INTERROS des LYCÉES

Collection dirigée par Éric MAURETTE

maths

2DE

Érick DE BRAUWÈRE
Nathalie DEFLORAINE
Stéphane PASQUET

Nathan

Remerciements

Les auteurs et l'équipe de Prepamath Édition tiennent à remercier Jean-Côme Charpentier pour l'aide précieuse qu'il a apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Stéphane Pasquet
Coordination éditoriale : François Déliac
Conception couverture : Simon Geliot

Votre avis nous intéresse : contact@prepamath.fr

Retrouvez les Interros des Lycées et des informations scientifiques sur :

Facebook : facebook.com/interrosdeslycees
Instagram : @interrosdeslycees

© PREPAMATH Éditions 2026
© Éditions NATHAN 2026 - ISBN 9782095084264

Avant-propos

Dernière année avant le choix des spécialités, la classe de seconde marque un tournant décisif dans le parcours scolaire de l'élève. C'est particulièrement le cas en mathématiques où le programme s'intensifie et s'élargit, jetant pour nombre d'entre eux les bases d'une future spécialisation scientifique. Cet ouvrage est conçu pour accompagner les élèves en proposant une structure claire et des exercices adaptés à chaque thème abordé.

Complètement revue et corrigée, cette nouvelle édition comporte de nouveaux exercices très récents et variés, issus de différents lycées français. Certains chapitres ont de plus été réorganisés pour répondre au mieux aux attentes des élèves.

La structure de chaque chapitre, comme dans tous les « Interros des lycées », est la suivante :

- un rappel de cours, qui s'appuie sur la résolution pratique d'un exercice type, et qui donne de manière concise tout ce que l'on doit retenir du chapitre étudié ;
- des questionnaires à choix multiples (QCM) ou des vrai-faux (V/F) pour vous assurer d'avoir la maîtrise des concepts fondamentaux du chapitre ;
- des exercices corrigés de tous types, qui ont tous été réellement posés en lycée, classés par notion et par degré de difficulté.

Des compléments numériques (vidéos et sources de programmes informatiques) sont aussi présentes, et repérés par des pictogrammes et un QR Code. Vous pourrez ainsi accéder à des ressources numériques qui vous aideront de manière vivante à préciser certains points de cours, mieux comprendre la résolution d'exercices importants, ou récupérer les sources Python des programmes contenus dans ce livre. La liste complète des vidéos se trouve en annexe en fin d'ouvrage, et vous pouvez télécharger les programmes qu'il contient en visitant le lien suivant :

`https://www.prepamath.fr/IL2M.`

N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques ou suggestions en nous contactant par mail à l'adresse `contact@prepamath.fr`.

Nous vous souhaitons une bonne et profitable lecture, pour un entraînement en maths réussi tout au long de l'année.

Les auteurs

Table des matières

Chap 1 Notions de logique 1
- Cours 1
- Interros 7
- Corrigés 9

Chap 2 Notions d'algorithmique 11
- Cours 11
- Interros 22
- Corrigés 27

Chap 3 Nombres et calculs 33
- Cours 33
- Interros 44
- Corrigés 53

Chap 4 Calcul littéral, équations et inéquations 71
- Cours 71
- Interros 85
- Corrigés 96

Chap 5 Problèmes de géométrie 119
- Cours 119
- Interros 125
- Corrigés 131

Chap 6 Généralités sur les fonctions 139
- Cours 139
- Interros 148
- Corrigés 158

Chap 7 Fonctions de référence 173
- Cours 173
- Interros 182
- Corrigés 191

Chap 8 Vecteurs et coordonnées dans le plan 207
- Cours 207
- Interros 216
- Corrigés 224

Chap 9 Équations de droites 239
- Cours 239
- Interros 248
- Corrigés 252

Chap 10 Proportions et pourcentages d'évolution 261
- Cours 261
- Interros 268
- Corrigés 276

Chap 11 Statistiques 287
- Cours 287
- Interros 297
- Corrigés 308

Chap 12 Croisement de variables qualitatives 321
- Cours 321
- Interros 328
- Corrigés 333

Chap 13 Probabilités 339
- Cours 339
- Interros 343
- Corrigés 349

Chap 14 Probabilités conditionnelles 359
- Cours 359
- Interros 363
- Corrigés 369

Annexe Liste des vidéos 375

Méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous conseillons le livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et E. Maurette, aux Éditions Prepamath.

Faire des « feed-back »

Le « feed-back » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral. Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé.

Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- Idem pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

Pour acquérir de la rapidité, 3 voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.
- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoirs surveillés. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.

Chapitre 1

Notions de logique

Plan du chapitre

1. Propositions et connecteurs
2. Implication, réciproque, contraposée, équivalence
3. Différents types de raisonnement

1 Propositions et connecteurs

Exercice type — Lycée Louis Vincent, Metz

Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation, puis indiquer laquelle est vraie : la proposition ou sa négation.

1. « 15 est un multiple de 4 ».
2. « $-2 < 1$ et $1 < 0$ ».
3. « 3 est pair ou 3 est positif ».

Voir corrigé page 3

1.1 Propositions

Définition 1 : proposition

Une *proposition* est un énoncé mathématique dont on peut dire s'il est *vrai* ou *faux*.

Exemples

- « 12 est un nombre pair » est une proposition vraie.
- « $-3 > 2$ » est une proposition fausse.
- « $x + 1 = 4$ » est une proposition qui contient une *variable* x : elle est vraie pour $x = 3$ et fausse pour toute autre valeur de x.

1.2 Les connecteurs « et », « ou »

Définition 2 : connecteurs

Soient P et Q deux propositions.

- La proposition « P *et* Q » est vraie lorsque P et Q sont *toutes les deux* vraies, et fausse sinon.
- La proposition « P *ou* Q » est vraie lorsque *l'une au moins* des deux propositions P, Q est vraie, et fausse lorsque les deux sont fausses.

COURS

ATTENTION

En mathématiques, le « ou » est *inclusif* : « P ou Q » est vraie aussi lorsque P et Q sont vraies en même temps.
Par exemple, « 6 est pair ou 6 est multiple de 3 » est vraie. Ce n'est pas le « ou » du menu « fromage ou dessert » !

Exemple : pour un réel x, « $x \geqslant 2$ et $x < 5$ » signifie $x \in [2\,;5[$; « $x < -1$ ou $x > 4$ » signifie $x \in]-\infty\,;-1[\cup]4\,;+\infty[$. Le connecteur « et » correspond à l'*intersection* de deux intervalles, le connecteur « ou » à leur *réunion*.

1.3 Négation d'une proposition

Définition 3 : négation

La *négation* d'une proposition P, notée « non P », est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

Exemples

- La négation de « n est pair » est « n est impair » (pour un entier n).
- La négation de « $x < 2$ » est « $x \geqslant 2$ ».
- La négation de « $x = 3$ » est « $x \neq 3$ ».

ATTENTION

La négation de « $x > 0$ » est « $x \leqslant 0$ », et non « $x < 0$ » : il ne faut pas oublier le cas $x = 0$.

Propriété 1 : négation de « et » et de « ou »

Soient P et Q deux propositions.

- La négation de « P et Q » est « (non P) ou (non Q) ».
- La négation de « P ou Q » est « (non P) et (non Q) ».

Autrement dit, en passant à la négation, le « et » devient un « ou » et le « ou » devient un « et ».

Exemple : la négation de « $x \geqslant 2$ et $x < 5$ », c'est-à-dire de « $x \in [2\,;5[$ », est :

« $x < 2$ ou $x \geqslant 5$ », c'est-à-dire $x \in]-\infty\,;2[\cup[5\,;+\infty[$.

On retrouve sur la droite graduée les réels qui ne sont pas dans l'intervalle $[2\,;5[$.

Solution de l'exercice type — Lycée Louis Vincent, Metz

1. Négation : « 15 n'est pas un multiple de 4 ». C'est la négation qui est vraie, car $15 = 4 \times 3 + 3$: 15 n'est pas dans la table de 4.
2. Négation : « $-2 \geqslant 1$ ou $1 \geqslant 0$ ».
   La proposition de départ est fausse, car $1 < 0$ est faux. Sa négation est donc vraie : en effet, $1 \geqslant 0$ est vrai, ce qui suffit pour qu'une proposition construite avec « ou » soit vraie.
3. Négation : « 3 n'est pas pair et 3 n'est pas positif », c'est-à-dire « 3 est impair et $3 < 0$ ».
   La proposition de départ est vraie, car 3 est positif (il suffit que l'une des deux propositions reliées par « ou » soit vraie). Sa négation est donc fausse.

Voir énoncé page 1

2 Implication, réciproque, contraposée, équivalence

2.1 Implication

Définition 4 : implication

Soient P et Q deux propositions. L'*implication* « $P \Longrightarrow Q$ » se lit « si P, alors Q ». Elle est vraie lorsque, chaque fois que P est vraie, Q est vraie aussi.
On dit alors que :

- P est une *condition suffisante* pour Q (il suffit que P soit vraie pour que Q le soit) ;
- Q est une *condition nécessaire* pour P (si Q est fausse, P ne peut pas être vraie).

Exemple : pour un réel x, l'implication « $x > 3 \Longrightarrow x > 1$ » est vraie. « $x > 3$ » est une condition suffisante pour avoir « $x > 1$ », et « $x > 1$ » est une condition nécessaire pour avoir « $x > 3$ ».

Remarque : une implication « $P \Longrightarrow Q$ » est fausse dès qu'on peut trouver un cas où P est vraie et Q est fausse. Un tel cas s'appelle un *contre-exemple*.
Par exemple, « $x > 1 \Longrightarrow x > 3$ » est fausse : $x = 2$ est un contre-exemple.

2.2 Réciproque et contraposée

Définition 5 : réciproque, contraposée

Soit l'implication « $P \Longrightarrow Q$ ».

- Sa *réciproque* est l'implication « $Q \Longrightarrow P$ ».
- Sa *contraposée* est l'implication « non $Q \Longrightarrow$ non P ».

COURS

Propriété 2 : implication et contraposée

Une implication et sa contraposée sont *toujours vraies ou fausses en même temps* : démontrer l'une revient à démontrer l'autre.
En revanche, une implication peut être vraie sans que sa réciproque le soit.

Exemple : *une implication vraie dont la réciproque est fausse.*
On considère l'implication « si $x = -3$, alors $x^2 = 9$ ».
Elle est vraie, car $(-3)^2 = 9$.

- Sa réciproque est « si $x^2 = 9$, alors $x = -3$ ». Elle est fausse : $x = 3$ vérifie $x^2 = 9$ mais $3 \neq -3$. Le nombre 3 est un contre-exemple.
- Sa contraposée est « si $x^2 \neq 9$, alors $x \neq -3$ ». Elle est vraie, comme l'implication de départ.

2.3 Équivalence

Définition 6 : équivalence

Lorsque l'implication « $P \implies Q$ » et sa réciproque « $Q \implies P$ » sont toutes les deux vraies, on dit que P et Q sont *équivalentes* et on note « $P \iff Q$ ».
On lit « P si et seulement si Q ».
On dit aussi que P est une *condition nécessaire et suffisante* pour Q.

Exemple : d'après l'exemple précédent, « $x = -3$ » et « $x^2 = 9$ » ne sont pas équivalentes. L'équivalence correcte est :

$$x^2 = 9 \iff \big(x = 3 \text{ ou } x = -3\big).$$

Lorsqu'on résout une équation, chaque ligne du calcul doit être *équivalente* à la précédente : c'est ce qui garantit qu'on n'a ni perdu ni ajouté de solution.

MÉTHODE

Pour démontrer une équivalence « $P \iff Q$ », on démontre en général les deux implications « $P \implies Q$ » et « $Q \implies P$ ».

ATTENTION

Piège : confondre une implication et sa réciproque.
« Si un entier est un multiple de 6, alors c'est un multiple de 3 » est vraie, car $6k = 3 \times (2k)$. Sa réciproque « si un entier est un multiple de 3, alors c'est un multiple de 6 » est fausse : 9 est un contre-exemple.
Avant d'utiliser une propriété « dans l'autre sens », il faut s'assurer que sa réciproque a bien été démontrée.

2.4 Démontrer ou réfuter

MÉTHODE

- Pour montrer qu'une proposition « pour tout x, ... » est *vraie*, il faut une démonstration valable pour *toutes* les valeurs de x : vérifier quelques exemples ne suffit pas.
- Pour montrer qu'elle est *fausse*, il suffit de trouver *un seul* contre-exemple.
- Pour montrer qu'une proposition « il existe x tel que ... » est vraie, il suffit de donner *un* exemple.

Exemple : la proposition « pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$ » est fausse : pour $x = 0{,}5$, on a $x^2 = 0{,}25 < 0{,}5$. Le réel 0,5 est un contre-exemple.
En revanche, « pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2 \geqslant x$ » est vraie (voir le chapitre « Fonctions de référence »).

POUR ALLER PLUS LOIN

La négation de « pour tout x, $P(x)$ » est « il existe x tel que non $P(x)$ » : c'est exactement l'existence d'un contre-exemple. De même, la négation de « il existe x tel que $P(x)$ » est « pour tout x, non $P(x)$ ».

3 Différents types de raisonnement

3.1 Raisonnement direct

On part des hypothèses et on enchaîne des implications vraies jusqu'à la conclusion.

Exemple : montrons que la somme de deux entiers pairs est paire. Soient $a = 2k$ et $b = 2k'$ avec k et k' entiers. Alors $a + b = 2(k + k')$ avec $k + k'$ entier : $a + b$ est pair.

3.2 Raisonnement par contraposée

Pour démontrer « $P \Longrightarrow Q$ », il est parfois plus simple de démontrer sa contraposée « non $Q \Longrightarrow$ non P », qui lui est équivalente.

COURS

Exemple : montrons que, pour un entier n, « si n^2 est pair, alors n est pair ».
Sa contraposée est « si n est impair, alors n^2 est impair ». Si $n = 2k + 1$ avec k entier, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, avec $2k^2 + 2k$ entier : n^2 est impair. La contraposée est vraie, donc l'implication de départ aussi.

3.3 Raisonnement par disjonction des cas

Lorsqu'une propriété est difficile à démontrer directement, on peut séparer l'étude en plusieurs cas qui recouvrent toutes les possibilités, et la démontrer dans chacun d'eux.

Exemple : montrons que, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.

- Si $x \geqslant 0$, alors $x^2 = x \times x$ est le produit de deux nombres positifs : $x^2 \geqslant 0$.
- Si $x < 0$, alors $x^2 = x \times x$ est le produit de deux nombres négatifs : $x^2 > 0$.

Les deux cas recouvrent tous les réels : la propriété est démontrée.

3.4 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que P est fausse et on en déduit une conclusion impossible (une *contradiction*). C'est donc que P est vraie.

Exemple : montrons qu'il n'existe pas de plus grand entier naturel.
Supposons au contraire qu'il existe un plus grand entier naturel N. Alors $N + 1$ est un entier naturel et $N + 1 > N$: c'est en contradiction avec le fait que N soit le plus grand. L'hypothèse de départ est donc fausse : il n'existe pas de plus grand entier naturel.

Remarque : la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (voir le chapitre « Nombres et calculs ») est un autre exemple célèbre de raisonnement par l'absurde.

1 V/F Implications

5 min — Corrigé p. 9

Pour un réel x ou un entier n, les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a L'implication « $x > 3 \Longrightarrow x > 1$ » est vraie.

b L'implication « $x > 1 \Longrightarrow x > 3$ » est vraie.

c « $x^2 = 16 \iff x = 4$ ».

d La contraposée de « si n est un multiple de 4, alors n est pair » est « si n est impair, alors n n'est pas un multiple de 4 ».

2 QCM Négations

5 min — Corrigé p. 9

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1 La négation de « $x \geqslant 2$ et $y < 5$ » est :

a « $x < 2$ et $y \geqslant 5$ ». **b** « $x < 2$ ou $y \geqslant 5$ ».
c « $x \leqslant 2$ ou $y > 5$ ».

2 La négation de « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est :

a « le triangle ABC n'est ni rectangle ni isocèle ».

b « le triangle ABC n'est pas rectangle ou n'est pas isocèle ».

c « le triangle ABC est équilatéral ».

3 Un contre-exemple suffit ★

10 min — Corrigé p. 9

Lycée Eiffel, Talange

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'une proposition est fausse, donner un contre-exemple.

1 Pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$.

2 Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.

3 Pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

4 Pour tout réel x non nul, $\dfrac{1}{x} < x$.

4 Écrire une négation ★

10 min — Corrigé p. 9

Lycée Cormontaigne, Metz

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes (x est un réel, n un entier).

1 « $x < 3$ ».

2 « $x \in [-1\,;4]$ ».

3 « n est pair et n est un multiple de 3 ».

4 « $x \leqslant 0$ ou $x > 10$ ».

INTERROS

Implication et équivalence

5 Réciproque et contraposée ★ 10 min Corrigé p. 10

Lycée Fabert, Metz

On considère la proposition $\mathcal{P}$: « si un entier n est un multiple de 10, alors n est un multiple de 5 ».

1. Démontrer que $\mathcal{P}$ est vraie.
2. Énoncer la réciproque de $\mathcal{P}$. Est-elle vraie ?
3. Énoncer la contraposée de $\mathcal{P}$. Est-elle vraie ?

6 Condition nécessaire, condition suffisante ★★ 15 min Corrigé p. 10

Lycée Charlemagne, Thionville

Compléter chaque phrase par « nécessaire », « suffisante » ou « nécessaire et suffisante », en choisissant la réponse la plus précise. Justifier.

1. Pour un réel x, « $x = 2$ » est une condition … pour que « $x^2 = 4$ ».
2. Pour un réel x, « $x \geqslant 0$ » est une condition … pour que « $x > 1$ ».
3. Pour un quadrilatère $ABCD$, « ses quatre côtés ont la même longueur » est une condition … pour que « $ABCD$ est un carré ».
4. Pour un réel x, « $x - 3 = 0$ » est une condition … pour que « $2x = 6$ ».

7 Implication ou équivalence ? ★★ 15 min Corrigé p. 10

Lycée Hélène Boucher, Thionville

Dans chaque cas, x désigne un réel. Indiquer si l'on a « $P \implies Q$ », « $Q \implies P$ » ou « $P \iff Q$ ». Justifier.

1. P : « $x^2 = 25$ » et Q : « $x = 5$ ».
2. P : « $(x-1)(x+2) = 0$ » et Q : « $x = 1$ ».
3. P : « $|x - 1| \leqslant 2$ » et Q : « $x \in [-1\,;3]$ ».
4. P : « $x > 2$ » et Q : « $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$ ».

1 V/F Implications

Énoncé p. 7

a *Vrai*. Si $x > 3$, alors a fortiori $x > 1$ car $3 > 1$.

b *Faux*. $x = 2$ est un contre-exemple : $2 > 1$ mais $2 \leqslant 3$.

c *Faux*. L'implication « $x = 4 \Longrightarrow x^2 = 16$ » est vraie, mais sa réciproque est fausse : $x = -4$ vérifie $x^2 = 16$. L'équivalence correcte est $x^2 = 16 \iff (x = 4 \text{ ou } x = -4)$.

d *Vrai*. La contraposée de « $P \Longrightarrow Q$ » est « non $Q \Longrightarrow$ non P », et la négation de « n est pair » est « n est impair ».

2 QCM Négations

Énoncé p. 7

1 *Réponse b.* La négation de « P et Q » est « (non P) ou (non Q) ». La négation de $x \geqslant 2$ est $x < 2$ et celle de $y < 5$ est $y \geqslant 5$.

2 *Réponse a.* La négation de « P ou Q » est « (non P) et (non Q) » : le triangle n'est pas rectangle *et* il n'est pas isocèle, ce qu'on dit aussi « ni rectangle ni isocèle ».

3 Un contre-exemple suffit

Énoncé p. 7

Lycée Eiffel, Talange

1 *Fausse*. Pour $x = 0{,}5$: $x^2 = 0{,}25 < 0{,}5$.

2 *Vraie*. Un carré est toujours positif ou nul (voir le chapitre « Fonctions de référence »).

3 *Fausse*. Pour $a = b = 1$: $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ alors que $\sqrt{1}+\sqrt{1} = 2$.

4 *Fausse*. Pour $x = 0{,}5$: $\dfrac{1}{0{,}5} = 2 > 0{,}5$. (Pour $x = -1$, on a aussi $\dfrac{1}{x} = -1 = x$.)

4 Écrire une négation

Énoncé p. 7

Lycée Cormontaigne, Metz

1 « $x \geqslant 3$ ».

2 $x \in [-1\,;4]$ signifie « $x \geqslant -1$ et $x \leqslant 4$ ». Sa négation est « $x < -1$ ou $x > 4$ », c'est-à-dire $x \in]-\infty\,;-1[\cup]4\,;+\infty[$.

3 « n est impair ou n n'est pas un multiple de 3 ».

4 « $x > 0$ et $x \leqslant 10$ », c'est-à-dire $x \in]0\,;10]$.

CORRIGÉS

5 Réciproque et contraposée

Énoncé p. 8

Lycée Fabert, Metz

1 Si n est un multiple de 10, il existe un entier k tel que :

$$n = 10k = 5 \times (2k), \text{ avec } 2k \text{ entier.}$$

n est un multiple de 5. $\mathcal{P}$ est vraie.

2 Réciproque : « si un entier n est un multiple de 5, alors n est un multiple de 10 ». Elle est fausse : $15 = 5 \times 3$ est un multiple de 5, mais pas de 10.

3 Contraposée : « si un entier n n'est pas un multiple de 5, alors n n'est pas un multiple de 10 ». Elle est vraie, car une implication et sa contraposée sont vraies en même temps.

6 Condition nécessaire, condition suffisante

Énoncé p. 8

Lycée Charlemagne, Thionville

1 *Suffisante*. Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$. Mais la condition n'est pas nécessaire : $x = -2$ vérifie aussi $x^2 = 4$.

2 *Nécessaire*. Si $x > 1$, alors $x \geqslant 0$. Mais elle n'est pas suffisante : $x = 0{,}5$ vérifie $x \geqslant 0$ sans vérifier $x > 1$.

3 *Nécessaire*. Un carré a ses quatre côtés de même longueur. Mais un losange qui n'a pas d'angle droit a aussi quatre côtés de même longueur sans être un carré.

4 *Nécessaire et suffisante*. $x - 3 = 0 \iff x = 3 \iff 2x = 6$.

7 Implication ou équivalence ?

Énoncé p. 8

Lycée Hélène Boucher, Thionville

1 $Q \Longrightarrow P$: si $x = 5$, alors $x^2 = 25$. Mais pas $P \Longrightarrow Q$: $x = -5$ vérifie $x^2 = 25$.

2 $Q \Longrightarrow P$: si $x = 1$, alors $(x - 1)(x + 2) = 0 \times 3 = 0$. Mais pas $P \Longrightarrow Q$: $x = -2$ vérifie P d'après le théorème du produit nul.

3 $P \iff Q$: $|x - 1|$ est la distance de x à 1, et les réels situés à une distance au plus 2 de 1 sont ceux de l'intervalle $[1-2\,;\,1+2] = [-1\,;\,3]$ (voir le chapitre « Calcul littéral »).

4 $P \Longrightarrow Q$: si $x > 2$, alors x et 2 sont strictement positifs, et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$.

Mais pas $Q \Longrightarrow P$: $x = -1$ vérifie $\dfrac{1}{x} = -1 < \dfrac{1}{2}$ sans vérifier $x > 2$.

Chapitre 2

Notions d'algorithmique

Plan du chapitre

1. Qu'est-ce qu'un algorithme ?
2. Les instructions composées
3. Comment écrire une fonction en Python ?

1 Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Exercice type 1 — Lycée Marie Curie, Sceaux

On considère la séquence d'instructions :

```
1> a = 3
2> b = a/2
3> a+b = 4.5
4> b = b+1
```

Expliquer ce qui est effectué sur chaque ligne et préciser si chaque opération est autorisée.

Voir corrigé page 13

1.1 Introduction

Au collège, vous avez vu que le logiciel Scratch permettait de construire votre propre programme et ce, rien qu'en déplaçant des blocs d'instructions (les instructions sont des ordres à exécuter par l'ordinateur).

Ces blocs d'instructions constituent un moyen simple de visualiser ce que l'on appelle un *algorithme*.

Définition 1 : algorithme

Un *algorithme* est une suite finie d'instructions.

Dans un premier temps, on peut écrire l'algorithme dans un langage *naturel*.

COURS

Exemple :

```
Variable
   x est un nombre
Début
   x ← 5
   Afficher x
   x ← 10
   Afficher x
Fin
```

L'instruction `x ← 5` est une *affectation*. La valeur 5 est stockée dans la variable `x` Au départ, le nombre « 5 » s'affiche (car c'est la première valeur de la variable `x`) et dans un second temps, c'est « 10 » qui s'affiche (car on a *affecté* à `x` une autre valeur après le premier affichage).

On traduit l'algorithme pour l'ordinateur sous forme de *programme*, à l'aide d'un *langage de programmation*, comme Python.

Exemple :

```
x = 5
print(x)
x = 10
print(x)
```

1.2 Type des variables

Dans le programme précédent, on remarque que Python n'a pas besoin qu'on lui précise que la variable `x` va contenir un nombre.

Au moment de l'affectation `x = 5`, Python détermine lui-même que 5 est un entier et que `x` va contenir un entier. On dit alors que la variable `x` est du *type* entier.

Le type d'une variable est important car il détermine (entre autres) quelle place la variable peut occuper en mémoire.

En Python, on distingue les types suivants :

- entier (en Python, `int`, de l'anglais *integer*) : `-234`.
- booléen (du mathématicien et logicien anglais George Boole, 1815-1864). Ce type ne contient que deux valeurs : `True` (vrai) et `False` (faux).
- flottant (en Python `float`) : `45.156`, `-8.11`. À noter : Python utilise le point décimal au lieu de la virgule. La position « flottante » de la virgule donne son nom à ce type.
- chaînes de caractères (en Python, `str` pour *string*) : `'mathématiques'`, `"bonjour"`.

Le nom d'une variable obéit à certaines règles. Pour simplifier, disons qu'il consiste en une suite de lettres, y compris le caractère « _ », suivie éventuellement d'une suite de chiffres. Noter que Python fait la différence entre majuscules et minuscules.

Par exemple,

- `ab1`, `ma_variable`, `Résultat`, `vAriAble` sont des noms autorisés ;
- `2`, `51ab`, `x+y`, `'hello'` sont interdits (`'hello'` est une chaîne de caractères, 2 est un entier : ce sont des *constantes*).

1.3 L'affectation

En Python, le symbole d'affectation est le signe égal (« = »).

Contrairement à ce qui se passe en mathématiques, le signe « = » n'est pas du tout symétrique.

Le membre de gauche est toujours un nom de variable. Si cette variable n'existe pas encore, elle est créée.

En revanche, le membre de droite peut contenir des variables mais elles doivent déjà contenir une valeur. La valeur du membre de droite est alors calculée puis stockée dans la variable située du côté gauche du « = ».

Par exemple, dans l'instruction `x=5`, on calcule la valeur du membre de droite (donc 5), qui est stockée dans la variable `x`.

Si maintenant on effectue `x=10`, la valeur 10 vient remplacer la valeur 5 dans la variable `x`.

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Marie Curie, Sceaux

```
1> a = 3
```

La valeur 3 est évaluée et stockée dans la variable `a`, qui est donc de type entier.

```
2> b = a/2
```

Le membre de droite est évalué. Comme `a` contient 3, le quotient n'est pas entier et sa valeur est `1.5`, qui est stockée dans `b`. Cette variable est de type flottant.
Si l'instruction avait été :

```
2> b = a//2
```

on aurait alors une division *entière*, et c'est l'entier 1 qui serait stocké dans `b`.

COURS

Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée Marie Curie, Sceaux

```
3> a+b = 4.5
```

Le membre de gauche n'est pas un nom de variable autorisé, cette instruction est donc fausse. Pourtant, l'instruction :

```
3> print(a+b)
```

devrait bien donner `4.5` mais le signe '=' n'est pas un symbole de comparaison, mais d'affectation.

```
4> b = b+1
```

`b` contient la valeur `1.5`, donc le membre de droite a pour valeur `2.5`. Cette valeur est stockée dans `b` et remplace la valeur précédente. La variable `b` reste du type flottant.
Remarquons qu'on vient d'assister à l'addition de `1`, qui est de type entier, avec `1.5`, qui est de type flottant. Ceci peut paraître anodin, mais c'est une opération qui ne va pas de soi sur un ordinateur. En fait, Python convertit automatiquement l'entier `1` en le flottant `1.0` pour pouvoir faire l'addition. Certains langages de programmation ne font pas cette conversion automatiquement et produiraient un message d'erreur.

Voir énoncé page 11

2 Les instructions composées

Exercice type 2 — Lycée Jules Ferry, Versailles

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$.

Écrire un algorithme qui permet d'afficher $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... , $f(20)$.

Voir corrigé page 20

2.1 Les séquences d'instructions

Une séquence d'instructions est tout simplement une suite d'instructions à exécuter les unes après les autres. En Python, les instructions de la séquence doivent être écrites les unes sous les autres, avec la même indentation (c'est-à-dire le même retrait).

```
a=3
print(a)
```

Si on manque de place, ou pour la clarté du code, on peut écrire les instructions de la séquence sur une même ligne. Elles doivent alors être séparées par un point-virgule :

```
a=3 ; print(a)
```

Chaque instruction de la séquence peut elle aussi être une séquence :

```
a=3 ; print(a)
b=2 ; print(b)
```

Une instruction simple est un cas particulier de séquence d'instructions.

2.2 Instruction conditionnelle : SI ... ALORS ...

L'instruction « SI ... ALORS ... » permet d'exécuter une ou plusieurs instructions si une condition est remplie. Sa structure générale est :

```
SI condition ALORS
   instruction(s) à exécuter si la condition est remplie
FIN SI
```

Le plus souvent, la condition est une égalité ou une inégalité portant sur une variable.

Exemple :

```
Variable x : nombre
Début
   x ← 0
   Si x>10 alors
      Afficher x
   Fin Si
   Ajouter 20 à x
   Si x>10 alors
      Afficher x
   Fin Si
Fin
```

COURS

Au début, x vaut 0. Comme la condition x>10 est fausse, il ne se passe rien et on passe à la ligne suivante. On ajoute alors 20 à x, qui vaut maintenant 20. L'instruction suivante teste si x>10, ce qui est vrai, donc la valeur de x est affichée, c'est-à-dire 20. Voici la version Python :

En Python

```
x = 0
if x>10:
  print(x)
x = x + 20
if x>10:
  print(x)
```

La séquence concernée par la condition doit être indentée (c'est-à-dire qu'on doit faire un retrait). L'instruction `x = x + 20` n'est pas indentée et doit donc être exécutée quelle que soit la valeur de la condition `x>10`.

Une variante de cette instruction est « SI ... ALORS ... SINON ... » :

```
SI condition ALORS
   instruction(s) à exécuter si la condition est remplie
SINON
   instruction(s) à exécuter si la condition n'est pas
   remplie
FIN SI
```

Exemple :

```
Variable x : nombre
Début
   x ← 0
   Si x>10 alors
      Afficher x
   Sinon
      Afficher "trop petit"
   Fin Si
Fin
```

Ici, x contient la valeur 0. Comme la condition x>10 est fausse, c'est l'instruction qui suit "sinon" qui est exécutée et la chaîne de caractères : « trop petit » s'affiche à l'écran.

En Python

```
x = 0
if x > 10:
  print(x)
else:
  print("trop petit")
```

2.3 Les boucles POUR et TANT QUE

Une *boucle* permet d'exécuter plusieurs fois une ou plusieurs instructions.

2.3.1 - La boucle itérative POUR

On utilisera la boucle POUR quand on saura le nombre de fois qu'il faut exécuter un bloc d'instructions.

Sa structure générale est de la forme :

```
POUR variable ALLANT DE valeur initiale À valeur finale
   instruction(s) à répéter
FIN POUR
```

Remarques

- La variable, qui change de valeurs à chaque fois que la boucle s'exécute, est aussi appelée *variable de boucle* ou *compteur*, pour ne pas qu'il y ait d'ambiguïté avec les autres variables de l'algorithme.
- « FIN POUR » indique la fin de la liste des instructions à répéter.

Exemple : soit $f(x) = x^2 - 3x$.
Pour calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... , $f(20)$, on peut utiliser l'algorithme suivant.

```
Variables x,y : nombres
Début
   Pour x allant de 0 à 20
     y prend la valeur x**2-3*x
     Afficher y
   Fin Pour
Fin
```

On note que `x**2` signifie que la valeur de x est mise au carré.

COURS

En Python, on utilise la fonction *range* (*intervalle*, en anglais). Attention, par convention, la valeur finale est toujours exclue. Si on veut que x décrive les valeurs de 0 à 20 inclus, il faut donc demander que x prenne les valeurs de 0 à 21 (exclu) :



En Python

```
for x in range(0,21):
  y=x**2-3*x
  print(y)
```

Remarque : il n'est pas obligatoire d'utiliser la variable de boucle à l'intérieur même de la boucle. Par exemple, si on veut afficher 100 fois la chaîne « Bonjour ! », on pourra utiliser l'algorithme suivant.

```
Variable : i
Début
   Pour i allant de 1 à 100
     Afficher "Bonjour !"
   Fin Pour
Fin
```

En Python

```
for i in range(1,101):
  print("Bonjour !")
```

2.3.2 - La boucle conditionnelle TANT QUE

On utilise une boucle TANT QUE lorsque la longueur de la boucle n'est pas connue (ou difficile à prévoir) au moment de l'écriture de l'algorithme.

La forme générale de cette boucle s'écrit :

```
TANT QUE condition FAIRE
   instruction(s)
FIN TANT QUE
```

Remarque : « FIN TANT QUE » indique la fin de la liste des instructions à répéter.

On utilisera la boucle TANT QUE quand la condition dépendra du contenu de la boucle.

Exemple : on veut afficher le plus petit entier naturel n pour lequel :

$$\frac{1}{n^2+n+1} \leqslant 10^{-6}.$$

Pour cela, on utilise l'algorithme suivant.

```
Variable : n
Initialisation : n prend la valeur 0
Début
   Tant que 1/(n*n+n+1) > 10^-6
     n prend la valeur n+1
   Fin Tant que
   Afficher n
Fin
```

- Avant d'entrer dans la boucle, n vaut 0, et donc :
$$\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{0^2+0+1} = 1,$$
qui est strictement supérieur à 10^{-6}. Donc on exécute l'instruction dans la boucle : n est augmenté de 1, donc vaut 1.
- On teste à nouveau la condition :
$$\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{1^2+1+1} = \frac{1}{3},$$
qui est encore plus grand que 10^{-6} donc on exécute l'instruction à l'intérieur de la boucle.
- Ainsi de suite jusqu'à ce que $\dfrac{1}{n^2+n+1}$ soit inférieur ou égal à 10^{-6}. Dans ce cas, on sort de la boucle et on affiche la dernière valeur de n, celle pour laquelle $\dfrac{1}{n^2+n+1} \leqslant 10^{-6}$ pour la première fois.



```
n = 0 # initialisation
while 1 / (n**2 + n + 1) > 10**(-6):
    n = n+1 # incrémentation
print(n)
```

Pour information, ce programme affiche le nombre 1 000.
Les boucles non bornées sont délicates à manier. Dans l'algorithme ci-dessus, il ne faut pas oublier d'initialiser ou d'incrémenter la variable n. Il faut s'assurer également que la condition finira par devenir fausse, sous peine que la boucle ne s'arrête plus (c'est ce qu'on appelle une « boucle infinie »). Il n'y a pas ces difficultés avec une boucle bornée, pour laquelle l'initialisation, l'incrémentation et l'arrêt sont en général assurés.

COURS

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Jules Ferry, Versailles

Il s'agit de répéter le calcul de $f(x)$, x prenant les valeurs 0, 1, etc. jusqu'à 20.
Une boucle POUR paraît tout indiquée.

Algorithme

```
Variables : x, y
Début
   x ← 0
   Pour x allant de 0 à 20
     y ← (2*x**2+x)/(x**2+2*x+1)
     Afficher y
   Fin Pour
Fin
```

En Python

```
for x in range(0,21):
  y = (2*x**2+x)/(x**2+2*x+1)
  print(y)
```

Voir énoncé page 14

3 Comment écrire une fonction en Python ?

Exercice type 3 — Lycée Marie Curie, Sceaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donnée par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}.$$

Programmer la fonction `f(x)` en Python.

Voir corrigé page 21

En mathématiques, une fonction f utilise un nombre x pour calculer une valeur $f(x)$.

Une fonction Python généralise ce principe. À partir d'un *argument* `x` (parfois plusieurs, parfois aucun !), elle exécute un certain nombre d'instructions et renvoie une valeur. Pour programmer une fonction, on utilise le mot-clé *def*. Le nom de la fonction doit vérifier les règles habituelles des noms de variables.

Ne pas oublier qu'un ordinateur fait ce qu'on lui demande, certes très vite, mais qu'il ne prend pas d'initiative. Lui demander de calculer une valeur ne suffit pas : il faut demander que cette valeur soit *communiquée*, d'une manière ou d'une autre.

Prenons l'exemple de la fonction carré. Le programme :

```
def f(x):
  x**2
```

ne contient pas de faute de langage. Cependant, il n'est pas satisfaisant parce que la fonction f calcule bien le carré de la variable x, mais le résultat du calcul est perdu. On peut penser à utiliser `print` :

```
def f(x):
  print(x**2)
```

C'est déjà mieux, le résultat du calcul sera affiché à l'écran. Cependant, on ne peut pas utiliser $f(x)$ dans un calcul comme on le fait en mathématiques. Par exemple : `1+f(2)` va déclencher une erreur.

Le mieux est de demander à la fonction de renvoyer le résultat calculé à l'aide du mot-clé : `return`. Par exemple, la fonction « carré » s'écrit en Python :

```
def f(x):
  return x**2
```

On peut ensuite utiliser la fonction dans un autre programme :

```
print(f(2))
y = f(3)+1
print(y)
```

À la première ligne, on « appelle » `f(2)`. Cette valeur est évaluée en remplaçant le `x` de la définition de `f` par 2. La fonction `f` renvoie alors la valeur 4, et c'est donc 4 qui est affiché. Dans l'instruction suivante, qui est une affectation, on évalue `f(3)`, c'est-à-dire 9, et c'est donc 10 qui est stocké dans `y`, puis affiché.

En fait, nous avons déjà rencontré des fonctions, comme `print` et même `range`.

On notera que `def` ou `return` ne sont pas suivis de parenthèses car ce sont des mots-clés et non des fonctions.

Solution de l'exercice type 3

Lycée Marie Curie, Sceaux

La définition de la fonction commence par le mot-clé `def`. Il faut penser à bien indenter la séquence d'instructions et utiliser `return` pour renvoyer la valeur calculée.

```
def f(x):
  y=(2*x**2-1)/(x+1)
  return y
```

Voir énoncé page 20

INTERROS

1 QCM Entiers de 1 à 9

3 min Corrigé p. 27

On cherche à écrire un programme en Python qui affichera tous les nombres entiers de 1 à 9. Parmi ces propositions, écrites en Python, lesquelles vous paraissent correctes ?

a
```
if k>0 and k<10 : print(k)
```

b
```
k=1
while k<10 : print(k)
```

c
```
for k in range(1,10): print(k)
```

d
```
for k in range(1,9): print(k)
```

2 QCM De Python à un algorithme

5 min Corrigé p. 27

Voici un programme en Python :



```
x = 5
for i in range(0,10):
  x = x*2/(x-4)
  print(x)
```

Parmi les algorithmes suivants, quel est celui qui représente ce programme ?

a
```
x ← 5
Pour i allant de 1 à 10
   x ← x*2/(x-4)
Fin Pour
Afficher x
```

b
```
x ← 5
Pour i allant de 0 à 9
   x ← x*2/(x-4)
   Afficher x
Fin Pour
```

c
```
x ← 5
Pour i allant de 0 à 10
   x ← x*2/(x-4)
   Afficher x
Fin Pour
```

3 Traduire un programme Python

★ 5 min Corrigé p. 27

Lycée Hoche, Versailles

Voici un programme Python :



```
u=50
d=10
n=0
while d>=0.01:
  u = 0.7*u+20
  d = 200/3 - u
  n = n + 1
print(n)
```

En utilisant une boucle « `Tant que` », écrire en langage naturel un algorithme qui décrit exactement ce que fait ce programme.

4 Un programme

★ 20 min Corrigé p. 28

Lycée Turgot, Paris

On considère le programme suivant :



```
1 def f(x):
2   y=(x+2)*(x-1)
3   y=4*y
4   y=y+8
5   y=y/(x+1)
6   return y
```

1. Quel est le type des variables `x` ? `y` ? `f` ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de `x` l'algorithme va-t-il échouer ?
3. Que fait la fonction `f` ?

5 Programmes de calcul

★ 10 min Corrigé p. 28

Lycée Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

On considère les programmes de calculs page suivante :

1. Écrire deux fonctions Python `A(x)` et `B(x)` qui retournent respectivement les résultats des programmes de calcul A et B pour un nombre x entré en argument.
2. Écrire un programme Python qui affiche les résultats des programmes A et B pour tous les entiers compris entre -5 et 5.

Programme A	Programme B
• Choisir un nombre x • Élever ce nombre au carré • Soustraire au résultat le double du nombre de départ • Ajouter 1 au résultat	• Choisir un nombre x • Lui soustraire 1 • Élever au carré le résultat

6 Pécule

★★ 10 min Corrigé p. 29

Lycée Rabelais, Meudon

Les parents de Johanna décident de lui constituer un petit pécule. Le jour de sa naissance, ils déposent 250 € sur un compte rapportant 2,75 % par an.

À chaque anniversaire, ils ajoutent également 250 €.

1. Écrire un algorithme avec une boucle POUR... qui permet de calculer le pécule de Johanna le jour de ses 18 ans.
2. Programmer cet algorithme en Python ou sur votre calculatrice.

7 Laboratoire pharmaceutique

★★ 10 min Corrigé p. 30

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Un laboratoire produisant un sirop contre la fièvre à destination de nouveau-nés fournit le protocole médical suivant : pour une température corporelle supérieure ou égale à 38,5 °C, donner 2 cuillères de sirop. Pour une température corporelle strictement supérieure à 37,5 °C et strictement inférieure à 38,5 °C, donner 1 cuillère de sirop.

On considère le programme Python suivant :

```
def sirop(T):
    N = 0
    if T>37.5:
        N = ...
    if T>=38.5:
        N = ...
    return N
```

1. À quoi sert cette fonction ? Préciser à quoi correspondent les variables T et N.
2. Compléter la fonction.

3 Le cas où le nouveau-né n'a pas de fièvre (température corporelle inférieure ou égale à 37,5 °C) est-il prévu dans l'algorithme ? On pourra justifier la réponse en testant l'algorithme avec le nombre 37 en entrée.

8 Le site marchand

★★ — 10 min — Corrigé p. 30

Lycée Fénelon, Paris

Durant tout le week-end, un site marchand propose une promotion pour toute commande d'un montant minimum de 20 €.

Si le montant de la commande est :

- strictement inférieur à 100 €, une remise de 10 € est offerte.
- entre 100 € compris et 200 € non compris, une remise de 25 € est offerte.
- supérieur ou égal à 200 €, une remise de 20 % est offerte.

1 Calculer le prix à payer pour une commande d'un montant de 130 €, de 80 € et de 300 €.

2 On a commencé l'écriture d'une fonction Python qui automatise le calcul du prix à payer pour une commande de montant $M \geqslant 20$:

```
def prix(M):
    if M < 20:
        return 0
    elif M < 100:
        ...
    elif M < 200:
        ...
    else:
        ...
```

Compléter le code pour qu'il fonctionne correctement.

9 La conjecture de Syracuse

★★★ — 20 min — Corrigé p. 31

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

On considère la fonction A, qui à tout entier naturel n non nul associe :

$$A(n) = \begin{cases} n/2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1 Calculer $A(1)$, $A(4)$, $A(2)$.

2 Programmer cette fonction en Python.

3 On considère le programme de calcul suivant :

```
1. Choisir un nombre entier n non nul.
2. Affecter n ← A(n)
3. Aller à l'étape 2.
```

Que se passe-t-il si $n = 1$, 2, ou 4 ?

4 La conjecture de Syracuse (nommée ainsi car le problème fut diffusé pour la première fois à l'université de Syracuse, en Amérique, par le mathématicien Helmut Hasse) affirme que, quelle que soit la valeur initiale de n, le programme arrive toujours à la suite de nombres 1, 4, 2, 1, 4, 2,...

On dit que ce résultat est une *conjecture* car il semble vrai mais il n'a pas été démontré.

Écrire un programme en Python qui permet de vérifier cette conjecture pour n'importe quel nombre n.

10 Le nombre d'or

★★★ 20 min Corrigé p. 32

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Le *nombre d'or* est le nombre positif noté φ tel que :

$$\varphi^2 = \varphi + 1.$$

On suppose que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$ et donc que :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

En s'inspirant de ceci, écrire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée du nombre d'or (peu importe la précision).

1 QCM Entiers de 1 à 9

Énoncé p. 22

a Cette instruction n'est pas une boucle. Dans le meilleur cas, seule une valeur de k s'affichera à l'écran.

b Il s'agit bien d'une boucle, mais la valeur de k n'est pas incrémentée. Elle gardera donc toujours la valeur 1, et cette valeur sera affichée à l'écran un nombre indéfini de fois, jusqu'à ce que l'utilisateur arrête le programme ! On peut corriger le programme en ajoutant `k = k + 1` dans la boucle pour incrémenter la variable k.

```
k = 1
while k < 10:
    print(k)
    k = k + 1
```

c C'est la solution élégante et efficace pour le problème posé.

d Attention, en Python la borne finale est toujours exclue, les entiers de 1 à 8 seront affichés.

2 QCM De Python à un algorithme

Énoncé p. 22

Rappelons qu'en Python, la borne supérieure de l'intervalle est exclue, donc `i` prend les valeurs 0, 1, 2, ..., 9.

L'algorithme **a** n'affiche qu'une valeur car « Afficher x » est en dehors de la boucle « Pour ». Il ne peut donc pas convenir car dans le programme Python, l'indentation montre que l'affichage de `x` est bien à l'intérieur de la boucle `for` ; il faut donc que les valeurs successives de `x` s'affichent 10 fois. Or, l'algorithme **c** affiche 11 valeurs (car la boucle s'exécute pour `i` allant de 0 à 10 et il y a 11 valeurs : 0, 1, 2, 3, …, 9, 10).

La bonne réponse est donc l'algorithme **b** qui affiche bien 10 valeurs (car `i` prend les valeurs 0, 1, 2, …, 8, 9) de `x`.

3 Traduire un programme Python

Énoncé p. 23

Lycée Hoche, Versailles

```
Variables : u, d, n (nombres)
Début
  u ← 50
  d ← 10
  n ← 0
  Tant que d⩾0,01 faire:
    u ← 0,7×u+20
    d ← 200/3-u
    n ← n+1
  Fin Tant que
  Afficher n
Fin
```

CORRIGÉS

4 Un programme

Énoncé p. 23

Lycée Turgot, Paris

1 `x` peut être entier (type « `int` ») ou réel (type flottant, ou « `float` »).

À cause de la division, la variable y est toujours interprétée comme un flottant par Python.

Enfin, `f` est une fonction.

2 À la ligne 5, on effectue une division par $x+1$.

La valeur $x=-1$ va donc causer une erreur de calcul (division par zéro).

3 Au début de l'évaluation de `f(x)`, $y=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$ puis $y=4(x^2+x-2)=4x^2+4x-8$.

Ensuite, $y=(4x^2+4x-8)+8=4x^2+4x$.

La valeur finale est $y=\dfrac{(4x^2+4x)}{x+1}=\dfrac{4x(x+1)}{x+1}=4x$.

Conclusion : la fonction f ne fait que multiplier x par 4 : pour tout $x\neq -1$, $f(x)=4x$.

5 Programmes de calcul

Énoncé p. 23

Lycée Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

1 Il y a plusieurs manières d'aborder un tel exercice. L'une d'elles consiste à exprimer en fonction de x le résultat des deux programmes de calculs.

Programme A	Expressions algébriques
• Choisir un nombre x	• x
• Élever ce nombre au carré	• x^2
• Soustraire le double de x	• x^2-2x
• Ajouter 1 au résultat	• x^2-2x+1

et

Programme B	Expressions algébriques
• Choisir un nombre x	• x
• Lui soustraire 1	• $x-1$
• Élever au carré le résultat	• $(x-1)^2$

Les fonctions `A(x)` et `B(x)` peuvent donc s'écrire comme indiqué page suivante.

```
def A(x):
    return x*x - 2*x + 1

def B(x):
    return (x - 1)**2
```

2 Une possibilité de programme est la suivante :

```
x = -5

while x <= 5:
    print( A(x) , B(x) )
    x = x + 1
```

Si nous préférons utiliser une boucle POUR, nous pouvons opter pour la solution suivante :

```
for x in range(-5,6):
    print( A(x) , B(x) )
```

6 Pécule

Énoncé p. 24

Lycée Rabelais, Meudon

1 Chaque année, le pécule de Johanna est donc multiplié par 1,0275 puis on lui ajoute 250.

Algorithme

```
Variables: anniversaire, pecule (nombres)
Début
  pecule ← 250
  Pour anniversaire allant de 1 à 18
    pecule ← 250+1,0275×pecule
  Fin Pour
  Afficher pecule
Fin
```

2 La traduction en Python est quasi immédiate :

```
pecule = 250
for anniversaire in range(1,19):
  pecule = 250 + 1.0275*pecule
print(pecule)
```

Ce programme affiche la valeur `6130.753649953076`, Johanna disposera donc de 6 130,75 € à son 18e anniversaire.

CORRIGÉS

7 Laboratoire pharmaceutique

Énoncé p. 24

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

1 Cet algorithme permet de renvoyer le nombre de cuillères de sirop N à donner en fonction de la température T en paramètre.

2 La fonction complète est :

En Python

```
def sirop(T):
    N = 0
    if T>37.5: N = 1
    if T>=38.5: N = 2
    return N
```

3 Comme l'énoncé nous le suggère, on peut tester le cas où l'on appelle la fonction avec 37 en argument.

Les deux conditions `T>37.5` et `T>=38.5` ne sont pas satisfaites et les instructions `N = 1` et `N = 2` ne sont pas exécutées. La valeur de `N` reste donc à 0, valeur retournée par la fonction.

Ceci est correct car si le nouveau-né n'a pas de fièvre, aucune cuillère de sirop ne doit être donnée.

Ainsi, le cas où le nouveau-né n'a pas de fièvre est prévu par l'algorithme.

8 Le site marchand

Énoncé p. 25

Lycée Fénelon, Paris

1 • Pour 130 €, le prix à payer est :

$$130 - 25 = 105 \text{ €} \qquad \text{car } 100 \leqslant 130 < 200.$$

• Pour 80 €, le prix à payer est :

$$80 - 10 = 70 \text{ €} \qquad \text{car } 80 < 100.$$

• Pour 300 €, le prix à payer est :

$$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 300 = 0{,}8 \times 300 = 240 \text{ €} \qquad \text{car } 300 \geqslant 200.$$

2

```
def prix(M):
    if M < 20:
        return 0
    elif M < 100:
        return M - 10
    elif M < 200:
        return M - 25
    else:
        return 0.8 * M
```

Si $M < 20$, la commande ne bénéficie pas de la promotion : on renvoie M. Si $20 \leqslant M < 100$, on retire 10 € à M. Si $100 \leqslant M < 200$, on retire 25 € à M. Sinon, $M \geqslant 200$: on fait une remise de 20 %, on doit donc payer $0{,}8 \times M$.

9 La conjecture de Syracuse

Énoncé p. 25

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

1 $n = 1$ est impair, donc $A(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$; $n = 4$ est pair, donc $A(4) = \dfrac{4}{2} = 2$; $n = 2$ est pair, donc $A(2) = 1$.

2 En Python

```
def A(n):
    if n%2==0: return n//2
    else: return 3*n+1
```

L'instruction `n%2` calcule le reste de la division euclidienne par 2, qui vaut 0 si et seulement si n est pair. La division `n//2` est la division entière. Il est important de ne pas utiliser `n/2` qui donne un flottant (même si n est pair) et risque de poser des problèmes pour utiliser la valeur de `A(n)` par la suite.

3 D'après la première question, si n prend la valeur 1, elle prend ensuite la valeur 4, puis 2, puis de nouveau 1, etc. Si $n = 2$ ou 4, on atteint la valeur $n = 1$ en 1 ou 2 étapes. Le programme donne alors la suite 1, 4, 2, 1, 4, 2, etc.

4 À la vue de la réponse à la troisième question, nous arrêtons le programme dès que n atteint la valeur 1. Tant que cette valeur n'est pas atteinte, on remplace la valeur de n par celle de $A(n)$ et on l'affiche.

```
n=120
while n!=1:
    n=A(n)
    print(n)
```

Par exemple, si l'utilisateur saisit 120, le programme affiche : 60, 30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

CORRIGÉS

10 Le nombre d'or

Énoncé p. 26

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Pour calculer une valeur approchée de φ, on peut essayer de partir d'une variable `f` valant 1, puis faire une boucle dans laquelle `f` deviendra $1+\frac{1}{f}$.

```
Variables
  n est un nombre
  f est un nombre
Initialisation
  f prend la valeur 1
Début
  Pour n allant de 1 à 100
    f prend la valeur 1+1/f
  Fin Pour
  Afficher f
Fin
```

Ici, nous avons souhaité répéter 100 fois l'instruction « `f` devient $1+\frac{1}{f}$ », mais on peut bien sûr changer cette valeur (100) et mettre 200, 300,...

En Python

```
f=1
for n in range(100):
    f = 1 + 1/f
print(f)
```

En exécutant ce programme, la valeur affichée est `1.618033988749895`, soit $\varphi \approx 1{,}618\,034$.

Chapitre 3

Nombres et calculs

Plan du chapitre

1. Ensembles de nombres
2. Calculer avec les entiers
3. Règles de calcul
4. Intervalles

1 Ensembles de nombres

Exercice type 1 — Lycée Edgar Quinet, Bourg-en-Bresse

1 Trouver le plus petit ensemble des nombres suivants.

$$-11\,;\,2{,}4\,;\,\sqrt{7}\,;\,\sqrt{36}\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,\frac{21}{3}.$$

2 Compléter par $\in$ ou $\notin$:

$$\sqrt{2}\ldots\mathbb{R}\,;\,\sqrt{64}\ldots\mathbb{Z}\,;\,\frac{3}{7}\ldots\mathbb{N}\,;\,\pi\ldots\mathbb{Q}.$$

Voir corrigé page 36

1.1 Inclusion des ensembles

Définition 1 : ensemble

Un ensemble est une collection d'objets distincts. Chacun de ces objets est un élément de l'ensemble. On peut décrire un ensemble en écrivant la liste de ses éléments entre accolades $\{\ldots\}$, séparés par des points-virgules.
Il existe un ensemble sans élément, appelé l'*ensemble vide*, et on le note : $\varnothing$.

Définition 2 : symbole d'appartenance

Si un nombre x appartient à un ensemble A, on écrira : $x \in A$.
Si un nombre x n'appartient pas à un ensemble A, on écrira : $x \notin A$.

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\ldots\}.$$
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;-2\,;-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\ldots\}.$$

COURS

- On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ (*n appartient* à l'ensemble $\mathbb{N}$) et $a \in \mathbb{Z}$.
- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls).
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire des abscisses de tous les points d'une droite graduée (appelée *droite numérique*) : à chaque point de la droite correspond un unique réel, et réciproquement.

À RETENIR

Si un ensemble est suivi d'une étoile en exposant, il a pour éléments tous les nombres de cet ensemble sauf 0.
Par exemple, $\mathbb{N}^* = \{1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$.

Définition 3 : inclusion de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles.
On dit que A est *inclus* dans B, et on note $A \subset B$, si tous les éléments de A sont dans B.

Propriété 1 : inclusion des ensembles de nombres

$\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, qui lui-même est inclus dans $\mathbb{D}$, etc. jusqu'à $\mathbb{R}$. On écrira alors :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Si on souhaite enlever un ou plusieurs nombres à un ensemble, on le fera suivre de : $\backslash\{\ldots\}$.

Exemples

- $\mathbb{Q} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ désigne l'ensemble de tous les rationnels sauf $\dfrac{1}{3}$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres réels auquel on a enlevé tous les nombres rationnels ; on appelle cet ensemble l'ensemble des *irrationnels*.

1.2 Plusieurs écritures pour un même nombre

Un nombre réel peut être *représenté* de plusieurs façons. Par exemple :

$$\frac{51}{5} = \frac{5{,}1}{0{,}5} = 10{,}2 = 1{,}02 \times 10^1$$

ou encore :

$$\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots \quad \text{(le chiffre 3 se répète indéfiniment).}$$

Quelle que soit l'écriture adoptée, il s'agit toujours du *même* nombre.

Par exemple,

- $\frac{51}{5}$ n'est pas uniquement rationnel ; c'est aussi un nombre décimal.
- $\sqrt{9}$ n'est pas uniquement réel ; c'est aussi un entier naturel car $\sqrt{9} = 3$.

Ces caractéristiques (décimal, entier, etc.) sont celles du nombre lui-même et non de son écriture.

Plus petit ensemble

On désignera par « plus petit ensemble » du nombre $\frac{51}{5}$ l'ensemble $\mathbb{D}$ car c'est *a minima* un décimal (il n'est pas entier). On écrira alors : $\frac{51}{5} \in \mathbb{D}$.

Ainsi, le plus petit ensemble de $\sqrt{9}$ est $\mathbb{N}$. On écrira alors : $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$.

Propriété 2

$\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Retrouvez la démonstration de cette propriété en vidéo.

Propriété 3

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Retrouvez en vidéo la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

1.3 Encadrer et arrondir un réel

Définition 4

Encadrer un réel x à 10^{-n} près (avec $n \in \mathbb{N}$), c'est trouver un décimal d tel que $d \leqslant x < d + 10^{-n}$. L'*amplitude* de l'encadrement est 10^{-n}.

Exemple : $1{,}41 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}42$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.

Dans un problème, on arrondit un résultat en gardant un nombre de *chiffres significatifs* adapté à la précision des données : si une longueur est mesurée au millimètre (12,4 cm), donner une aire au μm^2 n'a pas de sens.

COURS

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Edgar Quinet, Bourg-en-Bresse

1
- $-11 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{21}{3} = 7 \in \mathbb{N}$
- $\sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}$
- $2{,}4 \in \mathbb{D}$
- $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$
- $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

2
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $\frac{3}{7} \notin \mathbb{N}$
- $\sqrt{64} \in \mathbb{Z}$
- $\pi \notin \mathbb{Q}$

Voir énoncé page 33

2 Calculer avec les entiers

Exercice type 2

1 Décomposer 60 en produit de deux entiers naturels de toutes les façons possibles.

2 Un terrain rectangulaire de longueur a, de largeur b ($b \leqslant a$), exprimées en mètres, a une aire de 60 m^2. Sachant que a et b sont des entiers naturels et que l'écart $a - b$ est le plus petit possible, déterminer a et b.

Voir corrigé page 38

2.1 Savoir utiliser les multiples et les diviseurs

Définitions 5

Soient a et b deux entiers relatifs. S'il existe un entier q tel que $a = bq$, alors on dit que :

- a est un multiple de b.
- b est un diviseur de a (ou « b divise a »).

Par exemple, 21 est un multiple de 7 (car $21 = 7 \times 3$), 5 est un diviseur de 15 (car $15 = 5 \times 3$).

Tous les entiers sont multiples de 1 (et de -1). 0 est le seul multiple de 0. Tout entier est multiple de lui-même (car $n = n \times 1$).

Inversement, 1 n'est multiple que de 1 (et -1), et 0 est multiple de tous les entiers (car $0 = n \times 0$).

Propriétés 4

- L'opposé d'un multiple de b est multiple de b.
- La somme (ou la différence) de deux multiples de b est un multiple de b.

En effet, cette somme s'écrit : $bq + br = b(q + r)$, avec q et r (et donc $q + r$) entiers.

Exemple : si 7 divise $n + 21$, alors 7 divise n. En effet, $n = (n + 21) + (-21)$ et 21 est multiple de 7.

La fonction Python `diviseur(k,n)` ci-dessous vérifie si l'entier naturel non nul k est diviseur de l'entier naturel n. Le principe de l'algorithme est de faire défiler les multiples de k : 0, k, $2k$, $3k$, etc., tant que ces multiples sont inférieurs strictement à n. Lorsque la boucle s'arrête, le multiple de k qu'on a atteint vérifie : soit $m = n$, donc n est multiple de k, soit $m > n$, donc n est compris au sens strict entre deux multiples consécutifs, donc n n'est pas multiple de k.

```
def diviseur(k,n):
    m = 0
    while m < n:
        m = m + k
    if m==n:
        return True
    else:
        return False
```

Propriétés 5 : critères de divisibilité

L'entier n est divisible :

- par 2 si son écriture se termine par 0, 2, 4, 6, ou 8 (chiffre des unités) ;
- par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- par 5 si son écriture se termine par 0 ou 5 ;
- par 6 si n est divisible par 2 et par 3 ;
- par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- par 10^k si son écriture se termine par *au moins* k zéros, où $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 6

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. La fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible si a et b n'ont pas de diviseur commun (autre que 1 ou -1).

COURS

Exemple : $\frac{15}{8}$ est irréductible, mais pas $\frac{12}{8}$ car $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

2.2 Pairs et impairs

Définition 7

Les multiples de 2 sont les entiers *pairs*. Les autres entiers sont *impairs*.

Par définition, les entiers pairs sont donc de la forme $2n$, avec $n \in \mathbb{Z}$.
Les entiers impairs sont de la forme $2n + 1$.

Propriétés 6

- Le carré d'un entier pair est pair.
- Le carré d'un entier impair est impair.

Propriétés 7

Soit x un entier.

- Si x^2 est pair, alors x est pair.
- Si x^2 est impair, alors x est impair.

Solution de l'exercice type 2

1 On cherche les diviseurs de 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.
On en déduit :

$$60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10.$$

2 On a trouvé toutes les décompositions possibles de 60 sous la forme ab.
On veut $a - b \geqslant 0$ et $a - b$ le plus petit possible, on a donc $a = 10$ et $b = 6$.

Voir énoncé page 36

3 Règles de calcul

Exercice type 3 — Lycée Ampère, Lyon

Calculer et écrire sans radicaux au dénominateur :

$$A = \frac{7}{\sqrt{2}+1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

Voir corrigé page 41

3.1 Règles de calcul avec les fractions

On rappelle ici les différentes techniques vues au collège :

- *Somme et différence*.
  On réduit au même dénominateur. Dans le pire des cas, le produit des dénominateurs peut servir :
  $$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}.$$
  Si les dénominateurs ont un diviseur commun intéressant, on peut trouver un dénominateur commun plus petit que le produit :
  $$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{12}-\frac{2}{12}=\frac{1}{12}.$$
- *Produit*.
  Le numérateur du produit est le produit des numérateurs, le dénominateur du produit est le produit des dénominateurs :
  $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$
  Notez qu'il peut être judicieux de décomposer les différents facteurs et simplifier *avant* de multiplier :
  $$\frac{32}{35}\times\frac{25}{8}=\frac{4\times 8}{5\times 7}\times\frac{5\times 5}{8}=\frac{4\times 8\times 5\times 5}{5\times 7\times 8}=\frac{4\times 5}{7}=\frac{20}{7}$$
  est préférable (si on calcule à la main) à :
  $$\frac{32}{35}\times\frac{25}{8}=\frac{800}{280}=\ldots=\frac{20}{7}.$$
  Bien sûr, si vous faites le même calcul à la machine, vous pouvez préférer la deuxième méthode, moins économique mais plus directe.
- *Quotient*.
  Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse. Par exemple :
  $$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{16}\times\frac{4}{5}=\frac{3\times 4}{4\times 4\times 5}=\frac{3}{20}.$$

Remarque : le mot *fraction* désigne seulement une *écriture* du type : $\frac{a}{b}$. Le nombre ainsi représenté n'est pas nécessairement rationnel. Ainsi, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ est un nombre irrationnel, écrit sous la forme d'une fraction.
Rassurez-vous : les règles de calcul que nous venons d'énoncer s'appliquent à toutes les fractions, qu'elles représentent ou non un nombre rationnel.

COURS

3.2 Règles de calcul avec les radicaux

Propriétés 8

Soient a et b deux réels positifs ou nuls.

- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- Si $a > 0$ et $b > 0$, alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
  (car en élevant au carré : $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$).
- $(\sqrt{a})^2 = a$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ pour tout réel a (même négatif).
  Par exemple, si $x = -2$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$, et non -2 !

Le mot *radical* désigne une façon d'écrire certains nombres.

Le nombre 2 est la *racine carrée* de 4, mais ce n'est un radical que si on l'écrit sous la forme $\sqrt{4}$.

Dans l'écriture des fractions, on évite de laisser des radicaux au dénominateur.

- *Cas n° 1* : le dénominateur *est* un radical. On multiplie le numérateur et le dénominateur par ce radical. Par exemple :

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

- *Cas n° 2* : le dénominateur est une somme contenant des radicaux.
  On utilise alors sa quantité conjuguée. La quantité conjuguée de $a + b$ est l'expression $a - b$. On fait alors apparaître $(a-b)(a+b)$ qui, une fois développé, est égal à $a^2 - b^2$, ce qui permet de se débarrasser des radicaux. Par exemple :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} &= \frac{2 \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{2 \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} \\ &= \frac{2 \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Voir le chapitre « Calcul littéral » pour plus d'informations sur les identités remarquables.

3.3 Règles de calcul avec les puissances

Propriétés 9

Soient a et b deux réels non nuls, et soient p, q et n trois entiers relatifs.

- $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$;
- $a^p \times a^q = a^{p+q}$;
- $(a^p)^q = a^{pq}$;
- $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;
- $a^n \times b^n = (ab)^n$ (avec le même exposant n) ;
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Solution de l'exercice type 3

Lycée Ampère, Lyon

$$A = \frac{7}{\sqrt{2}+1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{7(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{7(\sqrt{2}-1)}{2-1} + \frac{2\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= 7\sqrt{2} - 7 + \frac{6+2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 7\sqrt{2} - 7 + 3 + \sqrt{3}$$

$$= 7\sqrt{2} - 4 + \sqrt{3}.$$

Voir énoncé page 38

4 Intervalles

Exercice type 4

Lycée Alain, Le Vésinet

Exprimer par un intervalle ou une réunion d'intervalles :

1. $x > 2$
2. $x \leqslant -3$
3. $-1 < x \leqslant 5$
4. $x > 2$ et $x < 6$
5. $x < 2$ ou $x \geqslant 4$

Voir corrigé page 43

COURS

4.1 Notations et représentations

Définition 8

L'ensemble des nombres réels compris entre deux réels a et b ($a < b$) est un *intervalle*.

- Si a et b sont dans l'intervalle, on note cet intervalle $[a; b]$.
- Si a et b ne sont pas dans l'intervalle, on note cet intervalle $]a; b[$.
- Si a est compris dans l'intervalle, mais pas b, on note cet intervalle $[a; b[$.
- Si b est compris dans l'intervalle, mais pas a, on note cet intervalle $]a; b]$.

Définition 9 : intervalles non bornés

Soit a un réel. L'ensemble des réels x tels que :

- $x \geqslant a$ se note $[a; +\infty[$;
- $x > a$ se note $]a; +\infty[$;
- $x \leqslant a$ se note $]-\infty; a]$;
- $x < a$ se note $]-\infty; a[$.

Les symboles $+\infty$ (« plus l'infini ») et $-\infty$ (« moins l'infini ») ne désignent pas des nombres : le crochet est donc toujours ouvert de leur côté.
L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même se note $]-\infty; +\infty[$.

On représentera les intervalles sur l'axe des réels comme dans les exemples ci-dessous.

Exemples

- L'intervalle $[-3; 5]$ peut se représenter ainsi :



$$x \in [-3; 5] \iff -3 \leqslant x \leqslant 5.$$

- L'intervalle $[-3; 5[$ peut se représenter ainsi :



$$x \in [-3; 5[\iff -3 \leqslant x < 5.$$

Exemples

- L'intervalle $]-3;5]$ peut se représenter ainsi :



$$x \in]-3;5] \iff -3 < x \leqslant 5.$$

- L'intervalle $]-3;5[$ peut se représenter ainsi :



$$x \in]-3;5[\iff -3 < x < 5.$$

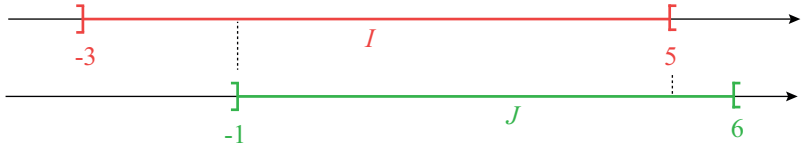
4.2 Union et intersection de deux intervalles

Définitions 10

Soient I et J deux intervalles.

- L'*union* (ou la *réunion*) de I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I *ou* dans J. On note l'union : $I \cup J$.
- L'*intersection* de I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I *et* dans J. On note l'intersection : $I \cap J$.

Exemple : on considère les intervalles $I =]-3;5[$ et $J =]-1;6[$.



- $I \cup J =]-3;6[$: les deux intervalles se chevauchent donc on peut aller de la plus petite valeur jusqu'à la plus grande.
- $I \cap J =]-1;5[$: on regarde où les deux intervalles se chevauchent.

Remarque : si les deux intervalles n'ont aucun point commun, leur intersection est vide ($I \cap J = \varnothing$). Leur réunion n'est en général pas un intervalle (par exemple $]-\infty;2[\cup [4;+\infty[$, mais elle peut l'être lorsque les intervalles sont « accolés » : $]-\infty;4[\cup [4;10] =]-\infty;10]$.

Solution de l'exercice type 4 — Lycée Alain, Le Vésinet

1. $]2;+\infty[$
2. $]-\infty;-3]$
3. $]-1;5]$
4. $]2;6[$
5. $]-\infty;2[\cup [4;+\infty[$

Voir énoncé page 41

INTERROS

1 QCM Décimaux

1 min — Corrigé p. 53

Quels sont les décimaux ?

a $1{,}27$
b $-\dfrac{17}{3}$
c $\sqrt{64}$
d $\sqrt{8}-\sqrt{2}$

2 QCM Rationnels

1 min — Corrigé p. 53

Quels sont les rationnels ?

a -15
b $\sqrt{5}$
c $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$
d $2{,}34$

3 V/F Radicaux

2 min — Corrigé p. 53

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a $\sqrt{2}-1$ est l'opposé de $\sqrt{2}+1$
b $\sqrt{2}-1$ est l'inverse de $\sqrt{2}+1$
c $\sqrt{8}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
d $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{10}$
e $\sqrt{-4}=-2$

4 V/F Fractions

3 min — Corrigé p. 53

Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a $\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$
b $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$
c $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{20}{9}=\dfrac{4}{3}$
d $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

5 V/F Intervalles

5 min — Corrigé p. 54

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

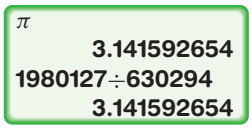
a Si $0 \leqslant x \leqslant 3$, alors $x \in]0;3[$.
b Si $x > 4$, alors $x \in [4;+\infty[$.
c Si $x \in]-\infty;2] \cap [0;4]$ alors $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 2$.
d Si $x \in]-\infty;4] \cap [0;2]$ alors $x \leqslant 4$ et $x > 2$.
e Si $x \in [0;1] \cup [2;3]$ alors $x \in [0;1]$ et $x \in [2;3]$.

6 V/F Test de connaissances

5 min — Corrigé p. 54

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Il existe des nombres décimaux non entiers a et b tels que $a + b$ soit un entier relatif.
2. Rachel affirme : « $\pi = \dfrac{1\,980\,127}{630294}$ ».
   Pour cela, elle montre son écran de calculatrice :



3. Le produit d'un nombre décimal par 100 est un entier.
4. Le quotient de deux nombres rationnels non nuls est un rationnel.

Automatismes

7 Comparer deux nombres ★

10 min — Corrigé p. 54

Lycée Louis Vincent, Metz

Comparer les nombres suivants :

1. $A = 5 - 2\sqrt{2}$ et $B = 3 - \sqrt{2}$.
2. $C = \dfrac{7}{9}$ et $D = \dfrac{12}{11}$.
3. $E = \dfrac{5}{9}$ et $F = \dfrac{7}{12}$.

8 Opérations entre des fractions ★

10 min — Corrigé p. 55

Lycée Louis Vincent, Metz

Écrire chacun des nombres rationnels suivants sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.

1. $A = \dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{15}$
2. $B = \dfrac{14}{9} \times \dfrac{15}{28}$
3. $C = 1 + \dfrac{\dfrac{5}{6}}{\dfrac{10}{9}}$

INTERROS

9 Opérations sur les puissances

★ 10 min Corrigé p. 55

Lycée Louis Vincent, Metz

1. Écrire le nombre suivant sous la forme a^n : $A = 3^{12} \times 3^{-4} \times \left(3^5\right)^{-2}$.
2. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme a^n, où a est un entier positif le plus petit possible et n un entier relatif :
$$B = \frac{4^5 \times 2^{-3}}{2^{-6}} \quad ; \quad C = 4^3 \times 5^3.$$
3. Écrire le nombre suivant sous la forme $2^n \times 3^p$ où n et p sont des entiers relatifs : $E = \dfrac{12^3 \times 18^2}{6^4 \times 3^5}$.

10 Écritures d'un nombre

★ 10 min Corrigé p. 56

Lycée Louis Vincent, Metz

1. Donner l'écriture scientifique des nombres $A = 340\,600\,000$ et $B = 0{,}000\,072\,5$.
2. Donner l'écriture décimale puis en pourcentage du nombre $C = \dfrac{7}{25}$, puis l'écriture décimale du nombre $D = 3{,}5\,\%$.
3. Donner l'écriture fractionnaire irréductible des nombres $E = 1{,}25$ et $F = 0{,}45$.

11 Ordre de grandeur

★ 10 min Corrigé p. 57

Lycée Louis Vincent, Metz

Dans une ville de 98 000 habitants, chaque habitant produit environ 1,2 kilogramme de déchets par jour.

1. Estimer l'ordre de grandeur de la masse totale de déchets produite par jour dans cette ville (en kilogrammes, puis en tonnes).
2. Vérifier la cohérence de ce résultat sachant que dans une ville voisine comptant 9 700 habitants, la masse de déchets produite par jour est de 11,5 tonnes.
3. En déduire un ordre de grandeur de la masse de déchets produite en une année dans la première ville.

12 Conversions d'unités

★ 10 min Corrigé p. 57

Lycée Louis Vincent, Metz

1. Un cycliste se déplace à une vitesse de 15 mètres par seconde (m/s). Exprimer cette vitesse en kilomètres par heure (km/h).
2. Une forêt a une superficie de 320 hectares. Sachant qu'un hectare vaut 10 000 m^2, exprimer cette superficie en kilomètres carrés (km^2).
3. Un sac de ciment pèse 38 kilogrammes (kg). Exprimer cette masse en tonnes (t).

Ensembles de nombres

13 Plus petit ensemble

★ 10 min Corrigé p. 57

Lycée Jacques Prévert, Taverny

Pour chaque nombre, donner, parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, le plus petit ensemble auquel il appartient.

$$5 \times 10^{-4} \quad , \quad \frac{3{,}6 \times \sqrt{4}}{3} \quad , \quad \frac{64}{3} \quad , \quad \sqrt{\frac{25}{16}} \quad , \quad \sqrt{\frac{49}{9}}.$$

14 Les différents ensembles

★ 10 min Corrigé p. 58

Lycée Montchapet, Dijon

On considère les nombres suivants :

- $4{,}567$
- 10^{-3}
- -10^{3}
- $6\,545$
- 4×10^{-3}
- $\sqrt{\pi}$
- $-\dfrac{3}{100}$
- $\dfrac{1}{3}$
- $-\dfrac{22}{9}$
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{144}$
- 0
- $\dfrac{2}{\pi}$
- $-\dfrac{23}{6}$
- $\sqrt{\sqrt{81}}$

1. Quels sont ceux qui sont décimaux ?
2. Quels sont ceux qui sont rationnels mais non décimaux ?
3. Quels sont ceux qui ne sont pas rationnels ?

15 Ensembles inclus

★ 15 min Corrigé p. 58

Lycée Victor Louis, Talence

On donne les nombres :

$a = 3{,}507$
$b = 5\,998$
$c = \sqrt{121}$
$d = 3{,}14$
$e = \dfrac{21}{6}$
$f = \pi$
$g = 4 \times 10^{-3}$
$h = \dfrac{1}{3}$
$i = 5^{-2}$
$j = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{8}{5} \times \dfrac{17}{12}$
$k = -\dfrac{22}{7}$
$l = \sqrt{2}$
$m = (3^2)^3 \times \dfrac{1}{9} \times 5^{-4}$

- Quels sont les nombres décimaux ?
- Quels sont les nombres rationnels non décimaux ?
- Quels sont les nombres non rationnels ?

INTERROS

16 Appartenance, inclusion

★ 15 min Corrigé p. 59

Lycée Gérard de Nerval, Soissons

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$.

1. $\dfrac{-15}{3} \ldots \mathbb{Z}$
2. $\sqrt{9} \ldots \mathbb{N}$
3. $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{Q}$
4. $\pi \ldots \mathbb{Q}$
5. $\mathbb{N} \ldots \mathbb{Q}^*$
6. $10^{-3} \ldots \mathbb{R}_+$

Calculs sur les fractions et puissances

17 Décompositions

★ 5 min Corrigé p. 59

Lycée Henri IV, Paris

Écrire sous la forme $2^n \times 3^p \times 5^q$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$:

1. $A = \dfrac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^2 \times 12^4}$
2. $B = \dfrac{12^3 \times 15^{-3}}{5^{-2} \times 2^3}$

18 Simplification

★ 5 min Corrigé p. 60

Lycée Hoche, Versailles

Simplifier l'écriture de $A = \dfrac{(0{,}2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} \div \dfrac{(-8)^3 \times 15}{(-12)^5}$.

19 Calculs et simplifications

★ 10 min Corrigé p. 60

Lycée Louis le Grand, Paris

Calculer :

1. $A = \dfrac{(-1)^5(2^3)(-7)^4}{21^2(-6)^3}$
2. $B = \dfrac{3-\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}} \times \dfrac{\frac{4}{15}-\frac{1}{10}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \div \dfrac{1+\frac{2}{5}}{2-\frac{1}{5}}$

20 Calculs et simplifications

★★ 20 min Corrigé p. 61

Lycée Blaise Pascal, Orsay

1. Calculer $A = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-\frac{1}{6}}$.

2 Simplifier $B = \dfrac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\dfrac{10^2}{5}\right)^2$.

3 Écrire plus simplement :

(a) $C = 2^{23} \times (0{,}5)^{24}$

(b) $D = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{108} \times (1{,}5)^{107}$

4 Donner l'écriture scientifique des nombres :

$$a = 0{,}000\,073\,654$$
$$b = 9\,325\,000$$
$$c = 0{,}023 \times 10^{-5}$$
$$d = 19{,}402 \times 10^2$$

21 Produit de puissances

★★ — 5 min — Corrigé p. 62

Lycée Hoche, Versailles

Écrire sous la forme d'un produit de puissances de a, b et c ($\neq 0$) :

$$B = \left(\frac{a^3}{c}\right)^2 \div \frac{[(a^7)^5 b^{-2}(c^{-3})^{-2}]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2}$$

22 Calculs d'une somme avec fractions

★★ — 15 min — Corrigé p. 62

Lycée Louis le Grand, Paris

Soit n un entier naturel non nul. Écrire sous la forme d'une fraction :

$$A = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

En déduire :

$$B = \frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} + \frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20 \times 21 \times 22}.$$

Calculs avec les entiers (arithmétique)

23 Diviseurs

★ — 10 min — Corrigé p. 64

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

1 Donner la liste de tous les diviseurs positifs de 640.

2 Parmi ces diviseurs, lesquels sont aussi des diviseurs de 1 040 ?

3 Un jardinier désire planter une haie autour d'une parcelle rectangulaire de longueur 10,4 mètres et de largeur 6,4 mètres. Il place un plant à chaque sommet du rectangle. La distance entre deux plants doit toujours être la même et doit être égale à un nombre entier de centimètres.

(a) Expliquer pourquoi cette distance, exprimée en centimètres, doit être à la fois un diviseur de 1 040 et un diviseur de 640.

(b) Quelle est la distance maximale qui peut séparer deux plants successifs ?

(c) Calculer le nombre de plants nécessaires pour entourer la parcelle rectangulaire.

24 Somme et multiples

★★ — 10 min — Corrigé p. 64

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

2 Démontrer que la somme de trois multiples consécutifs de 3 est un multiple de 9.

3 La somme de quatre entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?

25 Implication sur la divisibilité

★★ — 10 min — Corrigé p. 65

Lycée Loquidy, Nantes

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si a divise $n+4$ et $2n-3$ alors a est un diviseur de 11.

26 Ensemble d'entiers et divisibilité

★★ — 10 min — Corrigé p. 65

Lycée Louis Vincent, Metz

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n+24$.

27 Parité

★★ — 10 min — Corrigé p. 66

Lycée Pierre Caraminot, Égletons

Montrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs est toujours pair.

Radicaux

28 Avec racines carrées

★ — 5 min — Corrigé p. 66

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Montrer que $\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ est un entier naturel.

29 Ensembles inclus

★ — 5 min — Corrigé p. 67

Lycée Victor Louis, Talence

Soit $n = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{9-5\sqrt{3}}{10}$.

Quel est le plus petit ensemble auquel appartient n ?

30 Simplification

★ — 5 min — Corrigé p. 67

Lycée Henri IV, Paris

Simplifier afin que le résultat contienne au plus un radical $\sqrt{b}$, où $b \in \mathbb{N}$, et b est le plus petit possible.

1. $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{12}$
2. $D = \sqrt{\dfrac{6{,}3}{2{,}8}} \times \sqrt{\dfrac{18}{0{,}72}}$

31 Simplification

★ — 10 min — Corrigé p. 68

Lycée Charlemagne, Paris

Écrire A et B sous la forme $a + \sqrt{b}$, où a et b sont rationnels.

1. $A = \dfrac{3}{\sqrt{5}+2}$
2. $B = \dfrac{2\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1}$

32 Calcul avec fractions et radicaux

★ — 5 min — Corrigé p. 68

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Calculer :

$$A = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 8\sqrt{2}.$$

33 Avec une identité remarquable

★★ — 10 min — Corrigé p. 68

Lycée André Malraux, Biarritz

1. Écrire $(3-\sqrt{11})^2$ sous la forme $a + b\sqrt{11}$, où a et b sont des nombres entiers relatifs.
2. Quel est le signe de $3 - \sqrt{11}$?
3. En déduire une autre écriture de $\sqrt{20 - 6\sqrt{11}}$.

INTERROS

Intervalles

34 Union et intersection

★ — 2 min — Corrigé p. 69

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Déterminer l'union et l'intersection des intervalles $I =]5; 9]$ et $J = [-8; 6]$.

35 Union et intersection

★★ — 10 min — Corrigé p. 69

Lycée Cité internationale, Paris

Pour chacun des intervalles I et J suivants, décrire $I \cap J$ et $I \cup J$ de la manière la plus simple possible.

1. $I =]-3; 7]$ et $J = [-1; +\infty[$
2. $I =]-\infty; 4[$ et $J = [4; 10]$
3. $I = [-10; 2]$ et $J = [-3; 7]$
4. $I =]-\infty; 3]$ et $J = [-6; +\infty[$
5. $I =]-4; 2[$ et $J =]2; 5]$

1 QCM Décimaux

Énoncé p. 44

a $1{,}27 = \dfrac{127}{100}$ est décimal.

b $-\dfrac{17}{3}$ est irréductible et 3 ne divise aucune puissance de 10 (la somme des chiffres de 10^n vaut 1) : comme pour $\dfrac{1}{3}$, ce nombre est rationnel mais pas décimal.

c $\sqrt{64} = 8$ est entier, donc décimal.

d $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ n'est pas rationnel, donc pas décimal.

2 QCM Rationnels

Énoncé p. 44

a -15 est entier, donc rationnel.

b $\sqrt{5}$ est irrationnel.

c $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$ est entier, donc rationnel.

d $2{,}34$ est décimal, donc rationnel.

3 V/F Radicaux

Énoncé p. 44

a *Faux*. L'opposé de $\sqrt{2}+1$ est $-(\sqrt{2}+1)$, soit $-\sqrt{2}-1$.

b *Vrai* car $(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 2-1 = 1$.

c *Vrai* car $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

d *Faux* car $\sqrt{8}+\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, donc $(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2 = 9\times 2 = 18$, et non 10.

e *Faux* car la racine carrée de -4 n'est pas définie (ne pas confondre avec $-\sqrt{4} = -2$).

4 V/F Fractions

Énoncé p. 44

a *Faux* mais $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$.

b *Faux* : $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2} = 3$.

c *Vrai* : $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{20}{9} = \dfrac{3\times 4\times 5}{5\times 3\times 3} = \dfrac{4}{3}$.

d *Faux* car $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{12}+\dfrac{2}{12} = \dfrac{5}{12} \neq \dfrac{2}{3}$.

CORRIGÉS

5 V/F Intervalles

Énoncé p. 44

a *Faux*. L'intervalle est : [0; 3] (inégalités larges).

b *Vrai*. Si $x > 4$, alors $x \in]4; +\infty[\subset [4; +\infty[$.

c *Vrai*. x doit appartenir aux deux intervalles. On a donc, d'une part : $x \leqslant 2$ et $x \leqslant 4$, donc $x \leqslant 2$, et de l'autre : $x \geqslant 0$.

d *Faux*. On doit avoir $x \in [0; 2]$ donc $0 \leqslant x \leqslant 2$.

e *Faux*. Les deux conditions sont d'ailleurs incompatibles. Il faudrait dire : « Si $x \in [0; 1] \cup [2; 3]$ alors $x \in [0; 1]$ ou $x \in [2; 3]$. »

6 V/F Test de connaissances

Énoncé p. 45

1 *Vrai*. Par exemple, si $a = -3{,}8$ et $b = -1{,}2$ (nombres non entiers) alors $a + b = -5$ (entier relatif).

2 *Faux*. Si la calculatrice affiche un nombre avec les mêmes décimales, c'est que sa capacité d'affichage n'est pas suffisante pour afficher les décimales qui ne coïncident pas. En effet, en utilisant par exemple la console Python, on voit :

```
> > > from math import pi
> > > print(pi)
3.141592653589793
> > > print(1980127/630294)
3.141592653587056
```

Les résultats diffèrent.

3 *Faux*. En effet, si $a = 0{,}0001$ (nombre décimal) alors $100 \times a = 0{,}01$ (qui n'est pas un entier).

4 *Vrai*. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels non nuls ($a,c \in \mathbb{Z}^*$, $b,d \in \mathbb{N}^*$). Alors $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Comme ad et bc sont des entiers, avec $bc \neq 0$, ce quotient est un nombre rationnel.

7 Comparer deux nombres

Énoncé p. 45

Lycée Louis Vincent, Metz

1 On calcule la différence $A - B$:

$$A - B = 5 - 2\sqrt{2} - \left(3 - \sqrt{2}\right) = 5 - 2\sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Comme $2 = \sqrt{4}$ et $\sqrt{4} > \sqrt{2}$, on a $2 > \sqrt{2}$ donc $2 - \sqrt{2} > 0$. Par conséquent $A > B$.

2 Comme $7 < 9$: $C < 1$, et comme $12 > 11$: $D > 1$. Donc $C < D$.

3 Les deux nombres E et F sont positifs, on peut comparer leur quotient $\frac{E}{F}$ avec 1.

$$\frac{E}{F} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{7}{12}} = \frac{5}{9} \times \frac{12}{7} = \frac{5 \times 12}{9 \times 7} = \frac{5 \times 3 \times 4}{3 \times 3 \times 7} = \frac{5 \times 4}{3 \times 7} = \frac{20}{21}.$$

Comme $\frac{E}{F} < 1$, on a : $E < F$.

8 Opérations entre des fractions

Énoncé p. 45

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Le nombre A est une somme de deux fractions. Pour effectuer cette somme, les deux fractions doivent avoir le même dénominateur, ici 30. Donc :

$$A = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} + \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{25}{30} + \frac{14}{30} = \frac{39}{30} = \frac{3 \times 13}{3 \times 10} = \frac{13}{10}.$$

2 Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$B = \frac{14}{9} \times \frac{15}{28} = \frac{14 \times 15}{9 \times 28} = \frac{2 \times 7 \times 3 \times 5}{3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 7} = \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}.$$

3 Diviser par un nombre revient à multiplier par l'inverse de ce nombre, et la division est prioritaire sur l'addition :

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{10}{9}} = \frac{5}{6} \times \frac{9}{10} = \frac{5 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 2 \times 5} = \frac{3}{4}.$$

Donc :

$$C = 1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}.$$

9 Opérations sur les puissances

Énoncé p. 46

Lycée Louis Vincent, Metz

1
$$\begin{aligned} A &= 3^{12} \times 3^{-4} \times \left(3^5\right)^{-2} \\ &= 3^{12+(-4)} \times 3^{5\times(-2)} \\ &= 3^8 \times 3^{-10} \\ &= 3^{8+(-10)} \\ &= 3^{-2}. \end{aligned}$$

2 • $B = \dfrac{(2^2)^5 \times 2^{-3}}{2^{-6}}$
$= \dfrac{2^{10} \times 2^{-3}}{2^{-6}}$
$= 2^{10-3-(-6)}$
$= 2^{13}$.

• $C = 4^3 \times 5^3$
$= (4 \times 5)^3$
$= 20^3$.

3 On a :

• $12^3 = (2^2 \times 3)^3 = 2^6 \times 3^3$;

• $18^2 = (2 \times 3^2)^2 = 2^2 \times 3^4$;

• $6^4 = (2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$.

En utilisant ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} E &= \frac{2^6 \times 3^3 \times 2^2 \times 3^4}{2^4 \times 3^4 \times 3^5} \\ &= \frac{2^{6+2} \times 3^{3+4}}{2^4 \times 3^{4+5}} \\ &= \frac{2^8 \times 3^7}{2^4 \times 3^9} \\ &= 2^{8-4} \times 3^{7-9} \\ &= 2^4 \times 3^{-2}. \end{aligned}$$

10 Écritures d'un nombre

Énoncé p. 46

Lycée Louis Vincent, Metz

1 • $A = 340\,600\,000 = 3{,}406 \times 100\,000\,000 = 3{,}406 \times 10^8$.

• $B = 0{,}000\,072\,5 = \dfrac{725}{10\,000\,000} = 7{,}25 \times 10^{-5}$.

2 • $C = \dfrac{7}{25} = \dfrac{7 \times 4}{25 \times 4} = \dfrac{28}{100} = 0{,}28$. D'où $C = 0{,}28 = \dfrac{28}{100} = 28\,\%$.

• $D = 3{,}5\,\% = \dfrac{3{,}5}{100} = 0{,}035$.

3 • $E = 1{,}25 = \dfrac{125}{100} = \dfrac{5 \times 25}{4 \times 25} = \dfrac{5}{4}$.

• $F = 0{,}45 = \dfrac{45}{100} = \dfrac{9 \times 5}{20 \times 5} = \dfrac{9}{20}$.

11 Ordre de grandeur

Énoncé p. 46

Lycée Louis Vincent, Metz

1 L'ordre de grandeur de 98 000 est 100 000, soit 10^5. Celui de 1,2 est 1. La masse totale de déchets produite par jour dans cette ville est donc de l'ordre de $10^5 \times 1 = 10^5$ kilogrammes, c'est-à-dire 100 000 kg, ce qui correspond à 100 tonnes.

2 La ville voisine compte environ 10 fois moins d'habitants ; le résultat obtenu à la question 1 semble cohérent puisque la masse de déchets de cette petite ville (11,5 t) est environ 10 fois moins importante que dans la grande ville (environ 100 t).

3 Une année compte 365 jours, dont l'ordre de grandeur est 400, soit 4×10^2.

La masse annuelle est donc de l'ordre de $10^2 \times 4 \times 10^2 = 4 \times 10^4$ tonnes, c'est-à-dire environ 40 000 tonnes.

12 Conversions d'unités

Énoncé p. 46

Lycée Louis Vincent, Metz

1 15 m = 0,015 km et 1 h = 3 600 s, donc $1 \text{ s} = \dfrac{1}{3\,600}$ h.

$$\begin{aligned} 15 \text{ m/s} &= \frac{0{,}015}{\frac{1}{3\,600}} \text{ km/h} \\ &= 0{,}015 \times 3\,600 \text{ km/h} \\ &= 1{,}5 \times 10^{-2} \times 36 \times 100 \text{ km/h} \\ &= 54 \text{ km/h}. \end{aligned}$$

2 Comme $320 \times 10\,000 = 3\,200\,000$, la superficie de la forêt est 3 200 000 m^2.

1 km = 10^3 m donc 1 km^2 = 10^6 m^2, on en déduit que :

$$1 \text{ m}^2 = 10^{-6} \text{ km}^2.$$

La superficie de la forêt est donc, en km^2, égale à :

$$3\,200\,000 \times 10^{-6} = 3{,}2 \text{ km}^2.$$

3 1 t = 1 000 kg donc $1 \text{ kg} = \dfrac{1}{1\,000}$ t et $38 \text{ kg} = \dfrac{38}{1\,000}$ t = 0,038 t.

13 Plus petit ensemble

Énoncé p. 47

Lycée Jacques Prévert, Taverny

1 $5 \times 10^{-4} = 0{,}000\,5$ est un nombre décimal.

2 $\dfrac{3{,}6 \times \sqrt{4}}{3} = 1{,}2 \times 2 = 2{,}4$ est un nombre décimal.

3 $\dfrac{64}{3}$ est rationnel (mais non décimal).

4 $\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$ est décimal.

5 $\sqrt{\dfrac{49}{9}} = \dfrac{7}{3}$ est rationnel, non décimal.

14 Les différents ensembles

Énoncé p. 47

Lycée Montchapet, Dijon

1 Rappel : un nombre est *décimal* s'il s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{10^n} \quad , \quad a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, les nombres entiers sont des décimaux, puisqu'ils s'écrivent :

$$a = \frac{a}{10^0}.$$

Parmi ceux proposés, sont décimaux :

- $4{,}567$ car $4{,}567 = \dfrac{4\,567}{1\,000}$;
- 10^{-3} car $10^{-3} = \dfrac{1}{1\,000}$;
- $-10^3 = -1\,000$ est entier, donc décimal ;
- $6\,545$ est entier, donc décimal ;
- 4×10^{-3} car $4 \times 10^{-3} = \dfrac{4}{1\,000}$;
- $-\dfrac{3}{100}$;
- $\sqrt{144} = 12$ est entier, donc décimal ;
- 0 est entier, donc décimal ;
- $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$ est entier, donc décimal.

2 Sont rationnels mais non décimaux : $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{22}{9}, -\dfrac{23}{6}$.

3 Sont irrationnels : $\sqrt{\pi}, \sqrt{3}, \dfrac{2}{\pi}$.

15 Ensembles inclus

Énoncé p. 47

Lycée Victor Louis, Talence

- a est décimal.
- b est entier, donc décimal.
- $c = \sqrt{121} = 11$ est entier, donc décimal.

- $d = 3{,}14$ est décimal.
- $e = \dfrac{21}{6} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ est décimal.
- $f = \pi$ est irrationnel.
- $g = \dfrac{4}{1\,000} = 0{,}004$ est décimal.
- $h = \dfrac{1}{3}$ est rationnel mais non décimal.
- $i = 5^{-2} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$ est décimal.
- $j = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{8}{5} \times \dfrac{17}{12} = \dfrac{5}{15} - \dfrac{9}{15} + \dfrac{34}{15} = \dfrac{30}{15} = 2$, qui est entier.
- $k = \dfrac{-22}{7}$ est rationnel, non décimal.
- $l = \sqrt{2}$ est irrationnel.
- $m = \left(3^2\right)^3 \times \dfrac{1}{9} \times 5^{-4} = \dfrac{9^2}{5^4} = 0{,}1296$ est décimal.

16 Appartenance, inclusion

Énoncé p. 48

Lycée Gérard de Nerval, Soissons

1 $\dfrac{-15}{3} \in \mathbb{Z}$. En effet, $\dfrac{-15}{3} = -5$.

2 $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$ car $\sqrt{9} = 3$.

3 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. En effet, tous les entiers sont en particulier rationnels, car ils peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers ; par exemple, $5 = \dfrac{5}{1}$.

4 $\pi \notin \mathbb{Q}$, car π n'est pas rationnel (résultat admis). Son développement décimal est donc illimité et non périodique.

5 $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}^*$ car $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \notin \mathbb{Q}^*$.

6 $10^{-3} \in \mathbb{R}_+$, car 10^{-3} est positif.

17 Décompositions

Énoncé p. 48

Lycée Henri IV, Paris

1
$$\begin{aligned} A &= \frac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^2 \times 12^4} \\ &= \frac{5^3 \times 2^9 \times 3^4}{3^2 \times 5^2 \times 3^4 \times 2^8} \\ &= \frac{5 \times 2}{3^2} \\ &= 5 \times 3^{-2} \times 2. \end{aligned}$$

2 $$\begin{aligned} B &= \frac{12^3 \times 15^{-3}}{5^{-2} \times 2^3} \\ &= \frac{12^3 \times 5^2}{15^3 \times 2^3} \\ &= \frac{2^6 \times 3^3 \times 5^2}{5^3 \times 3^3 \times 2^3} \\ &= \frac{2^3}{5} \\ &= 2^3 \times 5^{-1}. \end{aligned}$$

18 Simplification

Énoncé p. 48

Lycée Hoche, Versailles

On applique les règles de calculs avec les fractions :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(0{,}2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} \div \frac{(-8)^3 \times 15}{(-12)^5} \\ &= \left(\frac{2}{10}\right)^3 \times \frac{5^4 \times 2^4}{2^3 \times 3^4} \times \frac{(-12)^5}{(-8)^3 \times 15} \\ &= \frac{2^3 \times 5^4 \times 2^4 \times 3^5 \times 2^{10}}{2^3 \times 5^3 \times 2^3 \times 3^4 \times 2^9 \times 3 \times 5} \\ &= 2^2 \text{ (après simplifications)} \\ &= 4. \end{aligned}$$

19 Calculs et simplifications

Énoncé p. 48

Lycée Louis le Grand, Paris

1 Le numérateur est négatif (facteur $(-1)^5 = -1$, les autres étant positifs) et le dénominateur aussi (facteur $(-6)^3 < 0$) : A est donc positif. On obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^3 \times 7^4}{3^2 \times 7^2 \times 2^3 \times 3^3} \\ &= \frac{7^2}{3^5}. \end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, mais on peut aussi écrire :

$$A = \frac{49}{243}.$$

2 Il faut réduire petit à petit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3-\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}} \times \frac{\frac{4}{15}-\frac{1}{10}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \div \frac{1+\frac{2}{5}}{2-\frac{1}{5}} \\
&= \frac{\frac{12}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{8}{4}+\frac{1}{4}} \times \frac{\frac{8}{30}-\frac{3}{30}}{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} \div \frac{\frac{5}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{10}{5}-\frac{1}{5}} \\
&= \frac{\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}} \times \frac{\frac{5}{30}}{\frac{3}{6}} \div \frac{\frac{7}{5}}{\frac{9}{5}} \\
&= \frac{11}{9} \times \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} \div \frac{7}{9} = \frac{11}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{7} \\
&= \frac{11 \times 9}{9 \times 3 \times 7} \\
&= \frac{11}{21}.
\end{aligned}$$

20 Calculs et simplifications

Énoncé p. 48

Lycée Blaise Pascal, Orsay

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-\frac{5}{6}} \\
A &= \frac{\frac{15}{30}-\frac{10}{30}+\frac{12}{30}+\frac{5}{30}}{\frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{12}{30}-\frac{25}{30}} \\
A &= \frac{\frac{22}{30}}{\frac{-12}{30}} \\
A &= -\frac{22}{12} \\
A &= -\frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

$$C = 2^{23} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{24} = \frac{2^{23}}{2^{24}} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\frac{10^2}{5}\right)^2 \\
B &= \frac{5^6 \times 10^{-15}}{5^5 \times 10^{-15}} \times \frac{10^4}{5^2} \\
B &= 5 \times \frac{(5 \times 2)^4}{5^2} \\
B &= \frac{5 \times 5^4 \times 2^4}{5^2} \\
B &= 5^3 \times 2^4.
\end{aligned}$$

$$D = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{107} = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{107} = \frac{2}{3}.$$

$a = 0{,}000\,073\,654 = 7{,}365\,4 \times 10^{-5}$.

$b = 9\,325\,000 = 9{,}325 \times 10^{6}$.

$c = 0{,}023 \times 10^{-5} = 2{,}3 \times 10^{-2} \times 10^{-5} = 2{,}3 \times 10^{-7}$.

$d = 19{,}402 \times 10^{2} = 1{,}940\,2 \times 10^{3}$.

21 Produit de puissances

Énoncé p. 49

Lycée Hoche, Versailles

On simplifie les puissances, puis les fractions :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{a^3}{c}\right)^2 \div \frac{[(a^7)^5 b^{-2}(c^{-3})^{-2}]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2} \\ &= \frac{a^6}{c^2} \div \frac{(a^{35}b^{-2}c^6)^{-1}}{(ab^2c^6)^2} \\ &= \frac{a^6}{c^2} \div \frac{a^{-35}b^2c^{-6}}{a^2b^4c^{12}} \\ &= \frac{a^6}{c^2} \times \frac{a^2b^4c^{12}}{a^{-35}b^2c^{-6}} \\ &= a^{43}b^2c^{16}. \end{aligned}$$

22 Calculs d'une somme avec fractions

Énoncé p. 49

Lycée Louis le Grand, Paris

1 Il faut réduire les deux fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n+3-n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

2 Du résultat précédent, il vient :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

Si on applique cette formule à $n = 10$, on obtient :

$$\frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{11 \times 12 \times 13}\right).$$

En l'appliquant à $n = 11$:

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{11 \times 12 \times 13} - \frac{1}{12 \times 13 \times 14}\right).$$

Si on additionne ces deux formules membre à membre, on voit que les termes

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13}$$

vont s'annuler. Appliquons de nouveau la formule à $n = 12$:

$$\frac{1}{12 \times 13 \times 14 \times 15} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{12 \times 13 \times 14} - \frac{1}{13 \times 14 \times 15}\right).$$

Nous constatons que si nous ajoutons cette expression aux deux autres, le terme $\dfrac{1}{12 \times 13 \times 14}$ disparaît.

Finalement, si nous répétons l'opération jusqu'à $n = 19$ et que nous simplifions, il ne restera que le tout premier terme $\dfrac{1}{10 \times 11 \times 12}$ ainsi que le tout dernier, qui est le $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ avec $n = 19$.

Il vient (attention aux signes et au facteur $\frac{1}{3}$!) :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{20 \times 21 \times 22}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5 \times 2 \times 11 \times 4 \times 3} - \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 7 \times 2 \times 11}\right) \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{7-1}{20 \times 21 \times 22} \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{6}{20 \times 21 \times 22} \\
&= \frac{2}{20 \times 21 \times 22} \\
&= \frac{1}{10 \times 21 \times 22} \\
&= \frac{1}{4\,620}.
\end{aligned}$$

CORRIGÉS

23 Diviseurs

Énoncé p. 49

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

1 Les diviseurs positifs de 640 sont :

$$1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8;\ 10;\ 16;\ 20;\ 32;\ 40;\ 64;\ 80;\ 128;\ 160;\ 320;\ 640.$$

2 On teste chacun de ces diviseurs. Par exemple, $1\,040 \div 80 = 13$, donc 80 divise 1 040. En revanche, $1\,040 \div 32 = 32{,}5$ n'est pas un entier, donc 32 ne divise pas 1 040.

Les diviseurs de 640 qui sont aussi des diviseurs de 1 040 sont :

$$1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8;\ 10;\ 16;\ 20;\ 40;\ 80.$$

3 On travaille en centimètres : la parcelle mesure 1 040 cm de longueur et 640 cm de largeur.

(a) Il y a un plant à chaque sommet du rectangle et les plants sont régulièrement espacés. Sur la longueur, l'espace entre deux sommets est donc partagé en un nombre entier d'intervalles égaux à la distance d. Cela signifie que 1 040 est un multiple de d, c'est-à-dire que d est un diviseur de 1 040.

Le même raisonnement sur la largeur montre que d est un diviseur de 640.

(b) D'après la question 1, les nombres qui divisent à la fois 1 040 et 640 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 et 80. Le plus grand est 80.

La distance maximale entre deux plants successifs est donc de 80 cm.

(c) Le périmètre de la parcelle vaut :

$$2 \times (1\,040 + 640) = 2 \times 1\,680 = 3\,360 \text{ cm}.$$

Le nombre d'intervalles de 80 cm est :

$$3\,360 \div 80 = 42.$$

Le contour est fermé, donc il y a autant de plants que d'intervalles.

Il faut donc 42 plants.

On peut vérifier : sur une longueur, $1\,040 \div 80 = 13$ intervalles, et sur une largeur, $640 \div 80 = 8$ intervalles.

On a bien $2 \times (13 + 8) = 42$.

24 Somme et multiples

Énoncé p. 50

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Les nombres $n-1$, n et $n+1$ sont consécutifs (ils se suivent). Leur somme est :

$$S = (n-1) + n + (n+1) = 3n.$$

S est bien un multiple de 3.

2 Soit $n \in \mathbb{Z}$. $(n-1)$, n et $(n+1)$ sont trois entiers consécutifs, donc $3(n-1)$, $3n$ et $3(n+1)$ sont trois multiples de 3 consécutifs. Leur somme est :

$$S = 3(n-1) + 3n + 3(n+1) = 3n - 3 + 3n + 3n + 3 = 9n.$$

S est bien un multiple de 9.

3 *Non*. Un contre-exemple suffit : $1+2+3+4 = 10$ n'est pas un multiple de 4.

Plus généralement, pour tout entier n, la somme :

$$(n-1) + n + (n+1) + (n+2) = 4n + 2$$

s'écrit $2(2n+1)$ avec $2n+1$ impair : elle est paire, mais n'est jamais un multiple de 4.

25 Implication sur la divisibilité

Énoncé p. 50

Lycée Loquidy, Nantes

Si a divise $n+4$ alors a divise aussi $k(n+4)$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Si a divise $2n-3$ alors a divise aussi $k'(2n-3)$, où $k' \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, a divise la somme, donc a divise $k(n+4) + k'(2n-3)$, soit, après développement, $(k+2k')n + 4k - 3k'$.

On cherche alors à savoir s'il existe des valeurs de k et k' telles que, pour tout entier n,

$$(k+2k')n + 4k - 3k' = 11.$$

Il faut donc que $k + 2k' = 0$, soit $k = -2k'$.

Il faut aussi que $4k - 3k' = 11$, soit $4(-2k') - 3k' = 11$, d'où $-11k' = 11$. On en déduit alors que $k' = -1$ et donc que $k = 2$.

Il existe donc bien deux entiers k et k' tels que $k(n+4) + k'(2n-3) = 11$.

Or, a divise $k(n+4) + k'(2n-3)$, donc a divise 11.

26 Ensemble d'entiers et divisibilité

Énoncé p. 50

Lycée Louis Vincent, Metz

Partons du fait que $(n-4)$ divise $A = (3n+24)$.

On sait de plus que $(n-4)$ divise aussi $B = 3(n-4) = 3n - 12$ (on a multiplié par 3 car le coefficient de n dans A est 3).

Ainsi, $(n-4)$ divise $A - B = 36$. Les diviseurs de 36 sont :

$$-1; -2; -3; -4; -6; -9; -12; -18; -36; 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.$$

En ajoutant 4 à ces valeurs, on obtient l'ensemble S des valeurs de n possibles :

$$S = \{-32; -14; -8; -5; -2; 0; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 10; 13; 16; 22; 40\}.$$

On vient de montrer que : « $(n-4)$ divise $(3n+24)$ donc $n \in S$. »

De plus, si $n \in S$, on peut calculer $(n-4)$ et $(3n+24)$ et voir que $(n-4)$ divise bien $(3n+24)$. La réciproque est donc vraie.

Ainsi, S est bien l'ensemble de toutes les valeurs de n telles que $(n-4)$ divise bien $(3n+24)$.

27 Parité

Énoncé p. 50

Lycée Pierre Caraminot, Égletons

« Consécutifs » signifie que les deux entiers s'écrivent, par exemple, n et $n+1$. On a $n(n+1) = n^2 + n$.

On procède par *disjonction de cas* sur n (on regarde tous les cas possibles) :

- Si n est pair, $n(n+1)$ est multiple de n donc de 2.
- Si n est impair, $(n+1)$ est pair. $n(n+1)$ est multiple de $(n+1)$ donc de 2.

Dans tous les cas, $n(n+1)$ est bien un multiple de 2.

28 Avec racines carrées

Énoncé p. 50

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Pour montrer que $\left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ est un entier naturel, nous allons développer les deux carrés à l'aide des identités remarquables :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (voir chapitre suivant)
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (voir chapitre suivant)

Développons :

- $\left(1-\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2$
  $= 1 - 2\sqrt{3} + 3$
  $= 4 - 2\sqrt{3}.$
- $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2$
  $= 1 + 2\sqrt{3} + 3$
  $= 4 + 2\sqrt{3}.$

Ainsi,

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} = 8.$$

$\left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ est donc bien un entier naturel.

29 Ensembles inclus

Énoncé p. 51

Lycée Victor Louis, Talence

Transformons l'écriture de n :

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{9-5\sqrt{3}}{10} \\ &= \frac{10+(9-5\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{10(\sqrt{3}+1)} \text{ (en réduisant au même dénominateur)} \\ &= \frac{10+9\sqrt{3}+9-15-5\sqrt{3}}{10(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{4+4\sqrt{3}}{10(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{3})}{10(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{2}{5} = 0{,}4. \end{aligned}$$

Donc n est décimal.

30 Simplification

Énoncé p. 51

Lycée Henri IV, Paris

1 $$\begin{aligned} C &= \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{12} \\ &= 3\sqrt{3} - 2\times 5\sqrt{3} + 3\times 2\sqrt{3} \\ &= (3-10+6)\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2 $$\begin{aligned} D &= \sqrt{\frac{6{,}3}{2{,}8}} \times \sqrt{\frac{18}{0{,}72}} \\ &= \sqrt{\frac{63}{28}} \times \sqrt{\frac{18\times 100}{72}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} \times \sqrt{\frac{100}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} \times \sqrt{25} \\ &= \frac{3}{2} \times 5 \\ &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

31 Simplification

Énoncé p. 51

Lycée Charlemagne, Paris

1 On utilise la quantité conjuguée $\sqrt{5}-2$ pour simplifier le dénominateur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{\sqrt{5}+2} \\ &= \frac{3(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\ &= \frac{3(\sqrt{5}-2)}{5-4} \\ &= 3\sqrt{5}-6 \\ &= \sqrt{45}-6. \end{aligned}$$

2 De même que précédemment :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{(2\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{10+2\sqrt{5}+3\sqrt{5}+3}{5-1} \\ &= \frac{13+5\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{13}{4}+\sqrt{\frac{125}{16}}. \end{aligned}$$

32 Calcul avec fractions et radicaux

Énoncé p. 51

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Il faut commencer par se « débarrasser » du radical au dénominateur.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+8\sqrt{2} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+8\sqrt{2} \\ &= \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}+8\sqrt{2} \\ &= 3-2\sqrt{2}+8\sqrt{2} \\ &= 3+6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

N'essayez pas d'aller plus loin, et *surtout* ne donnez pas de résultat approximatif calculé à la machine !

33 Avec une identité remarquable

Énoncé p. 51

Lycée André Malraux, Biarritz

1 *Cette question peut être traitée sans faire appel aux identités remarquables (chapitre suivant), mais nous allons les utiliser pour plus d'efficacité.*

En effet, il s'agit ici d'un produit remarquable de la forme :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ainsi,
$$(3-\sqrt{11})^2 = 9 - 6\sqrt{11} + 11 = 20 - 6\sqrt{11}.$$

2 $3^2 = 9$ et $(\sqrt{11})^2 = 11$, donc :
$$3 < \sqrt{11}.$$
On en déduit :
$$3 - \sqrt{11} < 0.$$

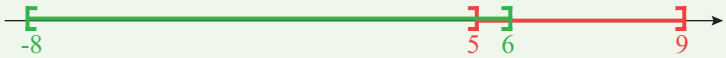
3 Comme :
$$(3-\sqrt{11})^2 = 20 - 6\sqrt{11},$$
on sait que :
$$\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = (3 - \sqrt{11})$$
ou
$$\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = -(3 - \sqrt{11}).$$
Comme $3 - \sqrt{11} < 0$, la racine carrée de $(20 - 6\sqrt{11})$ (qui doit être positive) est donc : $-(3 - \sqrt{11}) = \sqrt{11} - 3$.

34 Union et intersection

Énoncé p. 52

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Afin de trouver l'union et l'intersection des intervalles $I =]5; 9]$ et $J = [-8; 6]$, nous pouvons les représenter graphiquement sur la droite des réels :



Les deux intervalles se chevauchent ; par conséquent, leur union est un intervalle qui débute à la plus petite valeur et finit à la plus grande :
$$I \cup J = [-8; 9]$$
et leur intersection est l'intervalle formé par leurs parties communes (où ils se chevauchent) :
$$I \cap J =]5; 6].$$

35 Union et intersection

Énoncé p. 52

Lycée Cité internationale, Paris

1 $I =]-3; 7]$ et $J = [-1; +\infty[$
Donc $I \cap J = [-1; 7]$ et $I \cup J =]-3; +\infty[$.

2 $I =]-\infty; 4[$ et $J = [4; 10]$
Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J =]-\infty; 10]$.

3 $I = [-10; 2]$ et $J = [-3; 7]$
Donc $I \cap J = [-3; 2]$ et $I \cup J = [-10; 7]$.

4 $I =]-\infty; 3]$ et $J = [-6; +\infty[$
Donc $I \cap J = [-6; 3]$ et $I \cup J = \mathbb{R}$.

5 $I =]-4; 2[$ et $J =]2; 5]$
Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J =]-4; 2[\cup]2; 5]$.

Chapitre 4

Calcul littéral, équations et inéquations

Plan du chapitre

1. Développement et factorisation
2. Résoudre une équation
3. Résoudre une inéquation
4. Équations et inéquations avec valeur absolue

1 Développement et factorisation

Exercice type 1 — Lycée Alain Fournier, Bourges

Développer et factoriser :

$$A = 18x^2 - 24x + 8 - (x+1)(6x-4) - 3x + 2.$$

Voir corrigé page 74

1.1 Développement

Développer, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence).

Dans les égalités ci-dessous, le membre de gauche contient une expression factorisée, et le membre de droite l'expression équivalente développée.

Propriété 1 : distributivité

Pour tous nombres a, b, c et d, on a :

- $a(b+c) = ab + ac$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

COURS

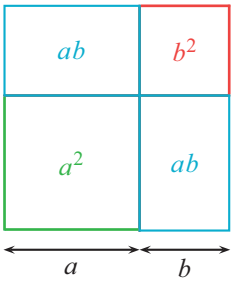
Propriété 2 : identités remarquables

Pour tous nombres a et b, on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Remarque : *illustration géométrique de l'égalité* $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ (pour $a > 0$ et $b > 0$). Un carré de côté $a+b$ se découpe en un carré de côté a (d'aire a^2), un carré de côté b (d'aire b^2) et deux rectangles de dimensions a et b (d'aire ab chacun). L'aire du grand carré est donc :

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Exemple :

$$\begin{aligned} B &= (x-2)^2 - (x-3)(2x+5) \\ &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 - 5x + 6x + 15. \end{aligned}$$

Après avoir développé, on effectue toutes les additions possibles : on *réduit* l'expression :

$$B = -x^2 - 3x + 19.$$

En général, les énoncés portent la mention « développer et réduire », mais il est conseillé dans tous les cas de réduire. On peut effectuer des réductions partielles au cours du calcul, *dans la mesure où l'on respecte les règles de priorité*.

Exemple :

$$\begin{aligned} B &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 - x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + x + 15 \\ &= -x^2 - 3x + 19. \end{aligned}$$

1.2 Factorisation

Factoriser, c'est effectuer le procédé inverse de développer : on transforme une somme en un produit.

1.2.1 - Avec un facteur commun

Dans un premier temps, on essaie de repérer un facteur commun.

Exemple : dans l'expression $(x+2)(x-5)-4(x+2)$, $(x+2)$ est un facteur commun aux deux termes. On choisit :

$$k=(x+2),\quad a=(x-5),\quad b=-4$$

pour appliquer la propriété :

$$ka+kb=k(a+b).$$

Cela donne :

$$(x+2)(x-5)-4(x+2)=(x+2)\big[(x-5)-4\big].$$

L'expression du membre de droite est factorisée.
En général, même quand ce n'est pas demandé, on préfère développer et réduire le second facteur. On obtient :

$$(x+2)(x-5)-4(x+2)=(x+2)(x-9).$$

Il arrive parfois qu'un facteur commun soit « caché » parce qu'il est multiplié par une constante, comme dans l'exemple suivant.

Exemple : soit l'expression $(x+2)(x-5)-4x-8$.
On a le facteur commun $(x+2)$ qui n'est pas apparent.
En effet :

$$-4x-8=-4(x+2).$$

Et on retrouve l'expression de l'exemple précédent.

1.2.2 - Avec une identité remarquable

Si aucun facteur commun n'est visible, on peut essayer d'utiliser une identité remarquable.

- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Remarquez que dans ces égalités, le membre de gauche est une somme, et le membre de droite un produit (ne perdez pas de vue qu'un carré est un produit). Ce sont donc, écrites sous cette forme, des factorisations.

COURS

Exemple : factorisons l'expression $B = x^2 - 16 + (x-3)(x-4)$.
Il n'y a pas de facteur commun évident. En revanche, la première partie de l'expression fait intervenir l'identité remarquable

$$x^2 - 16 = (x+4)(x-4).$$

On peut donc terminer la factorisation :

$$\begin{aligned} B &= (x+4)(x-4) + (x-3)(x-4) \\ &= (x-4)\big[(x+4) + (x-3)\big] \\ &= (x-4)(x+4+x-3) \\ &= (x-4)(2x+1). \end{aligned}$$

1.2.3 - Développer pour factoriser

Si aucune des méthodes précédentes n'aboutit, on peut éventuellement *développer* l'expression, dans l'espoir de faire apparaître quelque chose d'intéressant.

Exemple : $C = 2x^2 - 6x + 29 + 2(x+2)(x-5)$.
Il n'y a pas de facteur commun évident, et $2x^2 - 6x + 29$ n'est pas le développement d'un produit remarquable. On développe :

$$\begin{aligned} C &= 2x^2 - 6x + 29 + 2(x^2 - 5x + 2x - 10) \\ &= 2x^2 - 6x + 29 + 2x^2 - 10x + 4x - 20 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 \\ &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= (2x-3)^2. \end{aligned}$$

Remarque : ce genre de situations est extrêmement rare.

Solution de l'exercice type 1 — **Lycée Alain Fournier, Bourges**

- Développons A :

$$\begin{aligned} A &= 18x^2 - 24x + 8 - (x+1)(6x-4) - 3x + 2 \\ &= 18x^2 - 24x + 8 - (6x^2 - 4x + 6x - 4) - 3x + 2 \\ &= 18x^2 - 6x^2 - 24x + 4x - 6x - 3x + 8 + 4 + 2 \\ &= 12x^2 - 29x + 14. \end{aligned}$$

- Factorisons A :

$$\begin{aligned} A &= 18x^2 - 24x + 8 - (x+1)(6x-4) - 3x + 2 \\ &= 2(9x^2 - 12x + 4) - 2(x+1)(3x-2) - (3x-2) \\ &= 2(3x-2)^2 - 2(x+1)(3x-2) - (3x-2) \\ &= (3x-2)[2(3x-2) - 2(x+1) - 1] \\ &= (3x-2)(6x - 4 - 2x - 2 - 1) \\ &= (3x-2)(4x-7). \end{aligned}$$

Voir énoncé page 71

2 Résoudre une équation

Exercice type 2 — Lycée Alain Fournier, Bourges

Résoudre l'équation :

$$A = 18x^2 - 24x + 8 - (x+1)(6x-4) - 3x + 2 = 0.$$

Voir corrigé page 78

2.1 Qu'est-ce qu'une équation ?

Définition 1

On appelle *équation à une inconnue* toute égalité entre deux expressions littérales où l'on cherche la valeur d'une lettre. Cette lettre est appelée *inconnue* de l'équation.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.

Exemple : l'égalité $3x + 7 = 8x - 3$ est une équation d'inconnue x si on cherche la valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie.

2.2 Comment résoudre une équation ?

2.2.1 - Équations du premier degré

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions dépendant de x. On considère l'équation $A(x) = B(x)$, d'inconnue x. On dit que c'est une *équation du premier degré* si, après développement et réduction, elle peut s'écrire sous la forme

$$ax + b = 0,$$

où a et b sont deux nombres réels avec $a \neq 0$.

Exemple : l'équation $3x + 7 = 8x - 3$ est du premier degré.

On résout ce type d'équations en regroupant les termes en x dans un membre et les nombres dans l'autre, comme vous l'avez vu au collège.

Exemple :
$$\begin{aligned} 3x + 7 = 8x - 3 &\iff 3x + 7 - 8x - 7 = 8x - 3 - 8x - 7 \\ &\iff -5x = -10 \\ &\iff x = \frac{-10}{-5} = 2. \end{aligned}$$

COURS

2.2.2 - Équations de degré strictement supérieur à 1

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions dépendant de x. On considère l'équation $A(x) = B(x)$, d'inconnue x, qui n'est pas du premier degré (par exemple, après réduction, elle contient un terme en x^2).

Pour la résoudre, on procède en deux étapes :

- on se ramène à une équation dont le second membre est nul, en écrivant
$$A(x) - B(x) = 0;$$
- on factorise l'expression $A(x) - B(x)$, afin d'obtenir une *équation produit nul*.

On peut alors appliquer le théorème suivant :

Théorème 1 : du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

Exemple : on souhaite résoudre l'équation $(3x+1)(2x+1) = (3x+1)(8x-7)$.

$$\begin{aligned}
&(3x+1)(2x+1) = (3x+1)(8x-7)\\
\iff &(3x+1)(2x+1) - (3x+1)(8x-7) = 0\\
\iff &(3x+1)\big[(2x+1) - (8x-7)\big] = 0\\
\iff &(3x+1)(-6x+8) = 0\\
\iff &3x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad -6x+8 = 0\\
\iff &x = -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

2.2.3 - Équations quotient

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions dépendant de x. On considère une équation dans laquelle l'inconnue x apparaît au dénominateur d'un quotient.

Un quotient n'existe que si son dénominateur est non nul. Avant toute résolution, on détermine donc les *valeurs interdites*, c'est-à-dire les valeurs de x qui annulent un dénominateur. Ces valeurs ne peuvent pas être solutions de l'équation.

Pour la résoudre, on procède ensuite en deux étapes :

- on se ramène à une équation dont le second membre est nul ;
- on réduit le premier membre au même dénominateur, afin d'obtenir une *équation quotient nul*, de la forme
$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0.$$

On peut alors appliquer le théorème page suivante.

Théorème 2 : du quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

Exemples

1 On souhaite résoudre l'équation $\dfrac{x+5}{x-2} = 3$.

- *Valeur interdite :* $x - 2 = 0 \iff x = 2$.
  On résout donc l'équation pour $x \neq 2$.
- *Résolution de l'équation :*

$$\begin{aligned}
&\frac{x+5}{x-2} = 3 \\
\iff &\frac{x+5}{x-2} - 3 = 0 \\
\iff &\frac{x+5}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} = 0 \\
\iff &\frac{x+5-3x+6}{x-2} = 0 \\
\iff &\frac{-2x+11}{x-2} = 0 \\
\iff &-2x + 11 = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 2 \\
\iff &x = \frac{11}{2}.
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{11}{2} \neq 2$, cette valeur est bien solution. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{11}{2}\right\}$.

2 On souhaite résoudre l'équation $\dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = 0$.

- *Valeur interdite :* $x - 1 = 0 \iff x = 1$.
  On résout donc l'équation pour $x \neq 1$.
- *Résolution de l'équation :*

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = 0 \\
\iff &(x-1)(x+4) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1 \\
\iff &(x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -4) \quad \text{et} \quad x \neq 1 \\
\iff &x = -4.
\end{aligned}$$

La valeur 1 annule le numérateur, mais c'est une valeur interdite : elle n'est pas solution. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-4\}$.

COURS

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Alain Fournier, Bourges

Nous avons vu dans l'exercice précédent de ce cours que :

$$A = (3x - 2)(4x - 7).$$

On utilise alors le théorème du produit nul pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} A = 0 &\iff (3x - 2)(4x - 7) = 0 \\ &\iff 3x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 4x - 7 = 0 \\ &\iff 3x = 2 \quad \text{ou} \quad 4x = 7 \\ &\iff x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $A = 0$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3} ; \frac{7}{4}\right\}.$$

Voir énoncé page 75

3 Résoudre une inéquation

Exercice type 3 — Lycée Alain Fournier, Bourges

Résoudre l'inéquation :

$$18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 \leqslant 0.$$

Voir corrigé page 82

3.1 Opérations permises sur les inégalités

Dans ce paragraphe, a, b, c, d et k représentent des nombres réels.

- *On peut ajouter un même réel à une inégalité.*

$$a \leqslant b \iff a + k \leqslant b + k.$$

- *On peut ajouter deux inégalités de même sens membre à membre.*

$$\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \implies a + c \leqslant b + d$$

ATTENTION

La réciproque n'est pas toujours vraie, d'où le symbole d'implication « $\Rightarrow$ ». Ce n'est pas parce que $a + c \leqslant b + d$ que l'on a nécessairement $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$.

- *On peut multiplier les deux membres de l'inégalité par un réel.*
  Mais il faut faire attention au signe du réel par lequel on multiplie :
  $$\begin{cases} k > 0 \\ a \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow k \times a \leqslant k \times b \quad \text{et} \quad \begin{cases} k < 0 \\ a \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow k \times a \geqslant k \times b.$$
  Si ce réel est positif, on garde le sens de l'inégalité ;
  s'il est négatif, on change le sens de l'inégalité.
- *On peut élever les deux membres de l'inégalité au carré ou prendre leur racine carrée si les deux membres sont positifs.*
  $$\begin{cases} a \geqslant 0, b \geqslant 0 \\ a \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow a^2 \leqslant b^2.$$
- *On peut inverser les deux membres en changeant le sens de l'inégalité si les deux membres sont de même signe.*
  $$\begin{cases} a \text{ et } b \text{ de même signe et non nuls} \\ a \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}, \ a \text{ et } b \text{ de même signe.}$$

Exemples

- Si $x + 7 \geqslant 5$, on peut ajouter -7 aux deux membres et obtenir $x \geqslant -2$.
- Si $7x \leqslant -3$, on peut diviser par 7 les deux membres pour obtenir $x \leqslant -\frac{3}{7}$. Le sens ne change pas car 7 est positif.
- Si $x > 5$, on peut écrire $x^2 > 25$ et $\sqrt{x} > \sqrt{5}$.
  Attention : si $-2 < x < 5$, on ne peut pas écrire $(-2)^2 < x^2 < 5^2$ car cela serait faux pour $x = 0$ ou $x = 1$ par exemple.
  Dans ce cas, le meilleur encadrement possible est : $0 \leqslant x^2 < 5^2$ (voir chapitre 7 page 176, « La fonction carré »).
- Si $0 < x \leqslant 5$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{5}$.

⚠ ATTENTION

Si $x \geqslant 5$, on peut en déduire $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{5}$, mais on peut être plus précis : l'inverse d'un nombre strictement positif est strictement positif, donc $0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{5}$.
De même, si $x < -2$, on a $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$, et plus précisément $-\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 0$.

3.2 Tableaux de signes

- Pour résoudre une inéquation produit, on détermine le signe de chaque facteur que l'on résume dans un *tableau de signes*. La règle des signes permet de conclure.

COURS

Exemple : résoudre l'inéquation $(x-2)(6-2x)(x+4) \geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcl} x-2 \geqslant 0 & \iff & x \geqslant 2 \\ 6-2x \geqslant 0 & \iff & x \leqslant 3 \\ x+4 \geqslant 0 & \iff & x \geqslant -4 \end{array}$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$6-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -4\ ] \cup [\ 2\ ;\ 3\ ]$

- La méthode est la même pour une inéquation quotient mais il faut être vigilant avec les valeurs interdites qui sont les nombres qui annulent le dénominateur.

Exemple : résoudre l'inéquation $x \geqslant \dfrac{9}{x}$.

Valeur interdite : $x = 0$.
Résolution :

$$\begin{aligned} x \geqslant \frac{9}{x} &\iff \frac{x^2}{x} - \frac{9}{x} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{(x-3)(x+3)}{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

D'où $\mathcal{S} = [\ -3\ ;\ 0\ [\cup [\ 3\ ;\ +\infty\ [$
Attention à exclure de l'ensemble des solutions les valeurs interdites.

3.3 Utiliser le signe de la différence

Pour comparer deux nombres x et y, on peut étudier le signe de leur différence $x-y$:

$$\begin{cases} \text{Si } x-y > 0, \text{ alors } x > y \\ \text{Si } x-y < 0, \text{ alors } x < y \end{cases}$$

Exemple : on veut résoudre l'inéquation : $\frac{1}{x} < 2$. Il faut pour cela :

1. Écrire la différence : $\frac{1}{x} - 2$;
2. Réduire au même dénominateur : $\frac{1-2x}{x}$;
3. Utiliser un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1-2x}{x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Il suffit de lire dans le tableau où sont situés les réels tels que $\frac{1-2x}{x} < 0$:

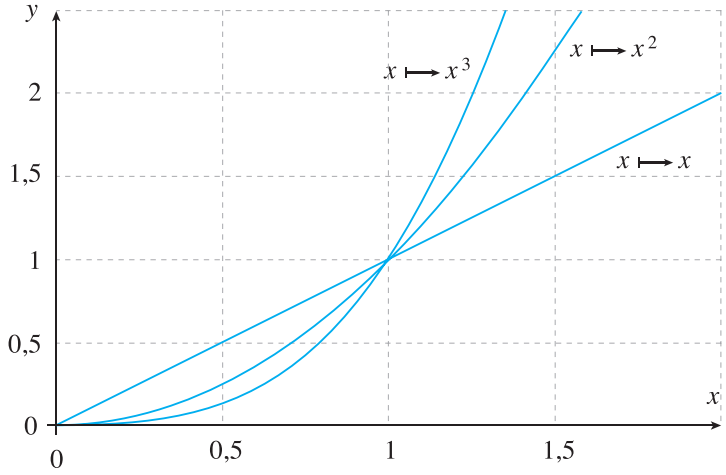
$$S =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

3.4 Résolution graphique d'une inéquation

Pour résoudre *graphiquement* une inéquation du type $f(x) < g(x)$, on trace la courbe des deux fonctions (soit « à la main », soit à l'aide de la calculatrice). Il suffit de lire sur l'axe des abscisses les valeurs de x pour lesquelles la courbe de f est en dessous de celle de g. Habituellement, l'ensemble de ces valeurs est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Par exemple, la figure ci-dessous montre que :

- Si $0 < x < 1$, alors $x^3 < x^2 < x$.
- Si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.



COURS

Solution de l'exercice type 3 — Lycée Alain Fournier, Bourges

Nous avons vu dans le premier exercice type de ce cours que :

$$18x^2 - 24x + 8 - (x+1)(6x-4) - 3x + 2 = (3x-2)(4x-7).$$

De plus,

$$3x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{2}{3}$$

$$4x - 7 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{7}{4}$$

On peut alors construire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x-2)(4x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut alors conclure que l'ensemble solution de l'inéquation $18x^2 - 24x + 8 - (x+1)(6x-4) - 3x + 2 \leqslant 0$ est :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{4}\right].$$

Voir énoncé page 78

4 Équations et inéquations avec valeur absolue

Exercice type 4 — Lycée Loquidy, Nantes

1 Traduire avec des valeurs absolues les affirmations suivantes (complétez les pointillés).

(a) La distance de x à 0,5 est inférieure ou égale à 2 $\iff$ $|x \ldots| \ldots$

(b) $x \in [-9; 1] \iff |x \ldots| \ldots$

2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x + 8| > \pi$

Voir corrigé page 84

4.1 Définition d'une valeur absolue d'un nombre

Définition 2

Soit x un nombre réel. On définit la *valeur absolue* du nombre x comme étant la distance qui le sépare du nombre 0 sur l'axe des réels, et on la note $|x|$. Autrement dit,

$$\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples

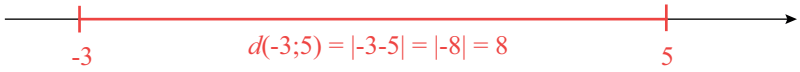
- $|5| = 5$
- $|-3| = 3$

Définition 3 : distance entre deux nombres

Pour tous nombres réels a et b, on définit la *distance* entre a et b par le nombre :

$$d(a;b) = |b-a| = |a-b|.$$

Exemple : la distance entre -3 et 5 est $d(-3;5) = 8$.



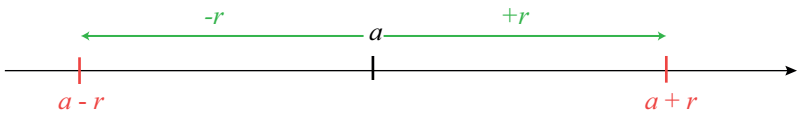
4.2 Équations du type $|x-a| = r$ (pour aller plus loin)

Propriété 3

Soit r un réel positif ou nul, et soit a un réel quelconque.

$$|x-a| = r \iff x = a-r \text{ ou } x = a+r.$$

En effet, $|x-a|$ représente la distance entre x et a. Si cette distance est égale à r, alors $x = a-r$ ou $x = a+r$.

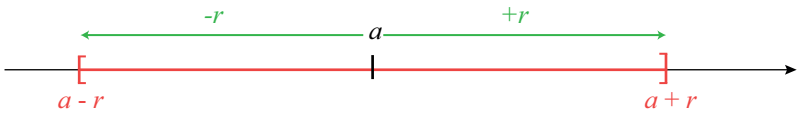


4.3 Inéquations

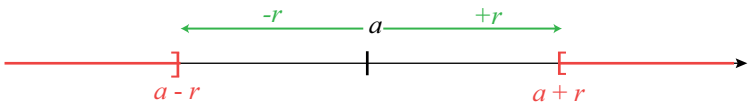
Propriété 4

Soit r un réel positif ou nul, et soit a un réel quelconque.

- $|x-a| \leqslant r \iff x \in [a-r;a+r]$.



- *(Pour aller plus loin.)* $|x-a| \geqslant r \iff x \in]-\infty;a-r] \cup [a+r;+\infty[$.



COURS

Remarque : l'orientation des crochets des intervalles dépend de l'inégalité (large ou stricte).

Solution de l'exercice type 4 — **Lycée Loquidy, Nantes**

1 **(a)** La distance de x à 0,5 est inférieure ou égale à 2 $\iff |x-0{,}5| \leqslant 2$.

(b) $x \in [-9;\,1] \iff |x+4| \leqslant 5$.

Pour compléter ici, nous avons avant tout trouvé le milieu de l'intervalle $[-9;\,1]$ en effectuant le calcul : $\dfrac{-9+1}{2} = -4$, puis nous avons calculé la distance entre -4 et 1 (par exemple) en effectuant l'opération : $1-(-4)=5$.

2 $|x+8| > \pi \iff |x-(-8)| > \pi$

$\iff x \in]-\infty;\,-8-\pi[\cup]-8+\pi;\,+\infty[$.

Voir énoncé page 82

1 V/F Étude graphique

4 min — Corrigé p. 96

On a représenté ci-dessous la fonction f et la fonction affine

$$g \,:\, x \mapsto \frac{1}{2}x + 1.$$

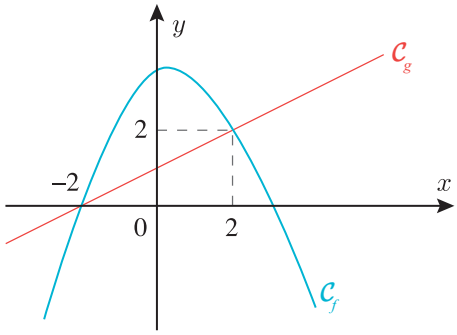
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $[-2\,;\,2]$.

b L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $\{-2\,;\,2\}$.

c L'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $]-2\,;\,2[$.

d L'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant g(x)$ est $[-2\,;\,2]$.



2 V/F Factorisation

5 min — Corrigé p. 96

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a x peut être mis en facteur dans $3x^2 + 2x + 5$.

b Pour tout réel x, $(x+2)^2 = x^2 + 2x + 4$.

c Pour tout réel x, $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

d Pour tout réel x, $(2x-3)(2x+3) = 2x^2 - 9$.

3 QCM Équations : ensemble des solutions

5 min — Corrigé p. 96

Dans quels cas l'ensemble des solutions est-il correct ?

a $3x - 7 = 0$ $\qquad S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

b $3x - 7 = 0$ $\qquad S = \{2{,}33\}$

c $(x-5)(2x+1) = 0$ $\qquad S = \left\{-5\,;\,-\frac{1}{2}\right\}$

d $x^2 - 8 = 0$ $\qquad S = \{2\sqrt{2}\,;\,-2\sqrt{2}\}$

INTERROS

4 V/F Transformer des inégalités

5 min — Corrigé p. 96

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a Si $x < 0$, alors $\dfrac{1}{x} > 1$

b Si $x \geqslant 2$, alors $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$

c Si $x < -2$, alors $\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{2}$

d Si $x \geqslant 3$, alors $-2x \leqslant -6$

5 QCM Inéquations

6 min — Corrigé p. 97

Dans quels cas les inéquations proposées ont-elles les mêmes solutions dans $\mathbb{R}$?

a $x(x-3) < x(2x+1)$ et $(x-3) < (2x+1)$

b $3 - x < 5$ et $x > 2$

c $x < 2$ et $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}$

d $(x^2+2)(x-1) > 0$ et $2(x-1) > 0$

e $(x-3)^2 \geqslant (2x+1)^2$ et $x - 3 \geqslant 2x + 1$

f $\dfrac{x}{x-2} \leqslant \dfrac{2x+1}{x+3}$ et $x(x+3) \leqslant (x-2)(2x+1)$

Automatismes

6 Application d'une formule ★

10 min — Corrigé p. 97

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Calculer $a^2 + bc$ lorsque $a = \dfrac{5}{2}$, $b = \dfrac{3}{4}$ et $c = -2$.

2 Calculer $ab - c^2$ lorsque $a = \dfrac{4}{3}$, $b = -\dfrac{3}{8}$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

3 L'énergie cinétique E_c (en joules) d'un corps en mouvement de masse m (en kilogrammes) animé d'une vitesse de translation v (en mètres par seconde) est donnée par la formule :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Déterminer l'énergie cinétique d'une voiture de 1,2 tonne roulant à 20 m/s.

7 Calcul littéral élémentaire ★

10 min — Corrigé p. 97

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Simplifier $A = -(a-2b) - \Big[\big((a+b) - (-a+b)\big) - (-2b)\Big]$.

2 Simplifier $B = \dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{b}} - \dfrac{b}{c}$.

3 Simplifier $C = 3x - \big[2y - (x - y)\big] - (2x - y)$.

8 Développement

★ 10 min Corrigé p. 98

Lycée Louis Vincent, Metz

Développer et réduire chacune des expressions suivantes.

1 $A(x) = (x + 2)^2 + (2x - 1)(x + 3)$

2 $B(x) = (4 - x)(4 + x) - (3x - 1)^2$

3 $C(x) = (2x - 3)^2 - 2(x + 1)(x - 4)$

9 Factorisation

★ 10 min Corrigé p. 99

Lycée Louis Vincent, Metz

Factoriser les expressions suivantes.

1 $A(x) = 6x^2 + 9x$

2 $B(x) = (2x + 1)^2 - (2x + 1)(x - 5)$

3 $C(x) = 16 - (x + 3)^2$

10 Isoler une variable

★ 10 min Corrigé p. 99

Lycée Louis Vincent, Metz

1 En physique, la pression hydrostatique relative p, due à un liquide de masse volumique ρ à la profondeur h, est donnée par la formule : $p = \rho \times g \times h$, où ρ est la masse volumique du liquide (en kg/m^3) et g l'intensité de la pesanteur, égale à 9,81 N/kg. Exprimer h en fonction de p, ρ et g.

2 L'énergie cinétique E_c (en joules) d'un objet de masse m (en kilogrammes) se déplaçant à la vitesse v (en mètres par seconde) est donnée par la formule $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$. Déterminer la vitesse d'un objet de masse 2 kilogrammes dont l'énergie cinétique est de 81 joules.

3 Le volume V d'un cône de rayon de base r et de hauteur h est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Exprimer r en fonction de V et h, puis déterminer le rayon d'un cône de volume 12π cm^3 et de hauteur 4 cm.

11 Équation du type $x^2 = a$

★ 10 min Corrigé p. 99

Lycée Louis Vincent, Metz

Résoudre chacune des équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $x^2 = 18$ puis $x^2 = -5$
2. $(3x + 2)^2 = 0$
3. $(2x - 1)^2 = 9$

12 Équation du type $ax + b = cx + d$

★ 10 min Corrigé p. 100

Lycée Louis Vincent, Metz

Résoudre chacune des équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $5x + 3 = 2x - 9$
2. $\frac{1}{2}(x + 4) = 3\left(\frac{1}{3} - x\right)$
3. $4(x - 1) - (2x + 3) = 3x + 2$

13 Équation du type $a/x = b$

★ 10 min Corrigé p. 100

Lycée Louis Vincent, Metz

Résoudre chacune des équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\frac{5}{x} = 2$
2. $\frac{3}{4} - \frac{6}{x} = 0$
3. $\frac{2}{x + 1} = 3$

14 Inéquation du premier degré

★ 10 min Corrigé p. 101

Lycée Louis Vincent, Metz

Résoudre chacune des inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $3x + 6 \leqslant 0$
2. $2(x + 4) < 5x - 1$
3. $1 - 4x \geqslant 2(x - 7) + 3$

Développements

15 Calcul littéral

★ 5 min Corrigé p. 102

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Montrer que la somme du produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ et de l'entier n est le cube d'un entier.

16 Développements

★ 10 min Corrigé p. 102

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Développer les expressions suivantes :

1. $A(x) = 2x(x-2)(x+2)$
2. $B(x) = (1+3x)^2 - 2(x+1)(x-5)$
3. $C(x) = \left(3x - \sqrt{3}\right)^2$
4. $D(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \quad (x \neq 0)$

17 Arithmétique et calcul littéral

★ 10 min Corrigé p. 102

Lycée Parc de Vilgénis, Massy

Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n+1)^2 - n^2$.
2. En déduire que tout entier naturel impair est la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.
3. Écrire 17 et 2 019 comme différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

Factorisations

18 Factorisations

★ 10 min Corrigé p. 103

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Factoriser au maximum :

1. $A(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(2x-3)$
2. $B(x) = (x+1)^2 - (2x+3)^2$
3. $C(x) = (x-1)(2+x) + (x+5)(1-x)$
4. $D(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5 $E = xy - x - y + 1$ (x et y réels)

6 $F(x) = (5x + 3)^2 - 11$

7 $G(x) = (x - 1)^2 - 2(x^2 - 1)$

19 Diverses factorisations

★★ — 25 min — Corrigé p. 103

Lycée Chateaubriand, Rennes

Factoriser chacune des expressions suivantes.

1 $f(x) = 3(x - 2)(x^2 + 1) - (6x^2 - 5)(x - 2)$.

2 $f(a) = 16a^4 - 9$.

3 $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x)$.

4 $f(x) = (6x - 3)^2 - (2x - 1)$.

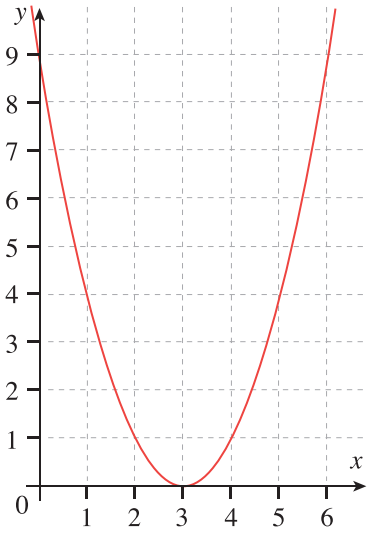
Équations

20 Équations

★ — 20 min — Corrigé p. 104

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

Soit f la fonction qui à tout nombre réel x fait correspondre $f(x)$ tel que $f(x) = (x - 3)^2$.
On donne sa courbe représentative ci-contre.



1 Lire sur le graphique les solutions des équations :
   (a) $(x - 3)^2 = 4$.
   (b) $(x - 3)^2 = 2$.
   (c) $(x - 3)^2 = -1$.

2 Résoudre les mêmes équations en détaillant les calculs, noter S l'ensemble des solutions.

21 Équations

★★ — 15 min — Corrigé p. 105

Lycée Foch, Rodez

Soit l'expression $f(x) = 15x^2 + 11x - 12$.

1 Vérifier que $f(x) = (3x + 4)(5x - 3)$.

2 En choisissant la plus appropriée des deux formes de $f(x)$, résoudre chacune des équations suivantes où x est l'inconnue réelle :

(a) $f(x) = 0$.
(b) $f(x) = 15x^2$.
(c) $f(x) = -12$.
(d) $f(x) = 5x - 3$.
(e) $f(x) = 14x^2 + 11x + 4$.

22 Équations

★★ 15 min Corrigé p. 107

Lycée Blaise Pascal, Orsay

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $\dfrac{5x+3}{4} - \dfrac{x-9}{3} = \dfrac{x}{2} + 5.$ **2** $\dfrac{x-4}{x-5} + \dfrac{x-6}{x-4} = 2 - \dfrac{2}{x-4}.$

3 $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0.$

23 Bien choisir son taxi

★★ 20 min Corrigé p. 108

Lycée Victor Duruy, Paris

Deux chauffeurs de taxi pratiquent des tarifs différents :

- Tarif A : 5 € de prise en charge et 0,40 € par kilomètre parcouru.
- Tarif B : pas de frais de prise en charge mais 0,60 € par kilomètre parcouru.

1 **(a)** Un client veut parcourir 8 km. Quel taxi doit-il prendre pour payer le moins cher ?
(b) Même question pour un client désirant parcourir 30 km.

2 Exprimer $A(x)$, prix payé au taxi A et $B(x)$, prix payé au taxi B, en fonction du nombre x de kilomètres parcourus.

3 **(a)** Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les fonctions :
$x \mapsto A(x)$ et $x \mapsto B(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 40$. On note $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ leurs représentations respectives.
(b) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection, et interpréter par une phrase.

4 En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :
(a) Pour quelles longueurs de trajets vaut-il mieux prendre le taxi A ?
(b) Un client a 12 € en poche. Quel taxi doit-il prendre pour aller le plus loin possible ? Quelle distance pourra-t-il ainsi parcourir ?

24 Équations

★★★ 15 min Corrigé p. 109

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Résoudre les équations suivantes :

1. $(x-1)(2x-3)^2 = 4(x-1)$
2. $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{-6}{(x+1)(x-2)}$
3. $x^2 + 4 = 0$
4. $\dfrac{3x^2+4x-4}{x^2-4} = 1$

Inéquations

25 Avec une identité remarquable

★ 10 min Corrigé p. 110

Lycée Carnot, Dijon

Résoudre l'inéquation :

$$(2x+5)^2 \leqslant (3x+2)^2.$$

26 Avec les identités remarquables

★ 15 min Corrigé p. 111

Lycée Saint-Jean, Limoges

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $(2x+1)^2 - x^2 \geqslant 0$
2. $(3x+2)^2 - 2(3x+2)(x+1) + (x+1)^2 \leqslant 0$

27 Avec un facteur commun

★ 15 min Corrigé p. 111

Lycée Descartes, Antony

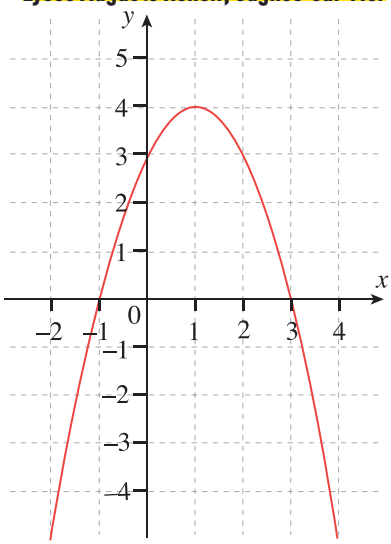
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^3 - x^2 \geqslant 4x - 4$
2. $\dfrac{x+2}{x^2-1} < 0$
3. $x^2 \geqslant 16x$

28 Résolution algébrique et graphique ★

15 min — Corrigé p. 112

Lycée Auguste Renoir, Cagnes-sur-Mer



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

1 Vérifier que :

$$f(x) = 4 - (x-1)^2$$

puis factoriser $f(x)$.

2 En déduire la résolution de l'inéquation $f(x) > 0$.

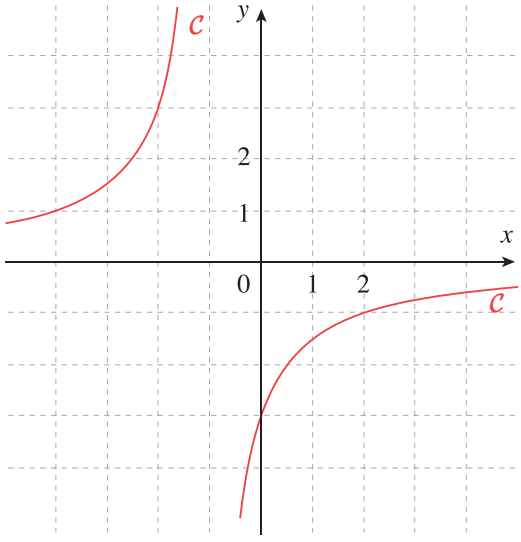
3 Résoudre graphiquement $f(x) > 0$ et vérifier le résultat précédent.

29 Résolution algébrique et graphique ★

20 min — Corrigé p. 114

Lycée Colbert, Paris

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f, définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{-3}{x+1}$.



1 Déterminer par le calcul l'ensemble des solutions de :

$$\frac{-3}{x+1} \geqslant 3.$$

Indiquer comment le graphique permet de retrouver ces résultats.

2 En utilisant le graphique, donner l'ensemble des réels x vérifiant :

$$-1 < \frac{-3}{x+1} < 1.$$

3 Sur le même dessin, représenter la droite d'équation $y = 1 - x$. En déduire graphiquement l'ensemble des solutions de $\frac{-3}{x+1} \geqslant 1 - x$. Retrouver ce résultat par le calcul.

30 Inéquations diverses

★★ — 20 min — Corrigé p. 115

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $\frac{3x+1}{4} > \frac{5x+1}{6}$.

2 $(x-4)^2 \leqslant -1$.

3 $2(x-1) - 3(x+1) > 4(x-2)$.

4 $x(-2x-3)^4 \geqslant 0$.

5 $\frac{x-1}{4} - 5 \leqslant \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{4}$.

31 Inéquations

★★★ — 15 min — Corrigé p. 116

Lycée Lacordaire, Marseille

On donne l'expression $A(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

1 Factoriser $A(x)$ en commençant par écrire que :

$$A(x) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4.$$

2 En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :

$$\frac{(x-1)^2 - 2x + 2}{x^3 + 3x^2 - 4} \geqslant 0.$$

Valeur absolue

32 Points et distance

★ — 10 min — Corrigé p. 117

Lycée Notre-Dame, Boulogne

Sur une droite graduée, on place les points A et B d'abscisses respectives -3 et 1. M est le point dont l'abscisse x est telle que $|x+3| = |x-1|$.

1 Interpréter en termes de distance l'égalité : $|x+3| = |x-1|$.

2 En déduire l'abscisse x du point M.

33 Diverses questions

★ 10 min Corrigé p. 117

Lycée Notre-Dame, Boulogne

1. Écrire le nombre $|3\pi - 12|$ sans valeurs absolues.
2. Sur une droite graduée, M et N sont les points d'abscisses respectives -4 et $-2{,}5$. Quelle est la distance MN ?
3. Compléter le tableau suivant comme pour la ligne exemple :

Intervalle	Encadrement	Centre	Rayon	Valeur absolue
$x \in [-4; 0]$	$-4 \leqslant x \leqslant 0$	-2	2	$\lvert x+2\rvert \leqslant 2$
	$0 < x < 10$			
$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$				
				$\lvert x+0{,}52\rvert < 10^{-2}$

CORRIGÉS

1 V/F Étude graphique

Énoncé p. 85

a *Faux*. Les deux courbes se coupent en deux points exactement, d'abscisses -2 et 2. $[-2\,;\,2]$ est un intervalle, qui contient *tous* les réels entre -2 et 2.

b *Vrai*. En effet, $\{-2; 2\}$ représente bien l'ensemble constitué des deux nombres -2 et 2.

c *Faux*. Au contraire, sur cet intervalle, la courbe de g est strictement au-dessous de celle de f, on aura donc $f(x) > g(x)$.

d *Vrai*. L'inégalité est large, il faut donc inclure -2 et $+2$.

2 V/F Factorisation

Énoncé p. 85

a *Faux*, à cause du 5.

b *Faux*. Attention au double produit : $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

c *Vrai*. $(x-2)^2 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$.

d *Faux*. On a $(2x)^2 = 4x^2$, donc $(2x-3)(2x+3) = 4x^2 - 9$.

3 QCM Équations : ensemble des solutions

Énoncé p. 85

a Oui. $3x - 7 = 0 \iff 3x = 7 \iff x = \dfrac{7}{3}$.

b Non. On doit donner la solution exacte. 2,33 est une approximation de la solution à 0,01 près.

c Non. Les solutions sont donc 5 et $-\dfrac{1}{2}$.

d Oui. Les solutions sont $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$.
On remarque : $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

4 V/F Transformer des inégalités

Énoncé p. 86

a *Faux*. Si $x < 0$, alors $\dfrac{1}{x} < 0$.
(L'inégalité $\dfrac{1}{x} > 1$ n'est vraie que pour $x \in]0; 1[$.)

b *Vrai*. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc si $x \geqslant 2$, alors $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$. On peut même préciser : $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c *Faux*. Si $x < -2$ alors $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} < 0$.

d *Vrai*. La multiplication par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

5 QCM Inéquations

Énoncé p. 86

a *Faux*. Si x est négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.

b *Faux*. En ajoutant $x-5$ aux deux membres, on obtient $x > -2$ et non $x > 2$.

c *Faux*. Par exemple, $-3 < 2$ mais $\dfrac{1}{-3} < \dfrac{1}{2}$. Les inégalités changent de sens en passant à l'inverse *si les deux membres ont le même signe !*

d *Vrai*. Quelles que soient les valeurs de x, $(x^2+2) > 0$ et $2 > 0$, donc les deux inéquations ont les mêmes solutions que $x - 1 > 0$.

e *Faux*. En prenant la racine carrée des deux membres (positifs) d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente et de même sens. Cependant, la racine carrée de $(x-3)^2$ doit être positive. Il s'agit donc de $|x-3|$, et non de $x-3$ en général. Par exemple, pour $x=0$, on a bien $(x-3)^2 \geqslant (2x+1)^2$ (car $9 \geqslant 1$) mais $x-3=-3$ et $2x+1=1$, donc $x-3 < 2x+1$.

f *Faux*. On ne connaît pas les signes de $x-2$ et de $x+3$. On constate par exemple que 0 est solution de la première inéquation mais pas de la seconde.

6 Application d'une formule

Énoncé p. 86

Lycée Louis Vincent, Metz

1 On remplace par les valeurs données :

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \times (-2) = \frac{25}{4} - \frac{6}{4} = \frac{19}{4}.$$

2 On remplace par les valeurs données :

$$\frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{12}{24} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

3 Avant d'effectuer l'application numérique, on vérifie les unités : la masse doit être en kilogrammes. Sachant qu'une tonne vaut 1 000 kilogrammes, 1,2 tonne vaut 1 200 kilogrammes. On remplace les valeurs données dans la formule :

$$E_c = \frac{1}{2} \times 1\,200 \times 20^2 = 600 \times 400 = 240\,000 \text{ joules}.$$

7 Calcul littéral élémentaire

Énoncé p. 86

Lycée Louis Vincent, Metz

1 En utilisant $-(a-2b) = -a+2b$ et $-(-a+b) = a-b$, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= -a+2b-\Big[(a+b+a-b)+2b\Big] = -a+2b-\big[2a+2b\big] \\ &= -a+2b-2a-2b = -3a. \end{aligned}$$

2 En utilisant la règle $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{b}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \times b}{b \times c}$, on obtient :

$$B = \frac{a \times b}{b \times c} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

3 On commence par les parenthèses intérieures :

$$2y - (x - y) = 2y - x + y = 3y - x.$$

Donc :

$$C = 3x - \big[3y - x\big] - (2x - y) = 3x - 3y + x - 2x + y = 2x - 2y.$$

8 Développement

Énoncé p. 87

Lycée Louis Vincent, Metz

1 On utilise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et la double distributivité :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+2)^2 + (2x-1)(x+3) \\ &= x^2 + 4x + 4 + \left(2x^2 + 6x - x - 3\right) \\ &= 3x^2 + 9x + 1. \end{aligned}$$

2 On utilise les identités remarquables :

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} B(x) &= (4-x)(4+x) - (3x-1)^2 \\ &= \left(4^2 - x^2\right) - \left((3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2\right) \\ &= \left(16 - x^2\right) - \left(9x^2 - 6x + 1\right) \\ &= 16 - x^2 - 9x^2 + 6x - 1 \\ &= -10x^2 + 6x + 15. \end{aligned}$$

3 On utilise l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et la double distributivité :

$$\begin{aligned} C(x) &= (2x-3)^2 - 2(x+1)(x-4) \\ &= \left(4x^2 - 12x + 9\right) - 2\left(x^2 - 4x + x - 4\right) \\ &= 4x^2 - 12x + 9 - 2\left(x^2 - 3x - 4\right) \\ &= 4x^2 - 12x + 9 - 2x^2 + 6x + 8 \\ &= 2x^2 - 6x + 17. \end{aligned}$$

9 Factorisation

Énoncé p. 87

Lycée Louis Vincent, Metz

1 $A(x)$ est une somme dans laquelle on repère le facteur commun $3x$:

$$A(x) = 3x \times 2x + 3x \times 3 = 3x(2x + 3).$$

2 $B(x)$ est une somme dans laquelle on repère le facteur commun $(2x+1)$:

$B(x) = (2x + 1)^2 - (2x + 1)(x - 5) = (2x + 1)\big[(2x + 1) - (x - 5)\big]$.

Donc $B(x) = (2x + 1)\big[2x + 1 - x + 5\big] = (2x + 1)(x + 6)$.

3 $C(x)$ est une différence de deux carrés, on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$C(x) = 4^2 - (x + 3)^2 = \big[4 - (x + 3)\big]\big[4 + (x + 3)\big].$$

Donc $C(x) = \big[4 - x - 3\big]\big[4 + x + 3\big] = (1 - x)(x + 7)$.

10 Isoler une variable

Énoncé p. 87

Lycée Louis Vincent, Metz

1 $p = \rho \times g \times h$ s'écrit aussi : $h = \dfrac{p}{\rho \times g}$.

2 L'égalité $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ équivaut à $mv^2 = 2E_c$, soit à $v^2 = \dfrac{2E_c}{m}$.

Or, la vitesse v étant une grandeur positive, cela équivaut à $v = \sqrt{\dfrac{2E_c}{m}}$.

En remplaçant par les valeurs numériques de l'énoncé, on obtient :

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 81}{2}} = \sqrt{81} = 9.$$

L'objet se déplace à 9 mètres par seconde.

3 L'égalité $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ équivaut à $3V = \pi r^2 h$, soit à $r^2 = \dfrac{3V}{\pi h}$.

Or le rayon r étant une grandeur positive, cela équivaut à $r = \sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$.

En remplaçant par les valeurs numériques de l'énoncé, on obtient :

$$r = \sqrt{\frac{3 \times 12\pi}{\pi \times 4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3.$$

Le rayon du cône mesure 3 cm.

11 Équation du type $x^2 = a$

Énoncé p. 88

Lycée Louis Vincent, Metz

1 18 est strictement positif, donc l'équation $x^2 = 18$ équivaut à $x = \sqrt{18}$ ou $x = -\sqrt{18}$.

De plus $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

L'équation a donc deux solutions : $-3\sqrt{2}$ et $3\sqrt{2}$.

-5 est strictement négatif, donc l'équation $x^2 = -5$ n'a pas de solution.

2 $(3x + 2)^2 = 0$ équivaut à $3x + 2 = 0$, qui équivaut à $3x = -2$, soit $x = -\dfrac{2}{3}$.

3 9 est positif, donc l'équation $(2x - 1)^2 = 9$ équivaut à $2x - 1 = \sqrt{9}$ ou $2x - 1 = -\sqrt{9}$. Comme $\sqrt{9} = 3$:

- $2x - 1 = 3$ équivaut à $2x = 4$, soit à $x = 2$;
- $2x - 1 = -3$ équivaut à $2x = -2$, soit à $x = -1$.

L'équation a deux solutions : -1 et 2.

12 Équation du type $ax + b = cx + d$

Énoncé p. 88

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Pour résoudre ce type d'équation, on cherche à isoler la variable x dans l'un des deux membres de l'équation.

L'équation $5x + 3 = 2x - 9$ est équivalente à $5x - 2x = -9 - 3$, donc à $3x = -12$, c'est-à-dire à $x = \dfrac{-12}{3}$, soit à $x = -4$.

L'équation a donc pour unique solution -4.

2 L'équation $\dfrac{1}{2}(x + 4) = 3\left(\dfrac{1}{3} - x\right)$ est équivalente à $\dfrac{1}{2}x + 2 = 1 - 3x$.

Cette dernière est équivalente à $\dfrac{1}{2}x + 3x = 1 - 2$, donc à $\dfrac{7}{2}x = -1$, c'est-à-dire à $x = -1 \times \dfrac{2}{7}$, soit à $x = \dfrac{-2}{7}$.

L'équation a donc pour unique solution $\dfrac{-2}{7}$.

3 On développe le membre de gauche :

$$4(x - 1) - (2x + 3) = 4x - 4 - 2x - 3 = 2x - 7.$$

L'équation est donc équivalente à $2x - 7 = 3x + 2$, donc à $2x - 3x = 2 + 7$, c'est-à-dire à $-x = 9$, soit à $x = -9$.

L'équation a donc pour unique solution -9.

13 Équation du type $a/x = b$

Énoncé p. 88

Lycée Louis Vincent, Metz

1 L'équation est définie si le dénominateur x n'est pas nul, c'est-à-dire si $x \neq 0$.

De plus, l'équation $\frac{5}{x} = 2$ équivaut à $\frac{5}{x} = \frac{2}{1}$, ce qui conduit par produit en croix à $5 \times 1 = 2 \times x$, donc à $5 = 2x$, soit à $x = \frac{5}{2}$.

L'unique solution de cette équation est $\frac{5}{2}$.

2 L'équation est définie si le dénominateur de la seconde fraction n'est pas nul, c'est-à-dire si $x \neq 0$.

De plus, l'équation $\frac{3}{4} - \frac{6}{x} = 0$ équivaut à $\frac{3}{4} = \frac{6}{x}$, ce qui conduit par produit en croix à $3 \times x = 4 \times 6$, donc à $3x = 24$, soit à $x = 8$.

L'unique solution de cette équation est 8.

3 L'équation est définie si le dénominateur $x+1$ n'est pas nul, c'est-à-dire si $x \neq -1$.

De plus, l'équation $\frac{2}{x+1} = 3$ équivaut à $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{1}$, ce qui conduit par produit en croix à $2 \times 1 = 3 \times (x+1)$, donc à $2 = 3x+3$, c'est-à-dire à $3x = -1$, soit à $x = \frac{-1}{3}$.

Comme $\frac{-1}{3} \neq -1$, l'unique solution de cette équation est $\frac{-1}{3}$.

14 Inéquation du premier degré

Énoncé p. 88

Lycée Louis Vincent, Metz

1 L'inégalité $3x + 6 \leqslant 0$ est équivalente à $3x \leqslant -6$. En divisant chaque membre de l'inégalité par le coefficient de x (3 qui est strictement positif), le sens de l'inégalité ne change pas : l'inéquation $3x \leqslant -6$ équivaut à $x \leqslant \frac{-6}{3}$, soit à $x \leqslant -2$.

L'ensemble solution de l'inéquation est $]-\infty\,;\,-2]$.

2 On distribue le 2 du membre de gauche de l'inégalité : on obtient $2x + 8 < 5x - 1$.

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres ne change pas le sens de l'inégalité : l'inéquation $2x + 8 < 5x - 1$ équivaut donc à $2x - 5x < -1 - 8$, ce qui équivaut à $-3x < -9$.

En divisant chaque membre de l'inégalité par le coefficient de x (-3 qui est strictement négatif), le sens de l'inégalité change : l'inégalité $-3x < -9$ équivaut à $x > \frac{-9}{-3}$, ce qui équivaut à $x > 3$.

L'ensemble solution de l'inéquation est $]3\,;\,+\infty[$.

3 On développe le membre de droite : $2(x-7)+3 = 2x-14+3 = 2x-11$.

L'inéquation équivaut donc à $1 - 4x \geqslant 2x - 11$, donc à $-4x - 2x \geqslant -11 - 1$, ce qui équivaut à $-6x \geqslant -12$.

En divisant chaque membre de l'inégalité par le coefficient de x (-6 qui est strictement négatif), le sens de l'inégalité change : l'inégalité $-6x \geqslant -12$ équivaut à $x \leqslant \dfrac{-12}{-6}$, ce qui équivaut à $x \leqslant 2$.

L'ensemble solution de l'inéquation est $]-\infty\,;\,2]$.

15 Calcul littéral

Énoncé p. 89

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Le produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ s'écrit : $(n-1)n(n+1)$.

La somme du produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ et de l'entier n est donc :

$(n-1)n(n+1)+n = (n^2-n)(n+1)+n = n^3+n^2-n^2-n+n = n^3$.

Cette somme est donc bien le cube d'un entier.

16 Développements

Énoncé p. 89

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 $2x(x-2)(x+2) = 2x(x^2-4) = 2x^3-8x$.

2 $(1+3x)^2-2(x+1)(x-5) = 1+6x+9x^2-2(x^2-5x+x-5)$
$= 1+6x+9x^2-2x^2+8x+10$
$= 7x^2+14x+11$.

3 $\left(3x-\sqrt{3}\right)^2 = 9x^2-6x\sqrt{3}+3$.

4 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2+2\times x\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} = x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$.

17 Arithmétique et calcul littéral

Énoncé p. 89

Lycée Parc de Vilgénis, Massy

1 $(n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2$
$= 2n+1$.

2 Tout entier naturel impair peut s'écrire sous la forme $2n+1$, où n est un entier naturel. Ainsi, de la question précédente, nous pouvons déduire que tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $(n+1)^2-n^2$, et donc que tout nombre impair peut être considéré comme la différence de deux carrés d'entiers consécutifs (n et $n+1$).

3 • $17 = 16+1 = 2\times 8+1 = 2n+1$ avec $n=8$. Ainsi,
$17 = (n+1)^2-n^2 = (8+1)^2-8^2 = 9^2-8^2$.

• $2\,019 = 2\,018+1 = 2\times 1\,009+1 = 2n+1$ avec $n = 1\,009$. Ainsi,
$2\,019 = (1\,009+1)^2-1\,009^2 = 1\,010^2-1\,009^2$.

18 Factorisations

Énoncé p. 89

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 $A(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(2x-3)$
$= (2x-3)(2x-3-(4x+1))$
$= (2x-3)(-2x-4)$
$= -2(2x-3)(x+2)$.

2 $B(x) = (x+1)^2 - (2x+3)^2$
$= ((x+1)-(2x+3))((x+1)+(2x+3))$
$= (-x-2)(3x+4)$.

3 $C(x) = (x-1)(2+x) + (x+5)(1-x)$
$= (x-1)(2+x) - (x+5)(x-1)$
$= (x-1)(2+x-x-5)$
$= -3(x-1)$.

4 $D(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
$= x^2(x+1) + x + 1$
$= (x+1)(x^2+1)$.

5 $E = xy - x - y + 1 = x(y-1) - (y-1) = (y-1)(x-1)$.

6 $F(x) = (5x+3)^2 - 11$
$= (5x+3)^2 - \sqrt{11}^2$
$= (5x+3-\sqrt{11})(5x+3+\sqrt{11})$.

7 $G(x) = (x-1)^2 - 2(x^2-1)$
$= (x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)$
$= (x-1)(x-1-2(x+1))$
$= (x-1)(-x-3)$.

19 Diverses factorisations

Énoncé p. 90

Lycée Chateaubriand, Rennes

1 $f(x) = 3(x-2)(x^2+1) - (6x^2-5)(x-2)$
$= (x-2)[3(x^2+1) - (6x^2-5)]$
$= (x-2)[3x^2+3-6x^2+5]$
$= (x-2)[-3x^2+8]$
$= (x-2)(\sqrt{8}-x\sqrt{3})(\sqrt{8}+x\sqrt{3})$.

2 $16a^4 - 9 = (4a^2-3)(4a^2+3) = (2a-\sqrt{3})(2a+\sqrt{3})(4a^2+3)$.

3 On utilise l'identité remarquable : $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Il vient :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 1 - 7(x-1) + (x+2)(1-x) \\ &= (x-1)^2 - 7(x-1) + (x+2)(1-x) \\ &= (x-1)[(x-1) - 7 - (x+2)] \\ &= (x-1)[x - 1 - 7 - x - 2] \\ &= -10(x-1). \end{aligned}$$

Remarque : bizarrement, on obtient le même résultat en développant :
$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 7x + 7 + x + 2 - x^2 - 2x = -10x + 10 = -10(x-1)$.
Mais c'est exceptionnel ! Ça marche seulement parce que les coefficients des x^2 se compensent. Le simple développement échoue, par exemple, si on modifie un peu la formule, par exemple :

$$x^2 - 2x + 1 - 7(x-1) + (3x+2)(1-x) = -2x^2 - 8x + 10.$$

Alors que la factorisation par $(x-1)$ donne :

$$x^2 - 2x + 1 - 7(x-1) - (3x+2)(x-1) = -2(x-1)(5+x).$$

4 Pour ne pas tomber dans le piège, il faut se souvenir de $(ab)^2 = a^2b^2$. Comme $6x - 3 = 3(2x-1)$, on aura $(6x-3)^2 = 9(2x-1)^2$ (et non pas $3(2x-1)^2$!). Les calculs donnent :

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x-3)^2 - (2x-1) \\ &= 9(2x-1)^2 - (2x-1) \\ &= (2x-1)[9(2x-1) - 1] \\ &= (2x-1)(18x - 9 - 1) \\ &= (2x-1)(18x - 10) \\ &= 2(2x-1)(9x-5). \end{aligned}$$

20 Équations

Énoncé p. 90

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

1 On détermine sur la figure les points d'ordonnées 4, 2 ou -1 (*voir figure à la fin de la correction*).

(a) Il y a deux points d'ordonnée 4, d'abscisses : 1 et 5.

(b) Il y a deux points d'ordonnée 2. L'un a une abscisse comprise entre 1 et 2, l'autre a une abscisse comprise entre 4 et 5.

(c) Aucun point de la courbe n'a une ordonnée négative.

2 **(a)** $(x-3)^2 = 4 \iff (x-3)^2 - 4 = 0$

$\iff (x-3)^2 - 2^2 = 0$

$\iff (x-3-2)(x-3+2) = 0$

$\iff (x-5)(x-1) = 0$

On a donc deux solutions :

$$S = \{1\,;\,5\}.$$

(b) De la même façon :

$(x-3)^2 = 2 \iff (x-3)^2 - 2 = 0$

$\iff (x-3)^2 - \sqrt{2}^2 = 0$

$\iff (x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2}) = 0$

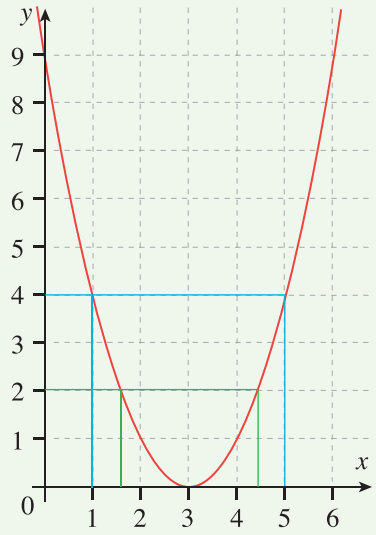
D'où :

$$S = \{3-\sqrt{2}\,;\,3+\sqrt{2}\}.$$

(c) Un carré étant toujours positif ou nul, l'équation :

$$(x-3)^2 = -1$$

n'a pas de solution et $S = \varnothing$.



21 Équations

Énoncé p. 90

Lycée Foch, Rodez

1 Il suffit de développer l'expression :

$(3x+4)(5x-3) = 15x^2 - 9x + 20x - 12 = 15x^2 + 11x - 12 = f(x)$.

2 **(a)** $f(x) = 0 \iff (3x+4)(5x-3) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc $3x+4=0$ ou $5x-3=0$. On obtient les deux solutions :

$$S=\left\{\frac{-4}{3}\,;\,\frac{3}{5}\right\}.$$

(b) $f(x)=15x^2 \iff 15x^2+11x-12=15x^2 \iff 11x-12=0.$
D'où une seule solution :

$$S=\left\{\frac{12}{11}\right\}.$$

(c) $f(x)=-12 \iff 15x^2+11x-12=-12$
$\iff 15x^2+11x=0$
$\iff x(15x+11)=0.$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, d'où $x=0$ ou $15x+11=0$. Il vient :

$$S=\left\{0\,;\,\frac{-11}{15}\right\}.$$

(d) On reconnaît la présence de $5x-3$ des deux côtés du symbole « = », il suffit donc de factoriser par $5x-3$:

$f(x)=5x-3 \iff (3x+4)(5x-3)=5x-3$
$\iff (3x+4)(5x-3)-(5x-3)=0$
$\iff (5x-3)[(3x+4)-1]=0$
$\iff (5x-3)(3x+3)=0$
$\iff 3(5x-3)(x+1)=0.$

Là encore, on utilise le résultat sur les produits nuls, ce qui donne $5x-3=0$ ou $x+1=0$. Il vient :

$$S=\left\{-1\,;\,\frac{3}{5}\right\}.$$

(e) $f(x)=14x^2+11x+4 \iff 15x^2+11x-12=14x^2+11x+4$
$\iff x^2-16=0$
$\iff x^2-4^2=0$
$\iff (x-4)(x+4)=0$ (produit remarquable)

L'ensemble des solutions est donc :

$$S=\{-4\,;+4\}.$$

22 Équations

Énoncé p. 91

Lycée Blaise Pascal, Orsay

1
$$\frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} = \frac{x}{2} + 5$$
$$\iff \frac{15x+9}{12} - \frac{4x-36}{12} = \frac{6x}{12} + \frac{60}{12}$$
$$\iff 15x + 9 - 4x + 36 = 6x + 60$$
$$\iff 5x = 15$$
$$\iff x = 3$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{3\}$.

2 Il faut déjà remarquer que les valeurs 4 et 5, qui annulent les dénominateurs, ne sont pas autorisées... Donc, pour $x \neq 5$ et $x \neq 4$:

$$\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} = 2 - \frac{2}{x-4}$$
$$\iff \frac{x-4}{x-5} = -\frac{x-6}{x-4} + 2 - \frac{2}{x-4}$$
$$= -\frac{x-6}{x-4} + \frac{2x-8}{x-4} - \frac{2}{x-4}$$
$$= \frac{-x+6+2x-8-2}{x-4}$$
$$= \frac{x-4}{x-4}$$
$$= 1$$
$$\iff x - 4 = x - 5$$
$$\iff -4 = -5$$

Ceci n'est visiblement pas vrai, il n'y a pas de solution : $S = \varnothing$.

3
$$(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0$$
$$\Big((4x^2 - 3x - 18) + (4x^2 + 3x)\Big)\Big((4x^2 - 3x - 18) - (4x^2 + 3x)\Big) = 0$$
$$(4x^2 - 3x - 18 + 4x^2 + 3x)(4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x) = 0$$
$$(8x^2 - 18)(-6x - 18) = 0$$
$$2(4x^2 - 9)(-6)(x + 3) = 0$$
$$(-12)(2x - 3)(2x + 3)(x + 3) = 0$$

Un produit de facteurs est nul quand l'un des facteurs est nul.

On obtient l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{-3\,;\, -\frac{3}{2}\,;\, \frac{3}{2}\right\}.$$

CORRIGÉS

23 Bien choisir son taxi

Énoncé p. 91

Lycée Victor Duruy, Paris

1 **(a)** Avec le tarif A, 8 km coûtent :

$$5 + 8 \times 0{,}40 = 5 + 3{,}20 = 8{,}20 \text{ €}.$$

Avec le tarif B, le même trajet revient à : $8 \times 0{,}60 = 4{,}80$ €.

Il vaut donc mieux utiliser le taxi B.

(b) Pour 30 km, le tarif A coûte :

$$5 + 30 \times 0{,}40 = 5 + 12 = 17 \text{ €},$$

alors que le tarif B revient à : $30 \times 0{,}60 = 18$ €.

Il vaut donc mieux prendre le taxi A.

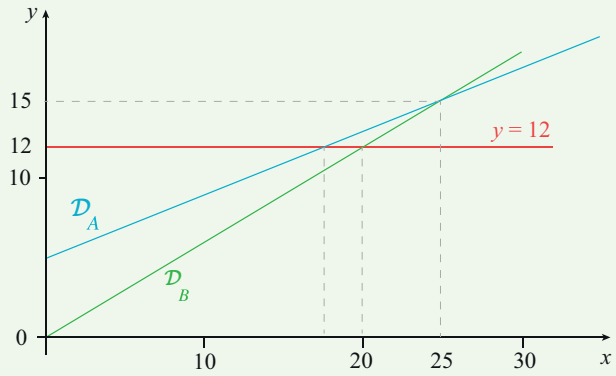
2 Dans le cas général, pour x kilomètres, le tarif A revient à :

$$A(x) = 5 + 0{,}40x$$

et le tarif B :

$$B(x) = 0{,}60x.$$

3 **(a)** Il s'agit de deux fonctions affines (la seconde est même linéaire), donc $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ sont deux droites. D'après nos calculs, $\mathcal{D}_A$ passe par le point de coordonnées (30 ; 17) et, par exemple (0 ; 5) ; $\mathcal{D}_B$ passe par le point de coordonnées (30 ; 18) et (0 ; 0). On obtient la représentation :



(b) Les coordonnées de l'intersection sont données par le système :

$$\begin{cases} y = 5 + 0{,}40x \\ y = 0{,}60x \end{cases} \iff \begin{cases} 0{,}60x = 5 + 0{,}40x \\ y = 0{,}60x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0{,}20x = 5 \\ y = 0{,}60x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{5}{0{,}20} = 25 \\ y = 0{,}60 \times 25 = 15 \end{cases}$$

Pour 25 km, les deux tarifs sont équivalents (on paiera 15 € dans les deux cas).

4 **(a)** À droite du point d'intersection (c'est-à-dire pour des trajets de plus de 25 km), la droite $\mathcal{D}_A$ est en-dessous de la droite $\mathcal{D}_B$, le taxi A est donc moins cher.

(b) On utilise la droite horizontale, d'équation $y = 12$ pour lire sur le graphique, pour chaque tarif, les distances correspondant à 12 €. La droite horizontale coupe $\mathcal{D}_A$ à gauche du point où elle coupe $\mathcal{D}_B$. On parcourt donc plus de kilomètres avec le tarif B.

D'après le graphique, le tarif B permet de parcourir 20 kilomètres. C'est moins de 25 : on est bien dans le domaine où le tarif B est moins cher (plus de kilomètres pour le même prix).

24 Équations

Énoncé p. 92

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1
$$\begin{aligned}
&(x-1)(2x-3)^2 = 4(x-1)\\
\iff &(x-1)(2x-3)^2 - 4(x-1) = 0\\
\iff &(x-1)\big[(2x-3)^2 - 4\big] = 0\\
\iff &(x-1)\big[(2x-3)^2 - 2^2\big] = 0\\
\iff &(x-1)\big[(2x-3)-2\big]\big[(2x-3)+2\big] = 0\\
\iff &(x-1)(2x-5)(2x-1) = 0\\
\iff &x-1 = 0 \text{ ou } 2x-5 = 0 \text{ ou } 2x-1 = 0\\
\iff &x = 1 \text{ ou } x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(x-1)(2x-3)^2 = 4(x-1)$ est donc :

$$S = \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{5}{2}\right\}.$$

2 L'ensemble de définition de l'équation $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{-6}{(x+1)(x-2)}$ est l'ensemble des réels x tels que les fractions sont définies, c'est-à-dire tels que $x+1 \neq 0$ et $x-2 \neq 0$, soit $x \neq -1$ et $x \neq 2$.

L'ensemble de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)}\\
\iff &\frac{3(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)}\\
\iff &\frac{3x-6-2x-2}{(x+1)(x-2)} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)}\\
\iff &\frac{x-8}{(x+1)(x-2)} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)}\\
\iff &x-8 = -6 \iff x = 2.
\end{aligned}$$

Or, 2 n'appartient pas à l'ensemble de définition de l'équation.
Par conséquent, l'ensemble solution de l'équation est :

$$S = \varnothing.$$

3 $x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4$. Or, un carré est toujours positif ou nul. Par conséquent, il n'y a pas de solution à l'équation $x^2 + 4 = 0$. Son ensemble solution est alors :

$$S = \varnothing.$$

4 Avant de résoudre l'équation $\dfrac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4} = 1$, il faut en déterminer l'ensemble de définition (car il y a une fraction).
La fraction est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 4 \neq 0$, soit pour $x \neq -2$ et $x \neq 2$. L'ensemble de définition de l'équation est alors : $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Résolvons maintenant l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4} = 1 &\iff 3x^2 + 4x - 4 = x^2 - 4\\ &\iff 2x^2 + 4x = 0\\ &\iff 2x(x + 2) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -2.\end{aligned}$$

Il y a donc potentiellement deux solutions : 0 et -2. Or, -2 n'est pas dans l'ensemble de définition de l'équation.
La seule solution est alors 0.

$$S = \{0\}.$$

25 Avec une identité remarquable

Énoncé p. 92

Lycée Carnot, Dijon

Pour résoudre cette inéquation, on passe tout dans le même membre et on factorise :

$$\begin{aligned}(2x + 5)^2 - (3x + 2)^2 &\leqslant 0\\ \Big((2x + 5) + (3x + 2)\Big)\Big((2x + 5) - (3x + 2)\Big) &\leqslant 0\\ (5x + 7)(-x + 3) &\leqslant 0.\end{aligned}$$

Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		3		$+\infty$
$5x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x+7)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit : $S = \left]-\infty\,;\,-\frac{7}{5}\right] \cup [3\,;\,+\infty[$.

26 Avec les identités remarquables

Énoncé p. 92

Lycée Saint-Jean, Limoges

1 $$(2x+1)^2 - x^2 \geqslant 0$$
$$\iff \big((2x+1)+x\big)\big((2x+1)-x\big) \geqslant 0$$
$$\iff (3x+1)(x+1) \geqslant 0.$$

Utilisez éventuellement un tableau de signes pour trouver :

$$S =]-\infty\,;-1] \cup [-\tfrac{1}{3}\,;+\infty[.$$

2 Attention ! Il s'agit en fait du développement du produit remarquable :

$$\big[(3x+2)-(x+1)\big]^2.$$

C'est un carré, il n'est donc négatif (au sens large) que lorsqu'il vaut zéro. D'où : $(3x+2)-(x+1)=0 \iff 2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2}$.

Conclusion : $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

27 Avec un facteur commun

Énoncé p. 92

Lycée Descartes, Antony

1 Les deux membres étant constitués de sommes et de produits, pas de problème de définition : le domaine est $\mathbb{R}$. Il y a un x^3, il faut être prudent. Étant donnée la façon dont sont disposés les deux membres de l'inéquation, il faut penser à factoriser chacun d'entre eux :

$$x^2(x-1) \geqslant 4(x-1).$$

On passe tout dans le même membre, et on obtient :

$$x^2(x-1) - 4(x-1) \geqslant 0$$
$$(x-1)(x^2-4) \geqslant 0$$
$$(x-1)(x-2)(x+2) \geqslant 0.$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit :

$$S = [-2\,;\,1] \cup [2\,;\,+\infty[.$$

2 Il faut ôter de l'ensemble de définition les valeurs qui annulent le dénominateur. Factorisons celui-ci : $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. L'inéquation est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,1\}$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}$:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

On en déduit : $S =]-\infty\,;\,-2[\cup]-1\,;\,1[$.

3 On passe $16x$ à gauche et on factorise :

$$x^2 - 16x \geqslant 0 \iff x(x-16) \geqslant 0$$

En s'aidant au besoin d'un tableau de signes, on obtient :

$$S =]-\infty\,;\,0] \cup [16\,;\,+\infty[.$$

28 Résolution algébrique et graphique

Énoncé p. 93

Lycée Auguste Renoir, Cagnes-sur-Mer

1 Il suffit de développer :

$$4 - (x-1)^2 = 4 - (x^2 - 2x + 1) = 4 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x + 3.$$

On reconnaît dans $f(x) = 4 - (x-1)^2$ la différence de deux carrés, ce qui permet de factoriser :

$$f(x) = \big(2 - (x-1)\big)\big(2 + (x-1)\big)$$
$$= (3-x)(1+x).$$

2 On peut dresser un tableau de signes :

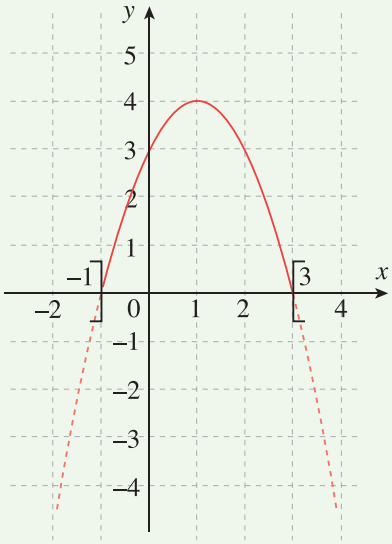
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3-x)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On conclut :

$$S =]-1\,;\,3[.$$

3 Pour résoudre graphiquement l'inéquation, on fait apparaître sur la figure les points d'ordonnée strictement positive (*voir figure ci-dessous*).

Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation.



On retrouve bien l'intervalle $]-1\,;\,3[$.

CORRIGÉS

29 Résolution algébrique et graphique

Énoncé p. 93

Lycée Colbert, Paris

1 On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{-3}{1+x} \geqslant 3 &\iff \frac{-3}{1+x} \geqslant \frac{3(1+x)}{1+x}\\ &\iff \frac{-3-3(1+x)}{1+x} \geqslant 0\\ &\iff \frac{-3(1+1+x)}{1+x} \geqslant 0\\ &\iff \frac{-3(2+x)}{1+x} \geqslant 0.\end{aligned}$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3(2+x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-3(2+x)}{x+1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

D'après le tableau, l'ensemble des solutions est donc :

$$S = [-2\,;-1[.$$

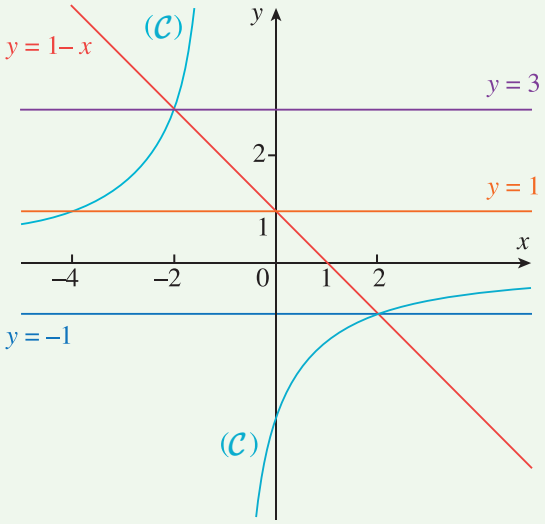
On retrouve graphiquement ce résultat en plaçant sur la figure la droite d'équation $y = 3$. Les solutions sont les abscisses des points de $(\mathcal{C})$ qui sont situés au-dessus de cette droite (voir figure à la fin du corrigé). Il s'agit effectivement des points d'abscisses comprises entre -2 et -1 (on exclut -1 car f n'est pas définie en -1).

2 Sur la figure, on représente les droites horizontales $y = 1$ et $y = -1$. On cherche les abscisses des points de $(\mathcal{C})$ qui sont dans la bande délimitée par ces deux droites. On lit l'ensemble des solutions sur la figure :

$$S =]-\infty\,;-4[\cup]2\,;+\infty[\,.$$

3 On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont au-dessus de la droite d'équation $y = 1 - x$. On lit sur le dessin l'ensemble des solutions :

$$S = [-2\,;-1[\cup[2\,;+\infty[$$



Retrouvons ce résultat par le calcul :

$$\begin{aligned}\frac{-3}{x+1} \geqslant 1-x &\iff \frac{-3}{x+1} - (1-x) \geqslant 0\\ &\iff \frac{-3-(x+1)(1-x)}{x+1} \geqslant 0\\ &\iff \frac{x^2-4}{x+1} \geqslant 0\\ &\iff \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \geqslant 0.\end{aligned}$$

En faisant le tableau de signes de $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+1}$ on retrouve le résultat obtenu précédemment par lecture graphique.

30 Inéquations diverses

Énoncé p. 94

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

1 $\dfrac{3x+1}{4} > \dfrac{5x+1}{6} \iff \dfrac{3x+1}{4} \times 12 > \dfrac{5x+1}{6} \times 12$

$\iff 9x+3 > 10x+2$

$\iff 1 > x.$

D'où $S =]-\infty\,;\,1[$.

2 Un carré, positif, ne peut jamais être plus petit que -1, il n'y a donc pas de solution. $S = \varnothing$.

3 On développe :

$$\begin{aligned} & 2x-2-3x-3>4x-8 \\ \iff & 2x-3x-4x>2+3-8 \\ \iff & -5x>-3 \\ \iff & x<\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

D'où $S=\left]-\infty\,;\,\frac{3}{5}\right[$.

4 $(-2x-3)^4$ est toujours positif. S'il n'est pas nul, il faut que x soit positif pour que le produit $x(-2x-3)^4$ soit supérieur à 0. Si $(-2x-3)^4=0$, c'est que $-2x-3=0$, et donc $x=-\frac{3}{2}$. On obtient :

$$S=\left\{-\frac{3}{2}\right\}\cup[0\,;+\infty[\,.$$

5 On réduit toutes les fractions au dénominateur 4 :

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{4}-\frac{20}{4}\leqslant\frac{4x-6}{4}+\frac{3}{4} \\ \iff & x-1-20\leqslant 4x-6+3 \\ \iff & -21+6-3\leqslant 4x-x \\ \iff & -18\leqslant 3x \\ \iff & -6\leqslant x. \end{aligned}$$

D'où : $S=[-6\,;+\infty[$.

31 Inéquations

Énoncé p. 94

Lycée Lacordaire, Marseille

1 $A(x)=x^3-x^2+4x^2-4$

$=x^2(x-1)+4(x^2-1)$

$=x^2(x-1)+4(x+1)(x-1)$

$=(x-1)[x^2+4(x+1)]$

$=(x-1)(x^2+4x+4)$

$=(x-1)(x+2)^2$.

2 Factorisons le numérateur :

$$\begin{aligned} (x-1)^2-2x+2 &= (x-1)^2-2(x-1) \\ &= (x-1)(x-1-2) \\ &= (x-1)(x-3). \end{aligned}$$

L'inéquation devient donc :

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)^2} \geqslant 0.$$

L'inéquation est définie seulement sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,1\}$ (à cause du dénominateur). Maintenant que nous avons éliminé 1, nous pouvons simplifier la fraction :

$$\frac{x-3}{(x+2)^2} \geqslant 0.$$

Le dénominateur étant toujours strictement positif pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,1\}$, on se ramène à $x - 3 \geqslant 0$, donc $x \geqslant 3$. Un coup d'œil suffit à vérifier que les valeurs interdites ne posent pas de problème :

$$S = [3\,;+\infty[\,.$$

32 Points et distance

Énoncé p. 94

Lycée Notre-Dame, Boulogne

1 $|x+3| = |x-(-3)|$, donc $|x+3|$ représente la distance entre M et A.
De même, $|x-1|$ représente la distance entre M et B.

2 De la question précédente, nous pouvons dire que l'égalité :

$$|x+3| = |x-1|$$

signifie que $MA = MB$ et donc que M est le milieu de $[AB]$.
Son abscisse x est donc le centre de l'intervalle $[-3;\,1]$.
Ainsi, $x = \dfrac{-3+1}{2} = -1$.

33 Diverses questions

Énoncé p. 95

Lycée Notre-Dame, Boulogne

1 *Écrire le nombre* $|3\pi - 12|$ *sans valeurs absolues.*
On cherche pour cela le signe de $3\pi - 12$: on sait que $3 < \pi < 4$ donc $9 < 3\pi < 12$. Ainsi, $3\pi - 12 < 0$. On en conclut alors que :

$$|3\pi - 12| = -(3\pi - 12) = 12 - 3\pi.$$

2 *Sur une droite graduée,* M *et* N *sont les points d'abscisses respectives* -4 *et* $-2{,}5$. *Quelle est la distance* MN *?*
Convenons de noter x_M et x_N les abscisses respectives des points M et N. On a $x_N > x_M$. Pour déterminer la distance MN, on effectue le calcul :

$$MN = x_N - x_M = -2{,}5 - (-4) = -2{,}5 + 4 = 1{,}5.$$

À RETENIR

Quels que soient les points A et B sur l'axe gradué,

$$d(A,B) = |x_A - x_B| = |x_B - x_A|.$$

3 Le tableau complété est le suivant :

Intervalle	Encadrement	Centre	Rayon	Valeur absolue
$x \in]0;10[$	$0 < x < 10$	5	5	$\lvert x-5\rvert < 5$
$x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$	$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\left\lvert x-\frac{1}{8}\right\rvert \leqslant \frac{5}{8}$
$x \in]-0{,}53;-0{,}51[$	$-0{,}53 < x < -0{,}51$	$-0{,}52$	0,01	$\lvert x+0{,}52\rvert < 10^{-2}$

Chapitre 5

Problèmes de géométrie

Plan du chapitre

1. Le triangle
2. Le cercle
3. Trigonométrie

Exercice type — Lycée Janson de Sailly, Paris

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et C un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B. Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[OA]$. La droite (CJ) coupe (OI) en K.

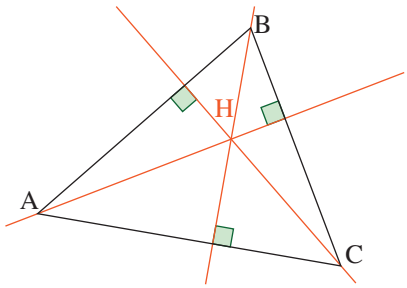
1. Montrer que (OI) et (BC) sont perpendiculaires. Que dire de BCK ?
2. Montrer que $COKA$ est un parallélogramme.
3. Montrer que O est le centre de gravité de BCK.

Voir corrigé page 123

1 Le triangle

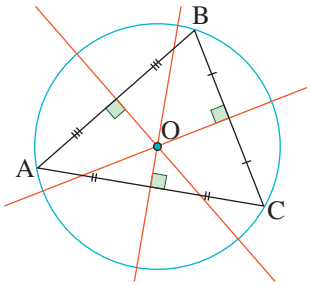
Dans un triangle (non aplati), nous avons les propriétés suivantes :

- Les trois hauteurs sont concourantes. Le point de concours H s'appelle l'*orthocentre* du triangle.

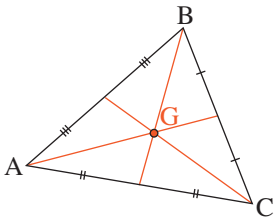


COURS

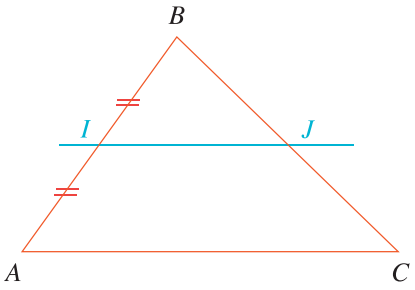
- Les trois médiatrices des côtés sont concourantes. Le point de concours O est le *centre* du cercle circonscrit au triangle.



- Les trois médianes sont concourantes. Le point de concours G est le *centre de gravité* (situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet).



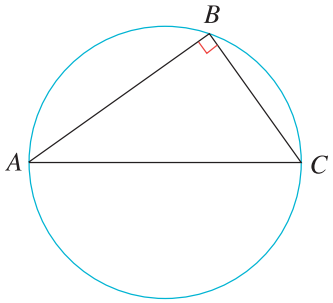
- Si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.
- Si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.



Si I est le milieu de $[AB]$ et si (IJ) // (AC), alors J est le milieu de $[BC]$.

1.1 Le triangle rectangle

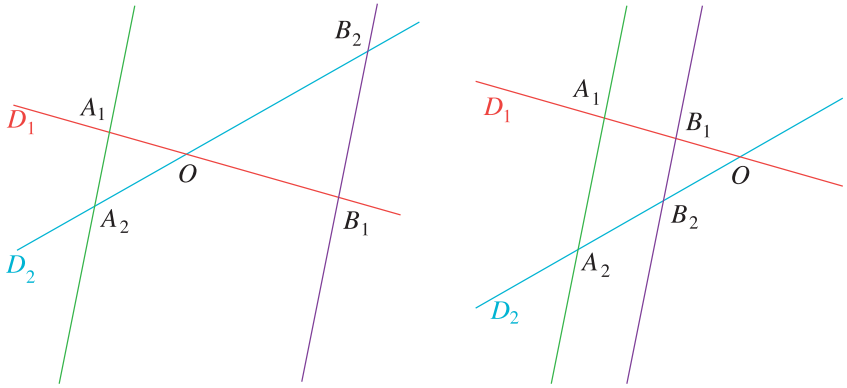
- Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.
- (Réciproque) Si B appartient au cercle de diamètre $[AC]$ et est distinct de A et de C, alors le triangle ABC est rectangle en B.



1.2 Le théorème de Thalès

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en O. Soient deux droites parallèles ne passant pas par O qui coupent D_1 respectivement en A_1 et B_1, et D_2 respectivement en A_2 et B_2.

On a deux configurations possibles :



Alors :

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}.$$

Remarque : plutôt que d'apprendre ces formules par cœur (les noms des points changent d'un énoncé à l'autre), faites une figure, repérez bien quels sont les triangles semblables, quelles sont les longueurs proportionnelles, quels sont les angles égaux, et n'oubliez pas de citer le nom de Thalès.

COURS

1.3 La réciproque du théorème de Thalès

Théorème 1

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en O,
A_1 et B_1 deux points de D_1, distincts de O,
A_2 et B_2 deux points de D_2, distincts de O.
Si

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1}$$

et si les points O, A_1, B_1 et les points O, A_2, B_2 sont alignés dans le même ordre, alors les droites (A_1A_2) et (B_1B_2) sont parallèles.

Remarque : on est alors dans une des deux configurations de Thalès. On peut en déduire :

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}.$$

2 Le cercle

Définition 1

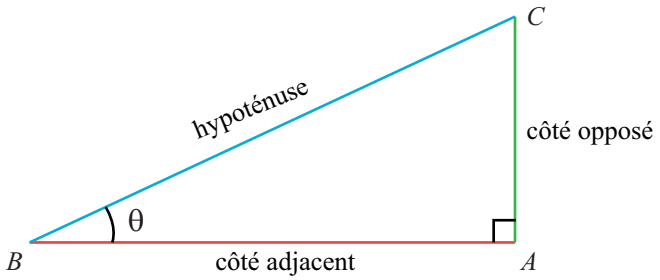
Le cercle de centre O et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points M tels que :

$$OM = r.$$

Remarque : on dit que tous les points d'un cercle sont *équidistants* de son centre.

3 Trigonométrie

On considère, dans un triangle rectangle, un angle aigu θ (c'est-à-dire un angle autre que l'angle droit).



Le cosinus, le sinus et la tangente de θ sont donnés par :

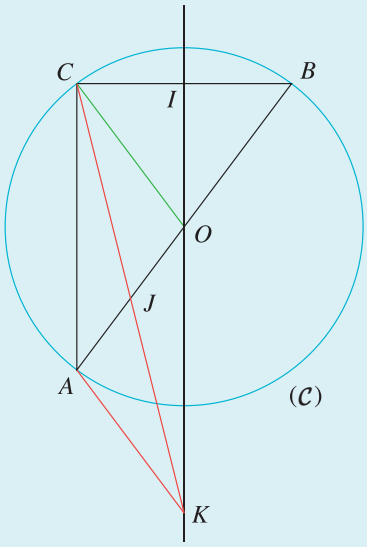
$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}},\ \sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \text{ et } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Notons que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des éléments de $]0;1[$, car l'hypoténuse est le plus grand des trois côtés. En revanche, $\tan\theta$ peut prendre n'importe quelle valeur strictement positive.

Solution de l'exercice type — **Lycée Janson de Sailly, Paris**

1 $IB = IC$ car I est le milieu de $[BC]$, et $OB = OC$ car B et C sont sur le cercle de centre O.
Donc (IO) est la médiatrice de $[BC]$.
Ainsi, (IO) est perpendiculaire à (BC).

K appartenant à la médiatrice de $[BC]$, on a $KB = KC$ et donc BCK est isocèle en K.



2 C appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et est distinct de A et B, donc ABC est rectangle en C : $(AC) \perp (BC)$. Comme $(OI) \perp (BC)$ (question 1), les droites (OI) et (AC) sont parallèles.
Les points J, O, A d'une part et J, K, C d'autre part sont alignés, donc les triangles ACJ et OKJ sont en configuration de Thalès. Il vient :

$$\frac{JK}{JC} = \frac{JO}{JA} = 1$$

(car $JO = JA$), donc $JK = JC$ et J est le milieu de $[CK]$.
Les diagonales de $COKA$ se coupent en leur milieu J donc $COKA$ est un parallélogramme.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Janson de Sailly, Paris

Autre méthode (avec les vecteurs) : dans le triangle ABC, (OI) joint le milieu O de $[AB]$ et le milieu I de $[BC]$, donc (OI) // (AC). Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{CA}$. Alors $CAMO$ est un parallélogramme, donc ses diagonales $[CM]$ et $[AO]$ ont le même milieu J : M appartient à la droite (CJ). De plus, (OM) // (AC) et (OI) // (AC), donc M appartient à (OI). Ainsi M est le point d'intersection de (CJ) et (OI) : $M = K$, et $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CA}$, ce qui prouve à nouveau que $COKA$ est un parallélogramme.

3 J est le milieu de $[CK]$, donc (BJ) est une médiane de BCK. I est le milieu de $[BC]$ donc (IK) est une autre médiane de BCK. Or O appartient à (BJ), car $J \in [OA]$ et $(OA) = (AB)$, et O appartient à $(IK) = (OI)$. Ces deux médianes se coupent donc en O, donc O est le centre de gravité de BCK (intersection des médianes).

Voir énoncé page 119

1 V/F Propriétés du triangle

5 min — Corrigé p. 131

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

Dans un triangle :

a Le centre de gravité est l'intersection des médiatrices.

b L'orthocentre est l'intersection des hauteurs.

c Si l'un des côtés est le diamètre d'un cercle, alors le triangle est rectangle.

Automatismes

2 Périmètre d'un polygone ou d'un cercle ★

10 min — Corrigé p. 131

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Calculer le périmètre P_1 d'un rectangle de largeur 6,5 cm et de longueur 11 cm.

2 Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,1 près du périmètre P_2 d'un cercle de rayon 7 cm.

3 Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,1 près du périmètre P_3 d'un cercle de diamètre 9 cm.

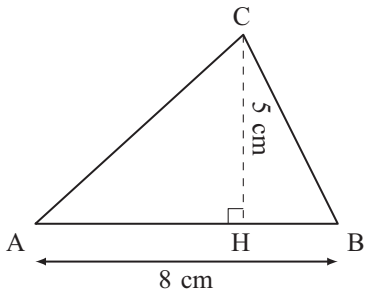
3 Calcul d'aires ★

10 min — Corrigé p. 131

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Déterminer l'aire d'un terrain rectangulaire dont la longueur mesure 65 mètres et la largeur 24 mètres.

2 Déterminer l'aire du triangle ABC ci-contre, où H est le pied de la hauteur issue de C.



3 Déterminer l'aire d'un disque de diamètre 14 cm (on donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à l'unité près).

4 Volume d'un solide usuel ★

10 min — Corrigé p. 131

Lycée Louis Vincent, Metz

Dans chacun des cas, déterminer la valeur exacte du volume du solide donné.

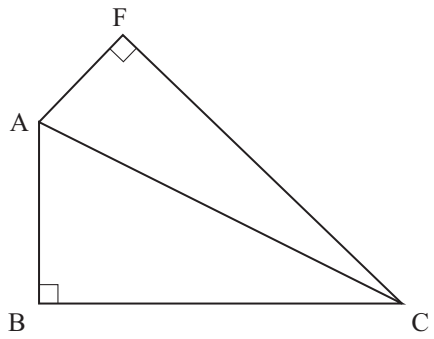
1. Un cylindre de hauteur 5 cm et de base un disque de rayon 3 cm.
2. Un cône de hauteur 6 cm et de base un disque de rayon 4 cm.
3. Un prisme de hauteur 8 cm, dont la base est un triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 6$ cm et $AC = 5$ cm.
4. Une boule de rayon 3 cm.

5 Théorème de Pythagore

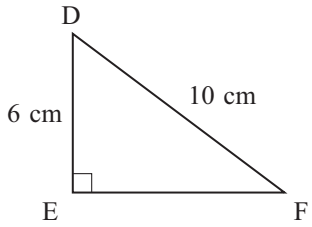
★ 10 min Corrigé p. 132

Lycée Louis Vincent, Metz

Sur la figure page ci-dessous, ABC et AFC sont des triangles rectangles respectivement en B et en F. On donne $AB = 3$ cm; $BC = 6$ cm et $AF = 2$ cm.



1. Calculer la valeur exacte de la longueur AC.
2. En déduire la valeur exacte de la longueur FC.
3. Sur la figure ci-dessous, le triangle DEF est rectangle en E, avec $DF = 10$ cm et $DE = 6$ cm. Calculer la longueur EF.

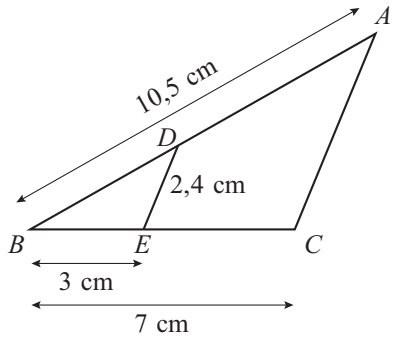


6 Théorème de Thalès

★ 10 min Corrigé p. 132

Lycée Louis Vincent, Metz

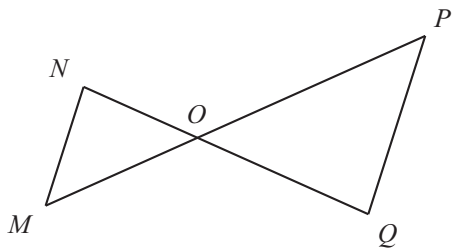
Sur la figure page ci-contre, D est un point de la droite (AB) et E un point de la droite (BC) tels que (AC) et (DE) sont parallèles. On donne $BE = 3$ cm, $BC = 7$ cm, $DE = 2{,}4$ cm et $BA = 10{,}5$ cm.



1 Déterminer la longueur AC.

2 Déterminer la longueur BD.

3 Sur la figure ci-dessous, les points M, O, P d'une part, et les points N, O, Q d'autre part, sont alignés. Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles. On donne $OM = 4$ cm, $ON = 3$ cm, $MN = 3$ cm et $OP = 6$ cm. Déterminer les longueurs OQ et PQ.

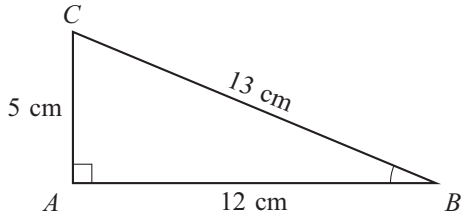


7 Trigonométrie

★ 10 min Corrigé p. 133

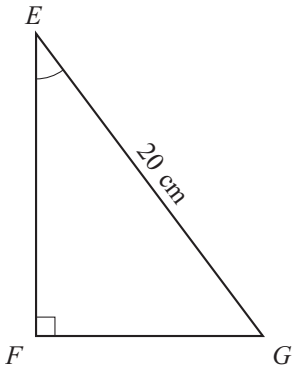
Lycée Louis Vincent, Metz

1 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 12$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 13$ cm. Calculer les valeurs de $\sin\left(\widehat{B}\right)$, $\cos\left(\widehat{B}\right)$ et $\tan\left(\widehat{B}\right)$.

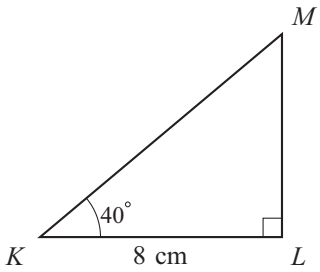


INTERROS

2 Dans un triangle EFG, rectangle en F, on sait que : $\sin\left(\widehat{E}\right) = 0{,}6$, $\cos\left(\widehat{E}\right) = 0{,}8$ et $EG = 20$ cm. Déterminer la longueur des autres côtés du triangle.



3 Soit KLM un triangle rectangle en L tel que $KL = 8$ cm et $\widehat{K} = 40°$. Déterminer une valeur approchée à 0,1 près de la longueur LM.



Problèmes de géométrie

8 Nature d'un triangle

★ — 5 min — Corrigé p. 133

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Les côtés d'un triangle IJK ont pour longueurs $IJ = 3 + 2\sqrt{5}$, $JK = \sqrt{78}$ et $IK = 3\sqrt{5} - 2$.

Quelle est la nature du triangle IJK ?

9 Démontrer la perpendicularité

★ — 10 min — Corrigé p. 134

Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A sur $[BC]$. I est un point de $[AH]$. La droite parallèle à (AB) passant par I coupe (BC) en J et (AC) en K. Démontrer que (CI) est perpendiculaire à (AJ).

10 Théorème de Thalès

★★ 15 min Corrigé p. 134

Lycée Kléber, Strasbourg

$ABCD$ est un trapèze avec (AB) // (CD). Par E, intersection des diagonales (AC) et (BD), on mène Δ, parallèle à (AD) et qui coupe $[DC]$ en F, ainsi que Δ', parallèle à (BC) et qui coupe $[DC]$ en G.

1. Faire une figure.
2. Montrer que $GC = DF$.

11 Aire de rectangles

★★ 15 min Corrigé p. 135

Lycée Chateaubriand, Rennes

Un triangle ABC de hauteur $[AH]$ est tel que $AB = 5$, $BC = 8$, et $AH = 4$ (unité : le cm). Construire ce triangle, le point H étant situé sur le segment $[BC]$.

Par un point K de $[AH]$, on mène la parallèle à (BC). Elle coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N. P et Q sont les points de (BC) tels que (MP) et (NQ) soient perpendiculaires à (BC). On note $AK = x$.

1. Calculer en fonction de x l'aire $a(x)$ du rectangle $MNQP$.
2. Pour quelle valeur de x ce rectangle a-t-il une aire maximale ? Quel est ce maximum ?

12 Aire d'un triangle

★★ 20 min Corrigé p. 136

Lycée Raspail, Paris

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit M un point de $[AB]$. La parallèle à (AC) passant par M coupe $[BC]$ en N ; la parallèle à (AB) passant par N coupe $[AC]$ en P. On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

1. Montrer que $APNM$ est un rectangle.
2. On pose $x = \dfrac{AM}{AB}$. Donner l'aire de PNC en fonction de x et $\mathcal{A}$.
3. Donner l'aire de MBN en fonction de x et $\mathcal{A}$.
4. Exprimer l'aire du rectangle $AMNP$ en fonction de x et $\mathcal{A}$.
5. Résoudre l'inéquation $2x(1-x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et montrer que l'aire du rectangle est maximale quand M est le milieu de $[AB]$.

13 Étude d'une configuration

★★★ 15 min Corrigé p. 138

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

A, B, C sont trois points sur un cercle de centre O. D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle. On suppose que $AB \neq AC$, $D \neq B$ et $D \neq C$.

I est le milieu de $[BC]$ et $[AM]$, $[BN]$, $[CP]$ les trois hauteurs du triangle ABC. H est l'orthocentre de ABC et (AM) recoupe le cercle en H'.

1. Justifier que $\widehat{ABD}$, $\widehat{AH'D}$, $\widehat{ACD}$ sont trois angles droits.
2. Montrer que $BDCH$ est un parallélogramme et que I est le milieu de $[DH]$.
3. Montrer que M est le milieu de $[HH']$.

1 V/F Propriétés du triangle

Énoncé p. 125

a *Faux*. C'est l'intersection des médianes (droites qui lient un sommet et le milieu du côté opposé).

b *Vrai*. Une hauteur passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé.

c *Faux*. N'importe quel segment est le diamètre d'un cercle (et d'un seul). Cependant, si le troisième sommet se trouve sur ce cercle, alors le triangle est rectangle.

2 Périmètre d'un polygone ou d'un cercle

Énoncé p. 125

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Ce rectangle est un polygone ayant quatre côtés : deux côtés ont pour longueur 6,5 cm et les deux autres côtés ont pour longueur 11 cm. On en déduit que le périmètre P_1 du rectangle est :

$$P_1 = 2 \times 6{,}5 + 2 \times 11 = 13 + 22 = 35 \text{ cm}.$$

2 En utilisant la formule du périmètre d'un cercle de rayon R, $P = 2\pi \times R$, on obtient que le périmètre P_2 exprimé en cm est : $P_2 = 2\pi \times 7 = 14\pi$, soit environ 44,0 cm (la calculatrice donne $14\pi \approx 43{,}98$).

3 Le rayon d'un cercle est la moitié de son diamètre : $R = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$ cm. En utilisant la formule du périmètre d'un cercle de rayon R, on obtient que le périmètre P_3 exprimé en cm est : $P_3 = 2\pi \times 4{,}5 = 9\pi$, soit environ 28,3 cm (la calculatrice donne $9\pi \approx 28{,}27$).

3 Calcul d'aires

Énoncé p. 125

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Le terrain étant un rectangle, son aire est le produit de sa longueur et de sa largeur, soit $65 \times 24 = 1\,560$ m^2.

2 La hauteur correspondant à la base $[AB]$ est la longueur CH.

Ainsi l'aire de ce triangle est $\dfrac{AB \times CH}{2} = \dfrac{8 \times 5}{2}$ cm^2, soit 20 cm^2.

3 Comme le diamètre du disque est 14 cm, son rayon R mesure 7 cm.

L'aire de ce disque est égale à : $\pi \times 7^2 = 49\pi$ cm^2, soit environ 154 cm^2 à l'unité près (la calculatrice donne $49\pi \approx 153{,}94$).

4 Volume d'un solide usuel

Énoncé p. 125

Lycée Louis Vincent, Metz

1 On utilise la formule du volume d'un cylindre avec $h = 5$ cm et $R = 3$ cm.

Le volume de ce cylindre est égal à : $V_a = \pi \times 3^2 \times 5$, soit $V_a = 45\pi$ cm^3.

2 On utilise la formule du volume d'un cône avec $h = 6$ cm et $R = 4$ cm.

Le volume de ce cône est égal à : $V_b = \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 6$, soit $V_b = 32\pi$ cm^3.

3 L'aire du triangle ABC rectangle en A est $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ cm^2. On en déduit que le volume du prisme de base ABC et de hauteur 8 cm est égal à $V_c = 15 \times 8$, soit $V_c = 120$ cm^3.

4 On utilise la formule du volume d'une boule avec $R = 3$ cm. Ce volume est égal à :

$$V_d = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{4}{3} \times 27 \times \pi = 4 \times 9 \times \pi, \text{ soit } V_d = 36\pi \text{ cm}^3.$$

5 Théorème de Pythagore

Énoncé p. 126

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Comme ABC est un triangle rectangle en B, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45.$$

Donc $AC = \sqrt{45}$ cm, soit $AC = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$ cm.

2 Comme AFC est un triangle rectangle en F, on a d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AF^2 + FC^2$.

Donc $FC^2 = AC^2 - AF^2$, soit $FC^2 = 45 - 4 = 41$.

Ainsi, $FC = \sqrt{41}$ cm.

3 Comme DEF est un triangle rectangle en E, son hypoténuse est $[DF]$ et on a d'après le théorème de Pythagore : $DF^2 = DE^2 + EF^2$.

Donc $EF^2 = DF^2 - DE^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$.

Ainsi $EF = \sqrt{64} = 8$ cm.

6 Théorème de Thalès

Énoncé p. 126

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Les points B, D et A, d'une part, et les points B, E et C, d'autre part, sont alignés. Les droites (DE) et (AC) sont parallèles, donc on est dans une configuration de Thalès.

Ainsi d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE} = \frac{BA}{BD} \quad \text{soit} \quad \frac{7}{3} = \frac{AC}{2{,}4} = \frac{10{,}5}{BD}.$$

Ainsi,

$$\frac{7}{3} = \frac{AC}{2{,}4} \text{ donc } AC = 2{,}4 \times \frac{7}{3} = 0{,}8 \times 7 = 5{,}6 \text{ cm}.$$

2 De l'égalité $\frac{7}{3} = \frac{10{,}5}{BD}$, on déduit par produit en croix :

$$7 \times BD = 3 \times 10{,}5 = 31{,}5.$$

Donc $BD = \frac{31{,}5}{7}$, soit $BD = 4{,}5$ cm.

3 Les points M, O, P, d'une part, et les points N, O, Q, d'autre part, sont alignés. Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles, donc on est dans une configuration de Thalès.

Ainsi d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{ON} = \frac{PQ}{MN} \quad \text{soit} \quad \frac{6}{4} = \frac{OQ}{3} = \frac{PQ}{3}.$$

Donc $OQ = 3 \times \frac{6}{4} = 4{,}5$ cm et $PQ = 3 \times \frac{6}{4} = 4{,}5$ cm.

7 Trigonométrie

Énoncé p. 127

Lycée Louis Vincent, Metz

1 L'hypoténuse du triangle ABC est $[BC]$, le côté opposé à l'angle $\widehat{B}$ est $[AC]$ et le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$ est $[AB]$.

On a donc :

$$\sin\left(\widehat{B}\right) = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}, \ \cos\left(\widehat{B}\right) = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13} \text{ et } \tan\left(\widehat{B}\right) = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{12}.$$

2 L'hypoténuse du triangle rectangle EFG est $[EG]$ et le côté adjacent à l'angle $\widehat{E}$ est $[EF]$, donc : $\cos\left(\widehat{E}\right) = \frac{EF}{EG}$.

D'où $EF = EG \times \cos\left(\widehat{E}\right) = 20 \times 0{,}8 = 16$ cm.

Le côté opposé à l'angle $\widehat{E}$ est $[GF]$ donc $\sin\left(\widehat{E}\right) = \frac{GF}{EG}$.

D'où $GF = EG \times \sin\left(\widehat{E}\right) = 20 \times 0{,}6 = 12$ cm.

3 Dans le triangle KLM rectangle en L, le côté adjacent à l'angle $\widehat{K}$ est $[KL]$ et le côté opposé à l'angle $\widehat{K}$ est $[LM]$, donc : $\tan\left(\widehat{K}\right) = \frac{LM}{KL}$.

D'où $LM = KL \times \tan\left(\widehat{K}\right) = 8 \times \tan(40°) \approx 6{,}7$ cm (la calculatrice, réglée en degrés, donne $8 \times \tan(40°) \approx 6{,}713$).

8 Nature d'un triangle

Énoncé p. 128

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Calculons :

- $IJ^2 = \left(3 + 2\sqrt{5}\right)^2 = 9 + 12\sqrt{5} + 20 = 29 + 12\sqrt{5}$.
- $JK^2 = \left(\sqrt{78}\right)^2 = 78$.

- $IK^2 = \left(3\sqrt{5} - 2\right)^2 = 45 - 12\sqrt{5} + 4 = 49 - 12\sqrt{5}$.

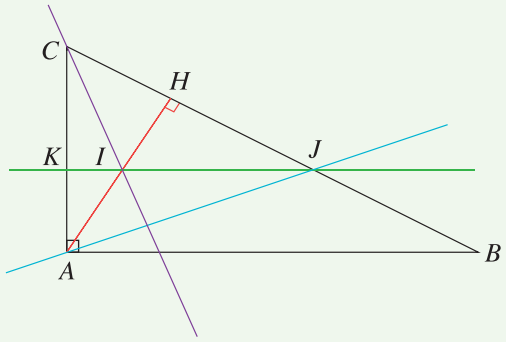
On peut alors remarquer que $IJ^2 + IK^2 = JK^2$. Le triangle est donc rectangle (en I). De plus, il n'est ni isocèle ni équilatéral car les trois côtés ont des longueurs différentes.

9 Démontrer la perpendicularité

Énoncé p. 128

Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

Commençons par faire une figure :



On considère le triangle AJC ; (AH) en est la hauteur issue de A.

Comme (JK) et (AB) sont parallèles et que (AB) et (AC) sont perpendiculaires, on en déduit que (JK) et (AC) sont perpendiculaires. (JK) est donc une hauteur de AJC.

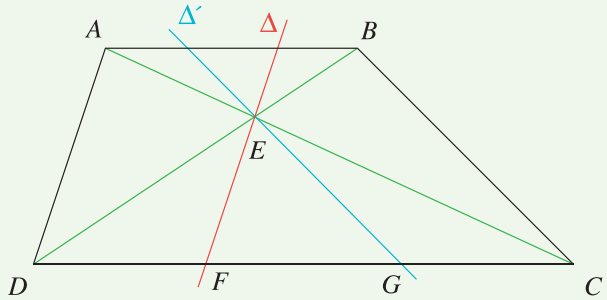
Finalement, I étant l'intersection des deux hauteurs (JK) et (AH), I est donc l'orthocentre du triangle AJC. En particulier, (CI) est une hauteur donc (CI) et (AJ) sont perpendiculaires.

10 Théorème de Thalès

Énoncé p. 129

Lycée Kléber, Strasbourg

1



2 Dans le triangle ACD, $F \in [DC]$, $E \in [AC]$ et $(EF) \,//\, (AD)$.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CA}.$$

Comme $F \in [DC]$ et $E \in [AC]$, on a :

$$DF = DC - CF \text{ et } AE = AC - CE,$$

d'où :

$$\frac{DF}{DC} = 1 - \frac{CF}{CD} = 1 - \frac{CE}{CA} = \frac{AE}{AC}. \quad (1)$$

De même, dans le triangle BCD, $G \in [DC]$, $E \in [DB]$ et $(EG) \,//\, (BC)$, donc $\frac{DG}{DC} = \frac{DE}{DB}$, d'où :

$$\frac{CG}{CD} = 1 - \frac{DG}{DC} = 1 - \frac{DE}{DB} = \frac{BE}{BD}. \quad (2)$$

Enfin, $(AB) \,//\, (CD)$ et E est l'intersection de (AC) et (BD) : les triangles EAB et ECD sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED}.$$

Notons k ce rapport. Alors $EA = k\,EC$ et $EB = k\,ED$, et :

$$\begin{cases} \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AE}{AE + EC} = \dfrac{k\,EC}{(k+1)EC} = \dfrac{k}{k+1} \\ \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BE}{BE + ED} = \dfrac{k\,ED}{(k+1)ED} = \dfrac{k}{k+1}. \end{cases} \quad (3)$$

D'après (1), (2) et (3) :

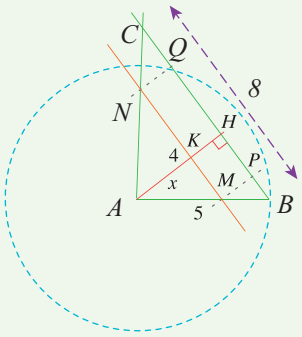
$$\frac{DF}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD} = \frac{CG}{CD},$$

et donc $GC = DF$.

11 Aire de rectangles

Énoncé p. 129

Lycée Chateaubriand, Rennes



Pour construire le triangle, on commence par tracer le segment $[AH]$ puis la perpendiculaire à (AH) en H. On place le point B à l'une des intersections de cette droite et du cercle de centre A et de rayon 5. Il n'y a plus qu'à placer le point C sur la perpendiculaire à (AH), à 8 cm de B, de l'autre côté de H par rapport à B.

1 Le point K décrit le segment $[AH]$, donc $x \in [0; 4]$. Calculons en fonction de x les longueurs MN et MP. Il est clair que $MP = KH = 4 - x$. Appliquons le théorème de Pythagore dans ABH. On en tire : $BH = 3$,

donc $HC = 5$. En appliquant le théorème de Thalès comme en troisième, on montre sans difficulté :

$$\frac{MK}{BH} = \frac{AK}{AH} = \frac{KN}{HC}.$$

Il vient : $MK = \dfrac{3x}{4}$ et $KN = \dfrac{5x}{4}$, d'où $MN = 2x$.
On calcule donc facilement l'aire du rectangle :

$$a(x) = MN \times MP = 2x(4 - x).$$

2 Il suffit d'écrire :

$$a(x) = -2(x^2 - 4x).$$

On reconnaît dans $x^2 - 4x$ le début d'un produit remarquable.

$$\begin{aligned} a(x) &= -2[x^2 - 4x + 4 - 4] \\ &= -2[(x-2)^2 - 4] \\ &= 8 - 2(x-2)^2. \end{aligned}$$

Cette dernière écriture fait apparaître que $a(x)$ est toujours inférieure ou égale à 8, avec égalité si $(x-2)^2 = 0$, c'est-à-dire si $x = 2$ (qui appartient bien à $[0; 4]$). L'aire du rectangle atteint alors son maximum : $a(2) = 8$.

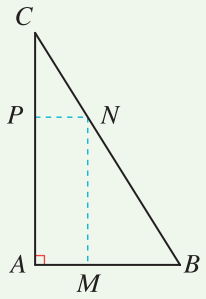
12 Aire d'un triangle

Énoncé p. 129

Lycée Raspail, Paris

1 $\begin{cases} (AP) \,//\, (MN) & \text{car } (AP) = (AC) \text{ et } (AC) \,//\, (MN) \\ (PN) \,//\, (AM) & \text{car } (AM) = (AB) \text{ et } (PN) \,//\, (AB) \end{cases}$

donc $APNM$ est un parallélogramme.
De plus, il y a un angle droit en A,
donc $APNM$ est un rectangle.



2 Comme $(NP) \,//\, (AB)$, le théorème de Thalès donne, dans le triangle ABC :

$$\frac{CP}{CA} = \frac{PN}{AB} \quad \text{soit} \quad \frac{CP}{CA} = \frac{AM}{AB} = x \text{ car } PN = AM.$$

Donc $CP = x \times CA$ et $AM = x \times AB$. CPN est rectangle en P, donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(PNC) &= \frac{1}{2} CP \times PN \\ &= \frac{1}{2} CP \times AM \\ &= \frac{1}{2} \times x \times CA \times x \times AB \\ &= x^2 \times \mathcal{A} \text{ car } \mathcal{A} = \frac{1}{2} CA \times AB.\end{aligned}$$

3 $BM = AB - AM = (1-x)AB$ et $MN = AP = AC - CP = (1-x)AC$.

Par suite :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(BNM) &= \frac{1}{2} BM \times MN = \frac{1}{2}(1-x)AB \times (1-x)AC \\ &= (1-x)^2 \times \frac{1}{2} AB \times AC \\ &= (1-x)^2 \times \mathcal{A}.\end{aligned}$$

4 $$\begin{aligned}\text{Aire}(AMNP) &= \mathcal{A} - \text{Aire}(CPN) - \text{Aire}(BNM) \\ &= \mathcal{A} - x^2\mathcal{A} - (1-x)^2\mathcal{A} \\ &= \left(1 - x^2 - (1-x)^2\right)\mathcal{A} \\ &= (1 - x^2 - 1 + 2x - x^2)\mathcal{A} \\ &= 2x(1-x)\mathcal{A}.\end{aligned}$$

5 $$\begin{aligned}2x(1-x) \geqslant \frac{1}{2} &\iff x(1-x) \geqslant \frac{1}{4} \\ &\iff x - x^2 - \frac{1}{4} \geqslant 0 \\ &\iff -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0 \\ &\iff x - \frac{1}{2} = 0 \text{ (car un carré ne peut être négatif)} \\ &\iff x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ainsi, pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $2x(1-x) < \frac{1}{2}$, donc $\text{Aire}(AMNP) < \frac{1}{2}\mathcal{A}$, et

pour $x = \frac{1}{2}$, $\text{Aire}(AMNP) = \frac{1}{2}\mathcal{A}$.

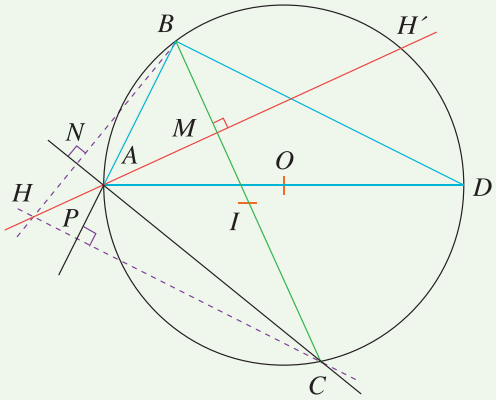
L'aire du rectangle est donc maximale (égale à $\frac{\mathcal{A}}{2}$) quand $x = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand M est le milieu de $[AB]$.

13 Étude d'une configuration

Énoncé p. 130

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

1 $[AD]$ est un diamètre du cercle donc $\widehat{ABD}$, $\widehat{AH'D}$ et $\widehat{ACD}$ sont des angles droits.



2 D'après le résultat précédent, (CD) et (AC) sont perpendiculaires. En outre (BH) est perpendiculaire à (AC), puisque c'est une hauteur du triangle ABC. On en déduit que $(CD) \,//\, (BH)$.

De même, on a vu que (BD) et (AB) sont perpendiculaires. Or (CH) est perpendiculaire à (AB), comme hauteur de ABC.

Il vient $(BD) \,//\, (CH)$.

De là, on a : $(CD) \,//\, (BH)$ et $(BD) \,//\, (CH)$, donc $BDCH$ est un parallélogramme.

$BDCH$ est un parallélogramme, donc ses diagonales ont même milieu. I est le milieu de $[BC]$, donc I est le milieu de $[DH]$.

3 On suppose $AB \neq AC$, de sorte que $M \neq I$ (si $AB = AC$, alors $M = I$, $H' = D$ et le résultat découle directement de la question 2). M, pied de la hauteur issue de A, appartient à (BC), donc $(MI) = (BC)$. On a donc : $(MI) \perp (AM)$. Or, puisque $\widehat{AH'D}$ est droit, $(AM) \perp (H'D)$. D'où $(MI) \,//\, (H'D)$. Or, dans le triangle $HH'D$, I est le milieu de $[HD]$ et la droite (MI) est parallèle à $(H'D)$: d'après la propriété de la droite des milieux, elle coupe $[HH']$ en son milieu. Comme $M \in (HH')$, M est le milieu de $[HH']$.

Chapitre 6

Généralités sur les fonctions

Plan du chapitre

1. Rappels de collège
2. Variations

Exercice type — **Lycée Jean Monnet, Franconville**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1+x^2}{x}$.

1 Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?

2 Quelle est l'image de -3 ? Quels sont les antécédents de 2 ?

3 Montrer que f est strictement décroissante sur $]0\,;1[$ et strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$. On admet que f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et strictement décroissante sur $[-1\,;0[$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

4 Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$.

5 Déterminer graphiquement les solutions de $f(x)=4$.

Voir corrigé page 145

1 Rappels de collège

1.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Définition 1

On considère un ensemble $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$.
Une *fonction* définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un objet mathématique qui, à tout nombre x de $\mathcal{D}$, associe un unique réel, noté $f(x)$.

- $f(x)$ est l'*image* de x par f.
- $\mathcal{D}$ est l'*ensemble de définition de* f.

On note : $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x)$

COURS

Exemples

- La fonction qui, à un nombre, associe son carré est la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  $$x \mapsto x^2$$
  Cela signifie notamment que « pour tout x réel, $f(x) = x^2$ ».
- Si x représente la longueur d'un côté d'un carré alors le périmètre de ce carré est donné par la fonction $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ car le périmètre d'un carré est obtenu en
  $$x \mapsto 4x$$
  multipliant par 4 la longueur d'un côté.

Remarque : dans certains énoncés, on donne une expression littérale et on demande de déterminer le domaine de définition d'une fonction.
Dans ce cas, on cherche les valeurs pour lesquelles on peut calculer les images à l'aide de l'expression littérale.
Il s'agit de trouver le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel les nombres sont « calculables » à l'aide de l'expression.

Exemple : le nombre $\dfrac{1}{x-2}$ est défini pour tout nombre x différent de 2.
En effet, si $x = 2$, le dénominateur de l'écriture fractionnaire est égal à 0, ce qui n'est pas possible.
Si l'on demande de « déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ », le domaine de définition est alors $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; c'est l'ensemble qui contient tous les nombres réels ($\mathbb{R}$), sauf le réel 2.
On lit « $\mathbb{R}$ privé du nombre 2 ».

Parfois, dans des exercices mettant en jeu des situations concrètes, on choisit le domaine de définition selon des connaissances de l'objet étudié. Par exemple, si la variable représente une longueur, le domaine de définition ne contient pas les réels négatifs. Dans certains cas, le domaine est imposé par l'énoncé. On peut ainsi considérer par exemple la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie seulement sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Le domaine de définition est souvent noté $\mathcal{D}$ (quand il n'y a qu'une seule fonction dans l'exercice) ou $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_g$,... s'il y a plusieurs fonctions f, g,... dans l'exercice.

1.2 Image et antécédent(s)

Si x appartient à $\mathcal{D}_f$, $f(x)$ est son image par f ; x est un antécédent de $f(x)$. Par exemple, si l'on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$, 4 est l'image de 2 car $2^2 = 4$, et -3 est un antécédent de 9 (car $(-3)^2 = 9$).

Remarquez bien le vocabulaire utilisé : « son » image, « un » antécédent. En effet, $f(x)$ peut avoir plusieurs antécédents (x, mais peut-être aussi d'autres réels). Cependant, l'image de x est unique, s'il en a une.

1.3 Tableau de valeurs

Un *tableau de valeurs* est un tableau à deux lignes :

- sur la 1re sont indiquées les valeurs de x dont on veut trouver l'image ;
- sur la 2nde sont reportées les images de x.

Exemple : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -x^2+2$. Alors, le tableau suivant est un tableau de valeurs pour des valeurs entières de x comprises entre -3 et 3 :

Valeurs de x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Valeurs de $f(x)$	-7	-2	1	2	1	-2	-7

Explications : quand $x = -3$, pour trouver son image par la fonction f, on remplace x par -3 dans l'expression, ce qui donne :

$$f(-3) = -(-3)^2 + 2 = -9 + 2 = -7.$$

On fait de même pour les autres valeurs de x.

1.4 Courbe représentative d'une fonction

Définition 2

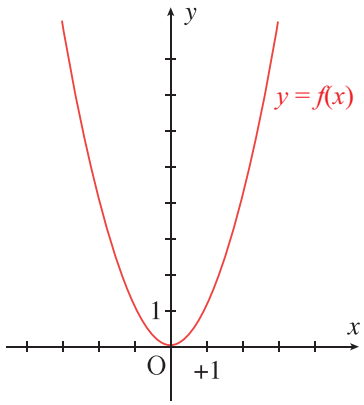
La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble de tous les points qui ont pour coordonnées $\big(x\ ;\ f(x)\big)$ quand x appartient au domaine de définition de f.
On dit que cette courbe $\mathcal{C}_f$ a pour *équation* $y = f(x)$: un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$.

Ainsi, à partir d'un tableau de valeurs, on peut représenter *sommairement* une fonction.

Exemple : Voici un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-3\ ;\ 3]$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Ce tableau permet de tracer la courbe ci-contre.



COURS

1.5 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Propriétés 1

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$, de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et k un réel.

- Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = k$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement au-dessous de la droite d'équation $y = k$.
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

Remarque : une lecture graphique ne donne en général que des valeurs approchées des solutions. Pour obtenir les valeurs exactes, on résout l'équation ou l'inéquation par le calcul (voir la question 5 de l'exercice d'introduction).

2 Variations

2.1 Fonctions croissantes, décroissantes et constantes

Définition 3 : fonction croissante

Une fonction f est *croissante* sur un intervalle lorsque pour tous réels u et v de l'intervalle, si $u \leqslant v$, alors $f(u) \leqslant f(v)$.

Remarque : cela signifie que les nombres de l'intervalle sont rangés dans le même ordre que leurs images par la fonction f. Lorsque, dans la définition, on remplace les deux inégalités larges ($\leqslant$) par deux inégalités strictes ($<$), on définit ce qu'est une fonction *strictement* croissante.

Définition 4 : fonction décroissante

Une fonction f est *décroissante* sur un intervalle lorsque pour tous réels u et v de l'intervalle, si $u \leqslant v$, alors $f(u) \geqslant f(v)$.

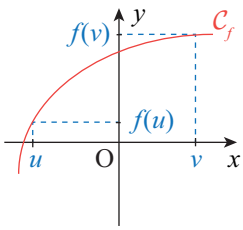
Remarque : lorsque, dans la définition, on remplace les deux inégalités larges par deux inégalités strictes, on définit ce qu'est une fonction *strictement* décroissante.

Définition 5 : fonction constante

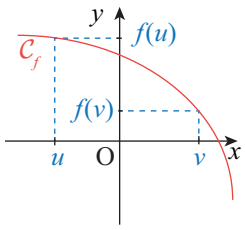
Une fonction est *constante* sur un intervalle lorsqu'il existe un réel a tel que pour tout x de l'intervalle, $f(x) = a$.

Autrement dit, une fonction constante prend toujours la même valeur.

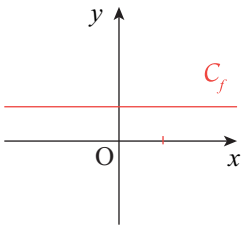
Remarque : une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante.



Fonction croissante



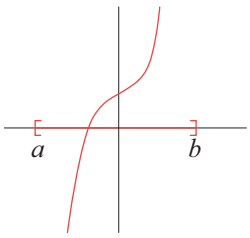
Fonction décroissante



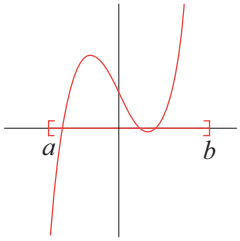
Fonction constante

Définition 6 : fonction monotone

Une fonction qui est soit croissante, soit décroissante sur un intervalle est appelée une fonction *monotone*.



Fonction monotone sur $[a; b]$



Fonction non monotone sur $[a; b]$

ATTENTION

Il ne suffit pas de prendre deux points au hasard dans l'intervalle et de les comparer. Par exemple, pour $f : x \mapsto x^2 - 5x$, il ne s'agit pas de calculer $f(2)$ et $f(4)$, puis de voir lequel des deux est le plus grand. Il s'agit de déterminer le signe de l'expression $f(v) - f(u)$ en supposant que $v > u$.

COURS

Exemple : soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 - 5x$.
Soient u et v deux nombres appartenant à $\left[-1 ; \frac{5}{2}\right]$ tels que $u < v$. Alors :

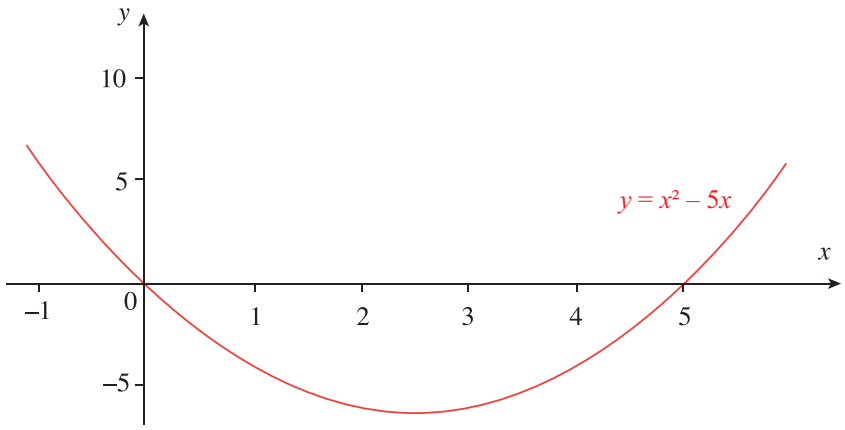
$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= (v^2 - 5v) - (u^2 - 5u) \\ &= v^2 - 5v - u^2 + 5u \\ &= v^2 - u^2 - 5v + 5u \\ &= (v - u)(v + u) - 5(v - u) \\ &= (v - u)(v + u - 5). \end{aligned}$$

Comme $-1 \leqslant u < v \leqslant \frac{5}{2}$, on voit que $v - u > 0$ et $v + u - 5 < 0$.

On en déduit que $f(v) - f(u) < 0$, et que f est décroissante sur l'intervalle $\left[-1 ; \frac{5}{2}\right]$. On a prouvé une inégalité *stricte* entre $f(v)$ et $f(u)$, donc on peut ajouter que f est *strictement* décroissante sur $\left[-1 ; \frac{5}{2}\right]$.

Maintenant, si on prend u et v sur $\left[\frac{5}{2} ; 6\right]$, toujours avec $u < v$, alors $v + u - 5 > 0$ donc $f(v) - f(u) > 0$, ce qui signifie que f est *strictement* croissante sur $\left[\frac{5}{2} ; 6\right]$.

On peut représenter graphiquement la fonction f comme sur le graphique suivant.



2.2 Maximum et minimum d'une fonction

Définitions 7

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- $f(a)$ est le *maximum* de f sur I si, pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(a)$.
- $f(a)$ est le *minimum* de f sur I si, pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(a)$.

On dit que ce maximum (ou ce minimum) est *atteint en* a. Un maximum ou un minimum est appelé un *extremum*.

Exemple : reprenons la fonction $f : x \mapsto x^2 - 5x$ dont on a trouvé les variations dans le paragraphe précédent.
Elle est décroissante sur $\left[-1 ; \frac{5}{2}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{5}{2} ; 6\right]$ donc l'image de $\frac{5}{2}$ est le minimum : c'est la plus petite valeur atteinte par $f(x)$ sur $[-1 ; 6]$.
$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4}$ donc $-\frac{25}{4}$ est le minimum de f sur $[-1 ; 6]$.
Pour avoir la valeur du maximum, il suffit de calculer $f(-1)$ et $f(6)$:

$$f(-1) = (-1)^2 - 5 \times (-1) = 6 \qquad \text{et} \qquad f(6) = 6^2 - 5 \times 6 = 6$$

donc « 6 » est le maximum de f sur l'intervalle $[-1 ; 6]$.

Remarque : une fonction n'a pas nécessairement de maximum ou de minimum. Par exemple, la fonction $x \mapsto x$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet aucune plus grande valeur ni aucune plus petite.

Solution de l'exercice type

Lycée Jean Monnet, Franconville

1 Le dénominateur de la fraction ne doit pas s'annuler, donc x ne doit pas être égal à zéro.
L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Remarque : l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est aussi noté $\mathbb{R}^*$.

2 $f(-3) = \frac{1+9}{-3} = -\frac{10}{3}$.
Pour trouver le ou les antécédents de 2, il suffit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{x} = 2 &\iff 1 + x^2 = 2x,\ x \neq 0 \\ &\iff 1 - 2x + x^2 = 0,\ x \neq 0 \\ &\iff (1-x)^2 = 0,\ x \neq 0 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, 2 a pour antécédent le nombre 1.

COURS

Solution de l'exercice type — Lycée Jean Monnet, Franconville

3 Prenons deux réels a et b, strictement positifs et supposons que $a < b$. Calculons :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1+b^2}{b} - \frac{1+a^2}{a} \\ &= \frac{a(1+b^2)}{ba} - \frac{b(1+a^2)}{ab} \\ &= \frac{a+ab^2-b-ba^2}{ab} \\ &= \frac{a-b-ba(a-b)}{ab} \\ &= (a-b)\frac{1-ba}{ab}. \end{aligned}$$

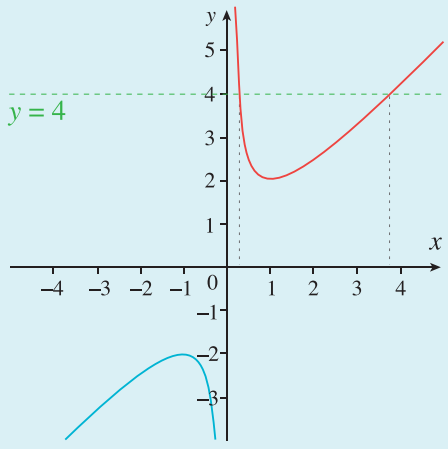
Si a et b sont tous deux dans $]0\,;1[$, ba est plus petit que 1 et donc $f(b) - f(a)$ est strictement négatif. On en déduit que $f(b) < f(a)$, et que f est strictement décroissante sur $]0\,;1[$. D'un autre côté, si a et b sont tous deux supérieurs à 1, on a $a - b < 0$ et $1 < ab$ et donc $f(b) - f(a) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

Par un raisonnement analogue, on pourrait montrer (c'est admis dans l'énoncé) que f est strictement décroissante sur $[-1\,;0[$ et strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$, avec $f(-1) = \dfrac{1+1}{-1} = -2$.

On peut alors résumer ces constatations dans un tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

4 Représentation graphique :



Solution de l'exercice type (suite) — Lycée Jean Monnet, Franconville

5 Il suffit de tracer sur le graphique la droite horizontale qui passe par le point de coordonnées (0 ; 4) et lire l'abscisse des points d'intersection de cette droite avec la courbe. On obtient, en lisant sur le graphique, deux solutions : environ 0,25 et 3,75.

Par le calcul : pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1+x^2}{x} = 4 &\iff x^2 - 4x + 1 = 0\\ &\iff (x-2)^2 = 3\\ &\iff x = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Les solutions valent environ 0,27 et 3,73.

Voir énoncé page 139

INTERROS

1 V/F Image et antécédent

3 min Corrigé p. 158

Dans l'écriture $5 = f(2)$:

a f est un nombre

b $f(2)$ est un nombre

c 5 est l'image de 2 par f

d 2 est l'image de 5 par f

2 QCM Image et antécédent

3 min Corrigé p. 158

9 est un antécédent de $\sqrt{2}$ par f s'écrit :

a $f(9) = \sqrt{2}$

b $f(\sqrt{2}) = 9$

c $f : \sqrt{2} \mapsto 9$

3 V/F Ensembles de définition

3 min Corrigé p. 158

D désignant l'ensemble de définition de f, quelles sont les propositions qui conviennent ?

a $f : x \mapsto 5x + 2$ $\quad D = \mathbb{R}$

b $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

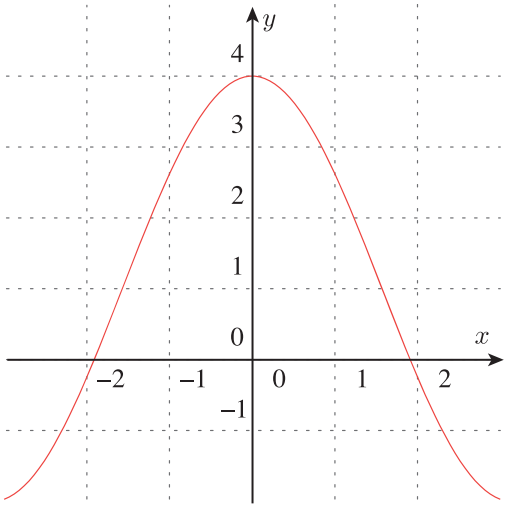
c $f : x \mapsto (1 + x^2)^2$ $\quad D = \mathbb{R}_+$

d $f : x \mapsto \dfrac{x-5}{x+2}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,5\}$

4 V/F Représentation graphique

5 min Corrigé p. 158

Par la lecture du graphique, la fonction définie sur $[-3\,;\,3]$ et représentée ci-dessous :



(courbe représentative de la fonction f)

a est décroissante

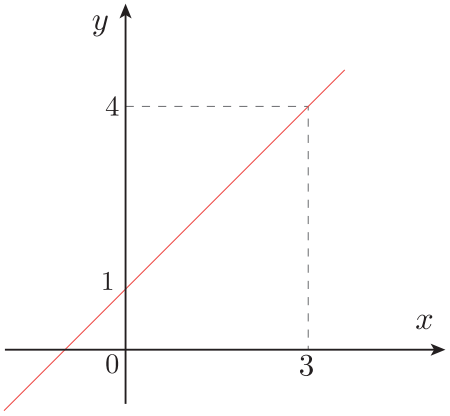
b a pour maximum 4

c a pour maximum 0

5 V/F Représentation graphique

5 min — Corrigé p. 158

À la lecture du graphique, la fonction représentée ci-dessous :



a est croissante
b est affine
c est linéaire
d est $x \mapsto x + 4$

6 V/F Calculs algébriques

5 min — Corrigé p. 159

On considère $f : x \mapsto x^2 - x$ définie sur $[0 ; 4]$.

a $f(0) = f(1)$.

b Le point $M(2 ; 2)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f.

c Le point $N(3 ; 9)$ est au-dessus de la courbe représentative de f.

d Le point $P(5 ; 20)$ appartient à la courbe représentative de f.

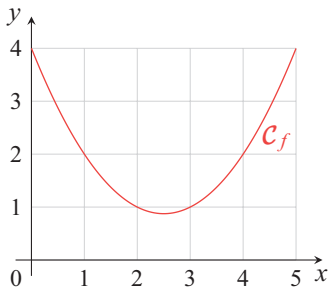
Automatismes

7 Images et antécédents ★

10 min — Corrigé p. 159

Lycée Louis Vincent, Metz

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$. Avec la précision permise par le graphique :



1. Déterminer l'image de 0 par f.
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 2 par f.
3. Le nombre 0 a-t-il des antécédents par f ? Justifier.

INTERROS

8 Équation de courbe

★ 10 min Corrigé p. 159

Lycée Louis Vincent, Metz

Dans un repère, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x^3 - 2x^2 + 3$ avec x réel.

1. Le point $A(2\,;\,3)$ appartient-il à la courbe $\mathcal{C}$? Justifier.
2. Le point $B(-1\,;\,1)$ appartient-il à la courbe $\mathcal{C}$? Justifier.
3. Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est -2.

9 Images et antécédents

★ 10 min Corrigé p. 160

Lycée Louis Vincent, Metz

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5$.

1. Calculer l'image de -2 par f.
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 22 par f.
3. Le nombre -8 a-t-il des antécédents par f ? Justifier.

Images et antécédents

10 Fonction x^2 - 4

★ 10 min Corrigé p. 160

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par : $f(x) = x^2 - 4$.

1. Calculer l'image par la fonction f des réels 0, 1, -2.
2. Déterminer, lorsque c'est possible, le ou les antécédent(s) par f des réels 5, -7, -4.

11 Fonction quotient

★ 10 min Corrigé p. 161

Lycée Jean Puy, Roanne

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x-3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Trouver, si elles existent, les images de -1 et 2 par f.
3. Déterminer les éventuels antécédents de -3 et 1.

12 Encore une fraction

★★ 20 min Corrigé p. 161

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{6}{9x^2 - 16}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer l'image de -1.
3. Déterminer les antécédents éventuels de $\frac{1}{8}$.

Variations

13 Imaginer une courbe

★ 10 min Corrigé p. 162

Lycée Albert Chatelet, Douai

Dans un repère $(O ; I, J)$, en prenant comme unité le cm, dessiner une courbe possible représentative d'une fonction répondant aux indications suivantes :

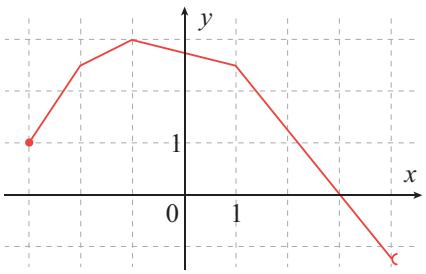
- f est définie sur $[-3 ; 4[$;
- $f(-3) = 1$;
- f admet un maximum qui est 3, atteint en -1 ;
- f est croissante sur $[-3 ; -1]$ et décroissante sur $[-1 ; 4[$;
- les réels -2 et 1 ont la même image qui est 2,5 ;
- $f(3) = 0$.

14 À partir de graphiques

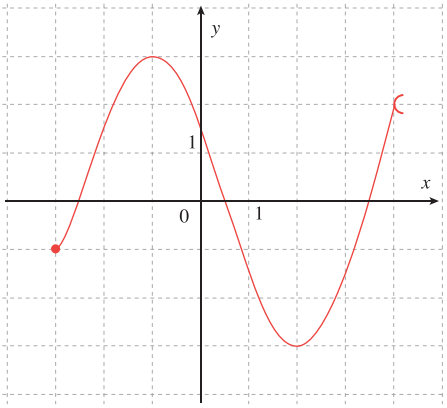
★ 10 min Corrigé p. 163

Lycée Molière, Paris

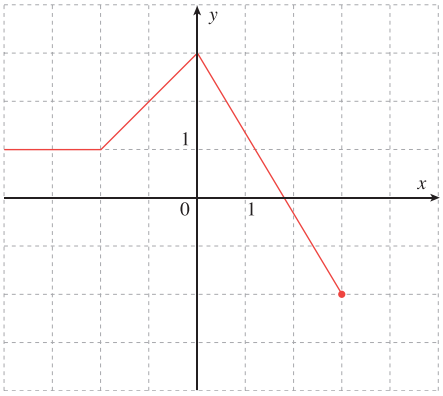
Examiner les courbes des fonctions f, g et h suivantes :



La fonction f



La fonction g



La fonction h

1. Proposer pour chaque fonction un ensemble de définition.
2. Donner le tableau de variations des fonctions f, g et h.

15 Lectures graphiques

★ 10 min Corrigé p. 163

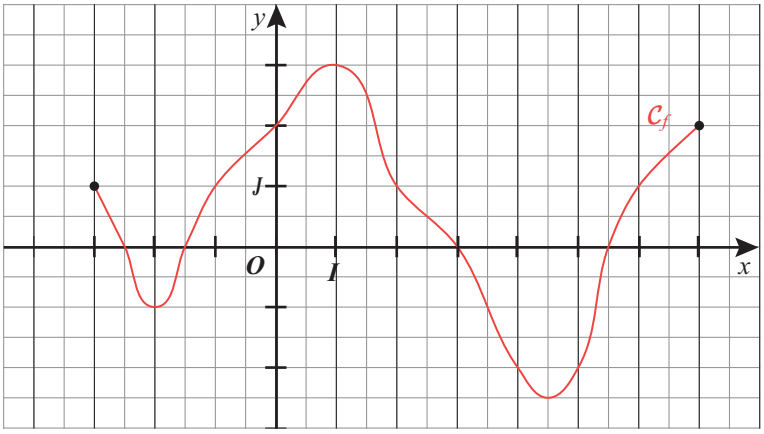
Lycée Louis Vincent, Metz

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 7]$, dont la courbe représentative est donnée page ci-contre (en fin d'énoncé).

1. Déterminer l'image de -3 par f.
2. Déterminer les éventuels antécédents de 4 par f.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Quel est le maximum de f sur $[-3; 7]$? En quelle valeur est-il atteint ?
5. Quel est le minimum de f sur $[-3; 7]$? En quelle valeur est-il atteint ?
6. Dresser le tableau de signes de f.

7 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ (en justifiant votre réponse).

8 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$ (en justifiant votre réponse).



16 Généralités

★ 10 min Corrigé p. 164

Lycée Louis Vincent, Metz

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1 Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier votre réponse.

2 Calculer l'image de 2 par f puis l'image de -1 par f.

3 Les points suivants sont-ils situés sur $\mathcal{C}$? Justifier votre réponse.

$$M\left(0; \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad N\,(15; 4{,}27) \quad ; \quad P\left(\frac{1}{3}; -\frac{9}{11}\right).$$

17 Lecture d'un tableau de variations

★ 10 min Corrigé p. 164

Lycée Louis Vincent, Metz

Le tableau de variations d'une fonction f est donné ci-dessous.

x	-5		-2		0		3		5
f	-4	↘	-5	↗	6	↘	0	↗	4

1 Déterminer le maximum et le minimum de f ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

2 Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$? Justifier votre réponse.

3 Compléter par $<$, $>$ ou ? si on ne peut pas savoir en justifiant votre réponse :

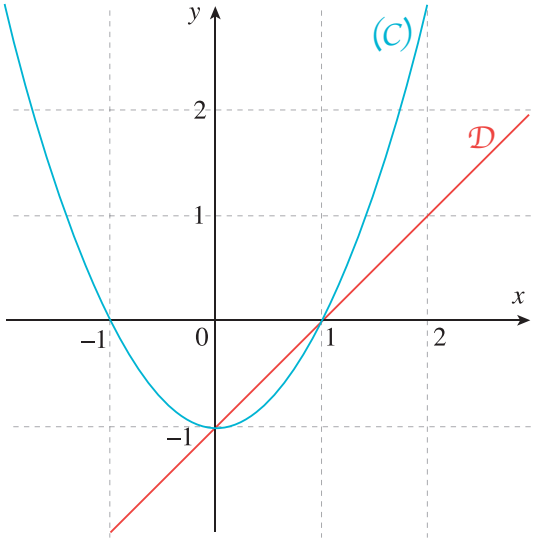
$f(1) \ldots f(2)$ $\quad f(-1) \ldots f(-2)$ $\quad f(-1) \ldots f(4)$ $\quad f(4) \ldots f(-3)$

18 Résolution graphique

★★ — 15 min — Corrigé p. 165

Lycée Montaigne, Bordeaux

La courbe $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative dans le repère $(O; I, J)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 1$.



1 Indiquer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x :

(a) graphiquement ; **(b)** par le calcul.

2 Quelle est la fonction affine g représentée par la droite $\mathcal{D}$?

3 Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

19 Un premier bilan

★★ — 35 min — Corrigé p. 166

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

On donne en fin d'énoncé (page ci-contre) la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f dans le repère orthogonal $(O; I, J)$.

1 Préciser le domaine de définition D_f de f.

2 Sachant qu'elles sont entières, donner les images par f des réels :

$$-\frac{1}{2} \text{ ; } 1 \text{ ; } 2 \text{ ; } 2{,}5 \text{ et } 3.$$

3 Quel est le nombre de solutions de :

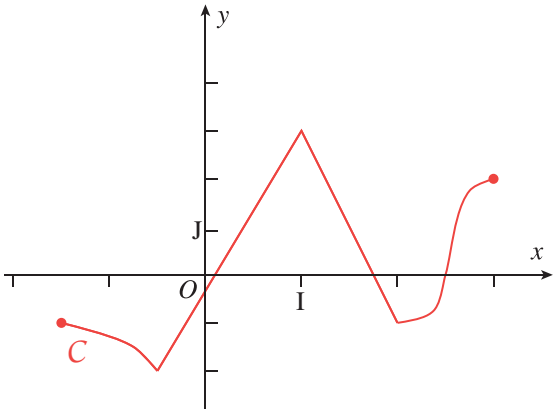
- l'équation $E_1 : f(x) = 0$?
- l'équation $E_2 : f(x) = 2$?

On les représentera sur la figure.

4 Déterminer le maximum et le minimum de f sur D_f.

5 Sachant que la courbe de f sur $[-0{,}5\,;\,2]$ est l'union de deux segments, exprimer $f(x)$ pour tout x de $[-0{,}5\,;\,2]$.

6 Résoudre alors l'équation E_1, puis l'équation E_2.



20 Généralités

★★★ 45 min Corrigé p. 168

Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

On considère les fonctions f et g définies pour tout x réel par :

$$f(x) = (2x+1)^2 - (-x+3)^2$$

$$g(x) = x^2 - 16 - (2x+8)(-2x+1)$$

1 Développer et réduire $f(x)$.

2 Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

3 Déterminer les antécédents de -8 par f.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) + g(x) = 0$.

5 On considère la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$ définie sur $[-4\,;\,2]$.
Montrer que $h(x) = 2\big[(x+1)^2 - 9\big]$.

INTERROS

21 Algorithme de dichotomie

★★★ 30 min Corrigé p. 169

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 5x^3 - 2x + 1.$$

1. Tracer sur votre calculatrice, par exemple, la courbe représentative de f et conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α, et que α appartient à $[-1\,;\,0]$.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
  a, b, m, d nombres réels
  f fonction définie par f(x)=5x^3-2x+1
Initialisation
  a prend la valeur -1
  b prend la valeur 0
  d prend la valeur 1
  Tant que d > 0,0001
    m prend la valeur (a+b)/2
    Si f(m) > 0
      b prend la valeur m
    Sinon
      a prend la valeur m
    Fin Si
    d prend la valeur (b-a)
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher a et b
```

(a) Expliquer la ligne : « `m prend la valeur (a+b)/2` ».

(b) Expliquer le rôle de la variable `d`.

(c) Expliquer alors ce que fait cet algorithme.

(d) Programmer cet algorithme en Python et donner un encadrement d'amplitude 0,001 de la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

22 Coup de balai !

★★★ 20 min Corrigé p. 171

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, par $f(x) = x^2 - x^3$.

1. Tracer cette fonction sur votre calculatrice. Que dire de son signe ? De ses variations ?
2. On souhaite déterminer numériquement le maximum m de f sur $[0\,;\,1]$ et, à 0,001 près, le point a où ce maximum est atteint.

Pour cela, on utilise l'algorithme ci-dessous, dit « de balayage ».

```
Variables
     x,a,m,k : nombres
     f : fonction définie par f(x) = x^2 − x^3
Début
     a ← 0
     m ← f(0)
Pour tout k de 1 à 1000
     x ← k/1000
     Si f(x)> m
        a ← x
        m ← f(x)
     Fin Si
Fin Pour
Afficher a , m
Fin
```

Expliquer ce que représentent les variables `x`, `a`, `m` et `k`.

À quoi sert l'instruction conditionnelle ?

3 Programmer l'algorithme de balayage en Python et déterminer a à la précision demandée et m.

CORRIGÉS

1 V/F Image et antécédent

Énoncé p. 148

a *Faux*. f est une fonction.

b *Vrai*. C'est l'image de 2 par la fonction f.

c *Vrai*.

d *Faux*. 2 est un antécédent de 5 par f.

2 QCM Image et antécédent

Énoncé p. 148

a *Vrai*. $\sqrt{2}$ est l'image de 9 par f.

b *Faux*. Cette écriture signifie que l'image de $\sqrt{2}$ par f est 9, c'est-à-dire qu'un antécédent de 9 par f est $\sqrt{2}$.

c *Faux*. L'écriture avec « $\mapsto$ » s'emploie au moment où on *définit* la fonction f. Elle signifie que 9 est l'image de $\sqrt{2}$.

3 V/F Ensembles de définition

Énoncé p. 148

a *Vrai*. Par exemple, une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b *Faux*. C'est la valeur 2, solution de $x - 2 = 0$, qu'il faut ôter de l'ensemble de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c *Faux*. On peut calculer $f(x)$ pour n'importe quel réel x : l'ensemble de définition est $D = \mathbb{R}$, et non $\mathbb{R}_+$.

d *Faux*. À cause du dénominateur $x + 2$, il faut enlever la valeur -2 de l'ensemble de définition. Mais 5 ne pose pas de problème : $f(5) = 0$. L'ensemble de définition est donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

4 V/F Représentation graphique

Énoncé p. 148

a *Faux*. Elle est croissante sur $[-3 ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; 3]$.

b *Vrai*. Ce maximum est atteint en 0.

c *Faux*. Le maximum est atteint en 0, mais il vaut 4.

5 V/F Représentation graphique

Énoncé p. 149

a *Vrai*. « La droite monte quand on va de gauche à droite ».

b *Vrai*. La fonction est représentée par une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées).

c *Faux*. La droite ne passe pas par l'origine du repère (une fonction linéaire est une fonction affine particulière, dont la droite passe par l'origine).

d *Faux*. Si tel était le cas, la droite passerait par le point de coordonnées $(0 ; 4)$. Or elle passe par $(0 ; 1)$ et $(3 ; 4)$: c'est la représentation de $x \mapsto x + 1$.

6 V/F Calculs algébriques

Énoncé p. 149

a *Vrai.* $f(0) = f(1) = 0$

b *Faux.* $f(2) = 4 - 2 = 2$, donc le point $M(2\,;2)$ appartient bien à la courbe.

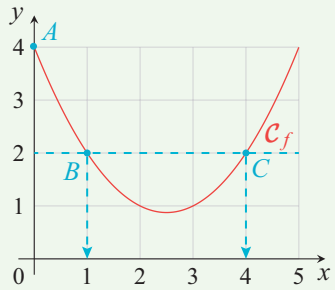
c *Vrai.* $f(3) = 6$, donc $9 > f(3)$, et $N(3\,;9)$ est au-dessus de la courbe.

d *Faux.* Certes $5^2 - 5 = 20$, mais 5 n'appartient pas à l'ensemble de définition $[0\,;4]$ de f : la courbe ne contient aucun point d'abscisse 5.

7 Images et antécédents

Énoncé p. 149

Lycée Louis Vincent, Metz



1 On repère le point de la courbe dont l'abscisse est égale à 0 (point A sur le graphique). Son ordonnée est l'image de 0 par f. Ainsi, l'image de 0 par f est 4.

2 On repère les points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 2, c'est-à-dire les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 2$ (points B et C sur le graphique). Leurs abscisses sont les antécédents de 2 par f.

Ainsi, les antécédents de 2 par f sont 1 et 4.

3 Les antécédents de 0 par f sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$). Or la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessus de l'axe des abscisses : elle ne le coupe pas.

Le nombre 0 n'a donc pas d'antécédent par f.

8 Équation de courbe

Énoncé p. 150

Lycée Louis Vincent, Metz

1 $x_A^3 - 2x_A^2 + 3 = 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3$.

Or $3 = y_A$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation de la courbe $\mathcal{C}$: le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}$.

2 $x_B^3 - 2x_B^2 + 3 = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$.
Or $0 \neq y_B$ (car $y_B = 1$), donc les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation de la courbe $\mathcal{C}$: le point B n'appartient pas à la courbe $\mathcal{C}$.

3 Soit D le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse -2.
L'ordonnée de D est :

$$y_D = x_D^3 - 2x_D^2 + 3 = (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 + 3 = -8 - 8 + 3,$$

soit $y_D = -13$.
Donc les coordonnées du point D sont : $D(-2\,;-13)$.

9 Images et antécédents

Énoncé p. 150

Lycée Louis Vincent, Metz

1 L'image de -2 par f est $f(-2)$.
$f(-2) = 3 \times (-2)^2 - 5 = 3 \times 4 - 5 = 12 - 5 = 7$.
L'image de -2 par f est 7.

2 On résout l'équation $f(x) = 22$.
$3x^2 - 5 = 22$ équivaut à $3x^2 = 22 + 5$ soit $3x^2 = 27$, qui équivaut à $x^2 = \dfrac{27}{3}$ soit $x^2 = 9$.
9 étant strictement positif, l'équation $x^2 = 9$ équivaut à $x = \sqrt{9} = 3$ ou $x = -\sqrt{9} = -3$.
Donc 22 a deux antécédents par f sur $\mathbb{R}$: -3 et 3.

3 On résout l'équation $f(x) = -8$.
$3x^2 - 5 = -8$ équivaut à $3x^2 = -8 + 5$ soit $3x^2 = -3$, qui équivaut à $x^2 = \dfrac{-3}{3}$ soit $x^2 = -1$.
-1 étant strictement négatif, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ (un carré est toujours positif ou nul).
Donc -8 n'a pas d'antécédent par f.

10 Fonction x^2 - 4

Énoncé p. 150

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

1 Il faut remplacer x par sa valeur dans l'expression de f.

- $f(0) = 0^2 - 4 = -4$;
- $f(1) = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$;
- $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.

2 Nous devons, connaissant la valeur de $f(x)$, retrouver celle(s) de x :

$$f(x) = 5 \iff x^2 - 4 = 5 \iff x^2 = 4 + 5 \iff x^2 = 9$$
$$\iff x \in \{-3\,;\,3\}.$$

Les antécédents de 5 par f sont donc -3 et 3.

$$f(x) = -7 \iff x^2 - 4 = -7 \iff x^2 = -3$$

Cette dernière égalité est impossible, puisqu'un carré est toujours positif, -7 n'a donc pas d'antécédent par f.

$$f(x) = -4 \iff x^2 - 4 = -4 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

L'antécédent de -4 par f est donc 0 (et c'est le seul !).

11 Fonction quotient

Énoncé p. 150

Lycée Jean Puy, Roanne

1 $f(x)$ est définie à condition que $x - 3$ soit différent de zéro. L'ensemble de définition est donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

2 $f(-1) = \dfrac{-1}{-1-3} = \dfrac{1}{4}$ et $f(2) = \dfrac{2}{2-3} = -2$.

3 On résout l'équation $f(x) = -3$:

$$-3 = \frac{x}{x-3} \iff -3(x-3) = x,\ x \neq 3$$
$$\iff -3x + 9 = x$$
$$\iff 9 = 4x$$
$$\iff x = \frac{9}{4}.$$

$\dfrac{9}{4}$ est donc l'unique antécédent de -3.

Calculons les antécédents de 1 :

$$1 = f(x) \iff 1 = \frac{x}{x-3}$$
$$\iff x - 3 = x$$
$$\iff -3 = 0.$$

Cette dernière égalité est toujours fausse. 1 n'a donc pas d'antécédent.

12 Encore une fraction

Énoncé p. 151

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

1 $f(x)$ existe si $9x^2 - 16 \neq 0$. On résout :

$$9x^2 - 16 = 0 \iff (3x-4)(3x+4) = 0 \iff x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = \frac{-4}{3}$$

On conclut que l'ensemble de définition de f est :

$$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3} ; \frac{4}{3}\right\}.$$

2 On calcule : $f(-1) = \dfrac{6}{9-16} = \dfrac{-6}{7}$.

3 Pour calculer les antécédents de $\dfrac{1}{8}$ par f, on résout :

$$\begin{aligned}
\frac{6}{9x^2-16} &= \frac{1}{8} \\
\iff 48 &= 9x^2 - 16 \\
\iff 64 &= 9x^2 \\
\iff x^2 &= \frac{64}{9} \\
\iff x &= \frac{8}{3} \text{ ou } x = -\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Les antécédents de $\dfrac{1}{8}$ sont donc $\dfrac{8}{3}$ et $-\dfrac{8}{3}$.

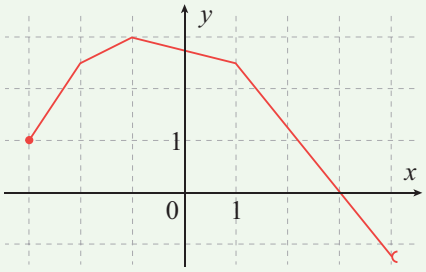
13 Imaginer une courbe

Énoncé p. 151

Lycée Albert Chatelet, Douai

Il y a plusieurs réponses possibles, mais votre dessin doit ressembler à la figure ci-dessous ; n'oubliez pas notamment :

- le gros point en $(-3 ; 1)$ qui signale que l'ensemble de définition s'arrête en -3 et contient -3 ;
- le crochet à l'abscisse 4 qui signale que 4 est une extrémité (exclue) de l'ensemble de définition.



14 À partir de graphiques

Énoncé p. 151

Lycée Molière, Paris

1 **(a)** L'ensemble de définition est $[-3\,;\,4[$. Le gros point à l'abscisse -3 et le crochet à l'abscisse $+4$ signalent que -3 est inclus alors que $+4$ est exclu de l'ensemble.

(b) L'ensemble de définition est $[-3\,;\,4[$, tout comme pour la première fonction.

(c) L'ensemble de définition peut être ici : $[-4\,;\,3]$, ne sachant pas l'allure de la courbe pour $x < -4$.

2 **(a)**

x	-3		-1		4
$f(x)$	1	↗	3	↘	

(b)

x	-3		-1		$+2$		$+4$
$g(x)$	-1	↗	$+3$	↘	-3	↗	

$g(4)$ n'est pas défini : on n'indique donc pas de valeur de g à l'abscisse4 dans ce tableau.

(c)

x	-4		-2		0		$+3$
$h(x)$	1	→	1	↗	3	↘	-2

15 Lectures graphiques

Énoncé p. 152

Lycée Louis Vincent, Metz

1 L'image de -3 par f est $f(-3) = 1$. En effet, le point de la courbe ayant pour abscisse -3 a pour ordonnée 1.

2 La droite horizontale passant par $y = 4$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$; par conséquent, 4 n'a pas d'antécédent par f (il n'existe aucun point de la courbe dont l'ordonnée est égale à 4).

3 On a le tableau suivant :

x	-3		-2		1		$4{,}5$		7
f	1	↘	-1	↗	3	↘	$-2{,}5$	↗	2

4 Le maximum de f sur $[-3;\,7]$ est 3, atteint pour $x = 1$.

5 Le minimum de f sur $[-3;\,7]$ est $-2{,}5$, atteint pour $x = 4{,}5$.

CORRIGÉS

6 D'après le graphique, le tableau de signes de f est le suivant :

x	-3		$-2{,}5$		$-1{,}5$		3		$5{,}5$		7
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

7 La courbe représentative de f admet 4 points d'ordonnée égale à 1. Donc l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 1$ est constitué de leurs abscisses : $S = \{-3; -1; 2; 6\}$.

8 La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 1$ entre $x = -1$ et $x = 2$, et entre $x = 6$ et $x = 7$. Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > 1$ est : $S =]-1; 2[\cup]6; 7]$.

16 Généralités

Énoncé p. 153

Lycée Louis Vincent, Metz

1 f est un quotient, dont le dénominateur s'annule uniquement pour $x = 4$.

Ainsi, le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

2 • $f(2) = \dfrac{3 \times 2 + 2}{2 - 4} = \dfrac{8}{-2} = -4$.

L'image de 2 par f est -4.

• $f(-1) = \dfrac{-3 + 2}{-1 - 4} = \dfrac{1}{5}$.

L'image de -1 par f est $\dfrac{1}{5}$.

3 • $f(0) = \dfrac{3 \times 0 + 2}{0 - 4} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2} \neq y_M$. Donc $M \notin \mathcal{C}_f$.

• $f(15) = \dfrac{3 \times 15 + 2}{15 - 4} = \dfrac{47}{11} \approx 4{,}2727\ldots \neq y_N$. Donc $N \notin \mathcal{C}_f$.

ATTENTION

Ce n'est pas parce que $\dfrac{47}{11}$ est presque égal à 4,27 que c'est *exactement* égal... Le point sera *proche* de $\mathcal{C}_f$, mais ne sera pas *sur* la courbe.

• $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3 \times \frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3} - 4} = \dfrac{3}{-\frac{11}{3}} = -\dfrac{9}{11} = y_P$. Donc $P \in \mathcal{C}_f$.

17 Lecture d'un tableau de variations

Énoncé p. 153

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Le maximum de f est 6, et il est atteint pour $x = 0$.

Le minimum de f est -5, et il est atteint pour $x = -2$.

2 • Sur $[-5; -2[$, $f(x)$ passe de -4 à -5, donc ne passe pas par 4 ;

• Sur $]-2; 0[$, $f(x)$ passe de -5 à 6, donc passe par 4 ;

- Sur $]0; 3[$, $f(x)$ passe de 6 à 0, donc passe par 4 ;
- Sur $]3; 5]$, $f(x)$ passe de 0 à 4, donc passe par 4 (à la fin) ;

Au final, $f(x)$ passe trois fois par 4 ; ainsi, l'équation $f(x) = 4$ admet trois solutions.

3
- $1 < 2$ et f est strictement décroissante sur $[0; 3]$.
Donc $f(1) > f(2)$.
- $-1 > -2$ et f est strictement croissante sur $[-2; 0]$.
Donc $f(-1) > f(-2)$.
- On ne peut pas comparer $f(-1)$ et $f(4)$ car f n'est pas monotone sur $[-1; 4]$: on sait seulement que $f(-1) \in]-5; 6[$ et $f(4) \in]0; 4[$, ce qui ne permet pas de conclure.
- Bien que f ne soit pas monotone sur $[-3; 4]$, on peut cette fois-ci comparer $f(4)$ et $f(-3)$ à l'aide du tableau de variations. En effet, $f(-3) \in [-5; -4]$, donc $f(-3) < 0$, et $f(4) \in [0; 4]$, donc $f(4) \geqslant 0$. Ainsi, $f(4) > f(-3)$.

18 Résolution graphique

Énoncé p. 154

Lycée Montaigne, Bordeaux

1 **(a)** On lit sur le graphique les abscisses des points qui sont au-dessus ($f(x) \geqslant 0$) ou au-dessous ($f(x) \leqslant 0$) de l'axe des abscisses. On résume dans un tableau :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Dans ce type d'inéquation, deux méthodes sont possibles.

- On peut factoriser $f(x) = (x-1)(x+1)$ puis utiliser un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- On peut aussi remarquer que le signe de $f(x)$ dépend de la position de x^2 par rapport à 1, ce qui permet d'utiliser les variations de la fonction $x \mapsto x^2$:

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
x^2		$\searrow$	1		0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

On lit dans le tableau : $x^2 \leqslant 1$ pour $x \in [-1\,;\,1]$ et $x^2 \geqslant 1$ pour $x \in]-\infty\,;\,-1]$ ou $x \in [1\,;\,+\infty[$. On retrouve ainsi les résultats précédents.

2 La fonction g est sous la forme $x \mapsto ax + b$. On lit sur le graphique : $g(0) = -1$ et $g(1) = 0$, d'où les équations :

$$\begin{cases} g(0) = b = -1 \\ g(1) = a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

g est donc la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - 1.$$

3 Graphiquement, on constate que la parabole $(\mathcal{C})$ est au-dessous de la droite $\mathcal{D}$ pour les points dont les abscisses sont comprises entre 0 et 1. L'inégalité est large, il faut donc inclure les valeurs 0 et 1, d'où :

$$S = [0\,;\,1].$$

Par le calcul :

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant g(x) &\iff x^2 - 1 \leqslant x - 1 \\ &\iff (x-1)(x+1) \leqslant (x-1) \\ &\iff (x-1)[(x+1) - 1] \leqslant 0 \\ &\iff x(x-1) \leqslant 0 \end{aligned}$$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+1$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(x-1)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On constate que $x(x-1) \leqslant 0$ pour $x \in [0\,;\,1]$, ce qui confirme le résultat lu sur le graphique.

19 Un premier bilan

Énoncé p. 154

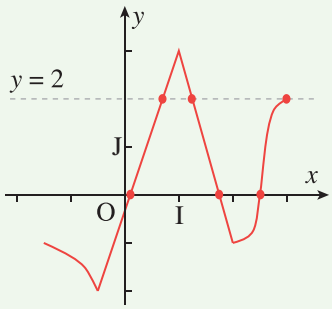
Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

1 f est définie sur $[-1{,}5\,;\,3]$.

2 On lit sur le graphique : $f(-0{,}5) = -2$, $f(1) = 3$, $f(2) = -1$, $f(2{,}5) = 0$ et $f(3) = 2$.

3 On a indiqué les « points-solutions » sur la figure ci-contre.

Dans les deux cas, il y a trois solutions.



4 Le maximum de f sur D_f est 3, atteint en 1 ; le minimum est -2, atteint en $-0{,}5$. Ainsi, pour tout x de D_f, $-2 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

5 D'après l'énoncé, la courbe de f est un segment de droite sur $[-0{,}5\ ;\ 1]$. Sur cet intervalle, la fonction s'écrit donc :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont deux constantes réelles. On peut donc écrire :

$$f(-0{,}5) = -0{,}5a + b \text{ et } f(1) = a + b$$

En tenant compte de la question 2), il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} -2 = -0{,}5a + b \\ 3 = a + b \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = a + b \\ 5 = 1{,}5a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 3 - a \\ a = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -\dfrac{1}{3} \\ a = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Ce qui nous donne sur l'intervalle $[-0{,}5\ ;\ 1]$:

$$f(x) = \frac{10}{3}x - \frac{1}{3}.$$

On utilise la même méthode sur $[1\ ;\ 2]$.

$f(1) = a + b$ et $f(2) = 2a + b$, on résout le système :

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 - a \\ -4 = a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 7 \\ a = -4 \end{cases}$$

f, sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, a pour expression :

$$f(x) = -4x + 7.$$

6 Il y a trois solutions à E_1. La première se trouve dans l'intervalle $[-0{,}5\,;\,1]$, il suffit de résoudre :

$$\frac{10}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \iff x = \frac{1}{10}.$$

Il y a une deuxième solution dans $[1\,;\,2]$:

$$-4x + 7 = 0 \iff x = \frac{7}{4}.$$

La troisième solution est parfaitement lisible, puisque $f(2{,}5) = 0$.

L'ensemble des solutions de E_1 est donc :

$$\left\{\frac{1}{10}\,;\,\frac{7}{4}\,;\,\frac{5}{2}\right\}.$$

Ici encore, la première solution de E_2 se trouve dans $[-0{,}5\,;\,1]$. On résout :

$$\frac{10}{3}x - \frac{1}{3} = 2 \iff \frac{10}{3}x = \frac{7}{3} \iff x = \frac{7}{10}.$$

Il y a une autre solution, dans l'intervalle $[1\,;\,2]$:

$$-4x + 7 = 2 \iff -4x = -5 \iff x = \frac{5}{4}.$$

Enfin, nous savons déjà que $f(3) = 2$.

L'ensemble des solutions de l'équation E_2 est : $\left\{\frac{7}{10}\,;\,\frac{5}{4}\,;\,3\right\}$.

20 Généralités

Énoncé p. 155

Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

1 $f(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 6x - 9 = 3x^2 + 10x - 8$.

2 • $f(x) = \big[(2x+1) + (-x+3)\big]\big[(2x+1) - (-x+3)\big]$
$= (2x + 1 - x + 3)(2x + 1 + x - 3)$
$= (x + 4)(3x - 2)$.

• $g(x) = (x-4)(x+4) - 2(x+4)(-2x+1)$
$= (x+4)\big[(x-4) - 2(-2x+1)\big]$
$= (x+4)(x - 4 + 4x - 2)$
$= (x+4)(5x - 6)$.

3 Il suffit de résoudre l'équation :

$$-8 = 3x^2 + 10x - 8 \iff 0 = 3x^2 + 10x \iff x(3x + 10) = 0.$$

Les antécédents de -8 par f sont donc : 0 et $\frac{-10}{3}$.

4 Utilisons les expressions factorisées de f et g :

$$\begin{aligned} f(x)+g(x)=0 &\iff (x+4)(3x-2)+(x+4)(5x-6)=0\\ &\iff (x+4)(3x-2+5x-6)=0\\ &\iff (x+4)(8x-8)=0\\ &\iff (x+4)(x-1)=0. \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions : $S=\{-4\,;\,1\}$.

5 Utilisons encore les expressions factorisées de f et g :

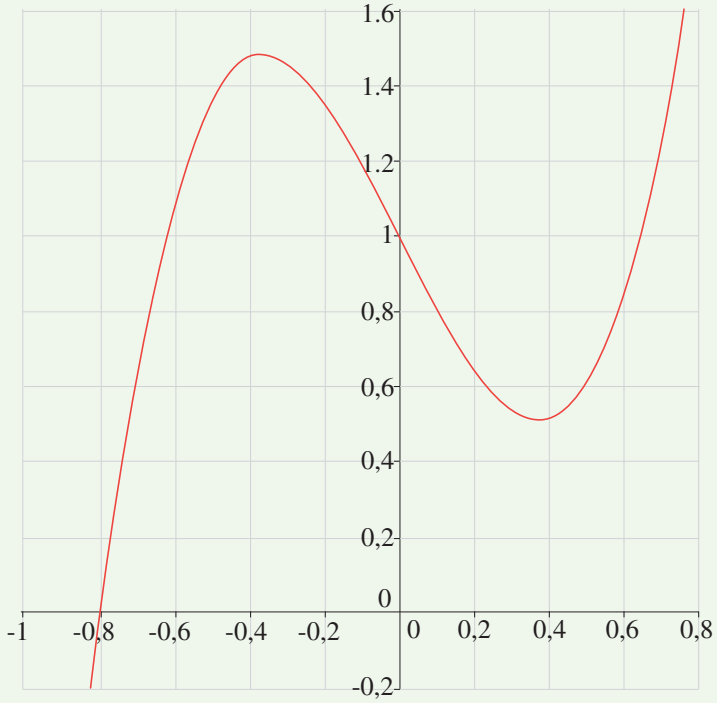
$$\begin{aligned} g(x)-f(x) &= (x+4)(5x-6)-(x+4)(3x-2)\\ &= (x+4)(5x-6-3x+2)\\ &= (x+4)(2x-4)\\ &= 2(x+4)(x-2)\\ &= 2(x+1+3)(x+1-3)\\ &= 2\big[(x+1)^2-9\big]. \end{aligned}$$

21 Algorithme de dichotomie

Énoncé p. 156

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

1 Traçons la courbe représentative de la fonction f avec un zoom assez important pour avoir une idée de la valeur pour laquelle $f(x)=0$.



La courbe semble bien couper l'axe des abscisses en un seul point, dont l'abscisse semble être égale à $-0{,}8$, mais si on calcule $f(-0{,}8)$, on trouve :

$$f(-0{,}8) = 5 \times (-0{,}8)^3 - 2 \times (-0{,}8) + 1 = 0{,}04 \neq 0$$

donc $-0{,}8$ n'est pas la solution de l'équation $f(x) = 0$, mais seulement une valeur approchée : on ne peut pas lire la solution exacte sur le graphique.

2 **(a)** « `m prend la valeur (a+b)/2` » signifie que la variable `m` correspond au milieu de l'intervalle `[a;b]`.

(b) Dans la boucle « Tant que », la variable `d` change de valeur pour égaler `b-a`.

Au départ, $f(a) = f(-1) = -2 < 0$ et $f(b) = f(0) = 1 > 0$. Si $f(m) > 0$, l'intervalle $[a\,;b]$ est remplacé par $[a\,;m]$; si $f(m) \leqslant 0$, il est remplacé par $[m\,;b]$. Dans les deux cas, on a toujours $a < b$, $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) > 0$, donc `d = b-a` est positive et représente l'amplitude de l'intervalle `[a;b]`.

(c) D'après ce qui a été dit précédemment, à chaque passage dans la boucle « Tant que », l'intervalle `[a;b]` se réduit pour donner un intervalle d'amplitude égale à la moitié de celle de l'intervalle précédent, et ceci jusqu'à ce que l'amplitude soit inférieure ou égale à 0,000 1 (condition contraire de celle de la boucle « Tant que »).

L'algorithme a donc pour objectif de trouver un intervalle dans lequel se trouve la solution de l'équation $f(x) = 0$ (car les bornes de l'intervalle sont choisies de sorte que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) > 0$) d'amplitude inférieure ou égale à 0,000 1.

(d) En Python, on commence par définir la fonction f. On écrit ensuite la boucle `while` :

En Python

```
def f(x):
    return 5*x**3 - 2*x + 1

a = -1
b = 0
d = 1
while d > 0.0001:
    m = (a + b) / 2
    if f(m) > 0:
        b = m
    else:
        a = m
    d = b - a
print(a, b)
```

Il s'affiche à l'écran : -0.80523681640625, -0.80517578125.

On peut donc conclure que la solution α de l'équation $f(x) = 0$ est telle que :

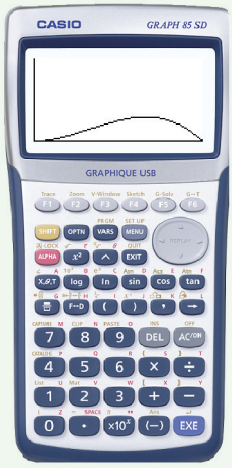
$$-0{,}806 < \alpha < -0{,}805.$$

22 Coup de balai !

Énoncé p. 156

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 Il faut bien régler l'intervalle des x à [0; 1] et celui des y à [0; 1], voire [0 ; 0,5] pour mieux voir. On obtient la courbe d'une fonction positive, croissante jusqu'à un certain point, puis décroissante. L'abscisse du maximum est proche de 0,6 (on peut la déterminer graphiquement avec la calculatrice).



2 k est un compteur entier qui varie de 1 à 1 000. Comme $x = \dfrac{k}{1\,000}$, x est une abscisse qui augmente de 0,001 à chaque passage dans la boucle. Les variables m et a contiennent les valeurs provisoires du maximum et de son abscisse. Les valeurs initiales sont $a = 0$ et $m = f(0)$, et on les actualise dès qu'on trouve un x avec une image plus grande : c'est à cela que sert l'instruction conditionnelle.

La technique de balayage permet d'affirmer *pour cette fonction* que la valeur finale de a trouvée est une approximation de l'abscisse du maximum à 0,001 près.

3 On programme l'algorithme en Python :

En Python

```
def f(x):
    return x**2 - x**3

a = 0
m = f(0)
for k in range(1, 1001):
    x = k / 1000
    if f(x) > m:
        a = x
        m = f(x)
print(a, m)
```

On obtient $a \approx 0{,}667$, $m \approx 0{,}148$, ce qui est cohérent avec la courbe obtenue à la calculatrice.

Remarque : la valeur exacte du maximum est $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27} \approx 0{,}148$.

Chapitre 7

Fonctions de référence

Plan du chapitre

1. Fonctions linéaires et affines
2. Les autres fonctions usuelles

1 Fonctions linéaires et affines

Exercice type 1 — Lycée Pascal Paoli, Corte

1 Donner les variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x + 3 \\ f_2(x) = 2x - 3 \\ f_3(x) = -2x + 3 \end{cases}$$

2 Tracer leur courbe représentative.

Voir corrigé page 174

1.1 Comment varient les fonctions linéaires et affines ?

Une fonction *affine* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ pour tout réel x, où m et p sont deux réels fixés.

- $p = f(0)$ est l'*ordonnée à l'origine* : la droite représentative de f coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,p)$.
- Pour deux réels distincts x_1 et x_2, on a :

$$f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + p) - (mx_1 + p) = m(x_2 - x_1),$$

soit :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ce quotient ne dépend pas des réels x_1 et x_2 choisis : m est le *taux d'accroissement* de la fonction f. Lorsque x augmente de 1, $f(x)$ augmente de m (ou diminue de $|m|$ si $m < 0$).

- La courbe représentative de f est la droite d'équation $y = mx + p$. Le taux d'accroissement m est le *coefficient directeur* (ou *pente*) de cette droite : il indique sa direction.

COURS

Le signe du coefficient directeur donne le sens de variation de f. En effet, si $x_1 < x_2$, alors $x_2 - x_1 > 0$, donc $f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1)$ est du signe de m :

- si $m > 0$, alors $f(x_1) < f(x_2)$: la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $m = 0$, alors $f(x_1) = f(x_2)$: la fonction est constante et la droite est parallèle à l'axe des abscisses ;
- si $m < 0$, alors $f(x_1) > f(x_2)$: la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : une fonction *linéaire* (de la forme $x \mapsto mx$, où m est une constante) est un cas particulier de fonction affine ($p = 0$) : sa droite représentative passe par l'origine du repère. Une fonction constante ($m = 0$) est aussi une fonction affine.

Propriété 1 : signe d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.
Alors $f(x)$ s'annule pour une unique valeur $x_0 = -\dfrac{p}{m}$, et :

- si $m > 0$, $f(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $f(x) > 0$ pour $x > x_0$;
- si $m < 0$, $f(x) > 0$ pour $x < x_0$ et $f(x) < 0$ pour $x > x_0$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$mx + p$ $(m > 0)$		$-$	0	$+$	
$mx + p$ $(m < 0)$		$+$	0	$-$	

En effet, $f(x) = m(x - x_0)$: pour $x > x_0$, $f(x)$ est du signe de m ; pour $x < x_0$, il est du signe contraire. Graphiquement, la droite représentative de f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0 ; elle est au-dessus de cet axe là où $f(x) > 0$.

Exemple : $-2x + 6 = 0 \iff x = 3$ et le coefficient directeur -2 est négatif : $-2x + 6$ est positif sur $]-\infty\,;\,3]$ et négatif sur $[3\,;\,+\infty[$.

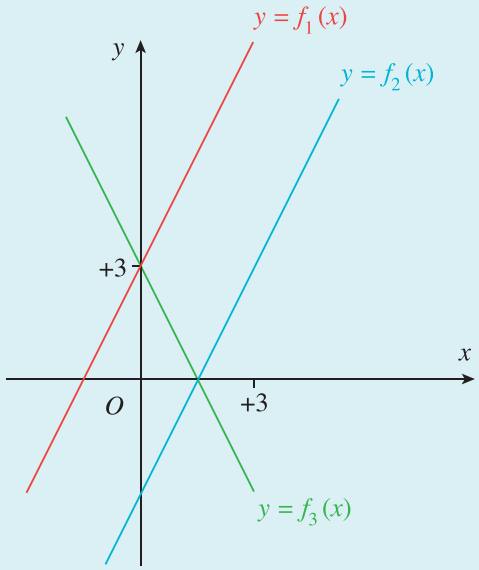
Solution de l'exercice type 1

Lycée Pascal Paoli, Corte

1 Le taux d'accroissement (coefficient directeur) de f_1 est $m = 2 > 0$, donc f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; son ordonnée à l'origine est $p = 3$.
Celui de f_2 est également $m = 2 > 0$, donc f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; son ordonnée à l'origine est $p = -3$. Les coefficients directeurs étant les mêmes, les droites représentant f_1 et f_2 sont parallèles.
Le taux d'accroissement de f_3 est $m = -2 < 0$, donc f_3 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; son ordonnée à l'origine est $p = 3$, comme pour f_1.

Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée Pascal Paoli, Corte

2



Voir énoncé page 173

2 Les autres fonctions usuelles

Exercice type 2 — Lycée Chaptal, Paris

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 6x + 3$.

1 Développer l'expression $(x + 3)^2 - 6$.

2 En déduire que, pour tout réel x, $g(x) \geqslant -6$. La fonction g admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}$? Si oui, en quelle valeur est-il atteint ?

3 Pour $x \neq 1$, écrire l'expression $2 + \dfrac{3}{x-1}$ sous la forme d'une fraction.

4 En déduire l'ensemble de définition et les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Voir corrigé page 180

COURS

2.1 La fonction « carré »

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Propriété 2

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Elle admet un minimum, égal à 0, atteint en $x = 0$.
Signe : pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, et $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

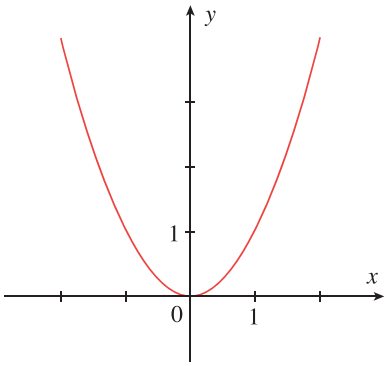
Démonstration.

Soient u et v deux réels tels que $u < v$. On a $v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$, avec $v - u > 0$.

- Si $0 \leqslant u < v$, alors $v + u > 0$, donc $v^2 - u^2 > 0$, c'est-à-dire $u^2 < v^2$: la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Si $u < v \leqslant 0$, alors $v + u < 0$, donc $v^2 - u^2 < 0$, c'est-à-dire $u^2 > v^2$: la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$.

Enfin, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0 = 0^2$: le minimum est 0, atteint en 0.

Sa courbe représentative s'appelle une *parabole*. Au minimum de la fonction, 0, correspond sur la courbe le *sommet*, placé à l'origine du repère.



La fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ (également noté $\mathbb{R}_+$) et décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$: on peut passer au carré dans une inégalité en conservant son sens si les deux membres sont positifs, et en changeant son sens si les deux membres sont négatifs. Si les deux membres sont de signes contraires, on ne peut rien conclure directement.

Par exemple, $3 < 5$ donc $9 < 25$. En revanche, $-2 < 1$ et pourtant $4 > 1$!

La courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, car $(-x)^2 = x^2$.

Propriété 3 : position relative des courbes d'équation $y = x$ et $y = x^2$

Pour $x \geqslant 0$:

- si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^2 \leqslant x$: sur $[0\,;1]$, la parabole est au-dessous de la droite d'équation $y = x$;
- si $x \geqslant 1$, alors $x^2 \geqslant x$: sur $[1\,;+\infty[$, la parabole est au-dessus de cette droite.

Les deux courbes se coupent aux points de coordonnées $(0\,;0)$ et $(1\,;1)$.

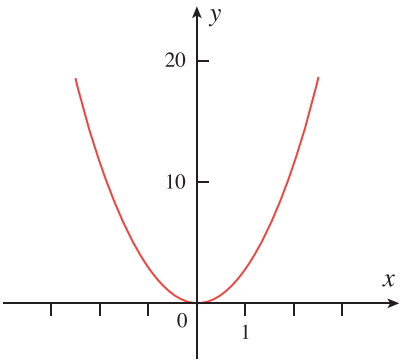
Démonstration.

Pour tout réel x, $x^2 - x = x(x-1)$. Pour $x \geqslant 0$, ce produit est du signe de $x-1$: il est négatif ou nul si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et positif ou nul si $x \geqslant 1$. Il s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$.

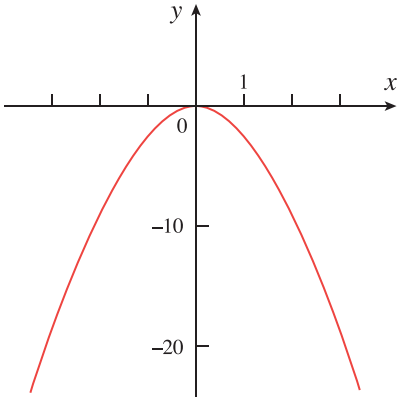
Par exemple, $0{,}5^2 = 0{,}25 < 0{,}5$ mais $3^2 = 9 > 3$: élever au carré un nombre compris entre 0 et 1 le rend plus petit.

Plus généralement, les courbes d'équation $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ sont des paraboles, dont le sommet est l'origine du repère. Le signe de a donne l'orientation (branches vers le haut ou vers le bas) de la parabole.

Voici par exemple la courbe représentative de $x \mapsto 3x^2$:



et celle de la fonction $x \mapsto -2x^2$:



2.2 La fonction « valeur absolue »

La fonction *valeur absolue* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$, où $|x|$ est la distance de x à 0 : $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$.

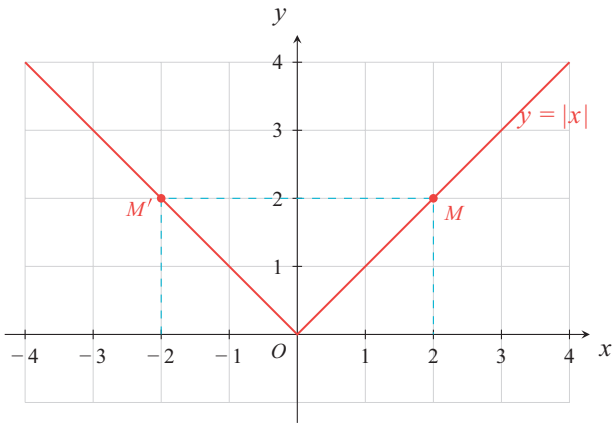
Signe : pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$, et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

COURS

Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Sur $]-\infty\,;0]$, on a $|x| = -x$: la courbe est la demi-droite d'équation $y = -x$. Sur $[0,+\infty[$, on a $|x| = x$: la courbe est la demi-droite d'équation $y = x$. Sa courbe représentative est donc formée de deux demi-droites de même origine O ; elle a la forme d'un « V ». Au minimum de la fonction, 0, correspond sur la courbe la pointe du « V », placée à l'origine du repère.



La fonction valeur absolue est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$: comme pour la fonction carré, on peut passer à la valeur absolue dans une inégalité en conservant son sens si les deux membres sont positifs, et en changeant son sens s'ils sont tous deux négatifs.

Par exemple, $2 < 7$ donc $|2| < |7|$.

En revanche, $-5 < 1$ et pourtant $|-5| = 5 > 1$!

Enfin, l'interprétation de $|x|$ comme distance de x à 0 permet de résoudre facilement les équations et inéquations du type $|x| = r$ et $|x| \leqslant r$. Pour $r > 0$:

- $|x| = r$ équivaut à $x = r$ ou $x = -r$;
- $|x| \leqslant r$ équivaut à $-r \leqslant x \leqslant r$, c'est-à-dire $x \in [-r\,;r]$.

Par exemple, $|x| \leqslant 3$ équivaut à $x \in [-3\,;3]$: ce sont les réels situés à une distance au plus 3 de l'origine. Graphiquement, ce sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de la droite d'équation $y = 3$, ou sur cette droite.

2.3 La fonction « inverse »

C'est la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. Cet ensemble est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un intervalle. Il est formé de la *réunion* de deux intervalles : $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

Propriété 4

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
Signe : $\frac{1}{x} < 0$ si $x < 0$ et $\frac{1}{x} > 0$ si $x > 0$ ($\frac{1}{x}$ est du signe de x).

Démonstration.

Soient u et v deux réels non nuls de même signe tels que $u < v$. On a :

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{u-v}{uv}.$$

Or $u - v < 0$ et, comme u et v sont de même signe, $uv > 0$. Donc $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} < 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$.

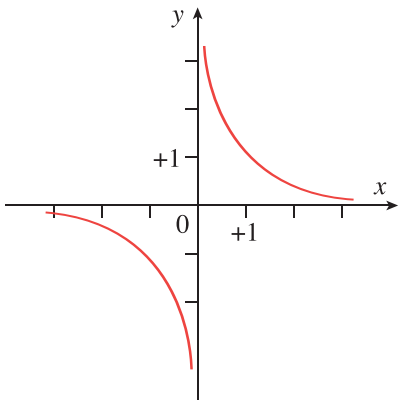
Autrement dit, si on inverse les membres d'une inégalité entre nombres non nuls de même signe, on obtient une inégalité de sens contraire.

Attention ! La fonction inverse n'est pas décroissante *sur* $\mathbb{R}^*$ car, par exemple, $f(-1) < f(+1)$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

La courbe représentative est une *hyperbole*. Elle est formée de deux branches disjointes.



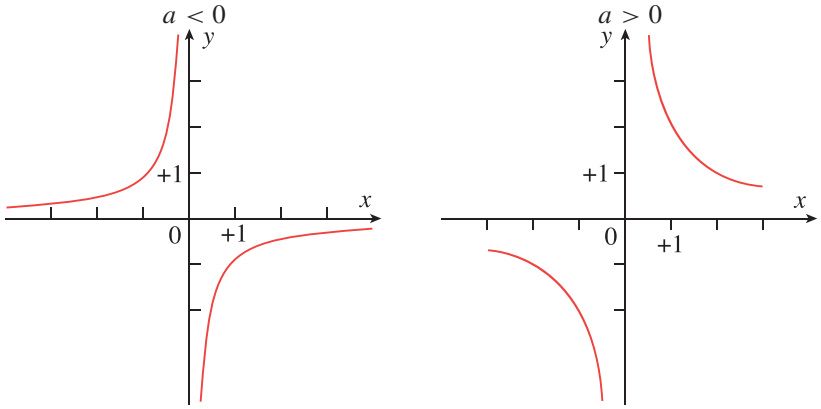
La courbe ne coupe aucun des deux axes : 0 n'a pas d'image et 0 n'a pas d'antécédent par la fonction inverse. Elle est symétrique par rapport à l'origine O du repère, car $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.

COURS

Les courbes d'équation $y = \dfrac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ sont aussi des hyperboles (voir ci-dessous).

POUR ALLER PLUS LOIN

Lorsque x devient très grand, ou très proche de 0, la courbe se rapproche des axes du repère sans jamais les toucher : on dit que les axes sont les *asymptotes* de l'hyperbole, et que l'origine O est son *centre*. Ces notions seront étudiées dans les classes suivantes.



Solution de l'exercice type 2 — Lycée Chaptal, Paris

1 On développe :

$$(x+3)^2 - 6 = x^2 + 6x + 9 - 6 = x^2 + 6x + 3.$$

2 D'après la question précédente, pour tout réel x, $g(x) = (x+3)^2 - 6$.

Un carré est toujours positif ou nul : $(x+3)^2 \geqslant 0$, donc :

$$g(x) = (x+3)^2 - 6 \geqslant -6.$$

De plus, $g(-3) = 0^2 - 6 = -6$. La fonction g admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à -6, atteint en $x = -3$.

POUR ALLER PLUS LOIN

La courbe représentative de g est une parabole, obtenue en « déplaçant » celle de la fonction carré : son sommet est le point de coordonnées $(-3\,;-6)$. L'écriture $g(x) = (x+3)^2 - 6$ s'appelle la *forme canonique* ; elle sera étudiée en classe de première.

Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Chaptal, Paris

3 On réduit au même dénominateur :

$$2+\frac{3}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2x-2+3}{x-1}=\frac{2x+1}{x-1}.$$

4 • *Recherche du domaine de définition.*

L'expression $\dfrac{2x+1}{x-1}$ n'est définie que si le dénominateur est différent de 0, donc pour $x \neq 1$.
L'ensemble de définition de f est donc :

$$\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[.$$

• *Recherche des variations.*

Considérons deux éléments a et b de $]1\,;+\infty[$ tels que $a<b$.
On a donc $a-1<b-1$ et comme ces deux nombres sont strictement positifs :

$$\frac{1}{a-1}>\frac{1}{b-1}.$$

On applique aux deux membres la fonction $x\mapsto 3x+2$, qui est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que :

$$\frac{3}{a-1}+2>\frac{3}{b-1}+2,$$

c'est-à-dire :

$$f(a)>f(b).$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

Si a et b sont éléments de $]-\infty\,;1[$, on a de même :

$$a-1<b-1,$$

et comme ces deux nombres sont strictement négatifs, on a encore :

$$\frac{1}{a-1}>\frac{1}{b-1},$$

puis :

$$f(a)>f(b).$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;1[$.

Voir énoncé page 175

INTERROS

1 V/F Fonctions affines et linéaires

5 min — Corrigé p. 191

Répondre par « vrai » ou « faux » aux propositions suivantes.

1 On considère la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{21}{2}x + 7$ définie sur $\mathbb{R}$.

a f est une fonction linéaire.

b f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $-\dfrac{7}{3}$.

d -98 est l'image de 10 par f.

2 Un carré de côté x a un périmètre noté $\mathcal{P}(x)$ et une aire notée $\mathcal{A}(x)$.

a $\mathcal{P}$ est une fonction linéaire.

b $\mathcal{A}$ est une fonction affine.

c Il n'existe pas de valeur de x autre que 0 telle que $\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}(x)$.

2 V/F Fonctions inverse et carré

5 min — Corrigé p. 191

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b Les courbes représentatives des fonctions inverse et carré se coupent en un seul point.

c La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -x^2 + 2x - 1$ a un sommet de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

Automatismes

3 Fonction linéaire ou affine ★

10 min — Corrigé p. 192

Lycée Louis Vincent, Metz

Parmi ces expressions, lesquelles sont celles de fonctions affines ? de fonctions linéaires ?

1 $f(x) = 2 - \sqrt{5}\,x$

2 $g(x) = x^2 + (x+1)^2$

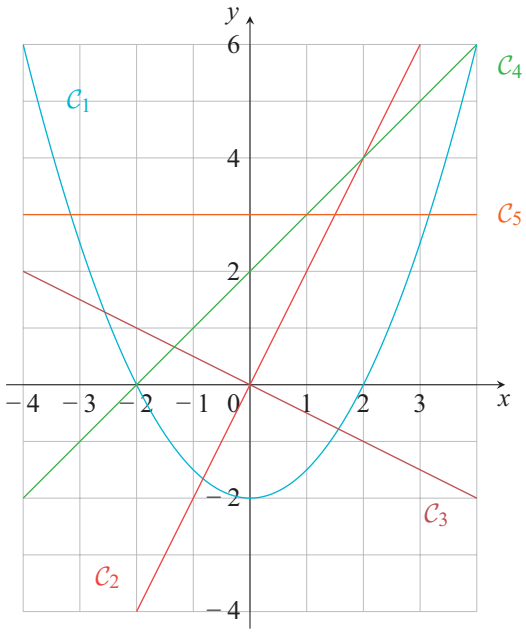
3 $h(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$

4 Fonction affine (ou linéaire)

★ 10 min Corrigé p. 192

Lycée Louis Vincent, Metz

On considère les cinq représentations graphiques $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ ci-dessous.



1. Déterminer quelle représentation ne peut pas être celle d'une fonction linéaire ou d'une fonction affine.
2. Quel est le type des fonctions représentées par les quatre autres courbes ?
3. Déterminer alors celles qui représentent uniquement une fonction linéaire.

5 Fonction valeur absolue

★ 10 min Corrigé p. 192

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On note f la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1. Calculer $f(-4)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f\left(1-\sqrt{2}\right)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 3$, puis l'inéquation $f(x) < 2$.
3. Comparer $f(-5)$ et $f(-2)$ à l'aide des variations de f.
4. Peut-on comparer $f(-3)$ et $f(2)$ à l'aide des variations de f ?
   Les comparer.

INTERROS

Fonctions affines et linéaires

6 Fonctions affines

★ 10 min Corrigé p. 193

Lycée Édouard Herriot, Lyon

Trouver une fonction affine f telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f(1) = \frac{1}{4}$.

7 Alignement de points

★ 10 min Corrigé p. 193

Lycée Les Francs-Bourgeois, Paris

Dans un repère (O,I,J), on considère les points $A(-1\ ;-5)$, $B(2\ ;1)$ et $C(3\ ;3)$.

1. Soit $f\ :\ x \mapsto ax + b$ la fonction affine dont la courbe représentative passe par A et B. Déterminer a et b.
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

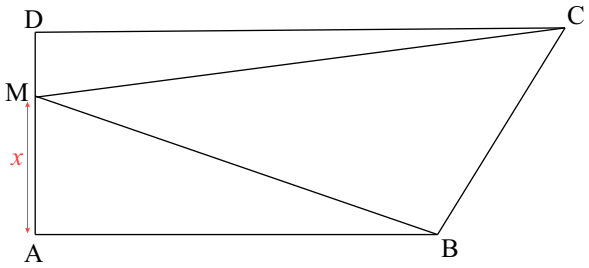
8 Dans un trapèze

★ 20 min Corrigé p. 194

Lycée Loquidy, Nantes

On considère un trapèze $ABCD$ rectangle en A et en D tel que : $AB = 8$, $AD = 5$ et $CD = 10$.

M est un point mobile sur le segment $[AD]$. On note $AM = x$.



1. À quel intervalle appartient x ?
2. Soit f la fonction qui, à x, associe l'aire du triangle ABM.
   Montrer que $f(x) = 4x$.
3. Soit g la fonction qui, à x, associe l'aire du triangle CDM.
   Montrer que $g(x) = 25 - 5x$.
4. Soit h la fonction qui, à x, associe l'aire du triangle BCM.
   On admet que h est une fonction affine telle que $h(1) = 21$ et $h(4) = 24$.
   En déduire l'expression algébrique de $h(x)$.
5. Pour quelle valeur de x l'aire de ABM est-elle égale à celle de CDM ?
6. Pour quelle valeur de x l'aire de BCM est-elle égale à celle de CDM ?

9 Fonctions affines

★★ — 20 min — Corrigé p. 195

Lycée P. et I. Joliot-Curie, Nanterre

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions affines ? Si oui, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite qui les représente ainsi que leur sens de variation :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{3+11x}{6}$.
2. $f_2 : x \mapsto -5$.
3. $f_3 : x \mapsto 7-x$.
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{5x+4}{x-8}$.
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{2}{3}x$.
6. $f_6 : x \mapsto (x-4)(x+2)-x^2+10$.

Fonction carré

10 Comparaison de deux carrés

★ — 5 min — Corrigé p. 196

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Comparer $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ et $\left(2-\sqrt{7}\right)^2$ sans les calculer.

11 Avec la fonction carré

★ — 5 min — Corrigé p. 196

Lycée Loquidy, Nantes

Compléter les pointillés suivants.

1. Si $3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $\ldots x^2 \ldots$
2. Si $x < -2$ alors $x^2 \ldots$
3. Si $x \in]-1;4]$ alors $x^2 \in \ldots$
4. Sachant que $x^2 < 5$, on peut dire que $x \ldots$

12 Sous diverses formes

★ — 15 min — Corrigé p. 197

Lycée Les-Francs-Bourgeois, Paris

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2+3x-2$.

1. Montrer que $f(x) = (2x-1)(x+2)$.
2. Montrer que $f(x) = 2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{8}$.
3. Déterminer les points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

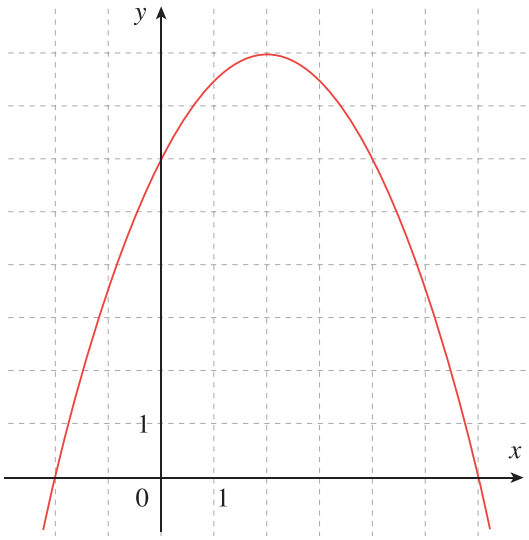
INTERROS

13 Étude graphique

★ — 20 min — Corrigé p. 197

Lycée Vaugelas, Chambéry

La figure ci-dessous représente la courbe de la fonction f.



1. Quelle semble être la nature de cette courbe ?
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. En fait, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'une des expressions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ **(c)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

Laquelle ? Donner une justification simple.

14 Réciproque et contraposée

★★ — 10 min — Corrigé p. 198

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

On désigne par f la fonction carré.

Soit $\mathcal{P}$ la propriété : « si $x = -2$ alors $f(x) = 4$. »

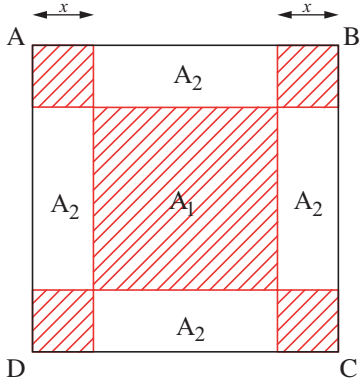
1. La propriété $\mathcal{P}$ est-elle vraie ?
2. Formuler la propriété réciproque de la propriété $\mathcal{P}$. Est-elle vraie ?
3. Formuler la propriété contraposée de $\mathcal{P}$. Est-elle vraie ?

15 Les coins du carré

★★ 15 min Corrigé p. 199

Lycée Les-Francs-Bourgeois, Paris

Un carré $ABCD$ de côté 4 cm est partagé selon le schéma suivant :



Les « coins » sont des carrés de côtés x tel que $x \in [0\,;\,2]$.

On note A_1 l'aire de la figure hachurée et A_2 l'aire de ce qui n'est pas hachuré.

1. Exprimer en fonction de x l'aire A_1.
2. Exprimer en fonction de x l'aire A_2.
3. Montrer que $A_2 = -8(x-1)^2 + 8$. En déduire la valeur de x pour laquelle A_2 est maximale.

16 Variations

★★ 20 min Corrigé p. 199

Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, Étampes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

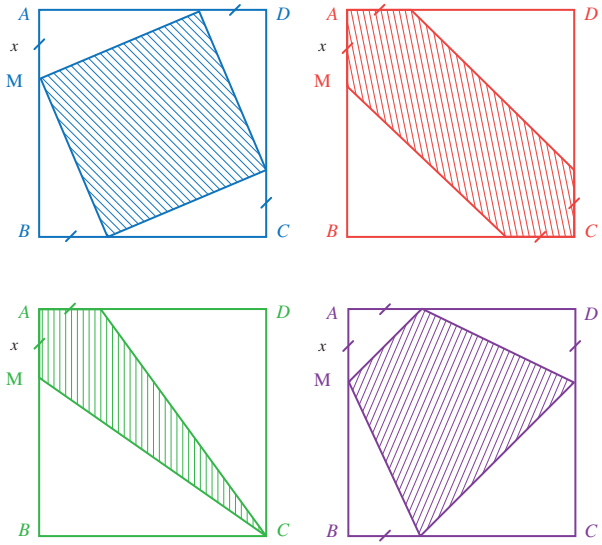
1. Vérifier que $f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1)(4 - (x_1 + x_2))$.
2. Démontrer les deux propriétés suivantes :
   - si $x_1 < x_2 \leqslant 2$ alors $x_1 + x_2 < 4$;
   - si $2 \leqslant x_1 < x_2$ alors $x_1 + x_2 > 4$.
3. En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,2]$ et que f est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f.
4. Vérifier que $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.
5. Résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
6. Utiliser les questions 3 et 5 pour résoudre l'inéquation $x^2 \geqslant 4x - 3$.
7. Retrouver le résultat de la question 6 en utilisant la question 4.

17 Aires et fonctions

★★ 40 min Corrigé p. 200

Lycée Paul Langevin, Suresnes

Dans un carré $ABCD$ de côté 1, on inscrit quatre figures, comme illustré ci-dessous.



1. Déterminer, dans chaque configuration, l'aire de la partie hachurée en fonction de $x = AM$.
2. Déduire des représentations graphiques des quatre aires, selon les valeurs de x, quelle est la figure hachurée qui a l'aire la plus grande ; la plus petite.

18 Algorithmique

★★★ 15 min Corrigé p. 202

Lycée Stanislas, Paris

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 19x - 14.$$

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution entière comprise entre 0 et 20.

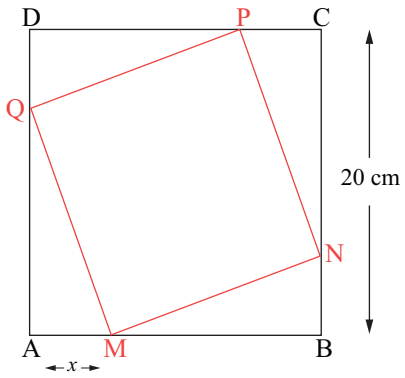
1. Écrire un algorithme qui permet de la trouver.
2. Programmer cet algorithme en Python ou sur la calculatrice.

19 Aire minimale

★★★ 30 min Corrigé p. 203

Lycée Jacques Decour, Paris

Dans le carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-dessous :



On pose $x = AM = BN = CP = DQ$, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$.

1 Calculer l'aire du carré $MNPQ$ en fonction de x.

Cette aire, exprimée en cm^2, sera notée $S(x)$ et sera donnée sous la forme développée et réduite.

2 Vérifier que $2(x-10)^2 + 200 = 2x^2 - 40x + 400$.

3 Quelle est l'aire minimale du carré $MNPQ$?

4 On veut déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ ne dépasse pas 272 cm^2.

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : x, S nombres réels
Initialisation
  x ← 0
  S ← 400
Début :
  Tant que S ⩾ 272
    x ← x+0,01
    S ← 2x² - 40x + 400
  Fin Tant que
Sortie : Afficher x
```

(a) Expliquer la raison pour laquelle cet algorithme ne répond pas à notre souhait.

(b) On admet que $S(x) = 272$ pour des valeurs de x entières.

Modifier alors l'algorithme afin de répondre à notre problème et le programmer en Python.

INTERROS

Fonction inverse

20 De l'inverse à une fonction carré

★★ 15 min Corrigé p. 204

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On s'intéresse aux points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2x - 7.$$

1 Soit $h(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x + 1}{x}$, pour $x \neq 0$.

Montrer que chercher les abscisses de ces éventuels points revient à résoudre l'équation $h(x) = 0$.

2 Montrer que :

$$-2x^2 + 7x + 1 = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8}.$$

3 En déduire l'abscisse des points d'intersection cherchés initialement.

21 Changement de repère

★★ 20 min Corrigé p. 205

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}.$$

1 Quel est le domaine de définition de f ?

2 Montrer que $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x - 2}$.

3 On considère les points $O'(2\ ;\ 1)$, $I'(3\ ;\ 1)$ et $J'(2\ ;\ 2)$ et le repère (O', I', J').

On convient de noter $(X\ ;\ Y)$ les coordonnées des points dans ce nouveau repère, et $(x\ ;\ y)$ celles des points dans (O, I, J).

(a) Expliquer les égalités : $x = X + 2$ et $y = Y + 1$.

(b) Montrer que dans (O', I', J'), tout point $M(X\ ;\ Y)$ de $\mathcal{C}$ est tel que $Y = \dfrac{1}{X}$.

Que peut-on en conclure sur $\mathcal{C}$?

1 V/F Fonctions affines et linéaires

Énoncé p. 182

1 **a** *Faux.* $f(x)$ est de la forme $ax+b$ avec $a=-\dfrac{21}{2}$ et $b=7$ donc f est une fonction affine.

b *Vrai.* $a<0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c *Faux.* Pour connaître l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses, il faut résoudre l'équation $f(x)=0$.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff -\frac{21}{2}x+7=0\\ &\iff -\frac{21}{2}x=-7\\ &\iff x=-7\times\left(-\frac{2}{21}\right)\\ &\iff x=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $\dfrac{2}{3}$.

d *Vrai.* $f(10)=-\dfrac{21}{2}\times 10+7=-21\times 5+7=-98$, donc -98 est bien l'image de 10 par la fonction f.

2 **a** *Vrai.* $\mathcal{P}(x)=4x$ car le périmètre d'un carré est égal au quadruple de la mesure d'un côté. $\mathcal{P}(x)$ est de la forme ax donc $\mathcal{P}$ est bien une fonction linéaire.

b *Faux.* $\mathcal{A}(x)=x^2$ donc l'aire est la fonction carré.

c *Faux.* $\mathcal{P}(x)=\mathcal{A}(x)$

$$\begin{aligned} &\iff 4x=x^2\\ &\iff x^2-4x=0\\ &\iff x(x-4)=0\\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=4. \end{aligned}$$

Donc l'aire est égale au périmètre quand $x=4$ et quand $x=0$.

2 V/F Fonctions inverse et carré

Énoncé p. 182

a *Faux.* La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

b *Vrai.* Si $x<0$, alors $\dfrac{1}{x}<0\leqslant x^2$: pas d'intersection. Si $0<x<1$, alors $\dfrac{1}{x}>1>x^2$; si $x>1$, alors $\dfrac{1}{x}<1<x^2$. Enfin, pour $x=1$, $\dfrac{1}{1}=1^2=1$. Le seul point d'intersection est donc le point de coordonnées $(1\,;1)$.

c *Vrai.* $-x^2+2x-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2$. Pour tout réel x, $-(x-1)^2\leqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x=1$: la fonction admet un maximum égal à 0, atteint en 1. Le sommet de la parabole a donc pour coordonnées $(1\,;0)$.

CORRIGÉS

3 Fonction linéaire ou affine

Énoncé p. 182

Lycée Louis Vincent, Metz

1 $f(x) = -\sqrt{5}\,x + 2$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -\sqrt{5}$ et $b = 2$.

La fonction f est donc une fonction affine.

Ce n'est pas une fonction linéaire car $b \neq 0$.

2 $g(x) = x^2 + \left(x^2 + 2x + 1\right) = 2x^2 + 2x + 1$. L'expression de g n'est pas de la forme $ax + b$ donc la fonction g n'est pas une fonction affine (et donc g n'est pas une fonction linéaire).

3 $h(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$

$= x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)$

$= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1$

$= 4x$.

$h(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 4$ et $b = 0$: la fonction h est donc une fonction affine. Et c'est une fonction linéaire puisque $b = 0$.

4 Fonction affine (ou linéaire)

Énoncé p. 183

Lycée Louis Vincent, Metz

1 La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ n'est pas une droite : elle ne peut pas être la représentation graphique d'une fonction affine (ou linéaire).

2 Toutes les autres représentations graphiques sont des droites (non verticales) : ce sont des représentations graphiques de fonctions affines.

En particulier, la droite horizontale $\mathcal{C}_5$ représente une fonction affine de la forme $x \mapsto b$ (avec $a = 0$) : c'est une fonction constante.

3 Les droites $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ passent par l'origine du repère : ce sont des représentations graphiques de fonctions linéaires.

Les droites $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ ne passent pas par l'origine du repère : elles représentent des fonctions affines qui ne sont pas linéaires.

5 Fonction valeur absolue

Énoncé p. 183

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 $f(-4) = |-4| = 4$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$. Comme $\sqrt{2} > 1$, $1 - \sqrt{2} < 0$, donc $f\left(1-\sqrt{2}\right) = -\left(1-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1$.

2 $|x| = 3$ signifie que la distance de x à 0 vaut 3 : $x = -3$ ou $x = 3$, donc :

$$\mathcal{S} = \{-3\,;\,3\}.$$

$|x| < 2$ signifie que la distance de x à 0 est strictement inférieure à 2 :

$$\mathcal{S} =]-2\,;\,2[.$$

Graphiquement, ce sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 3$, puis les abscisses des points de la courbe situés strictement au-dessous de la droite d'équation $y = 2$.

3 $-5 < -2 \leqslant 0$ et la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $f(-5) > f(-2) : 5 > 2$.

4 -3 et 2 ne sont pas dans un même intervalle où f est monotone : on ne peut pas utiliser directement les variations. On calcule :

$$f(-3) = 3 > 2 = f(2).$$

6 Fonctions affines

Énoncé p. 184

Lycée Édouard Herriot, Lyon

Une fonction affine s'écrit $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.

- *Calcul du coefficient directeur a.*
  Pour une fonction affine, le coefficient a est égal au taux d'accroissement entre deux valeurs distinctes :

$$a = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \times 2 = -\frac{3}{2}.$$

- *Calcul de l'ordonnée à l'origine b.*
  On a donc $f(x) = -\frac{3}{2}x + b$.
  Comme $f(1) = \frac{1}{4}$:

$$-\frac{3}{2} \times 1 + b = \frac{1}{4} \iff b = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{7}{4}.$$

- *Conclusion.*

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

- *Vérification.*

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f(1) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}.$$

7 Alignement de points

Énoncé p. 184

Lycée Les Francs-Bourgeois, Paris

1 Notons $\mathcal{D}$ la droite représentant la fonction f dans (O, I, J).

- $A \in \mathcal{D} \iff f(x_A) = y_A$
  $\iff f(-1) = -5$
  $\iff -a + b = -5$
  $\iff b = -5 + a$;

- $B \in \mathcal{D} \iff f(x_B) = y_B$
  $\iff f(2) = 1$
  $\iff 2a + b = 1$
  $\iff 2a + (-5 + a) = 1$
  $\iff 3a = 6$
  $\iff a = 2$.

Donc $a = 2$ et $b = -5 + 2 = -3$.

Finalement, on trouve : $f(x) = 2x - 3$.

2 $f(3) = 2 \times 3 - 3 = 6 - 3 = 3$ donc $f(x_C) = y_C$; par conséquent, $C \in \mathcal{D}$, ce qui signifie que les points A, B et C sont alignés.

8 Dans un trapèze

Énoncé p. 184

Lycée Loquidy, Nantes

1 Le point M appartient au segment $[AD]$, avec $AD = 5$.

Donc $x \in [0; 5]$.

2 ABM est un triangle rectangle en A donc son aire est :

$$f(x) = \frac{AB \times AM}{2} = \frac{8x}{2} = 4x.$$

3 CDM est un triangle rectangle en D donc son aire est :

$$g(x) = \frac{DC \times MD}{2} = \frac{10(5-x)}{2} = 5(5-x) = 25 - 5x.$$

4 h est une fonction affine, donc il existe deux réels m et p tels que $h(x) = mx + p$.

- $h(1) = 21 \Leftrightarrow m \times 1 + p = 21 \Leftrightarrow m + p = 21 \Leftrightarrow p = 21 - m$.
- $h(4) = 24 \Leftrightarrow m \times 4 + p = 24 \Leftrightarrow 4m + p = 24 \Leftrightarrow p = 24 - 4m$.

On en déduit alors que :

$21 - m = 24 - 4m \iff -m + 4m = 24 - 21 \iff 3m = 3 \iff m = 1$.

Ainsi,

$$p = 21 - m = 21 - 1 = 20.$$

Finalement, $h(x) = x + 20$.

5 L'aire de ABM est égale à celle de CDM si et seulement si :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 4x = 25 - 5x \\ &\iff 9x = 25 \\ &\iff x = \frac{25}{9}. \end{aligned}$$

De plus, $\frac{25}{9} \in [0; 5]$ donc l'aire de ABM est égale à celle de CDM lorsque M est à une distance de $\frac{25}{9}$ de A.

6 L'aire de BCM est égale à celle de CDM si et seulement si :

$$\begin{aligned} x + 20 = 25 - 5x &\iff x + 5x = 25 - 20 \\ &\iff 6x = 5 \\ &\iff x = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

De plus, $\frac{5}{6} \in [0; 5]$ donc l'aire de BCM est égale à celle de CDM lorsque M est à une distance de $\frac{5}{6}$ de A.

9 Fonctions affines

Énoncé p. 185

Lycée P. et I. Joliot-Curie, Nanterre

1 f_1 est bien sûr une fonction affine, puisqu'on peut écrire :

$$\text{pour tout réel } x, \qquad f_1(x) = \frac{11}{6}x + \frac{3}{6}.$$

L'ordonnée à l'origine de la droite qui représente f_1 est $\frac{3}{6}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. Son coefficient directeur est $\frac{11}{6}$. Il est positif (strictement), donc f_1 est croissante (strictement).

2 f_2 est une fonction constante (donc en particulier affine), représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses, d'ordonnée à l'origine -5. Le coefficient directeur de cette droite « horizontale » est bien entendu 0.

3 f_3 est clairement une fonction affine. L'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 7, son coefficient directeur est -1. Il est négatif et non nul, donc la fonction est strictement décroissante.

4 f_4 n'est pas une fonction affine. J'espère que cela vous a sauté aux yeux ($f_4(x)$ ne peut être mis sous la forme $ax + b$). La méthode la plus rapide pour prouver que f_4 n'est pas une fonction affine est de remarquer que f_4 n'est pas définie en 8, alors que les fonctions affines sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5 f_5 est une fonction affine. Elle est même linéaire : l'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 0. Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{2}{3}$; il est positif et non nul, donc f_5 est strictement croissante.

6 Si on jette un coup d'œil (trop !) rapide sur f_6, celle-ci ne paraît pas affine, vue la présence de termes en x^2. Néanmoins, si l'on développe la formule, on obtient :

$$f_6(x) = x^2 + 2x - 4x - 8 - x^2 + 10 = -2x + 2.$$

f_6 est donc bien une fonction affine. L'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 2, son coefficient directeur est -2. f_6 est donc strictement décroissante.

10 Comparaison de deux carrés

Énoncé p. 185

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Partons du fait que $5 < 7$:

$$\begin{aligned} 5 < 7 &\iff \sqrt{5} < \sqrt{7} \\ &\iff -\sqrt{5} > -\sqrt{7} \\ &\iff 2 - \sqrt{5} > 2 - \sqrt{7}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} 4 < 5 &\iff \sqrt{4} < \sqrt{5} \\ &\iff 2 < \sqrt{5} \\ &\iff 2 - \sqrt{5} < 0. \end{aligned}$$

On a donc :

$$2 - \sqrt{7} < 2 - \sqrt{5} < 0.$$

La fonction carré étant strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, on en conclut alors que :

$$0 < \left(2 - \sqrt{5}\right)^2 < \left(2 - \sqrt{7}\right)^2.$$

11 Avec la fonction carré

Énoncé p. 185

Lycée Loquidy, Nantes

1 Si $3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $9 \leqslant x^2 \leqslant 25$.

En effet, la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc les images par cette fonction sont rangées dans le même sens que leur antécédent.

2 Si $x < -2$ alors $x^2 > 4$.

En effet, la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc les images sont rangées dans le sens inverse de leur antécédent.

3 Si $x \in]-1; 4]$ alors $x^2 \in [0; 16]$.

En effet,

- si $-1 < x \leqslant 0$ alors $0 \leqslant x^2 < 1$;
- si $0 \leqslant x \leqslant 4$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 16$.

Au final, on a bien que $x^2 \in [0; 16]$.

ATTENTION

Si $x \in [a; b]$ avec $a < 0$ et $b > 0$, n'oubliez pas que x^2 transite nécessairement par 0, et donc que la valeur minimale de x^2 est 0.

4 Sachant que $x^2 < 5$, on peut dire que $x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$.

En effet, si $x^2 < 5$, la partie de la courbe représentative de la fonction carré que l'on regarde est celle située sous la droite d'équation $y = 5$, c'est-à-dire la partie de la courbe définie pour x variant de $-\sqrt{5}$ à $\sqrt{5}$ (exclus).

12 Sous diverses formes

Énoncé p. 185

Lycée Les-Francs-Bourgeois, Paris

1 On développe :

$$(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2 = f(x).$$

2
$$\begin{aligned} 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} &= 2\left(x^2 + 2\times\frac{3}{4}\times x + \frac{3^2}{4^2}\right) - \frac{25}{8} \\ &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{25}{8} \\ &= 2x^2 + 3x + \frac{9}{8} - \frac{25}{8} \\ &= 2x^2 + 3x - \frac{16}{8} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3 Pour déterminer les points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$. Il est donc préférable de prendre la forme factorisée.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (2x-1)(x+2) = 0 \\ &\iff 2x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -2. \end{aligned}$$

Les points d'intersection ont donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $(-2\,;\,0)$.

13 Étude graphique

Énoncé p. 186

Lycée Vaugelas, Chambéry

1 La courbe est une parabole.

2 On déduit de la courbe les variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

3 La parabole est tournée vers le bas, donc le coefficient de x^2 est négatif : cela élimine les deux premières expressions.

De plus, avec la troisième expression,

- $f(0) = 6$
- $f(2) = -\dfrac{1}{2} \times 4 + 4 + 6 = 8$

ce qui est conforme au graphique. Donc :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6.$$

14 Réciproque et contraposée

Énoncé p. 186

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

1 La propriété $\mathcal{P}$ est vraie. En effet, si $x = -2$ alors $f(-2) = (-2)^2 = 4$.

2 La propriété réciproque de $\mathcal{P}$ peut être formulée ainsi :

« Si $f(x) = 4$ alors $x = -2$. »

Cette réciproque est fausse car si $x^2 = 4$ alors $x = -2$ ou $x = 2$: par exemple, $f(2) = 4$ mais $2 \neq -2$.

3 La contraposée de $\mathcal{P}$ peut se formuler ainsi :

« Si $f(x) \neq 4$ alors $x \neq -2$. »

Cette contraposée est vraie : une propriété et sa contraposée sont toujours simultanément vraies ou simultanément fausses. Comme $\mathcal{P}$ est vraie, sa contraposée l'est aussi.

On peut aussi le vérifier directement : si $x = -2$, alors $f(x) = 4$; donc si $f(x) \neq 4$, on ne peut pas avoir $x = -2$.

MÉTHODE

Si p et q sont deux propositions et si une propriété s'écrit
« $p \Longrightarrow q$ » ou « Si p est vraie alors q est vraie »,

- sa réciproque s'écrit :
  « $q \Longrightarrow p$ » ou « Si q est vraie alors p est vraie » ;
- sa contraposée s'écrit :
  « non $q \Longrightarrow$ non p » ou « Si q est fausse alors p est fausse. »

15 Les coins du carré

Énoncé p. 187

Lycée Les-Francs-Bourgeois, Paris

1 L'aire d'un coin est x^2 et l'aire du carré central est $(4-2x)^2$ donc :

$$\begin{aligned} A_1 &= 4x^2 + (4-2x)^2 \\ &= 4x^2 + 16 - 16x + 4x^2 \\ &= 8x^2 - 16x + 16. \end{aligned}$$

2 $$\begin{aligned} A_2 &= 4^2 - A_1 \\ &= 16 - (8x^2 - 16x + 16) \\ &= 16 - 8x^2 + 16x - 16 \\ &= -8x^2 + 16x. \end{aligned}$$

3 $$\begin{aligned} -8(x-1)^2 + 8 &= -8\big[(x-1)^2 - 1\big] \\ &= -8(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= -8(x^2 - 2x) \\ &= -8x^2 + 16x \\ &= A_2. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0\,;2]$, $-8(x-1)^2 \leqslant 0$, donc $A_2 \leqslant 8$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. Donc A_2 est maximale pour $x = 1$.

On a alors $A_2 = 8$ cm^2.

16 Variations

Énoncé p. 187

Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, Étampes

1 On factorise :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 - 4x_1 + 3) - (x_2^2 - 4x_2 + 3) \\ &= x_1^2 - 4x_1 + 3 - x_2^2 + 4x_2 - 3 \\ &= x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 4(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)\big[4 - (x_1 + x_2)\big]. \end{aligned}$$

2 Si $x_1 < x_2$, on peut écrire $x_1 + x_2 < 2x_2$. Avec l'hypothèse : $x_2 \leqslant 2$, on obtient $x_1 + x_2 < 4$.

Toujours avec $x_1 < x_2$, on écrit $x_1 + x_2 > 2x_1$. Avec $x_1 \geqslant 2$, on peut écrire $x_1 + x_2 > 4$.

3 Donnons-nous x_1 et x_2 dans $]-\infty\,;2]$, tels que $x_1 < x_2$. D'après les questions précédentes, on sait que $4 - (x_1 + x_2) > 0$ et, par ailleurs, $x_2 - x_1 > 0$, donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$. On en déduit que $f(x_1) > f(x_2)$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;2]$.

De la même façon, on montre que dans $[2\,;+\infty[$, f est strictement croissante. Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

4 Il suffit de développer $(x-1)(x-3)$.

5 D'après la factorisation précédente, l'égalité est vérifiée pour $x=1$ et $x=3$, donc :

$$\mathcal{S}=\{1\,;3\}.$$

6 L'inéquation proposée revient à l'inéquation : $f(x)\geqslant 0$. f s'annule pour $x=1$ et $x=3$. Sur $]-\infty;1]$, f décroît, donc f est positive. Elle devient négative à partir de 1. Sur $[2;+\infty[$, la fonction croît, passe par la valeur 0 en $x=3$, puis devient positive. Ces considérations apparaissent plus clairement dans le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S}=]-\infty\,;1]\cup[3\,;+\infty[.$$

7 L'énoncé vous demande en fait de procéder directement à la résolution de l'inéquation, par un tableau de signes :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retrouve le résultat de la question précédente.

17 Aires et fonctions

Énoncé p. 188

Lycée Paul Langevin, Suresnes

1 • Pour la première configuration (bleue), on peut remarquer qu'il faut enlever au carré, d'aire 1, quatre triangles rectangles identiques, de côtés x et $1-x$. L'aire cherchée s'écrit donc :

$$A_1(x)=1-4\frac{x(1-x)}{2}=2x^2-2x+1.$$

On peut retrouver aussi ce résultat en remarquant que l'aire hachurée est un carré, dont le côté est l'hypoténuse des petits triangles, et d'après le théorème de Pythagore :

$$A_1(x) = x^2 + (1-x)^2, \text{ soit encore : } A_1(x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

- Pour la seconde configuration (rouge), il faut enlever deux triangles rectangles isocèles, de côté $1-x$, d'où :

$$A_2(x) = 1 - (1-x)^2.$$

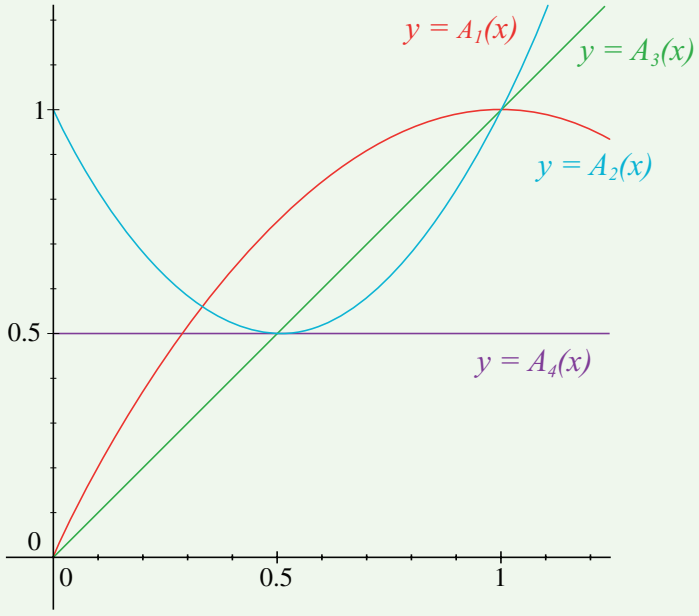
- Pour la troisième configuration (verte), on enlève encore deux triangles rectangles, de côtés 1 et $1-x$, d'où :

$$A_3(x) = 1 - (1-x) = x.$$

- On peut appliquer la même méthode au trapèze de la quatrième configuration (violette). Plus astucieusement, si on considère les diagonales du trapèze, on fait apparaître des rectangles, la moitié est hachurée. Le trapèze a donc pour aire la moitié de celle du carré, soit :

$$A_4(x) = \frac{1}{2}.$$

2 Les représentations graphiques des quatre aires sont les suivantes :



D'après le tracé des quatre courbes, on voit que l'aire la plus petite est $A_3(x)$ si $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, puis $A_4(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Pour l'aire la plus grande, la compétition est entre $A_1(x)$ et $A_2(x)$.
Vérifions pour quels x ces deux expressions sont égales. On calcule :

$$\begin{aligned} A_1(x) - A_2(x) &= 2x^2 - 2x + (1-x)^2 \\ &= 2x(x-1) + (1-x)^2 \\ &= (1-x)(1-3x). \end{aligned}$$

Donc les courbes se coupent aux points d'abscisses $\frac{1}{3}$ et 1.

On en déduit que l'aire la plus grande est $A_1(x)$ si $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{3}\right]$, et $A_2(x)$ si $x \in \left[\frac{1}{3}\,;\,1\right]$.

18 Algorithmique

Énoncé p. 188

Lycée Stanislas, Paris

1 Puisqu'on nous dit que la racine est un nombre entier compris entre 0 et 20, il suffit de tester chacun de ces nombres.

```
Variables x , y : nombres
Début
    Pour x allant de 0 à 20 Répéter
      y ← 3*x²-19*x-14
       Si y = 0 Alors
            Afficher x
        Fin Si
    Fin Pour
Fin
```

2 **En Python**



```
for x in range(0,21) :
  y = 3 * x**2-19*x-14
  if y == 0 :
    print(x)
```

Le programme affiche 7.

On vérifie : $3 \times 7^2 - 19 \times 7 - 14 = 147 - 133 - 14 = 0$.

Il faut se rappeler qu'en Python, la valeur finale de l'intervalle est exclue, il faut donc écrire `range(0,21)` si on veut tester toutes les valeurs jusqu'à 20 inclus.

Notez également le double signe « = », opérateur qui teste l'égalité (==) et renvoie *True* ou *False*, à ne pas confondre avec le signe égal simple, opérateur d'affectation.

19 Aire minimale

Énoncé p. 189

Lycée Jacques Decour, Paris

1 Le triangle AMQ est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} QM^2 &= x^2 + (20-x)^2 \\ &= x^2 + 400 - 40x + x^2 \\ &= 2x^2 - 40x + 400. \end{aligned}$$

L'aire du carré $MNPQ$ est égale à QM^2 donc :

$$S(x) = 2x^2 - 40x + 400.$$

2 On développe :

$$\begin{aligned} 2(x-10)^2 + 200 &= 2(x^2 - 20x + 100) + 200 \\ &= 2x^2 - 40x + 400 \\ &= S(x). \end{aligned}$$

3 $S(x) = 200 + \underbrace{2(x-10)^2}_{\geqslant 0} \geqslant 200$, avec égalité pour $x = 10$. L'aire minimale de $MNPQ$ est donc égale à 200 cm^2.

4 **(a)** Dans l'algorithme, on voit que les instructions de la boucle « Tant que » s'exécutent dès lors que S est supérieur ou égal à 272. La valeur initiale de S étant 400, on entre dans la boucle et on calcule $S(x)$ jusqu'à trouver un résultat inférieur à 272. Quand ce sera le cas, on sortira de la boucle et la valeur de x sera affichée.

Cependant, l'algorithme n'affiche qu'une valeur... Et on se doute bien qu'il y en a d'autres ! Il ne répond donc pas à notre souhait de trouver *toutes* les valeurs de x telles que $S(x) \leqslant 272$.

(b) Un algorithme possible est le suivant :

```
Variables : x, S nombres réels
Initialisation
  x ← 0
  S ← 400
Début :
  Tant que x < 20
    x ← x+1
    S ← 2x² - 40x + 400
    Si S = 272 alors
      Afficher x
    Fin Si
  Fin Tant que
```

L'énoncé nous dit que les valeurs de x telles que $S(x) = 272$ sont entières donc nous allons faire un balayage de l'intervalle [0;20]

avec un pas de x égal à 1 (c'est-à-dire que x va augmenter de 1 en 1). Pour chaque valeur de x, on calcule $S(x)$ et si le résultat est égal à 272, on affiche la valeur de x.

D'après les variations de S, la première valeur qui s'affiche est la première valeur de x à partir de laquelle $S(x) \leqslant 272$ et la seconde sera celle à partir de laquelle $S(x) \geqslant 272$. Ainsi, entre les deux valeurs affichées, on est assuré que $S(x) \leqslant 272$.

Voici le programme Python correspondant :

```
x = 0
S = 400
while x < 20 :
  x = x + 1
  S = 2 * x**2 - 40 * x + 400
  if S == 272 :
    print(x)
```

Le programme affiche 4 puis 16. L'aire du carré $MNPQ$ ne dépasse donc pas 272 cm^2 lorsque $x \in [4 ; 16]$.

Vérification par le calcul :

$$\begin{aligned} S(x) \leqslant 272 &\iff 2(x-10)^2 + 200 \leqslant 272 \\ &\iff (x-10)^2 \leqslant 36 \\ &\iff |x-10| \leqslant 6 \\ &\iff x \in [4 ; 16]. \end{aligned}$$

20 De l'inverse à une fonction carré

Énoncé p. 190

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 Notons $M(x ; y)$ l'un des éventuels points d'intersection des deux courbes, avec $x \neq 0$.

M est sur la courbe représentative de f donc $y = f(x)$; de même, M est sur celle de g donc $y = g(x)$ d'où $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{1}{x} = 2x - 7 \\ &\iff \frac{1}{x} - 2x + 7 = 0 \\ &\iff \frac{-2x^2 + 7x + 1}{x} = 0 \\ &\iff h(x) = 0. \end{aligned}$$

2 Développons la forme donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}-2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{57}{8} &= -2\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}\right)+\frac{57}{8}\\ &= -2x^2+7x-\frac{49}{8}+\frac{57}{8}\\ &= -2x^2+7x+1.\end{aligned}$$

3 Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul. Des questions précédentes, on déduit, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}f(x)=g(x) &\iff -2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{57}{8}=0\\ &\iff -2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{57}{8}\\ &\iff \left(x-\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{57}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &\iff \left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{57}{16}\\ &\iff x-\frac{7}{4}=\sqrt{\frac{57}{16}} \quad \text{ou} \quad x-\frac{7}{4}=-\sqrt{\frac{57}{16}}\\ &\iff x=\frac{\sqrt{57}}{4}+\frac{7}{4} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{\sqrt{57}}{4}+\frac{7}{4}.\end{aligned}$$

Ces deux valeurs sont non nulles (car $\sqrt{57} \neq 7$), elles conviennent donc.

Ainsi, il y a deux points d'intersection, d'abscisses $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{57}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{57}}{4}$.

21 Changement de repère

Énoncé p. 190

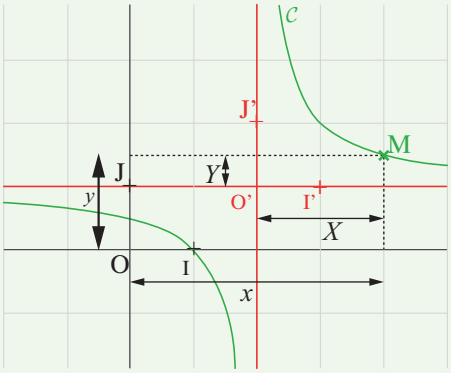
Lycée Fernand Daguin, Mérignac

1 L'expression de la fonction f contient un quotient donc f est définie quand son dénominateur est différent de 0.

Le domaine de définition de f est donc : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2
$$\begin{aligned}1+\frac{1}{x-2} &= \frac{x-2}{x-2}+\frac{1}{x-2}\\ &= \frac{x-2+1}{x-2}\\ &= \frac{x-1}{x-2}\\ &= f(x).\end{aligned}$$

3 **(a)**



On voit alors que $x = X + x_{O'} = X + 2$ et $y = Y + y_{O'} = Y + 1$.

Sur le schéma, toutes les coordonnées sont positives, mais les égalités sont bien sûr valables quand elles sont négatives.

(b) On sait que dans le repère (O, I, J),

$$y = f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} \ ;$$

ainsi, à l'aide des égalités trouvées à la question précédente, on obtient :

$$Y + 1 = 1 + \frac{1}{X+2-2} \qquad \text{soit} \qquad Y = \frac{1}{X}.$$

On peut alors conclure que la fonction f est la fonction inverse dans le repère (O', I', J') et donc que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Chapitre 8

Vecteurs et coordonnées dans le plan

Plan du chapitre

1. Vecteurs
2. Vecteurs et alignement

1 Vecteurs

Exercice type — **Lycée Lavoisier, Paris**

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(-3\,;0)$, $B(-6\,;-3)$ et $C\left(\frac{3}{2}\,;\frac{9}{2}\right)$.

1. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point D pour que $COBD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du point M centre de ce parallélogramme.

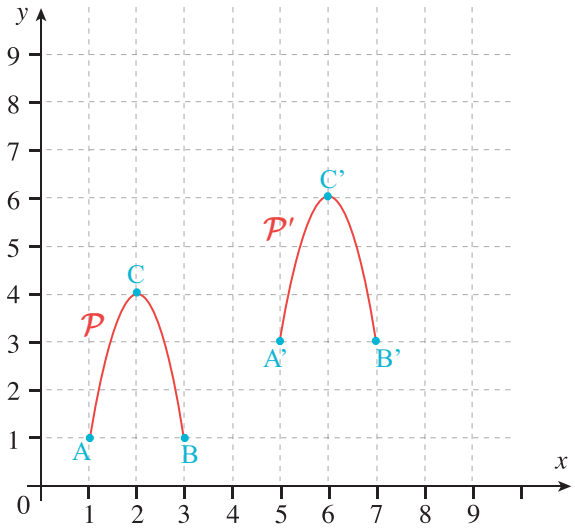
Voir corrigé page 215

1.1 Translations

Une figure du plan subit une translation lorsqu'elle est déplacée sans se déformer et sans tourner.

Sur la figure page suivante, la courbe rouge $\mathcal{P}$ subit une translation et est déplacée en $\mathcal{P}'$.

COURS



Au départ, le coin inférieur gauche se trouve en A, qui a pour coordonnées (1; 1). La translation le déplace en A', de coordonnées (5; 3). Notons qu'on ajoute $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée de A pour obtenir les coordonnées de A'.

Regardons maintenant le coin inférieur droit, qui se trouve initialement en $B(3; 1)$. Il est déplacé jusqu'en $B'(7; 3)$. Ici encore, on ajoute $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée de B pour obtenir les coordonnées de B'.

Quelle est la position finale du sommet qui était en $C(2; 4)$? Pour lui aussi, il suffit d'ajouter $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée pour obtenir sa position finale $C'(6; 6)$.

Cette propriété est vérifiée pour n'importe quel point de la figure. Ainsi, le *mouvement* de translation peut être entièrement décrit par l'algorithme : ajouter $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée.

On dit que le *vecteur* de la translation a pour coordonnées $\begin{pmatrix}+4\\+2\end{pmatrix}$.

Un vecteur est un objet abstrait : il décrit une translation. On peut le représenter par une flèche qui montre la direction (c'est-à-dire, par exemple, parallèlement à quelle droite ?), le sens (il y a deux sens pour une direction donnée) et la longueur du déplacement.

Le mot *vecteur* vient du latin *vehere* qui veut dire *transporter*. Le mot *véhicule* est de la même famille. Le vecteur montre comment les points sont « transportés » par la translation.

Pour noter un vecteur, on peut utiliser une lettre, en général surmontée d'une flèche : $\vec{u}$, $\vec{v}$. Comme la translation transforme A en A', on peut également noter $\overrightarrow{AA'}$ le vecteur.

Sur la figure page suivante, on a indiqué trois flèches, mais elles représentent le *même* vecteur puisqu'il s'agit de la *même* translation : on dit que ce sont trois *représentants* de ce vecteur.

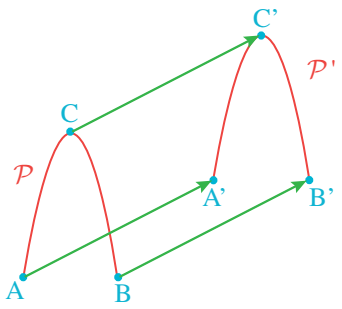
Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont égaux.

On note alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Un cas particulier : si la translation est *l'identité* (cas particulier où on n'effectue aucun déplacement), alors le vecteur de translation est le *vecteur nul*. On le note $\vec{0}$. Il a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Remarques

- Il n'est nul besoin de coordonnées pour décrire une translation ou pour définir un vecteur. Par exemple, si on enlève le repère du dessin précédent, on peut tout de même parler du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ et dire que la translation de vecteur $\vec{u}$ déplace A en A', B en B' et C en C'.
- En physique, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé *vecteur déplacement* de A à B ; si O est choisi comme origine, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé *vecteur position* du point M (relativement à O).



1.2 Coordonnées d'un vecteur

On considère deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$. Il faut ajouter $x_B - x_A$ à l'abscisse de A et $y_B - y_A$ à son ordonnée pour obtenir les coordonnées de B.

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Remarque :

- on indique les coordonnées d'un point *en ligne* : $M(2\ ;\ 1)$;
- on indique celles d'un vecteur *en colonne* : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

COURS

1.3 Somme de vecteurs

Définition 1

Si on enchaîne la translation de vecteur $\vec{u}_2$ à la translation de vecteur $\vec{u}_1$, on obtient une translation, de vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Si $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, la première translation ajoute x_1 aux abscisses, et la seconde x_2, on a donc ajouté $x_1 + x_2$.
De même, on ajoute $y_1 + y_2$ aux ordonnées, donc $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ a pour coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 - La relation de Chasles

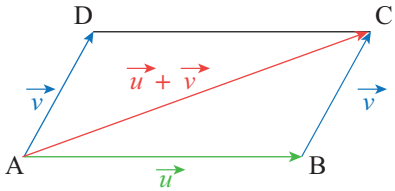
Si $A(x_A\ ;\ y_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B)$, et $C(x_C\ ;\ y_C)$ sont trois points du plan, il suffit de calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour constater :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

1.3.2 - La règle du parallélogramme

Pour construire la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a deux méthodes.

- On applique la relation de Chasles en trouvant des points A, B, C, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
- On choisit A, B et D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ (deux représentants de même origine A). On construit le parallélogramme $ABCD$. Dans ce parallélogramme, on constate $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Alors la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ permet de justifier : $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



Cette relation s'appelle la *règle du parallélogramme*.

1.4 Norme et distance

Dans un repère orthonormé, la longueur du segment $[AB]$ (ou distance entre les points A et B) est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

(C'est une conséquence du théorème de Pythagore.)

Dans cette formule, on reconnaît les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Généralisons : si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{X}{Y}$, la norme du vecteur $\vec{u}$ est, par définition :

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

En particulier, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $\| \overrightarrow{AB} \| = AB$: la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la distance entre A et B (c'est donc la distance parcourue par chaque point lors d'une translation).

1.5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Soient k un réel et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On note $k \cdot \vec{u}$ le vecteur de coordonnées : $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. C'est le produit de $\vec{u}$ par k. On peut le noter avec ou sans point de multiplication.

En particulier, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ est le vecteur *opposé* de $\vec{u}$, il a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$.

1.6 Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Propriété 1 : caractérisation vectorielle du milieu

M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, ou encore si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Si M est le milieu de $[AB]$, on a donc : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. En écrivant les coordonnées des vecteurs, on obtient les égalités : $x_M - x_A = x_B - x_M$ et $y_M - y_A = y_B - y_M$, donc

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Remarque : si un point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors les droites (AM) et (MB) ont la même direction (c'est-à-dire qu'elles sont parallèles), et donc sont confondues, puisqu'elles ont un point commun. Or $AM = MB$, donc M est nécessairement le milieu de $[AB]$.

COURS

1.7 Base orthonormée, repère orthonormé

Deux vecteurs $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ forment une base orthonormée du plan lorsque ces deux vecteurs sont de norme 1 et de directions perpendiculaires.

Si on les choisit de même direction et même sens que les axes de coordonnées, alors $\vec{\imath}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

On vérifie sans peine que tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ s'écrit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Si O est l'origine du repère (intersection des axes), on dit que $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé du plan.

1.8 Décomposition d'un vecteur

Plus généralement, on admet la propriété suivante.

Propriété 2

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, où a et b sont deux réels.

Exemple : si $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. L'unicité permet d'*identifier les coefficients* : si $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} = a'\overrightarrow{AB} + b'\overrightarrow{AD}$, alors $a = a'$ et $b = b'$.

2 Vecteurs et alignement

2.1 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils ont la même direction (ils sont « parallèles »). Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

À RETENIR : (Critère pratique)

Soient $\vec{u}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$.

$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si et seulement si un des deux est le vecteur nul ou si on peut trouver un coefficient de proportionnalité k tel que $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_2 = kx_1 \\ y_2 = ky_1 \end{cases}$$

Exemple : si $\vec{u}_1\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, dites directement que $\vec{u}_1 = 3\vec{u}_2$, ce qui montre que les deux vecteurs sont colinéaires.

2.2 Déterminant de deux vecteurs

Si $\vec{u}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$, leur déterminant est le nombre défini par :

$$\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = x_1y_2 - y_1x_2.$$

Remarque : le déterminant n'est pas symétrique :

$$\det(\vec{u}_2,\vec{u}_1) = x_2y_1 - y_2x_1 = -(x_1y_2 - y_1x_2) = -\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2).$$

En fait, ce n'est pas grave car nous l'utilisons seulement pour vérifier s'il égale ou non 0.

Propriété 3

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Démonstration.

Soient $\vec{u}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$.

- Supposons $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ colinéaires.
  Si $\vec{u}_1 = \vec{0}$, alors $\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = 0 \times y_2 - 0 \times x_2 = 0$.
  Sinon, il existe un réel k tel que $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$, et :
  $$\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = x_1 \times ky_1 - y_1 \times kx_1 = 0.$$
- Réciproquement, supposons $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$.
  Si $\vec{u}_1 = \vec{0}$, les vecteurs sont colinéaires. Sinon, $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$.
  - Si $x_1 \neq 0$, posons $k = \dfrac{x_2}{x_1}$: alors $x_2 = kx_1$ et, comme $x_1y_2 = y_1x_2$, $y_2 = \dfrac{y_1x_2}{x_1} = ky_1$.
  - Si $x_1 = 0$, alors $y_1 \neq 0$; posons $k = \dfrac{y_2}{y_1}$: alors $y_2 = ky_1$ et l'égalité $0 = x_1y_2 = y_1x_2$ donne $x_2 = 0 = kx_1$.

  Dans les deux cas, $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$: les vecteurs sont colinéaires, et leurs coordonnées sont proportionnelles.

Avec les vecteurs de l'exemple précédent, on pouvait aussi calculer $\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = 3 \times 2 - 6 \times 1 = 0$, ce qui confirme que les deux vecteurs étaient colinéaires.

COURS

2.3 Montrer que trois points sont alignés

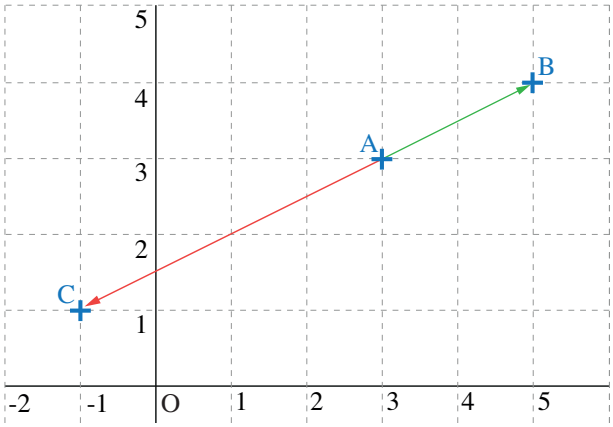
Rappel : « A, B et C sont alignés » signifie qu'ils sont situés sur la même droite, ou encore que les droites (AB) et (AC) sont confondues.

Comme elles ont un point commun, ceci revient à dire qu'elles ont la même direction :

Propriété 4

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple : $A(3\,;3)$; $B(5\,;4)$; $C(-1\,;1)$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$.



On constate $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ (ou $\text{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 2\times(-2) - 1\times(-4) = 0$), donc A, B et C sont alignés.

Remarque : il suffit de former, avec les trois points, deux vecteurs ayant un point commun. On peut remplacer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par :

- $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, etc.

2.4 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 2

Un vecteur *non nul* est un vecteur directeur de la droite D si et seulement si sa direction est celle de D (le vecteur est « parallèle » à la droite).

On dit que c'est un vecteur *directeur* car il indique sa *direction*.

Exemple : si le plan est rapporté au repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, alors $\vec{\imath}$ est un vecteur directeur de l'axe des abscisses, $\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées.

Remarques

- $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).
- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, qui sont tous colinéaires.
- Si A est un point de la droite D, $\vec{u}$ un vecteur directeur de D et B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors B est un point de D.
- En revanche, $\overrightarrow{EF}$ peut être un vecteur directeur de D sans que ni E, ni F ne soient sur D.

Solution de l'exercice type — **Lycée Lavoisier, Paris**

1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6+3\\-3-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+3\\\frac{9}{2}-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs sont bien colinéaires (on a $\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$), donc les trois points sont alignés.

2 $COBD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BD}$. Comme O est l'origine du repère, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sont, par définition, celles de C :

$$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}.$$

Notons provisoirement $(x_D\,;\,y_D)$ les coordonnées de D. Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D+6\\y_D+3\end{pmatrix}.$$

Il suffit de résoudre l'équation :

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OC}\iff\begin{cases}x_D+6=\frac{3}{2}\\y_D+3=\frac{9}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}x_D=-\frac{9}{2}\\y_D=\frac{3}{2}\end{cases}$$

D'où : $D\left(-\frac{9}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

3 Le centre du parallélogramme est le milieu commun des diagonales $[BC]$ et $[OD]$. Comme $O(0\,;\,0)$, il est préférable d'utiliser le segment $[OD]$, il vient facilement :

$$M\left(-\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right).$$

Voir énoncé page 207

INTERROS

1 QCM Relation de Chasles

5 min

Corrigé p. 224

Parmi les propositions faites une seule est correcte. Laquelle ?

Soient A, B et C trois points du plan.

1 **a** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

c $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

2 **a** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

b $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

c $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

3 **a** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

c $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

2 QCM Test de connaissances générales

10 min

Corrigé p. 224

Parmi les propositions aux questions suivantes, une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

1 Quels que soient les points A, B et C :

a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ **b** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

c $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ **d** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AC}$

2 Si $2\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ alors :

a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ **b** $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$

c $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ **d** $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

3 $ABCD$ est un parallélogramme. Alors :

a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **b** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

c $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ **d** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

3 V/F Coordonnées des vecteurs

5 min — Corrigé p. 224

Dans le repère orthonormé (O,I,J), on donne $A(3\,;\,2)$ et $B(5\,;\,1)$.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

a $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

c $AB = 2^2 + 1^2 = 5$

d Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(4\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

Géométrie non analytique

4 Construction d'un point ★

5 min — Corrigé p. 224

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Soit ABC un triangle.

Construire le point I tel que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BA}$.

5 Transformations ★

5 min — Corrigé p. 225

Lycée Colbert, Paris

$ABCD$ étant un parallélogramme de centre O, I et J milieux de $[OD]$ et $[OB]$, comparer IC et JA.

6 Que de vecteurs ! ★

5 min — Corrigé p. 226

Lycée Fénelon, Paris

On considère la figure ci-contre.

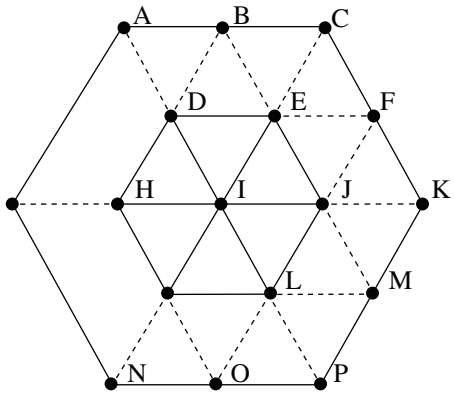
Compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{DE} = \ldots \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{H\ldots}$

$\overrightarrow{NK} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} = \ldots$

$\overrightarrow{JB} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{L\ldots}$



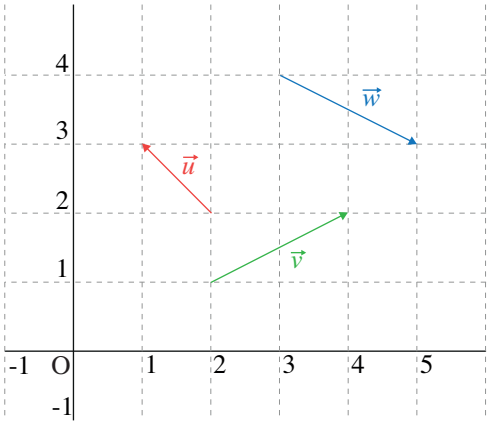
INTERROS

7 Somme de vecteurs

★ 10 min Corrigé p. 226

Lycée Maurice Genevoix, Montrouge

On considère la figure suivante.



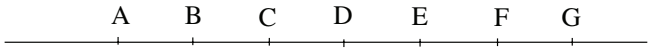
1. Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$?
2. Placer le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
   Quelles sont les coordonnées de A ?

8 Calcul vectoriel

★ 15 min Corrigé p. 226

Lycée Eugène Delacroix, Maisons-Alfort

Sur la figure suivante, les points sont équidistants.



Compléter les égalités par des nombres réels :

1. $\overrightarrow{BD} = \ldots \overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{CD} = \ldots \overrightarrow{BF}$
3. $\overrightarrow{FC} = \ldots \overrightarrow{DE}$
4. $\overrightarrow{EC} = \ldots \overrightarrow{AG}$
5. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AB}$
6. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BF} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \ldots \overrightarrow{BD}$

9 Relation de Chasles

★ 15 min Corrigé p. 227

Lycée Fénelon, Paris

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et H sont tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}.$$

1 Recopier et compléter :

$$\overrightarrow{BE} = \ldots + \overrightarrow{AE} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BH} = \ldots + \overrightarrow{CH}.$$

2 Exprimer $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3 Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires. Conclure.

10 Alignement de points

★★ — 10 min — Corrigé p. 227

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

Soit G le centre de gravité du triangle ACD.

Soit E le point tel que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$.

Soit A' le milieu de $[CD]$.

1 Faire une figure.

2 Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3 Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

4 Montrer que les points A, G et E sont alignés.

11 Alignement de points

★★ — 10 min — Corrigé p. 228

Lycée Fénelon, Paris

ABC est un triangle quelconque. Soit D le point défini par :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

Montrer que $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BC}$ et conclure sur l'alignement de trois points.

12 Alignement de points

★★ — 15 min — Corrigé p. 229

Lycée Jacques Decour, Paris

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient E et F deux points définis par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

1 Faire une figure.

2 Montrer que C, E et F sont alignés.

INTERROS

13 Parallélisme

★★★ 15 min Corrigé p. 229

Lycée Jacques Decour, Paris

ABC est un triangle non aplati.

Soit O un point du plan. Les points I et P sont tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Montrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles.

14 Exercice de recherche

★★★ 15 min Corrigé p. 230

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

On considère un parallélogramme $ABCD$. On définit alors les points M et N par :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DN} = -x^2\overrightarrow{AB} + 2x\overrightarrow{AD},$$

où x est un nombre réel.

Existe-t-il au moins une valeur de x pour laquelle M et N sont confondus ?

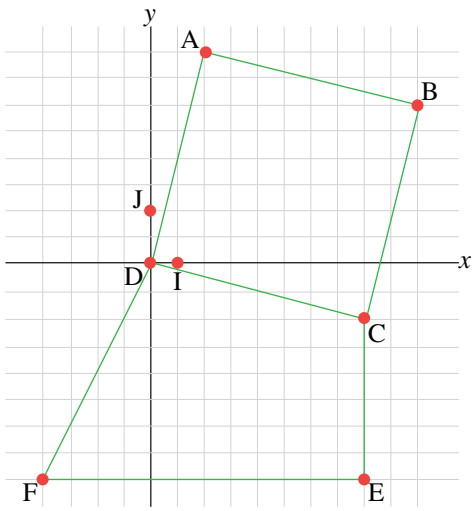
Géométrie analytique

15 Avec une symétrie

★ 10 min Corrigé p. 231

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

On considère la figure suivante, où $ABCD$ est un carré et $FDCE$ un quadrilatère.



1. Donner, dans le repère (D, I, J), les coordonnées des points de la figure.
2. Calculer les coordonnées du point K milieu de $[AE]$.
3. Donner les coordonnées du point symétrique de B par rapport à K.

16 Nature d'un triangle et cercle

★ — 15 min — Corrigé p. 232

Lycée Jacques Decour, Paris

Dans un repère (O, I, J) orthonormé du plan, on considère les points $A(-1\,;\,0)$, $B(3\,;\,-2)$ et $C(1\,;\,4)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du centre K du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC, puis son rayon r.
3. Le point $D(3\,;\,4)$ appartient-il à $\mathcal{C}$? Justifier votre réponse.

17 Avec un cercle

★ — 20 min — Corrigé p. 233

Lycée Champollion, Grenoble

Soient $A(2\,;\,1)$, $B(5\,;\,3)$, $C(7\,;\,0)$ et $E\left(\frac{9}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre E et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$.
   - **(a)** Vérifier que A, B et C sont des points de $\mathcal{C}$ et que E est le milieu de $[AC]$.
   - **(b)** Construire $\mathcal{C}$.
3. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$?

18 Alignement de points

★ — 20 min — Corrigé p. 233

Lycée Buffon, Paris

On se place dans un repère orthonormé et on donne : $A(-5\,;\,6)$, $B(-1\,;\,1)$, $C(7\,;\,-8)$ et $D(9\,;\,9)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ? (justifier)
3. Le triangle ABD est-il rectangle en B ? (justifier)

INTERROS

19 Parallélogramme et triangle

★★ 10 min Corrigé p. 234

Lycée Montesquieu, Le Mans

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On considère les points $A(-1\,;-1)$, $B(1\,;3)$ et $C(4\,;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D de manière à ce que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du centre de $ABCD$.
3. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

20 Récapitulatif

★★ 15 min Corrigé p. 235

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O,I,J).

On considère les points $A(1;5)$, $B(-2;-1)$, $C(7;-1)$ et $H(1;2)$.

1. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Soit $E(4;-7)$. Montrer que $ABEC$ est un parallélogramme.
3. Montrer que le triangle HCE est rectangle en C.

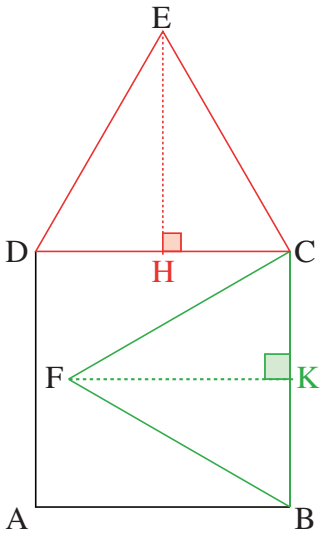
21 Alignement de points

★★ 20 min Corrigé p. 236

Lycée Fénelon, Paris

Soit $ABCD$ un carré. Les triangles DCE et BCF sont équilatéraux de hauteurs HE et KF.
On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, D, H et K.
2. Calculer les hauteurs HE et KF.
3. En déduire les coordonnées des points E et F.
4. Montrer que E, F et A sont alignés.



22 En s'aidant des vecteurs

★★ 20 min Corrigé p. 237

Lycée Fénelon, Paris

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On considère les points $A(3\,;5)$, $B(-6\,;2)$ et $C(-4\,;-4)$.

1. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. **(a)** Calculer AC et BD.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. **(a)** Calculer les coordonnées du point M milieu de $[AB]$.
   (b) Les droites (BC) et (OM) sont-elles parallèles ?
4. Soit N un point sur l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse de N pour que les droites (AO) et (MN) soient parallèles.

CORRIGÉS

1 QCM Relation de Chasles

Énoncé p. 216

1 Réponse b : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2 Réponse c : $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$.

3 Réponse a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

2 QCM Test de connaissances générales

Énoncé p. 216

1 Réponse b : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Les autres égalités sont fausses.

2 Réponses c et d. Pour les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$, il suffit de diviser par deux celles de $2\overrightarrow{BC}$ et ensuite, pour les coordonnées de $\overrightarrow{CB}$, on multiplie par -1.

3 Réponses b, c et d. En effet,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

(c'est une diagonale du parallélogramme).

De plus,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$$

d'après la relation de Chasles.

Enfin, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (c'est une caractéristique des parallélogrammes).

3 V/F Coordonnées des vecteurs

Énoncé p. 217

a *Faux*. Il faut calculer la *différence* des coordonnées (celles de B moins celles de A). Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b *Vrai*. En effet, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c *Faux* : $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

d *Vrai*. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

4 Construction d'un point

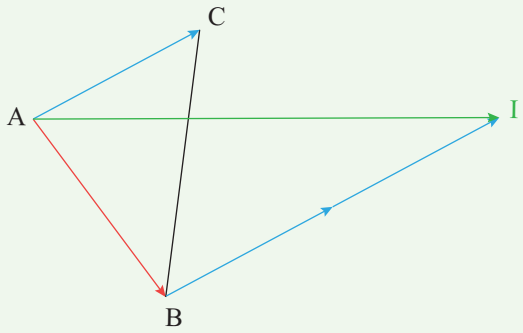
Énoncé p. 217

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Pour construire facilement le point I, il est préférable de simplifier l'égalité qui le définit.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BA}\\ &= 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

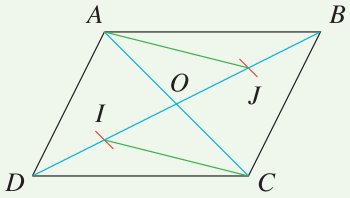
Ainsi, pour construire le point I, on part du point A, on se déplace jusqu'à B, puis on effectue deux fois de suite le même déplacement que pour passer du point A au point C.



5 Transformations

Énoncé p. 217

Lycée Colbert, Paris



J est le milieu de $[OB]$ donc $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

De même, on montre $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DO}$.

Or, O est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$, donc $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. On en déduit $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IC}$, et donc $AJ = IC$.

CORRIGÉS

6 Que de vecteurs !

Énoncé p. 217

Lycée Fénelon, Paris

$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{NK} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{HE}$ $\qquad$ $\overrightarrow{JB} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{LC}$

7 Somme de vecteurs

Énoncé p. 218

Lycée Maurice Genevoix, Montrouge

1 De l'origine à l'extrémité de $\vec{u}$, on effectue un déplacement de 1 unité vers la gauche (donc -1 en abscisse) et un déplacement de 1 unité vers le haut (donc $+1$ en ordonnée). On en déduit les coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

De même, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

2 On en déduit les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$: $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, et les coordonnées de $A(3\,;\,1)$.

8 Calcul vectoriel

Énoncé p. 218

Lycée Eugène Delacroix, Maisons-Alfort

Comme les points sont équidistants, on peut exprimer chaque vecteur en fonction, par exemple, de $\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de les comparer facilement.

1 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$).

2 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ car $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$.

3 $\overrightarrow{FC} = -3\overrightarrow{DE}$ car $\overrightarrow{FC} = -\overrightarrow{CF} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$.

4 $\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ car $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AB}$.

5 $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

6 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BF} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BD}$ car :

$$\overrightarrow{BF} = 4\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB}$$

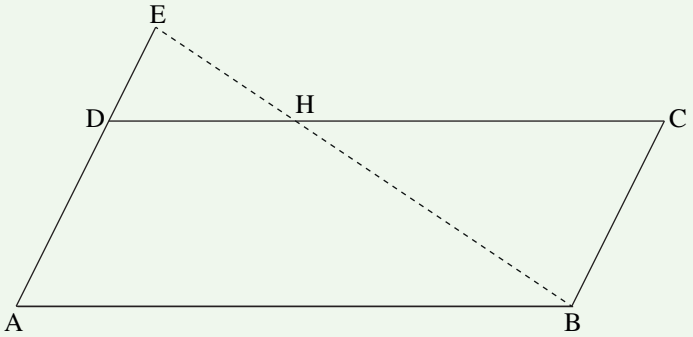
et

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}.$$

9 Relation de Chasles

Énoncé p. 218

Lycée Fénelon, Paris



1 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}$.

2 • $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

• $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}$

$= \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

(car $ABCD$ est un parallélogramme)

3 Nous avons exprimé $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction des mêmes vecteurs ; de plus, on voit le coefficient $-\frac{2}{3}$ devant $\overrightarrow{AB}$ dans l'expression de $\overrightarrow{BH}$, ce qui nous pousse à calculer $\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$:

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires. Ils ont un point en commun donc les points B, H et E sont alignés.

10 Alignement de points

Énoncé p. 219

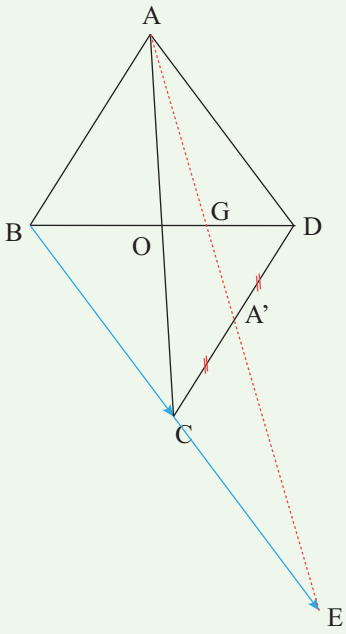
Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1 *Rappel :* le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes. La figure est alors celle représentée page suivante.

2 $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$

$\iff \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.

3 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA'}\right)$
$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)$
$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$



4 D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires. Ils ont de plus un point commun : A. Les points A, G et E sont donc alignés.

11 Alignement de points

Énoncé p. 219

Lycée Fénelon, Paris

MÉTHODE

Pour démontrer que les points B, C et D sont alignés, il suffit de démontrer que deux vecteurs quelconques formés par ces trois points sont colinéaires.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$
$= -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
$= 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
$= 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$
$= 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right)$
$= 2\overrightarrow{CB}.$

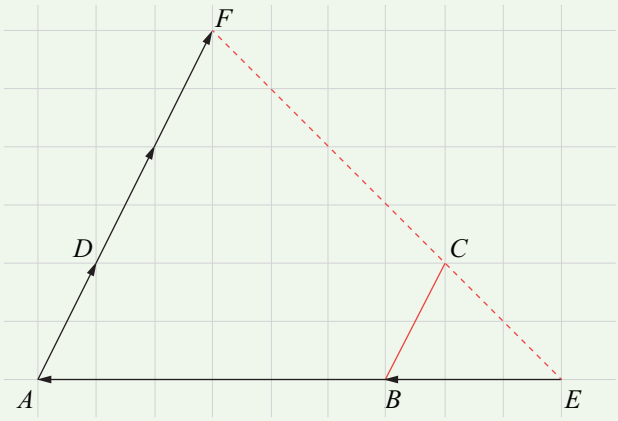
Ainsi, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires ; or, ils ont un point en commun donc les points B, C et D sont alignés.

12 Alignement de points

Énoncé p. 219

Lycée Jacques Decour, Paris

1 La figure est la suivante :



2 Exprimons en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ par exemple.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}\\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

On constate alors que $3\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, ce qui prouve que E, C et F sont alignés.

13 Parallélisme

Énoncé p. 220

Lycée Jacques Decour, Paris

Même si cela n'est pas demandé, nous pouvons appuyer notre raisonnement sur une figure (que nous vous proposons page suivante).

Pour démontrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles, nous allons montrer que $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires.

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{IB} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

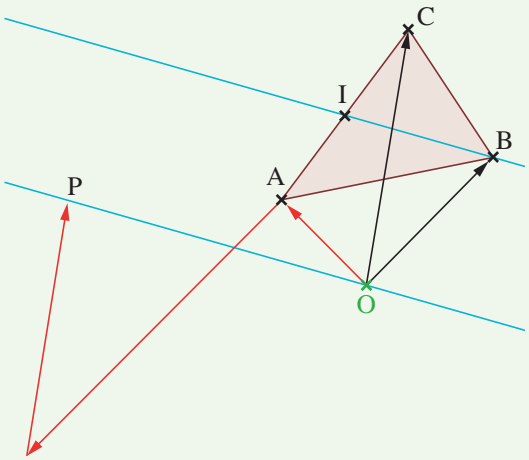
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\\ &= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ainsi, $-2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, donc $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires, ce qui signifie que (OP) et (IB) sont parallèles.

Remarque : on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC}\\ &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{BI}\\ &= 2\overrightarrow{BI}\end{aligned}$$

pour démontrer que $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires.



14 Exercice de recherche

Énoncé p. 220

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

- $\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= x\overrightarrow{AC}\\ &= x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\\ &= x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$
- $\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\\ &= \overrightarrow{AD} - x^2\overrightarrow{AB} + 2x\overrightarrow{AD}\\ &= -x^2\overrightarrow{AB} + (1+2x)\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$

M et N sont confondus si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} &\iff x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = -x^2\overrightarrow{AB} + (1+2x)\overrightarrow{AD}\\ &\iff \begin{cases} x = -x^2\\ x = 1+2x\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} -x^2 - x = 0\\ x = -1\end{cases}\end{aligned}$$

L'identification des coefficients est justifiée car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires ($ABCD$ est un parallélogramme) : la décomposition d'un vecteur selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est unique.

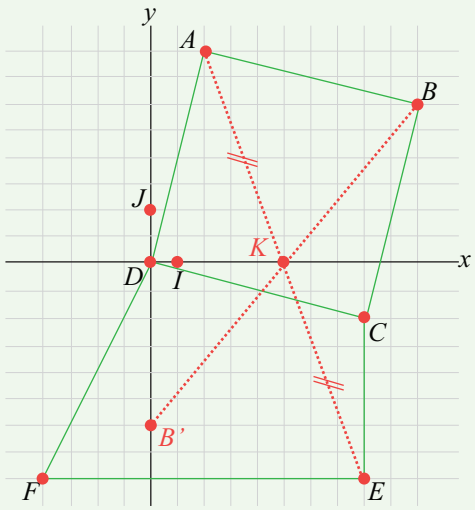
$x = -1$ est solution de la première équation car $-(-1)^2 - (-1) = -1 + 1 = 0$.

Il existe donc une valeur de x, et une seule, pour laquelle les deux points sont confondus : $x = -1$.

15 Avec une symétrie

Énoncé p. 220

Lycée Fernand Daguin, Mérignac



1 Attention : l'unité en abscisses (1 carreau) n'est pas la même qu'en ordonnées (2 carreaux).

On a alors : $A(2\,;4)$, $B(10\,;3)$, $C(8\,;-1)$, $D(0\,;0)$, $E(8\,;-4)$ et $F(-4\,;-4)$.

2 $K\left(\dfrac{x_A + x_E}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_E}{2}\right)$ soit $K(5\,;0)$.

3 Notons $B'(x\,;y)$ le symétrique de B par rapport à K. Alors, K est le milieu de $[BB']$ et donc :

$$\begin{cases} 5 = \dfrac{10 + x}{2} \\ 0 = \dfrac{3 + y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 10 = 10 + x \\ 0 = 3 + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ainsi, $B'(0\,;-3)$.

CORRIGÉS

16 Nature d'un triangle et cercle

Énoncé p. 221

Lycée Jacques Decour, Paris

1 **MÉTHODE**

Quand on nous demande la nature d'un triangle, il faut penser à : « rectangle », « isocèle » et « équilatéral ». Connaître *la mesure des trois côtés*, ou leurs carrés, est donc suffisant.

- $AB^2 = \big(3-(-1)\big)^2 + (-2-0)^2$
  $= 4^2 + (-2)^2$
  $= 20.$
- $AC^2 = \big(1-(-1)\big)^2 + (4-0)^2$
  $= 2^2 + 4^2$
  $= 20.$
- $BC^2 = (1-3)^2 + \big(4-(-2)\big)^2$
  $= (-2)^2 + 6^2$
  $= 40.$

On constate donc que :

- $AB^2 = AC^2$, donc $AB = AC$;
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ainsi, ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

2 Nous savons que le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse. Ainsi, K est le milieu de $[BC]$; donc :

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Donc $K(2\,;\,1)$.

Le rayon de $\mathcal{C}$ est la moitié de BC donc :

$$r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2}.$$

Remarque : on peut aller plus loin dans la simplification de cette dernière fraction en remarquant que $40 = 2^2 \times 10$ et donc que :

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}.$$

Ainsi, $r = \sqrt{10}$.

3 Afin de voir si D appartient à $\mathcal{C}$, nous pouvons calculer par exemple DK et vérifier si le résultat est égal à r, ou bien (ce qui est plus simple), vérifier que $DK^2 = r^2 = 10$.

$$DK^2 = (2-3)^2 + (1-4)^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = 10.$$

D appartient donc à $\mathcal{C}$.

17 Avec un cercle

Énoncé p. 221

Lycée Champollion, Grenoble

1 Nous allons calculer les longueurs des trois côtés de ABC. Utilisons la formule de calcul de la distance :

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$
$$AC = \sqrt{(7-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5^2 + 1} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}.$$
$$BC = \sqrt{(7-5)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Il devient clair que ABC est isocèle en B. De plus, on a :

$$AB^2 + BC^2 = 13 + 13 = 26 = AC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

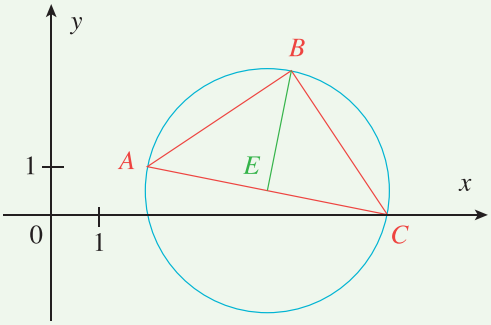
2 **(a)** En s'y prenant par le bon bout, on évite quelques calculs. En effet, il n'est pas difficile de constater que E est bien le milieu de $[AC]$ car $\frac{9}{2} = \frac{2+7}{2}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1+0}{2}$.

Or, le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est aussi le centre de son cercle circonscrit, donc $EA = EB = EC$. Puisque $AC = \sqrt{26}$, on a :

$$AE = EC = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Finalement, A, B et C sont des points de $\mathcal{C}$.

(b) $\mathcal{C}$ n'est autre que le cercle de centre E passant par A :



3 Comme ABC est isocèle et rectangle en B, on a nécessairement $\widehat{ACB} = 45°$.

18 Alignement de points

Énoncé p. 221

Lycée Buffon, Paris

1 On applique les formules :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1+5\\1-6\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}.$$

De même :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\-9\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}.$$

2 Si A, B et C étaient alignés, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ seraient colinéaires (ils dirigeraient la droite passant par A, B et C). Or,

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = 4\times(-9) - (-5)\times 8 = -36+40 = 4 \neq 0.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont donc pas proportionnelles, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, et donc A, B et C ne sont pas alignés.

3 On calcule les carrés des côtés :

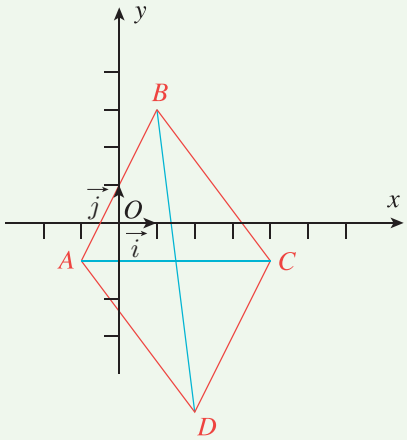
$$AB^2 = 4^2+5^2 = 16+25 = 41.$$
$$BD^2 = 10^2+8^2 = 100+64 = 164.$$
$$AD^2 = 14^2+3^2 = 196+9 = 205.$$

On constate $AD^2 = AB^2 + BD^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en B.

19 Parallélogramme et triangle

Énoncé p. 222

Lycée Montesquieu, Le Mans



1 Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ et $C(4\,;-1)$, les coordonnées de D sont $4-2$ et $-1-4$, donc $D(2\,;-5)$.

2 Le centre du parallélogramme est le milieu des diagonales. En considérant la diagonale $[AC]$, le centre a pour coordonnées :

$$\left(\frac{-1+4}{2}\,;\,\frac{-1-1}{2}\right) \text{ donc } \left(\frac{3}{2}\,;-1\right).$$

3 Calculons les longueurs des côtés de ABC :

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$
$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$$
$$AC^2 = 5^2 + 0 = 25.$$

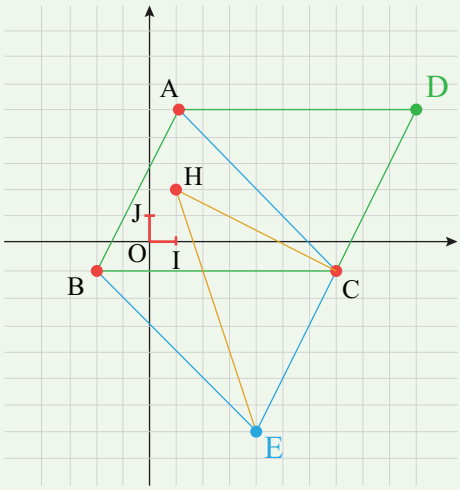
$BC = AC$ donc ABC est isocèle en C. Il n'est pas rectangle, car aucune des égalités $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AB^2 + AC^2 = BC^2$ et $BC^2 + AC^2 = AB^2$ n'est vérifiée ($45 \neq 25$, $45 \neq 25$, $50 \neq 20$).

20 Récapitulatif

Énoncé p. 222

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Avant tout, même si ce n'est pas demandé, faisons une figure complète :



1 On souhaite que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Dans ce cas, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 5-(-1) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 7 \\ y_D - (-1) \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 3 = x_D - 7 \\ 6 = y_D + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_D = 3 + 7 = 10 \\ y_D = 6 - 1 = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $D(10\,;\,5)$.

2 $E(4;-7)$ donc $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}7-4\\-1-(-7)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BA}$; $ABEC$ est donc un parallélogramme.

3 **MÉTHODE**

Pour déterminer la nature d'un triangle en géométrie analytique, il est très souvent recommandé de calculer le carré de la longueur des côtés.

Calculons donc :

- $HC^2=(x_C-x_H)^2+(y_C-y_H)^2=(7-1)^2+(-1-2)^2=36+9=45$.
- $CE^2=(4-7)^2+(-7-(-1))^2=9+36=45$.
- $HE^2=(4-1)^2+(-7-2)^2=9+81=90$.

On peut alors remarquer que :

- $HC^2=CE^2$, donc $HC=CE$, ce qui signifie que HCE est isocèle en C ;
- $HE^2=HC^2+CE^2$, ce qui signifie que HCE est rectangle en C (d'après la réciproque du théorème de Pythagore).

Ainsi, HCE est rectangle isocèle en C.

21 Alignement de points

Énoncé p. 222

Lycée Fénelon, Paris

1 $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$, $D(0\,;1)$, $H\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$ et $K\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$.

2 Dans le triangle équilatéral DCE, (EH) est une hauteur donc le triangle EHC est rectangle en H.

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$EC^2=HC^2+HE^2$$
$$1^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+HE^2 \quad \text{car } EC=DC=1$$
$$1=\frac{1}{4}+HE^2$$

donc $EH^2=1-\frac{1}{4}$

$$EH=\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$EH=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les triangles BCF et DCE étant identiques, $KF=HE=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 On déduit de la question précédente que :

$$F\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{1}{2}\,;\,1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

4 $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

Or,

$$\det(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}) = \underbrace{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\text{identité remarquable : } (a-b)(a+b)} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1-\frac{3}{4}-\frac{1}{4} = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, ce qui signifie que les points A, F et E sont alignés.

22 En s'aidant des vecteurs

Énoncé p. 223

Lycée Fénelon, Paris

1 Notons $D(x\,;\,y)$. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} &\iff \begin{pmatrix}-6-3\\ 2-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-x\\ -4-y\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}-9=-4-x\\ -3=-4-y\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=-4+9=5\\ y=-4+3=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $D(5\,;-1)$.

2 **(a)** $AC^2=(-4-3)^2+(-4-5)^2=49+81$; $BD^2=(5+6)^2+(-1-2)^2=121+9$

$AC=\sqrt{130}$. $BD=\sqrt{130}$.

(b) On constate alors que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ont la même longueur, donc $ABCD$ est un rectangle.

De plus, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\ -3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\ -6\end{pmatrix}$, donc $AB=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}$ et $AD=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$: deux côtés consécutifs n'ont pas la même longueur, donc $ABCD$ n'est pas un carré.

3 **(a)** $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -\dfrac{3}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{7}{2}$. Donc $M\left(-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{7}{2}\right)$.

(b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$. Regardons s'ils sont colinéaires :

$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OM}) = 2 \times \frac{7}{2} - (-6) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 7 - 9 = -2 \neq 0.$$

Donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OM}$ ne sont pas colinéaires, ce qui montre que les droites (BC) et (OM) ne sont pas parallèles.

4 Notons $N(x\ ; 0)$ (car N est sur l'axe des abscisses, donc son ordonnée est nulle). (AO) et (MN) sont parallèles si et seulement si :

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x + \dfrac{3}{2} \\ 0 - \dfrac{7}{2} \end{pmatrix} \text{ colinéaires } \iff 3\left(0 - \frac{7}{2}\right) - 5\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\iff -\frac{21}{2} - 5x - \frac{15}{2} = 0$$

$$\iff -\frac{36}{2} - 5x = 0$$

$$\iff x = -\frac{18}{5}.$$

Chapitre 9

Équations de droites

Plan du chapitre

1. Équations de droites
2. Positions relatives : parallélisme, intersection

1 Équations de droites

Exercice type — Lycée Paul Valéry, Sète

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soient trois points $A(-1\ ;-1)$, $B(-3\ ;0)$ et $C(3\ ;2)$.
Donner une équation de (AB), puis de la parallèle à (AB) passant par C.

Voir corrigé page 245

1.1 Qu'est-ce qu'une équation de droite ?

Au collège, vous avez rencontré des fonctions affines, de la forme $f(x) = mx + p$.

Si on se donne un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on peut la représenter graphiquement par une droite D, qui contient tous les points de coordonnées $(x\,;\,y)$ où $y = mx + p$.

Prenons l'exemple de $f(x) = -3x + 2$. On calcule :

$$f(1) = -1,\ f(-3) = 11,\ f(2) = -4,$$

donc la droite D contient, entre autres, les points de coordonnées :

$$(1\,;\,-1),\ (-3\,;\,11),\ (2\,;\,-4).$$

Inversement, si $A(-1\,;\,5)$, alors $A \in D$ car $f(-1) = 5$; si $B(2\,;\,5)$, alors $B \notin D$ car $f(2) \neq 5$.

Pour tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$:

- si $y = -3x + 2$, alors M est un point de D ;
- si $y \neq -3x + 2$, alors M n'est pas un point de D.

Autrement dit, les coordonnées des points de D sont les solutions de *l'équation à deux inconnues* $y = -3x + 2$: la droite D est *l'ensemble des points* $M(x\,;\,y)$ tels que $y = -3x + 2$.

On dit donc que $y = -3x + 2$ est une *équation réduite de la droite* D.

COURS

Pourquoi « réduite » ? Parce que sous sa forme la plus générale (appelée « équation cartésienne »), une équation de droite s'écrit $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas tous les deux nuls.

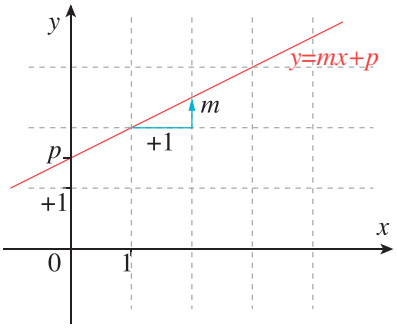
Si $b \neq 0$, cette équation se ramène à la forme réduite : $y = mx + p$, avec $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$.

Si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation se ramène à $x = -\dfrac{c}{a}$. La droite D ne représente plus une fonction affine, mais contient tous les points qui ont l'abscisse $-\dfrac{c}{a}$: il s'agit donc d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (dite droite « verticale »).

Si A et B sont deux points distincts sur la droite D, la *direction* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ne dépend pas des points A et B. On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur *directeur* de D. La droite D possède une infinité de vecteurs directeurs, non nuls, tous colinéaires, qui caractérisent la *direction* de D : deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

1.2 Équation réduite $y = mx + p$

On considère une droite D qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy). Elle admet une équation réduite $y = mx + p$.



p s'appelle *l'ordonnée à l'origine*, car le point de coordonnées $(0\ ;\ p)$ appartient à la droite D. p est l'ordonnée du point de D situé à la verticale de l'origine O (d'où son nom).

m s'appelle la *pente* (ou *coefficient directeur*) de la droite. Ce coefficient caractérise l'inclinaison de D par rapport à (Ox), et deux droites non parallèles à (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente. Si $m = 0$, la droite D est parallèle à (Ox). Si $m > 0$, la fonction affine $x \mapsto mx + p$ est croissante, c'est-à-dire que les ordonnées augmentent quand les abscisses augmentent. Si $m < 0$, c'est l'inverse. Plus le nombre m est éloigné de 0, plus la direction de la droite D se rapproche de la verticale.

Pour mieux le comprendre, considérons deux points distincts $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sur D. Comme $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$, on a par soustraction : $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$.

Si on choisit :

$$x_B = x_A + 1,$$

on obtient un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Propriété 1 : vecteur directeur d'une droite d'équation réduite

Si une droite a pour équation réduite $y = mx + p$, alors le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

C'est ce qu'on appelle la méthode « des petits pas », ou de « l'escalier » : à partir d'un point A de D, on ajoute $+1$ à l'abscisse, il faut ajouter $+m$ à l'ordonnée pour obtenir un autre point de la droite. On constate que, plus m est éloigné de 0, plus le vecteur directeur est proche de la direction de (Oy).

Pour *tracer* une droite d'équation réduite $y = mx + p$, on place le point $(0 ; p)$ sur l'axe des ordonnées, puis on applique la méthode des petits pas pour obtenir un deuxième point.

1.3 Équation cartésienne d'une droite $ax + by + c = 0$

Supposons que l'équation de la droite D soit donnée sous la forme générale $ax + by + c = 0$. Pour trouver des points sur D (par exemple pour la *tracer*), si $b \neq 0$, on fixe arbitrairement x ou y et on résout l'équation à une inconnue obtenue.

Par exemple, considérons la droite D d'équation $2x - 3y - 4 = 0$. Pour $y = 0$, on a : $2x - 4 = 0$, donc $x = 2$. Pour $x = 3$, on a : $-3y + 2 = 0$, donc $y = \dfrac{2}{3}$. La droite D passe donc par les points de coordonnées $(2; 0)$ et $\left(3; \dfrac{2}{3}\right)$.

Propriété 2 : forme générale d'une équation de droite

Dans un repère orthonormé, toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec a et b non tous les deux nuls, et le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Réciproquement, si a et b ne sont pas tous les deux nuls, l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite, de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

COURS

Exemple : si

$$D \ : \ 2x - 3y - 4 = 0,$$

alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

On retrouve ce qui a été dit au début : si $b \neq 0$, on est ramené à une équation réduite $y = mx + p$ avec $m = -\dfrac{a}{b}$, et on connaît le vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

Remarque : le vecteur $-b\,\vec{v}$, qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\-bm\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ (puisque $-bm = a$), est le vecteur $\vec{u}$ de la propriété : les deux vecteurs directeurs sont bien colinéaires.

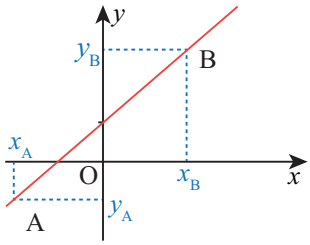
1.4 Pente d'une droite non verticale

1.4.1 - On connaît deux points

Propriété 3 : pente à partir de deux points

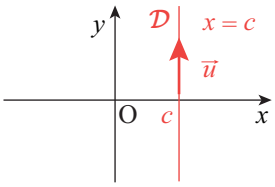
Si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ sont deux points d'une droite, avec $x_A \neq x_B$, alors la pente de cette droite est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

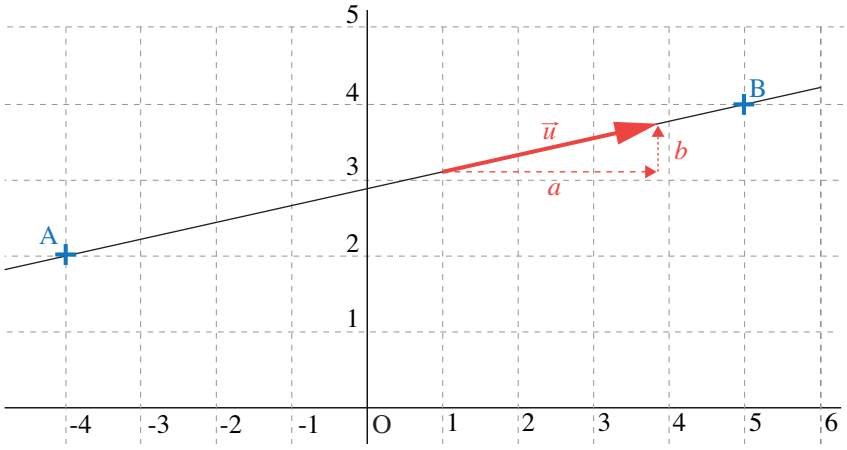


1.4.2 - On connaît un vecteur directeur

- Si le vecteur directeur est de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\\beta\end{pmatrix}$, avec $\beta \neq 0$, alors la droite est verticale et n'a donc pas de pente (parfois, on dit qu'elle a une pente « infinie »).



- Si le vecteur directeur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq 0$, alors on remarque que le vecteur : $\dfrac{1}{\alpha}\vec{u}$, qui a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}1\\\dfrac{\beta}{\alpha}\end{pmatrix}$, est aussi un vecteur directeur de la droite, dont les coordonnées sont de la forme $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$, donc $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$.



1.5 Comment déterminer l'équation d'une droite ?

1.5.1 - Méthode par identification

Pour plus de clarté, nous allons traiter quelques exemples.

1.5.1.1 - Cas d'une droite passant par un point donné et dirigée par un vecteur non nul

Soit $A(2;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet une équation $ax+by+c=0$, dont un vecteur directeur est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Ce vecteur est colinéaire à $\vec{u}$; quitte à multiplier l'équation par un réel non nul, on peut donc choisir $-b=1$ et $a=2$.

Comme A est sur la droite, on a $2a+3b+c=0$. Ces renseignements permettent de calculer $a=2$, $b=-1$ et $c=-1$, d'où l'équation $2x-y-1=0$.

1.5.1.2 - Cas d'une droite passant par deux points distincts donnés

Soient $A(1;1)$ et $B(-2;3)$.

Les deux points n'ont pas la même abscisse, la droite (AB) n'est donc pas verticale et elle admet une équation réduite $y=mx+p$. Comme les coordonnées de A et B sont solutions, on obtient : $1=m+p$ et $3=-2m+p$. En soustrayant, il vient $-2=3m$, donc $m=-\dfrac{2}{3}$ et $p=\dfrac{5}{3}$.

On peut aussi calculer directement la pente : $m=\dfrac{3-1}{-2-1}=-\dfrac{2}{3}$, puis obtenir p grâce aux coordonnées de A : $1=-\dfrac{2}{3}+p$, donc $p=\dfrac{5}{3}$.

COURS

La droite (AB) a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. On peut multiplier par 3 pour obtenir une équation à coefficients entiers : $2x + 3y - 5 = 0$.

Propriété 4 : unicité de l'équation réduite

Une droite non parallèle à (Oy) a une seule équation réduite. En revanche, elle a une infinité d'équations cartésiennes, toutes proportionnelles (propriété admise).

En cherchant l'équation réduite, on obtient un problème plus simple avec seulement deux coefficients à trouver.

1.5.2 - Méthode du déterminant

1.5.2.1 - Cas d'une droite passant par un point donné et dirigée par un vecteur non nul

Soit $A(2; 3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

On considère un point $M(x; y)$. Ce point est sur la droite D si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

On détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$.

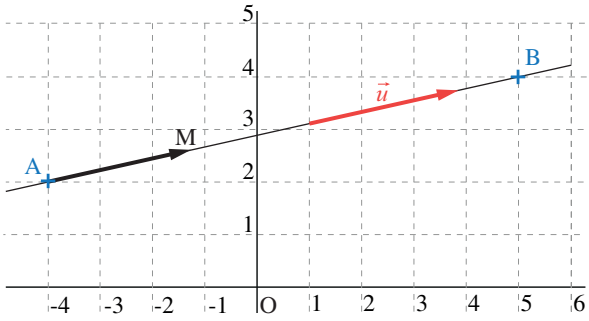
On sait que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est égal à zéro. On calcule donc le déterminant de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$:

$$\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = (x-2)\times 2 - (y-3)\times 1.$$

On retrouve, après les simplifications, l'équation de D : $2x - y - 1 = 0$.

1.5.2.2 - Cas d'une droite passant par deux points distincts donnés

Soit $A(-4; 2)$ et $B(5; 4)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).



On est ramené au cas précédent.

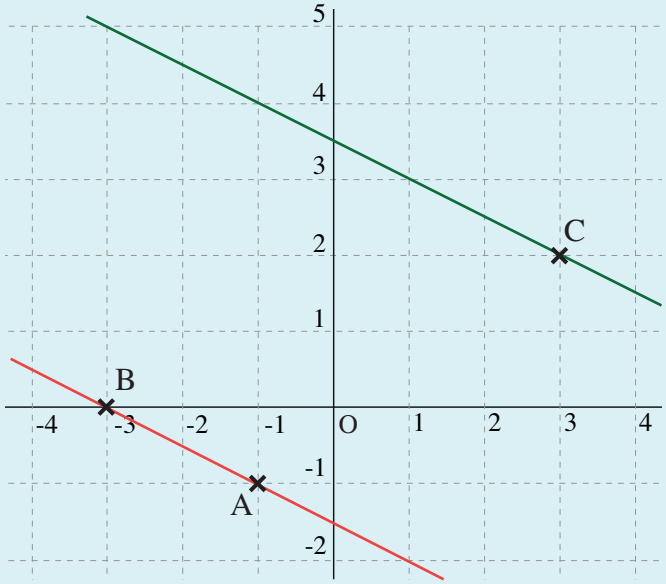
Si $M(x; y)$, alors M est un point de (AB) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0$, c'est-à-dire : $2(x+4) - 9(y-2) = 0$.

Donc l'équation de (AB) est : $2x - 9y + 26 = 0$.

Solution de l'exercice type

Lycée Paul Valéry, Sète

On a d'abord besoin des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.



Nous allons utiliser les deux méthodes, assez différentes dans l'esprit.

1 *Identification :* les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ donnent directement la pente (ou coefficient directeur) de (AB) : $\dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$.

L'équation réduite de (AB) s'écrit $y = -\dfrac{1}{2}x + p$. Comme $A(-1\,;-1)$ est un point de (AB), on a : $-1 = \dfrac{1}{2} + p$, d'où $p = -\dfrac{3}{2}$.

Conclusion : (AB) a pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

2 *Vecteurs colinéaires :* notons D la droite parallèle à (AB) et passant par C. Elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Le point $M(x\,;y)$ appartient à D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On écrit leurs coordonnées :

$$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

En exprimant que les deux vecteurs sont colinéaires, on a :

$$(x-3)\times 1 - (y-2)\times(-2) = 0,$$

ce qui donne $x + 2y - 7 = 0$ et donc, en isolant y :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Voir énoncé page 239

COURS

2 Positions relatives : parallélisme, intersection

On considère les droites :

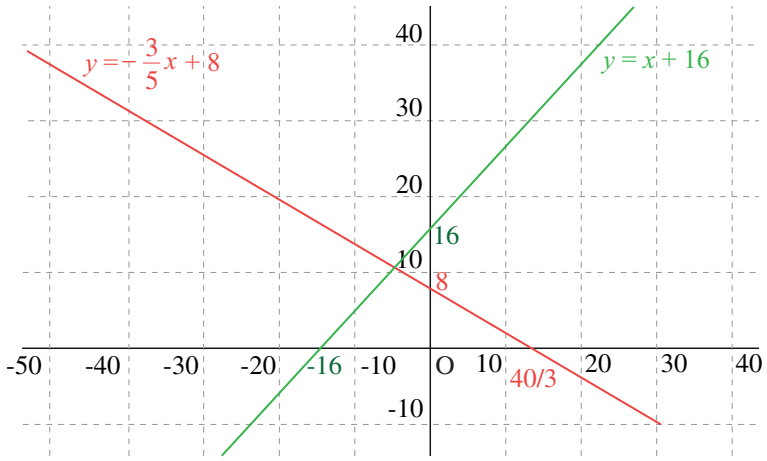
$$D_1 : x - y + 16 = 0$$
$$D_2 : 3x + 5y - 40 = 0$$

On veut étudier la position relative de ces droites c'est-à-dire savoir si elles sont parallèles ou non.

On sait trouver un vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour D_1, et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour D_2.

Or ces vecteurs ne sont pas colinéaires (parce que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ou parce que leur déterminant $1 \times 3 - 1 \times (-5) = 8$ n'est pas égal à 0).

Ces droites sont donc sécantes en un point.



Propriété 5 : parallèles ou sécantes

Deux droites sont *parallèles* (éventuellement confondues) si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Si aucune des deux n'est parallèle à l'axe des ordonnées, cela revient à dire qu'elles ont la même pente. Deux droites parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entre elles. Sinon, les droites sont *sécantes* (un seul point commun).

Propriété 6 : point d'intersection de deux droites sécantes

Deux droites sécantes d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ (avec $m \neq m'$) se coupent en un unique point, dont l'abscisse est la solution de l'équation $mx + p = m'x + p'$. On obtient ensuite l'ordonnée en remplaçant dans l'une des deux équations.

Exemple : reprenons les droites D_1 et D_2.
Leurs équations réduites sont $y = x + 16$ et $y = -\frac{3}{5}x + 8$. L'abscisse du point d'intersection vérifie :

$$x + 16 = -\frac{3}{5}x + 8 \iff \frac{8}{5}x = -8 \iff x = -5,$$

et son ordonnée vaut $-5 + 16 = 11$. Les droites D_1 et D_2 se coupent au point de coordonnées $(-5\,;\,11)$.

Vérification : $3 \times (-5) + 5 \times 11 - 40 = 0$.

2.1 Alignement de trois points

Propriété 7 : alignement

Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemple : soient $A(1\,;\,2)$, $B(3\,;\,5)$ et $C(7\,;\,11)$.
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$, donc $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 0$: les points A, B, C sont alignés.
On peut aussi déterminer une équation de (AB), puis vérifier si les coordonnées de C la vérifient.

INTERROS

1 V/F Équations de droites

5 min — Corrigé p. 252

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La droite D d'équation $y = 3x + 2$ passe par $A(1\,;\,2)$.
2. Si $A(2\,;\,1)$ et $B(-1\,;\,2)$, alors (AB) a pour coefficient directeur -3.
3. Les droites $D : y = -2x - 3$ et $D' : y = 5x - 3$ sont parallèles.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $D : y = -3x + 6$.

Équations de droites

2 Équations de droites ★

5 min — Corrigé p. 252

Lycée François Ier, Le Havre

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit D la droite d'équation : $y = -3x + 1$.

Soient $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, et t la translation de vecteur $\vec{u}$.

Trouver une équation de l'image de D par t.

3 Équations de droites ★★

15 min — Corrigé p. 252

Lycée Carnot, Dijon

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On donne les points $A(1\,;\,0)$ et $B(4\,;\,2)$.

Écrire une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

4 Équations de droites ★

15 min — Corrigé p. 253

Lycée Lacordaire, Marseille

1. Dans un repère (O,I,J), déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de coefficient directeur -1 avec $A(2\,;\,3)$.
2. Donner une équation de Δ, la droite passant par $B(0\,;\,2)$ et parallèle à $\mathcal{D}$.
3. Construire $\mathcal{D}$ et Δ.

5 Équations de droites

★ — 15 min — Corrigé p. 254

Lycée Voltaire, Paris

On se place dans un repère orthonormé et on donne : $A(1\,;-1)$, $B(3\,;3)$ et $C(1\,;6)$.

1. Déterminer une équation de la droite (AB).
2. Déterminer une équation de la droite (d) qui passe par le point C et qui est parallèle à la droite (AB).

6 Équations de droites

★ — 20 min — Corrigé p. 254

Lycée Chaptal, Paris

Le plan étant rapporté à un repère (O,I,J), on considère les points $A(4\,;-1)$ et $B(3\,;-8)$.

1. Montrer que la droite (AB) a pour équation $y = 7x - 29$.
2. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par $C(0\,;\ -1)$ et parallèle à (AB).
3. Soient $E(3\,;-2)$ et $F(2\,;2)$. Déterminer une équation de la droite (EF).
4. Les droites $\mathcal{D}$ et (EF) sont-elles sécantes ? Justifier. Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection G.

7 Alignement de points

★ — 10 min — Corrigé p. 255

Exercice inédit

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;5)$, $C(7\,;11)$ et $D(5\,;9)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les points A, B et D sont-ils alignés ?
3. Retrouver ces résultats à l'aide d'une équation de la droite (AB).

8 Équations de droites

★★ — 15 min — Corrigé p. 256

Lycée du Parc, Lyon

Dans les deux cas suivants, déterminer une équation de la droite Δ, parallèle à (D) et passant par A.

1. $A(2\,;1)$. (D) a comme équation $y = -x + 2$.
2. $A(2\,;-3)$. $(D) = (BC)$, avec $B(-1\,;0)$ et $C(-1\,;3)$.

INTERROS

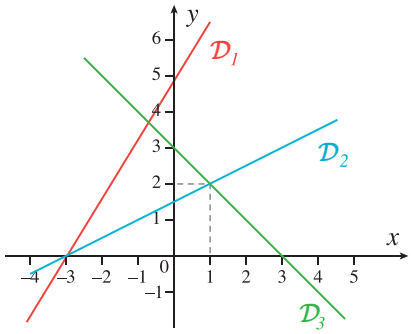
9 Équations de droites

★★ 15 min Corrigé p. 256

Lycée Hoche, Versailles

Retrouver, parmi les équations ci-contre, celles qui correspondent aux droites du dessin (lorsque cela est possible !).

1. $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
2. $y = \frac{1}{2}x - 2$
3. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
4. $y = 3x - 3$
5. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
6. $y = \frac{5}{3}x + 5$



Parallélisme et intersection de deux droites

10 Intersection de deux droites

★ 15 min Corrigé p. 257

Lycée Louis Vincent, Metz

On considère la droite d_1 d'équation réduite $y = -4x + 5$, et la droite d_2 parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $A(2\,;\,3)$.

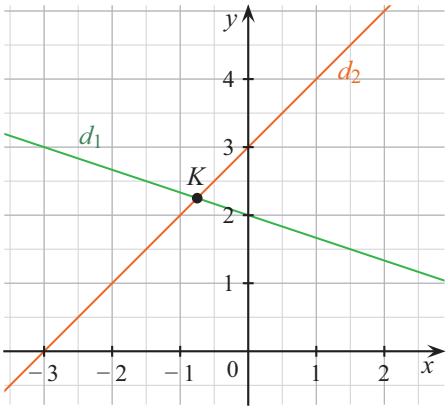
1. **(a)** Donner un vecteur directeur de la droite d_2.
   (b) Donner l'équation réduite de la droite d_2.
2. Justifier que d_1 et d_2 sont sécantes.
3. On note K le point d'intersection des droites d_1 et d_2, et $(x_K\,;\,y_K)$ ses coordonnées.
   (a) Expliquer pourquoi l'ordonnée de K est égale à 3.
   (b) Justifier que $-4x_K + 5 = 3$.
   (c) En déduire les coordonnées de K.

11 Intersection de deux droites

★★ 25 min Corrigé p. 258

Lycée Voltaire, Paris

On a représenté page suivante les droites d_1 et d_2, et on note K leur point d'intersection.



1 Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée des coordonnées de K.

2 **(a)** Justifier que $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1.

(b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.

3 **(a)** Montrer que l'équation réduite de d_1 est :

$$y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

(b) Déterminer l'équation réduite de d_2.

4 Déterminer les valeurs exactes des coordonnées de K.

CORRIGÉS

1 V/F Équations de droites

Énoncé p. 248

1. *Faux*. Si $x = 1$, $3x + 2 = 5 \neq 2$.
2. *Faux*. Le coefficient directeur de (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$.
3. *Faux*. Elles n'ont pas le même coefficient directeur.
4. *Vrai*. En effet, si D : $y = mx + p$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

2 Équations de droites

Énoncé p. 248

Lycée François Ier, Le Havre

Soient M et N deux points distincts de D, et M' et N' leurs images par t. Comme $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$, le quadrilatère $MM'N'N$ est un parallélogramme (éventuellement aplati), donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. L'image de D est donc une droite de même vecteur directeur que D : elle est parallèle à D et a la même pente -3. Une équation de l'image de D est donc de la forme :

$$y = -3x + p.$$

Prenons au hasard un point de D, par exemple le point de coordonnées $(1\ ;-2)$, que nous noterons M. L'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, est le point de coordonnées $(1+2\ ;-2+1)$, donc $(3\ ;-1)$.

L'image de D passe nécessairement par ce point, donc $-1 = -3 \times 3 + p$, ce qui donne : $p = 8$.

Une équation de l'image de la droite D par la translation t est donc :

$$y = -3x + 8.$$

3 Équations de droites

Énoncé p. 248

Lycée Carnot, Dijon

La difficulté de cet exercice est de trouver la propriété des médiatrices qu'il faut utiliser. On sait que tout point M de coordonnées $(x\ ;y)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement s'il est équidistant de A et B, c'est-à-dire : $AM = BM$.

Les distances étant positives, cela équivaut à $AM^2 = BM^2$.

En tenant compte de $A(1\ ;0)$ et $B(4\ ;2)$, et en développant à l'aide de l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, il vient :

$$\begin{aligned}
AM^2 = BM^2 &\iff (x-1)^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2\\
&\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4\\
&\iff -2x + 1 = -8x - 4y + 20\\
&\iff 4y = -6x + 19\\
&\iff y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{4} \ (\text{car } \frac{6}{4} = \frac{3}{2}).
\end{aligned}$$

Une équation de la médiatrice est donc :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{4}.$$

Vérification : le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2} ; 1\right)$, et :

$$-\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{19}{4} = -\frac{15}{4} + \frac{19}{4} = 1.$$

4 Équations de droites

Énoncé p. 248

Lycée Lacordaire, Marseille

1 $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur : -1. Notons $y = -x + p$ son équation réduite.

$\mathcal{D}$ passe par $A(2 ; 3)$, donc $3 = -2 + p$. On en déduit $p = 5$ et une équation de $\mathcal{D}$ est :

$$y = -x + 5.$$

2 Puisque Δ est parallèle à $\mathcal{D}$, elle a le même coefficient directeur, donc son équation réduite est du type :

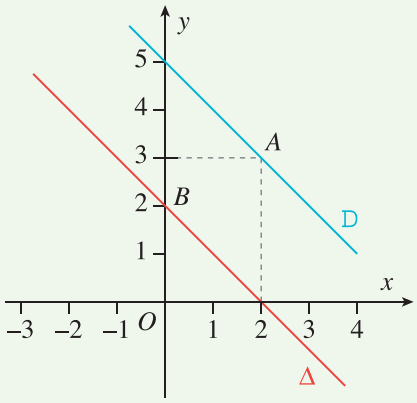
$$y = -x + p.$$

Δ passe par $B(0 ; 2)$, donc $2 = -0 + p$ et $p = 2$.

Une équation est donc :

$$y = -x + 2.$$

3



CORRIGÉS

5 Équations de droites

Énoncé p. 249

Lycée Voltaire, Paris

1 A et B n'ont pas la même abscisse, donc (AB) n'est pas verticale. On en déduit qu'elle admet une équation de la forme : $y = mx + p$.

Première méthode. On calcule directement le coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

L'équation réduite de (AB) est donc du type $y = 2x + p$. On substitue les coordonnées de A (par exemple) dans l'équation : $-1 = 2 \times 1 + p$, donc $p = -3$.

Autre méthode. En substituant les coordonnées de A et B à x et y dans l'équation, on obtient le système d'inconnues m et p :

$$\begin{cases} -1 = m + p \\ 3 = 3m + p \end{cases}$$

On tire de la première équation $m = -1 - p$. En substituant cette valeur dans la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} 3 = 3(-1-p) + p &\iff 3 = -3 - 3p + p \\ &\iff 6 = -2p \\ &\iff -3 = p \end{aligned}$$

et donc $m = -1 - p = 2$.

Une équation de (AB) est donc :

$$y = 2x - 3.$$

2 (d) étant parallèle à (AB), son équation réduite est de la forme :

$$y = 2x + p.$$

Pour calculer p, on utilise les coordonnées de C. $C \in (d)$ donc :

$$6 = 2 \times 1 + p$$

et donc $p = 4$. Une équation de (d) est donc $y = 2x + 4$.

6 Équations de droites

Énoncé p. 249

Lycée Chaptal, Paris

1 Les points A et B n'ont pas la même abscisse, donc la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées : elle admet une équation de la forme $y = mx + p$.

Son coefficient directeur est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-8 - (-1)}{3 - 4} = \frac{-7}{-1} = 7.$$

Le point $A(4\,;-1)$ appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient $y = 7x + p$:

$$-1 = 7 \times 4 + p \iff p = -1 - 28 = -29.$$

La droite (AB) a donc pour équation $y = 7x - 29$.

2 Deux droites parallèles (non verticales) ont le même coefficient directeur. La droite $\mathcal{D}$ a donc une équation de la forme $y = 7x + p$.

Le point $C(0\,;-1)$ appartient à $\mathcal{D}$, donc $-1 = 7 \times 0 + p$, c'est-à-dire $p = -1$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = 7x - 1$.

3 Les points E et F n'ont pas la même abscisse, donc (EF) admet une équation de la forme $y = mx + p$, avec :

$$m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{2-(-2)}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

Le point $E(3\,;-2)$ appartient à (EF), donc :

$$-2 = -4 \times 3 + p \iff p = -2 + 12 = 10.$$

La droite (EF) a pour équation $y = -4x + 10$.

Vérification : pour $F(2\,;2)$, on a bien $-4 \times 2 + 10 = 2$.

4 Les droites $\mathcal{D}$ et (EF) ont pour coefficients directeurs respectifs 7 et -4. Ces coefficients sont différents, donc les droites ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

Le point d'intersection G appartient aux deux droites. Son ordonnée est donc à la fois égale à $7x_G - 1$ et à $-4x_G + 10$. Son abscisse x_G vérifie donc l'équation :

$$7x_G - 1 = -4x_G + 10 \iff 11x_G = 11 \iff x_G = 1.$$

On obtient l'ordonnée en remplaçant dans l'équation de $\mathcal{D}$:

$$y_G = 7 \times 1 - 1 = 6.$$

Vérification : avec l'équation de (EF), on trouve aussi $-4 \times 1 + 10 = 6$.

Les droites $\mathcal{D}$ et (EF) se coupent au point $G(1\,;6)$.

7 Alignement de points

Énoncé p. 249

Exercice inédit

1 On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$, donc :

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : les points A, B et C sont alignés.

2 On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$, donc :

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = 2\times 7 - 3\times 4 = 14 - 12 = 2 \neq 0.$$

Les points A, B et D ne sont pas alignés.

3 (AB) n'est pas verticale et a pour coefficient directeur $\dfrac{5-2}{3-1} = \dfrac{3}{2}$.

Son équation réduite est de la forme $y = \dfrac{3}{2}x + p$, et A lui appartient, donc $2 = \dfrac{3}{2} + p$, soit $p = \dfrac{1}{2}$.

La droite (AB) a pour équation $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

- Pour C : $\dfrac{3}{2}\times 7 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{22}{2} = 11 = y_C$, donc $C \in (AB)$.
- Pour D : $\dfrac{3}{2}\times 5 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \neq 9 = y_D$, donc $D \notin (AB)$.

8 Équations de droites

Énoncé p. 249

Lycée du Parc, Lyon

1 On veut une droite parallèle à (D), donc les coefficients directeurs de D et Δ sont égaux. Écrivons provisoirement l'équation réduite de Δ :

$$y = -x + p$$

et calculons p en exprimant que Δ passe par $A(2\,;\,1)$:

$$1 = -2 + p \iff 3 = p$$

L'équation réduite de Δ est :

$$y = -x + 3.$$

2 Là, il y a une légère astuce. En effet, B et C ont la même abscisse, donc la droite (BC) est verticale. La droite Δ est donc également verticale, donc elle admet une équation du type $x = c$. Comme Δ passe par le point A d'abscisse 2, son équation est :

$$x = 2.$$

9 Équations de droites

Énoncé p. 250

Lycée Hoche, Versailles

Le mieux est de calculer directement les équations de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.

- $\mathcal{D}_1$ a un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$: utilisez la méthode des « petits pas ». Lorsqu'on avance sur $\mathcal{D}_1$, entre le moment où l'on croise l'axe des abscisses et celui où l'on croise celui des ordonnées, on fait trois « pas » vers la droite et cinq « pas » vers le haut.

Son coefficient directeur est donc $\frac{5}{3}$.
On lit sur la figure l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de (Oy) et de $\mathcal{D}_1$) : $+5$.
D'où l'équation réduite de $\mathcal{D}_1$:

$$y = \frac{5}{3}x + 5.$$

Ce qui correspond à l'équation 6 de l'énoncé.

- $\mathcal{D}_2$ passe par les points de coordonnées $(-3\,;\,0)$ et $(1\,;\,2)$. Donc (appliquez la méthode des « petits pas »), elle admet un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, et comme coefficient directeur : $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
L'équation réduite de $\mathcal{D}_2$ est donc de la forme :

$$y = \frac{1}{2}x + p.$$

Comme elle passe par le point de coordonnées $(-3\,;\,0)$, on peut déterminer p en remplaçant dans l'équation :

$$0 = -\frac{3}{2} + p \iff p = \frac{3}{2}.$$

Finalement $\mathcal{D}_2$ admet pour équation :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Il s'agit de l'équation 5.

- $\mathcal{D}_3$ admet un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, donc son coefficient directeur est -1. L'ordonnée à l'origine vaut $+3$.
L'équation réduite de $\mathcal{D}_3$ est donc :

$$y = -x + 3.$$

$\mathcal{D}_3$ ne correspond donc à aucune des équations de l'énoncé.

10 Intersection de deux droites

Énoncé p. 250

Lycée Louis Vincent, Metz

1 **(a)** La droite d_2 est parallèle à l'axe des abscisses. Elle a donc la même direction que cet axe, dirigé par $\vec{\imath}$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est donc un vecteur directeur de d_2.

(b) Tous les points d'une droite parallèle à l'axe des abscisses ont la même ordonnée. Comme $A(2\,;\,3)$ appartient à d_2, cette ordonnée est 3.

La droite d_2 a pour équation réduite $y = 3$.

2 La droite d_1 a pour coefficient directeur -4. La droite d_2, d'équation $y = 0 \times x + 3$, a pour coefficient directeur 0.

Ces coefficients directeurs sont différents, donc les droites ne sont pas parallèles : d_1 et d_2 sont sécantes.

3 **(a)** Le point K appartient à d_2, donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = 3$. L'ordonnée de K est donc $y_K = 3$.

(b) Le point K appartient aussi à d_1, donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = -4x + 5$: $y_K = -4x_K + 5$.

Comme $y_K = 3$, on obtient $-4x_K + 5 = 3$.

(c) On résout cette équation :

$$-4x_K + 5 = 3 \iff -4x_K = -2 \iff x_K = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Les coordonnées de K sont donc $\left(\frac{1}{2} ; 3\right)$.

Vérification : $-4 \times \frac{1}{2} + 5 = -2 + 5 = 3$.

11 Intersection de deux droites

Énoncé p. 250

Lycée Voltaire, Paris

1 Graphiquement, on lit $K(-0{,}8 ; 2{,}2)$ environ.

2 **(a)** Sur le graphique, la droite d_1 passe par les points $P(-3 ; 3)$ et $Q(0 ; 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur directeur de d_1, et :

$$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0-(-3)\\2-3\end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{u_1} = \overrightarrow{PQ}$ est un vecteur directeur de d_1.

(b) Sur le graphique, la droite d_2 passe par les points $R(-3 ; 0)$ et $S(0 ; 3)$. Un vecteur directeur de d_2 est donc :

$$\vec{u_2} = \overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}0-(-3)\\3-0\end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, colinéaire au précédent, convient aussi.

3 **(a)** La droite d_1 admet pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, dont l'abscisse est non nulle. Elle n'est donc pas parallèle à l'axe des ordonnées, et son coefficient directeur est :

$$m = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Son équation réduite est donc de la forme $y = -\frac{1}{3}x + p$. Le point $Q(0 ; 2)$ appartient à d_1, donc $2 = -\frac{1}{3} \times 0 + p$, c'est-à-dire $p = 2$.

L'équation réduite de d_1 est bien $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

(b) De même, d_2 a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, donc son coefficient directeur est $\frac{1}{1} = 1$. Son équation réduite est de la forme $y = x + p$.

Le point $S(0\ ;\ 3)$ appartient à d_2, donc $p = 3$.

L'équation réduite de d_2 est $y = x + 3$.

4 Le point K appartient aux deux droites. Son ordonnée est donc à la fois égale à $-\frac{1}{3}x_K + 2$ et à $x_K + 3$. Son abscisse vérifie donc l'équation :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x_K + 2 = x_K + 3 &\iff -\frac{1}{3}x_K - x_K = 3 - 2 \\ &\iff -\frac{4}{3}x_K = 1 \\ &\iff x_K = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

On obtient l'ordonnée en remplaçant dans l'équation de d_2 :

$$y_K = -\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4}.$$

Vérification : avec l'équation de d_1, on trouve aussi

$$-\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}.$$

Le point K a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{4}\ ;\ \frac{9}{4}\right)$, soit $(-0{,}75\ ;\ 2{,}25)$.

C'est cohérent avec la lecture graphique de la question 1.

Chapitre 10

Proportions et pourcentages d'évolution

Plan du chapitre

1. Proportion d'une partie par rapport à un tout
2. Pourcentage et taux d'évolution

Exercice type — Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

1 Calculer le pourcentage d'évolution d'un prix :
(a) qui varie de 4,05 € à 3,95 € ;
(b) qui varie de 120 € à 144 €.

2 Après une hausse de 3,5%, la valeur d'une action est de 43,47 €. Calculer la valeur initiale de cette action.

3 Le prix d'un objet diminue de 8% puis augmente de 15%. Calculer le pourcentage d'évolution global (on donnera la valeur exacte).

4 Calculer le taux réciproque correspondant à chacune des évolutions suivantes :
(a) hausse de 120% ; **(b)** baisse de 40%.

Voir corrigé page 266

1 Proportion d'une partie par rapport à un tout

1.1 Proportion

Définition 1

Soit A une partie d'un ensemble fini E non vide. On note $\text{Card}(A)$ le nombre d'éléments de A (son *cardinal*) et $\text{Card}(E)$ celui de E. La *proportion* de A dans E est le quotient

$$p = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}.$$

On dit aussi que p est la fréquence de A *dans* E ; E est l'*ensemble de référence*.

COURS

Remarque : comme $0 \leqslant \text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$, le quotient p est un nombre compris entre 0 et 1. Il est couramment exprimé sous forme décimale, fractionnaire ou en pourcentage, par exemple :

$$p = 0{,}125 = \frac{1}{8} = \frac{12{,}5}{100} = 12{,}5\%.$$

Lorsque $p = \dfrac{a}{100}$, on dit que le pourcentage de A par rapport à E est $a\%$.

Remarque : la notion de proportion s'étend aux grandeurs (volumes, masses, longueurs) : par exemple, la proportion d'alcool d'une boisson est le quotient du volume d'alcool par le volume total.

1.2 Calculer un pourcentage

Propriété 1

Pour obtenir $a\%$ d'une quantité N, on calcule $\dfrac{a}{100} \times N$.

Réciproquement, si une partie représente $a\%$ d'un tout et vaut n ($a \neq 0$), le tout vaut $N = \dfrac{n}{\dfrac{a}{100}}$.

Exemple : 180 élèves représentent 30% des élèves d'un lycée : l'effectif total est $\dfrac{180}{0{,}3} = 600$ élèves.

Propriété 2 : pourcentage de pourcentage

Soient trois ensembles de référence inclus les uns dans les autres : $A \subset B \subset E$. Si A représente $b\%$ de B et si B représente $a\%$ de E, alors A représente

$$\frac{b}{100} \times \frac{a}{100}$$

de E.

Remarque : en effet, $\dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)} = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(B)} \times \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(E)}$.

$b\%$ de $a\%$ d'une quantité est donc $\dfrac{ab}{100}\%$ de cette quantité. Par exemple, si 70% des salariés d'une entreprise utilisent les transports en commun et si 40% d'entre eux ont un abonnement annuel, alors $0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$: 28% des salariés de l'entreprise sont dans ce cas.

Propriété 3 : proportion d'une réunion

Si A et B sont deux parties disjointes ($A \cap B = \varnothing$) d'un même ensemble de référence E, de proportions p_A et p_B dans E, alors la proportion de $A \cup B$ dans E est $p_A + p_B$.

Remarque : en effet, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ lorsque A et B n'ont aucun élément commun. En revanche, on n'additionne jamais des pourcentages qui portent sur des ensembles de référence différents : savoir qu'il y a 60% de filles dans une classe et 82% dans une autre ne permet pas de connaître le pourcentage de filles dans l'ensemble des deux classes sans connaître leurs effectifs.

2 Pourcentage et taux d'évolution

2.1 Variation absolue, coefficient multiplicateur, taux d'évolution

On considère une grandeur qui passe d'une valeur initiale V_1 (strictement positive) à une valeur finale V_2.

Définitions 2

- La *variation absolue* (ou *variation additive*) est la différence $V_2 - V_1$.
- Le *coefficient multiplicateur* (ou *variation multiplicative*) est le quotient
$$CM = \frac{V_2}{V_1};$$
c'est le nombre par lequel il faut multiplier V_1 pour obtenir V_2 :
$$V_2 = CM \times V_1.$$
- La *variation relative* (ou *taux d'évolution*) est le quotient
$$\frac{V_2 - V_1}{V_1}.$$
Lorsqu'il s'écrit $\frac{t}{100}$, on dit que le taux d'évolution est t%.

Remarques

- Le taux d'évolution se calcule toujours par rapport à la valeur initiale V_1.
- Si la grandeur augmente, t est positif ; si elle diminue, t est négatif. Pour éviter le signe, on peut dire « une baisse de 2,47% » plutôt que « une évolution de $-2{,}47\%$ ».
- Un pourcentage peut exprimer une proportion (part d'un tout) ou une évolution (variation entre deux valeurs) : il faut toujours se demander de quel type il s'agit.

COURS

Propriété 4

Le taux d'évolution $t\%$ et le coefficient multiplicateur sont liés par

$$CM = 1 + \frac{t}{100} \qquad \text{et} \qquad \frac{t}{100} = CM - 1.$$

Remarque : en effet, $\dfrac{t}{100} = \dfrac{V_2 - V_1}{V_1} = \dfrac{V_2}{V_1} - \dfrac{V_1}{V_1} = CM - 1.$

MÉTHODE

Si l'on connaît la valeur finale V_2 et le taux d'évolution $t\%$, on retrouve la valeur initiale en divisant par le coefficient multiplicateur (non nul) : $V_1 = \dfrac{V_2}{CM}$.

À RETENIR

Augmenter une valeur V de $t\%$ ($t > 0$), c'est lui ajouter $V \times \dfrac{t}{100}$, c'est-à-dire la multiplier par $CM = 1 + \dfrac{t}{100}$. Le coefficient multiplicateur est alors plus grand que 1.

Diminuer une valeur V de $t\%$ ($0 < t \leqslant 100$), c'est lui soustraire $V \times \dfrac{t}{100}$, c'est-à-dire la multiplier par $CM = 1 - \dfrac{t}{100}$. Le coefficient multiplicateur est alors compris entre 0 et 1.

Exemples

- Une augmentation de 3,5% correspond à un taux d'évolution de $+3{,}5\%$ et à $CM = 1 + \dfrac{3{,}5}{100} = 1{,}035$.
- Une diminution de 12% correspond à un taux d'évolution de -12% et à $CM = 1 - \dfrac{12}{100} = 0{,}88$.
- Un prix passe de 50 € à 60 €. La variation absolue est $60 - 50 = 10$ €, le coefficient multiplicateur est $\dfrac{60}{50} = 1{,}2$ et le taux d'évolution est $\dfrac{10}{50} = 0{,}2$, soit $+20\%$.

Remarque : il est utile de bien connaître les coefficients multiplicateurs associés à certains pourcentages d'évolution :

Évolution	Coefficient multiplicateur
Augmenter de 100%	2
Augmenter de 50%	1,5
Augmenter de 300%	4
Diminuer de 50%	0,5
Diminuer de 25%	0,75
Diminuer de 100%	0

Attention : doubler une valeur, c'est l'augmenter de 100% (et non de 200%) ; augmenter de 300%, c'est la multiplier par 4.

2.2 Évolutions successives

Propriété 5

Si une grandeur V subit deux évolutions successives de taux $t_1\%$ puis $t_2\%$ (positifs pour une hausse, négatifs pour une baisse), alors elle est multipliée par :

$$\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\times\left(1+\frac{t_2}{100}\right).$$

Remarque : en effet, après la première évolution, la valeur devient $CM_1 \times V$, puis après la seconde $CM_2 \times (CM_1 \times V)$. Ainsi, dans le cas d'évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est égal au produit des coefficients multiplicateurs des différentes évolutions : $CM = CM_1 \times CM_2$. Comme la multiplication est commutative, l'ordre des évolutions ne change pas le résultat.

MÉTHODE

Les coefficients multiplicateurs successifs se multiplient.

Les taux successifs ne s'additionnent pas : une hausse de 10% suivie d'une hausse de 20% donne $1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$, soit une hausse globale de 32%, et non de 30%.

COURS

2.3 Évolution réciproque

Propriété 6

Si une grandeur V subit une évolution de taux $t\%$ (avec $t > -100$), alors le taux d'évolution réciproque, qui permet de retrouver la valeur initiale, est $t'\%$ tel que :

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}}.$$

Remarque : ici encore, les calculs se font à l'aide des coefficients multiplicateurs. Le coefficient multiplicateur réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur direct : $CM' = \dfrac{1}{CM}$. Le taux réciproque n'est pas l'opposé du taux initial : après une hausse de 25%, il faut une baisse de 20% pour revenir à la valeur initiale, car $\dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$.

2.4 Comparer deux quantités

Pour comparer deux quantités strictement positives a et b, on peut calculer leur *différence* $b - a$ (comparaison additive) ou leur *rapport* $\dfrac{b}{a}$ (comparaison multiplicative).

Exemple : une ville A compte 12 000 habitants et une ville B 15 000.

La différence est de 3 000 habitants.

Le rapport $\dfrac{15\,000}{12\,000} = 1{,}25$ signifie que B compte 25% d'habitants de plus que A.

Mais $\dfrac{12\,000}{15\,000} = 0{,}8$: A compte 20% d'habitants de moins que B. Comme pour un taux d'évolution, un pourcentage de comparaison dépend de la quantité prise comme référence.

Solution de l'exercice type

Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

1 On cherche seulement le taux d'évolution : on le calcule directement par la formule :

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1}.$$

(a) $\dfrac{3{,}95 - 4{,}05}{4{,}05} = \dfrac{-0{,}10}{4{,}05} \approx -0{,}0247.$

Le taux d'évolution est d'environ $-2{,}47\%$: le prix diminue d'environ 2,47%.

Solution de l'exercice type (suite) — Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

(b) $\dfrac{144-120}{120} = \dfrac{24}{120} = 0{,}2$.
Le taux d'évolution est de $+20\%$: le prix augmente de 20%.

2 On utilise le coefficient multiplicateur.
La hausse est de 3,5%, donc le coefficient multiplicateur vaut :

$$1 + \frac{3{,}5}{100} = 1{,}035.$$

En notant V_1 la valeur initiale, on a $V_1 \times 1{,}035 = 43{,}47$.
La valeur initiale de l'action était donc $V_1 = \dfrac{43{,}47}{1{,}035} = 42$ €.

3 Le prix subit des évolutions successives. On obtient le coefficient multiplicateur global en faisant le produit des coefficients multiplicateurs successifs.
Pour une diminution de 8% : $CM_1 = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$;
pour une hausse de 15% : $CM_2 = 1 + 0{,}15 = 1{,}15$.
Le coefficient multiplicateur global est donc :

$$CM = 0{,}92 \times 1{,}15 = 1{,}058 \text{ (valeur exacte).}$$

Le taux d'évolution global $t\%$ vérifie $\dfrac{t}{100} = CM - 1 = 0{,}058$, donc $t = 5{,}8$.
L'évolution globale est une augmentation de 5,8% (et non de $15 - 8 = 7\%$).

4 On calcule le taux réciproque en utilisant l'inverse du coefficient multiplicateur.

(a) Pour une hausse de 120%, on a $CM = 1 + 1{,}2 = 2{,}2$. Le coefficient multiplicateur réciproque est $CM' = \dfrac{1}{2{,}2} = \dfrac{5}{11} \approx 0{,}455$.
Le taux réciproque vérifie $\dfrac{t'}{100} = CM' - 1 = -\dfrac{6}{11} \approx -0{,}545$, d'où $t' \approx -54{,}5$.
L'évolution réciproque est donc une baisse d'environ 54,5%.

(b) Pour une baisse de 40%, on a $CM = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Le coefficient multiplicateur réciproque est $CM' = \dfrac{1}{0{,}6} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}667$.
Le taux réciproque vérifie $\dfrac{t'}{100} = CM' - 1 = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}667$, d'où $t' \approx 66{,}7$.
L'évolution réciproque est donc une hausse d'environ 66,7%.

Voir énoncé page 261

INTERROS

Automatismes

1 QCM Pourcentages

15 min — Corrigé p. 276

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1 Une boulangerie fabrique chaque jour 200 pains de campagne, ce qui représente 40% de sa production totale. Le nombre total de pains fabriqués par jour est alors :

[a] 80. [b] 280. [c] 500. [d] 240.

2 Un lycée compte deux classes de 1re STMG et une classe de 1re ST2S. Dans chaque classe de 1re STMG, 60% des élèves sont des filles, et il n'y a que 18% de garçons en 1re ST2S.

Le pourcentage de filles dans l'ensemble de ces trois classes est :

[a] 72%. [b] 66%.

[c] 46%. [d] On ne peut pas savoir.

3 Dans un lycée, le club musique compte 30 membres dont 60% de garçons et le club théâtre rassemble pour sa part 20 élèves dont 40% sont des garçons. Aucun élève n'appartient aux deux clubs à la fois. Lorsque les élèves de ces deux clubs sont réunis, le pourcentage de garçons dans le groupe est :

[a] 26%. [b] 52%.

[c] 50%. [d] On ne peut pas savoir.

4 Lors du concours d'entrée à une école, 25% des candidats sont admis à passer l'oral. Au final, 30 candidats sont reçus, ce qui représente 20% des admis à l'oral.

Le nombre total de candidats est donc :

[a] 60. [b] 150. [c] 600. [d] 1 500.

2 QCM Taux d'évolution

15 min — Corrigé p. 276

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1 Augmenter 60 de 35% correspond au calcul :

[a] $60 + 35\%$. [b] $60 \times 1{,}35$.

[c] $60 \times 35\%$. [d] $\dfrac{60+35}{100}$.

2 Le prix d'un article, coûtant 320 €, baisse de 15%. Son nouveau prix est :

[a] 305. [b] 272. [c] 319,85. [d] 48.

3 On applique trois hausses successives de 15%, 20% et 5%. Le pourcentage d'augmentation total est :

[a] 1,449%. [b] 449%. [c] 40%. [d] 44,9%.

4 Si le prix d'une quantité double, ce prix augmente de :

[a] 2%. [b] 50%. [c] 100%. [d] 200%.

3 QCM Évolution réciproque et fonctions

15 min Corrigé p. 276

Pour chaque question, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 Après une augmentation de 28% sur le prix d'un objet, le taux de remise pour retrouver le prix initial est (arrondi à 0,1% près si nécessaire) :

[a] 28%.

[b] 3,6%.

[c] 21,9%.

[d] 72%.

2 Si le prix d'un article a augmenté de moitié, pour retrouver le prix initial il faut :

[a] diviser le nouveau prix par 2.

[b] diviser le nouveau prix par 3.

[c] multiplier le nouveau prix par $\frac{3}{4}$.

[d] diviser le nouveau prix par 1,5.

3 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 0{,}12x$.

Appliquer cette fonction à un nombre x revient à :

[a] augmenter x de 12%.

[b] prendre 12% de x.

[c] diminuer x de 12%.

[d] diminuer x de 88%.

4 Une parfumerie solde tous ses articles en effectuant une réduction de 35%. Soit f la fonction qui au prix initial x associe le nouveau prix $f(x)$, alors :

[a] $f(x) = x - 35$.

[b] $f(x) = 0{,}65x$.

[c] la fonction f est une fonction linéaire définie sur $[0 ; +\infty[$.

[d] la fonction f est une fonction affine définie sur $[0 ; +\infty[$.

INTERROS

Proportions

4 Jeunes et tri sélectif

★ — 10 min — Corrigé p. 277

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

Dans une ville, 80% des jeunes font le tri sélectif des déchets, et parmi ces jeunes 15% ont déjà participé à un nettoyage de rivière dans cette ville.

1. Déterminer le pourcentage que représentent les jeunes qui font le tri sélectif et qui ont participé par rapport à l'ensemble des jeunes de cette ville.
2. Cette ville compte 2 520 jeunes. Calculer le nombre de jeunes ne faisant pas le tri sélectif des déchets.

5 Pourcentages de pourcentages

★ — 10 min — Corrigé p. 277

Lycée Chaptal, Paris

Dans le lycée de Jules, il y a 40% de filles.

De plus, on sait que 20% des filles et 35% des garçons mangent à la cantine.

Déterminer la proportion (en pourcentage) d'élèves qui mangent à la cantine.

6 Dilution

★★ — 15 min — Corrigé p. 278

Lycée Hoche, Versailles

Une boisson contient 15% d'alcool. On voudrait obtenir, à partir d'un litre de cette boisson, un mélange ne contenant que 5% d'alcool. On admet que le volume du mélange est égal à la somme des volumes.

Quelle quantité d'eau doit-on rajouter ?

Pourcentage et taux d'évolution

7 Problèmes indépendants

★ — 10 min — Corrigé p. 278

Lycée Loquidy, Nantes

Les problèmes suivants sont indépendants.

1. *Problème 1 :* parmi les 5 600 abonnés à une médiathèque, 4 410 sont des enfants.

   Calculer le pourcentage d'enfants parmi les abonnés de cette médiathèque.

2 *Problème 2 :* lors d'un sondage pour une élection, 96% des personnes interrogées ont indiqué leur intention de vote. Parmi celles-ci, 52% ont donné leur préférence au candidat sortant.

Quel est le pourcentage d'intentions de vote pour le candidat sortant parmi l'ensemble des personnes interrogées ?

3 *Problème 3 :* pour fêter le 11/11/11, un commerçant a décidé de baisser tous les prix de 11 €. Un jouet se vend alors 111 €.

Calculer le pourcentage d'évolution, arrondi à 0,1% près, entre le prix initial et le prix final du jouet.

4 *Problème 4 :* suite à deux épisodes de grippe aviaire, le prix du foie gras augmente de 10%, puis de 20%.

Calculer le taux d'évolution global du prix.

5 *Problème 5 :* un commerçant décide de baisser ses prix de 7% à l'occasion d'un événement. Le lendemain, il augmente ses prix de 7%.

Calculer le taux d'évolution global du prix.

8 Soldes sur les trottinettes

★ — 10 min — Corrigé p. 279

Lycée Loquidy, Nantes

1 Une trottinette électrique soldée à −30% est vendue à 357 €.

Déterminer, en justifiant, le prix initial de cette trottinette.

2 En octobre 2025 un abonnement d'entrée de gamme sur Flixnet coûtait 7,99 € par mois, et en novembre 2025, ce même abonnement coûtait 8,99 € par mois.

Déterminer la variation absolue, le coefficient multiplicateur (arrondi au millième) et le pourcentage d'évolution (arrondi à 0,1%) du prix de cet abonnement entre ces deux dates.

9 Tableau à compléter

★★ — 15 min — Corrigé p. 280

Lycée Chaptal, Paris

Compléter le tableau suivant :

Valeur initiale	Évolution	Coefficient multiplicateur	Valeur finale
415	Baisse de 6%		
	Hausse de 3,6%		3 626
44		0,925	
		3,2	537,6

INTERROS

10 Diminution du chômage

★ 5 min Corrigé p. 280

Lycée Sophie Germain, Paris

Le nombre de demandeurs d'emploi a augmenté de 3% au mois de juin. Calculer le taux d'évolution qu'il devrait suivre en juillet pour retrouver sa valeur initiale.

11 Coefficients multiplicateurs

★ 5 min Corrigé p. 280

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

1. Calculer le coefficient multiplicateur dans chacun des cas suivants :
   - **(a)** une hausse de 3% ;
   - **(b)** une baisse de 17%.
2. Indiquer la variation en % d'une quantité qui a été multipliée par :
   - **(a)** 1,05 ;
   - **(b)** 0,98.

12 Évolution d'une population

★ 10 min Corrigé p. 281

Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

De 2013 à 2016, la population d'une ville a augmenté de 11,7% et, de 2016 à 2019, elle a diminué de 5,3%.

1. Quel est le taux d'évolution de cette population entre 2013 et 2019 (arrondi à 0,1%) ?
2. En 2021, la population de cette ville est revenue à ce qu'elle était en 2013. Quel a donc été le taux d'évolution entre 2019 et 2021 (arrondi à 0,1%) ?

13 Variation de prix

★ 10 min Corrigé p. 281

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1. Un article qui se vendait 35 € au début de l'été se vend 42 € à la rentrée scolaire. Quel est le taux d'augmentation pendant l'été ?
2. Un téléphone se vendait 155 € en décembre. Quel est son prix en février après une remise de 40% ?
3. Le vendredi 27 août 2021, après une hausse de 0,7% dans la journée, une action vaut 94,15 €. Quelle était sa valeur le jeudi 26 août au soir ? (Arrondir au centième d'euro.)

14 Instabilité des prix

★ 10 min Corrigé p. 281

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

Le prix de vente d'un objet manufacturé était égal à 78 € au 1er janvier 2021.

1 Entre le 1er janvier et le 30 juin 2021, le prix de cet objet a augmenté successivement de 13% puis de 8%. Quel était le prix de cet objet au 1er juillet 2021 ? Arrondir le prix au centième.

2 Entre le 1er juillet et le 31 décembre 2021, le prix de cet objet a encore augmenté de 4%, puis diminué de 18%. Quel était le prix au 1er janvier 2022 ? Arrondir au centième.

15 Taux d'augmentation (QCM)

★ 15 min Corrigé p. 282

Lycée Albert Châtelet, Douai

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Les entourer et les justifier.

1 Dans une ville, sur deux années consécutives, le taux d'augmentation de la population a été de 4% puis de 6%. Le taux global est :

a $4\% \times 6\%$ **b** supérieur à 10%

c 10,24% **d** $4\% + 6\%$

2 Une grandeur augmente de 25%. Le pourcentage d'évolution réciproque correspondant est :

a une baisse de 25% **b** une baisse de plus de 25%

c une baisse de 20% **d** une baisse de 80%

16 Nombre de spectateurs

★ 15 min Corrigé p. 282

Lycée Édouard Herriot, Lyon

Dans un cinéma, le nombre d'entrées a augmenté de 7,1% entre 2015 et 2019, a chuté de 4,2% entre 2019 et 2020, puis a augmenté de 3,5% entre 2020 et 2021. Le nombre de spectateurs en 2021 a été de 153 200.

1 Par quel nombre faut-il multiplier le nombre de spectateurs de 2015 pour obtenir celui de 2019 ?

2 Par quel nombre faut-il multiplier le nombre de spectateurs de 2015 pour obtenir celui de 2021 ?

3 Montrer que le nombre de spectateurs est plus grand en 2021 qu'en 2015, et calculer le pourcentage d'augmentation.

4 Calculer le nombre de spectateurs en 2020, 2019 et 2015. Arrondir les effectifs à l'unité.

17 Pourcentages d'évolution

★ — 15 min — Corrigé p. 282

Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

1. Si une quantité subit une baisse de 4%, alors le coefficient multiplicateur associé à cette évolution est 0,96.
2. Si on augmente une quantité initiale de 10% puis on augmente la quantité obtenue de 20%, alors la valeur obtenue est inférieure à ce que l'on obtient en augmentant la même quantité initiale de 20% puis de 10%.
3. Si on diminue une quantité de 20%, puis on augmente la quantité obtenue de 10%, alors la quantité initiale a été diminuée de 15%.
4. Augmenter de 300% revient à multiplier par 3.
5. Si le prix d'un article augmente de 2%, alors le prix de 5 articles identiques à celui-ci augmente au total de 10%.

18 Baisses successives

★★ — 10 min — Corrigé p. 283

Lycée Jean Puy, Roanne

Après une baisse de 15% suivie d'une baisse de t%, on obtient une baisse finale de 30%.

Calculer t.

19 TVA

★★ — 15 min — Corrigé p. 283

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

Le prix T.T.C. (toutes taxes comprises) s'obtient en augmentant le prix H.T. (hors taxes) du taux de T.V.A.

Avec un taux de T.V.A. de 20%, le prix T.T.C. d'un objet est de 45,50 €.

Quel serait le prix de cet objet avec un taux de T.V.A. de 5,5% ?

20 Augmentation et baisses

★★ — 15 min — Corrigé p. 284

Lycée Claude Bernard, Paris

Un produit subit une augmentation de 25% suivie de deux baisses successives de t%. Il est alors revenu à son prix de départ.

Donner la valeur exacte de t, et sa valeur arrondie au millième.

21 Meilleur achat immobilier

★★★ 25 min Corrigé p. 284

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

Pour leur futur achat immobilier, un couple hésite entre deux maisons.

La première est une maison au prix de 260 000 €, de moins de 5 ans, dont les frais de notaire, à ajouter, s'élèvent à 2%.

La seconde est une maison au prix de 250 000 €, plus ancienne, dont les frais de notaire s'élèvent à 6%.

Les frais d'agence sont de 7% du prix d'achat et des frais de notaire.

1. Quel serait dans ces conditions le coût d'achat de chacune des maisons ?
2. Le propriétaire de la deuxième maison accepte de baisser son prix de vente de 5 000 €.
   - **(a)** Quel est le taux de remise ainsi accordé par le propriétaire sur son prix de vente ?
   - **(b)** Quel serait finalement le coût d'achat de cette maison ?
3. Le propriétaire de la première maison propose alors de réduire son prix de vente de 2% du prix tous frais compris calculé dans la question 1.

   Quel achat conseiller à ce couple s'il souhaite obtenir le prix le plus bas ?

CORRIGÉS

1 QCM Pourcentages

Énoncé p. 268

1 *Réponse* **c**. Si N représente le nombre total de pains fabriqués, N vérifie l'équation $N \times \dfrac{40}{100} = 200$, d'où :

$$N = \frac{200 \times 100}{40} = 500.$$

2 *Réponse* **d**. Comme on ne connaît pas les effectifs des différentes classes, on ne peut faire aucune opération sur les pourcentages donnés. On peut cependant dire que le pourcentage par rapport à l'ensemble des trois classes est compris entre 60% et 82%, car dans les trois cas les pourcentages sont compris entre ces deux valeurs.

3 *Réponse* **b**. Il y a $30 \times 0{,}60 = 18$ garçons dans le club musique et $20 \times 0{,}40 = 8$ garçons dans le club théâtre. Lorsque tous les élèves sont réunis, cela fait $18+8 = 26$ garçons sur un total de $30+20 = 50$ élèves. Or $\dfrac{26 \times 100}{50} = 52$: les garçons représentent donc 52% des élèves de l'ensemble des deux clubs.

4 *Réponse* **c**. Le pourcentage de reçus par rapport à l'ensemble des candidats est $0{,}25 \times 0{,}20 = 0{,}05$. 30 représente donc 5% de l'ensemble des candidats. Il y avait donc $\dfrac{30}{0{,}05} = 600$ candidats au départ.

2 QCM Taux d'évolution

Énoncé p. 268

1 *Réponse* **b**. D'après le cours, pour augmenter une valeur de t%, on la multiplie par $1 + \dfrac{t}{100}$, ce qui donne ici $1 + \dfrac{35}{100} = 1{,}35$.

2 *Réponse* **b**. On a $320 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 320 \times 0{,}85 = 272$.

3 *Réponse* **d**. On calcule le coefficient multiplicateur global :

$$1{,}15 \times 1{,}20 \times 1{,}05 = 1{,}449.$$

Ce coefficient multiplicateur est associé à une hausse de 44,9%.

4 *Réponse c.* Lorsque la quantité double, le coefficient multiplicateur vaut 2. Or $2 = 1 + \dfrac{100}{100}$. Le pourcentage de hausse est donc bien de 100%.

3 QCM Évolution réciproque et fonctions

Énoncé p. 269

1 *Réponse* **c**. Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 28% est 1,28. Le coefficient multiplicateur réciproque est donc $\dfrac{1}{1{,}28} = 0{,}78125$.

Ceci correspond à une diminution de $(1 - 0{,}78125) \times 100 = 21{,}875\%$, que l'on arrondit à 21,9%.

2 *Réponse* **d**. Pour une augmentation de moitié, donc de 50%, le coefficient multiplicateur est 1,5. Pour retrouver le prix initial, il faut donc bien diviser par 1,5.

Multiplier par $\frac{3}{4}$ revient à diviser par $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire environ 1,33 : cette réponse ne convient donc pas.

3 *Réponses* **b** *et* **d**. Par définition, pour prendre 12% de x, on multiplie x par $\frac{12}{100} = 0{,}12$.

D'autre part, si on diminue x de 88%, le coefficient multiplicateur est $1 - \frac{88}{100} = 0{,}12$: il faut donc bien multiplier x par 0,12.

4 *Réponses* **b**, **c** *et* **d**. Diminuer de 35% revient à multiplier par $1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

L'expression de la fonction f est donc $f(x) = 0{,}65x$. Cela montre que f est une fonction linéaire, et par conséquent aussi une fonction affine (de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 0{,}65$ et $b = 0$).

4 Jeunes et tri sélectif

Énoncé p. 270

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

1 On cherche 15% de 80% :

$$\frac{15}{100} \times \frac{80}{100} = 0{,}12, \quad \text{soit } 12\%.$$

12% des jeunes de la ville font le tri sélectif et ont déjà participé à un nettoyage de rivière.

2 Il y a $100 - 80 = 20\%$ de jeunes ne faisant pas le tri sélectif.

$$\frac{20}{100} \times 2\,520 = 504.$$

Il y a donc 504 jeunes ne faisant pas le tri sélectif.

5 Pourcentages de pourcentages

Énoncé p. 270

Lycée Chaptal, Paris

- 20% des filles (qui représentent 40% des élèves du lycée) mangent à la cantine.

$$\underbrace{\frac{20}{100} \times \frac{40}{100}}_{\text{20\% de 40\%}} \times 100 = 8.$$

Cela représente donc 8% des élèves du lycée.

- De plus, il y a 60% de garçons dans le lycée, dont 35% mangent à la cantine.

$$\frac{35}{100} \times \frac{60}{100} \times 100 = 21.$$

Cela représente donc 21% des élèves du lycée.

$$8 + 21 = 29.$$

Finalement, 29% des élèves du lycée mangent à la cantine.

6 Dilution

Énoncé p. 270

Lycée Hoche, Versailles

La quantité d'alcool contenue dans un litre de la boisson à 15% est 0,15 litre.

On ajoute x litres d'eau afin que la concentration en alcool du mélange devienne 5%. La quantité totale de liquide est $1 + x$ litres et le mélange contient 0,15 litre d'alcool, donc :

$$\frac{0{,}15}{1+x} = 0{,}05.$$

Par conséquent, $1 + x = 3$, c'est-à-dire $x = 2$: il faut donc ajouter 2 litres d'eau.

7 Problèmes indépendants

Énoncé p. 270

Lycée Loquidy, Nantes

1 On effectue le calcul suivant :

$$\frac{4\,410}{5\,600} \times 100 = 78{,}75.$$

Ainsi, les enfants représentent 78,75% des abonnés à cette médiathèque.

2 On effectue le calcul suivant :

$$\frac{96}{100} \times \frac{52}{100} \times 100 = 49{,}92.$$

Ainsi, le pourcentage d'intentions de vote pour le candidat sortant est 49,92%.

3 Le prix initial du jouet est $111 + 11 = 122$ €.

$$\frac{111 - 122}{122} \times 100 = \frac{-11}{122} \times 100 \approx -9{,}0.$$

Le pourcentage d'évolution du prix du jouet est donc d'environ $-9{,}0\%$: le prix a baissé d'environ 9,0%.

4 Une hausse de 10% signifie que l'on multiplie par $1 + \dfrac{10}{100}$, soit par 1,1 (premier coefficient multiplicateur).

Une hausse de 20% signifie que l'on multiplie par 1,2 (second coefficient multiplicateur).

$$1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32.$$

Ce dernier résultat est le coefficient multiplicateur global. Il est supérieur à 1 donc il s'agit d'une augmentation.

Le taux d'évolution global est donc égal à +32% (et non à $10 + 20 = 30\%$).

5 Une baisse de 7% signifie que l'on multiplie par $1 - \dfrac{7}{100}$, soit par 0,93 (premier coefficient multiplicateur).

Une hausse de 7% signifie que l'on multiplie par 1,07 (second coefficient multiplicateur).

$$0{,}93 \times 1{,}07 = 0{,}9951.$$

Ce dernier résultat est le coefficient multiplicateur global. Il est inférieur à 1 donc il s'agit d'une diminution.

$$(0{,}9951 - 1) \times 100 = -0{,}49.$$

Le taux d'évolution global est donc d'environ −0,5% (arrondi à 0,1% près) : une baisse de 7% suivie d'une hausse de 7% ne ramène pas au prix initial.

8 Soldes sur les trottinettes

Énoncé p. 271

Lycée Loquidy, Nantes

1 Soit x le prix initial de la trottinette vendue 357 € après réduction de 30%. Alors :

$$\left(1 - \frac{30}{100}\right) x = 357 \iff x = \frac{357}{0{,}7} = 510.$$

Le prix initial était donc de 510 €.

2 La variation absolue est $8{,}99 - 7{,}99 = 1$ € (variation additive).

Le coefficient multiplicateur est $\dfrac{8{,}99}{7{,}99} \approx 1{,}125$ (variation multiplicative).

Le taux d'évolution est :

$$\frac{8{,}99 - 7{,}99}{7{,}99} \times 100 \approx 12{,}5.$$

L'augmentation de l'abonnement est donc d'environ 12,5%.

CORRIGÉS

9 Tableau à compléter

Énoncé p. 271

Lycée Chaptal, Paris

Voici le tableau complété :

Valeur initiale	Évolution	Coefficient multiplicateur	Valeur finale
415	Baisse de 6%	**0,94**	**390,1**
3 500	Hausse de 3,6%	**1,036**	3 626
44	**Baisse de 7,5%**	0,925	**40,7**
168	**Hausse de 220%**	3,2	537,6

10 Diminution du chômage

Énoncé p. 271

Lycée Sophie Germain, Paris

Le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation est 1,03. Le taux réciproque a pour coefficient multiplicateur l'inverse, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{1{,}03} \approx 0{,}9709.$$

Il faudrait donc une diminution du nombre de demandeurs d'emploi d'environ $(1 - 0{,}9709) \times 100 \approx 2{,}9\%$.

MÉTHODE

Lorsque le taux d'évolution est faible, le taux réciproque est très proche de l'opposé du taux initial (ici $-2{,}9\%$ contre $+3\%$), mais il ne lui est pas égal. Ce résultat n'étant qu'une approximation, il convient de bien montrer que l'on utilise le coefficient multiplicateur et son inverse pour trouver le taux réciproque !

11 Coefficients multiplicateurs

Énoncé p. 272

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

1 **(a)** Pour une hausse de 3%, le coefficient multiplicateur est égal à $1 + \frac{3}{100} = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$.

(b) Pour une baisse de 17%, le coefficient multiplicateur est égal à $1 - \frac{17}{100} = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$.

2 **(a)** On cherche t tel que $1 + \frac{t}{100} = 1{,}05$, donc $\frac{t}{100} = 0{,}05$, ce qui donne $t = 5$. Cela correspond donc à une augmentation de 5%.

(b) On cherche t tel que $1 + \frac{t}{100} = 0{,}98$, donc :

$\frac{t}{100} = 0{,}98 - 1 = -0{,}02$ (ce qui correspond à une diminution de 2%).

12 Évolution d'une population

Énoncé p. 272

Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

1 Le coefficient multiplicateur global est $1{,}117 \times 0{,}947 \approx 1{,}058$. Cela correspond à une augmentation de 5,8%.

2 Entre 2019 et 2021, la population est revenue à son niveau de 2013 : l'évolution entre 2019 et 2021 est donc l'évolution réciproque de la hausse de 5,8%.

Son coefficient multiplicateur est $\dfrac{1}{1{,}117 \times 0{,}947} \approx 0{,}945$.

La population a donc diminué de 5,5% entre 2019 et 2021.

13 Variation de prix

Énoncé p. 272

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1 Le coefficient multiplicateur est égal à $\dfrac{42}{35} = 1{,}2 = 1 + \dfrac{20}{100}$.

L'augmentation est donc de 20%.

2 Une remise de 40% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \dfrac{40}{100} = 0{,}6$. Le prix après remise est donc $155 \times 0{,}60 = 93\,€$.

3 Une hausse de 0,7% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{0{,}7}{100} = 1{,}007$. La valeur de l'action la veille au soir est obtenue grâce au coefficient multiplicateur réciproque :

$$\frac{94{,}15}{1{,}007} \approx 93{,}50\,€.$$

14 Instabilité des prix

Énoncé p. 272

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

On obtient le coefficient multiplicateur global en faisant le produit des coefficients multiplicateurs successifs.

1 Entre le 1er janvier et le 30 juin, le prix est multiplié par :

$$1{,}13 \times 1{,}08 = 1{,}2204.$$

Il devient donc $78 \times 1{,}2204 \approx 95{,}19\,€$.

2 Entre le 1er juillet et le 31 décembre, le prix est multiplié par :

$$1{,}04 \times 0{,}82 = 0{,}8528.$$

Le nouveau prix au 1er janvier 2022 est donc :

$$95{,}19 \times 0{,}8528 \approx 81{,}18\,€.$$

CORRIGÉS

15 Taux d'augmentation (QCM)

Énoncé p. 273

Lycée Albert Châtelet, Douai

1 Les réponses b et c sont exactes.

Si la quantité augmente de 4%, puis la quantité obtenue augmente à nouveau de 6%, on obtient logiquement au final une augmentation supérieure à 10%. Plus précisément, pour des taux successifs, on multiplie les coefficients multiplicateurs associés. Le coefficient multiplicateur global est donc égal à $1{,}04 \times 1{,}06 = 1{,}1024$.

Le taux global d'augmentation est donc de 10,24%.

2 Seule la réponse c est exacte. Le coefficient multiplicateur réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur associé à l'évolution directe, qui vaut ici $1 + \dfrac{25}{100} = 1{,}25$, donc $CM = \dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}80$.

Il faut maintenant retrouver le taux réciproque $t\%$: $1 + \dfrac{t}{100} = 0{,}80$, ce qui donne $\dfrac{t}{100} = -0{,}2$.

Le pourcentage d'évolution réciproque est donc une diminution de 20%.

16 Nombre de spectateurs

Énoncé p. 273

Lycée Édouard Herriot, Lyon

1 Il faut multiplier le nombre de spectateurs de 2015 par $1 + \dfrac{7{,}1}{100} = 1{,}071$ pour obtenir le nombre de spectateurs de 2019.

2 De 2015 à 2021, les coefficients multiplicateurs successifs sont 1,071, puis 0,958 et finalement 1,035. Le coefficient multiplicateur global de 2015 à 2021 est donc :

$$1{,}071 \times 0{,}958 \times 1{,}035 \approx 1{,}062.$$

3 Le coefficient multiplicateur est plus grand que 1, l'évolution est donc une augmentation. Son taux est environ $(1{,}062 - 1) \times 100$, c'est-à-dire 6,2%.

4 En 2020, il y avait $\dfrac{153\,200}{1{,}035} \approx 148\,019$ spectateurs.

En 2019, il y avait $\dfrac{148\,019}{0{,}958} \approx 154\,508$ spectateurs.

En 2015, il y avait $\dfrac{154\,508}{1{,}071} \approx 144\,265$ spectateurs.

17 Pourcentages d'évolution

Énoncé p. 274

Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

1 *Vrai.* Le coefficient multiplicateur est égal à $1 - \dfrac{4}{100} = 0{,}96$.

2 *Faux.* L'ordre dans lequel se réalisent les évolutions successives n'a pas d'importance. On multiplie en effet la donnée par les différents coefficients multiplicateurs, et la multiplication des réels est une opération commutative. Dans les deux cas, le coefficient multiplicateur global est $1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$, ce qui correspond à une augmentation globale de 32%.

3 *Faux.* Le coefficient multiplicateur global est $0{,}8 \times 1{,}1 = 0{,}88$. Cela signifie que la quantité a été diminuée de 12%.

4 *Faux.* Augmenter de 300%, c'est multiplier par $1 + \dfrac{300}{100} = 4$.

5 *Faux.* Si on note P le prix d'un article, il devient $P \times 1{,}02$ après augmentation, et le prix des 5 articles, qui était $5P$, devient :

$$5(P \times 1{,}02) = (5P) \times 1{,}02.$$

Cela montre que le prix total est lui aussi multiplié par 1,02, et qu'il augmente donc de 2%.

18 Baisses successives

Énoncé p. 274

Lycée Jean Puy, Roanne

En utilisant les coefficients multiplicateurs, on obtient l'équation :

$$(1 - 0{,}15) \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1 - 0{,}3.$$

Ceci donne :

$$1 - \frac{t}{100} = \frac{0{,}7}{0{,}85}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad t = 100\left(1 - \frac{0{,}7}{0{,}85}\right).$$

Par conséquent :

$$t = \frac{100 \times 0{,}15}{0{,}85} = \frac{15}{0{,}85} \approx 17{,}65.$$

La seconde baisse est donc d'environ 17,65%.

Remarque : c'est typiquement le genre de question où il ne faut pas céder à la tentation d'ajouter les taux successifs !

19 TVA

Énoncé p. 274

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

Notons P le prix hors taxe de l'objet.

On sait que $P \times 1{,}2 = 45{,}50$, par conséquent $P = \dfrac{45{,}50}{1{,}2}$.

En appliquant une T.V.A. à 5,5%, on obtient alors :

$$P \times 1{,}055 = \frac{45{,}50}{1{,}2} \times 1{,}055 \approx 40{,}00.$$

Le prix T.T.C. serait donc d'environ 40,00 €.

Attention : on ne peut pas retirer $20 - 5{,}5 = 14{,}5\%$ du prix T.T.C. ; il faut d'abord revenir au prix hors taxe.

20 Augmentation et baisses

Énoncé p. 274

Lycée Claude Bernard, Paris

Soit p le prix du produit au départ.

Après l'augmentation, son prix devient $p\left(1 + \dfrac{25}{100}\right) = 1{,}25p$.

Après les deux réductions successives, le prix devient $1{,}25p\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)^2$.

On a donc $1{,}25p\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)^2 = p$, ce qui équivaut à :

$$1{,}25\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2 = 1.$$

On a donc $\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)^2 = \dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$, et donc :

$$1 - \frac{t}{100} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}894427,$$

car $1 - \dfrac{t}{100}$ est un nombre positif.

On en déduit successivement $\dfrac{t}{100} = 1 - \sqrt{0{,}8}$ et $t = 100 - 100\sqrt{0{,}8}$, ce qui est la valeur exacte de t. On peut aussi l'écrire $t = 100 - 40\sqrt{5}$, car $\sqrt{0{,}8} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Sa valeur approchée au millième est donc 10,557.

MÉTHODE

Il ne faut pas tomber dans le piège de dire qu'il faut deux baisses de 12,5% pour compenser la hausse de 25%, car les baisses ne s'appliquent pas au même prix que la hausse.

21 Meilleur achat immobilier

Énoncé p. 275

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

1 Pour la première maison, le coût total d'achat est :

$$260\,000 \times 1{,}02 \times 1{,}07 = 283\,764\ €,$$

alors que pour la seconde, le coût total est :

$$250\,000 \times 1{,}06 \times 1{,}07 = 283\,550\,€.$$

2 **(a)** Une remise de 5 000 € sur un prix de 250 000 € correspond à une remise de $\dfrac{5\,000}{250\,000} = 0{,}02$, c'est-à-dire de 2%.

(b) Il revient au même de baisser le prix de vente avant les frais, ou de baisser le prix avec les frais dans la même proportion. Le coût d'achat baisse donc de 2% et devient $283\,550 \times 0{,}98 = 277\,879\,€$.

On peut aussi faire le calcul comme dans la question 1 à partir du nouveau prix de vente : $245\,000 \times 1{,}06 \times 1{,}07 = 277\,879\,€$.

3 Le montant de la réduction est $283\,764 \times 0{,}02 \approx 5\,675\,€$.

Le propriétaire de la première maison propose donc un prix de vente de $260\,000 - 5\,675 = 254\,325\,€$.

Comme à ce prix s'ajoutent les frais, le coût d'achat devient :

$$254\,325 \times 1{,}02 \times 1{,}07 \approx 277\,570\,€.$$

Dans ces conditions, c'est la première maison qui revient le moins cher.

MÉTHODE

Il faut toujours bien regarder à quelle quantité s'appliquent les pourcentages. Dans cet exercice, on parle dans les deux cas d'une réduction de 2%.
Pour la seconde maison, la réduction de 5 000 € revient à faire une réduction de 2% du prix de vente, ce qui fait aussi une réduction de 2% du prix tous frais compris.
Pour la première maison, il est déduit du prix de vente 2% du prix tous frais compris. Le prix de vente diminue donc de plus de 2%, ce qui fait que la réduction finale est supérieure à 2%.

Chapitre 11

Statistiques

Plan du chapitre

1. Indicateurs d'une série statistique
2. Séries regroupées en classes

1 Indicateurs d'une série statistique

Exercice type 1 — Lycée Saint Aspais, Melun

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans une classe de 30 élèves, il y a 12 filles et 18 garçons. Au contrôle de mathématiques, les filles ont obtenu :

7 , 8 , 10 , 11 , 11 , 11 , 12 , 12 , 12 , 14 , 17 , 18

et les garçons :

5 , 7 , 7 , 8 , 8 , 8 , 9 , 9 , 9 , 10 , 10 , 11 , 11 , 11 , 12 , 12 , 14 , 16.

1. Calculer la moyenne des notes pour les deux groupes (on arrondira les résultats au dixième près).
2. À partir de ces résultats, calculer la moyenne de la classe.
3. Par mesure de clémence, le professeur ajoute 1 point à toutes les notes. Quelle est la nouvelle moyenne ?
4. Le garçon qui avait obtenu 5 avait en fait 8. Quelle est, finalement, la moyenne de la classe ?

Voir corrigé page 292

1.1 Comment comparer des séries quantitatives ?

Un professeur compare les notes de deux élèves :

Paul	19	6	18	5
Pierre	10	10	12	12

On observe deux suites de quatre valeurs, appelées *séries statistiques*.

La moyenne de Paul est plus élevée que celle de Pierre.

COURS

La moyenne de Paul est : $\dfrac{19+6+18+5}{4} = 12.$ La moyenne de Pierre est : $\dfrac{10+10+12+12}{4} = 11.$

La moyenne reflète la *position* de la série statistique. On parle également d'indicateur de *tendance centrale*, ce qui signifie simplement qu'elle indique le « centre » de la série statistique. Dans notre exemple, les notes de Paul sont *globalement* meilleures.

La médiane, qui sépare les valeurs de la série (une fois ordonnée) en deux moitiés, est un autre indicateur de tendance centrale.

Cependant, Pierre est plus régulier que Paul. Paul a complètement raté deux devoirs. Les notes de Pierre sont moins *dispersées*.

Pour comparer deux séries statistiques, on doit tenir compte de ces deux caractéristiques : position et dispersion.

L'étendue $e = \max x_i - \min x_i$ est l'écart entre la plus grande valeur ($\max x_i$) et la plus petite ($\min x_i$). C'est un indicateur de dispersion : une faible étendue montre que la série est resserrée autour de sa moyenne. Il est rudimentaire car il ne dépend que des deux valeurs extrêmes de la série.

1.2 Qu'est-ce qu'une moyenne pondérée ?

On considère une série statistique de n valeurs réelles.

Nous utilisons les notations suivantes :

- $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont les valeurs observées ;
- $n_1, n_2, \ldots, n_k$ les effectifs correspondants, ce qui signifie que la valeur x_i apparaît n_i fois dans la série ;
- $f_1, f_2, \ldots, f_k$ les fréquences : $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ est la *proportion* (donc, entre 0 et 1) du nombre des valeurs égales à x_i par rapport à l'effectif total n.

La moyenne de la série statistique est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_1 + x_2 + \cdots + x_2 + \cdots + x_k + \cdots + x_k}{n}$$

où chaque x_i est compté n_i fois.

On peut simplifier la formule :

- *Calcul à partir des effectifs :* $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$.
- *Calcul à partir fréquences :* $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k$.

Pour calculer la moyenne des valeurs x_i, on ne s'est pas contenté de la moyenne simple $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$. On a donné à chaque valeur x_i un *poids* correspondant

à son effectif. On dit qu'on a calculé une moyenne des valeurs x_i, pondérée par les effectifs n_i ou les fréquences f_i (*poids* et *pondéré* sont des mots qui viennent du latin *pondus*, *ponderis* : le poids).

On peut décider d'accorder un poids qui n'est pas relatif à la fréquence. Par exemple, si on a eu 14 au devoir commun (coefficient 2), 12 au contrôle (coefficient 1) et 18 à l'interrogation surprise (coefficient 0,5), la moyenne pondérée est :

$$m = \frac{2 \times 14 + 1 \times 12 + 0{,}5 \times 18}{2 + 1 + 0{,}5} = 14.$$

Les coefficients sont choisis pour que la note du devoir commun ait plus d'importance que celle de l'interrogation surprise.

1.3 La linéarité de la moyenne, qu'est-ce que c'est ?

Nous étudions une série statistique donnée comme ci-dessus par les valeurs x_i, leurs effectifs respectifs n_i.

Si on applique une fonction affine aux valeurs x_i, c'est-à-dire que l'on calcule, pour chaque i, la valeur $y_i = mx_i + p$ (où m et p sont deux constantes), alors :

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{n_1y_1 + n_2y_2 + \cdots + n_ky_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\
&= \frac{n_1(mx_1 + p) + n_2(mx_2 + p) + \cdots + n_k(mx_k + p)}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\
&= \frac{n_1mx_1 + n_2mx_2 + \cdots + n_kmx_k + n_1p + n_2p + \cdots + n_kp}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\
&= \frac{m(n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k) + p(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\
&= m\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} + p\frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\
&= m\bar{x} + p.
\end{aligned}$$

On peut donc retrouver la moyenne $\bar{y}$ de la nouvelle série en appliquant la même fonction affine à la moyenne $\bar{x}$ de l'ancienne.

On utilise la linéarité de la moyenne sans même y penser lorsque l'on change d'unité. Par exemple, si dans un concours de saut en hauteur, la moyenne des sauts (en mètres) a été de 1,81, il est évident que la moyenne des sauts (en centimètres) a été de 181. Les valeurs x_i étaient exprimées en mètres, on obtient les valeurs y_i en centimètres en calculant $y_i = 100x_i$, et donc $\bar{y} = 100\bar{x}$.

COURS

Remarque : par linéarité, la précision des données se retrouve sur la moyenne. Lorsqu'on calcule une moyenne, on doit donc fournir un résultat raisonnable compte tenu de la précision des données. Donner une moyenne au cm près des distances parcourues en km par des avions n'a pas de sens.
En revanche, parler d'une moyenne de 1,96 enfants par femme a un sens car le nombre d'enfants, dans chaque cas, est un entier, donc connu avec une précision infinie. On pourrait donc donner encore plus de chiffres. Cependant, on s'arrête en général à 3 chiffres significatifs car cela suffit pour les comparaisons et interprétations courantes.

1.4 Influence d'une valeur sur la moyenne et la médiane

Pour la série 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 14, la moyenne et la médiane valent 11. Si l'on ajoute la valeur 0, la moyenne devient $\frac{55}{6} \approx 9{,}17$, alors que la médiane devient $\frac{10+11}{2} = 10{,}5$.
La moyenne est sensible aux valeurs extrêmes ; la médiane l'est beaucoup moins.

1.5 L'écart interquartile

On compare deux séries de vingt notes rangées par ordre croissant. La série 1 :

6	6	7	8	8	10	10	10	11	11
12	12	12	14	15	17	17	18	18	20

et la série 2 :

6	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	20

Ces deux séries ont la même moyenne (12,1) et la même étendue $20 - 6 = 14$. Or elles sont très différentes.

Pour mieux caractériser leur dispersion, on utilise la médiane et les quartiles.

Définition 1 : médiane

Les n valeurs de la série étant rangées dans l'ordre croissant, la *médiane* M_e est :

- la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$ si n est impair ;
- la demi-somme des valeurs de rangs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$ si n est pair.

Au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à M_e, et au moins la moitié lui sont supérieures ou égales.

Définition 2 : quartiles

Le *premier quartile* Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales. Le *troisième quartile* Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

Remarque : avec cette définition, les quartiles sont toujours des valeurs de la série : Q_1 est la valeur dont le rang est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{n}{4}$, et Q_3 celle dont le rang est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{3n}{4}$.

La série 1 contient 20 notes. Comme $\frac{20}{4} = 5$, Q_1 est la 5ème note, c'est-à-dire 8 : un quart des notes sont inférieures ou égales à 8.

La médiane est la demi-somme des 10ème et 11ème notes : $M_e = \frac{11+12}{2} = 11{,}5$ (10 notes sont inférieures ou égales à 11 et 10 notes supérieures ou égales à 12).

Comme $\frac{3 \times 20}{4} = 15$, Q_3 est la 15ème note, c'est-à-dire 15.

Définition 3 : écart interquartile

L'*écart interquartile* de cette série est la différence $Q_3 - Q_1$. Plus il est petit, plus la série est resserrée.

Il est moins sensible aux valeurs extrêmes de la série, puisqu'on ne tient compte ni du quart supérieur, ni du quart inférieur de la série.

Dans la série 2, on a : $Q_1 = Q_3 = 12$, donc l'écart interquartile est nul. La série est quasiment constante (les deux valeurs extrêmes 6 et 20 sont *aberrantes*).

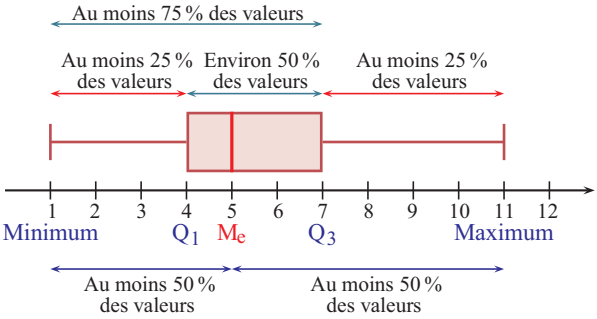
Remarque : L'intervalle interquartile $[Q_1 ; Q_3]$ contient au moins 50 % des valeurs de la série (au moins la moitié).

Remarque : Les valeurs extrêmes (minimum et maximum), la médiane et les deux quartiles Q_1 et Q_3 donnent des indications sur la répartition des valeurs d'une série. Ils permettent de partager une série en quatre parties contenant chacune au moins un quart de l'effectif total.

Définition 4 : diagramme en boîte

Le *diagramme en boîte* (ou *boîte à moustaches*) est un diagramme qui regroupe ces différentes valeurs.

COURS



1.6 Écart type

L'étendue ou l'écart interquartile ont l'inconvénient de ne reposer, finalement, que sur deux valeurs particulières de la série.

Pour fabriquer un indicateur qui rende compte de tous les écarts $|x_i - \bar{x}|$, on pourrait calculer la moyenne de ces écarts.

Pour éviter les calculs avec les valeurs absolues, on préfère faire la moyenne des *carrés* : $(x_i - \bar{x})^2$. Une moyenne de carrés est homogène au carré des valeurs de la série. On obtient une grandeur comparable à celles de la série en revenant à la racine carrée, d'où la formule de l'écart type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{n_1 + \cdots + n_k}}.$$

Lorsque σ est petit, la plupart des écarts $|x_i - \bar{x}|$ sont petits : la série est resserrée autour de sa moyenne. Une valeur isolée peut toutefois s'en écarter beaucoup.

Pour de nombreuses séries dont l'histogramme a une forme de cloche, on observe environ 68 % des valeurs dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma\,;\,\bar{x} + \sigma]$ et environ 95 % dans $[\bar{x} - 2\sigma\,;\,\bar{x} + 2\sigma]$.

Pour comparer deux séries, on utilise en général l'un des deux couples d'indicateurs (moyenne ; écart type) ou (médiane ; écart interquartile).

Solution de l'exercice type 1

Lycée Saint Aspais, Melun

1 La somme des notes des filles est 143, d'où une moyenne de :

$$\frac{143}{12} \approx 11{,}9;$$

celle des garçons est 177, d'où une moyenne de :

$$\frac{177}{18} \approx 9{,}8.$$

Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée Saint Aspais, Melun

2 On a calculé la moyenne de deux sous-groupes, on peut donc calculer celle de la classe. Pour ne pas cumuler les arrondis, on utilise les valeurs exactes :

$$\bar{x} = \frac{12 \times \frac{143}{12} + 18 \times \frac{177}{18}}{12+18} = \frac{143+177}{30} = \frac{320}{30} \approx 10{,}7.$$

3 On avait des notes x_i, on ajoute 1 point à chacune, on obtient de nouvelles notes $y_i = x_i + 1$. Par linéarité de la moyenne :

$$\bar{y} = \bar{x} + 1 = \frac{350}{30} \approx 11{,}7.$$

4 On ajoute 3 points au garçon, donc 3 points au total des notes. Dans le calcul de la moyenne, ce total est divisé par 30 (effectif de la classe) : on ajoute donc $\frac{3}{30} = 0{,}1$ à la moyenne, qui devient $\frac{353}{30} \approx 11{,}8$.

Voir énoncé page 287

2 Séries regroupées en classes

Exercice type 2 — Lycée Virlogeux, Riom

On a relevé les tailles, en centimètres, des 25 élèves d'une classe. Les résultats sont regroupés en classes dans le tableau ci-dessous :

Taille (cm)	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 180[
Effectif	8	14	3

1 Recopier le tableau et le compléter par une ligne donnant le centre de chaque classe, une ligne donnant la fréquence de chaque classe et une ligne donnant les fréquences cumulées croissantes.

2 Construire l'histogramme des fréquences de cette série, puis, dans le même repère, le polygone des fréquences cumulées croissantes.

3 En utilisant les centres des classes, calculer la taille moyenne des élèves de cette classe.

4 Déterminer la classe médiane, puis donner une estimation de la médiane à l'aide du polygone des fréquences cumulées croissantes.

5 Pourquoi les résultats des questions 3 et 4 ne sont-ils que des estimations ?

Voir corrigé page 295

COURS

2.1 Histogramme et moyenne

Définition 5

Lorsque le nombre de valeurs prises par une série statistique est très grand, on peut regrouper ces dernières sous forme d'*intervalles* appelés **classes**. Les effectifs associés à chaque classe décomptent le nombre de valeurs de la série situées dans cette classe.

Remarque : On dit qu'une telle série a une *répartition uniforme* lorsque les valeurs sont réparties équitablement à l'intérieur de chaque classe.

Classe	$[a_1 ; a_2[$	$[a_2 ; a_3[$	$\dots$	$[a_p ; a_{p+1}[$
Effectif	n_1	n_2	$\dots$	n_p

Définition 6 : histogramme

On peut représenter une série regroupée en classes à l'aide d'un *histogramme*. Ce dernier est constitué de rectangles adjacents ayant pour base chacune des classes de la série statistique et dont l'aire est proportionnelle à l'effectif. Dans le cas de classes de même amplitude, la hauteur est également proportionnelle à l'effectif.

Propriété 1 : moyenne d'une série regroupée en classes

Si l'on connaît l'effectif n_i et la moyenne m_i de chaque classe, la moyenne de la série est la moyenne pondérée $\bar{x} = \dfrac{n_1 m_1 + \cdots + n_k m_k}{n_1 + \cdots + n_k}$.
Si l'on suppose la répartition uniforme dans chaque classe, la moyenne de chaque classe est son *centre* c_i, et on obtient $\bar{x} = \dfrac{n_1 c_1 + \cdots + n_k c_k}{n_1 + \cdots + n_k}$.

Exemple : dans l'exercice d'introduction, si les moyennes réelles des trois classes sont 156,5 cm, 164 cm et 171 cm, la taille moyenne est :

$$\bar{x} = \frac{8 \times 156{,}5 + 14 \times 164 + 3 \times 171}{25} = \frac{4\,061}{25} = 162{,}44 \text{ cm},$$

contre 163 cm en utilisant les centres des classes.

2.2 Polygone des fréquences cumulées croissantes et médiane

Définition 7 : polygone des fréquences cumulées croissantes

On peut représenter une série regroupée en classes sous la forme d'un *polygone des fréquences cumulées croissantes*. Cette représentation graphique est obtenue en reliant successivement, par des segments, le point de coordonnées $(a_1\,;0)$ et les points ayant pour abscisse la borne supérieure a_{i+1} de chaque classe $[a_i\,;a_{i+1}[$ et pour ordonnée la fréquence cumulée croissante de cette classe.

Propriété 2 : classe médiane

La *classe médiane* est la première classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante dépasse 50%. On estime alors la médiane à l'intérieur de cette classe (répartition supposée uniforme), à l'aide du polygone des fréquences cumulées croissantes : c'est l'abscisse du point du polygone d'ordonnée 0,5.

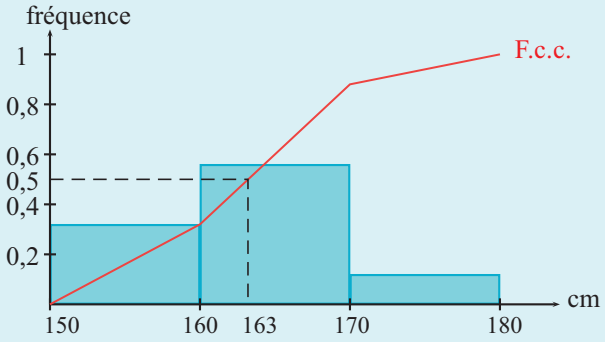
Solution de l'exercice type 2 — Lycée Virlogeux, Riom

1 Le centre d'une classe $[a\,;b[$ est $\dfrac{a+b}{2}$ et la fréquence d'une classe est $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ avec $N = 25$. On obtient :

Taille (cm)	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 180[
Centre c_i	155	165	175
Effectif n_i	8	14	3
Fréquence f_i	0,32	0,56	0,12
F.c.c. (*)	0,32	0,88	1

(*) F.c.c. = Fréquence cumulée croissante

2 Les classes ont toutes la même amplitude (10 cm), donc la hauteur de chaque rectangle est égale à la fréquence de la classe. Le polygone des fréquences cumulées croissantes relie les points (150 ; 0), (160 ; 0,32), (170 ; 0,88) et (180 ; 1).



COURS

Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Virlogeux, Riom

3 On remplace chaque valeur d'une classe par le centre de cette classe :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{8 \times 155 + 14 \times 165 + 3 \times 175}{25} \\ &= \frac{1\,240 + 2\,310 + 525}{25} \\ &= \frac{4\,075}{25} \\ &= 163.\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser les fréquences :

$$\bar{x} = 0{,}32 \times 155 + 0{,}56 \times 165 + 0{,}12 \times 175 = 163.$$

La taille moyenne des élèves est estimée à 163 cm.

4 La fréquence cumulée croissante vaut 0,32 à la fin de la classe [150 ; 160[et 0,88 à la fin de la classe [160 ; 170[. C'est donc dans la classe [160 ; 170[qu'elle atteint 0,5 : c'est la *classe médiane*.

Pour estimer la médiane, on lit sur le polygone l'abscisse du point d'ordonnée 0,5. On peut aussi faire le calcul par interpolation linéaire sur le segment qui relie (160 ; 0,32) à (170 ; 0,88) :

$$M_e \approx 160 + 10 \times \frac{0{,}5 - 0{,}32}{0{,}88 - 0{,}32} = 160 + 10 \times \frac{0{,}18}{0{,}56} \approx 163{,}2.$$

La taille médiane est estimée à environ 163 cm.

5 On ne connaît pas les tailles exactes des élèves, seulement leur classe. Pour la moyenne, on suppose que toutes les valeurs d'une classe sont égales à son centre. Pour la médiane, on suppose que les valeurs sont réparties régulièrement à l'intérieur de chaque classe. Ces hypothèses ne sont pas exactement vérifiées, d'où des estimations.

Voir énoncé page 293

1 QCM Paramètres d'une série

15 min — Corrigé p. 308

Pour chaque question, indiquer la ou les bonnes réponses.

Une série statistique est résumée dans le tableau suivant :

Valeurs	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	10	12	14	13	17	15	19

1 La médiane de cette série vaut :

a 4 b 5 c 13 d 50

2 Les premier et troisième quartiles de cette série sont :

a 25 et 75 b 2 et 6 c 3 et 5 d 3 et 6

3 La moyenne de la série est :

a un entier compris entre 10 et 19 b égale à 4,36

c égale à $\frac{100}{7}$ d environ 15,6

4 L'écart type de la série arrondi au centième est :

a 2,81 b 1,97 c 2,57 d 6,00

2 QCM Propriétés de la moyenne

15 min — Corrigé p. 308

Pour chaque question, indiquer la ou les bonnes réponses.

Dans une classe de 30 élèves, l'un d'entre eux était absent lors de l'interrogation écrite de mathématiques. La moyenne des 29 notes est 12.

1 Si l'élève absent refuse à son retour de rattraper le devoir et se voit attribuer la note 0 :

a cela ne change pas la moyenne de la classe.

b cela baisse la moyenne de $\frac{12}{30}$ soit 0,4 point.

c cela baisse la moyenne de $\frac{12}{29}$.

d la moyenne est multipliée par $\frac{29}{30}$.

2 Finalement, l'élève rattrape son devoir et obtient 16. La moyenne, notée $\bar{x}$, est alors :

a $\frac{29 \times 12 + 16}{29}$ b $\frac{12 + 16}{2}$

c supérieure à 12 d $\frac{29 \times 12 + 16}{30}$

INTERROS

3 Un élève constate qu'il lui manque 4 points. Après correction, la moyenne des 30 notes devient :

a $\dfrac{\bar{x} \times 30 + 4}{30}$ **b** $\dfrac{\bar{x} \times 30 + 4}{31}$ **c** $\bar{x} + 4$ **d** $\bar{x} + \dfrac{4}{30}$

4 Pour cette question, on suppose que la moyenne est 12,5. Considérant le devoir un peu long, le professeur ajoute en compensation un point à chacune des 30 notes. Alors :

a la moyenne augmente de 1.

b la moyenne augmente de $\dfrac{1}{30}$.

c la moyenne est multipliée par $\dfrac{13{,}5}{12{,}5}$.

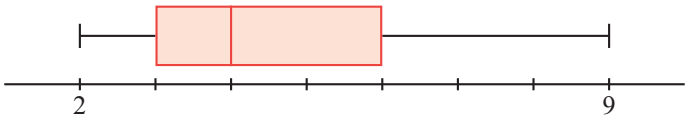
d chaque note est multipliée par $\dfrac{13{,}5}{12{,}5}$.

3 QCM Diagramme en boîte

15 min — Corrigé p. 309

Pour chaque question, indiquer la ou les bonnes réponses.

Voici le diagramme en boîte associé à une série statistique dont les valeurs extrêmes sont 2 et 9.



1 L'écart interquartile de cette série est :

a 1 **b** 3 **c** 4 **d** 7

2 La moyenne de la série :

a est certainement supérieure à 5.

b est certainement inférieure à 5.

c est certainement comprise entre 3 et 6.

d n'a aucune des propriétés précédentes.

3 Il est *faux* de dire qu'au moins 25 % des données sont :

a au moins égales à 3.

b au plus égales à 3.

c égales à plus de 6.

d égales à moins de 6.

4 On considère deux séries ayant le même diagramme en boîte. Alors :

a elles ont les mêmes valeurs.

b elles ont au moins 4 valeurs en commun.

c elles ont la même moyenne.

d elles ont la même médiane.

4 V/F Écart interquartile

5 min — Corrigé p. 309

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Dans le cas où l'affirmation est fausse, donner un contre-exemple.

1. La fréquence des valeurs d'une série statistique est toujours comprise entre 0 et 1.
2. L'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ contient au moins 50 % de l'effectif de la série.
3. Si l'écart interquartile d'une série est nul, alors toutes les valeurs de la série sont nulles.
4. Si le premier quartile et la médiane sont confondus, alors l'écart interquartile est nul.

Automatismes

5 Lire et commenter des graphiques ★

15 min — Corrigé p. 310

Lycée Louis Vincent, Metz

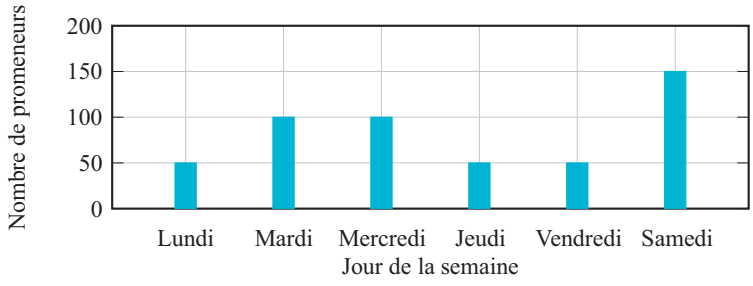
1. Un diagramme semi-circulaire est partagé en 3 parts correspondant à 50%, 25% et 25%. Quelle est la mesure de l'angle de la part 50% ?

   [a] 45° [b] 90° [c] 180° [d] 360°

2. Dans un diagramme circulaire, une mesure d'angle de 180° représente :

   [a] la moitié du diagramme [b] la totalité du diagramme
   [c] le quart du diagramme [d] le tiers du diagramme

3. La semaine dernière, le gardien du jardin botanique a relevé le nombre de promeneurs venus dans le jardin. Le graphique ci-dessous représente la répartition de ces promeneurs en fonction des jours de cette semaine.

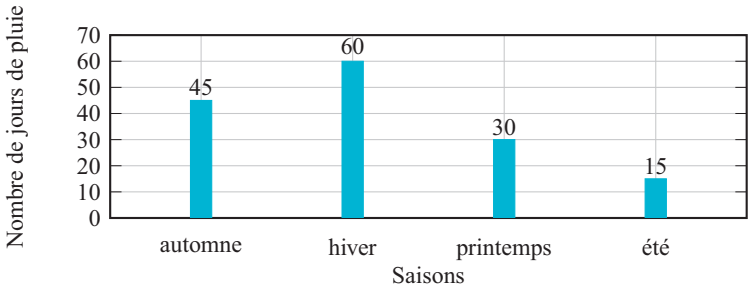


Par rapport au nombre total de promeneurs, quel est le pourcentage de ceux qui sont venus le jeudi ?

[a] 25% [b] 10% [c] 20% [d] 50%

INTERROS

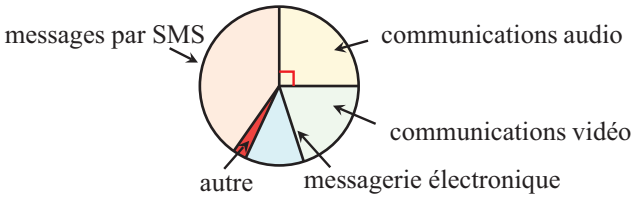
4 Au cours de l'an passé, il a plu 150 jours dans une ville. Voici la répartition des jours de pluie au cours des saisons dans cette ville.



Par rapport au nombre total de jours de pluie, quel est le pourcentage de jours pluvieux qui ont eu lieu au printemps ?

a 3% **b** 20% **c** 25% **d** 30%

5 Voici la répartition des communications effectuées par des lycéens avec leur téléphone portable :



Quelle proportion des communications effectuées les communications audio représentent-elles ?

a 90% **b** 45% **c** 25% **d** 20%

6 Voici une série de valeurs : 20 ; 0 ; 9 ; 10 ; 17 ; 14 ; 0

La moyenne de cette série est 10. Quelle est la justification correcte parmi les propositions suivantes :

a La moyenne est 10 car c'est la moitié de 20.

b La moyenne est 10 car il y a dans la série autant de valeurs inférieures à 10 que de valeurs supérieures à 10.

c La moyenne est 10 car la valeur 10 est au milieu de la série.

d La moyenne est 10 car : $\dfrac{20+0+9+10+17+14+0}{7} = 10$

Indicateurs d'une série statistique

6 Comparaison de séries

★ 10 min Corrigé p. 310

Lycée Albert Camus, Saint-Cloud

Dans les rayons d'un supermarché, on a relevé les masses, en kg, de deux catégories de poulets :

Poulets fermiers : 2,930 ; 3,120 ; 3,280 ; 2,960 ; 3,355 ; 2,875.

Poulets bio : 3,540 ; 4,280 ; 3,980 ; 2,685 ; 3,625 ; 3,150.

1. Déterminer à l'aide de la calculatrice les moyennes et les écarts types pour chaque catégorie de poulets.
2. Quelle est la série la plus dispersée ?

MÉTHODE

L'écart type sert à mesurer la dispersion d'une série, mais n'est vraiment significatif pour comparer la dispersion de deux séries, que si les valeurs étudiées sont du même ordre de grandeur.

7 Âge des élèves

★ 15 min Corrigé p. 310

Lycée Jacques Monod, Clamart

L'âge des élèves d'un lycée, à leur entrée en Seconde, se répartit comme suit :

Âge (ans)	13	14	15	16	17
Répartition (%)	4	12	52	24	8

1. Calculer l'âge moyen à l'entrée en Seconde dans le lycée.
2. Déterminer l'écart interquartile et l'écart type. Que peut-on en dire ?

8 Lancers de dé

★ 15 min Corrigé p. 311

Lycée Sacré-Cœur, Aix-en-Provence

On lance deux dés et on ajoute les numéros obtenus à chaque lancer. On remplit le tableau suivant :

Résultats	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	302	497	904	1 086	1 408	1 640	1 341	1 122	813	575	312
Fréquences (en %)											

1. Déterminer pour chaque colonne la fréquence (en %).
2. Quelles sont la moyenne et l'écart type de cette série ?
3. Quelle est la fréquence de l'événement : « la somme des deux dés est supérieure ou égale à 5 » ?

INTERROS

9 Prix de la baguette

★ — 15 min — Corrigé p. 311

Lycée Descartes, Tours

Le prix d'une baguette a été relevé dans les boulangeries de Farineville :

Prix (en centimes)	75	80	85	90	95
Effectifs	2	5	8	4	1
Fréquences					

1. Compléter le tableau.
2. Déterminer la moyenne de cette série.
3. Quel est son écart interquartile ?
4. Une boulangerie supplémentaire ouvre et vend sa baguette à 70 centimes. Quel est l'effet sur la moyenne ?
5. Quel est l'effet de cette ouverture sur la médiane ?

10 Série de masses

★ — 20 min — Corrigé p. 312

Lycée Henri IV, Béziers

Les masses en kilogrammes d'une série de personnes se répartissent ainsi :

Masses	62	66	70	74	78	82	86
Fréquences	7 %	12 %	36 %	15 %	16 %	10 %	4 %
Fréquences cumulées							

1. Calculer la moyenne des masses de ces personnes.
2. Compléter le tableau par les fréquences cumulées croissantes.
3. Déterminer l'écart interquartile.
4. Quel est le pourcentage des personnes pesant moins de 72 kg ?
5. Quel est le pourcentage des personnes pesant au moins 80 kg ?

11 Notes d'un élève

★★ — 10 min — Corrigé p. 313

Lycée Camille Sée, Paris

Après 4 devoirs, la moyenne d'un élève est 9,5. Quelle doit être sa cinquième note pour que sa moyenne soit de 10 ?

12 Effet de structure

★★ 15 min Corrigé p. 313

Lycée Virlogeux, Riom

Le tableau suivant donne la répartition des effectifs des ouvriers et cadres d'une entreprise, et leurs salaires mensuels en euros, en 2006 et 2012.

	2006		2012	
	Effectifs	Salaires	Effectifs	Salaires
Cadres	30	2 800	25	3 000
Ouvriers	45	1 100	60	1 200

Le chef d'entreprise, face aux délégués du personnel, se félicite du fait que tous les employés ont été augmentés, cadres comme ouvriers.

Les délégués lui répondent qu'ils ne sont pas du tout satisfaits puisque le salaire moyen des employés a diminué entre 2006 et 2012.

Qui a raison ?

13 Course à pied

★★ 20 min Corrigé p. 313

Lycée Claude Bernard, Paris

Dans un groupe de 25 coureurs de 100 m (15 femmes et 10 hommes) :

1. La moyenne des temps des femmes est de 12,32 s ; celle des hommes est de 11,48 s. Quelle est la moyenne de l'ensemble des coureurs ?
2. Après un mois d'entraînement, la moyenne des temps des femmes a diminué de 0,21 s et celle des hommes a diminué de 0,13 s. De combien la moyenne de l'ensemble a-t-elle varié ?
3. L'entraîneur sélectionne alors 10 hommes et 10 femmes. Outre les 10 hommes, il choisit les 10 femmes les plus rapides, dont la moyenne des temps (après l'entraînement) est de 11,97 s. Quelle est la moyenne des temps des femmes qui n'ont pas été sélectionnées ?

Diagramme en boîte

14 Construction d'un diagramme

★ 10 min Corrigé p. 314

Lycée Montaigne, Bordeaux

Le tableau suivant donne la répartition des élèves d'un lycée suivant leur âge :

Âge	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	126	210	269	332	190	75	9

1. Déterminer, en expliquant la méthode utilisée, la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 de cette série.

2 Construire le diagramme en boîte de cette série.

3 Donner l'intervalle interquartile et faire une phrase qui interprète ce résultat.

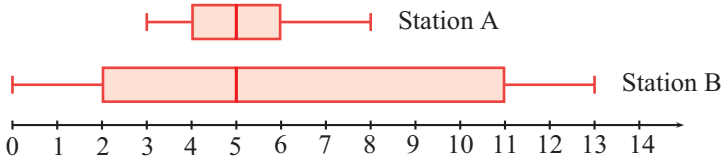
15 Surveillance de l'air

★ — 15 min — Corrigé p. 315

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

On étudie les concentrations de dioxyde de soufre mesurées par deux stations de contrôle de la qualité de l'air.

Les diagrammes en boîte suivants concernent les mesures horaires effectuées aux stations A et B tout au long de la journée du 23 novembre 2010. La concentration est exprimée en millionièmes de grammes par mètre cube ($\mu g/m^3$).



1 Pour chacune des stations, indiquer la médiane, et calculer l'écart interquartile ainsi que l'étendue de la série des mesures.

2 Indiquer par lecture graphique, et en précisant les paramètres statistiques utilisés, sur quelle(s) station(s), ce jour-là :

(a) la dispersion des mesures a été la plus importante ;

(b) la moitié au moins des mesures ont été inférieures ou égales à 5 ;

(c) 75 % des mesures au moins ont été inférieures ou égales à 6.

16 Contrôle

★★ — 20 min — Corrigé p. 315

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

Un scientifique étudie les plants d'un champ de tournesol, et cherche à identifier si les semences utilisées sont des semences « de ferme », c'est-à-dire produites par l'agriculteur sur sa récolte de l'année précédente, ou des semences certifiées du commerce.

Voici les résultats exprimés en cm :

Taille	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129
Effectif	1	2	0	5	7	5	8	6	8	7

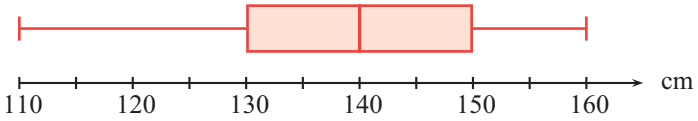
Taille	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139
Effectif	8	5	7	4	4	1	2	3	1	1

1 **(a)** Déterminer la médiane, ainsi que les 1er et 3e quartiles de cette série.

(b) Calculer l'étendue et l'intervalle interquartile.

2 Construire le diagramme en boîte correspondant à cette série, en utilisant un axe gradué de 110 à 160 cm.

3 Le diagramme en boîte ci-dessous correspond à un prélèvement effectué dans un champ de tournesols issus de semences de ferme.



(a) Reproduire ce diagramme sur le graphique précédent.

(b) Les tournesols étudiés semblent-ils du même type ? Argumenter la réponse.

17 Comparer la dispersion

★★ — 20 min — Corrigé p. 316

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

Deux enseignants d'EPS ont relevé les fréquences cardiaques au repos de leurs élèves. Ils ont obtenu les résultats suivants :

Pulsations	45	49	52	56	60	65	67	69
Prof. 1	1	3	2	5	7	8	5	6
Prof. 2	0	1	2	1	3	4	3	5

Pulsations	70	72	73	75	76	80	81	82
Prof. 1	4	3	1	2	3	1	0	1
Prof. 2	6	5	8	4	3	4	2	2

1 Construire sur un même graphique le diagramme en boîte correspondant à chacune des deux séries.

2 Donner l'écart interquartile de chaque série. Comparer la dispersion des deux séries.

3 En général, la fréquence cardiaque est, pour des raisons métaboliques, plus élevée chez la femme que chez l'homme. Chez quel enseignant peut-on supposer, d'après ce critère, que la proportion de jeunes filles est la plus importante ?

Séries regroupées en classes

18 Moyenne à partir des moyennes de classes

★ — 10 min — Corrigé p. 316

Lycée Louis Vincent, Metz

On a relevé la durée, en minutes, du trajet domicile-lycée des 40 élèves d'une classe. Pour chaque classe de durée, on connaît l'effectif et la moyenne des durées des élèves concernés (voir tableau page suivante).

INTERROS

Durée (min)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[
Effectif	12	20	8
Moyenne de la classe (min)	13	28	47

1. Calculer la durée moyenne du trajet des élèves de cette classe.
2. Calculer une estimation de cette moyenne en utilisant les centres des classes.
3. Pourquoi les deux résultats sont-ils différents ?

19 Temps de trajet

★ — 10 min — Corrigé p. 317

Lycée Brizeux, Quimper

La répartition des 200 salariés d'une entreprise d'après la durée du trajet aller qu'ils effectuent pour se rendre à leur lieu de travail est relevée dans un tableau.

1. Compléter ce tableau :

Durée en minutes	n_i (effectifs)	f_i (fréquences) en %	Effectifs cumulés croissants
[5 ; 10[		5	
[10 ; 15[	30		
[15 ; 20[			110
[20 ; 25[		30	
[25 ; 30[			

2. On identifie chaque classe à son centre (ce qui revient, par exemple, à considérer qu'un temps de trajet entre 5 et 10 min. est égal à 7,5 min.) Déterminer la moyenne du temps de trajet. Expliquer pourquoi on peut arrondir à la minute près.
3. Calculer l'écart type σ du temps de trajet. Pour combien de valeurs, approximativement, l'écart à la moyenne est-il inférieur à σ ?

20 Polygone des fréquences

★★ — 20 min — Corrigé p. 317

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Une entreprise fabrique des rubans en dentelle, de longueurs différentes selon la complexité du motif et la qualité du fil utilisé. Le tableau suivant présente la production d'une semaine :

Longueur en mètres	[2 ; 2,50[	[2,50 ; 3[	[3 ; 3,50[	[3,50 ; 4[	[4 ; 4,50[
Nombre de rubans	40	70	45	45	50

1. Quelle est l'étendue de la série statistique étudiée ?
2. Quelle est la classe modale de cette série statistique ? (la classe modale est la classe de plus grand effectif.)
3. Quelle est la classe médiane de la série ?
4. Déterminer la moyenne de la série à 0,1 près.
5. Dresser l'histogramme des effectifs de la série.
6. Représenter graphiquement sur papier millimétré le polygone des fréquences cumulées croissantes. En déduire ce que pourrait être la valeur de la médiane de cette série, à 0,1 mètre près. Ce résultat est-il compatible avec la réponse de la question 3 ?

21 Avec les classes (pour aller plus loin) ★★★

40 min Corrigé p. 319

Lycée Henri IV, Paris

Une étude des achats sur un échantillon de 484 clients d'une supérette a donné les résultats suivants :

Montant des achats en euros	]0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[
Nombre de clients	3	7	18	24

Montant des achats en euros	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[
Nombre de clients	32	51	70	47

Montant des achats en euros	[80 ; 90[	[90 ; 100[	[100 ; 110[
Nombre de clients	41	70	50

Montant des achats en euros	[110 ; 120[	[120 ; 130[	[130 ; 140[
Nombre de clients	43	26	2

1. Calculer le montant moyen des achats, $\bar{x}$, en utilisant le centre des classes.
2. Déterminer la classe médiane.
3. **(a)** Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
   (b) Effectuer une détermination graphique de la médiane, et des quartiles de cette série.
   (c) Lire sur le graphique le montant D_1 tel que 10 % des achats lui soient inférieur ou égal, ainsi que le montant D_9 tel que 90 % des achats lui soit inférieur ou égal. (Ce sont les 1er et 9e déciles.)
   (d) Construire le diagramme en boîte de cette série en limitant les barres à D_1 et D_9.
4. **(a)** Calculer l'écart type σ de cette distribution.
   (b) Déterminer graphiquement le pourcentage de clients dont les achats sont compris entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$.

CORRIGÉS

1 QCM Paramètres d'une série

Énoncé p. 297

L'effectif total est $N = 10+12+14+13+17+15+19 = 100$. Les effectifs cumulés croissants sont 10 ; 22 ; 36 ; 49 ; 66 ; 81 ; 100.

1 *Réponse* **b**. $N = 100$ est pair, donc la médiane est la demi-somme des valeurs de rang 50 et 51. Les valeurs de rang 50 à 66 sont égales à 5, donc $M_e = 5$.

2 *Réponse* **d**.

- $\dfrac{100}{4} = 25$: Q_1 est la valeur de rang 25, soit $Q_1 = 3$ (rangs 23 à 36).
- $\dfrac{3 \times 100}{4} = 75$: Q_3 est la valeur de rang 75, soit $Q_3 = 6$ (rangs 67 à 81).

3 *Réponse* **b**.

$$\bar{x} = \frac{10 \times 1 + 12 \times 2 + 14 \times 3 + 13 \times 4 + 17 \times 5 + 15 \times 6 + 19 \times 7}{100}$$
$$= \frac{436}{100} = 4{,}36.$$

4 *Réponse* **b**.

$$\sigma = \sqrt{\frac{10 \times (1-4{,}36)^2 + 12 \times (2-4{,}36)^2 + \cdots + 19 \times (7-4{,}36)^2}{100}}$$
$$= \sqrt{3{,}8704} \approx 1{,}97 \text{ (ou directement à la calculatrice).}$$

MÉTHODE

Pour déterminer la médiane et les quartiles, il est indispensable que les données soient ordonnées (de préférence par ordre croissant), et si elles sont regroupées dans un tableau selon leurs valeurs, il faut bien tenir compte de l'effectif de chaque valeur.

2 QCM Propriétés de la moyenne

Énoncé p. 297

La somme des 29 notes est $29 \times 12 = 348$.

1 *Réponses* **b** *et* **d**. La nouvelle moyenne est :

$$\frac{348+0}{30} = 11{,}6 = 12 - \frac{12}{30} = 12 \times \frac{29}{30}.$$

2 *Réponses* **c** *et* **d**. $\bar{x} = \dfrac{29 \times 12 + 16}{30} = \dfrac{364}{30} \approx 12{,}13 > 12$.

3 *Réponses* **a** *et* **d**. La somme des notes augmente de 4 et l'effectif reste 30, donc la moyenne devient $\dfrac{\bar{x} \times 30 + 4}{30} = \bar{x} + \dfrac{4}{30}$.

4 *Réponses* **a** *et* **c**. D'après la linéarité de la moyenne, ajouter 1 à chaque note augmente la moyenne de 1 : elle passe de 12,5 à 13,5, ce qui revient à la multiplier par $\frac{13{,}5}{12{,}5}$. En revanche, les notes ne sont pas multipliées par ce nombre.

3 QCM Diagramme en boîte

Énoncé p. 298

Par lecture graphique : Min $= 2$, $Q_1 = 3$, $M_e = 4$, $Q_3 = 6$ et Max $= 9$.

1 *Réponse* **b**. $Q_3 - Q_1 = 6 - 3 = 3$.

2 *Réponse* **c**. Au plus 25 % des valeurs dépassent $Q_3 = 6$ (et elles valent au plus 9), au moins 50 % sont inférieures ou égales à 4 et au moins 25 % à 3 : la moyenne est donc au plus $\frac{3+4+6+9}{4} = 5{,}5 < 6$. De même, moins de 25 % des valeurs sont inférieures à 3 (et valent au moins 2) et plus de 25 % sont supérieures ou égales à 6 : la moyenne est au moins $\frac{2+3+4+6}{4} = 3{,}75 > 3$.

En revanche, on ne peut pas la situer par rapport à 5 : les séries

$$2\,;\,3\,;\,3\,;\,4\,;\,4\,;\,6\,;\,6\,;\,9 \text{ (moyenne 4,625)}$$

et

$$2\,;\,3\,;\,4\,;\,4\,;\,4\,;\,6\,;\,9\,;\,9 \text{ (moyenne 5,125)}$$

ont toutes deux ce diagramme en boîte.

3 *Réponse* **c**. On sait qu'au moins 25 % des données sont supérieures ou égales à $Q_3 = 6$, mais pas qu'elles sont strictement supérieures à 6. Les trois autres affirmations sont vraies : au moins 25 % des données sont inférieures ou égales à $Q_1 = 3$, donc inférieures à 6, et au moins 75 % sont supérieures ou égales à 3.

4 *Réponses* **b** *et* **d**. Le minimum, le maximum, Q_1 et Q_3 sont des valeurs de chacune des deux séries, qui ont donc au moins ces 4 valeurs en commun. Elles ont aussi la même médiane, mais pas forcément les mêmes valeurs ni la même moyenne.

4 V/F Écart interquartile

Énoncé p. 299

1 *Vrai*. La fréquence d'une valeur est $f_i = \frac{n_i}{N}$ avec $0 \leqslant n_i \leqslant N$, donc $0 \leqslant f_i \leqslant 1$.

2 *Vrai*. Moins de 25 % des valeurs sont strictement inférieures à Q_1 et au plus 25 % des valeurs sont strictement supérieures à Q_3. L'intervalle $[Q_1\,;\,Q_3]$ contient donc au moins 50 % de l'effectif, soit environ la moitié.

3 *Faux*. Pour la série 5 ; 5 ; 5 ; 5, on a $Q_1 = Q_3 = 5$ donc $Q_3 - Q_1 = 0$, alors qu'aucune valeur n'est nulle.

4 *Faux*. Pour la série 1 ; 1 ; 1 ; 4 ; 6 ($N = 5$) :

- $\frac{5}{4} = 1{,}25$, donc Q_1 est la valeur de rang 2 : $Q_1 = 1$;
- la médiane est la valeur de rang 3 : $M_e = 1$;
- $\frac{3 \times 5}{4} = 3{,}75$, donc Q_3 est la valeur de rang 4 : $Q_3 = 4$.

On a bien $Q_1 = M_e$, mais l'écart interquartile vaut :

$$Q_3 - Q_1 = 4 - 1 = 3 \neq 0.$$

5 Lire et commenter des graphiques

Énoncé p. 299

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Réponse **b**. Un diagramme semi-circulaire mesure 180°.

2 Réponse **a**. Un diagramme circulaire mesure 360°.

3 Réponse **b**. Il y a eu $50 + 100 + 100 + 50 + 50 + 150 = 500$ visiteurs, dont 50, sont venus le jeudi soit une proportion de $\frac{50}{500} = \frac{1}{10}$ soit 10%.

4 Réponse **b**. Il a plu $45 + 60 + 30 + 15 = 150$ jours dont 30 au printemps soit une proportion de $\frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ soit 20%.

5 Réponse **c**. Les communications audio représentent $\frac{1}{4}$ des communications soit 25%.

6 Réponse **d**. C'est la définition de la moyenne.

6 Comparaison de séries

Énoncé p. 301

Lycée Albert Camus, Saint-Cloud

1 Poulets fermiers : $\bar{x}_1 \approx 3{,}087$ kg et $\sigma_1 \approx 0{,}181$ kg.

Poulets bio : $\bar{x}_2 \approx 3{,}543$ kg et $\sigma_2 \approx 0{,}521$ kg.

2 $\sigma_2 > \sigma_1$: la série des masses des poulets bio est la plus dispersée.

7 Âge des élèves

Énoncé p. 301

Lycée Jacques Monod, Clamart

1 L'âge moyen est $\bar{x} = 15{,}2$.

2 On dépasse 25% à partir de 15 ans et 75% à partir de 16 ans. L'écart interquartile est donc de 1 an.

La calculatrice donne un écart type de 0,89.

Ces deux valeurs montrent que la série n'est pas très dispersée. Il fallait s'y attendre puisque la plupart des élèves ont des âges très proches dans une classe.

8 Lancers de dé

Énoncé p. 301

Lycée Sacré-Cœur, Aix-en-Provence

1 On calcule l'effectif total : $N = 10\,000$. Le calcul des fréquences (en %) se borne donc à « ajouter » une virgule :

Résultats	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	302	497	904	1 086	1 408	1 640	1 341	1 122	813	575	312
Fréquences	3,02	4,97	9,04	10,86	14,08	16,40	13,41	11,22	8,13	5,75	3,12

2 Avec la calculatrice, on obtient une moyenne de 7,0 et un écart type de 2,4.

3 On peut se contenter d'ajouter les fréquences, pour les résultats allant de 5 à 12. Essayons une autre méthode. La somme des 2 dés est strictement inférieure à 5 avec la fréquence :

$$3{,}02 + 4{,}97 + 9{,}04 = 17{,}03\ \%.$$

Elle est donc supérieure ou égale à 5 avec la fréquence :

$$100 - 17{,}03 = 82{,}97\ \%.$$

9 Prix de la baguette

Énoncé p. 302

Lycée Descartes, Tours

1 L'effectif total est $n = 20$. Complétons le tableau et ajoutons la ligne des fréquences cumulées croissants.

Prix (en centimes)	75	80	85	90	95
Effectifs	2	5	8	4	1
Fréquences	0,1	0,25	0,4	0,2	0,05
Fréquences cumulées	0,1	0,35	0,75	0,95	1,00

2 La moyenne est $\bar{x} = 84{,}25$ centimes. La précision des données est au centime près, on donne donc la moyenne au centime près également :

$$\bar{x} \approx 84 \text{ centimes.}$$

3 On atteint ou dépasse 0,25 en fréquences cumulées à partir de 80 c, et on atteint 0,75 à partir de 85 c. L'écart interquartile est donc de 5 c.

4 Tout se passe comme si on avait dans notre nouvelle série deux sous-groupes. Le premier est le sous-groupe des 20 premières boulangeries, de moyenne 84,25 c, donc de total $20 \times 84{,}25 = 1\,685$ c. Le second est

le sous-groupe constitué par la seule nouvelle boulangerie, de moyenne 70 centimes. La moyenne finale est donc :

$$\bar{X} = \frac{1\,685 + 70}{21} = \frac{1\,755}{21} \approx 83{,}6.$$

La moyenne a donc légèrement diminué.

5 Avant l'ouverture, il y a 20 valeurs : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 10 et 11, qui sont toutes deux égales à 85 (rangs 8 à 15). Donc $M_e = 85$.

Après l'ouverture, il y a 21 valeurs : la médiane est la valeur de rang 11. Avec le prix 70 placé en tête, les prix égaux à 85 occupent les rangs 9 à 16 : la médiane reste égale à 85.

La moyenne a baissé, mais la médiane n'a pas changé : la médiane est moins sensible à l'ajout d'une valeur extrême.

10 Série de masses

Énoncé p. 302

Lycée Henri IV, Béziers

1 Pour calculer la moyenne $\bar{x}$, on utilise la formule :

$$\bar{x} = f_1 x_1 + \dots$$

où x_i sont les valeurs et f_i leur fréquence.

On a donc :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 62 \times 0{,}07 + 66 \times 0{,}12 + 70 \times 0{,}36 + 74 \times 0{,}15 \\ &\quad + 78 \times 0{,}16 + 82 \times 0{,}10 + 86 \times 0{,}04 \\ &\approx 72{,}7 \text{ kg}\end{aligned}$$

Comme les valeurs de la série sont visiblement à 2 kg près, donner la moyenne avec une précision beaucoup plus grande est illusoire. Donnons la moyenne au kg près : 73 kg.

2 Pour les fréquences cumulées, on ajoute les fréquences au fur et à mesure des valeurs. Pensez à contrôler que la dernière fréquence cumulée est de 100% ; si ce n'est pas le cas ... vérifiez vos calculs !

Masses	62	66	70	74	78	82	86
Fréquences	7%	12%	36%	15%	16%	10%	4%
Fréquences cumulées	7%	19%	55%	70%	86%	96%	100%

3 La première fréquence cumulée supérieure ou égale à 25 % correspond à 70 kg. Celle où l'on dépasse 75 % correspond à 78 kg. Ces deux valeurs sont donc respectivement le premier et le troisième quartiles de la série, et l'écart interquartile est de 8 kg.

4 Le pourcentage de personnes pesant moins de 72 kg est justement la fréquence cumulée croissante correspondant à 70 kg, soit 55 %.

5 Dans cette série, « au moins 80 kg » signifie 82 ou 86 kg, donc 14 % de la population totale.

11 Notes d'un élève

Énoncé p. 302

Lycée Camille Sée, Paris

Pour avoir une moyenne de 10 sur 5 notes, il faut que le total des notes obtenu soit 50. Pour l'instant, l'élève a une moyenne de 9,5 sur 4 notes, soit un total de $4 \times 9{,}5 = 38$. Il lui faut donc obtenir $50 - 38 = 12$ au prochain devoir pour obtenir 10 de moyenne.

12 Effet de structure

Énoncé p. 303

Lycée Virlogeux, Riom

Le salaire des cadres est passé de 2 800 euros à 3 000 euros et celui des ouvriers de 1 100 euros à 1 200 euros : tous les employés ont bien été augmentés.

Salaire moyen en 2006 : $\dfrac{30 \times 2\,800 + 45 \times 1\,100}{75} = \dfrac{133\,500}{75} = 1\,780\,€$.

Salaire moyen en 2012 : $\dfrac{25 \times 3\,000 + 60 \times 1\,200}{85} = \dfrac{147\,000}{85} \approx 1\,729{,}41\,€$.

Le salaire moyen a donc bien diminué. Les deux ont raison : la baisse de la moyenne vient du changement de structure de l'entreprise. La proportion d'ouvriers, les moins bien payés, est passée de $\dfrac{45}{75} = 60\,\%$ à $\dfrac{60}{85} \approx 70{,}6\,\%$, ce qui fait baisser la moyenne pondérée malgré la hausse de chaque salaire.

13 Course à pied

Énoncé p. 303

Lycée Claude Bernard, Paris

1 On calcule la moyenne pondérée :

$$m = \frac{15 \times 12{,}32 + 10 \times 11{,}48}{25} = 11{,}984.$$

11,984 est le résultat exact donné par la calculatrice. Pour formuler sa réponse, il faut également s'interroger sur la précision des mesures des temps de chaque coureur. Les moyennes sont données au centième près, il faut donc se contenter de ce niveau de précision. Une réponse plus raisonnable est donc : 11,98 s.

2 Pour connaître la variation, on calcule la moyenne pondérée des variations :

$$\Delta = \frac{15 \times 0{,}21 + 10 \times 0{,}13}{25} = 0{,}178.$$

Au centième près, on calcule donc une amélioration de 0,18 s de l'ensemble des performances.

3 La moyenne de l'ensemble des femmes (on la note F) est donnée par l'énoncé, compte tenu de l'amélioration de leurs performances :

$$F = 12{,}32 - 0{,}21 = 12{,}11 \text{ s}.$$

Notons $\bar{x}$ la moyenne des femmes sélectionnées et $\bar{y}$ celle des autres femmes.

La moyenne du groupe féminin est la moyenne pondérée de $\bar{x}$ et $\bar{y}$, d'où l'équation :

$$F = \frac{10\bar{x} + 5\bar{y}}{15}$$
$$\iff 15 \times F = 10\bar{x} + 5\bar{y}$$
$$\iff \frac{15 \times F - 10\bar{x}}{5} = \bar{y}.$$

Comme $\bar{x} = 11{,}97$ et $F = 12{,}11$, il vient : $\bar{y} = 12{,}39$.

14 Construction d'un diagramme

Énoncé p. 303

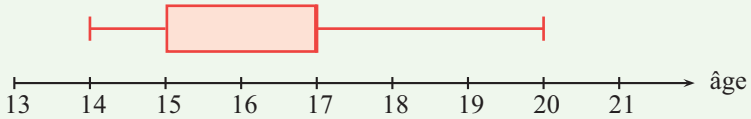
Lycée Montaigne, Bordeaux

1 L'effectif total est $N = 1\,211$. Les effectifs cumulés croissants sont :

Âge	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs cumulés	126	336	605	937	1 127	1 202	1 211

- $N = 1\,211 = 2 \times 605 + 1$ est impair, donc la médiane est la valeur de rang 606. Comme 605 élèves ont 16 ans ou moins et 937 ont 17 ans ou moins, $M_e = 17$.
- $\frac{1\,211}{4} = 302{,}75$, donc Q_1 est la valeur de rang 303 :
$$Q_1 = 15 \text{ (rangs 127 à 336).}$$
- $\frac{3 \times 1\,211}{4} = 908{,}25$, donc Q_3 est la valeur de rang 909 :
$$Q_3 = 17 \text{ (rangs 606 à 937).}$$

2 Le minimum est 14 et le maximum est 20. La médiane et Q_3 sont confondus :



3 L'intervalle interquartile est [15 ; 17]. Au moins la moitié des élèves du lycée ont entre 15 et 17 ans.

MÉTHODE

Pour le diagramme en boîte, il est nécessaire d'avoir la médiane et les quartiles même si l'énoncé ne demande pas explicitement de les calculer. En revanche, la moyenne ne sert pas pour le diagramme en boîte.

15 Surveillance de l'air

Énoncé p. 304

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

1 *Station A* : $M_e = 5$, $Q_3 - Q_1 = 6 - 4 = 2$ et étendue $8 - 3 = 5$.

Station B : $M_e = 5$, $Q_3 - Q_1 = 11 - 2 = 9$ et étendue $13 - 0 = 13$.

2 **(a)** À la station B : son écart interquartile (9 contre 2) et son étendue (13 contre 5) sont plus grands.

(b) Aux deux stations, car leur médiane est égale à 5.

(c) À la station A seulement : son troisième quartile est égal à 6, alors que celui de la station B vaut 11.

16 Contrôle

Énoncé p. 304

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

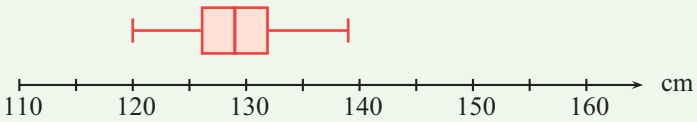
1 **(a)** L'effectif total est $N = 85$. Les effectifs cumulés croissants sont, de 120 à 139 :

1 ; 3 ; 3 ; 8 ; 15 ; 20 ; 28 ; 34 ; 42 ; 49 ; 57 ; 62 ; 69 ; 73 ; 77 ; 78 ; 80 ; 83 ; 84 ; 85.

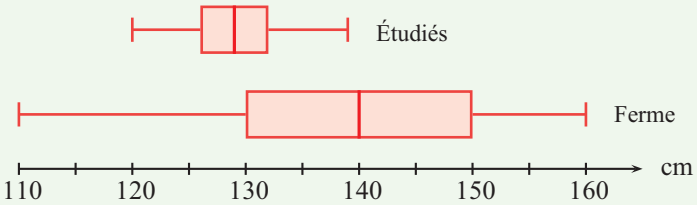
- $N = 85 = 2 \times 42 + 1$: la médiane est la valeur de rang 43, donc $M_e = 129$.
- $\dfrac{85}{4} = 21{,}25$: Q_1 est la valeur de rang 22, donc $Q_1 = 126$.
- $\dfrac{3 \times 85}{4} = 63{,}75$: Q_3 est la valeur de rang 64, donc $Q_3 = 132$.

(b) L'étendue vaut $139 - 120 = 19$ cm. L'intervalle interquartile est [126 ; 132], d'amplitude 6 cm.

2 Diagramme en boîte :



3 **(a)** Les deux diagrammes sur le même axe :



(b) *Non*. Les tournesols issus de semences de ferme sont nettement plus grands (médiane 140 cm contre 129 cm) et leurs tailles sont beaucoup plus dispersées (écart interquartile 20 cm contre 6 cm, étendue 50 cm contre 19 cm). Les tournesols étudiés semblent donc issus de semences certifiées du commerce.

CORRIGÉS

17 Comparer la dispersion

Énoncé p. 305

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

1 *Prof. 1* :

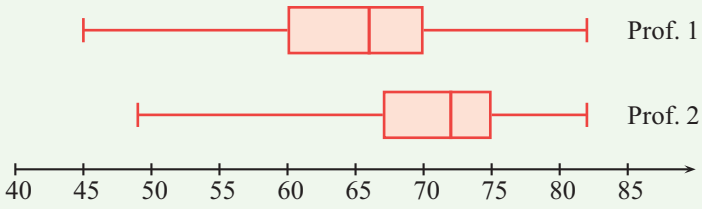
- $N = 52$.
- Q_1 est la valeur de rang 13 : $Q_1 = 60$.
- La médiane est la demi-somme des valeurs de rang 26 et 27 :

$$M_e = \frac{65 + 67}{2} = 66.$$

- Q_3 est la valeur de rang 39 : $Q_3 = 70$. Les extrêmes sont 45 et 82.

Prof. 2 :

- $N = 53$.
- Q_1 est la valeur de rang 14 : $Q_1 = 67$.
- La médiane est la valeur de rang 27 : $M_e = 72$.
- Q_3 est la valeur de rang 40 : $Q_3 = 75$.
- Les extrêmes sont 49 et 82.



2

- Prof. 1 : $Q_3 - Q_1 = 70 - 60 = 10$.
- Prof. 2 : $Q_3 - Q_1 = 75 - 67 = 8$.

Les fréquences cardiaques des élèves du professeur 2 sont un peu moins dispersées que celles des élèves du professeur 1.

3 Les fréquences cardiaques des élèves du professeur 2 sont plus élevées (médiane 72 contre 66, quartiles plus grands). D'après ce critère, on peut supposer que la proportion de jeunes filles est la plus importante chez le professeur 2.

18 Moyenne à partir des moyennes de classes

Énoncé p. 305

Lycée Louis Vincent, Metz

1 On calcule la moyenne pondérée des moyennes des classes :

$$\bar{x} = \frac{12 \times 13 + 20 \times 28 + 8 \times 47}{40} = \frac{156 + 560 + 376}{40} = \frac{1\,092}{40}.$$

On trouve alors $\bar{x} = 27{,}3$ min.

2 Les centres des classes sont 10, 30 et 50 :

$$\frac{12 \times 10 + 20 \times 30 + 8 \times 50}{40} = \frac{120 + 600 + 400}{40} = \frac{1\,120}{40} = 28 \text{ min.}$$

3 Utiliser les centres revient à supposer que les durées sont réparties uniformément dans chaque classe, de sorte que la moyenne de chaque classe est égale à son centre. Ce n'est pas le cas ici (par exemple 13 au lieu de 10 dans la première classe) : le résultat de la question 2 n'est qu'une estimation, celui de la question 1 est exact.

19 Temps de trajet

Énoncé p. 306

Lycée Brizeux, Quimper

1

Durée en minutes	n_i (effectifs)	f_i (fréquences) en %	Effectifs cumulés croissants
[5 ; 10[	10	5	10
[10 ; 15[	30	15	40
[15 ; 20[	70	35	110
[20 ; 25[	60	30	170
[25 ; 30[	30	15	200

2 On calcule $\bar{x} = (10 \times 7{,}5 + \cdots + \cdots + 30 \times 27{,}5)/200 = 19{,}25$, soit 19 min et 15 s.

En assimilant chaque classe à son centre, on a pu faire une erreur d'au plus 2,5 min sur chaque valeur, donc d'au plus 2,5 min sur la moyenne, puisque l'erreur sur la moyenne est la moyenne des erreurs commises sur chaque valeur. Une précision à la seconde près est donc un peu exagérée.

Cependant, on peut espérer que les erreurs se compensent dans une certaine mesure, donc il est pertinent d'arrondir à 19 min.

3 En utilisant $\bar{x} = 19{,}25$, on obtient $\sigma \approx 5{,}3$. Ceci est cohérent avec la série, où on observe 130 valeurs entre 15 et 25 min. (environ deux tiers des valeurs).

20 Polygone des fréquences

Énoncé p. 306

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

L'effectif total est $N = 250$.

Longueur en mètres	[2 ; 2,50[	[2,50 ; 3[	[3 ; 3,50[	[3,50 ; 4[	[4 ; 4,50[
Centre	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25
Effectif	40	70	45	45	50
E.c.c.	40	110	155	200	250
F.c.c.	0,16	0,44	0,62	0,8	1

CORRIGÉS

1 L'étendue est $4{,}50 - 2 = 2{,}50$ m.

2 La classe modale est $[2{,}50\,;\,3[$ (70 rubans).

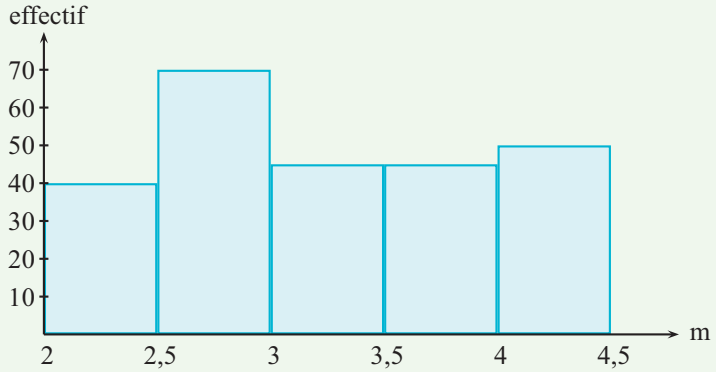
3 La fréquence cumulée croissante atteint 0,5 dans la classe $[3\,;\,3{,}50[$: c'est la classe médiane.

4 $\bar{x} = \dfrac{40 \times 2{,}25 + 70 \times 2{,}75 + 45 \times 3{,}25 + 45 \times 3{,}75 + 50 \times 4{,}25}{250}$

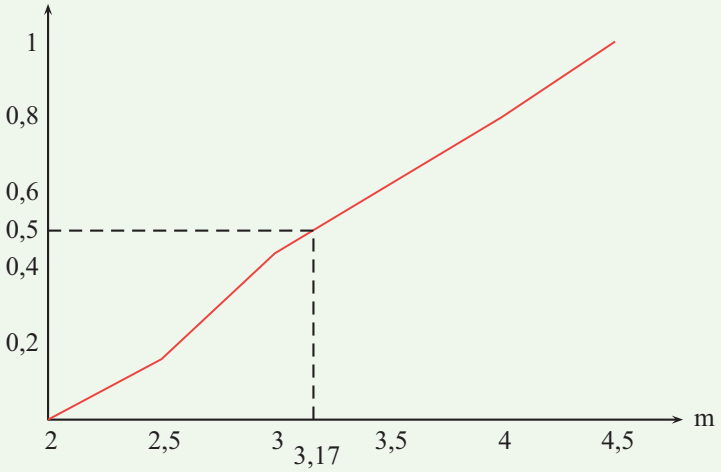
$= \dfrac{810}{250}$

$= 3{,}24 \approx 3{,}2$ m.

5 Les classes ont la même amplitude, donc la hauteur des rectangles est proportionnelle à l'effectif :



6 Le polygone relie les points $(2\,;\,0)$, $(2{,}5\,;\,0{,}16)$, $(3\,;\,0{,}44)$, $(3{,}5\,;\,0{,}62)$, $(4\,;\,0{,}8)$ et $(4{,}5\,;\,1)$.



On lit l'abscisse du point d'ordonnée 0,5. Par interpolation linéaire entre $(3\,;\,0{,}44)$ et $(3{,}5\,;\,0{,}62)$:

$$M_e \approx 3 + 0{,}5 \times \frac{0{,}5 - 0{,}44}{0{,}62 - 0{,}44} \approx 3{,}17 \approx 3{,}2 \text{ m.}$$

Cette valeur appartient à la classe $[3\,;\,3{,}50[$: le résultat est compatible avec la question 3.

21 Avec les classes (pour aller plus loin)

Énoncé p. 307

Lycée Henri IV, Paris

1 Avec les centres 5 ; 15 ; . . . ; 135 :

$$\bar{x} = \frac{3 \times 5 + 7 \times 15 + 18 \times 25 + \cdots + 26 \times 125 + 2 \times 135}{484}$$
$$= \frac{37\,580}{484}$$
$$\approx 77{,}64 \text{ euros.}$$

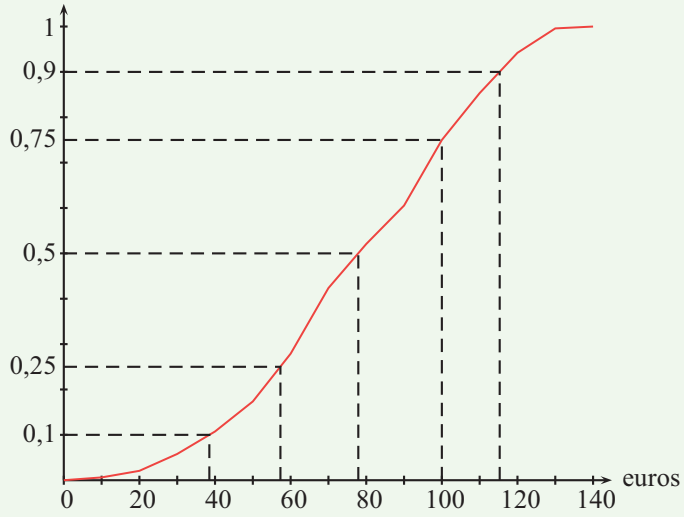
2 Les effectifs cumulés croissants sont :

3 ; 10 ; 28 ; 52 ; 84 ; 135 ; 205 ; 252 ; 293 ; 363 ; 413 ; 456 ; 482 ; 484.

La moitié de l'effectif est 242 : on dépasse 242 dans la classe [70 ; 80[, qui est la classe médiane.

3 **(a)** Les fréquences cumulées croissantes, arrondies au millième, sont aux bornes 10 ; 20 ; . . . ; 140 :

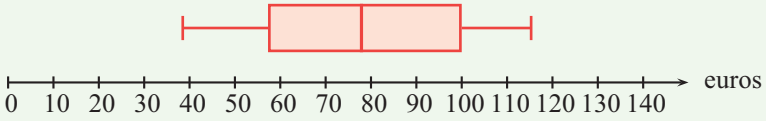
0,006 ; 0,021 ; 0,058 ; 0,107 ; 0,174 ; 0,279 ; 0,424 ; 0,521 ; 0,605 ; 0,75 ; 0,853 ; 0,942 ; 0,996 ; 1.



(b) Par lecture graphique (ou interpolation linéaire) : $M_e \approx 78$ euros, $Q_1 \approx 57$ euros et $Q_3 = 100$ euros.

(c) $D_1 \approx 38{,}5$ euros et $D_9 \approx 115$ euros.

(d) On a :



4 **(a)** $V = \dfrac{3 \times (5-\bar{x})^2 + 7 \times (15-\bar{x})^2 + \cdots + 2 \times (135-\bar{x})^2}{484} \approx 814{,}5$, donc $\sigma \approx 28{,}54$ euros.

(b) $\bar{x} - \sigma \approx 49{,}1$ et $\bar{x} + \sigma \approx 106{,}2$. On lit sur le polygone des fréquences cumulées environ 0,17 pour 49,1 et environ 0,81 pour 106,2. Environ $0{,}81 - 0{,}17 = 0{,}64$, soit environ 64 % des clients, ont des achats compris entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$.

Chapitre 12

Croisement de variables qualitatives

Plan du chapitre

1. Tableau croisé d'effectifs
2. Fréquence marginale, fréquence conditionnelle
3. Du fichier des individus au tableau croisé

1 Tableau croisé d'effectifs

Exercice type 1 — Lycée Louis Vincent, Metz

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'un lycée suivant leur classe et leur sexe. Il est incomplet.
Il y a 1 000 élèves au total dans le lycée. Parmi eux, on compte 170 filles en classe de Seconde, et 165 élèves sont des garçons en classe de Terminale.

Sexe \ Classe	2nde	1re	Tle	Total
Filles		165	160	
Garçons	180	160		
Total				1 000

1 Recopier et compléter le tableau.

2 Calculer la proportion de filles parmi l'ensemble des élèves du lycée, puis la proportion d'élèves de Terminale parmi l'ensemble des élèves du lycée.

3 Calculer la proportion de filles parmi les élèves de Seconde. Calculer ensuite la proportion d'élèves de Seconde parmi les filles. Ces deux proportions sont-elles égales ? Pourquoi ?

4 Le proviseur affirme : « La proportion de filles est plus grande en Seconde qu'en Terminale ». A-t-il raison ? Justifier.

Voir corrigé page 322

COURS

Définition 1 : tableau croisé d'effectifs

Un *tableau croisé d'effectifs* est un tableau à double entrée.
Il donne les effectifs d'une même population étudiée selon deux caractères.
Les valeurs (ou modalités) de l'un des caractères sont présentées en ligne et celles de l'autre caractère sont présentées en colonne. Chaque case contient l'effectif des individus qui présentent à la fois la valeur de sa ligne et celle de sa colonne.
Les caractères qualitatifs peuvent être nominaux (profession, sexe, etc.) ou ordinaux (niveau de satisfaction, niveau scolaire, etc.). On peut également croiser des caractères quantitatifs préalablement regroupés en classes.

Définition 2 : marges

La dernière ligne et la dernière colonne (nommées « Total ») contiennent les sommes des lignes et des colonnes. On les appelle les *marges* du tableau ; les nombres qui y figurent sont les *effectifs marginaux*.

Définition 3 : notations

C_1 \ C_2	B	$\overline{B}$	Total
A	n_1	n_2	s_1
$\overline{A}$	n_3	n_4	s_2
Total	s'_1	s'_2	N

$\overline{A}$ désigne le complémentaire de A : les individus qui ne vérifient pas A.

$n_1 = \text{Card}(A \cap B)$ désigne l'effectif des individus vérifiant à la fois A et B.

$s_1 = n_1 + n_2 = \text{Card}(A)$ désigne l'effectif marginal de A et $s'_1 = n_1 + n_3 = \text{Card}(B)$ l'effectif marginal de B.

$N = s_1 + s_2 = s'_1 + s'_2$ désigne l'effectif total.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Louis Vincent, Metz

- On complète chaque ligne et chaque colonne par différence avec les totaux (170 filles en Seconde, 165 garçons en Terminale) :

Sexe \ Classe	2nde	1re	Tle	Total
Filles	170	165	160	495
Garçons	180	160	165	505
Total	350	325	325	1 000

Vérification : $495 + 505 = 350 + 325 + 325 = 1\,000$.

Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée Louis Vincent, Metz

- La proportion de filles parmi l'ensemble des élèves est $\frac{495}{1\,000} = 0{,}495$, soit 49,5 %.
  La proportion d'élèves de Terminale parmi l'ensemble des élèves est $\frac{325}{1\,000} = 0{,}325$, soit 32,5 %.
- Parmi les 350 élèves de Seconde, 170 sont des filles : la proportion de filles parmi les élèves de Seconde est $\frac{170}{350} = \frac{17}{35} \approx 0{,}486$, soit environ 48,6 %.
  Parmi les 495 filles, 170 sont en Seconde : la proportion d'élèves de Seconde parmi les filles est $\frac{170}{495} = \frac{34}{99} \approx 0{,}343$, soit environ 34,3 %.
  Ces deux proportions ne sont pas égales : elles ont le même numérateur (170), mais elles ne sont pas calculées par rapport à la même population de référence (les 350 élèves de Seconde dans un cas, les 495 filles dans l'autre).
- La proportion de filles parmi les élèves de Terminale est $\frac{160}{325} = \frac{32}{65}$, soit approximativement 0,492 ou encore 49,2 %.
  Comme $0{,}492 > 0{,}486$, la proportion de filles est plus grande en Terminale qu'en Seconde : le proviseur a tort.
  On remarque qu'il y a pourtant plus de filles en Seconde (170) qu'en Terminale (160) : pour comparer deux sous-populations d'effectifs différents, on compare des proportions et non des effectifs.

Voir énoncé page 321

2 Fréquence marginale, fréquence conditionnelle

Exercice type 2 — Lycée Louis Vincent, Metz

Un restaurant effectue un sondage auprès de ses clients d'une journée pour savoir s'ils sont très satisfaits, satisfaits ou non satisfaits des repas à emporter et des repas sur place. On donne les résultats du sondage dans le tableau suivant :

	Très satisfaits	Satisfaits	Non satisfaits	Total
Sur place	10	12	8	30
À emporter	14	21	15	50
Total	24	33	23	80

1 Combien de clients ayant pris un repas à emporter se sont déclarés « satisfaits » ?

…

COURS

Exercice type 2 (suite) — Lycée Louis Vincent, Metz

2 On considère le nombre $\frac{21}{50}$. Exprimer ce nombre à l'aide d'un pourcentage.
Que représente-t-il ?

3 Calculer la fréquence marginale des clients ayant pris un repas sur place.

4 Calculer la fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux ayant pris un repas sur place.

5 Suite à ce sondage, le gérant du restaurant affirme que les clients prenant un repas à emporter sont plus souvent très satisfaits que ceux qui prennent un repas sur place. A-t-il raison ?

Voir corrigé page 325

Définition 4 : fréquence marginale

La *fréquence marginale* d'une valeur est le quotient de l'effectif marginal de cette valeur par l'effectif total N.
Avec les notations précédentes, la fréquence marginale de A est $f(A) = \frac{s_1}{N}$.

Exemple : le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de première et de terminale d'un lycée selon leur voie :

	Générale	Technologique	Total
Première	174	96	270
Terminale	208	84	292
Total	382	180	562

Sur l'ensemble des 562 élèves, 382 sont en voie générale. La fréquence marginale de la valeur « générale » est donc égale à $\frac{382}{562} = \frac{191}{281} \approx 0{,}680$, soit environ 68,0%.

Définition 5 : fréquence conditionnelle

La *fréquence conditionnelle* de la valeur A parmi B, notée $f_B(A)$, est la fréquence du caractère A dans la sous-population des individus vérifiant le caractère B (d'effectif supposé non nul) :

$$f_B(A) = \frac{\text{effectif des individus vérifiant à la fois A et B}}{\text{effectif des individus vérifiant B}}.$$

Avec les notations précédentes,

$$f_B(A) = \frac{n_1}{s'_1} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

et

$$f_A(B) = \frac{n_1}{s_1} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}.$$

Exemple : dans l'exemple précédent, parmi les 270 élèves de première, 174 sont en voie générale. Donc la fréquence conditionnelle des élèves de voie générale parmi les élèves de première est $\frac{174}{270} = \frac{29}{45} \approx 0{,}644$, soit environ 64,4 %.

Remarques

- En général, $f_B(A) \neq f_A(B)$: les deux fréquences ont le même numérateur, mais elles ne sont pas calculées sur la même sous-population.
  Dans l'exemple précédent, la fréquence des élèves de première parmi ceux de la voie générale est $\frac{174}{382} \approx 0{,}455$, alors que celle des élèves de voie générale parmi ceux de première est environ 0,644.
- Il faut lire attentivement les formulations, notamment dans les médias. « 64 % des élèves de première sont en voie générale » est une fréquence conditionnelle parmi les élèves de première ; « 46 % des élèves de la voie générale sont en première » est une fréquence conditionnelle parmi les élèves de la voie générale. Les mots « parmi », « sur l'ensemble des » ou « chez les » indiquent la population de référence, c'est-à-dire le dénominateur.
- En divisant chaque effectif du tableau par l'effectif total N, on obtient un *tableau croisé de fréquences*. La somme des fréquences de toutes les cases (hors marges) vaut 1, et les marges de ce tableau contiennent les fréquences marginales.

MÉTHODE

Si l'on connaît l'effectif de la sous-population B et la fréquence conditionnelle $f_B(A)$, on obtient l'effectif de la case correspondante par

$$\text{Card}(A \cap B) = f_B(A) \times \text{Card}(B).$$

Par exemple, si 40 % des 1 500 spectateurs de moins de 25 ans ont acheté un pass 1 jour, la case correspondante contient $0{,}40 \times 1\,500 = 600$ spectateurs.

Remarque : si l'on choisit au hasard un individu de la population, avec équiprobabilité, la probabilité qu'il vérifie A sachant qu'il vérifie B est égale à la fréquence conditionnelle $f_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$: c'est la notion de *probabilité conditionnelle*.

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Louis Vincent, Metz

- 21 clients ayant pris un repas à emporter se sont déclarés « satisfaits » (intersection de la ligne « À emporter » et de la colonne « Satisfaits »).
- $\frac{21}{50} = 0{,}42$, soit 42 %. Ce nombre représente la fréquence conditionnelle des clients satisfaits parmi ceux ayant pris un repas à emporter : 42 % des clients ayant pris un repas à emporter sont satisfaits.

…

COURS

Solution de l'exercice type 2 (suite) — Lycée Louis Vincent, Metz

- La fréquence marginale des clients ayant pris un repas sur place est $\frac{30}{80} = \frac{3}{8} = 0{,}375$, soit 37,5 %.
- La fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux ayant pris un repas sur place est $\frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$, soit environ 33 %.
- La fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux ayant pris un repas à emporter est $\frac{14}{50} = 0{,}28$, soit 28 %.
  Comme $0{,}28 < 0{,}33$, les clients prenant un repas à emporter sont proportionnellement moins souvent très satisfaits : le gérant a tort.
  Le gérant s'est sans doute fié aux effectifs (14 clients très satisfaits à emporter contre 10 sur place), mais les deux groupes n'ont pas la même taille (50 et 30 clients) : il faut comparer des fréquences conditionnelles.

Voir énoncé page 323

3 Du fichier des individus au tableau croisé

Les données statistiques sont souvent rangées dans un *fichier des individus* : chaque individu y est décrit par la valeur de chacun de ses caractères.

Par exemple, dix élèves d'un lycée sont décrits par leur sexe (`"F"` ou `"G"`) et par leur classe (`"2nde"`, `"1re"` ou `"Tle"`). En Python, on représente ce fichier par deux listes : l'élève numéro i (de 0 à 9) a pour sexe `sexe[i]` et pour classe `classe[i]`.

En Python

```
sexe   = ["F", "G", "G", "F", "F", "G", "F", "G", "F", "G"]
classe = ["2nde", "1re", "2nde", "Tle", "2nde", "Tle", "1re
    ", "2nde", "Tle", "1re"]

def effectif(s, c):
    n = 0
    for i in range(len(sexe)):
        if sexe[i] == s and classe[i] == c:
            n = n + 1
    return n

for s in ["F", "G"]:
    for c in ["2nde", "1re", "Tle"]:
        print(s, c, effectif(s, c))
```

La fonction `effectif` filtre les individus qui vérifient à la fois les deux critères (mot-clé `and`) et les compte. Les deux boucles affichent les effectifs de toutes les cases ; on obtient le tableau croisé suivant :

Sexe \ Classe	2nde	1re	Tle	Total
Filles	2	1	2	5
Garçons	2	2	1	5
Total	4	3	3	10

Remarque : en remplaçant `and` par `or`, on compte les individus qui vérifient l'un *ou* l'autre critère ; avec `!=` au lieu de `==`, on compte ceux qui ne vérifient *pas* un critère.

INTERROS

1 V/F Fréquences d'un tableau croisé

5 min — Corrigé p. 333

Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La somme de toutes les fréquences (hors marges) d'un tableau croisé vaut 1.
2. Une fréquence conditionnelle se calcule en divisant par l'effectif total.
3. Une fréquence marginale peut dépasser 100 %.

Calculer des fréquences à partir d'un tableau

2 Calculer des fréquences ★

15 min — Corrigé p. 333

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

Une association sportive de 360 adhérents propose trois sports : volley, boxe française et vélo. Chaque adhérent est inscrit à un seul sport parmi les trois. L'association compte 160 adhérents adultes, les autres étant juniors. On sait aussi que 25 % des adhérents sont inscrits au volley et 40 % à la boxe française. De plus, 50 juniors sont inscrits en volley et 60 adultes sont inscrits en vélo.

1. Construire le tableau croisé d'effectifs correspondant en différenciant les caractéristiques Juniors/Adultes d'une part et Volley/Boxe française/Vélo d'autre part.
2. Calculer la fréquence marginale des adhérents adultes.
3. Calculer la fréquence marginale des adhérents inscrits au vélo.
4. Calculer la fréquence conditionnelle des adhérents juniors parmi ceux inscrits à la boxe.
5. Calculer la fréquence conditionnelle des adhérents inscrits au volley parmi les adultes.

3 Tableau croisé d'effectifs ★

15 min — Corrigé p. 334

Lycée Charlemagne, Thionville

Un festival a accueilli 5 000 spectateurs. Les spectateurs sont classés selon :

- leur tranche d'âge : moins de 25 ans ; de 25 à 50 ans inclus ; plus de 50 ans ;
- le type de pass acheté : pass 1 jour ; pass 2 jours ; pass 3 jours.

On sait que :

- 30 % des spectateurs ont moins de 25 ans ;
- 50 % des spectateurs ont entre 25 et 50 ans ;

- le reste a plus de 50 ans ;
- parmi les spectateurs de moins de 25 ans, 40 % ont acheté un pass 1 jour et 20 % un pass 3 jours ;
- parmi les spectateurs de 25 à 50 ans, 30 % ont acheté un pass 1 jour et 30 % un pass 3 jours ;
- parmi les spectateurs de plus de 50 ans, 50 % ont acheté un pass 1 jour et 20 % un pass 3 jours.

1. Construire un tableau croisé d'effectifs modélisant la situation.
2. Calculer la fréquence marginale des spectateurs ayant acheté un pass 3 jours.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des spectateurs de plus de 50 ans parmi les détenteurs d'un pass 3 jours.

4 Tableau croisé de fréquences

★ 15 min Corrigé p. 335

Lycée St Exupéry, Fameck

Un magasin a interrogé 200 clients sur leur satisfaction selon le canal d'achat.

	En ligne	Boutique	Total
Satisfaits	90	56	146
Non satisfaits	30	24	54
Total	120	80	200

1. Compléter le tableau croisé de fréquences ci-dessous.

	En ligne	Boutique	Total
Satisfaits			
Non satisfaits			
Total			

2. Donner la fréquence marginale des clients ayant acheté en ligne.
3. Quelle proportion des clients interrogés sont des clients satisfaits ayant acheté en boutique ?
4. Quelle est la fréquence de clients satisfaits parmi ceux ayant acheté en ligne ?
5. Même question parmi ceux ayant acheté en boutique.
6. Quel canal d'achat semble le plus satisfaisant ? Justifier.

INTERROS

5 Un résultat surprenant

★★ 20 min Corrigé p. 335

Lycée Claude Bernard, Paris

Dans un petit pays comportant deux universités, le ministre de l'Éducation commente les résultats aux examens de fin d'études :

« Dans l'université A, 83 % des garçons et 80 % des filles ont réussi. Dans l'université B, 55 % des garçons et 51 % des filles ont réussi. Il faut bien reconnaître cependant que, dans notre pays, les filles réussissent mieux que les garçons. »

1. Pensez-vous que le ministre s'est trompé ?
2. Voici des renseignements supplémentaires concernant les deux universités :

	Garçons		Filles	
	Admis	Total	Admis	Total
Université A		500		400
Université B		600		200
Total				

Compléter le tableau. Le ministre s'est-il trompé ?

6 Mortalité routière : données ONISR 2023

★★ 20 min Corrigé p. 336

Lycée Louis Vincent, Metz

En 2023, en France métropolitaine, 3 167 personnes sont mortes dans un accident de la route. Le tableau ci-dessous concerne les 2 922 personnes tuées appartenant aux cinq catégories d'usagers suivantes. L'Observatoire national interministériel de la sécurité routière (ONISR) indique, pour chaque catégorie, la part des hommes parmi les personnes tuées.

	Personnes tuées	Part des hommes
Occupants de voitures	1 512	71 %
Motocyclistes	706	92 %
Piétons	439	64 %
Cyclistes	221	86 %
Trottinettes	44	84 %
Total	2 922	

1. Recopier et compléter le tableau croisé d'effectifs suivant, en arrondissant les effectifs à l'unité.

	Hommes	Femmes	Total
Occupants de voitures			1 512
Motocyclistes			706
Piétons			439
Cyclistes			221
Trottinettes			44
Total			2 922

2 Calculer la fréquence marginale des hommes parmi ces 2 922 personnes tuées.

3 L'ONISR indique que les hommes représentent 77,6 % de l'ensemble des personnes tuées sur la route en 2023. Pourquoi ce pourcentage est-il différent de celui obtenu à la question 2 ?

4 **(a)** Calculer la fréquence conditionnelle des piétons parmi les hommes tués, puis parmi les femmes tuées.

(b) Un journal titre : « 64 % des piétons tués sont des hommes ». Un lecteur en déduit que « 64 % des hommes tués étaient des piétons ». Que penser de cette affirmation ?

5 Peut-on déduire de ce tableau qu'une femme a plus de risques qu'un homme de mourir lorsqu'elle se déplace à pied ? Justifier.

7 Lire, compléter, modifier un programme ★★

20 min Corrigé p. 337

Lycée Fabert, Metz

On reprend le fichier des individus du cours : dix élèves d'un lycée sont décrits par leur sexe (`"F"` ou `"G"`) et par leur classe (`"2nde"`, `"1re"` ou `"Tle"`). On considère le programme suivant, dans lequel une ligne est incomplète.

Code Python

```
sexe   = ["F", "G", "G", "F", "F", "G", "F", "G", "F",
    "G"]
classe = ["2nde", "1re", "2nde", "Tle", "2nde", "Tle",
    "1re", "2nde", "Tle", "1re"]

def effectif(s, c):
    n = 0
    for i in range(len(sexe)):
        if sexe[i] == s and classe[i] == c:
            n = n + 1
    return n

def effectif_ou(s, c):
    n = 0
    for i in range(len(sexe)):
        if ..........................  :
            n = n + 1
    return n
```

1 Que représente la variable `n` dans la fonction `effectif` ? Quelle valeur renvoie l'appel `effectif("G", "1re")` ?

INTERROS

2 La fonction `effectif_ou(s, c)` doit renvoyer le nombre d'élèves qui sont de sexe `s` OU en classe `c`. Compléter la ligne en pointillés, puis donner la valeur renvoyée par `effectif_ou("F", "Tle")`.

3 En s'inspirant de la fonction `effectif`, écrire une fonction :

```
effectif_non(c)
```

qui renvoie le nombre d'élèves qui ne sont PAS en classe `c`.

Quelle valeur renvoie `effectif_non("2nde")` ?

4 **(a)** Calculer la fréquence conditionnelle des garçons parmi les élèves de Terminale.

(b) Calculer la fréquence conditionnelle des élèves de Terminale parmi les garçons.

(c) Ces deux fréquences sont-elles égales ? Expliquer.

1 V/F Fréquences d'un tableau croisé

Énoncé p. 328

1 *Vrai*. Chaque fréquence est obtenue en divisant un effectif par l'effectif total N. La somme des effectifs de toutes les cases (hors marges) vaut N, donc la somme des fréquences vaut $\frac{N}{N} = 1$. Dans l'exercice « Tableau croisé de fréquences » : $0{,}45 + 0{,}28 + 0{,}15 + 0{,}12 = 1$.

2 *Faux*. Une fréquence conditionnelle se calcule en divisant par l'effectif de la sous-population considérée, et non par l'effectif total. Dans l'exercice « Tableau croisé de fréquences », la fréquence des clients satisfaits parmi ceux ayant acheté en ligne est $\frac{90}{120} = 0{,}75$ et non $\frac{90}{200} = 0{,}45$.

3 *Faux*. Une fréquence marginale est le quotient d'un effectif marginal par l'effectif total N. Un effectif marginal est toujours inférieur ou égal à N, donc une fréquence marginale est comprise entre 0 et 1, c'est-à-dire entre 0 % et 100 %.

2 Calculer des fréquences

Énoncé p. 328

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

1
- Il y a $360 - 160 = 200$ adhérents Juniors.
- $0{,}25 \times 360 = 90$ adhérents pratiquent le volley et $0{,}4 \times 360 = 144$ pratiquent la boxe française, donc $360 - 90 - 144 = 126$ adhérents pratiquent le vélo.
- $90 - 50 = 40$ adultes sont inscrits en volley et $126 - 60 = 66$ juniors sont inscrits en vélo.
- Il y a donc $200 - 66 - 50 = 84$ juniors et $160 - 40 - 60 = 60$ adultes inscrits en Boxe.

	Volley	Boxe	Vélo	Total
Juniors	50	84	66	200
Adultes	40	60	60	160
Total	90	144	126	360

2 La fréquence marginale des adhérents adultes est :

$$\frac{160}{360} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

3 La fréquence marginale des adhérents inscrits au vélo est :

$$\frac{126}{360} = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

4 La fréquence conditionnelle des adhérents juniors parmi ceux inscrits à la boxe est :

$$f_{\text{Boxe}}(\text{Juniors}) = \frac{84}{144} = \frac{7}{12} \approx 0{,}58.$$

5 La fréquence conditionnelle des adhérents inscrits au volley parmi les adultes est :

$$f_{\text{Adultes}}(\text{Volley}) = \frac{40}{160} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

3 Tableau croisé d'effectifs

Énoncé p. 328

Lycée Charlemagne, Thionville

1 Effectifs par tranche d'âge :

- moins de 25 ans : $0{,}30 \times 5\,000 = 1\,500$;
- de 25 à 50 ans : $0{,}50 \times 5\,000 = 2\,500$;
- plus de 50 ans : $5\,000 - 1\,500 - 2\,500 = 1\,000$.

→ *Moins de 25 ans.*

- pass 1 jour : $0{,}40 \times 1\,500 = 600$;
- pass 3 jours : $0{,}20 \times 1\,500 = 300$;
- pass 2 jours : $1\,500 - 600 - 300 = 600$.

→ *De 25 à 50 ans.*

- pass 1 jour : $0{,}30 \times 2\,500 = 750$;
- pass 3 jours : $0{,}30 \times 2\,500 = 750$;
- pass 2 jours : $2\,500 - 750 - 750 = 1\,000$.

→ *Plus de 50 ans.*

- pass 1 jour : $0{,}50 \times 1\,000 = 500$;
- pass 3 jours : $0{,}20 \times 1\,000 = 200$;
- pass 2 jours : $1\,000 - 500 - 200 = 300$.

Âge \ Pass	1 jour	2 jours	3 jours	Total
Moins de 25 ans	600	600	300	1 500
De 25 à 50 ans	750	1 000	750	2 500
Plus de 50 ans	500	300	200	1 000
Total	1 850	1 900	1 250	5 000

2 La fréquence marginale des spectateurs ayant acheté un pass 3 jours est

$$f = \frac{1\,250}{5\,000} = 0{,}25$$

soit 25 % des spectateurs.

3 Parmi les 1 250 détenteurs d'un pass 3 jours, 200 ont plus de 50 ans. La fréquence conditionnelle cherchée est

$$f = \frac{200}{1\,250} = 0{,}16$$

soit 16 % des détenteurs d'un pass 3 jours.

4 Tableau croisé de fréquences

Énoncé p. 329

Lycée St Exupéry, Fameck

1 On divise chaque effectif par l'effectif total, 200.

Par exemple, $\frac{90}{200} = 0{,}45$.

	En ligne	Boutique	Total
Satisfaits	0,45	0,28	0,73
Non satisfaits	0,15	0,12	0,27
Total	0,6	0,4	1

2 La fréquence marginale des clients ayant acheté en ligne est :

$$\frac{120}{200} = 0{,}6 \text{ soit } 60\,\%.$$

3 $\frac{56}{200} = 0{,}28$: 28 % des clients interrogés sont des clients satisfaits ayant acheté en boutique.

4 Parmi les 120 clients ayant acheté en ligne, 90 sont satisfaits :

$$\frac{90}{120} = 0{,}75 \text{ soit } 75\,\%.$$

5 Parmi les 80 clients ayant acheté en boutique, 56 sont satisfaits :

$$\frac{56}{80} = 0{,}7 \text{ soit } 70\,\%.$$

6 Comme $0{,}75 > 0{,}7$, l'achat en ligne semble le plus satisfaisant. On compare des fréquences conditionnelles et non des effectifs, car les deux groupes n'ont pas la même taille (120 et 80 clients).

5 Un résultat surprenant

Énoncé p. 330

Lycée Claude Bernard, Paris

1 À première vue, le ministre semble se tromper, puisque dans chaque université les garçons réussissent mieux que les filles. Mais on ne connaît pas les effectifs : on ne peut pas conclure sans eux.

2 Par exemple, 83 % de 500 donne $0{,}83 \times 500 = 415$ garçons admis dans l'université A.

	Garçons		Filles	
	Admis	Total	Admis	Total
Université A	415	500	320	400
Université B	330	600	102	200
Total	745	1 100	422	600

CORRIGÉS

Dans l'ensemble du pays, le taux de réussite des garçons est :

$$\frac{745}{1\,100} \approx 67{,}7\,\%$$

et celui des filles est :

$$\frac{422}{600} \approx 70{,}3\,\%.$$

Le ministre ne s'est donc pas trompé : sur l'ensemble du pays, les filles réussissent mieux. Ce paradoxe s'explique par le fait que la majorité des filles (400 sur 600) étudient dans l'université A, où le taux de réussite est élevé, alors que la majorité des garçons (600 sur 1 100) étudient dans l'université B, où il est faible.

6 Mortalité routière : données ONISR 2023

Énoncé p. 330

Lycée Louis Vincent, Metz

1 On multiplie l'effectif de chaque catégorie par la part des hommes :

$$1\,512 \times 0{,}71 \approx 1\,074,$$
$$706 \times 0{,}92 \approx 650,$$
$$439 \times 0{,}64 \approx 281,$$
$$221 \times 0{,}86 \approx 190,$$
$$44 \times 0{,}84 \approx 37.$$

On obtient les effectifs des femmes par différence.

	Hommes	Femmes	Total
Occupants de voitures	1 074	438	1 512
Motocyclistes	650	56	706
Piétons	281	158	439
Cyclistes	190	31	221
Trottinettes	37	7	44
Total	2 232	690	2 922

Les parts publiées étant arrondies au pourcent, ces effectifs sont des valeurs approchées.

2 La fréquence marginale des hommes est $\frac{2\,232}{2\,922} \approx 0{,}764$, soit environ 76,4 %.

3 Les deux pourcentages ne portent pas sur la même population : 77,6 % concerne les 3 167 personnes tuées, alors que la question 2 ne concerne que les 2 922 personnes des cinq catégories retenues (les occupants de véhicules utilitaires et de poids lourds, notamment, n'y figurent pas).

4 **(a)** Parmi les hommes tués : $\frac{281}{2\,232} \approx 0{,}126$, soit environ 12,6 % de piétons.

Parmi les femmes tuées : $\frac{158}{690} \approx 0{,}229$, soit environ 22,9 % de piétons.

(b) L'affirmation est fausse. « 64 % des piétons tués sont des hommes » est la fréquence conditionnelle des hommes parmi les piétons ; la fréquence des piétons parmi les hommes tués n'est que d'environ 12,6 %. Les deux fréquences ont le même numérateur (281) mais pas la même population de référence (439 piétons d'un côté, 2 232 hommes de l'autre).

5 *Non*. Le tableau ne concerne que des personnes tuées : il ne dit rien du nombre de femmes et d'hommes qui se déplacent à pied, ni des distances parcourues. La forte proportion de piétons parmi les femmes tuées vient surtout de ce que les femmes sont beaucoup moins nombreuses parmi les motocyclistes et les occupants de voitures tués. Pour comparer des risques, il faudrait rapporter les nombres de tués au nombre de personnes exposées.

7 Lire, compléter, modifier un programme

Énoncé p. 331

Lycée Fabert, Metz

1 La variable `n` compte les élèves qui vérifient à la fois les deux critères : elle vaut 0 au départ et augmente de 1 à chaque élève de sexe `s` ET de classe `c`.

Les élèves de 1re sont les numéros 1, 6 et 9 ; parmi eux, les numéros 1 et 9 sont des garçons. L'appel `effectif("G", "1re")` renvoie donc 2.

2 La ligne complétée est `if sexe[i] == s or classe[i] == c :`.

Il y a 5 filles et 3 élèves de Terminale, dont 2 filles. Les élèves qui sont des filles OU en Terminale sont au nombre de $5 + 3 - 2 = 6$ (on ne compte pas deux fois les filles de Terminale). L'appel renvoie 6.

3 Une fonction possible est celle donnée en fin de correction.

Remarque : seule la fonction `effectif_non` est demandée.
Les fonctions `effectif_classe` et `effectif_sexe`, utiles à la question suivante, sont données en complément.

Sur les 10 élèves, 4 sont en Seconde : `effectif_non("2nde")` renvoie $10 - 4 = 6$.

4 **(a)** Il y a 3 élèves de Terminale, dont 1 garçon : la fréquence conditionnelle des garçons parmi les élèves de Terminale est $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

(b) Il y a 5 garçons, dont 1 en Terminale : la fréquence conditionnelle des élèves de Terminale parmi les garçons est $\frac{1}{5} = 0{,}2$.

(c) Ces fréquences sont différentes : elles ont le même numérateur (1 garçon de Terminale), mais elles ne sont pas calculées sur la même sous-population (les 3 élèves de Terminale dans un cas, les 5 garçons dans l'autre).



En Python

```
sexe   = ["F", "G", "G", "F", "F", "G", "F", "G", "F
    ", "G"]
classe = ["2nde", "1re", "2nde", "Tle", "2nde", "
    Tle", "1re", "2nde", "Tle", "1re"]

def effectif(s, c):
    n = 0
    for i in range(len(sexe)):
        if sexe[i] == s and classe[i] == c:
            n = n + 1
    return n

def effectif_ou(s, c):
    n = 0
    for i in range(len(sexe)):
        if sexe[i] == s or classe[i] == c:
            n = n + 1
    return n

def effectif_non(c):
    n = 0
    for i in range(len(classe)):
        if classe[i] != c:
            n = n + 1
    return n

def effectif_classe(c):
    return len(classe) - effectif_non(c)

def effectif_sexe(s):
    n = 0
    for i in range(len(sexe)):
        if sexe[i] == s:
            n = n + 1
    return n
```

Chapitre 13

Probabilités

Plan du chapitre

1. Expérience aléatoire
2. Loi de probabilité
3. Fréquence et probabilité
4. Probabilité d'un événement

Exercice type — **Lycée Montaigne, Paris**

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On suppose qu'il y a équiprobabilité.

1 Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

2 La carte obtenue est un as. On le remet dans le paquet, on mélange et on tire de nouveau une carte. Quelle est la probabilité d'obtenir encore un as ?

3 On a encore obtenu un as ! On ne le remet pas dans le paquet et on tire une nouvelle carte. Quelle est la probabilité d'obtenir encore un as ?

Voir corrigé page 342

1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience (concrète ou abstraite), dont le résultat (appelé *issue*) n'est pas déterminé à l'avance. Par exemple, le jeu de pile ou face, un lancer de dé, la distribution de cartes à jouer sont des expériences aléatoires.

- *L'univers* est l'ensemble des issues de l'expérience. On le note souvent Ω.
  Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, l'ensemble des issues est :
  $$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$
- Un *événement* est une partie de l'univers Ω ; il peut contenir zéro, une ou plusieurs issues. Il est décrit par une propriété, par ex. $A =$ « le résultat est pair », ou tout simplement par ses éléments : $A = \{2; 4; 6\}$.

On considère deux événements A et B.

- $A \cup B$ (lu : « A ou B ») est l'événement qui contient toutes les issues de l'événement A et toutes celles de B.

COURS

- $A \cap B$ (lu : « A et B ») est l'événement qui contient les issues communes à A et B. Deux événements sont *incompatibles* s'ils ne comportent aucune issue commune (par exemple : « le résultat est 2 » et « le résultat est impair »).
- $\bar{A}$ est l'événement contraire de A. Il contient exactement toutes les issues qui ne sont pas dans A. En particulier, A et $\bar{A}$ sont incompatibles.
- $\overline{A \cup B}$ est le contraire de « A ou B » ; c'est donc le contraire de A *et* le contraire de B :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

De même,

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2 Loi de probabilité

Soit un univers $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ contenant n issues.

Une *loi de probabilité* sur Ω est la donnée de n nombres p_i associés à chaque valeur x_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, avec :

$$p_i \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

On peut donner une loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

Valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
Probabilités p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Dans le cas où $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$, on dit que les issues sont *équiprobables* et dans ce cas, $p_i = \dfrac{1}{n}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Cette situation est souvent indiquée dans l'énoncé par des expressions comme « on choisit au hasard », « le dé n'est pas truqué », etc.

3 Fréquence et probabilité

Propriété 1 : loi des grands nombres, propriété admise

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois, dans les mêmes conditions et de façon indépendante, une même expérience aléatoire, la *fréquence observée* d'une issue est, sauf exception, *proche de sa probabilité*. C'est la *loi des grands nombres*. C'est ce qui permet, pour un phénomène réel dont on ne connaît pas le modèle, de construire une loi de probabilité à partir de fréquences observées.

Remarque : d'où viennent les probabilités d'un modèle ? Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une même expérience aléatoire, on observe que la fréquence d'apparition d'une issue se stabilise autour d'une valeur. C'est cette valeur que l'on prend comme probabilité de l'issue : la fréquence observée (en pratique, par simulation) et la probabilité théorique (le modèle) se rejoignent.

Exemple : la fonction Python suivante simule n lancers d'un dé équilibré et renvoie la fréquence d'apparition du 6 (la fonction `randint(1, 6)` renvoie un entier au hasard entre 1 et 6).

En Python

```
from random import randint

def frequence_six(n):
    k = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 6) == 6:
            k = k + 1
    return k / n

for n in [100, 1000, 10000, 100000]:
    print(n, frequence_six(n))
```

En l'exécutant pour $n = 100$, 1 000, 10 000 puis 100 000, on observe que les fréquences obtenues varient d'une simulation à l'autre, mais se rapprochent de la probabilité $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$ lorsque n devient grand.

4 Probabilité d'un événement

Si $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ est un événement, la probabilité de l'événement A est, par définition : $P(A) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}$.

Dans le cas d'issues équiprobables, tous les p_i étant égaux à $\frac{1}{n}$, on a donc :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Il existe deux cas particuliers :

- l'événement *certain* Ω regroupe toutes les issues.
  On a donc :
  $$P(\Omega) = 1.$$
- l'événement *impossible* $\varnothing$ ne contient aucune issue.

COURS

On a donc :

$$P(\varnothing) = 0.$$

En faisant $P(A) + P(B)$, on compte deux fois la probabilité des issues communes à A et B. On en déduit la formule :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

En particulier :

- si A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \varnothing$, donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- comme $A \cup \bar{A} = \Omega$, on a : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Solution de l'exercice type — **Lycée Montaigne, Paris**

1 Il y a 32 cartes dans le jeu (32 issues possibles), dont 4 as (4 issues favorables). La probabilité d'obtenir un as est donc $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

2 Comme on remet la carte dans le paquet, le second tirage s'effectue dans les mêmes conditions que le précédent, et la probabilité d'obtenir un second as est encore de $\frac{1}{8}$.

3 Cette fois, au moment du troisième tirage, le paquet contient 31 cartes (31 issues possibles) et seulement 3 as (3 issues favorables) car on n'a pas remis la carte dans le paquet. La probabilité d'obtenir un as est cette fois : $\frac{3}{31}$.

Voir énoncé page 339

1 V/F Jeu de cartes

5 min Corrigé p. 349

Un jeu de 52 cartes contient 4 couleurs : pique, cœur, carreau, trèfle ; chaque couleur possède 13 cartes : as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame et roi.

On tire au hasard une carte et on suppose qu'il y a équiprobabilité.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a La probabilité de tirer l'as de pique est de $\frac{1}{52}$.

b La probabilité de tirer un as est de $\frac{1}{4}$.

c La probabilité de tirer un roi ou une dame est de $\frac{2}{13}$.

2 Automatismes ★

8 min Corrigé p. 349

« Un jeu de 32 cartes est composé de 4 couleurs (Trèfle, Carreau, Cœur et Pique). Dans chaque couleur il y a 8 cartes de hauteurs différentes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). »

1 On tire au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes.

Quelle est la probabilité d'obtenir un Trèfle ?

a $\frac{4}{8}$ **b** $\frac{1}{4}$ **c** $\frac{1}{8}$ **d** $\frac{1}{32}$

2 On tire au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes.

Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

a $\frac{4}{8}$ **b** $\frac{1}{4}$ **c** $\frac{1}{8}$ **d** $\frac{1}{32}$

3 On tire au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes.

Quelle est la probabilité d'obtenir une figure (valet, dame ou roi) ?

a $\frac{3}{32}$ **b** $\frac{3}{8}$ **c** $\frac{3}{4}$ **d** $\frac{1}{2}$

4 On tire au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes.

Quelle est la probabilité d'obtenir un as ou un Pique ?

a $\frac{2}{32}$ **b** $\frac{8}{32}$ **c** $\frac{11}{32}$ **d** $\frac{12}{32}$

3 Cartes ★

10 min Corrigé p. 349

Lycée Marie Curie, Sceaux

On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire une carte au hasard. On suppose qu'il y a équiprobabilité. On note A l'événement « la carte est un as » et K l'événement « la carte est un pique ».

1 Quelle est la probabilité de A ? De K ?

2 Décrire l'événement $A \cap K$ et donner sa probabilité.

3 Décrire l'événement $A \cup K$ et donner sa probabilité.

4 Quelle est la probabilité que la carte obtenue ne soit pas un as ?

4 Jeu de dés

★ 15 min Corrigé p. 350

Lycée Edgar Quinet, Paris

Les faces d'un dé équilibré sont numérotées de 1 à 6. On jette ce dé deux fois de suite et on forme un nombre à 2 chiffres, celui des dizaines étant le chiffre obtenu au premier jet, celui des unités étant celui obtenu au second jet.

1 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous, afin d'écrire tous les résultats possibles.

Quelle est la probabilité de chaque résultat ?

2 Calculer : la probabilité p_1 que le résultat soit un multiple de 5, la probabilité p_2 qu'il soit pair, la probabilité p_3 qu'il soit supérieur à 30.

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13			
2	21					
3		32				
4						
5						
6						

5 Des urnes

★ 15 min Corrigé p. 350

Lycée La Folie Saint James, Neuilly-sur-Seine

Une urne contient 100 boules numérotées 00, 01, 02,..., 99. On tire au hasard une boule et on lit le numéro obtenu. On considère les événements A : « Le numéro obtenu contient au moins un 0 » et B : « Le numéro obtenu contient au moins un 9 ».

1 Déterminer la probabilité des événements A et B.

2 Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

3 Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

6 À la sortie du spectacle

★ 15 min Corrigé p. 351

Lycée Chaptal, Paris

À la sortie d'un spectacle, on demande à une personne adulte, qui est une femme ou un homme, choisie au hasard si elle a aimé ou non le spectacle.

On considère les événements suivants :

- F : « La personne est une femme » ;
- O : « La personne répond oui ».

1 Énoncer par des phrases les événements suivants : $F \cap O$, $\overline{F}$, $\overline{F \cup O}$ et $\overline{F \cap O}$.

2 On donne :

$$P(F) = 0{,}65 \quad ; \quad P(O) = 0{,}9 \quad ; \quad P(F \cup O) = 0{,}94.$$

Calculer les probabilités des événements de la question précédente.

7 Groupes sanguins

★★ 10 min Corrigé p. 351

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

La répartition des groupes sanguins dans la population française est présentée dans le tableau suivant :

		Groupe sanguin				
		O	A	B	AB	Total
rhésus	Rh+	37%	39%	7%	2%	
	Rh-	6%	6%	2%	1%	
Total						100%

L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard une personne dans cette population. On assimile les probabilités aux fréquences observées.

1 Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?

2 Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

(a) A : « la personne est du groupe A »

(b) Rh+ : « la personne a un rhésus positif »

(c) AB- : « la personne est du groupe AB rhésus négatif »

3 La personne que l'on a choisie est rhésus négatif. Quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe AB ?

8 La cible

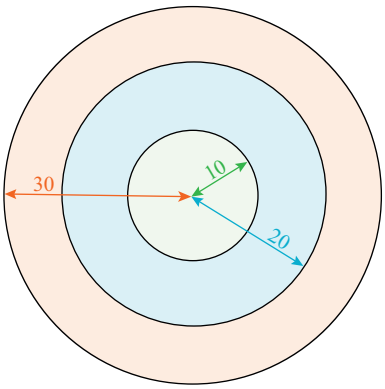
★★ 10 min Corrigé p. 352

Lycée Chaptal, Paris

Une cible est constituée de trois cercles concentriques de rayons respectifs 10 cm, 20 cm et 30 cm.

Un tireur à l'arc vise la cible avec des flèches et l'atteint à chaque fois !

La probabilité d'atteindre chaque zone est proportionnelle à l'aire de la zone.



Calculer la probabilité d'atteindre :

1. la zone au centre ;
2. la zone du milieu ;
3. la zone extérieure.

9 Feu tricolore

★★ — 10 min — Corrigé p. 353

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste a autant de chances de passer que de s'arrêter).

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   - **(a)** les trois feux verts ?
   - **(b)** deux des trois feux verts ?

10 Probabilités et proportions

★★ — 15 min — Corrigé p. 353

Lycée Chaptal, Paris

Parmi les 120 adhérents que compte le club de sport de Quentin, 42 pratiquent le tennis, 67,5% jouent au foot et 24 personnes pratiquent les deux activités. On choisit un adhérent au hasard et on note :

- T : « l'adhérent joue au tennis. »
- F : « l'adhérent joue au foot. »

On donnera toutes les proportions en pourcentages.

1. Décrire par une phrase ce que représente $T \cup \overline{F}$.
2. Calculer le nombre de joueurs de foot.
3. Calculer $P(T)$, $P\left(\overline{T}\right)$ et $P(T \cap F)$.
4. Calculer la proportion d'adhérents qui jouent au tennis ou au foot.
5. Calculer la proportion d'adhérents ne jouant ni au tennis, ni au foot.
6. Avec l'ouverture de nouvelles activités, le nombre d'adhérents au club augmente de 13% tous les ans.

   Combien y aura-t-il d'adhérents dans 3 ans ? (arrondir à l'unité)

11 Le jeu de Luc

★★ — 15 min — Corrigé p. 354

Lycée Chaptal, Paris

Luc participe à un jeu de dés dont les règles sont les suivantes : on lance 2 dés cubiques non truqués et on additionne les numéros des faces supérieures.

- Si la somme obtenue est impaire, Luc gagne 1 €.
- Si la somme obtenue est un multiple de 3, Luc gagne 3 €.
- Si la somme obtenue est supérieure ou égale à 10, Luc gagne 6 €.
- Si aucune des conditions précédentes n'est vérifiée, Luc perd 4 €.

Si plusieurs de ces conditions sont vérifiées, les gains se cumulent.

1. Construire un tableau à double entrée indiquant les gains ou les pertes de Luc.
2. Quelle est la probabilité que Luc remporte une somme supérieure ou égale à 4 € ?

12 Jetons

★★ — 15 min — Corrigé p. 355

Lycée Charlemagne, Paris

Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard un jeton dans l'urne, on note son numéro, on le remet dans l'urne, on tire à nouveau au hasard un jeton dans l'urne et on note son numéro. On forme ainsi une suite (J_1, J_2) de 2 numéros. Attention, la suite $(2,1)$, par exemple, est différente de la suite $(1,2)$.

1. Justifier brièvement que la probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{16}$.
2. Soit A l'événement : « $J_1 < J_2$ ». Soit B l'événement : « $J_1 + J_2 = 4$ ».
   - **(a)** Écrire les événements A et B comme des ensembles.
   - **(b)** Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$.
   - **(c)** En déduire $P(\bar{A})$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup \bar{B})$.
3. Soit E l'événement : « J_1 et J_2 sont impairs » et F l'événement : « $J_1 + J_2$ est impair ». Déterminer $P(E)$, $P(F)$, $P(E \cap F)$, $P(E \cup F)$.

INTERROS

13 Au supermarché

★★ 15 min Corrigé p. 356

Lycée Marie Curie, Versailles

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Un supermarché de quartier est ouvert de 9h à 19h. Le gérant a mesuré que la première caisse est occupée 5 h par jour (événement A) et la seconde 6 h par jour (événement B). Les deux sont occupées simultanément 3 h par jour. On observe les caisses à un instant choisi au hasard pendant les heures d'ouverture.

1. Donner les probabilités des événements A, B et $A \cap B$.
2. Quelle est la probabilité que la seconde caisse soit libre ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins une des caisses soit libre ?
4. Quelle est la probabilité que les deux caisses soient libres ?

14 Tirages dans un jeu de cartes

★★ 20 min Corrigé p. 356

Lycée Charlemagne, Paris

Un jeu de 32 cartes contient les cartes 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As dans les quatre couleurs trèfle, carreau, cœur, pique. Les *figures* sont les Valets, Dames et Rois. On tire au hasard une carte en supposant qu'il y ait équiprobabilité. Soit C l'événement « tirer un cœur » et H l'événement « tirer une figure ».

1. Définir par une phrase les événements $\bar{C}$, $C \cap H$, $C \cup H$, $C \cap \bar{H}$.
2. Calculer la probabilité des événements C, $\bar{C}$, H, $\bar{H}$, $C \cap H$, $C \cup H$ et $C \cap \bar{H}$.
3. Écrire $C \cap \bar{H}$ sous la forme d'un ensemble.

1 V/F Jeu de cartes

Énoncé p. 343

a *Vrai*. Si le jeu n'est pas truqué, le tirage de chaque carte est équiprobable, or le jeu contient 52 cartes, donc la probabilité de tirer une carte particulière est $\frac{1}{52}$.

b *Faux*. Il y a 4 as. L'événement « tirer un as » contient les 4 événements élémentaires « tirer l'as de pique », « tirer l'as de cœur », « tirer l'as de trèfle », « tirer l'as de carreau ». La probabilité de tirer un as est donc $4 \times \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$.

c *Vrai*. Comme dans la question précédente, la probabilité de tirer un roi est de $\frac{1}{13}$, celle de tirer une dame est de $\frac{1}{13}$. Comme ces deux événements sont disjoints (incompatibles), leur réunion a pour probabilité $\frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$.

2 Automatismes

Énoncé p. 343

1 Réponse **b**. Il y a 8 trèfles sur les 32 cartes soit $\frac{1}{4}$.

2 Réponse **c**. Il y a 4 as sur les 32 cartes soit $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

3 Réponse **b**. Il y a $3 \times 4 = 12$ figures sur les 32 cartes soit $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.

4 Réponse **c**. Il y a 8 « Pique » et 3 as (on ne compte pas deux fois l'as de Pique) soit 11 cartes sur les 32 cartes soit $\frac{11}{32}$.

3 Cartes

Énoncé p. 343

Lycée Marie Curie, Sceaux

1 Il y a 4 as dans le jeu, donc 4 issues favorables. Le jeu contient 52 cartes, donc 52 issues possibles. L'événement A a donc pour probabilité la valeur suivante : $4 \times \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$.

Chaque couleur ayant le même nombre de cartes, on peut considérer que le tirage de chaque couleur est équiprobable. Il y a 4 couleurs, donc la probabilité de tirer un pique est $\frac{1}{4}$.

2 L'événement $A \cap K$ est « la carte est l'as de pique ». Une seule issue favorable pour 52 possibles, donc la probabilité de cet événement est $\frac{1}{52}$.

3 $A \cup K$ signifie « la carte est un as ou un pique ». Il y a 13 piques, auxquels on ajoute les 3 autres as, donc 16 issues favorables, pour 52 possibles, donc : $P(A \cup K) = \dfrac{16}{52} = \dfrac{4}{13}$.
On peut également appliquer directement la formule du cours :

$$P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

4 Il s'agit de l'événement contraire $\bar{A}$ dont la probabilité est :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{12}{13}.$$

4 Jeu de dés

Énoncé p. 344

Lycée Edgar Quinet, Paris

1 On complète le tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Si le dé n'est pas pipé, les 6 valeurs sont équiprobables pour les deux chiffres, donc chaque résultat est équiprobable. On dénombre $6 \times 6 = 36$ résultats, qui ont donc tous une probabilité de $\dfrac{1}{36}$.

2
- Le résultat est un multiple de 5 si et seulement si le deuxième jet donne 5, ce qui arrive avec la probabilité $p_1 = \dfrac{1}{6}$.
- Le résultat est pair si et seulement si le deuxième jet donne 2, 4, ou 6, ce qui est la moitié des cas possibles, donc $p_2 = \dfrac{1}{2}$.
- Le résultat est supérieur à 30 si et seulement si le premier jet donne 3, 4, 5 ou 6, soit deux tiers des cas possibles, d'où $p_3 = \dfrac{2}{3}$.

5 Des urnes

Énoncé p. 344

Lycée La Folie Saint James, Neuilly-sur-Seine

1 On dénombre 100 issues possibles (les 100 numéros). 10 numéros commencent par 0, 10 numéros se terminent par 0. Attention à ne pas compter deux fois 00, qui relève des deux cas. Il y a donc 19 cas favorables.

La probabilité de A est donc $P(A) = 0{,}19$.
De même, 19 numéros contiennent au moins un 9, donc $P(B) = 0{,}19$.

2 On cherche les numéros qui contiennent au moins un 0 et au moins un 9. Comme les numéros ont deux chiffres, il y a donc deux issues favorables : 09 et 90. On en déduit : $P(A \cap B) = \dfrac{2}{100} = 0{,}02$.

3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}36$.

6 À la sortie du spectacle

Énoncé p. 344

Lycée Chaptal, Paris

1
- $F \cap O$: « La personne est une femme qui répond oui ».
- $\overline{F}$: « La personne n'est pas une femme » donc : « La personne est un homme » (car ici, il n'y a que deux genres possibles d'après l'énoncé).
- $\overline{F \cup O}$: commençons par décrire $F \cup O$: « La personne est une femme ou répond oui ». Le contraire de cet événement est : « La personne n'est pas une femme et répond non. ».
  Ainsi, $\overline{F \cup O}$: « La personne est un homme qui dit non ».
- On cherche le contraire de « La personne est une femme qui répond oui ». Donc :
  $\overline{F \cap O}$: « La personne est un homme ou répond non ».

2
- $P(F \cap O) = P(F) + P(O) - P(F \cup O) = 0{,}65 + 0{,}9 - 0{,}94 = 0{,}61$.
- $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.
- $P\left(\overline{F \cup O}\right) = 1 - P(F \cup O) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$.
- $P\left(\overline{F \cap O}\right) = 1 - P(F \cap O) = 1 - 0{,}61 = 0{,}39$.

7 Groupes sanguins

Énoncé p. 345

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Complétons avant tout le tableau :

		Groupe sanguin				
		O	A	B	AB	Total
rhésus	Rh+	37%	39%	7%	2%	85%
	Rh-	6%	6%	2%	1%	15%
Total		43%	45%	9%	3%	100%

1 L'univers de l'expérience est la population française.

2 **(a)** Il y a 45% de personnes qui ont un groupe sanguin A, donc $P(A) = 0{,}45$.

(b) Il y a 85% de personnes ayant un rhésus positif, donc $P(Rh+) = 0{,}85$.

(c) Il y a 1% de personnes ayant un groupe sanguin AB avec un rhésus négatif, donc $P(AB-) = 0{,}01$.

3 On choisit désormais la personne parmi celles qui ont un rhésus négatif, qui représentent 15 % de la population. Parmi elles, les personnes du groupe AB représentent 1 % de la population. La probabilité demandée est donc $\dfrac{0{,}01}{0{,}15} = \dfrac{1}{15} \approx 0{,}067$. C'est une *probabilité conditionnelle*, notion étudiée dans le chapitre « Probabilités conditionnelles ».

8 La cible

Énoncé p. 345

Lycée Chaptal, Paris

La probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à son aire ; comme la somme des trois probabilités vaut 1, elle est égale au quotient de l'aire de la zone par l'aire de la cible entière. Déterminons d'abord cette dernière :

$$\mathcal{A}_{\text{cible}} = \pi \times 30^2 = 900\pi \text{ cm}^2.$$

1 L'aire de la zone centrale est :

$$\mathcal{A}_{\text{centre}} = \pi \times 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2.$$

La probabilité d'atteindre la zone centrale est donc :

$$p_1 = \frac{100\pi}{900\pi} = \frac{1}{9}.$$

2 L'aire de la zone du milieu est :

$$\mathcal{A}_{\text{milieu}} = \pi \times 20^2 - \mathcal{A}_{\text{centre}} = 400\pi - 100\pi = 300\pi \text{ cm}^2.$$

La probabilité d'atteindre la zone du milieu est donc :

$$p_2 = \frac{300\pi}{900\pi} = \frac{1}{3}.$$

3 L'aire de la zone extérieure est :

$$\mathcal{A}_{\text{extérieure}} = \mathcal{A}_{\text{cible}} - (\mathcal{A}_{\text{milieu}} + \mathcal{A}_{\text{centre}}) = 900\pi - 400\pi = 500\pi \text{ cm}^2.$$

La probabilité d'atteindre la zone extérieure est donc :

$$p_3 = \frac{500\pi}{900\pi} = \frac{5}{9}.$$

Remarques

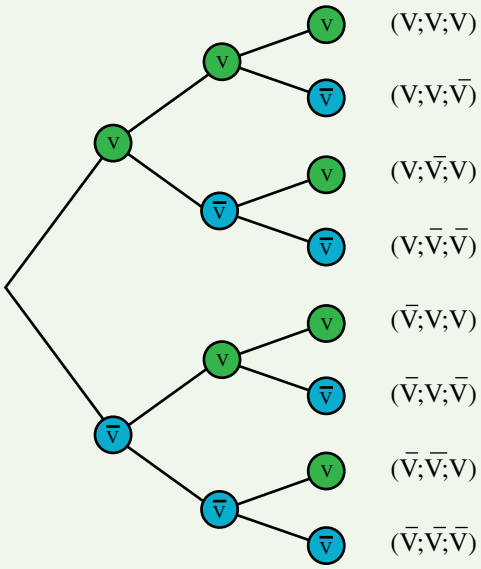
- On vérifie que la somme des probabilités est bien égale à 1 :
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{5}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$
- Pour trouver p_3, on aurait aussi pu faire :
$$p_3 = 1 - (p_1 + p_2).$$

9 Feu tricolore

Énoncé p. 346

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 On note V l'événement « le feu est vert » et $\overline{V}$ son événement contraire. L'arbre représentant toutes les situations possibles est le suivant :



2 **(a)** Nous sommes en situation d'équiprobabilité donc la probabilité qu'il rencontre trois feux verts est $\frac{1}{8}$ car une seule issue sur 8 réalise cet événement.

(b) D'après l'arbre, dans 3 cas sur 8, deux des feux sont verts donc la probabilité cherchée est $\frac{3}{8}$.

10 Probabilités et proportions

Énoncé p. 346

Lycée Chaptal, Paris

1 $T \cup \overline{F}$ est l'événement : « l'adhérent joue au tennis *ou* ne joue pas au foot ».

2 67,5% des 120 adhérents jouent au foot, ce qui représente :

$$\frac{67{,}5}{100} \times 120 = 81 \text{ adhérents.}$$

3 • 42 adhérents pratiquent le tennis sur les 120 que compte le club. Donc :

$$P(T) = \frac{42}{120} = 0{,}35, \quad \text{soit } 35\,\%.$$

• D'après la formule du cours,

$$P\left(\overline{T}\right) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65, \quad \text{soit } 65\,\%.$$

• 24 personnes pratiquent les deux activités, donc :

$$P(T \cap F) = \frac{24}{120} = 0{,}2, \quad \text{soit } 20\,\%.$$

4 D'après la formule du cours,

$$\begin{aligned} P(T \cup F) &= P(T) + P(F) - P(T \cap F) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{67{,}5}{100} - \frac{1}{5} \\ &= 0{,}825. \end{aligned}$$

Ainsi, la proportion d'adhérents qui jouent au tennis ou au foot est 82,5%, ou encore $\frac{33}{40}$.

5 Ne jouer ni au tennis, ni au foot est l'événement contraire de « jouer au tennis ou au foot » :

$$P\left(\overline{T} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{T \cup F}\right) = 1 - P(T \cup F) = 1 - 0{,}825 = 0{,}175.$$

Par conséquent, la proportion d'adhérents ne jouant ni au tennis, ni au foot est 17,5 %.

6 Une augmentation de 13% se traduit par un coefficient multiplicateur de :

$$1 + \frac{13}{100} = 1{,}13.$$

Ainsi, après trois augmentations successives de 13%, le nombre d'adhérents sera :

$$120 \times 1{,}13^3 \approx 173.$$

11 Le jeu de Luc

Énoncé p. 347

Lycée Chaptal, Paris

1 Pour construire le tableau à double entrée, il nous faut déterminer les entrées ! On lance deux dés cubiques, donc les entrées sont les faces des dés : les nombres entiers de 1 à 6. On a alors le tableau suivant :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	−4	4	−4	1	3	1
2	4	−4	1	3	1	−4
3	−4	1	3	1	−4	4
4	1	3	1	−4	4	6
5	3	1	−4	4	6	7
6	1	−4	4	6	7	9

MÉTHODE

Il est ici nécessaire d'être organisé dans sa façon de penser. On peut, dans un premier temps, construire la table d'addition des deux faces :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

et ensuite analyser les résultats un à un pour vérifier s'ils sont impairs, multiples de 3, supérieurs ou égaux à 10.
Par exemple, pour « 2 », il n'est ni impair, ni multiple de 3, ni supérieur ou égal à 10, donc le gain est -4.

2 L'événement contient 12 issues favorables parmi les 36 couples équiprobables. Plusieurs couples donnent le même gain.

Ainsi, la probabilité que le gain soit supérieur ou égal à 4 € est $\frac{12}{36}$, soit $\frac{1}{3}$, car il y a en tout 36 issues (même si certaines sont identiques).

12 Jetons

Énoncé p. 347

Lycée Charlemagne, Paris

1 Une issue est une suite (J_1, J_2). Il y a donc 4 possibilités pour J_1, et pour chaque valeur de J_1, 4 possibilités pour J_2, soit 16 issues possibles, l'expression « au hasard » signifiant, sauf mention contraire, que les valeurs possibles pour J_1 ou J_2 sont équiprobables, les issues (J_1, J_2) le sont également, donc la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{16}$.

2 **(a)** $A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
et $B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.

(b) L'événement A contient 6 issues favorables, donc nous avons $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

L'événement B contient 3 issues favorables, donc $P(B) = \frac{3}{16}$.
(1,3) est la seule issue commune aux deux événements, donc nous avons $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$.

$A \cap \bar{B}$ contient toutes les issues de A qui ne sont pas dans B, donc 5 issues favorables, d'où $P(A \cap \bar{B}) = \frac{5}{16}$.

(c) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{8}$ (événement contraire), et nous avons $P(A \cup B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ (8 issues favorables distinctes au total), $P(A \cup \bar{B}) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

3 On peut expliciter $E = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$ et $F = \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$. On en déduit facilement : $P(E) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, nous avons aussi $P(E \cap F) = 0$ (la somme de deux nombres impairs est paire), et l'égalité suivante $P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{3}{4}$ (événements *incompatibles*).

13 Au supermarché

Énoncé p. 348

Lycée Marie Curie, Versailles

1 Il s'agit d'une simple traduction de l'énoncé. On obtient $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$ car $A \cap B$ est l'événement : « les deux caisses sont occupées ».

2 « La seconde caisse est libre » est $\bar{B}$, l'événement contraire de B. Or $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0{,}4$.

3 « Au moins une des deux caisses est libre » est l'événement contraire de $A \cap B$. On calcule $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0{,}7$.

4 Considérons l'événement contraire, c'est-à-dire : « au moins une caisse est occupée ». Il s'agit de $A \cup B$. On a :

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$

donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. L'événement cherché, $\overline{A \cup B}$, a pour probabilité :

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B).$$

On en déduit que $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$, et donc $P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}5 - 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}2$.

14 Tirages dans un jeu de cartes

Énoncé p. 348

Lycée Charlemagne, Paris

1 $\bar{C}$ est l'événement « tirer une autre couleur que cœur ».

$C \cap H$ est l'événement « tirer une figure de cœur ».

$C \cup H$ est l'événement « tirer une figure ou un cœur ».

$C \cap \bar{H}$ est l'événement « tirer un cœur qui n'est pas une figure ».

2 Il y a 32 cartes, donc 32 cas possibles. Il suffit de dénombrer pour chaque événement les cas favorables :

- $P(C) = \frac{1}{4}$ car un quart des cartes sont des cœurs.
- $P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (événement contraire)
- $P(H) = \frac{3}{8}$ car pour chaque couleur, on dénombre 3 figures sur 8 cartes.
- $P(\bar{H}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ (événement contraire)
- $P(C \cap H) = \frac{3}{32}$ (trois figures cœurs, donc 3 cas favorables sur 32 cartes possibles). Si vous avez répondu $\frac{3}{8}$, c'est que vous avez oublié que la carte prise au hasard n'a pas de raison d'être un cœur.
- $P(C \cup H) = \frac{8+3\times 3}{32} = \frac{17}{32}$ (huit cœurs, et trois figures dans les trois autres couleurs, soit 17 cas favorables sur 32 cartes possibles).
- $P(C \cap \bar{H}) = \frac{5}{32}$ (5 cœurs ne sont pas des figures, soit 5 cas favorables sur 32 cartes possibles).

3 Il s'agit de recenser les cartes à cœur qui ne sont pas des figures, donc : $C \cap \bar{H} = \{7C, 8C, 9C, 10C, AC\}$ (xC désignant la carte x de cœur).

Chapitre 14

Probabilités conditionnelles

Plan du chapitre

1. Probabilités conditionnelles
2. Arbre pondéré
3. Tests de dépistage

Exercice type — Lycée Virlogeux, Riom

Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés.
Aucun participant n'abandonne la course.

- Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures ; les autres en 5 heures ou plus.
- Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours en 5 heures ou plus ; les autres en moins de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

- L l'événement « le cycliste est licencié dans un club » et $\overline{L}$ son événement contraire,
- M l'événement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\overline{M}$ son événement contraire.

1 À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}(\overline{M})$.

2 Construire un arbre pondéré représentant la situation.

3 Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.

4 On admet que $P(M) = 0{,}513$. Un organisateur affirme qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Voir corrigé page 362

COURS

1 Probabilités conditionnelles

Définition 1 : probabilité de B sachant A

A et B sont deux événements d'un même univers Ω, tels que $P(A) \neq 0$. La *probabilité de l'événement B sachant A*, notée $P_A(B)$ est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques

- La probabilité de B sachant A est la probabilité que B soit réalisé lorsqu'on sait que A est réalisé : tout se passe comme si l'univers était réduit à A.
- Dans une situation d'*équiprobabilité* on a :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}.$$

À RETENIR

Pour calculer $P_A(B)$, vous pouvez :

- soit utiliser la définition si vous connaissez $P(A \cap B)$ et $P(A)$.
- soit déterminer les résultats qui réalisent A et, parmi ceux-ci, calculer la probabilité de ceux qui réalisent B.

Propriété 1

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

Théorème 1

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. Alors :

$$P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$$

Remarque : en effet, $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles et leur réunion est A : donc $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$, et il suffit de diviser par $P(A)$.

Remarque : en général, $P_A(B) \neq P_B(A)$: les deux probabilités ont le même numérateur $P(A \cap B)$, mais pas le même dénominateur. Il faut toujours repérer l'événement « sachant », c'est-à-dire celui qui est supposé réalisé.

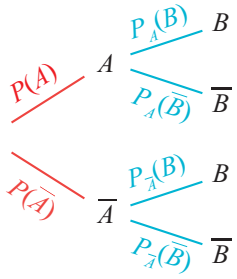
2 Arbre pondéré

On peut représenter une expérience aléatoire par un arbre pondéré de probabilités.

Un arbre pondéré de probabilité est constitué de branches.

Chaque branche porte une probabilité ; les points d'où partent les branches sont les nœuds ; les événements A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ sont indiqués au bout des branches.

$\overline{A}$ est l'événement contraire de A.



À RETENIR

- Dans un arbre la somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin (suite de branches décrivant une succession d'événements) est égale au produit des probabilités situées sur les branches qui le composent : c'est la traduction de la règle $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

3 Tests de dépistage

Un test de dépistage d'une maladie peut se tromper. On choisit une personne au hasard et on note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

- Un *faux positif* est une personne non malade dont le test est positif $(\overline{M} \cap T)$; un *faux négatif* est une personne malade dont le test est négatif $(M \cap \overline{T})$.
- La *sensibilité* du test est $P_M(T)$: la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade.
- La *spécificité* du test est $P_{\overline{M}}(\overline{T})$: la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'est pas malade.

COURS

Exemple : une maladie touche 2 % d'une population de 10 000 personnes.
Un test a une sensibilité de 95 % et une spécificité de 90 %.

	M	$\overline{M}$	Total
T	190	980	1 170
$\overline{T}$	10	8 820	8 830
Total	200	9 800	10 000

On compte 980 faux positifs et 10 faux négatifs.
On a $P_M(T) = \dfrac{190}{200} = 0{,}95$, mais $P_T(M) = \dfrac{190}{1\,170} \approx 0{,}16$: une personne testée positive n'a qu'environ 16 % de chances d'être malade. Il ne faut pas confondre $P_M(T)$ et $P_T(M)$.

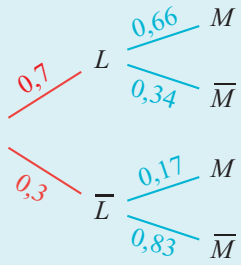
Solution de l'exercice type

Lycée Virlogeux, Riom

1 $P(L)$ représente la probabilité que le cycliste soit licencié. 70% des participants sont licenciés donc $P(L) = 0{,}7$. Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures donc $P_L(M) = 0{,}66$. Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours de 5 heures ou plus donc :

$$P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right) = 0{,}83.$$

2 L'arbre pondéré représentant la situation est le suivant.



3 La probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures est :

$$P(L \cap M) = P(L) \times P_L(M) = 0{,}7 \times 0{,}66 = 0{,}462.$$

4 On calcule $P_M(L) = \dfrac{P(M \cap L)}{P(M)} = \dfrac{0{,}462}{0{,}513} \approx 0{,}9006$. Donc un peu plus de 90% des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club : l'organisateur a raison.

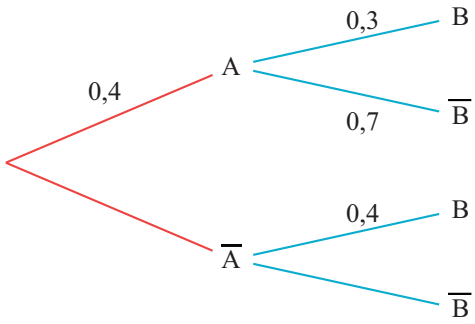
Voir énoncé page 359

1 V/F Interprétation d'un arbre

15 min Corrigé p. 369

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

On considère l'arbre pondéré ci-dessous où A et B sont deux événements.



1. $P_A(B) = 0{,}3$.
2. $P(\overline{A}) = 0{,}6$.
3. $P(A \cap B) = 0{,}7$.
4. $P_A(\overline{B}) = 0{,}7$.
5. $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4$.
6. $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}6$.

2 V/F Probabilités conditionnelles

15 min Corrigé p. 369

Dans une grande entreprise, 30% des salariés sont cadres et parmi eux, 20% pratiquent le télétravail. Parmi les salariés non cadres, seulement 10% pratiquent le télétravail. On choisit au hasard un salarié et on note C et T les événements respectifs : « le salarié est cadre » et « le salarié pratique le télétravail ».

Indiquer pour chaque affirmation suivante si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. $P(\overline{C}) = 0{,}7$.
2. $P(C \cap T) = 0{,}2$.
3. $P_C(\overline{T}) = 0{,}8$.
4. $P(\overline{C} \cap T) = 0{,}1$.
5. On sait que 13% des salariés pratiquent le télétravail. $P_T(C) \approx 0{,}462$.

INTERROS

3 QCM Probabilités conditionnelles

15 min

Corrigé p. 369

Pour chaque question, indiquer la ou les bonnes réponses.

Si besoin, les probabilités sont données arrondies au millième.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des médailles de la France aux Jeux Olympiques de Paris de 2024.

	Individuel(I)	Par équipe(E)	Total
Or (O)	10	6	16
Argent(A)	18	8	26
Bronze(B)	12	10	22
Total	40	24	64

On choisit une médaille au hasard et on note I, E, O, A, B les événements :

- I : « la médaille est une médaille individuelle »,
- E : « la médaille est une médaille par équipe »,
- O : « la médaille est en or »,
- A : « la médaille est en argent »,
- B : « la médaille est en bronze ».

1 $P(O) =$

a 0,25 b 0,157 c 0,625

2 $P(\overline{I}) =$

a 0,625 b 0,375 c 0,094

3 $P(I \cap A) =$

a 0,45 b 0,281 c 0,692

4 La probabilité que la médaille soit en bronze sachant que c'est une médaille individuelle est notée :

a $P_I(B)$ b $P(I \cap B)$ c $P_B(I)$

5 $P_A(\overline{I}) =$

a 0,45 b 0,125 c 0,308

6 La probabilité que la médaille soit une médaille en or par équipe est notée :

a $P(O \cap \overline{I})$ b $P_O(\overline{I})$ c $P_{\overline{I}}(O)$

7 La probabilité que la médaille choisie ne soit pas une médaille en or est égale à :

a 0,25 b $P(A)$ c 0,75

8 La probabilité que la médaille choisie soit une médaille par équipe sachant qu'elle est en bronze est égale à :

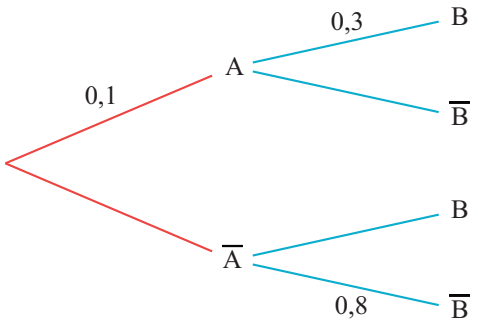
a 0,156 b $P_B(E)$ c 0,455

Automatismes

4 Probabilités

★★ 20 min Corrigé p. 370

1 On considère l'arbre pondéré ci-dessous.



On cherche la probabilité de l'événement $\overline{A}$.

a $P(\overline{A}) = 0{,}2$ **b** $P(\overline{A}) = 0{,}6$
c $P(\overline{A}) = 0{,}9$ **d** $P(\overline{A}) = 0{,}83$

2 On considère l'arbre de probabilité ci-dessus. On cherche la probabilité de l'événement $A \cap B$.

a $P(A \cap B) = 0{,}3$ **b** $P(A \cap B) = 0{,}03$
c $P(A \cap B) = 0{,}4$ **d** $P(A \cap B) = 0{,}5$

3 On considère l'arbre de probabilité précédent. On cherche la probabilité $P_A(B)$.

a $P_A(B) = 0{,}21$ **b** $P_A(B) = 0{,}4$
c $P_A(B) = 0{,}03$ **d** $P_A(B) = 0{,}3$

4 On considère l'arbre de probabilité précédent. On cherche la probabilité de l'événement $\overline{A} \cap B$.

a $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2$ **b** $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}18$
c $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}9$ **d** $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}72$

	A	$\overline{A}$	Total
B	40	110	150
$\overline{B}$	30	20	50
Total	70	130	200

5 On considère le tableau croisé d'effectifs ci-dessus. On cherche la probabilité de l'événement $\overline{A}$.

a $P(\overline{A}) = \dfrac{110}{130}$ **b** $P(\overline{A}) = \dfrac{130}{200}$
c $P(\overline{A}) = \dfrac{110}{150}$ **d** $P(\overline{A}) = \dfrac{70}{130}$

INTERROS

6 On considère le tableau croisé d'effectifs ci-dessus. On cherche la probabilité de l'événement $A \cap B$.

a $P(A \cap B) = \dfrac{40}{70}$ **b** $P(A \cap B) = \dfrac{40}{150}$

c $P(A \cap B) = \dfrac{70+150}{200}$ **d** $P(A \cap B) = \dfrac{40}{200}$

7 On considère le tableau croisé d'effectifs ci-dessus. On cherche la probabilité $P_A(B)$.

a $P_A(B) = \dfrac{40}{70}$ **b** $P_A(B) = \dfrac{40}{150}$

c $P_A(B) = \dfrac{40}{200}$ **d** $P_A(B) = \dfrac{40}{70+150}$

Calculer des probabilités à partir d'un tableau

5 Calculer des probabilités

★ 15 min Corrigé p. 370

Lycée La Merci, Montpellier

Une entreprise fabrique deux types de chaudières :

- des chaudières dites « à cheminée » ;
- des chaudières dites « à ventouse ».

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses.

On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

- C : « La chaudière est à cheminée » ;
- V : « La chaudière est à ventouse » ;
- D : « La chaudière présente un défaut ».

1 Construire le tableau croisé d'effectifs correspondant en différenciant les caractéristiques Cheminée/Ventouse d'une part et Défaut/Sans défaut d'autre part.

2 Déterminer $P(C)$ et $P(V)$.

3 Calculer $P(C \cap D)$ et $P(V \cap D)$.

4 Calculer :

(a) la probabilité qu'une chaudière à ventouse présente un défaut.

(b) la probabilité qu'une chaudière à cheminée présente un défaut.

5 Calculer $P(D)$ et $P(\overline{D})$.

6 Calculer des probabilités

★★ — 15 min — Corrigé p. 371

Lycée Louis Vincent, Metz

Dans une classe de 25 élèves, 15 s'intéressent à la musique, 8 s'intéressent à la danse et 3 s'intéressent à la musique et à la danse.

On suppose que tous les élèves ont la même probabilité d'être sélectionnés.

1. Construire le tableau croisé d'effectifs correspondant.
2. On note M et D les événements :
   - M : « l'élève s'intéresse à la musique »,
   - D : « l'élève s'intéresse à la danse ».

   Que signifient les événements suivants : $\overline{M}$, $M \cap D$, $M \cap \overline{D}$?
3. On choisit un élève au hasard. Calculer $P(\overline{M} \cap \overline{D})$.
4. On choisit un élève au hasard parmi ceux qui s'intéressent à la musique. Quelle est la probabilité que cet élève s'intéresse à la danse ?

Calculer des probabilités à l'aide d'un arbre

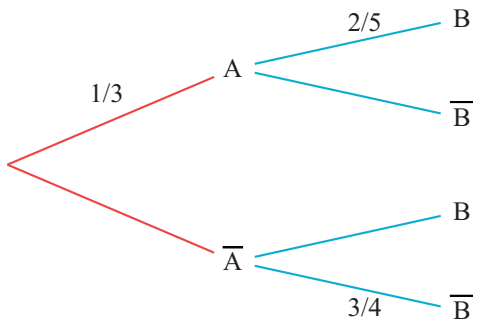
7 Interpréter un arbre

★ — 10 min — Corrigé p. 372

Lycée Charlemagne, Thionville

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer les probabilités suivantes sous forme d'une fraction irréductible.
   (a) $P(A \cap B)$
   (b) $P(\overline{A} \cap B)$
   (c) $P(A \cap \overline{B})$
   (d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

INTERROS

8 Calculer des probabilités

★ — 15 min — Corrigé p. 372

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

Un laboratoire pharmaceutique met au point un test pour dépister une maladie. Une étude sur un échantillon de personnes montre que :

- Le test est positif dans 4% des cas.
- Parmi les personnes ayant un test positif, 7 % ne sont pas malades.
- 93,12% des personnes testées ont un test négatif et ne sont pas malades.

On choisit une personne au hasard et on considère les événements :

- T :« le test est positif » ;
- M : « la personne est malade ».

1. Traduire les informations de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
3. Calculer la probabilité que la personne ne soit pas malade sachant que son test est négatif.
4. En déduire la probabilité que la personne soit malade sachant que son test est négatif, c'est-à-dire la probabilité qu'un test négatif soit un faux négatif.
5. Dans quels cas le test donne-t-il un résultat erroné ?
6. Calculer la probabilité que le test commette une erreur.

9 Test de dépistage

★★ — 15 min — Corrigé p. 373

Lycée Louis Vincent, Metz

Dans une population de 5 000 personnes, 4 % sont atteintes d'une maladie. On dispose d'un test de dépistage dont la sensibilité est de 90 % et la spécificité de 95 %. On choisit une personne au hasard et on note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Recopier et compléter le tableau croisé d'effectifs suivant.

	M	$\overline{M}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			5 000

2. Combien de faux positifs et de faux négatifs le test produit-il ?
3. Calculer $P_M(T)$ et $P_T(M)$. Comparer ces deux probabilités.
4. Un article affirme : « Ce test est fiable à 90 % : une personne testée positive est malade dans 90 % des cas ».
   Que penser de cette affirmation ?

1 V/F Interprétation d'un arbre

Énoncé p. 363

1. *Vrai.* $P_A(B)$ se lit sur une branche du 2e niveau de l'arbre.
2. *Vrai.* $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
3. *Faux.* $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.
4. *Vrai.* $P_A(\overline{B})$ se lit sur une branche du 2e niveau de l'arbre.
5. *Faux.* $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$.
6. *Vrai.* $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

2 V/F Probabilités conditionnelles

Énoncé p. 363

1. *Vrai.* $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
2. *Faux.* $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$.
3. *Vrai.* $P_C(\overline{T}) = 1 - P_C(T) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
4. *Faux.* $P(\overline{C} \cap T) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(T) = 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}07$.
5. *Vrai.* $P_T(C) = \dfrac{P(C \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}13} \approx 0{,}462$.

3 QCM Probabilités conditionnelles

Énoncé p. 364

1. Réponse **a**. $P(O) = \dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.
2. Réponse **b**. $P(\overline{I}) = \dfrac{24}{64} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.
3. Réponse **b**. $P(I \cap A) = \dfrac{18}{64} = \dfrac{9}{32} \approx 0{,}281$.
4. Réponse **a**.
5. Réponse **c**. $P_A(\overline{I}) = \dfrac{8}{26} = \dfrac{4}{13} \approx 0{,}308$.
6. Réponse **a**.
7. Réponse **c**. $P(\overline{O}) = 1 - P(O) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.
8. Réponse **b** et **c**. $P_B(E) = \dfrac{10}{22} \approx 0{,}455$.

CORRIGÉS

4 Probabilités

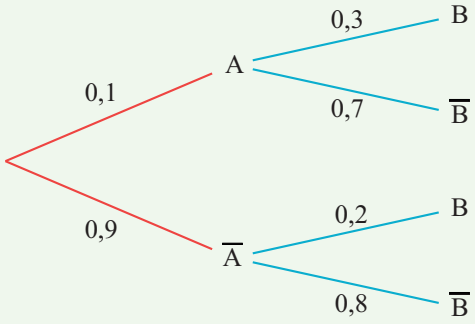
Énoncé p. 365

1 Réponse c. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

2 Réponse b. $P(A \cap B) = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03$.

3 Réponse d. $P_A(B) = 0{,}3$ (c'est écrit sur la deuxième branche de l'arbre).

4 Réponse b. $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}18$.



5 Réponse b. On regarde la 3e ligne du tableau.

6 Réponse d. On regarde la valeur à l'intersection de la colonne de A et de la ligne de B.

7 Réponse a. On regarde sur la colonne de A les éléments qui sont dans B.

5 Calculer des probabilités

Énoncé p. 366

Lycée La Merci, Montpellier

1 On obtient le tableau suivant :

	Défaut	Sans défaut	Total
Cheminée	9	891	900
Ventouse	30	570	600
Total	39	1461	1500

Nous avons ici tenu compte de la méthode suivante.

MÉTHODE

Dans un tableau on peut calculer directement les probabilités $P_A(B)$.

$$P_A(B) = \frac{\text{nombre d'issues dans } A \cap B}{\text{nombre d'issues dans } A}$$

Nombre d'issues dans	A	$\overline{A}$	Total
B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$	B
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B}$
Total	A	$\overline{A}$	

2 • $P(C) = \dfrac{900}{1\,500} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$

• $P(V) = \dfrac{600}{1\,500} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4.$

3 • $P(C \cap D) = \dfrac{9}{1\,500} = \dfrac{3}{500} = 0{,}006.$

• $P(V \cap D) = \dfrac{30}{1\,500} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02.$

4 **(a)** $P_V(D) = \dfrac{30}{600} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05.$
(On pouvait aussi utiliser l'information de l'énoncé).

(b) $P_C(D) = \dfrac{9}{900} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ (même remarque).

5 • D'après le tableau, 39 chaudières sur 1 500 présentent un défaut :

$$P(D) = \frac{39}{1\,500} = 0{,}026.$$

• $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}026 = 0{,}974.$

6 Calculer des probabilités

Énoncé p. 367

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Le tableau croisé est le suivant :

	M	$\overline{M}$	Total
D	3	5	8
$\overline{D}$	12	5	17
Total	15	10	25

2 $\overline{M}$ est l'événement « l'élève ne s'intéresse pas à la musique »,
$M \cap D$ est l'événement « l'élève s'intéresse à la musique et à la danse »,
$M \cap \overline{D}$ est l'événement « l'élève s'intéresse à la musique mais pas à la danse ».

3 On choisit un élève au hasard. On est donc en situation d'équiprobabilité.

$$P(\overline{M} \cap \overline{D}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

4 Il s'agit d'une probabilité conditionnelle. La probabilité que cet élève s'intéresse à la danse sachant qu'il s'intéresse à la musique est :

$$P_M(D) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

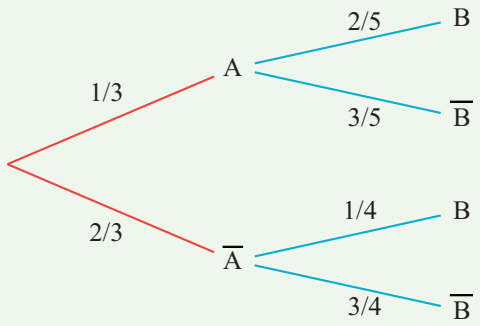
CORRIGÉS

7 Interpréter un arbre

Énoncé p. 367

Lycée Charlemagne, Thionville

1 L'arbre complété est le suivant :



2 **(a)** $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$. **(c)** $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.

(b) $P(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. **(d)** $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

8 Calculer des probabilités

Énoncé p. 368

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

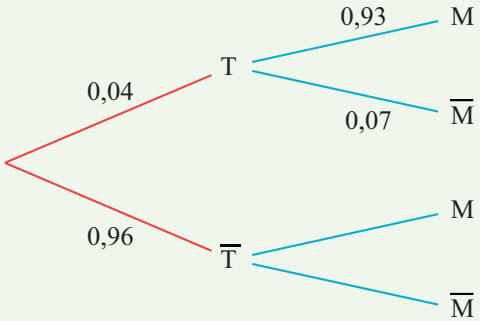
MÉTHODE

- Pour étudier de telles situations, on les représente à l'aide d'un arbre pondéré.
- On reporte sur les branches les probabilités connues puis on détermine les probabilités des branches restantes.

1 D'après les informations de l'énoncé :

$$P(T) = 0{,}04,\ P_T(\overline{M}) = 0{,}07 \text{ et } P(\overline{T} \cap \overline{M}) = 0{,}9312.$$

2 L'arbre pondéré décrivant la situation est le suivant :



3 $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{T} \cap \overline{M})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}9312}{0{,}96} = 0{,}97.$

4 $P_{\overline{T}}(M) = 1 - P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03.$

5 Le test commet une erreur lorsqu'il est positif et que la personne n'est pas malade ou lorsque le test est négatif et que la personne est malade.

6 La probabilité que le test commette une erreur est :

$$\begin{aligned} p &= P(T \cap \overline{M}) + P(\overline{T} \cap M) \\ &= 0{,}04 \times 0{,}07 + 0{,}96 \times 0{,}03 \\ &= 0{,}0316. \end{aligned}$$

9 Test de dépistage

Énoncé p. 368

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Il y a $0{,}04 \times 5\,000 = 200$ malades et 4 800 personnes non malades.

Parmi les malades, $0{,}90 \times 200 = 180$ ont un test positif ; parmi les non malades, $0{,}95 \times 4\,800 = 4\,560$ ont un test négatif.

	M	$\overline{M}$	Total
T	180	240	420
$\overline{T}$	20	4 560	4 580
Total	200	4 800	5 000

2 Les faux positifs sont les personnes non malades testées positives : il y en a 240. Les faux négatifs sont les personnes malades testées négatives : il y en a 20.

3 $P_M(T) = \dfrac{180}{200} = 0{,}9$ (c'est la sensibilité du test) et

$P_T(M) = \dfrac{180}{420} = \dfrac{3}{7} \approx 0{,}43.$

Ces deux probabilités sont très différentes : elles ont le même numérateur, mais pas la même population de référence (les 200 malades d'un côté, les 420 personnes testées positives de l'autre).

4 L'affirmation est fausse : elle confond $P_M(T) = 0{,}9$ (90 % des malades ont un test positif) et $P_T(M) \approx 0{,}43$. En réalité, une personne testée positive n'est malade que dans environ 43 % des cas, car la maladie est rare et les faux positifs sont nombreux (240 contre 180 vrais positifs).

Annexe

Liste des vidéos

Chapitre	Titre	Page
Chapitre 3	**Cours :** 1/3 n'est pas décimal	**35**
Chapitre 3	**Cours :** démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$	**35**
Chapitre 7	**Exercice 21 :** changement de repère	**190**
Chapitre 8	**Exercice type :** exercice type	**207**
Chapitre 11	**Exercice type :** exercice type de statistiques	**287**
Chapitre 13	**Exercice 13 :** au supermarché	**348**