donc bien deux chemins de longueur 3 allant de A à C.

3 Vrai. Le chemin ADBC a pour poids $7+1+8=16$.

4 Faux. $M^4=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Il y a donc deux cycles de longueur 4 issus de A.

5 Faux. Pour déterminer le chemin de poids minimum reliant A à C, appliquons l'algorithme de Dijkstra (voir sur la page suivante).



Pour déterminer le chemin de poids minimum, on remonte le chemin C→D→E→A (les points entourés), le chemin de poids minimum a pour poids 6, c'est le chemin AEDC.

4 V/F Graphe probabiliste

Enoncé p. 329

1 Faux. Soit $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ la matrice de transition.

La 1re ligne donne la probabilité sachant A_n :

- 0,8 indique la probabilité de A_{n+1} sachant A_n.
- 0,2 indique la probabilité de B_{n+1} sachant A_n.

La 2e ligne donne la probabilité sachant B_n :

- 0,5 indique la probabilité de A_{n+1} sachant B_n.
- 0,5 indique la probabilité de B_{n+1} sachant B_n.

La probabilité que B soit réalisé à l'étape $n+1$ sachant que A est réalisé à l'étape n est donc égale à 0,2.

2 Faux. La probabilité que A soit réalisé à l'étape $n+1$ sachant que B est réalisé à l'étape n est égale à 0,5.

3 Faux. On a $P_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix} = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}26 \\ 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$ donc $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}26 \end{pmatrix}$ et $b_2 = 0{,}26$.

4 Vrai. La matrice P qui représente l'état stable associé à l'évolution est telle que $P = P \times M$.

$$P = P \times M \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8x + 0{,}5y & 0{,}2x + 0{,}5y \end{pmatrix}$$

D'où $x = 0{,}8x + 0{,}5y$.

5 Vrai. x et y sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 0{,}8x + 0{,}5y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}2x = 0{,}5y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2{,}5y \\ 2{,}5y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{7} \\ y = \dfrac{2}{7} \end{cases}$$

La matrice M ne comportant pas de 0, l'état probabiliste à l'étape n converge vers l'état stable P, cet état étant indépendant de l'état initial P_0.

Donc, à long terme, la probabilité que A soit réalisé est $\dfrac{5}{7}$.

5 V/F Vocabulaire

Enoncé p. 330

1 Vrai puisqu'il y a 5 sommets.

2 Vrai car la matrice est symétrique par rapport à la diagonale des coefficients a_{ii}.

3 Faux. Il comporte 6 arêtes (il faut diviser le nombre de 1 par deux).

4 Faux, il y a seulement deux 1 dans la ligne 4.

5 Vrai. Il y a deux sommets de degré impair, B et C, donc le graphe admet bien une chaîne eulérienne.

6 Faux. Il aurait fallu qu'il n'y ait pas de sommet de degré impair.

7 Faux. On calcule : $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Il y a 4 chemins de longueur 3 partant de B pour arriver à D.

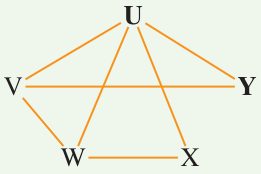
6 Propriétés

Enoncé p. 330

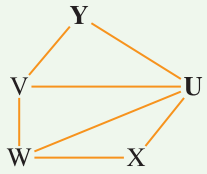
Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 Les graphes ont tous les deux : 7 arêtes, 1 sommet de degré 4, 2 sommets de degré 3 et 2 sommets de degré 2. Pour qu'ils représentent la même situation, ils faut apparier leurs ensembles de sommets et ensembles d'arêtes. Si on modifie les emplacements des sommets U et Y dans la

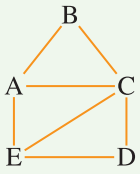
représentation de $\mathcal{G}_1$ (en échangeant les places) on obtient un nouveau dessin (dessin 2). Les dessins 1 et 2 donnent deux représentations différentes du graphe $\mathcal{G}_1$: dans les deux cas il y a le même ensemble de sommets et le même ensemble d'arêtes.



Graphe $\mathcal{G}_1$ (dessin 1)



Graphe $\mathcal{G}_1$ (dessin 2)



Graphe $\mathcal{G}_2$

Grâce au deuxième dessin, on voit que les graphes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont isomorphes, c'est-à-dire qu'on peut renommer leurs sommets de façon à les rendre identiques. Par exemple :

Numéro	1	2	3	4	5
Sommet de $\mathcal{G}_2$	A	B	C	D	E
Sommet de $\mathcal{G}_1$	V	Y	U	X	W

Avec cette numérotation, $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ ont la même matrice associée M :

	V	Y	U	X	W
V	0	1	1	0	1
Y	1	0	1	0	0
U	1	1	0	1	1
X	0	0	1	0	1
W	1	0	1	1	0

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	1	0	1	0	0
C	1	1	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	1	0	1	1	0

Remarques

- Si on ordonne les sommets de chaque graphe par ordre alphabétique, les matrices sont différentes.
- $\mathcal{G}_2$ est un graphe « planaire », c'est-à-dire qu'on peut le dessiner de sorte que deux arêtes ne se croisent pas.

2 **(a)** Une rue est représentée dans $\mathcal{G}_2$ par une arête et un carrefour par un sommet.

(b) Degré de chaque sommet de $\mathcal{G}_2$:

Sommet de $\mathcal{G}_2$	A	B	C	D	E
Degré	3	2	4	2	3

(c) Le parcours recherché correspond à une chaîne eulérienne dans le graphe $\mathcal{G}_2$. Or, $\mathcal{G}_2$ a exactement deux sommets de degré impair, donc, d'après le théorème d'Euler (théorème 3), il existe une solution. Une chaîne eulérienne a nécessairement pour extrémités les sommets de degré impair, ici A et E. Par exemple si l'on part de A, on a la chaîne eulérienne : (A,B,C,A,E,C,D,E).

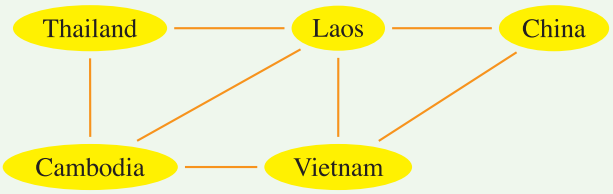
CORRIGÉS

7 Cycle eulérien et chaîne eulérienne

Enoncé p. 331

Lycée Galilée, Gennevilliers

Commençons par dessiner le graphe de voisinage entre pays : un sommet représente un pays ; deux sommets sont adjacents s'ils ont une frontière terrestre commune. Le graphe n'est pas orienté (les frontières se traversent dans les deux sens).



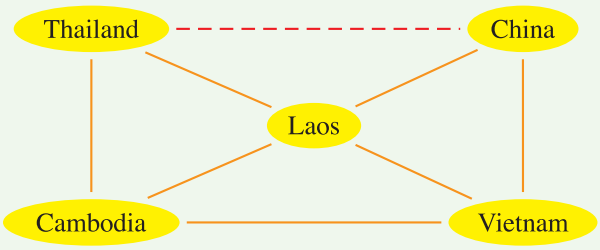
1 **(a)** Sachant que Bangkok est en Thailande, on cherche un cycle passant par tous les sommets - pays (on dit que c'est *un cycle hamiltonien*) et l'on obtient :

(Thailande, Cambodge, Vietnam, Chine, Laos, Thailande)

On ne passe pas deux fois par la même arête (frontière) donc ce cycle est une solution.

(b) La question posée est celle d'un cycle eulérien : on doit passer par toutes les arêtes (frontières) une fois et une seule. Or, on a deux sommets de degré impair (Cambodge et Vietnam de degré 3). D'après le théorème d'Euler (théorème 3), il n'existe donc aucun cycle eulérien.

2 On rajoute une arête dans le graphe précédent :



(a) La première réponse est-elle modifiée ? Non, car on n'a pas changé les sommets, donc le cycle donné à la question 1.a est toujours solution.

(b) Le degré des sommets a changé puisqu'on a une nouvelle arête. Malheureusement, on a 4 sommets de degré impair. Il n'y a toujours pas de cycle eulérien.

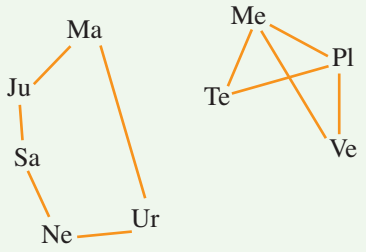
3 Il s'agit de trouver une chaîne eulérienne (points de départ et d'arrivée différents). Il y a exactement deux sommets de degré impair, donc on sait qu'il en existe une d'après le théorème d'Euler, et que ses extrémités sont nécessairement les sommets de degré impair. On trouve par exemple :
(Cambodge, Thailande, Laos, Cambodge, Vietnam, Chine, Laos, Vietnam).
Cela fait deux entrées au Laos et deux entrées au Vietnam.

8 Transports interplanétaires

Enoncé p. 331

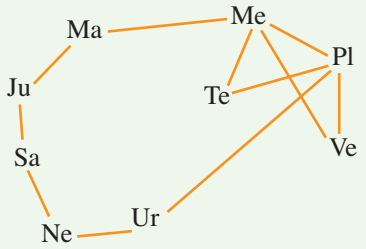
Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

1 Un graphe possible est :



2 Un graphe est connexe s'il existe toujours une chaîne entre deux sommets distincts.
Or, il est évident que ce graphe est composé de deux sous graphes disjoints. Donc, entre autre, on ne peut aller de la Terre à Mars.

3 Le nouveau graphe est :



4 Cette fois-ci le graphe est connexe.
Pour trouver le chemin le plus court, on étudie les différentes possibilités pour aller de la Terre à Mars : on ne peut pas y aller sans étape intermédiaire car il n'y a pas de liaison entre la Terre et Mars. En revanche, en passant par Mercure, on a rejoint Mars depuis la Terre en seulement deux trajets. Donc le chemin le plus court est Terre-Mercure-Mars.

5

Planète	Te	Me	Ma	Ve	Pl	Ur	Ju	Ne	Sa
Degré	2	4	2	2	4	2	2	2	2

Il y a 11 arêtes, et la somme des degrés est 22, donc ceci correspond bien au théorème 1.

6 D'après les degrés donnés par le tableau de la question 5, il n'y a pas de sommet de degré impair, donc d'après le théorème 3, il existe un cycle eulérien.

Pour trouver un tel cycle, on utilise l'algorithme d'Euler :

On peut commencer par exemple par le cycle : Te – Me – Pl – Te.

Puis en partant de Mercure, on peut créer le cycle :

Me – Ma – Ju – Sa – Ne – Ur – Pl – Ve – Me,

ce qui donne finalement :

Te – Me – Ma – Ju – Sa – Ne – Ur – Pl – Ve – Me – Pl – Te.

7 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$a_{25} = 2$ signifie qu'il y a deux chaînes de longueur 2 pour se rendre de Mercure à Pluton. Ces deux chaînes sont Mercure – Terre – Pluton et Mercure –Vénus – Pluton.

9 Raisonnement combinatoire

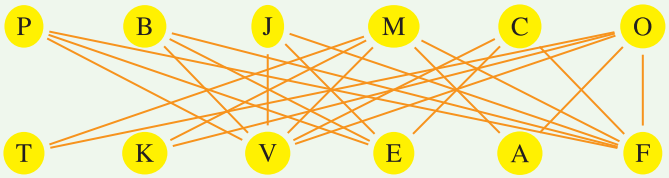
Enoncé p. 332

Lycée Marie-Curie, Sceaux

Cet exercice donne des exemples de raisonnement « combinatoire ». Il s'agit de dénombrer des choix possibles, en trouvant une stratégie pour les compter car les choix sont trop nombreux pour être énumérés explicitement.

L'exercice montre aussi que dessiner un graphe n'est pas toujours la panacée, et qu'il faut savoir exploiter d'autres modes de représentation d'un graphe, en l'occurence le tableau des sommets adjacents par sommet.

1 On trace un graphe « bipartite » : d'un côté les sommets représentant les pilotes, de l'autre les sommets représentant les copilotes ; une arête va d'un sommet pilote à un sommet copilote s'ils ont une langue commune. En théorie des graphes, le problème posé ici est de trouver un *couplage maximal des sommets* (trouver un ensemble d'arêtes dont les extrémités recouvrent un nombre maximum de sommets).



Ce graphe est plutôt embrouillé. Représentons les possibilités de faire équipe sous forme de tableau.

Pilotes	Copilotes
Paul	Victor, Eva, Fiona
Brian	Victor, Eva, Fiona
John	Victor, Eva, Fiona
Marlène	Thomas, Karim , Victor , Alain, Fiona
Charles	Victor, Eva, Fiona
Olfa	Thomas, Karim , Victor , Alain, Fiona

Procédons par ordre :

- on affecte Paul à un copilote, par exemple Victor, puis on raye Victor partout dans la colonne des copilotes ;
- on affecte Brian à Eva et on raye Eva ;
- on affecte alors John nécessairement à Fiona, puis Marlène à Thomas ;
- pour Charles, plus aucun copilote anglophone n'est libre.

On obtient ainsi cinq équipes avec deux équipiers non affectés :

(Paul, Victor), (Brian, Eva), (John, Fiona), (Marlène, Thomas), (Olfa , Karim).

Aurait-on pu former davantage d'équipes ?

En parcourant différemment les sommets pilotes et en modifiant les choix des copilotes, on constate que non. En commençant par les pilotes de degré 5 on obtient par exemple :

(Marlène , Victor), (Olfa , Fiona) et (Paul , Eva)

et il restera trois pilotes sans équipier. Intuitivement, on conçoit que pour trouver un maximum d'équipes, on a intérêt à affecter en premier les pilotes les moins sociables (c'est-à-dire de degré le plus petit).

Remarque : l'algorithme présenté ici permet de trouver un couplage maximal des sommets si l'on examine les sommets par ordre de degré croissant. (Graphes, Claude Berge, Dunod 1970).

Dénombrons toutes les affectations possibles :

Il n'y que trois copilotes anglophones pour quatre pilotes anglophones donc un pilote ne pourra pas courir et il y a quatre façons de le choisir. Supposons qu'il s'agisse de Charles :

- Paul a alors le choix entre trois copilotes ;
- Brian a ensuite le choix entre deux copilotes (l'un n'étant plus libre car affecté à Paul) ;
- Le troisième pilote John n'a plus qu'un seul choix.

Le pilote exclu étant choisi, il y a donc $(3 \times 2 \times 1) = 6$ choix pour les équipes anglophones. Or il y quatre choix possibles pour exclure un pilote anglophone, il y a donc en tout $4 \times 6 = 24$ façons de former les trois équipes anglophones.

Pour les équipes francophones, les deux pilotes francophones choisissent parmi trois copilotes : on a $3 \times 2 = 6$ choix d'équipes différentes.

Les choix des équipes anglophones et francophones se multiplient (car ils sont indépendants) : on obtient 144 façons possibles de former les cinq équipes.

2 Tous les liens entre pilotes et copilotes sont maintenant autorisés. Le graphe a donc $6 \times 6 = 36$ arêtes. On dénombre les choix comme précédemment :

- Paul a le choix entre les six copilotes : il en choisit un, il en reste cinq libres ;
- Brian a le choix entre les 5 copilotes libres ; il en choisit un, il en reste quatre libres ;
- John a donc le choix entre 4 copilotes, puis Marlène entre 3, etc.

Au final, on voit qu'on peut toujours former six équipes, et qu'on a :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

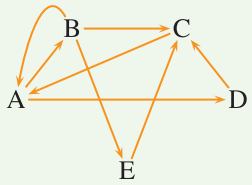
façons différentes de le faire (ce nombre s'appelle « factorielle » 6, noté 6!).

10 Construction d'un graphe orienté

Enoncé p. 333

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

Le tableau de successeurs suggère un graphe orienté. On répartit les cinq sommets en cercle, et on trace les arêtes orientées selon les indications du tableau.

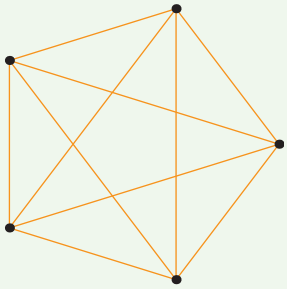


11 Nombre d'arêtes d'un graphe

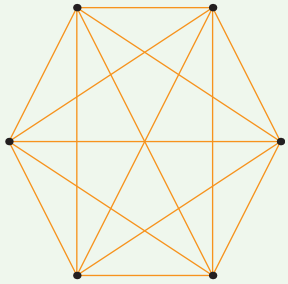
Enoncé p. 333

Lycée Hoche, Versailles

1 **(a)**



$\mathcal{K}_5$



$\mathcal{K}_6$

(b) *Première démonstration* : numérotons les sommets de 1 à n. Toute paire de sommets $\{i, j\}$ avec $i \neq j$ détermine une arête. Pour faciliter le dénombrement, on convient de la représenter par une paire (i, j) avec $i < j$. Il suffit de compter le nombre de ces couples :

Valeur de j	Nombre de couples (i, j) avec $i < j$
2	1
3	2
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$n-2$
n	$n-1$
Nombre d'arêtes	$= 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$
	$= \dfrac{n(n-1)}{2}$

Deuxième démonstration : tout sommet de $\mathcal{K}_n$ est de degré $(n-1)$, donc la somme des degrés vaut $n(n-1)$.

Cette somme est le double du nombre d'arêtes, donc le nombre d'arêtes vaut : $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(c) Si l'on considère maintenant un graphe $\mathcal{K}'_n$ *orienté* simple complet d'ordre n : pour chaque couple de sommets distincts (i, j) il y a deux arêtes (l'une de i vers j et l'autre de j vers i). Il n'y a pas de boucle. Autrement dit le graphe $\mathcal{K}'_n$ s'obtient en dédoublant toutes les arêtes de $\mathcal{K}_n$. Il possède donc :

$$\frac{2 \times n(n-1)}{2} = n(n-1) \text{ arêtes.}$$

2 Applications :

(a) Supposons qu'on ait donné un numéro à chaque équipe (de 1 à 4). Le graphe des rencontres est $\mathcal{K}_4$: un sommet représente une équipe et une arête (non orientée) entre les sommets i et j $(i \neq j)$ représente le match entre les équipes i et j. Le degré de chaque sommet donne le nombre de matchs par équipe : c'est 3. Le nombre d'arêtes donne le nombre de matchs :

$$\frac{4(4-1)}{2} = 6.$$

(b) On associe à chaque membre de la famille un numéro et on le représente par un sommet. On représente un duo par une arête (non orientée) reliant le membre i et le membre j. Le graphe des duos est donc $\mathcal{K}_{12}$ et le nombre de duos est le nombre d'arêtes de $\mathcal{K}_{12}$, soit :

$$\frac{12 \times 11}{2} = 66.$$

(c) Les échanges de cadeaux sont asymétriques (contrairement aux duos) donc se représentent par un graphe orienté. Une arête de i vers j représente le cadeau de i à j et l'arête orientée dans l'autre sens représente le cadeau de j à i. On obtient donc un graphe simple (personne ne se fait de cadeau) orienté complet d'ordre 12 : il y a $12 \times 11 = 132$ arêtes. La famille jouera :

$$20 \times 132 = 2\,640 \text{ €}.$$

12 Longueur de chemins

Enoncé p. 334

Lycée Saint-Rosaire, Sarcelles

1 M ne comporte que des 0 et des 1 car il y a au plus une arête allant d'un sommet i donné à un autre j.

Le sommet C de numéro 3 n'est l'origine d'aucune arête (aucune arête ne sort de C) donc la troisième ligne de M ne comportera que des 0.

Mais C est l'extrémité de quatre arêtes (d'origine A, B, D et E respectivement) donc la troisième colonne comporte quatre 1.

Aucune arête n'arrive en A donc la première colonne ne comporte que des zéros.

2 On en déduit l'écriture de la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Le nombre de chemins de longueur 2 allant du sommet A au sommet E est donné par le coefficient d'indices (1,5) de la matrice M^2.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a deux solutions, qu'on peut ici lister : (A,B,E) et (A,D,E).

4 On calcule M^4 (à la calculatrice).

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient $M^4_{i,j}$ donne le nombre de chemins de longueur 4 allant du sommet de numéro i au sommet de numéro j. La somme de tous ces coefficients donne le nombre total de chemins de longueur 4 dans le graphe.

Il en existe cinq : trois chemins allant de A à C, un chemin de A à F et un chemin de B à C.

On calcule maintenant M^6 et on constate que tous les coefficients de la matrice sont nuls. Il n'y a donc aucun chemin de longueur 6 dans le graphe. Par suite, il n'y a aucun chemin de longueur supérieure strictement à 6 (puisqu'un chemin de longueur n où $n > 6$ contient nécessairement un sous-chemin de longueur 6).

CORRIGÉS

13 Recherche de chemins

Enoncé p. 334

Lycée Galilée, Gennevilliers

Nommons B, V, J et R les représentants des partis politiques Bleu, Vert, Jaune et Rouge respectivement.

Un sous-groupe de personnes restant à un moment donné au Sénat est un mot d'au plus quatre lettres parmi (B,J,V,R), rangées par ordre alphabétique. Les états impossibles sont JR et BV. L'état initial est BJVR (tous les quatre sont au Sénat). L'état final recherché est $\varnothing$ (plus personne au Sénat). Le problème revient à *chercher un chemin dans le graphe des états menant de l'état initial BJVR à l'état final* $\varnothing$.

Les sommets du graphes sont tous les états possibles au Sénat, c'est-à-dire tous les mots sauf JR et BV. Expliquons sur quelques exemples comment déterminer les successeurs possibles d'un état.

BJVR a comme états successeurs possibles : RV, BR, VJ, BJ, puisque deux personnes partent nécessairement en voiture et deux autres restent au Sénat.

RV a comme successeurs : BRV, JRV, BJRV, ou $\varnothing$. En effet, si V et R sont encore au sénat et la voiture à l'Élysée, la voiture doit revenir pour en chercher un : elle peut revenir avec une personne ou deux ; dans le dernier cas on revient à l'état initial. Si la voiture est au Sénat, alors les deux partent et c'est terminé. Cette transition n'est possible que si c'est la $(2n+1)^{\text{e}}$ car il faut un nombre impair d'allers et retours.

L'état BRV a comme successeurs B ou V (si deux partent) ou BR ou RV (si un seul part, sachant que B et V ne peuvent rester ensemble).

Enfin, V a pour successeurs : RV, JV, BRV, BJV (selon que la voiture revienne avec une ou deux personnes, et sachant que B ne peut revenir chercher V). L'état final n'est pas accessible, car quand une personne reste seule au Sénat, c'est que d'autres personnes ont été transportées juste avant ; la voiture est à l'Elysée.

On obtient le tableau de successeurs suivant :

Sommet	Sommets successeurs
BJRV	RV, BR, JV , BJ
JVR	R , V , JV , RV
BRV	B, V , BR , RV
BJR	R , J , BR , BJ
BJV	B , V , JV , BJ
RV	BRV , JRV , $\varnothing$
BR	BRV , BJR , $\varnothing$

Sommet	Sommets successeurs
JV	BJV , JRV ,$\varnothing$
BJ	BJV , BJR ,$\varnothing$
B	BJ ,BR , BJV , BRV
J	BJ , JR , BJR , JRV
R	BR , RV , BJR , JRV
V	JV , RV , BRV, BJV

On cherche un chemin de *longueur impaire* car il doit traduire les aller et retour de la voiture.

Une solution est par exemple :

(0)	Au sénat	A l'Élysée
(1)	BJRV	∅
(2)	RV	JB
(3)	BRV	J
(4)	V	BRJ
(5)	JV	BR
(6)	∅	BJRV

Remarque : il n'est pas nécessaire de dessiner le graphe (qui est assez compliqué), car on peut déterminer un chemin en « suivant les liens » dans le tableau.

14 Distance minimale

Enoncé p. 335

Lycée Virlogeux, Riom

On peut utiliser l'algorithme de Dijkstra.

Voici une façon de le présenter :

Étape	Tâches à effectuer
1	• Placer tous les sommets du graphe dans la 1re ligne d'un tableau. • Sur la 2e ligne du tableau, écrire le poids 0 sous le point de départ A et le poids ∞ sous les autres sommets.
2	• Repérer le sommet X de poids minimal. Commencer une nouvelle ligne et rayer toutes les cases vides sous X.
3	• Pour chaque sommet Y adjacent à X, calculer la somme p du poids de X et du poids de l'arête reliant X à Y. On ne passe jamais deux fois sur une arête. • Si p est strictement inférieur au poids de Y, inscrire p et X dans case correspondante de la colonne « Y » ; • Sinon, inscrire le poids de Y. • Pour les sommets non adjacents à X, compléter la ligne par les poids de la ligne précédente.
4	• S'il reste des sommets non sélectionnés, retourner à l'étape 2 • Sinon, passer à l'étape 5.
5	• La longueur minimale est le nombre lu sur la dernière ligne. On retrouve le chemin en ordre inverse en remontant les lettres écrites dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	Sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	12 A	20 A	9 A	∞	∞	∞	D
	12 A	17 D		∞	30 D	∞	B
		17 D		∞	30 D	25 B	C
				∞	28 C	24 C	G
				33 G	28 C		F
				31 F			E

On en conclut que la distance minimale est 31 kilomètres.

Le parcours est le suivant : A-D-C-F-E.

15 Recherche de durée minimale

Enoncé p. 335

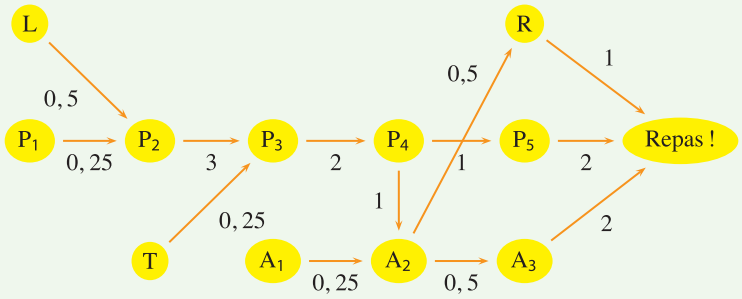
Lycée Flora Tristan, Noisy-le-Grand

1 On définit ici le graphe dérivant l'ordre des tâches. On établit une arête orienté $A \longrightarrow B$ si la tâche A doit se dérouler *en totalité avant* la tâche B.

Pour tenir compte des contraintes de durée de chaque tâche, on donne à l'arc $A \longrightarrow B$ un poids qui correspond à la durée minimale *en unités d'heure* s'écoulant entre le début de la tâche A et le début de la tâche B.

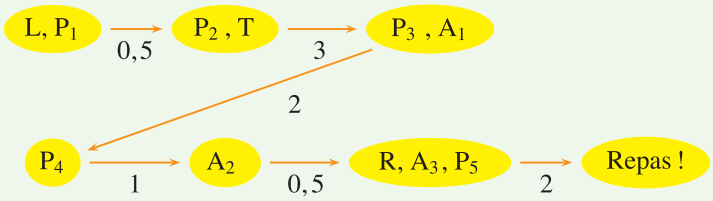
Par exemple, l'épluchage des asperges prend 15 minutes : l'arête $A_2 \longrightarrow A_3$ est pondérée par 0,25.

Asperges	A_1 : épluchage A_2 : cuisson A_3 : refroidissement
Pâte	P_1 : pétrissage P_2 : 1ère poussée P_3 : 2ème poussée P_4 : cuisson P_5 : refroidissement
Levain	L : fermentation
Raisins	T : Trempage
Rôti	R : cuisson



2 La chaîne de poids maximal est (L, P_2, P_3, P_4, P_5, Repas) ; elle est de poids 8,5. La chaîne la plus longue est (L, P_2, P_3, P_4, A_2, R, Repas) mais elle de poids inférieur (8). On en déduit que le temps de préparation minimum est *au moins de huit heures et demi*, car quelle que soit la planification des tâches il faudra réaliser la séquence de tâches correspondant à la chaîne de poids maximal.

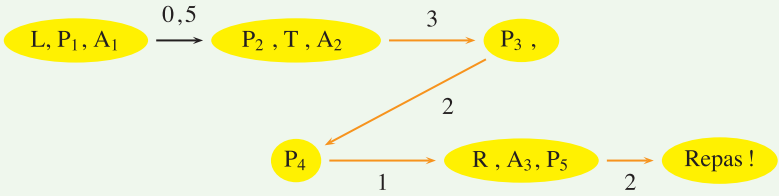
3 Chaque groupe de tâches doit être un sous graphe stable (sans arête) du graphe précédent. Un groupe G_1 précédera un autre G_2 à condition qu'il contienne une tâche T_1 de G_1 précédant une tâche T_2 de G_2, mais qu'aucune tâche T_2 de G_2 ne précède une tâche T_1 de G_1. La durée de réalisation d'un groupe est la durée maximale de ses tâches. La figure ci-dessous fournit une solution avec une durée totale minimale de 9 heures.



Est-ce optimal en terme de temps ? Pourrait-on préparer le repas en huit heures et demi ?

La chaîne (L, P_2, P_3, P_4, P_5, Repas) de poids maximal de la question 2. doit figurer dans la solution. La question est de savoir si l'on peut lui « greffer » les autres tâches, sans allonger la chaîne. Il se trouve que non, car les tâches A_2 et R doivent s'intercaler après P_4. On obtient nécessairement une solution équivalente en temps de préparation, à celle de la figure précédente (on peut cependant modifier certains groupes).

Remarque : si l'on accepte de cuire les asperges d'abord, on trouve un temps de préparation minimal de huit heures et demi.



La préparation doit donc commencer à 11 h 30.

CORRIGÉS

16 Recherche de distance minimale

Enoncé p. 336

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

1 **(a)**

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	4	4	3	4	4	2

D'après le théorème d'Euler, puisqu'il y a exactement deux sommets de degré impair, on peut réaliser une chaîne eulérienne ; donc Philippe peut parcourir chaque piste cyclable une fois et une seule.

(b) En revanche, d'après le même théorème, il ne peut revenir à son point de départ, puisque pour avoir un cycle eulérien, il faut qu'il n'y ait aucun sommet de degré impair.

2 **(a)** La bonne matrice ne peut être que N car il existe deux trajets (au moins) de longueur 3 permettant d'aller de G à E : G D B E et G F C E. Donc il ne peut y avoir un zéro pour le terme de ligne 7 et de colonne 5, ce qui est le cas dans T.

(b) Philippe a donc effectué un trajet de longueur 3 de F à E. La matrice M^3 nous précise qu'il y a 11 trajets possibles : il suffit de lire le terme de ligne 6 et de colonne 5.

3 Il nous faut trouver un trajet minimal ; on va donc utiliser l'algorithme de Dijkstra. On réalise le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Étape 1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Étape 2	X	7A	11A	∞	∞	13A	∞
Étape 3	X	X	11A	23B	21B	13A	∞
Étape 4	X	X	X	23B	19C	13A	∞
Étape 5	X	X	X	23B	19C	X	31F
Étape 6	X	X	X	23 B	X	X	31F
Étape 7	X	X	X	X	X	X	28D

D'après cet algorithme, et en remontant le tableau, le parcours de temps minimal entre A et G est A-B-D-G, et il est de durée 28 min.

17 Graphe probabiliste, état stable

Enoncé p. 337

Lycée Gaston Bachelard, Chelles

On modélise le problème par un graphe probabiliste à deux états : L (la voiture se trouve à Lyon) et P (la voiture se trouve à Paris).

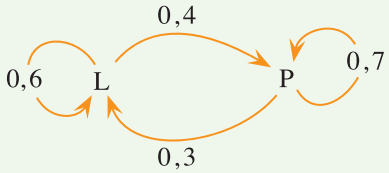
En notant L_n (resp. P_n) l'événement « la voiture se trouve à Lyon (resp. Paris) à la fin de n-ième semaine », l'énoncé donne les probabilités conditionnelles suivantes :

- $P_{P_n}(P_{n+1}) = 0{,}7$, ce que l'on traduit par une boucle sur P pondérée par 0,7 ;
- $P_{L_n}(L_{n+1}) = 0{,}6$: une boucle sur L pondérée par 0,6 ;

On en déduit :

- $P_{P_n}(L_{n+1}) = 0{,}3$: une arête de P vers L pondérée par 0,3 ;
- et $P_{L_n}(P_{n+1}) = 0{,}4$: une arête de L vers P pondérée par 0,4.

1 Les sommets étant listés par ordre alphabétique, on obtient le graphe $\mathcal{G}$ et sa matrice de transition M suivants :



$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

La voiture étant choisie au hasard, on ne sait pas si elle se trouve à Lyon ou à Paris. Mais on connaît la loi de probabilité de son lieu initial.

$$l_0 = p(L_0) = \frac{300}{800} = \frac{3}{8} \quad ; \quad p_0 = p(P_0) = \frac{500}{800} = \frac{5}{8}.$$

L'état initial du graphe est représenté par la matrice ligne E_0 :

$$E_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

2 L'état du graphe E_1 après une transition est défini par : $E_1 = E_0 \times M$.
L'état du graphe E_{10} après dix transitions est défini par :
$E_{10} = E_0 \times M^{10}$.
On peut calculer E_1 manuellement ; on calcule E_{10} avec la calculatrice.
On obtient : $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{33}{80} & \frac{47}{80} \end{pmatrix}$ et $E_{10} = \begin{pmatrix} 0{,}429 & 0{,}571 \end{pmatrix}$.

3 Le graphe admet un état stable. Posons :

$$E_s = \begin{pmatrix} l & p \end{pmatrix} \text{ avec } l + p = 1,\ l \geq 0 \text{ et } p \geq 0.$$

Déterminer E_s (par calcul algébrique) équivaut à résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$(1) \quad E_s = E_s \times M \qquad (2) \quad l + p = 1.$$

Calculons le produit matriciel $E_s \times M$ en fonction de l et p :

$$E_s \times M = \begin{pmatrix} l & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6l + 0{,}3p & 0{,}4l + 0{,}7p \end{pmatrix}.$$

On traduit l'équation (1) par un système d'équations dont les inconnues sont l et p :

$$E_s \times M = E_s \iff \begin{pmatrix} 0{,}6l + 0{,}3p & 0{,}4l + 0{,}7p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & p \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 0{,}6l + 0{,}3p = l \\ 0{,}4l + 0{,}7p = p \end{cases}$$

Résoudre (1) et (2) équivaut à résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -0{,}4l + 0{,}3p = 0 \\ 0{,}4l - 0{,}3p = 0 \\ l + p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0{,}7p = 0{,}4 \\ l + p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = \dfrac{4}{7} \\ l = \dfrac{3}{7} \end{cases}$$

L'état stable E_s est : $\left(\dfrac{3}{7} \quad \dfrac{4}{7}\right)$.

4 Les états E_n convergent vers E_s, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} l_n = \frac{3}{7}.$$

En interprétant ces probabilités comme des fréquences, on déduit qu'à très long terme le parc automobile se répartira de façon stable entre les deux agences, environ 42,9 % des voitures étant à Lyon et 57,1 % des voitures à Paris (à 0,1 % près). Soit, à la voiture près, 343 voitures à Lyon et 457 à Paris.

18 Graphe probabiliste, état stable

Enoncé p. 338

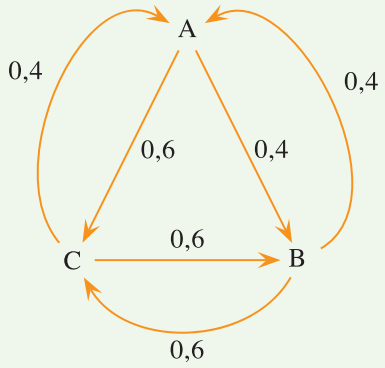
Lycée Jacques Monod, Clamart

Partie A

1 En ordonnant les sommets par (A, B, C), la matrice de transition du graphe $\mathcal{G}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc le graphe suivant :



2 Le premier (jour 0), 200 avions partent de chaque aéroport. Les avions arrivés au soir du jour 0 à l'aéroport A sont au nombre de : $0{,}4 \times 200$ (venant de B) plus $0{,}4 \times 200$ (venant de C), soit 160. Aucun avion ne reste au sol ; ces 160 avions partent de A le lendemain (jour 1).

Jour	0	1	2
A	200	$80 + 80 = 160$	$80 + 96 = 176$
B	200	$80 + 120 = 200$	$64 + 144 = 208$
C	200	$120 + 120 = 240$	$96 + 120 = 216$

3 Soit un état E_n quelconque : $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$. Le jour suivant $(n+1)$, les nombres d'avions partant de chaque aéroport sont définis par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}4 \times b_n + 0{,}4 \times c_n \\ b_{n+1} = 0{,}4 \times a_n + 0{,}6 \times c_n \\ c_{n+1} = 0{,}6 \times a_n + 0{,}6 \times b_n \end{cases}$$

On obtient le même résultat en effectuant le produit matriciel $E_n \times M$:

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}4b_n + 0{,}4c_n & 0{,}4a_n + 0{,}6c_n & 0{,}6a_n + 0{,}6b_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $E_{n+1} = E_n \times M$.
On reconnaît ici une relation de récurrence qui définit une suite géométrique ; ainsi, $E_n = E_0 \times M^n$.

4 Grâce la calculatrice :

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}286 & 0{,}341 & 0{,}373 \\ 0{,}286 & 0{,}342 & 0{,}373 \\ 0{,}286 & 0{,}336 & 0{,}379 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_{10} = \begin{pmatrix} 171 & 204 & 225 \end{pmatrix}.$$

$$M^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}286 & 0{,}339 & 0{,}375 \\ 0{,}286 & 0{,}339 & 0{,}375 \\ 0{,}286 & 0{,}339 & 0{,}375 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_{20} = \begin{pmatrix} 171 & 204 & 225 \end{pmatrix}.$$

On conjecture qu'à long terme, le nombre d'avions par jour partant de chaque aéroport est respectivement 171, 204 et 225.

5 On résout le système formé par les deux équations $E = E \times M$ et $a + b + c = 600$:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times M \\ a + b + c = 600 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0{,}4b + 0{,}4c \\ b = 0{,}4a + 0{,}6c \\ c = 0{,}6a + 0{,}6b \\ a + b + c = 600 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -10a + 4b + 4c = 0 \\ 4a - 10b + 6c = 0 \\ 6a + 6b - 10c = 0 \\ a + b + c = 600 \end{cases}$$

On supprime la troisième équation qui est redondante (elle équivaut à la somme des deux premières). En simplifiant par 2, on obtient :

$$\begin{cases} -5a+2b+2c=0 \\ 2a-5b+3c=0 \\ a+b+c=600 \end{cases} \iff \begin{cases} -5a+2b+2(600-a-b)=0 \\ 2a-5b+3(600-a-b)=0 \\ c=600-a-b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -7a+1\,200=0 \\ -a-8b+1\,800=0 \\ c=600-a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a=\dfrac{1\,200}{7} \\ b=\dfrac{1\,425}{7} \\ c=225 \end{cases}$$

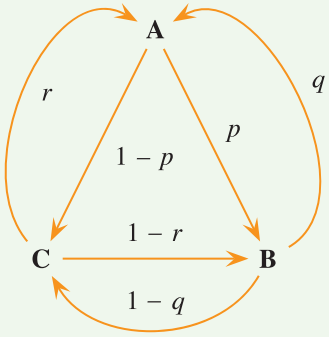
En arrondissant les valeurs à l'unité, on confirme la conjecture précédente :

$$E=\begin{pmatrix}171 & 204 & 225\end{pmatrix}.$$

Partie B

On modifie les probabilités du graphe comme indiqué dans la figure ci-contre. La somme des poids des arêtes issues d'un sommet doit être égale à 1. Il suffit d'introduire trois inconnues : p, q et r telles que :

$0 \leq p \leq 1$, $\leq q \leq 1$ et $0 \leq r \leq 1$.



La matrice de transition est alors :

$$M'=\begin{pmatrix}0 & p & 1-p \\ q & 0 & 1-q \\ r & 1-r & 0\end{pmatrix}.$$

On résout l'équation définissant l'état stable avec pour inconnues p, q et r :

$$\begin{pmatrix}200 & 200 & 200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200 & 200 & 200\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & p & 1-p \\ q & 0 & 1-q \\ r & 1-r & 0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 200q+200r=200 \\ 200p+200(1-r)=200 \\ 200(1-p)+200(1-q)=200 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q+r=1 \\ p+(1-r)=1 \\ (1-p)+(1-q)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} q+r=1 \\ p-r=0 \\ p+q=1 \end{cases} \iff \begin{cases} p=r \\ p+q=1 \end{cases}$$

Tout triplet (p,q,r) satisfaisant les conditions suivantes est une solution :

$0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $r=p$, $q=1-p$.

Par exemple, on peut choisir : $p=r=0{,}35$ et $q=0{,}65$.

19 Exercice de synthèse

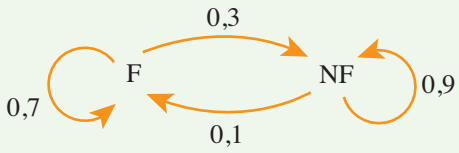
Enoncé p. 339

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

Partie A

1 $P_0 = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$ d'après l'énoncé.

2 On note F l'état « favorable à la personnalité » et NF l'état « non favorable à la personnalité ».
Le graphe est alors :



3 **(a)** D'après l'énoncé et le graphe ci-dessus, $M = \begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}$.

(b) $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix}0{,}448 & 0{,}552\end{pmatrix}$.

4 L'état stable $P = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ vérifie : $P \times M = P$. On a donc :

$$\begin{cases}0{,}7x + 0{,}1y = x\\ 0{,}3x + 0{,}9y = y\\ x + y = 1\end{cases} \iff \begin{cases}0{,}3x = 0{,}1y\\ x + y = 1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y = 3x\\ x = \dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x = \dfrac{1}{4}\\ y = \dfrac{3}{4}\end{cases}$$

L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}75\end{pmatrix}$.
On en déduit qu'au bout d'un grand nombre de mois, il y aura 25 % de personnes favorables à la personnalité et 75 % de personnes défavorables à la personnalité.

Partie B

1 On a $P_{n+1} = P_n \times M$.
Donc $a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}1b_n$. De plus, $a_n + b_n = 1$.
On a donc $a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}1(1 - a_n) = 0{,}6a_n + 0{,}1$.

2 **(a)**
$$\begin{aligned}w_{n+1} &= a_{n+1} - 0{,}25\\ &= 0{,}6a_n + 0{,}1 - 0{,}25\\ &= 0{,}6(w_n + 0{,}25) - 0{,}15\\ &= 0{,}6w_n.\end{aligned}$$

Donc w est une suite géométrique de raison 0,6.

(b) w étant géométrique, on a $w_n = w_0 \times q^n$, q étant la raison, ici 0,6.
$w_0 = a_0 - 0{,}25 = 0{,}55$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $w_n = 0{,}55 \times 0{,}6^n$.
Par conséquent, $a_n = w_n + 0{,}25 = 0{,}25 + 0{,}55 \times 0{,}6^n$.

(c) $0 < 0{,}6 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}25$.
Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre de mois, le pourcentage de personnes favorables à la personnalité sera 25 %. On retrouve le résultat obtenu par la recherche de l'état stable.

(d)
$$\begin{aligned} a_n < 25{,}1\% &\iff 0{,}25 + 0{,}55 \times 0{,}6^n < 0{,}251 \\ &\iff 0{,}55 \times 0{,}6^n < 0{,}001 \\ &\iff 0{,}6^n < \frac{1}{550} \\ &\iff n \ln 0{,}6 < \ln\left(\frac{1}{550}\right) \\ &\iff n > \frac{\ln\left(\frac{1}{550}\right)}{\ln 0{,}6} \quad \text{car } \ln 0{,}6 < 0. \end{aligned}$$

Ceci est réalisé si n, nombre entier, est au moins égal à 13. Il faudra donc 13 mois pour que la popularité soit inférieure à 25,1 %.

Baccalauréat blanc

La durée de l'épreuve est de trois heures.

Une calculatrice graphique est autorisée.

La qualité des raisonnements et le soin de la rédaction sont des éléments importants pris en compte dans la notation.

1 Exercice 1 – 4 points

★ 30 min Corrigé p. 370

Pour tous les candidats

À chaque question, trois affirmations sont proposées. Une seule d'entre elles est juste.

On portera sur la copie la lettre correspondant à la réponse correcte en justifiant cette seule réponse.

1 On pose $f(x) = x^3 - 31x^2 + 29$.

a L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions strictement positives.

b L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

c La courbe représentative de f admet un point d'inflexion pour $x = 10$.

2 La valeur exacte de $\displaystyle\int_{\ln 1}^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$ est :

a $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^5 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}$ **b** $3 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}$ **c** $\dfrac{3}{2}\mathrm{e}$

3 La (les) solution(s) de l'équation $\ln(4x^2 - 1) = \ln(3x + 7)$ est (sont) :

a $\varnothing$

b $\left\{\dfrac{3-\sqrt{137}}{8}\,;\,\dfrac{3+\sqrt{137}}{8}\right\}$

c $\left\{\dfrac{3+\sqrt{137}}{8}\right\}$

4 L'inéquation $\mathrm{e}^{3x} > (\mathrm{e}^{x+1})^2$ admet pour ensemble solution :

a $]2\,;+\infty[$ **b** $\varnothing$ **c** $\{2\}$

SUJET

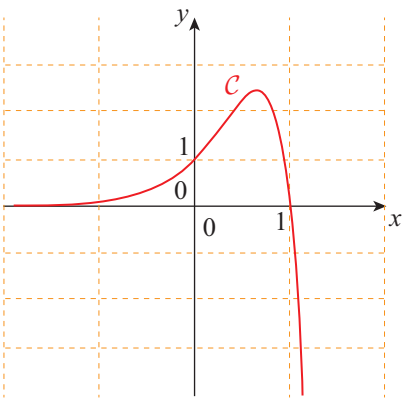
2 Exercice 2 – 5 points

★ 45 min Corrigé p. 371

Pour tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$.

1 Sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est la suivante :



Conjecturer l'existence d'un point d'inflexion, et estimer la valeur de x pour laquelle il est atteint.

2 **(a)** Montrer que la dérivée f' de f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = (2-3x)\mathrm{e}^{3x}$.

(b) Dresser le tableau de variations de $f'(x)$ et en déduire l'abscisse exacte du point d'inflexion.

Sur quel intervalle f est-elle convexe ?

(c) Dresser le tableau de variations de f.

3 Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.

Que peut-on dire, sans aucun calcul, de la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$?

4 **(a)** Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = -\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)$$

est une primitive de f.

(b) En déduire l'aire sous la courbe entre les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

3 Exercice 3 – 5 points

★★ 45 min Corrigé p. 373

Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un gérant de salle de spectacles constate que, chaque année, il conserve 80 % des abonnés de l'année précédente, et que, de plus, il acquiert 1 000 nouveaux abonnés.

En 2010, il avait 10 000 abonnés.

1 **(a)** On appelle u_n le nombre d'abonnés l'année $2010 + n$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

(b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de la suite (u_n).

2 **(a)** On appelle (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 5\,000$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

(b) Donner la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

3 **(a)** À partir de quelle année le nombre d'abonnés sera-t-il inférieur à 8 000 ?

(b) Peut-il devenir inférieur à 5 000 ?

4 Exercice 3 – 5 points

★★ 60 min Corrigé p. 374

Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

M. et M^me^ Martin, qui habitent une grande ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient pour l'été, soit de partir à l'étranger, soit de visiter une région en France.

S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.

Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'année suivante est de 0,7.

En été 2012, ce couple est parti à l'étranger.

Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année $(2012 + n)$, où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année $(2012 + n)$ et b_n la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année $(2012 + n)$.

Partie A

1 **(a)** Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France et E pour étranger).

(b) En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour l'ordre des sommets. On notera M cette matrice.

2 **(a)** Donner P_0, l'état probabiliste initial, l'année 2012.

SUJET

(b) On donne les résultats suivants :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix} ; M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}444 & 0{,}556 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix} ;$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0{,}433\,2 & 0{,}566\,8 \\ 0{,}425\,1 & 0{,}574\,9 \end{pmatrix}.$$

En choisissant la bonne matrice, calculer P_3. En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2015 *(On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).*

3 Soit P la matrice ligne $(x \quad y)$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x + y = 1$.

Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

Partie B

1 Montrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}3$.

2 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - \dfrac{3}{7}$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) En déduire l'expression de u_n, puis celle de a_n en fonction de n.

(c) Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?

5 Exercice 4 – 6 points

★★ — 60 min — Corrigé p. 375

Pour tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique des tubes en polyéthylène pour le chauffage géothermique.

On s'intéresse à trois types de tubes appelés tubes de type 1, tubes de type 2 et tubes de type 3.

Partie A : loi normale

Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres.

1 On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée associe son épaisseur exprimée en millimètre.

On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

Calculer la probabilité qu'un tube de type 1 prélevé au hasard dans la production de la journée soit accepté au contrôle. On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

2 L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1 : Il est envisagé pour cela de modifier le réglage des machines produisant ces tubes .

On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1, prélevé dans la production future, associera son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1.

Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'un tube de type 1 prélevé au hasard dans la production future soit accepté au contrôle soit égale à 0,99. On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

Partie B : loi binomiale

On considère un lot de tubes de type 2.

On note E l'événement : « un tube prélevé au hasard dans ce lot de tubes de type 2 est défectueux ». On suppose que $P(E) = 0{,}02$.

On prélève au hasard 20 tubes de type 2 dans ce lot pour vérification.

Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de 20 tubes de type 2 à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire Y_1 qui, à tout prélèvement de 20 tubes de type 2, associe le nombre de tubes défectueux de ce prélèvement.

1 Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2 Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un tube soit défectueux.

On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

Partie C

Un client a commandé 300 tubes de type 3, dont la longueur doit être théoriquement 300 mm. On note Z la variable aléatoire qui donne la longueur d'un tube de type 3. On sait que Z suit la loi normale d'espérance 300 et d'écart-type 1. Un tube est utilisable si sa longueur est comprise entre 298 et 302.

1 Donner, en justifiant sans utiliser la calculatrice, la probabilité qu'un tube soit utilisable.

2 Donner l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de tubes de type 3 utilisables dans les 300 livrés au client.

3 Le client constate que 275 tubes sur les 300 ont une longueur comprise entre 298 et 302. Doit-il se plaindre auprès du fournisseur ?

CORRIGÉ

1 Exercice 1 – 4 points

Enoncé p. 365

Pour tous les candidats

1 Réponse **a** . $f'(x) = 3x^2 - 62x = x(3x - 62)$.

La dérivée s'annule donc pour $x = 0$ et pour $x = \dfrac{62}{3}$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$\dfrac{62}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	29	$\searrow$	$f\left(\frac{62}{3}\right)$	$\nearrow$	

$f(0) = 29$ $\qquad$ $f\left(\dfrac{62}{3}\right) \approx -4\,384$

$f(-10) = -4\,071$ $\qquad$ $f(40) = 14\,429$.

Sur l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{62}{3}\right[$, f est strictement décroissante et continue, 0 appartient à $\left]f\left(\dfrac{62}{3}\right)\,;\,f(0)\right[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle. Il en est de même sur $\left]\dfrac{62}{3}\,;40\right[$ où f est strictement croissante. Ensuite, $f(x)$ est strictement positive.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions strictement positives.

Remarques

Cette équation admet aussi une solution négative dans $]-10\,;0[$ puisque $f(-10) < 0$.

La courbe représentative admet également un point d'inflexion, puisque la dérivée seconde est $f''(x) = 6x - 62$, mais ce n'est pas pour $x = 10$.

2 Réponse **c** .

$$\begin{aligned}\int_{\ln 1}^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1}\right]_{\ln 1}^{\ln 2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln 2+1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln 1+1}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln(2^2)} \times \mathrm{e} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln 1} \times \mathrm{e}\\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \mathrm{e} - \frac{1}{2}\mathrm{e}\\ &= \frac{3}{2}\mathrm{e}.\end{aligned}$$

3 Réponse **c** . L'équation n'a de sens que si $4x^2-1>0$ et si $3x+7>0$, donc finalement si $x>\dfrac{1}{2}$.

Dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$:

$\ln(4x^2-1)=\ln(3x+7) \iff 4x^2-1=3x+7 \iff 4x^2-3x-8=0.$

$\Delta=137.$

Les racines sont donc $x_1=\dfrac{3-\sqrt{137}}{8}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{137}}{8}$. Mais seul x_2 appartient à $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, donc $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{137}}{8}\right\}$.

4 Réponse **a** . On a :

$$e^{3x}>\left(e^{x+1}\right)^2 \iff 3x>2(x+1) \iff x>2.$$

2 Exercice 2 – 5 points

Enoncé p. 366

Pour tous les candidats

1 Il semblerait qu'il y ait un point d'inflexion pour une valeur de x voisine de 0,5.

2 **(a)** $f'(x)=-e^{3x}+(1-x)\times 3e^{3x}=e^{3x}(-1+3-3x)=e^{3x}(2-3x).$

(b) $f''(x)=3e^{3x}(2-3x)+e^{3x}(-3)=e^{3x}(-9x+3).$
On obtient donc pour $f'(x)$ le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		↗	e	↘	

f' change de sens de variation pour $x=\dfrac{1}{3}$, qui est donc l'abscisse du point d'inflexion. La fonction est convexe quand f' est croissante, soit sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right]$.

(c)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

CORRIGÉ

3 On a :

$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)\\ &= \mathrm{e}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\mathrm{e}\\ &= \mathrm{e}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Pour $x=\dfrac{1}{3}$, il y a un point d'inflexion.

La fonction est convexe sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$, donc au-dessus de la tangente, et concave sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ donc au-dessous de cette tangente.

4 On a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -3\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)-\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{3}\right)\\ &= -\mathrm{e}^{3x}\left(x-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)\\ &= -\mathrm{e}^{3x}(x-1)\\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f.
D'après la courbe, f est positive sur $[-1\,;\,1]$.
Donc pour calculer l'aire sous la courbe, il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(1)-F(-1)\\ &= -\mathrm{e}^{3}\left(-\frac{1}{9}\right)+\mathrm{e}^{-3}\left(-\frac{7}{9}\right)\\ &\approx 2{,}193. \end{aligned}$$

MÉTHODE

Il faut toujours vérifier que le résultat trouvé est compatible avec la courbe, surtout si celle-ci est donnée : ici, il est évident que l'aire demandée est proche de 2, compte tenu des quadrillages.

3 Exercice 3 – 5 points

Enoncé p. 367

Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1 **(a)** $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1\,000$.

(b) Il semblerait que cette suite tende vers 5 000.

2 **(a)** On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5\,000 \\ &= 0{,}8u_n + 1000 - 5\,000 \\ &= 0{,}8u_n - 4\,000 \\ &= 0{,}8(u_n - 5\,000) \\ &= 0{,}8v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est la suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 5\,000 = 10\,000 - 5\,000 = 5\,000$.

(b) On a : $v_n = 5000 \times 0{,}8^n$.

La raison de la suite (v_n) est strictement comprise entre 0 et 1, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

$u_n = v_n + 5\,000$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5\,000$, ce qui confirme la conjecture.

3 **(a)** On a :

$$\begin{aligned} u_n < 8\,000 &\iff 5\,000 \times 0{,}8^n + 5\,000 < 8\,000 \\ &\iff 5\,000 \times 0{,}8^n < 3\,000 \\ &\iff 0{,}8^n < 0{,}6 \\ &\iff n \ln 0{,}8 < \ln 0{,}6 \\ &\iff n > \frac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}8}. \end{aligned}$$

ATTENTION

À la dernière étape, on divise par $\ln 0{,}8$ qui est négatif.

Donc $u_n < 5\,000$ pour $n > 2$, donc à partir de $n = 3$, soit à partir de 2013.

(b) On sait que la suite (u_n) a pour limite 5000.
De plus, $u_n - 5\,000 = 5\,000 \times 0{,}8^n$, qui est toujours un nombre positif, donc u_n ne sera jamais inférieur à 5 000.

CORRIGÉ

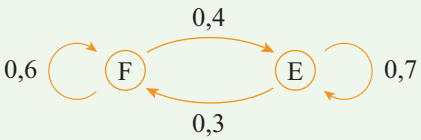
4 Exercice 3 – 5 points

Enoncé p. 367

Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1 **(a)**



F est l'état 1 et E est l'état 2.

(b) Le terme à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

La matrice de transition est donc : $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

2 **(a)** En 2012, le couple est parti à l'étranger, donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $P_3 = P_2M = P_1M^2 = P_0M^3$.

Par conséquent $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,444 & 0,556 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}$.

La probabilité que M et Mme Martin passent leurs vacances à l'étranger en 2015, qui est l'année 2012+3 est donc 0,58.

3 P est l'état stable si et seulement si $PM = P$ et $x + y = 1$, ce qui équivaut aux systèmes :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0,6x + 0,3y = x \\ 0,4x + 0,7y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ 0,3y = 0,4x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

Au bout de nombreuses années, la probabilité que M. et Mme Martin passent leurs vacances en France est $\frac{3}{7}$ et à l'étranger est $\frac{4}{7}$.

Partie B

1 $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 - a_n \end{pmatrix}$ alors $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3(1 - a_n)$. On trouve donc bien $a_{n+1} = 0,3a_n + 0,3$.

2 **(a)** On a :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{3}{7} = 0,3a_n + 0,3 - \frac{3}{7} = 0,3\left(u_n + \frac{3}{7}\right) + 0,3 - \frac{3}{7} = 0,3u_n.$$

La suite (u_n) est donc la suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $u_0 = a_0 - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$.

(b) $u_n = -\frac{3}{7} \times (0,3)^n$ et donc $a_n = u_n + \frac{3}{7} = -\frac{3}{7} \times (0,3)^n + \frac{3}{7}$.

(c) Comme $0 < 0{,}3 < 1$, la limite de $0{,}3^n$ est égale à 0, donc (a_n) converge vers $\dfrac{3}{7}$.
On retrouve la probabilité que le couple a de passer ses vacances en France après de nombreuses années.

5 Exercice 4 – 6 points

Enoncé p. 368

Pour tous les candidats

Partie A

1 On a : $P(1{,}35 < X < 1{,}65) \approx 0{,}97$.

2 Si X_1 suit la loi $\mathcal{N}\left(1{,}5\,;\,\sigma_1^2\right)$, $Z = \dfrac{X - 1{,}5}{\sigma_1}$ suit la loi normale centrée réduite. On a :

$$\begin{aligned} &P(1{,}35 < X < 1{,}65) = 0{,}99 \\ \iff &P\left(\frac{1{,}35 - 1{,}5}{\sigma_1} < Z < \frac{1{,}65 - 1{,}5}{\sigma_1}\right) = 0{,}99 \\ \iff &2P\left(Z < \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) - 1 = 0{,}99 \\ \iff &P\left(Z < \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = \frac{1{,}99}{2}. \end{aligned}$$

La calculatrice nous donne donc $\dfrac{0{,}15}{\sigma_1} \approx 2{,}5758$ et donc $\sigma_1 \approx 0{,}06$.

Partie B

1 Les prélèvements étant considérés comme indépendants on a répétition 20 fois d'une expérience de Bernoulli, donc X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,02.

2 On a :

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq 1) &= P(Y_1 = 0) + P(Y_1 = 1) \\ &= 0{,}98^{20} + 20 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{19} \end{aligned}$$

(on utilise ici la formule donnant $P(X = k)$ pour X suivant une loi binomiale).
On obtient $P(Y_1 \leq 1) \approx 0{,}94$.

Partie C

1 L'intervalle $[298\,;\,302]$ correspond à $[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$. On sait donc que la probabilité que Z appartienne à cet intervalle est environ 0,95.

2 On a : $I \approx [0{,}925\,;\,0{,}975]$.

3 On a : $\dfrac{275}{300} \approx 0{,}92$. Cette valeur n'appartient pas à I, donc le client a toutes les raisons de se plaindre.

N° d'éditeur : 10201411 – Prepamath Éditions – DÉCEMBRE 2015.
Imprimé en France par Loire offset Titoulet.