INTERROS des LYCÉES

Collection dirigée par Éric MAURETTE

Nouvelle épreuve anticipée

NOUVEAU PROGRAMME

maths spécialité

1RE

Stéphane PASQUET

Nathan

Remerciements

Les auteurs et l'équipe de Prepamath Éditions tiennent à remercier Jean-Côme Charpentier et Matthieu Berret pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Morgann Lechat, Mickaël Cellier, Stéphane Pasquet

Coordination éditoriale : François Déliac

Conception couverture : Simon Geliot

Votre avis nous intéresse : `contact@prepamath.fr`

Retrouvez les Interros des Lycées et des informations scientifiques sur :

Facebook : facebook.com/interrosdeslycees

Instagram : @interrosdeslycees

PREPAMATH Éditions 2026

Éditions NATHAN 2026 - ISBN 9782095065362

Avant-propos

Cet ouvrage est conforme au programme de la spécialité « Mathématiques » puisqu'il s'appuie sur les documents validés par le Conseil Supérieur des Programmes de l'Éducation Nationale.

Il est composé pour chaque chapitre :

- d'une partie *Cours* : les notions sont traitées du point de vue théorique, avec un maximum d'exemples afin de rendre cette théorie plus accessible ;
- d'une partie *Exercices* : les énoncés des exercices proposés sont donnés en contrôle par des enseignants dans les lycées de France. Ils sont classés par thème et par niveau de difficulté ;
- d'une partie *Corrigés* : pour chaque exercice, un corrigé clair est donné. Chaque corrigé se veut précis pour que l'élève puisse d'une part comprendre ce qui est attendu de lui ou d'elle, et d'autre part faire d'autres exercices similaires.

Cet ouvrage ne doit pas être perçu comme un substitut de cours, mais comme un complément au travail effectué en classe. Il permet dans certains cas d'avoir une autre approche des notions que celle de l'enseignant du lycée. Il offre l'opportunité de renforcer ses acquis à travers des exercices allant du basique au plus élaboré. Ainsi, l'ouvrage vous permettra au final de vous sentir plus à l'aise dans cette spécialité, à condition que vous suiviez les recommandations données dans la partie « Méthode de travail » qui suit (*cf.* page 6).

Pour finir, nous insistons sur le fait que malgré la vigilance que nous avons pu apportée à la conception de cet ouvrage, il se peut que certaines erreurs nous aient échappé. Aussi, nous remercions par avance tout lecteur et toute lectrice qui nous fera part de ses remarques et/ou suggestions afin d'améliorer encore cet ouvrage lors de futures rééditions à l'adresse mail suivante :

`contact@prepamath.fr`

Pour télécharger les programmes contenus dans cet ouvrage :

`http://www.prepamath.fr/IL1M`

Très bon entraînement à vous !

L'auteur

Table des matières

Méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous conseillons le livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et E. Maurette, aux Éditions Prepamath.

Faire des « feed-back »

Le « feed-back » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral. Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé.

Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- Idem pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

Pour acquérir de la rapidité, 3 voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.
- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoirs surveillés. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.

Chapitre 1

Le second degré

Plan du chapitre

Exercice type — Lycée Mansart, Saint-Cyr-l'École

Soit $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = -2x^2 + 7x - 3$ et $h(x) = 4\sqrt{2}x - x^2 - 8$.
Pour chaque trinôme donner :

- ses racines (éventuelles) ;
- sa factorisation (s'il est factorisable) ;
- son signe dans un tableau.

Voir corrigé page 6

Il s'agit dans ce chapitre d'apprendre :

- à résoudre une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$;
- à étudier le signe du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

1 Polynôme du second degré

1.1 Définitions

Définition 1 : polynôme du second degré

Soient a, b et c trois nombres réels, avec $a \neq 0$.
On appelle *polynôme du second degré* tout polynôme de la forme :

$$ax^2 + bx + c.$$

Exemples (de polynômes du second degré)

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.
- $P(x) = -5x^2 + 7$, avec $a = -5$, $b = 0$ et $c = 7$.
- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8x$, avec $a = \frac{1}{2}$, $b = 8$ et $c = 0$.

COURS

Définition 2 : racine d'un polynôme

On appelle *racine* d'un polynôme P toute valeur r telle que $P(r) = 0$.

Exemple : posons $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Alors, $r = 1$ est une racine de P car :

$$P(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 3 - 5 + 2 = 0.$$

1.2 Forme canonique d'un polynôme du second degré

Propriété 1

Quelles que soient les valeurs des réels a, b et c, le polynôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$a(x - \alpha)^2 + \beta, \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Cette écriture est appelée la *forme canonique* du polynôme.

Exemple : soit $P(x) = 3x^2 - 12x + 15$. Cherchons sa forme canonique.

- On calcule :
$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 3} = 2.$$
- On calcule :
$$\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-12)^2 - 4 \times 3 \times 15}{4 \times 3} = 3.$$
- On conclut :
$$P(x) = 3(x - 2)^2 + 3.$$

Définition 3 : discriminant d'un polynôme du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.
On appelle *discriminant* de P le nombre noté Δ (lire « delta ») défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Remarque : ce nombre intervient dans le calcul de β de la forme canonique.
En effet, $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Propriété 2 : représentation graphique

La représentation graphique d'un polynôme du second degré est une *parabole* dont le sommet a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ et dont l'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$, soit $x = -\dfrac{b}{2a}$.

2 Racines d'un polynôme du second degré

Retrouvez cette section de cours en vidéo.

Définition 4

On appelle *équation du second degré* toute équation de la forme $P(x) = 0$, où P est un polynôme du second degré.

Remarque : les solutions d'une équation du second degré sont donc les racines du polynôme du second degré associé à cette équation.

2.1 Recherches des éventuelles racines

2.1.1 - Généralités

Propriété 3

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

- Si $\Delta < 0$, alors P n'admet aucune racines réelles.
- Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine réelle :
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$
- Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2.1.2 - Racine évidente

Définition 5 : racine évidente

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. On dit que x_1 est une *racine évidente* s'il est facile de voir que $P(x_1) = 0$.

Remarques

Dans la pratique, les racines évidentes prennent généralement leurs valeurs dans l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

- Si la somme des coefficients du polynôme vaut 0, alors 1 est une racine évidente.
- Si $a - b + c = 0$ alors -1 est une racine évidente.
- Pour les autres valeurs, il faudra être à l'aise avec le calcul mental.

COURS

Exemples

- $P_1(x) = 7x^2 - 5x - 2$.
  $a + b + c = 7 - 5 - 2 = 0$ donc 1 est une racine évidente de P_1.
- $P_2(x) = 8x^2 + 5x - 3$.
  $a - b + c = 8 - 5 - 3 = 0$ donc -1 est une racine évidente de P_2.

2.1.3 - Somme et produits des racines

Propriété 4

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $\Delta > 0$.
Si x_1 et x_2 sont les deux racines de P alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Cette propriété est très utile quand P admet une racine évidente pour trouver la seconde racine.

Exemple : soit $f(x) = 5x^2 + 9x - 14$.
$a + b + c = 5 + 9 - 14 = 0$ donc $x_1 = 1$ est une racine évidente.
D'après la propriété précédente, on déduit que la seconde racine x_2 est telle que :

$$x_1 x_2 = \frac{-14}{5} \qquad \text{soit} \qquad x_2 = -\frac{14}{5}.$$

Propriété 5

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $\Delta > 0$, où x_1 et x_2 sont les deux racines de f.
Posons :

$$S = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad P = x_1 x_2.$$

Alors, x_1 et x_2 sont aussi les racines du polynôme $x^2 - Sx + P$.

Exemple : trouvez deux nombres x et y tels que $x + y = 2\,019$ et $xy = 778\,500$.

D'après la propriété précédente, x et y sont les racines du polynôme :

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2\,019x + 778\,500,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 962\,361 = 981^2.$$

On en déduit alors que :

$$x_1 = \frac{2\,019 - 981}{2} = 519$$

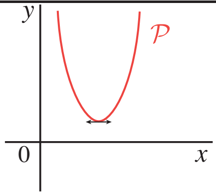
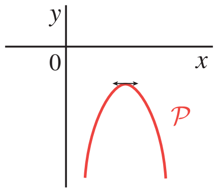
et

$$x_2 = \frac{2\,019 + 981}{2} = 1\,500.$$

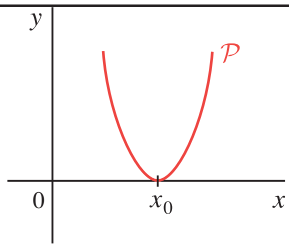
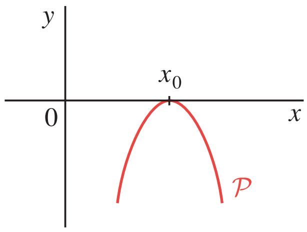
Les deux nombres sont donc 519 et 1 500.

2.2 Interprétations graphiques

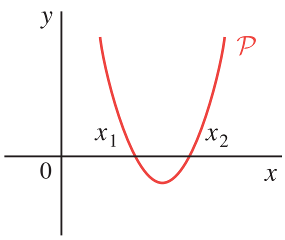
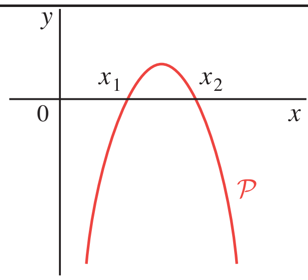
- Si $\Delta < 0$.

<table>
<tr><th colspan="2">Le trinôme P n'a pas de racines</th></tr>
<tr><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">$-$</td></tr></table></td></tr>
</table>

- Si $\Delta = 0$.

<table>
<tr><th colspan="2">Le trinôme P a une racine double x_0</th></tr>
<tr><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="3">$+ \quad 0 \quad +$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="3">$- \quad 0 \quad -$</td></tr></table></td></tr>
</table>

- Si $\Delta > 0$.

<table>
<tr><th colspan="2">Le trinôme P a deux racines x_1 et x_2</th></tr>
<tr><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="4">$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="4">$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$</td></tr></table></td></tr>
</table>

3 Factorisation

Propriété 6

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

- Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors :
$$P(x) = a(x - x_0)^2.$$
- Si $\Delta > 0$, alors :
$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Solution de l'exercice type — Lycée Mansart, Saint-Cyr-l'École

- $f(x) = x^2 - x + 1$. Son discriminant est : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc f n'admet pas de racines réelles. Il n'est donc pas factorisable dans $\mathbb{R}$. De plus, $f(x)$ est toujours du signe de a donc $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
- $g(x) = -2x^2 + 7x - 3$. Son discriminant est : $\Delta = 7^2 - 24 = 25 > 0$ donc g admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-7-5}{-4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7+5}{-4} = \frac{1}{2}.$$
On en déduit que $g(x)$ est factorisable sous la forme :
$$g(x) = -2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-3)(1-2x)$$
et :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $h(x) = -x^2 + 4\sqrt{2}x - 8$. Son discriminant est : $\Delta = \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 32 = 0$. Le trinôme admet donc une racine double :
$$x_0 = \frac{-4\sqrt{2}}{-2} = 2\sqrt{2}.$$
On en déduit que $h(x)$ est factorisable sous la forme :
$$h(x) = -\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2$$
et :

x	$-\infty$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$-$	

Voir énoncé page 1

1 V/F Résolution d'équations du second degré

10 min Corrigé p. 18

Sans résoudre l'équation, dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1 L'équation $150x^2 - 3x - 17{,}5 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.

2 Le trinôme du second degré $-x^2 + 6x - 9$ est strictement négatif pour tout réel x.

3 Si on multiplie par 2 tous les coefficients d'une équation du second degré, alors ses solutions sont aussi multipliées par 2.

4 L'équation $x^2 - x + 15 = 0$ n'a pas de solutions réelles.

5 $x^2 + 16 > 0$ pour tout réel x.

2 V/F Propriétés d'un trinôme

15 min Corrigé p. 18

On considère la fonction f définie par $f(x) = -10x^2 + 5x + 1$. Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1 La forme canonique de $f(x)$ est $-10\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{80}\right]$.

2 La courbe représentative de f admet un axe de symétrie d'équation $x = \frac{1}{4}$.

3 Pour tout réel x, $f(x)$ est négatif.

4 On peut exprimer $f(x)$ comme produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{R}$.

3 V/F Signe de $f(x)$ et de Δ

15 min Corrigé p. 18

Dans cet exercice, $f(x)$ désigne le trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses :

1 Si pour tout réel x, $f(x) < 0$, alors $\Delta < 0$.

2 S'il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha)f(\beta) < 0$, alors $\Delta \geqslant 0$.

3 Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel x, $f(x) < 0$.

4 Si $\Delta > 0$ et si α et β sont deux réels tels que $x' < \alpha < x'' < \beta$ (x' et x'' étant les racines du polynôme), alors $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

INTERROS

4 QCM Signes et coefficients

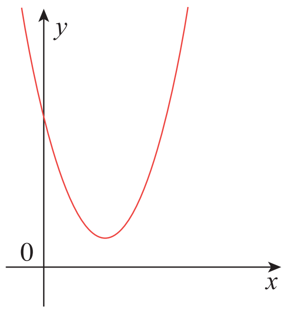
10 min Corrigé p. 19

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses.

1 Le trinôme $\frac{5}{2}x^2 - 5x + 2$

- [a] admet pour racines $\frac{-5+\sqrt{5}}{5}$ et $\frac{-5-\sqrt{5}}{5}$.
- [b] se factorise sous la forme $\frac{5}{2}\left(x - \frac{5-\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)$.
- [c] n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}$.
- [d] est strictement négatif sur $]-\infty\,;0[$.

2 On considère la courbe représentée dans le repère orthonormé ci-dessous :



Une équation possible de cette courbe est :

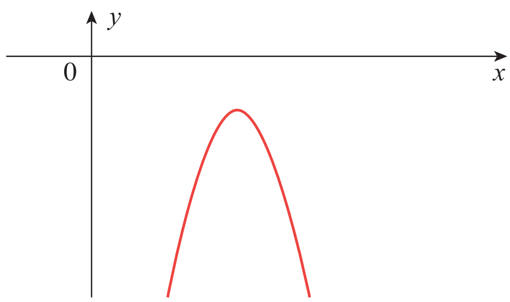
- [a] $y = x^2 - 4x + 17$.
- [b] $y = -3x^2 - 4x + 1$.
- [c] $y = 2x^2 - 4x + 2$.
- [d] $y = -2x^2 + x + 3$.

3 On considère le polynôme du second degré $f(x) = -3x^2 + bx + c$. Alors on peut affirmer que, quels que soient les réels b et c :

- [a] $f(x)$ est toujours positif ou nul.
- [b] $f(x)$ n'est pas toujours positif.
- [c] $f(x)$ est toujours inférieur ou égal à 0.
- [d] $f(x)$ est toujours strictement négatif.

4 On considère la fonction trinôme f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, dont la représentation graphique est donnée page ci-contre. Si on note Δ le discriminant du trinôme, alors Δ et a sont :

- [a] de même signe.
- [b] de signes contraires.
- [c] négatifs.
- [d] positifs.



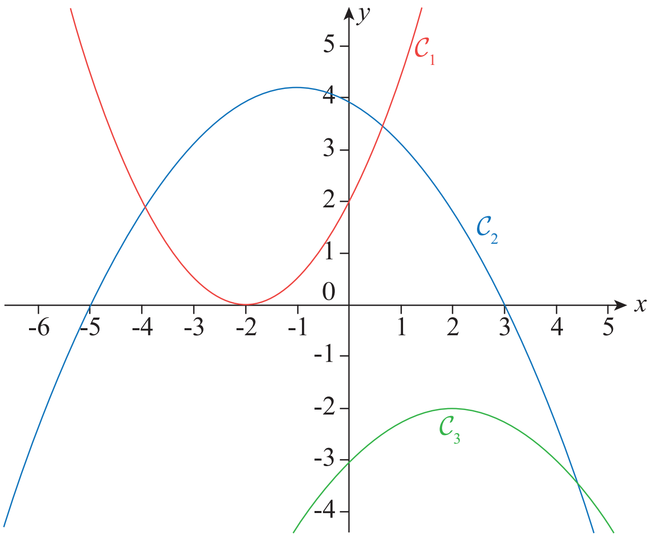
Équations et trinômes du second degré

5 Choisir les bonnes courbes

★ 5 min Corrigé p. 19

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-Bois

Les courbes $\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ suivantes représentent respectivement les 3 fonctions polynômes du second degré, f_1, f_2 et f_3.



Parmi ces trois fonctions déterminer, en justifiant :

1. celles pour lesquelles le coefficient du terme de degré 2 est strictement positif ;
2. celles pour lesquelles le discriminant est négatif ou nul ;
3. celles pour lesquelles le coefficient constant est strictement positif.

6 Résolution d'équations

★ 5 min Corrigé p. 20

Lycée Buffon, Paris

Pour chaque expression ci-dessous, résoudre $P(x) = 0$.

1. $P_1(x) = -2x^2 + 3x + 5$.
2. $P_2(x) = -3x^2 + 20x + 7$.

INTERROS

7 Équation avec paramètre

★ 5 min Corrigé p. 20

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

On considère l'équation $x^2 - ax - 1 = 0$, où a désigne un nombre réel.

Étudier le nombre de solutions de cette équation.

8 Racines évidentes

★ 10 min Corrigé p. 20

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Trouver une racine évidente pour chacun des trinômes suivants, puis en déduire la valeur de la seconde racine.

1. $x^2 - 9x + 8$.
2. $-5x^2 + 4x + 9$.
3. $101x^2 - 100x - 1$.
4. $5x^2 - 4x - 12$.

9 Trinôme avec paramètre

★ 15 min Corrigé p. 21

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

Soit le trinôme $-2x^2 + mx - 1$ défini sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer le discriminant Δ, puis déterminer les valeurs de m telles que le trinôme admette deux racines distinctes.
2. Si l'une des racines est 1, déterminer la valeur de m et l'autre racine.

10 Lecture graphique

★ 15 min Corrigé p. 21

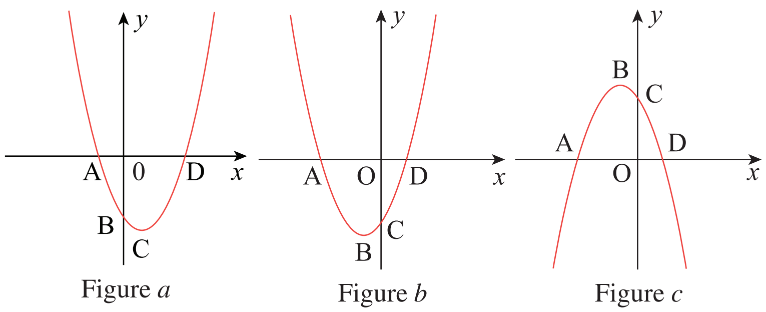
Lycée Hector Berlioz, Vincennes

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5x^2 - 3x - 2$.

1. Démontrer que la forme canonique de $h(x)$ est :

$$h(x) = 5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{49}{20}$$

2. En déduire, parmi les graphiques page suivante, lequel est celui de la représentation graphique de la fonction h. Justifier.



3 Factoriser $h(x)$.

4 Donner alors, sans justifier, les coordonnées des points remarquables A, B, C et D placés sur le graphique choisi.

11 Recherche des coefficients ★ 30 min

Corrigé p. 22

Lycée Edgar Quinet, Paris

1 Soit $f(x) = ax^2 + 15x + c$.

Trouver deux réels a et c de telle sorte que f ait pour racines $\frac{4}{3}$ et $-\frac{1}{2}$.

2 Soit $g(x) = 7x^2 + bx + 2$. Déterminer les valeurs de b pour lesquelles g n'admet pas de racines.

3 Une fonction trinôme du second degré admet un minimum égal à -1. Combien a-t-elle de racines ?

4 Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur, une allée de 3 mètres l'entoure et l'aire totale de la pelouse et de l'allée est 360 m^2.
Quelles sont les dimensions de la pelouse ?

12 À la recherche du nombre mystérieux ★★ 15 min

Corrigé p. 24

Lycée Mansart, Saint-Cyr-l'Ecole

On désigne par N un nombre entier de deux chiffres. Son chiffre des dizaines est x et son chiffre des unités y. La somme des chiffres est 14 et le produit de N par le nombre entier obtenu en inversant l'ordre des chiffres est 5 605. Déterminer N.

13 Équations non quadratiques ★★ 15 min

Corrigé p. 24

Lycée La Source, Meudon

Résoudre les équations suivantes :

1 $3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$

2 $2x^3 - x + 4x^2 = 0$

14 Droite et parabole (intersection) ★★ 30 min Corrigé p. 25

Lycée Saint-Just, Lyon

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation :

$$y = x^2 .$$

1 **(a)** Construire $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$y = -2x + 2 .$$

(b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

2 m étant un réel, $\mathcal{D}_m$ est la droite d'équation :

$$y = -2x + m .$$

(a) Montrer que $\mathcal{D}_m$ est parallèle à $\mathcal{D}$.

(b) Déterminer m pour que la droite $\mathcal{D}_m$ coupe $\mathcal{P}$ en un seul point. Construire la droite correspondante et calculer les coordonnées du point d'intersection.

(c) Déterminer les valeurs m pour lesquelles la droite $\mathcal{D}_m$ coupe $\mathcal{P}$ en deux points distincts A_m et B_m.

On appelle alors I_m le milieu de $[A_m B_m]$. Quel est l'ensemble des points I_m lorsque m varie ?

15 Problème ouvert ★★★ 30 min Corrigé p. 27

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

On dispose d'une ficelle de 1 mètre que l'on coupe en deux morceaux, pas forcément égaux. Avec un des morceaux, on forme un carré, et avec l'autre, on forme un rectangle dont la longueur est le double de la largeur.
Comment couper la ficelle de sorte que la somme des aires du carré et du rectangle soit minimale ?

Inéquations du second degré

16 Étude de signe ★ 15 min Corrigé p. 28

Lycée Jean Puy, Roanne

1 Étudier le signe de chacun des trinômes suivants :

(a) $A(x) = x^2 + x + 1$.

(b) $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$.

(c) $C(x) = -2x^2 + 7x - 6$.

2 En déduire les solutions des inéquations :

$$B(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad C(x) < 0.$$

17 Résolution d'inéquations

★ 20 min Corrigé p. 29

Lycée Notre-Dame-de-Toutes-Aides, Nantes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{x+1}{x-2}$.
2. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} \leqslant 1$.

18 Étude de deux courbes

★★ 15 min Corrigé p. 30

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

Soient f et g deux fonctions qui ont pour expressions respectives $f(x) = \dfrac{12x-8}{6x-3}$ et $g(x) = 3x-2$.

Étudier la position relative des deux courbes représentant f et g.

19 Trinôme inconnu

★★★ 15 min Corrigé p. 31

Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

Trouver les valeurs possibles du réel a telles que l'inéquation $x^2+ax+4 \leqslant 0$ n'ait pas de solution.

Somme et produit de racines

20 Somme et produit

★ 10 min Corrigé p. 32

Lycée Saint-Louis-de-Gonzagues, Paris

Trouver pour les sommes et produits suivants, les couples de réels correspondant :

1. $a+b=4$, $ab=4$.
2. $a+b=8$, $ab=12$.
3. $a+b=24$, $ab=324$.

21 Dimensions d'un rectangle

★ 10 min Corrigé p. 32

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Trouver les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut 315 et dont le périmètre vaut 72.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

22 Second degré et géométrie

★ 15 min Corrigé p. 32

Lycée Bouchardon, Chaumont

1. Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire est 275 m^2 et le périmètre 72 m.
2. Calculer les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 5 cm et dont l'aire est 6 cm^2.

23 Forme $x^2 - Sx + P = 0$

★★ 20 min Corrigé p. 33

Lycée Saint-Stanislas, Paris

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0.$
2. $2{,}7x^2 + 8{,}1x - 10{,}8 = 0.$
3. $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$, avec $\alpha > \beta$.

24 Recherche de deux nombres

★★ 15 min Corrigé p. 33

Lycée Saint-Étienne, Rennes

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Peut-on trouver deux nombres réels x et y tels que la somme de leurs inverses soit $\frac{1}{2}$ et la somme de leurs carrés $\frac{25}{36}$? Justifier votre réponse.

25 Trois nombres inconnus

★★★ 15 min Corrigé p. 35

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Trouver trois nombres entiers x, y et z tels que $x < y < z$ et :

$$\begin{cases} x + y + z = 27 \\ xz + yz = 180 \\ xy = 35 \end{cases}$$

Factorisations

26 Factorisation d'un polynôme

★ 20 min

Corrigé p. 35

Lycée Pasteur, Neuilly

Soit $P(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

1. En écrivant $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$, développer, pour tous nombres réels a et b, l'identité remarquable $(a+b)^3$.
2. Déterminer les trois réels a, b et c tels que :
$$P(x) = a(2x-5)^3 + b(2x-5)^2 + c(2x-5)\,.$$
3. En déduire une factorisation de $P(x)$.
4. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

27 Fonction rationnelle

★★ 30 min

Corrigé p. 37

Lycée Charlemagne, Paris

Soit le polynôme :
$$P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100\,.$$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction trinôme du second degré $Q(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie la relation :
$$P(x) = \big(Q(x)\big)^2.$$
2. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.
3. **(a)** Trouver trois réels a, b, c tels que :
$$x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = (x+5)(ax^2 + bx + c)\,.$$
(b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle f suivante et la simplifier :
$$f(x) = \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5}\,.$$

28 Recherche d'une fonction

★★ 20 min

Corrigé p. 39

Lycée La Bruyère, Versailles

Trouver une fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative dans un repère du plan a pour sommet le point S de coordonnées $(-1\,;\,2)$ et dont une racine vaut $\dfrac{5}{2}$.

INTERROS

Pour aller plus loin...

29 Des techniques de résolution variées ★ 40 min

Corrigé p. 40

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

1 **(a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ (en calculant le discriminant) l'équation :

$$u^2 - 6u - 16 = 0\,.$$

(b) En déduire les solutions de l'équation : $(|x| - 2)^2 = 2\,(|x| + 10)$.

2 **(a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ (grâce à une racine apparente) l'équation :

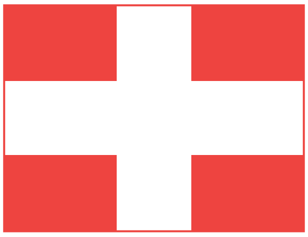
$$u^2 - 5u - 6 = 0\,.$$

(b) En déduire les solutions de l'équation : $\sqrt{15 - x} = x - 3$.

3 **(a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ (grâce à la forme canonique) l'équation

$$u^2 - 7u + 6 = 0\,.$$

(b) Un drapeau a pour dimensions 3 et 4 (en mètres) et la « croix blanche » est de largeur constante. Quelle est cette largeur sachant que l'aire de la croix est égale à l'aire rouge ?



30 Revenir au second degré ★★ 15 min

Corrigé p. 41

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pin-Justaret

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $-6\sqrt{x} - 2x + 80 = 0.$

2 $2x^4 - 24 - 2x^2 = 0.$

3 $4x + \dfrac{8}{x} + 24 = 0.$

31 Choisir une méthode adaptée ★★ 20 min

Corrigé p. 41

Lycée Saint-Martin, Pontoise

Résoudre, le plus simplement possible, les équations suivantes :

1 $x^2 - 16 + 2(x - 4) = 0.$

2 $x^2 - 2{,}4x - 0{,}81 = 0.$

3 $\sqrt{2} + 2\sqrt{2}x = 4x$.

4 $\dfrac{x}{2} + 1 = \dfrac{x^2}{4}$.

32 Lunules

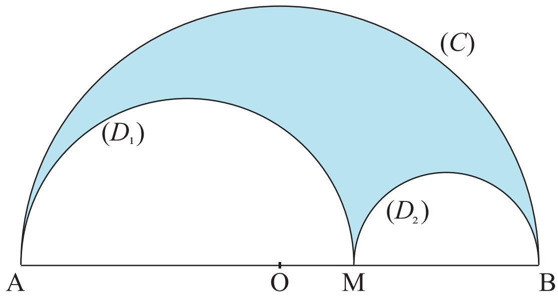
★★★ 30 min Corrigé p. 43

Lycée Les Chartreux, Lyon

Les unités de longueur sont en cm, et les unités d'aires sont en cm^2.

Soit un demi-cercle (C) de centre O et de diamètre $[AB]$, tel que $AB = 8$, et soit M un point mobile sur le segment $[AB]$.

On construit deux demi-cercles (D_1) et (D_2) de diamètres respectifs $[AM]$ et $[BM]$. On pose $x = AM$.



Soit $f(x)$ l'aire de la partie colorée.

1 Montrer que pour tout réel x de $[0; 8]$, $f(x) = \dfrac{\pi}{4}(-x^2 + 8x)$.

2 Déterminer les valeurs de x telles que l'aire de la surface colorée soit supérieure ou égale à un quart de l'aire du demi-disque (C).

3 Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 8]$ et en déduire la position du point M telle que l'aire de la surface colorée soit maximale. Donner cette aire maximale arrondie au cm^2.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

1 V/F Résolution d'équations du second degré

Énoncé p. 7

1 *Vrai*. $a = 150$; $c = -17{,}5$. Les coefficients a et c étant de signe contraire, $-4ac$ est strictement positif donc le discriminant est strictement positif. L'équation admet deux racines réelles distinctes.

MÉTHODE

Si a et c sont de signes contraires, le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes.

2 *Faux*. $-x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$. Ce trinôme s'annule pour $x = 3$.

3 *Faux*. Les équations $ax^2 + bx + c = 0$ et $2ax^2 + 2bx + 2c = 0$ sont équivalentes et ont le même ensemble de solutions.

4 *Vrai*. Le discriminant de cette équation est strictement négatif.

5 *Vrai*. Pour tout réel x, $x^2 + 16 \geqslant 16$; $x^2 + 16$ est donc strictement positif.

2 V/F Propriétés d'un trinôme

Énoncé p. 7

1 *Faux*. En effet, $f(0) = 1$ et si on prend $x = 0$ dans la forme proposée, on trouve $-10 \times \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{80}\right)$, qui est un nombre négatif. Cette forme canonique n'est donc *pas* celle de $f(x)$.

2 *Vrai*. Toute fonction de la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ est représentée graphiquement par une parabole qui admet la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie, et ici, $-\frac{b}{2a} = \frac{-5}{-20} = \frac{1}{4}$.

3 *Faux*. Le discriminant de $ax^2 + bx + c$ vaut $\Delta = b^2 - 4ac$.
Ici, $a = -10$ et $\Delta = 65 > 0$, donc le trinôme a deux racines et son signe n'est pas constant (voir cours page 3) : il est du signe de $-a$, donc positif, entre ses racines.

4 *Vrai*. Comme le trinôme a deux racines, il se factorise bien en un produit de deux facteurs du premier degré.

3 V/F Signe de $f(x)$ et de Δ

Énoncé p. 7

1 *Vrai*. En effet, si Δ était positif ou nul, f aurait au moins une racine, c'est-à-dire qu'il existerait au moins un réel x tel que $f(x) = 0$, ce qui n'est pas le cas.

2 *Vrai*. Si $\Delta < 0$, alors f ne changerait pas de signe sur $\mathbb{R}$, et $f(\alpha)f(\beta)$ serait alors forcément positif.

3 *Faux*. Par exemple $f(x) = x^2 + 1$: on a $\Delta = -4$ mais $f(x)$ est positif pour tout réel x.

4 *Vrai*. En effet, β étant à l'extérieur des racines, $f(\beta)$ est alors du signe de a, et α étant à l'intérieur des racines, $f(\alpha)$ est du signe de $-a$; $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont bien de signes opposés, et leur produit est négatif.

4 QCM Signes et coefficients

Énoncé p. 8

1 Réponses $\boxed{b}$ et $\boxed{c}$. En effet, on calcule le discriminant du trinôme : $\Delta = 5$. Le trinôme a donc deux racines $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}$ et $\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}$.
La réponse $\boxed{a}$ est donc fausse. La factorisation proposée en $\boxed{b}$ est exacte. Comme le trinôme admet deux racines distinctes, il n'est pas de signe constant, donc $\boxed{c}$ est exacte. Par contre en -2 le trinôme prend la valeur positive 22, donc la réponse $\boxed{d}$ est fausse.

2 Réponse $\boxed{c}$. La courbe est ouverte vers le haut, donc le coefficient de x^2 est positif, ce qui élimine les choix $\boxed{b}$ et $\boxed{d}$. La forme canonique permet de trouver l'abscisse du sommet dans les deux autres cas : 2 pour $\boxed{a}$ et $\dfrac{4}{4} = 1$ pour $\boxed{c}$, ce qui ne permet pas de les différencier. Par contre pour la proposition $\boxed{a}$, la courbe coupe l'axe des ordonnées en 17, alors qu'elle la coupe en 2 pour le choix $\boxed{c}$. Comme le repère est orthonormé, même si on ne connaît pas l'échelle, il est évident que le choix $\boxed{a}$ ne peut pas alors convenir. En effet, l'ordonnée du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées semble environ égale au double de l'abscisse du sommet et ne peut donc pas être égale à 17.

3 Réponse $\boxed{b}$. Si le discriminant est négatif ou nul, le trinôme est toujours du signe de -3 ou nul, donc négatif ou nul, ce qui montre que la réponse $\boxed{a}$ est fausse.
Si le discriminant est strictement positif, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines. Cela montre que les réponses $\boxed{c}$ et $\boxed{d}$ sont fausses. Il est par contre exact de dire qu'il n'est pas toujours positif, même si le discriminant est négatif.

4 Réponses $\boxed{a}$ et $\boxed{c}$. Le trinôme n'a pas de racine, donc le discriminant est strictement négatif. De plus le trinôme est toujours négatif, donc a est négatif. Δ et a sont donc de même signe et négatifs.

5 Choisir les bonnes courbes

Énoncé p. 9

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-Bois

1 Lorsque le coefficient du terme de degré 2 est positif, la parabole est ouverte vers le haut. C'est donc le cas de la fonction f_1.

CORRIGÉS

2 Lorsque le discriminant est négatif ou nul, le trinôme a au plus une racine, donc la parabole et l'axe des abscisses ont au plus un point en commun. C'est donc le cas des fonctions f_1 et f_3.

3 Le terme constant est strictement positif lorsque l'image de 0 est strictement positive. C'est le cas des fonctions f_1 et f_2.

6 Résolution d'équations

Énoncé p. 9

Lycée Buffon, Paris

1 Pour P_1, on a $\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times 5 = 49$, d'où :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+7}{-4} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-3-7}{-4} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad S = \left\{-1\,;\,\frac{5}{2}\right\}.$$

2 Pour P_2, on a $\Delta = 400 - 4 \times (-3) \times 7 = 484$, d'où :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-20+22}{-6} = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-20-22}{-6} = 7 \end{cases} \qquad S = \left\{-\frac{1}{3}\,;\,7\right\}.$$

7 Équation avec paramètre

Énoncé p. 10

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Le discriminant du trinôme $x^2 - ax - 1$ est :

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = a^2 + 4.$$

Or, $a^2 \geqslant 0$ pour tout réel a, donc $a^2 + 4 \geqslant 4 > 0$ pour tout réel a.

Ainsi, le discriminant est toujours strictement positif, ce qui signifie que l'équation $x^2 - ax - 1 = 0$ admet toujours deux solutions distinctes.

8 Racines évidentes

Énoncé p. 10

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 $x^2 - 9x + 8$. La somme des coefficients est $1 - 9 + 8 = 0$ donc $x_1 = 1$ est une racine évidente. La seconde racine est alors $x_2 = \dfrac{c}{a} = 8$.

2 $-5x^2 + 4x + 9$. La somme des coefficients est $-5 + 4 + 9 = 8$ donc « 1 » n'est pas une racine évidente. Mais pour $x = -1$, on a : $-5(-1)^2 + 4(-1) + 9 = -5 - 4 + 9 = 0$. Donc $x_2 = -1$ est une racine évidente. La seconde racine est donc x_2 telle que $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$, soit $-x_2 = \dfrac{9}{-5}$; ainsi, $x_2 = \dfrac{9}{5}$.

3 $101x^2 - 100x - 1$. La somme des coefficients est nulle donc $x_1 = 1$ est une racine évidente. La seconde racine est donc $x_2 = -\dfrac{1}{101}$.

4 $5x^2 - 4x - 12$. Une racine évidente est $x_1 = 2$ car :

$$5(2)^2 - 4(2) - 12 = 20 - 8 - 12 = 0.$$

La seconde racine est alors x_2 telle que $2x_2 = \dfrac{-12}{5}$; ainsi, $x_2 = -\dfrac{6}{5}$.

9 Trinôme avec paramètre

Énoncé p. 10

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

1 On a $\Delta = m^2 - 8$. Le trinôme admet deux racines distinctes si et seulement si le discriminant est strictement positif. Il faut donc étudier le signe du trinôme en m : $m^2 - 8$.

La factorisation immédiate de ce trinôme en $(m - 2\sqrt{2})(m + 2\sqrt{2})$ montre qu'il admet deux racines et comme le coefficient de m^2 est positif, le trinôme est positif à l'extérieur des racines, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;-2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}\,;+\infty[$.

Le trinôme $-2x^2+mx-1$ admet donc deux racines distinctes pour tout réel m dans $]-\infty\,;-2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}\,;+\infty[$.

2 Si une des racines vaut 1, alors $-2 \times 1^2 + m \times 1 - 1 = 0$, c'est à dire $m = 3$. On constate que 3 est bien dans l'ensemble trouvé question 1, et alors le trinôme a bien deux racines.
Pour $m = 3$, le trinôme devient $-2x^2 + 3x - 1$.

1 est racine, donc l'autre racine vaut :

$$\frac{c}{a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

10 Lecture graphique

Énoncé p. 10

Lycée Hector Berlioz, Vincennes

1 On développe l'expression proposée :

$$\begin{aligned}5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{49}{20} &= 5\left(x^2 - \frac{6x}{10} + \frac{9}{100}\right) - \frac{49}{20}\\ &= 5x^2 - \frac{30x}{10} + \frac{9-49}{20}\\ &= 5x^2 - 3x - 2.\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression de $h(x)$.

2 Le coefficient de x^2 est positif, donc la parabole est ouverte vers le haut.

Le minimum de la fonction est atteint pour $x = \dfrac{3}{10}$. Il a donc une abscisse positive. Cela signifie que la représentation graphique de h est celle de la figure a.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

3 À partir de la forme canonique, on peut factoriser $h(x)$ à l'aide de l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Cela donne :

$$\begin{aligned} h(x) &= 5\left[\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{49}{100}\right] \\ &= 5\left(x - \frac{3}{10} - \frac{7}{10}\right)\left(x - \frac{3}{10} + \frac{7}{10}\right) \\ &= 5(x-1)\left(x + \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

4 Le point A correspond à la plus petite racine et a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{5}\ ;0\right)$.

Le point B est l'intersection avec l'axe des ordonnées et a pour coordonnées $(0\ ; h(0))$, donc $(0\ ; -2)$.

Le point C est le sommet dont les coordonnées se lisent dans la forme canonique : $\left(\frac{3}{10}\ ; -\frac{49}{20}\right)$.

Le point D correspond à la seconde racine, et a pour coordonnées $(1\ ; 0)$.

11 Recherche des coefficients

Énoncé p. 11

Lycée Edgar Quinet, Paris

1 $f\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \iff \frac{16}{9}a + 20 + c = 0.$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \iff \frac{1}{4}a - \frac{15}{2} + c = 0.$

On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{16}{9}a + c = -20 & (L_1) \\ \frac{1}{4}a + c = \frac{15}{2} & (L_2) \end{cases}$$

$(L_1) - (L_2)$ donne : $\left(\frac{16}{9} - \frac{1}{4}\right)a = -20 - \frac{15}{2}$,

soit $\frac{55}{36}a = -\frac{55}{2}$ d'où $a = -18$.

En remplaçant a par -18 dans (L_1) on a alors $-32 + c = -20$, d'où $c = 12$.

D'où :

$$\begin{cases} a = -18 \\ c = 12 \end{cases}$$

2 Pour que l'équation $g(x) = 7x^2 + bx + 2 = 0$ n'admette pas de racine, il faut et il suffit que $\Delta < 0$, soit :

$$\Delta = b^2 - 56 < 0$$

soit encore :

$$\left(b - 2\sqrt{14}\right)\left(b + 2\sqrt{14}\right) < 0\,.$$

On a un trinôme du second degré négatif entre les racines, soit pour :

$$b \in \left]-2\sqrt{14}\,;\,2\sqrt{14}\right[\,.$$

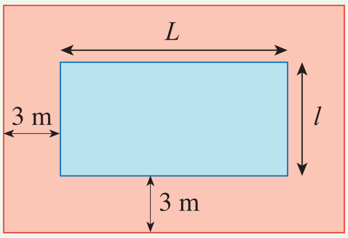
3 La fonction f admet un minimum ; on est donc dans le cas $a > 0$.

Si on avait $\Delta \leqslant 0$, $f(x)$ serait, pour tout x réel, nul ou du signe de a, donc positif.

Comme la valeur -1 est atteinte, $\Delta > 0$, il y a deux racines distinctes.

4 Notons L la longueur et l la largeur de la pelouse, avec $L = 2l$.

La longueur et la largeur totale de la surface délimitée par l'allée de trois mètres (qui correspond donc à la somme des surfaces de la pelouse et de l'allée) valent alors, respectivement $L + 6$ et $l + 6$, ainsi qu'on peut le voir sur le schéma page suivante.



L'aire totale vaut donc $\mathcal{A} = (L + 6)(l + 6) = 360$, ce qui donne :

$$\mathcal{A} - 360 = (2l + 6)(l + 6) - 360 = 2l^2 + 18l + 36 - 360 = 0$$

d'où :

$$l^2 + 9l - 162 = 0\,.$$

On a alors $\Delta = 81 + 648 = 729$, d'où les solutions :

$$\left(\begin{array}{l} l = 9 \\ \text{ou} \\ l = -18 \end{array}\right.$$

La seconde solution n'étant évidemment pas possible, la pelouse mesure donc 9 m de largeur sur 18 m de longueur.

12 À la recherche du nombre mystérieux

Énoncé p. 11

Lycée Mansart, Saint-Cyr-l'Ecole

Soit x le chiffre des dizaines et y le chiffre des unités de N.
On a alors $N = 10x + y$ avec $x + y = 14$.

De plus, si on permute les chiffres de N, on obtient un nombre N' qui a comme chiffre des dizaines y et comme chiffre des unités x. Donc :

$$N' = 10y + x.$$

La condition $NN' = 5\,605$ s'écrit alors :

$$(10x + y)(10y + x) = 5\,605\,.$$

On résout le système :

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ (10x + y)(10y + x) = 5\,605 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} y = 14 - x \\ -81x^2 + 1\,134x - 3\,645 = 0\,. \end{cases}$$

En simplifiant par -81, l'équation du second degré se ramène à :

$$x^2 - 14x + 45 = 0.$$

Cette équation, dont le discriminant est 16, admet deux solutions : 9 et 5.

On en déduit que le nombre N peut être soit 95 soit 59.

13 Équations non quadratiques

Énoncé p. 11

Lycée La Source, Meudon

1 Résolution de l'équation $3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$.

On pose $X = x^2$. Alors,

$$\begin{aligned} 3x^4 - 5x^2 - 2 = 0 &\iff 3\left(x^2\right)^2 - 5(x)^2 - 2 = 0 \\ &\iff 3X^2 - 5X - 2 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $3X^2 - 5X - 2$ est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49.$$

Le trinôme admet donc deux racines :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5 - 7}{6} = -\frac{1}{3}$$

et

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 7}{6} = 2.$$

Il nous faut maintenant voir à quelles valeurs de x ces valeurs de X correspondent :

- $X_1 = x_1^2 = -\dfrac{1}{3}$ est impossible car un carré ne peut pas être négatif ;
- $X_2 = x_2^2 = 2$ donc $x_2 = -\sqrt{2}$ ou $x_2 = \sqrt{2}$.

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

2 Résolution de l'équation $2x^3 - x + 4x^2 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^3 - x + 4x^2 = 0 &\iff x(2x^2 + 4x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2x^2 + 4x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $2x^2 + 4x - 1$ est :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 16 + 8 = 24.$$

Ses deux racines sont alors :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2 \times 2} = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{4} = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2}$$

et sa conjuguée :

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $2x^3 - x + 4x^2 = 0$ est :

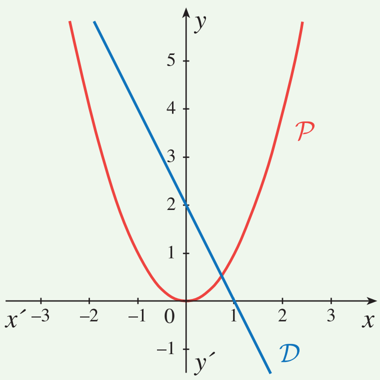
$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \,;\, 0 \,;\, \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \right\}.$$

14 Droite et parabole (intersection)

Énoncé p. 12

Lycée Saint-Just, Lyon

1 **(a)** La représentation de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ est la suivante :



CORRIGÉS

(b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ sont solutions de l'équation :

$$-2x+2=x^2.$$

Or :

$$\begin{aligned} x^2+2x-2=0 &\iff (x+1)^2-1-2=0 \\ &\iff (x+1)^2=3 \\ &\iff x+1=\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x+1=-\sqrt{3} \end{aligned}$$

d'où les racines :

$$x_1=-1+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=-1-\sqrt{3}.$$

$\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}$ en deux points de coordonnées respectives :

$$\left(-1+\sqrt{3}\,;4-2\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \left(-1-\sqrt{3}\,;4+2\sqrt{3}\right).$$

MÉTHODE

On aurait aussi pu utiliser le discriminant pour trouver les racines.

2 **(a)** $\mathcal{D}_m$ a un coefficient directeur égal à -2, comme $\mathcal{D}$: elle est donc parallèle à $\mathcal{D}$.

(b) Pour déterminer la droite qui a un seul point d'intersection avec $\mathcal{P}$, il suffit de résoudre l'équation :

$$-2x+m=x^2 \quad \text{soit} \quad x^2+2x-m=0.$$

et de déterminer la condition pour laquelle il n'y a qu'une seule solution.

On a $\Delta=4+4m$. Pour avoir une solution unique, il faut et il suffit que $\Delta=0$, soit $m=-1$.

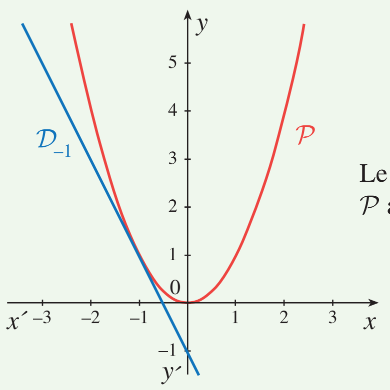
La solution est alors la racine double :

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1$$

d'où :

$$y=(-1)^2=1\,.$$

On a alors le graphe :



Le point d'intersection de $\mathcal{D}_{-1}$ et $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $(-1\,;\,1)$.

(c) On a deux points d'intersection lorsque $\Delta > 0$, soit $4 + 4m > 0$. Soit finalement :

$$m > -1\,.$$

Le milieu de $[A_m B_m]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_{A_m} + x_{B_m}}{2}\,;\,\frac{y_{A_m} + y_{B_m}}{2}\right)$$

x_{A_m} et x_{B_m} étant les solutions de $x^2 + 2x - m = 0$.

On a :

$$x_{A_m} + x_{B_m} = \frac{-2 + \sqrt{4+4m}}{2} + \frac{-2 - \sqrt{4+4m}}{2} = -2$$

donc :

$$x_{I_m} = -1\,.$$

A_m et B_m sont sur $\mathcal{D}_m$, donc leur milieu I_m l'est aussi. Donc :

$$y_{I_m} = -2x_{I_m} + m = m + 2$$

d'où $I_m(-1\,;\,m+2)$, soit l'ensemble des points :

$$\{(-1\,;\,2+m),\quad m \in]-1\,;\,+\infty[\}\,.$$

On obtient donc une demi-droite ouverte définie par :

$$(x = -1, y > 1).$$

15 Problème ouvert

Énoncé p. 12

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

Appelons x la longueur, en mètres, de ficelle qui sert à former le carré, alors il reste $1 - x$ mètres pour former le rectangle.
Puisque la longueur L du rectangle est deux fois sa largeur ℓ, le périmètre du rectangle vaut $2(\ell + 2l) = 6l = \ell - x$. On en déduit que $\ell = \dfrac{1-x}{6}$.
De plus, le côté a du carré vérifie $4a = x$.
L'aire du carré est donc $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{16}$
et l'aire du rectangle est $\dfrac{1-x}{6} \times 2 \times \dfrac{1-x}{6} = \dfrac{(1-x)^2}{18}$.
L'aire totale est donc égale à $f(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(1-x)^2}{18}$.
Le problème consiste donc à étudier si le polynôme du second degré $f(x)$ admet un minimum, et si c'est le cas, déterminer pour quelle valeur de x il est atteint.
En développant l'expression, on trouve :

$$f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{1}{18} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{18}\,,$$

CORRIGÉS

c'est-à-dire :

$$f(x) = \frac{17}{144}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{18}.$$

Le coefficient de x^2 étant positif, on sait que cette fonction est décroissante puis croissante et admet un minimum qui est atteint pour :

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2 \times 17}{144}} = \frac{1 \times 144}{9 \times 2 \times 17} = \frac{8}{17}.$$

Le problème a donc bien une solution, en coupant un morceau de longueur $\frac{8}{17}$ de mètre pour faire le carré.

16 Étude de signe

Énoncé p. 12

Lycée Jean Puy, Roanne

1 **(a)** Pour $A(x)$: $\Delta = -3$. Le coefficient de x^2 est 1, donc positif. $A(x)$ est toujours positif.

(b) Pour $B(x)$: $\Delta = 1^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Le trinôme s'annule pour $x = \dfrac{-1}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$. Ailleurs, il est toujours du signe du coefficient de x^2, donc il est toujours négatif.

(c) Pour $C(x)$: $\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times (-6) = 1$.

Le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-7-1}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-7+1}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}.$$

Le trinôme est du signe du coefficient de x^2, donc négatif, à l'extérieur des racines, et positif entre les racines.

On résume les résultats dans les trois tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$		$+\infty$
$A(x)$		$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$-$	

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2 D'après les tableaux de signes, l'ensemble solution de $B(x) \geqslant 0$ est $\{1\}$, et l'ensemble solution de $C(x) < 0$ est $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right[\cup \,]2\,;+\infty[$.

17 Résolution d'inéquations

Énoncé p. 13

Lycée Notre-Dame-de-Toutes-Aides, Nantes

MÉTHODE

Pour résoudre une inéquation, il faut toujours commencer par trouver l'ensemble de définition, car les différentes manipulations peuvent faire perdre de vue que certaines valeurs sont interdites.

1 L'ensemble de définition correspond simplement à la non nullité des dénominateurs, soit :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\,;2\}\,.$$

On peut donc transformer l'inégalité pour obtenir :

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{1}{x-1} > 0$$

soit, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{x^2-1-x+2}{(x-1)(x-2)} > 0$$

$$\text{ou encore : } \frac{x^2-x+1}{(x-1)(x-2)} > 0\,.$$

Le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3$.
Comme $\Delta < 0$, le numérateur est toujours positif ($a = 1$ donc $a > 0$).
Il ne reste donc plus qu'à étudier le signe du dénominateur (qui est un trinôme du second degré dont les racines sont 1 et 2, et dont le coefficient de x^2 est 1, donc positif) ; on a alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc :

$$S = \,]-\infty\,;1[\, \cup \,]2\,;+\infty[\ .$$

2 On a :

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} \leqslant 1\,.$$

L'ensemble de définition correspond à la non nullité du dénominateur.
Le discriminant de $x^2 + 3x - 10$ est $\Delta = 9 + 40 = 49$, d'où les racines :

$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2\,.$$

L'ensemble de définition est donc :

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-5\,;2\}\,.$$

En transformant l'inéquation, on obtient :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} - 1 \leqslant 0$$

et, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{x^2 - 5x + 6 - x^2 - 3x + 10}{x^2 + 3x - 10} \leqslant 0$$

$$\text{soit } \frac{-8x + 16}{x^2 + 3x - 10} \leqslant 0\,,$$

ce qui équivaut, en divisant par -8, à :

$$\frac{x - 2}{x^2 + 3x - 10} \geqslant 0 \qquad (\text{car } -8 < 0)\,.$$

Posons :

$$Q(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 3x - 10}\,.$$

Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x^2 + 3x - 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	

On obtient donc l'ensemble des solutions $S =]-5\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

ATTENTION

On voit ici la nécessité de déterminer dès le début l'ensemble de définition, sans quoi on risquait, ici par exemple, de prendre en compte la valeur 2.

18 Étude de deux courbes

Énoncé p. 13

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

MÉTHODE

Pour étudier la position relative de deux courbes, on étudie le signe de la différence entre les deux fonctions représentées.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. On étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} & \frac{12x-8}{6x-3} - (3x-2) \leqslant 0 \\ \iff & \frac{12x-8-(3x-2)(6x-3)}{6x-3} \leqslant 0 \\ \iff & \frac{12x-8-18x^2+21x-6}{6x-3} \leqslant 0 \\ \iff & \frac{-18x^2+33x-14}{6x-3} \leqslant 0. \end{aligned}$$

On commence par étudier le signe du trinôme du second degré au numérateur. Son discriminant vaut $\Delta = 81 = 9^2$. Il admet donc deux racines $x_1 = \frac{7}{6}$ et $x_2 = \frac{2}{3}$. Comme le coefficient de x^2 est négatif, le trinôme est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur.

On trouve le signe du quotient du trinôme par l'expression affine $6x - 3$ à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
$-18x^2+33x-14$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$6x-3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que la courbe de f est en dessous de la courbe de g pour $x \in \left]\frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{6} ; +\infty\right[$; les courbes se coupent pour $x = \frac{2}{3}$ et $x = \frac{7}{6}$. La courbe de f est au-dessus de celle de g dans les autres cas.

19 Trinôme inconnu

Énoncé p. 13

Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

Calculons le discriminant du trinôme $x^2 + ax + 4$:

$$\Delta = a^2 - 16.$$

On veut que l'inéquation $x^2 + ax + 4 \leqslant 0$ n'ait pas de solution, donc il faut et il suffit que Δ soit strictement négatif. Il faut donc que $a^2 - 16 < 0$.
Or, $a^2 - 16$ est un trinôme en a, dont les racines sont -4 et 4. Le coefficient de a^2 est 1, il est positif.
Par conséquent $a^2 - 16$ est négatif entre les racines.
Les valeurs de a telles que l'inéquation $x^2 + ax + 4$ n'ait pas de solution sont donc toutes les valeurs de l'intervalle $]-4 ; 4[$.

CORRIGÉS

20 Somme et produit

Énoncé p. 13

Lycée Saint-Louis-de-Gonzagues, Paris

1 D'après le cours, a et b sont les racines du trinôme $x^2-4x+4 = (x-2)^2$.
La racine double est $x = 2$. donc $a = b = 2$.

2 D'après le cours, a et b sont les racines du trinôme $x^2 - 8x + 12$.

$$\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-12) = 16 = 4^2.$$

D'où $x_1 = \dfrac{-8+4}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-8-4}{-2} = 6$.
Ainsi, $a = 2$ et $b = 6$, ou $a = 6$ et $b = 2$.

3 D'après le cours, a et b sont les racines du trinôme $x^2 - 24x + 324$.

$$\Delta = 24^2 - 4 \times (-1) \times (-324) = -720 < 0.$$

Il n'existe donc pas de nombres a et b correspondant à cette somme et ce produit.

21 Dimensions d'un rectangle

Énoncé p. 13

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Notons x et y les dimensions du rectangle (longueur et largeur).

- L'aire du rectangle se calcule avec la formule « longueur $\times$ largeur », donc elle s'exprime ici par : xy. Or, elle vaut 315 d'après l'énoncé.
  Ainsi, $xy = 315$.
- Le périmètre du rectangle est « $2 \times$ (longueur + largeur) », donc ici égal à $2(x + y)$. Or, elle vaut 72 d'après l'énoncé ; donc $2(x + y) = 72$, c'est-à-dire, en divisant par 2 les membres de cette égalité : $x + y = 36$.

On sait donc maintenant que le produit de x et y vaut 315 et que leur somme vaut 36. Ainsi, x et y sont les solutions de l'équation $x^2 - 36x + 315 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = (-36)^2 - 4 \times 315 = 36$.

Les deux solutions de l'équation sont donc :

$$x = \frac{36-6}{2} = 15 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{36+6}{2} = 21.$$

Le rectangle a donc pour dimensions 21×15.

22 Second degré et géométrie

Énoncé p. 14

Lycée Bouchardon, Chaumont

1 Désignons par x et y les dimensions du rectangle, exprimées en mètres ($x \geqslant y$). Les nombres x et y vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 2(x+y) & = 72 \\ x \times y & = 275 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} x + y & = 36 \\ xy & = 275. \end{cases}$$

x et y sont donc les solutions de l'équation $x^2 - 36x + 275 = 0$.

Le discriminant est : $\Delta = (-36)^2 - 4 \times 275 = 196$.

L'équation admet deux solutions : 25 et 11.

On en déduit que les dimensions du rectangle sont 25 m et 11 m.

2 Désignons par a et b les mesures des côtés de l'angle droit exprimées en centimètres, avec $a \geqslant b$. Les nombres a et b vérifient le système :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ \dfrac{1}{2}ab = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ a^2b^2 = 12^2 = 144 \end{cases}$$

Posons $A = a^2$ et $B = b^2$. Alors, A et B sont solutions de l'équation $x^2 - 25x + 144 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 49$.

Ainsi, $A = \dfrac{25 - \sqrt{49}}{2} = 9$ et $B = \dfrac{25 + \sqrt{49}}{2} = 16$.

Comme a et b sont positifs, $a = \sqrt{9} = 3$ et $b = \sqrt{16} = 4$.

Les côtés de l'angle droit du triangle rectangle mesurent respectivement 4 cm et 3 cm.

23 Forme $x^2 - Sx + P = 0$

Énoncé p. 14

Lycée Saint-Stanislas, Paris

1 L'équation $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$ est de la forme $x^2 - Sx + P = 0$, avec $S = 3 + \sqrt{2}$ et $P = 3\sqrt{2}$.

Elle admet donc pour solutions 3 et $\sqrt{2}$ (d'après la propriété 5 page 4).

2 $2{,}7x^2 + 8{,}1x - 10{,}8 = 0 \iff 2{,}7(x^2 + 3x - 4) = 0$, qui est de la forme $x^2 - Sx + P = 0$, avec $S = -3 = -4 + 1$ et $P = -4 \times 1$.

L'équation admet donc pour solutions -4 et 1.

3 L'équation $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ est de la forme $x^2 - Sx + P = 0$, avec $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha\beta$.

Elle admet donc pour solutions α et β.

24 Recherche de deux nombres

Énoncé p. 14

Lycée Saint-Étienne, Rennes

Soient x et y les deux nombres cherchés. Les nombres x et y sont non nuls et vérifient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{25}{36} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{2} \\ (x+y)^2 - 2xy = \dfrac{25}{36} \end{cases}$$

CORRIGÉS

On pose $S = x + y$ et $P = xy$. Le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{cases} P = 2S \\ S^2 - 2P = \dfrac{25}{36} \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \begin{cases} P = 2S \\ S^2 - 4S = \dfrac{25}{36} \end{cases}.$$

On résout l'équation du second degré :

$$S^2 - 4S - \frac{25}{36} = 0\,.$$

Son discriminant est :

$$\Delta = 16 + 4 \times \frac{25}{36} = \frac{169}{9}\,.$$

L'équation admet deux solutions : $\dfrac{25}{6}$ et $-\dfrac{1}{6}$.

Si $S = \dfrac{25}{6}$, alors $P = 2 \times \dfrac{25}{6} = \dfrac{25}{3}$.

Si $S = -\dfrac{1}{6}$, alors $P = 2 \times \left(-\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{3}$.

On détermine alors les nombres x et y en résolvant les systèmes :

$$(1) \begin{cases} x + y = \dfrac{25}{6} \\ xy = \dfrac{25}{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (2) \begin{cases} x + y = -\dfrac{1}{6} \\ xy = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On connaît alors la somme et le produit de x et y.

L'équation du second degré du système (1) est :

$$x^2 - \frac{25}{6}x + \frac{25}{3} = 0$$

et a un discriminant strictement négatif donc elle n'admet aucune solution réelle et le premier système n'a donc pas de solution.

L'équation du second degré du système (2) est :

$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$$

et a pour discriminant $\Delta = \dfrac{49}{36}$ donc l'équation admet deux solutions réelles : $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{2}{3}$.

Les deux nombres répondant à la question posée sont donc $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{2}{3}$.

25 Trois nombres inconnus

Énoncé p. 14

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Le système donné peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} x + y + z = 27 \\ z(x + y) = 180 \\ xy = 35 \end{cases}.$$

En posant $T = x + y$ et en ne prenant que les deux premières lignes, on a :

$$\begin{cases} T + z = 27 \\ Tz = 180 \end{cases}.$$

On connaît donc la somme et le produit de z et T ; ainsi, z et T sont les solutions de l'équation $a^2 - 27a + 180 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = (-27)^2 - 4 \times 180 = 9$. Les deux solutions sont donc :

$$\frac{27-3}{2} = 12 \qquad \text{et} \qquad \frac{27+3}{2} = 15.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} T = x + y = 12 \\ z = 15 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} T = x + y = 15 \\ z = 12 \end{cases}.$$

- 1^er^ cas : $x + y = 12$. D'après l'énoncé, $xy = 35$ donc x et y sont solutions de l'équation $x^2 - 12x + 35 = 0$, de discriminant $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 35 = 4$. Or, $x < y$ donc :

$$x = \frac{12-2}{2} = 5 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{12+2}{2} = 7.$$

- 2^e^ cas : $x + y = 15$. De plus, $xy = 35$ donc x et y sont solutions de l'équation $b^2 - 15x + 35 = 0$, de discriminant $\Delta = (-15)^2 - 4 \times 35 = 85$, qui n'est pas un carré parfait, ce qui implique que x et y ne sont nécessairement pas entiers, ce qui contredit l'énoncé.

Il n'y a donc qu'une seule possibilité : $x = 5$, $y = 7$ et $z = 15$.

26 Factorisation d'un polynôme

Énoncé p. 15

Lycée Pasteur, Neuilly

1 En développant, on obtient, pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 . \end{aligned}$$

2 On doit avoir :

$$P(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60 = a(2x-5)^3 + b(2x-5)^2 + c(2x-5) .$$

CORRIGÉS

On peut développer les identités remarquables du terme de droite.
On a pour $(2x-5)^3$:

$$\begin{aligned}(2x-5)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(-5) + 3(2x)(-5)^2 + (-5)^3\\ &= 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125.\end{aligned}$$

De même, on a pour $(2x-5)^2$:

$$(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25.$$

Ce qui donne :

$$P(x) = a(8x^3 - 60x^2 + 150x - 125) + b(4x^2 - 20x + 25) + c(2x-5)$$

$$P(x) = 8ax^3 + (-60a + 4b)x^2 + (150a - 20b + 2c)x \\ + (-125a + 25b - 5c).$$

Or, on a : $P(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.
On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 8a & = 8\\ -60a + 4b & = -48\\ 150a - 20b + 2c & = 94\\ -125a + 25b - 5c & = -60\end{cases}$$

On obtient de la première ligne $a = 1$, donc :

$$\begin{cases} a & = 1\\ -60 + 4b & = -48\\ 150 - 20b + 2c & = 94\\ -125 + 25b - 5c & = -60\end{cases}$$

La deuxième ligne donne $b = 3$ et on obtient :

$$\begin{cases} a & = 1\\ b & = 3\\ 90 + 2c & = 94\end{cases}$$

d'où enfin $c = 2$ et l'on a bien, dans la quatrième ligne :

$$-125 + 75 - 10 = -60\,.$$

On a donc le triplet solution $(1{,}3{,}2)$ et :

$$P(x) = (2x-5)^3 + 3(2x-5)^2 + 2(2x-5)\,.$$

3 Pour en déduire une factorisation de $P(x)$, il suffit de constater que l'on peut mettre $(2x-5)$ en facteur dans l'expression :

$$P(x) = (2x-5)^3 + 3(2x-5)^2 + 2(2x-5)\,,$$

ce qui donne ici :

$$\begin{aligned}P(x) &= (2x-5)^3 + 3(2x-5)^2 + 2(2x-5)\\ &= (2x-5)\big[(2x-5)^2 + 3(2x-5) + 2\big]\\ &= (2x-5)(4x^2 - 20x + 25 + 6x - 15 + 2)\\ &= (2x-5)(4x^2 - 14x + 12).\end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à factoriser :

$$g(x) = 4x^2 - 14x + 12\,.$$

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 16 \times 12 = 4$, d'où :

$$x_1 = \frac{14-2}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{14+2}{8} = 2\,.$$

D'où :

$$4x^2 - 14x + 12 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-2)\,.$$

On a donc finalement :

$$P(x) = 4(2x-5)(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

qui est une factorisation de $P(x)$.

4 D'après la factorisation précédente, l'équation $P(x) = 0$ est une équation produit de termes du premier degré.

On a ainsi, $P(x) = 0$ si et seulement si $2x - 5 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x - \frac{3}{2} = 0$.

Finalement, $S = \left\{\frac{3}{2}\,;\,2\,;\,\frac{5}{2}\right\}$.

27 Fonction rationnelle

Énoncé p. 15

Lycée Charlemagne, Paris

1 On considère le polynôme $P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$, que l'on souhaite écrire sous la forme :

$$P(x) = \big(Q(x)\big)^2\,.$$

$Q(x) = ax^2 + bx + c$ étant un trinôme du second degré, on peut développer $\big(Q(x)\big)^2$:

$$\begin{aligned}\big(Q(x)\big)^2 &= (ax^2 + bx + c)^2\\ &= (ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + c)\\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2.\end{aligned}$$

CORRIGÉS

Les polynômes P et Q^2 sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} a^2 & = 1 \\ 2ab & = 6 \\ b^2 + 2ac & = -11 \\ 2bc & = -60 \\ c^2 & = 100 \end{cases}$$

Q et $-Q$ étant indifféremment solutions, on peut donc prendre $a = 1$ ou $a = -1$: choisissons $a > 0$. On obtient alors :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b & = 3 \\ c & = -10 \end{cases}$$

Finalement :

$$P(x) = (Q(x))^2 \ ,$$

avec $Q(x) = x^2 + 3x - 10$.

2 $P(x) = 0 \iff Q(x) = 0 \iff x^2 + 3x - 10 = 0$.

On a $\Delta = 9 + 40 = 49$, d'où

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3-7}{2} = -5 \,.$$

Ainsi :

$$S = \{-5{,}2\} \,.$$

3 **(a)** En développant, on a :

$$(x+5)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (5a+b)x^2 + (5b+c)x + 5c \,.$$

Par identification des coefficients des termes de même degré on obtient donc :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 5a + b = 6 \\ 5b + c = 6 \\ 5c = 5 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

et on a donc la factorisation $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = (x+5)(x^2+x+1)$.

(b) D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5} = \frac{P(x)}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5} \\ &= \frac{(x^2 + 3x - 10)^2}{(x+5)(x^2 + x + 1)} \,. \end{aligned}$$

Déterminons $\mathcal{D}_f$: $f(x)$ existe si et seulement si :

$$(x+5)(x^2 + x + 1) \neq 0$$

soit :

$$x + 5 \neq 0 \quad \text{et} \quad x^2 + x + 1 \neq 0\,.$$

L'équation $x + 5 = 0$ équivaut à $x = -5$.
Cherchons à résoudre $x^2 + x + 1 = 0$:
$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, donc cette équation n'admet pas de solutions réelles.
D'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
Les racines du trinôme $x^2 + 3x - 10$ sont -5 et 2 (question 2), donc :

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)\,.$$

Finalement :

$$f(x) = \frac{(x+5)^2(x-2)^2}{(x+5)(x^2+x+1)} = \frac{(x+5)(x-2)^2}{x^2+x+1} \quad \text{pour } x \neq -5\,.$$

28 Recherche d'une fonction

Énoncé p. 15

Lycée La Bruyère, Versailles

Une fonction du second degré est représentée par une parabole dont l'axe de symétrie passe par le sommet.
Ici, l'axe de symétrie est donc la droite d'équation $x = -1$.
Comme le polynôme a pour racine $\frac{5}{2}$, la parabole coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{5}{2}$. Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -1$, elle coupe aussi l'axe des abscisses au point d'abscisse r tel que $\frac{r + \frac{5}{2}}{2} = -1$, c'est-à-dire $r = -\frac{9}{2}$.
On connaît donc les deux racines du polynôme. Il se factorise donc sous la forme $f(x) = a\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{9}{2}\right)$ où a est un réel à déterminer.
Comme S est le sommet de la parabole, il faut de plus que $f(-1) = 2$, ce qui donne l'équation :

$$2 = a\left(-1 - \frac{5}{2}\right)\left(-1 + \frac{9}{2}\right).$$

C'est-à-dire : $a = -\frac{8}{49}$.
Le polynôme recherché est donc : $f(x) = -\frac{8}{49}\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{9}{2}\right)$.

CORRIGÉS

29 Des techniques de résolution variées

Énoncé p. 16

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

1 **(a)** Soit l'équation $u^2 - 6u - 16 = 0$. $\Delta = 36 + 64 = 100$.

L'équation admet deux solutions : 8 et -2.

(b) On considère l'équation $(|x| - 2)^2 = 2(|x| + 10)$.

On pose $u = |x|$.

L'équation précédente s'écrit alors : $(u - 2)^2 = 2(u + 10)$, soit en effectuant et en réduisant : $u^2 - 6u - 16 = 0$.

D'après la question précédente, l'équation $u^2 - 6u - 16 = 0$ admet deux solutions : 8 et -2.

On cherche alors x tel que $|x| = 8$ ou $|x| = -2$. Or, il n'existe aucun réel x tel que $|x| = -2$, tandis que l'équation $|x| = 8$ admet deux solutions : 8 et -8.

L'équation $(|x| - 2)^2 = 2(|x| + 10)$ admet donc deux solutions : 8 et -8.

2 **(a)** L'équation $u^2 - 5u - 6 = 0$ admet comme solution évidente $x_1 = -1$.

Or, le produit des racines vaut $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $-x_2 = \dfrac{-6}{1}$, soit $x_2 = 6$.

Les solutions sont donc -1 et 6.

(b) On rappelle que l'équation $\sqrt{a} = b$ équivaut à $b \geqslant 0$ et $a = b^2$.

Donc l'équation $\sqrt{15 - x} = x - 3$ équivaut à :

$$x \geqslant 3 \quad \text{et} \quad 15 - x = x^2 - 6x + 9 \text{ soit } x^2 - 5x - 6 = 0\,.$$

D'après la question précédente, cette équation admet deux racines : 6 et -1. Seule 6 vérifie la condition $x \geqslant 3$. Il en résulte que l'équation proposée admet pour unique solution : 6.

3 **(a)** L'équation $u^2 - 7u + 6 = 0$ équivaut successivement à :

$$\left(u - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 6 = 0$$
$$\left(u - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$
$$\left(u - \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(u - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0$$
$$(u - 6)(u - 1) = 0\,.$$

L'équation admet deux solutions : 6 et 1.

(b) Soit x la largeur de la croix, exprimée en mètres $(0 < x < 3)$. L'aire du drapeau est 12 m^2, l'aire de la croix est $3x + 4x - x^2$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

L'aire de la croix blanche est égale à l'aire rouge si et seulement si :

$$7x - x^2 = 12 - (7x - x^2)\,,$$

soit $2x^2 - 14x + 12 = 0$.

En divisant les deux membres par 2, on obtient : $x^2 - 7x + 6 = 0$.

D'après la question précédente, cette équation admet deux solutions : 6 et 1. Seule la valeur 1 convient.

La largeur de la croix blanche est donc égale à 1 mètre.

30 Revenir au second degré

Énoncé p. 16

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pin-Justaret

1 On pose $X = \sqrt{x}$.

L'équation est alors équivalente à $-2X^2 - 6X + 80 = 0$ et $X = \sqrt{x}$.

L'équation du second degré en X a pour discriminant $676 = 26^2$ et admet donc deux solutions, -8 et 5. Comme $X = \sqrt{x}$, seule la solution positive est à envisager et alors $\sqrt{x} = 5$, donc $x = 25$. L'équation a donc une solution unique : 25.

2 L'équation à résoudre est une équation bicarrée. On pose $X = x^2$.

L'équation est alors équivalente à $2X^2 - 2X - 24 = 0$ avec $x^2 = X$.

L'équation du second degré en X a pour discriminant $196 = 14^2$ et admet donc deux solutions : $X = -3$ et $X = 4$.

Cela donne les deux équations en x : $x^2 = -3$ ou $x^2 = 4$. Seule la deuxième équation a des solutions, 2 et -2.

Donc l'équation à résoudre a deux solutions : -2 et 2.

3 On remarque que 0 n'est pas solution de l'équation (c'est une valeur interdite). On peut donc multiplier les deux membres de l'équation par x et obtenir une équation équivalente : $4x^2 + 8 + 24x = 0$. En veillant à l'ordonner suivant les puissances décroissantes de x, on calcule son discriminant, $24^2 - 4 \times 4 \times 8 = 448 = (8\sqrt{7})^2$.

On trouve donc deux solutions : $-3 - \sqrt{7}$ et $-3 + \sqrt{7}$, qui conviennent toutes les deux puisqu'elles ne sont pas nulles.

31 Choisir une méthode adaptée

Énoncé p. 16

Lycée Saint-Martin, Pontoise

1 On peut voir tout de suite que 4 est solution ; on a en effet :

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

donc :

$$x^2 - 16 + 2(x - 4) = (x - 4)(x + 4 + 2) = (x - 4)(x + 6).$$

CORRIGÉS

D'où les deux solutions :

$$x = 4, \qquad x = -6 \qquad \text{et} \qquad S = \{4, -6\}.$$

2 On a :

$$\begin{aligned} x^2 - 2{,}4x - 0{,}81 &= (x - 1{,}2)^2 - 0{,}81 - 1{,}44 \\ &= (x - 1{,}2)^2 - 2{,}25. \end{aligned}$$

Or, $2{,}25 = 1{,}5^2$ donc :

$$\begin{aligned} x^2 - 2{,}4x - 0{,}81 &= (x - 1{,}2 - 1{,}5)(x - 1{,}2 + 1{,}5) \\ &= (x - 2{,}7)(x + 0{,}3), \end{aligned}$$

d'où les deux solutions :

$$x = 2{,}7, \qquad x = -0{,}3 \qquad \text{et} \qquad S = \{-0{,}3\,;\, 2{,}7\}.$$

Remarque : on pourrait aussi calculer le discriminant.

3 On a ici une équation du premier degré, que l'on peut écrire sous la forme :

$$x(4 - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

donc :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{2(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\sqrt{2} + 2}{2(2^2 - 2)} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{2}. \end{aligned}$$

On a alors $S = \left\{\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}\right\}$.

4 On a, en multipliant les deux membres par 4 :

$$\begin{aligned} 2x + 4 = x^2 &\iff x^2 - 2x - 4 = 0 \\ &\iff (x - 1)^2 - 1 - 4 = 0 \\ &\iff (x - 1)^2 = 5 \\ &\iff x - 1 = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x - 1 = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

On a donc les racines :

$$\begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{5} \\ x_2 = 1-\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad S = \left\{1-\sqrt{5}\,;\,1+\sqrt{5}\right\}.$$

Remarque : on aurait aussi pu utiliser le discriminant.

32 Lunules

Énoncé p. 17

Lycée Les Chartreux, Lyon

1 L'aire d'un disque de rayon R est donnée par la formule :

$$\pi \times R^2.$$

Donc l'aire d'un demi-disque est donnée par la formule :

$$\frac{1}{2} \times \pi \times R^2.$$

De plus, l'aire de la surface colorée est obtenue en soustrayant à l'aire du demi-disque (C) (de rayon 4) la somme de l'aire des demi-disques (D_1) (de rayon $\frac{x}{2}$) et (D_2) (de rayon $\frac{8-x}{2}$).
Ainsi l'aire $f(x)$ de la surface colorée est :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 - \left[\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right] \\ &= 8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{(8-x)^2}{8}\pi\right) \\ &= 8\pi - \frac{x^2}{8}\pi - \frac{64-16x+x^2}{8}\pi \\ &= 8\pi - \frac{x^2}{8}\pi - 8\pi + \frac{16x}{8}\pi - \frac{x^2}{8}\pi \\ &= -\frac{x^2}{4}\pi + \frac{8x}{4}\pi \\ &= \frac{\pi}{4}(-x^2+8x). \end{aligned}$$

2 On souhaite déterminer pour quelles valeurs de x l'aire de la surface colorée est supérieure ou égale à un quart de l'aire du demi-disque (C), soit à $\frac{1}{4} \times 8\pi = 2\pi$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant 2\pi &\iff \frac{\pi}{4}(-x^2+8x) \geqslant 2\pi \\ &\iff \frac{4}{\pi}\times\frac{\pi}{4}(-x^2+8x) \geqslant \frac{4}{\pi}\times 2\pi \\ &\iff -x^2+8x \geqslant 8 \\ &\iff -x^2+8x-8 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $-x^2+8x-8$ est :

$$\Delta = 8^2 - 4\times(-1)\times(-8) = 64-32 = 32 > 0$$

donc il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{32}}{-2} = 4+2\sqrt{2} \approx 6{,}8$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{32}}{-2} = 4-2\sqrt{2} \approx 1{,}2.$$

Ces deux valeurs sont comprises entre 0 et 8, donc elles sont bien solutions à notre inéquation.

Ainsi, l'ensemble des valeurs de x telles que l'aire de la surface bleue est supérieure ou égale à un quart de celle du demi-disque (C) est $\left[4-2\sqrt{2}; 4+2\sqrt{2}\right]$.

3 $f(x) = \dfrac{\pi}{4}x(-x+8)$. Ces deux racines sont donc 0 et 8. Sa courbe représentative est une parabole dont les branches sont orientées vers le bas (car le coefficient de x^2 est négatif). De plus, le sommet de la parabole a pour abscisse la moyenne des deux racines, soit $x_S = 4$. D'où le tableau suivant :

x	0	4	8
f	$\nearrow$		$\searrow$

L'aire maximale est donc atteinte pour $x = 4$, et vaut :

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{\pi}{4}(-4^2+8\times 4) \\ &= \frac{\pi}{4}\times 16 \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Chapitre
2

Dérivation

Plan du chapitre

Retrouvez l'essentiel de ce cours en vidéo.

1 Nombre dérivé

Exercice type 1 — **Lycée Marseilleveyre, Marseille**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x}.$$

À l'aide de la définition, déterminer le nombre dérivé de f en 1.

Voir corrigé page 46

Définition 1 : taux d'accroissement

Soit f une fonction dont le domaine de définition est $\mathcal{D}_f$. Soient $a \in \mathcal{D}_f$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in \mathcal{D}_f$.
Le *taux d'accroissement* de f en a est le nombre :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad , \quad h \neq 0.$$

Exemple : $f(x) = x^2$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour $h \neq 0$,

$$\tau(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h.$$

Définition 2 : nombre dérivé

Soit f une fonction, dont le domaine de définition est $\mathcal{D}_f$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
Le *nombre dérivé* de f en a est, quand il existe, le taux d'accroissement en a quand h se rapproche de 0. On note alors :

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = f'(a).$$

COURS

Exemple : $f(x) = x^2$, $a \in \mathbb{R}$ et $\tau(h) = 2a + h$.
Quand h se rapproche de 0, $\tau(h)$ se rapproche de $2a$ donc :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = 2a.$$

Définition 3 : fonction dérivable

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I quand, pour tout $a \in I$, $f'(a)$ est un nombre fini.

Exemple : $f(x) = x^2$ et $f'(a) = 2a$ pour tout réel a. $f'(a)$ est toujours un nombre fini donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Marseilleveyre, Marseille

Soit h un réel non nul.
On pose :

$$t(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Comme $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x}$, alors :

$$f(1) = 4 \quad \text{et} \quad f(1+h) = \frac{(1+h)^2 + (1+h) + 2}{1+h},$$

soit : $f(1+h) = \dfrac{h^2 + 3h + 4}{1+h}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{\frac{h^2+3h+4}{1+h} - 4}{h} \\ &= \frac{\frac{h^2+3h+4-4(1+h)}{1+h}}{h} \\ &= \frac{h^2 - h}{h(1+h)} \\ &= \frac{h-1}{h+1}. \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, $t(h)$ tend vers -1. On en déduit que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -1$.

Voir énoncé page 45

2 Tangente à une courbe

Exercice type 2 — Lycée Marseilleveyre, Marseille

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x}.$$

Écrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1, sachant que $f'(1) = -1$.

Voir corrigé page 47

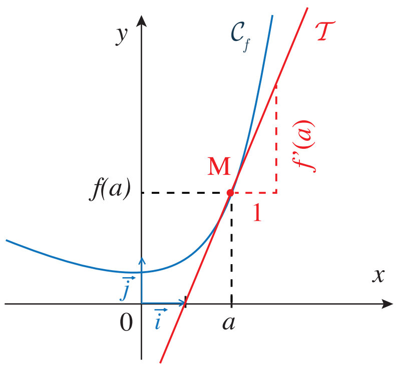
Définition 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative sur I. Soit $a \in I$.
La *tangente* à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est la droite passant par le point de coordonnées $\big(a\ ;\ f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 1

L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Solution de l'exercice type 2 — Lycée Marseilleveyre, Marseille

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Comme $f'(1) = -1$ et $f(1) = 4$, la tangente admet comme équation :

$$y = -(x - 1) + 4 \qquad \text{soit :} \qquad y = -x + 5.$$

Voir énoncé page 47

COURS

3 Fonction dérivée

Exercice type 3 — Lycée Marseilleveyre, Marseille

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x}.$$

1. Déterminer, avec les formules de cours, la fonction dérivée de la fonction f.
2. Existe-t-il des tangentes à la courbe parallèles à la droite d'équation $y = -7x - 5$?
   Si oui, préciser les points de la courbe qui correspondent à ces tangentes.

Voir corrigé page 49

3.1 Définition

Définition 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction qui à tout réel x de I associe son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée de* f. On la note f'.

Les formules importantes à retenir sont les suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de dérivabilité	Intervalle de définition
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si $n < 0$)	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si $n < 0$)
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$[0\,;+\infty[$

Remarque : la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0\,;\ +\infty[$, mais elle est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$.

3.2 Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$f(x) = ku(x) \quad (k \in \mathbb{R})$	$f'(x) = ku'(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$
$f(x) = g(ax+b)$	$f'(x) = a \times g'(ax+b)$

Solution de l'exercice type 3

Lycée Marseilleveyre, Marseille

1 La fonction f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{x(2x+1) - (x^2+x+2)}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}.$$

2 Soit a un réel non nul.
D'après le cours, la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a, admet comme coefficient directeur $f'(a)$.
La droite $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite d'équation :

$$y = -7x - 5$$

si et seulement si ces deux droites ont même coefficient directeur, c'est-à-dire si et seulement si $f'(a) = -7$, soit :

$$\begin{aligned}\frac{a^2-2}{a^2} = -7 &\iff a^2 - 2 = -7a^2 \\ &\iff 8a^2 = 2 \\ &\iff a^2 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Cela signifie que :

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad a = -\frac{1}{2}.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Solution de l'exercice type 3 (suite) — Lycée Marseilleveyre, Marseille

On en déduit qu'il existe deux points de la courbe tels que la tangente à la courbe en ces points soit parallèle à la droite d'équation $y = -7x - 5$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}. \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}.$$

Ce sont les points de coordonnées :

$$\left(\frac{1}{2}\,;\frac{11}{2}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{7}{2}\right).$$

Voir énoncé page 48

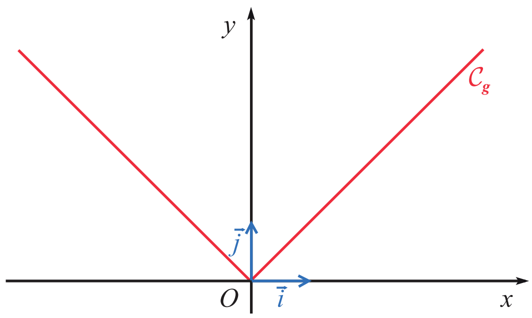
4 Fonction « valeur absolue »

Définition 6

La fonction *valeur absolue* est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La courbe représentative de la fonction valeur absolue est la suivante :



Propriété 2 : non dérivabilité de la valeur absolue en 0

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Propriété 3

Pour tout réel $x \neq 0$, la dérivée de la fonction $f(x) = |x|$ est :

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}.$$

1 QCM Questions de cours

5 min — Corrigé p. 59

Parmi les propositions faites, une seule est correcte. Laquelle ?

1 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f. Soit $\mathcal{T}_2$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

On sait que $f'(2) = 0$. Alors :

- a $\mathcal{T}$ est verticale.
- b $\mathcal{T}$ est horizontale.
- c $\mathcal{T}$ est une droite croissante.
- d $\mathcal{T}$ est une droite décroissante.

2 La fonction f est représentée par une courbe dont la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation réduite : $y = 5x + 3$. Alors :

- a $f'(-1) = 5$.
- b $f'(-1) = 3$.
- c $f(-1) = 3$.

3 La fonction f est représentée par une courbe dont la tangente au point d'abscisse 5 a pour équation réduite : $y = -5x + 5$. Alors :

- a $f'(5) = 5$.
- b $f(5) = 5$.
- c $f(5) = -20$.

2 QCM Ensemble de définition et de dérivabilité

10 min — Corrigé p. 59

Parmi les propositions faites, une seule est correcte. Laquelle ? Justifier en donnant, selon les cas, l'ensemble de définition ou l'ensemble de dérivabilité le plus grand qui convienne.

1 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 2x\sqrt{x}$.
La fonction f est dérivable sur :

- a $]0\,;+\infty[$
- b $[0\,;+\infty[$
- c $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

2 La fonction $g : x \mapsto -\dfrac{3}{x^2+5}$ est définie sur :

- a $\mathbb{R}$
- b $\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{5}\right\}$
- c $\mathbb{R}_+$

3 La fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^3}{5} - 4x^2 + \sqrt{3}$ est définie sur :

- a $\mathbb{R}$
- b $\mathbb{R}\setminus\{5\}$
- c $\mathbb{R}_+$

4 La fonction h définie à la question précédente est dérivable sur :

- a $\mathbb{R}_+$
- b $\mathbb{R}$
- c $\mathbb{R}_+^*$

INTERROS

3 V/F Dérivabilité

10 min Corrigé p. 60

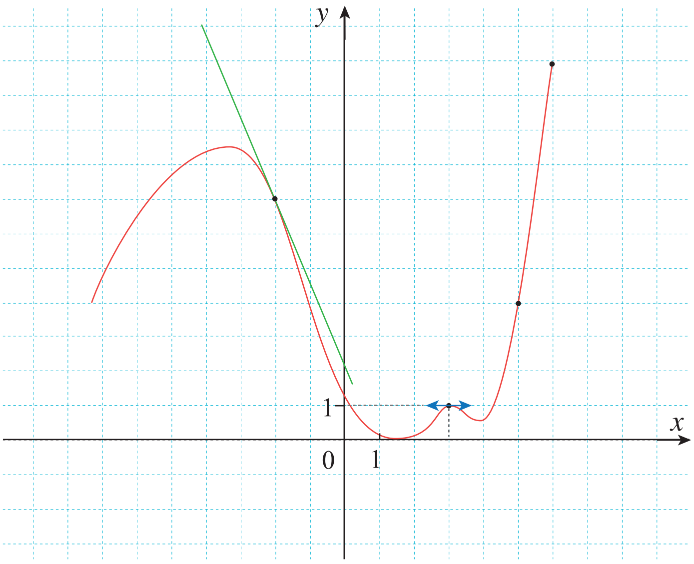
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si une fonction f est définie en x_0, alors f est dérivable en x_0.
2. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 donc la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ ne l'est pas non plus.
3. La dérivée d'une fonction polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) est une fonction polynôme de degré n.
4. Soit f une fonction telle que $f(1) = 5$, alors $f'(1) = 0$.

4 QCM Dérivée et lecture graphique

10 min Corrigé p. 60

Sur la figure ci-dessous, sont représentées la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et ses tangentes aux points d'abscisse -2, et 3.



Donner la ou les bonnes réponses aux suivantes.

1. **a** $f'(-2) = -\dfrac{5}{2}$ **b** $f'(-2) = \dfrac{1}{5}$ **c** $f'(-2) = 5$
2. **a** $f'(3) = 0$ **b** $f'(3) = 1$ **c** On ne peut pas savoir
3. **a** $f'(5) = \dfrac{1}{7}$ **b** $f'(5) = 7$ **c** On ne peut pas savoir
4. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2 est :

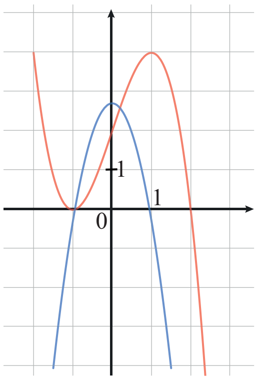
   a $y = -\dfrac{5}{2}x + 2$ **b** $y = 5x + 2$ **c** $y = -5x - 3$

Nombres dérivés et tangentes

5 Lecture graphique

★ 5 min Corrigé p. 61

Lycée La Source, Meudon



On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction f et celle de sa dérivée f'.

Quelle est celle qui correspond à f et à f' ? Justifier.

6 Équations de tangentes

★ 10 min Corrigé p. 61

Lycée Kremlin-Bicêtre, Meaux

Dans chacun des cas suivants, écrire une équation de la tangente en M à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$.

1 $y = \frac{1}{x}$, $M(-2\ ;-\frac{1}{2})$.

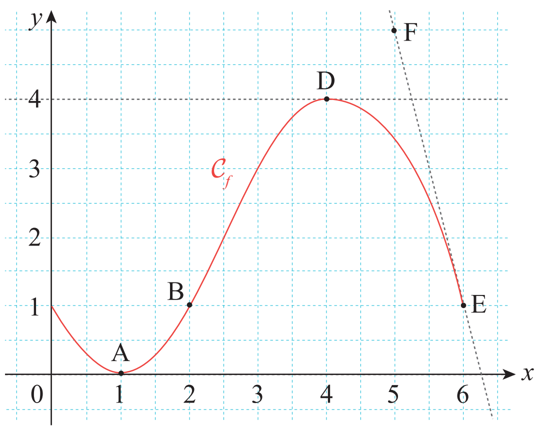
2 $y = \sqrt{x} + x$, $M(1\ ;2)$.

7 Lecture graphique et tangente

★ 10 min Corrigé p. 62

Lycée international Victor Hugo, Colomiers

On considère une fonction f définie sur $[0\ ;6]$. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f est donnée ci-dessous :



Cette courbe passe par les points $A(1\,;0)$, $B(2\,;1)$, $D(4\,;4)$ et $E(6\,;1)$.
La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$ est confondue avec l'axe des abscisses ; la tangente en D à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à cet axe.
La tangente à la courbe au point E passe par le point $F(5\,;5)$.
Par lecture graphique ou à l'aide des renseignements donnés :

1. Déterminer $f(4)$ et $f(6)$.
2. Déterminer $f'(4)$ et $f'(6)$.
3. Résoudre les équations $f(x)=0$ et $f'(x)=0$.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_1$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D, puis celle de la tangente $\mathcal{T}_2$ au point E.

8 Hyperbole

★★ 20 min Corrigé p. 62

Lycée Sophie Germain, Paris

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On désigne par $\mathcal{H}_a$ l'hyperbole représentant cette fonction dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Dans la suite du problème, M_0 désigne le point d'abscisse x_0 sur $\mathcal{H}_a$, où $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Donner une équation de la tangente Δ au point d'abscisse x_0, en fonction de x_0.
2. Δ coupe les droites (Ox) et (Oy) respectivement en H et K.
Montrer que M_0 est le milieu du segment $[HK]$.
3. En déduire un procédé géométrique pour construire la tangente à $\mathcal{H}_a$ en M_0.

9 Étude d'une tangente

★★ 20 min Corrigé p. 63

Lycée Camille See, Paris

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Déterminer m pour que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction définie par :
$$f(x)=\frac{mx+1}{(2-m)x+3}$$
admette au point d'abscisse -1 une tangente de coefficient directeur -2.

10 Tangentes parallèles

★★ 20 min Corrigé p. 64

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-9x+6$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $f'(a)$.

2 Donner une équation de la droite (T), tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

3 Montrer qu'il existe un autre point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à (T).

4 La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Si oui, préciser en quel(s) point(s).

11 Utiliser des renseignements ★★★ 15 min Corrigé p. 65

Lycée du Parc, Lyon

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$. La fonction n'est pas définie en 0. On note f' la fonction dérivée de f sur son ensemble de définition.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

$\mathcal{C}$ passe par les points $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\,;-2\right)$, $\mathrm{B}(1\,;0)$ et $\mathrm{C}(2\,;1)$.

E est le point de coordonnées $\left(1\,;\frac{3}{2}\right)$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet au point C une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La droite (AE) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en A.

1 Que vaut $f(2)$, $f'(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)$?

2 Donner l'équation de la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

3 On sait de plus que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions, 1 et 3,5. Tracer, dans un repère orthonormal, une courbe pouvant représenter la fonction f, ainsi que les tangentes aux point A et C.

Dérivabilité

12 Dérivabilité en $a = 1$ ★ 10 min Corrigé p. 66

Lycée Alain, Le Vésinet

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

On pose, pour $h \neq 0$: $t(h)=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

1 Montrer que l'on a : $t(h)=\dfrac{-2-h}{(1+h)^2}$.

2 Montrer que f est dérivable en 1 et préciser son nombre dérivé.

13 Valeur absolue et dérivabilité ★★ 15 min Corrigé p. 67

Lycée Jeanne d'Albret, Saint-Germain-en-Laye

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4| - 1$.
Étudier la dérivabilité de f en $a = 2$.

Fonctions dérivées

14 Quotients ★ 15 min Corrigé p. 67

Lycée Jean Renoir, Bondy

Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ des fonctions suivantes, ainsi que leur dérivée $f'(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 7}{2x^2 - x - 1}$.
2. $f(x) = 3 - 5x + \dfrac{1}{4x - 7}$.
3. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{(-x^2 + 2)(x + 3)}$.

15 Produits et quotients ★ 20 min Corrigé p. 68

Lycée Sophie Germain, Paris

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, l'ensemble de dérivabilité de f, puis calculer $f'(x)$ sur son ensemble de dérivabilité.

1. $f : x \mapsto (2x - 3)\sqrt{x}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{2 - 3x}{x^2 - 5x + 4}$.
3. $k : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2 + 3}$.

16 Recherche de fonctions dérivées ★ 20 min Corrigé p. 70

Lycée Richelieu, Rueil-Malmaison

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - x + 1}$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^4 - x^2 + 1}$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

17 Dérivées pêle-mêle

★★ 20 min Corrigé p. 71

Lycée La Source, Meudon

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = -\dfrac{x^5}{5} + 4x^3 + \dfrac{2}{5}x + 2\pi$.
2. $f(x) = -\dfrac{5}{x} + 2\sqrt{x}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{-x+4}$.
4. $f(x) = (4-3x)^4$.
5. $f(x) = \sqrt{-2x+4}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{(5x+3)^3}$.
7. $f(x) = |5-7x|$.

18 Coût marginal

★★ 20 min Corrigé p. 72

Lycée Fénelon, Paris

Le coût de production de x objets est donné par la fonction :

$$C(x) = 180 + 12x - 0{,}01x^2.$$

1. Le coût marginal $C_m(x)$ est défini comme l'accroissement du coût total occasionné par la production de la x^{e} pièce, ce qu'on peut écrire :
$$C_m(x) = C(x) - C(x-1).$$
Donner l'expression de $C_m(x)$ dans le cas étudié.
2. Donner l'expression de la dérivée $C'(x)$.
3. Si l'on utilise $C'(x)$ comme valeur approchée du coût marginal $C_m(x)$, quelle erreur commet-on ?
Donner la valeur de cette erreur lorsqu'on produit le 100ᵉ objet.

19 Valeur annulant la dérivée

★★ 20 min Corrigé p. 72

Lycée Charlemagne, Paris

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que v et v' ne s'annulent pas sur cet intervalle.

1. On considère la fonction $f = \dfrac{u}{v}$.
Prouver que si a est un nombre de I tel que $f'(a) = 0$, alors $f(a) = \dfrac{u'(a)}{v'(a)}$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

INTERROS

2 Application.

On pose $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 1}$ définie pour tout x de $\mathbb{R}$.

(a) Calculer $f'(x)$ et donner la valeur exacte de a, nombre positif tel que $f'(a) = 0$.

(b) Utiliser le résultat de la question 1. pour donner la valeur exacte de $f(a)$.

20 Position relative

★★ 30 min Corrigé p. 73

Lycée Saint-Joseph-Du-Loquidy, Nantes

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{6x + 4}{2x + 1}$, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1 Sur quel ensemble $\mathcal{D}$ la fonction f est-elle définie ?

2 Montrer que pour tout réel x de $\mathcal{D}$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(2x + 1)^2}$.

3 On appelle $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Déterminer une équation de $\mathcal{T}$.

4 Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est parallèle à $\mathcal{T}$.

5 Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.

6 Soit a un réel quelconque non nul. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses $-\dfrac{1}{2} + a$ et $-\dfrac{1}{2} - a$ sont parallèles.

1 QCM Questions de cours

Énoncé p. 51

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, si le nombre dérivé de f en 2 vaut 0 alors le coefficient de la tangente au point d'abscisse 2 vaut 0. Ainsi, la tangente est horizontale.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé. Or, si $y = 5x + 1$ est l'équation réduite de la tangente, alors son coefficient directeur vaut 5, d'où $f'(-1) = 5$.

Remarque : la proposition $\boxed{\text{c}}$ ne pouvait pas être correcte car d'après le cours, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1) \iff y = f'(-1)x+f'(-1)+f(-1).$$

Or, l'énoncé nous dit que cette équation est $y = 5x+1$. On devrait donc avoir :

$$\begin{cases} f'(-1) = 5 \\ f'(-1) + f(-1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(-1) = 5 \\ f(-1) = 1 - 5 = -4. \end{cases}$$

3 Réponse $\boxed{\text{c}}$. En effet, d'après le cours, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = f'(5)\big(x - 5\big) + f(5) \iff y = f'(5)x - 5f'(5) + f(5).$$

Or, l'énoncé nous dit que cette équation est $y = -5x + 5$. On devrait donc avoir :

$$\begin{cases} f'(5) = -5 \\ -5f'(5) + f(5) = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(5) = -5 \\ f(5) = 5 - 25 = -20. \end{cases}$$

2 QCM Ensemble de définition et de dérivabilité

Énoncé p. 51

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Étudions maintenant la dérivabilité de f en 0 en revenant à la définition :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{h} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, $x^2 + 5 \geqslant 5$ puisque x^2 ne peut être négatif. Donc le dénominateur ne s'annule jamais.

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. L'erreur consisterait à confondre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{x}$.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. De même la dérivée de $x \mapsto \sqrt{3}$ est 0, puisque $\sqrt{3}$ est un nombre réel.

CORRIGÉS

3 V/F Dérivabilité

Énoncé p. 52

1 *Faux*. Les fonctions : $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont toutes les deux définies en $x_0 = 0$; cependant, elles n'y sont pas dérivables.

2 *Faux*. Il est exact que la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 ; cependant, f est dérivable en 0.

On a, pour tout $h > 0$, $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$. Soit :

$$T(h) = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}.$$

$T(h)$ admet une limite finie égale à 0 lorsque h tend vers 0. Donc la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3 *Faux*. La dérivée de la fonction $f(x) = x^n$ est $f(x) = nx^{n-1}$ qui est de degré $n - 1$.

4 *Faux*. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4$. On a bien $f(1) = 5$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2x$. Par suite, $f'(1) = 2$.

4 QCM Dérivée et lecture graphique

Énoncé p. 52

1 Réponse $\boxed{a}$. La tangente au point d'abscisse -2 passe par les points $A(-2\,;7)$ et $B(0\,;2)$.

Son coefficient directeur est donc $\dfrac{2-7}{0-(-2)} = -\dfrac{5}{2}$. Or par définition, ce coefficient directeur est $f'(-2)$.

2 Réponse $\boxed{a}$. La double flèche horizontale au point de la courbe d'abscisse 3 signifie qu'il y a en ce point une tangente horizontale, donc $f'(3) = 0$.

3 Réponse $\boxed{c}$. La tangente en ce point n'est pas tracée donc il n'y a aucun moyen de déterminer son coefficient directeur.

4 Réponse $\boxed{a}$. On sait déjà que le coefficient directeur de cette tangente est $-\dfrac{5}{2}$. De plus la droite, qui a donc une équation de la forme $y = -\dfrac{5}{2}x + p$, passe par le point $A(-2\,;7)$.

Les coordonnées de A vérifient donc l'équation de la tangente et on a : $7 = -\dfrac{5}{2} \times (-2) + p$, ce qui donne $p = 2$.

L'équation de la tangente est donc $y = -\dfrac{5}{2}x + 2$.

5 Lecture graphique

Énoncé p. 53

Lycée La Source, Meudon

Supposons que la courbe rouge soit celle de f'. Alors, $f'(0) = 2$. Cela signifierait que la tangente au point d'abscisse 0 à l'autre courbe aurait un coefficient directeur égal à 2.

Or, la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe bleue est horizontale, donc a un coefficient directeur égal à 0.

Ainsi, la courbe rouge n'est pas celle de f'.

On en conclut alors que la courbe rouge est celle de f, et la courbe bleue est celle de f'.

6 Équations de tangentes

Énoncé p. 53

Lycée Kremlin-Bicêtre, Meaux

1 On sait que le coefficient directeur de la tangente en un point est égal au nombre dérivé en ce point et l'on a $f(x) = \frac{1}{x}$.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. En particulier en -2 :

$$f'(-2) = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(-2) = -\frac{1}{2}.$$

Une équation de la tangente est :

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x+2)$$

ou encore :

$$y = -\frac{1}{4}x - 1.$$

2 En utilisant le même raisonnement pour $f(x) = \sqrt{x} + x$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$$

et en particulier :

$$f'(1) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad f(1) = 2.$$

Une équation de la tangente est $y = 2 + \frac{3}{2}(x-1)$, soit :

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

CORRIGÉS

7 Lecture graphique et tangente

Énoncé p. 53

Lycée international Victor Hugo, Colomiers

1 $f(4) = 4$; $f(6) = 1$.

2 $f'(4) = 0$ (on a une tangente parallèle à l'axe des abscisses) et $f'(6) = -4$. En effet, la tangente en E passe par $E(6\ ;\ 1)$ et $F(5\ ;\ 5)$, donc son coefficient directeur est $\dfrac{5-1}{5-6} = -4$.
Or, par définition, ce coefficient directeur est égal à $f'(6)$.

3 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$: le point A est le seul point de la courbe sur l'axe des abscisses.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$. En effet, pour ces deux valeurs on a une tangente horizontale, donc de coefficient directeur 0.

4 Pour $\mathcal{T}_1$: le coefficient directeur est nul (voir question 3), et cette droite passe par le point D. Donc l'équation de $\mathcal{T}_1$ est $y = 4$.

Pour $\mathcal{T}_2$: on sait déjà que le coefficient directeur est -4, donc l'équation est de la forme $y = -4x$+p.
De plus, le point E appartient à la tangente, donc ses coordonnées vérifient l'équation.
On a donc : $1 = -4 \times 6 + p$, et donc $p = 25$.
L'équation réduite de $\mathcal{T}_2$ est $y = -4x + 25$.

8 Hyperbole

Énoncé p. 54

Lycée Sophie Germain, Paris

1 $f'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$ donc $f'(x_0) = -\dfrac{a}{x_0^2}$.

L'équation de la tangente est donc : $y = -\dfrac{a}{x_0^2}(x - x_0) + \dfrac{a}{x_0}$, soit :

$$y = -\frac{a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0}.$$

2 Δ coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0$. On a alors $-\dfrac{a}{x_0^2}x + \dfrac{2a}{x_0} = 0$, et donc :

$$x = \frac{-\dfrac{2a}{x_0}}{-\dfrac{a}{x_0^2}} = -\frac{2a}{x_0} \times \frac{-x_0^2}{a} = 2x_0.$$

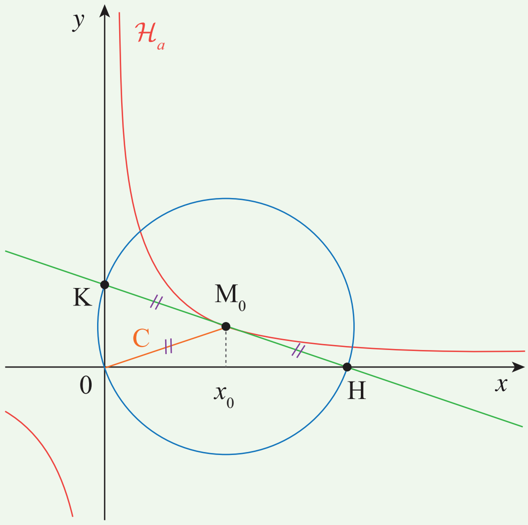
H a donc pour coordonnées $(2x_0\ ;\ 0)$.
Δ coupe l'axe des ordonnées lorsque $x = 0$, on a alors $y = \dfrac{2a}{x_0}$.

K a donc pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{2a}{x_0}\right)$.

Le milieu de $[HK]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{2x_0+0}{2}\ ;\ \dfrac{0+\dfrac{2a}{x_0}}{2}\right)$, soit $\left(x_0\ ;\ \dfrac{a}{x_0}\right)$, et ce sont bien les coordonnées de M_0.

3 Il y a en fait deux constructions possibles :

- Soit on s'intéresse au triangle OHK : il est rectangle en O, et sa médiane issue de O est $[OM_0]$ d'après le résultat précédent.
  Or, dans un triangle rectangle, la médiane a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
  Donc on peut tracer un cercle de rayon OM_0 et de centre M_0.
  Il coupera les deux axes en H et K.



- On pourrait aussi n'utiliser que le résultat intermédiaire, qui est l'abscisse de H : on reporte deux fois l'abscisse x_0 à partir de O sur l'axe des abscisses, puis on joint les points H et M_0, ce qui permet de tracer la tangente.

9 Étude d'une tangente

Énoncé p. 54

Lycée Camille See, Paris

Pour que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{mx+1}{(2-m)x+3}$ admette au point d'abscisse -1 une tangente de coefficient directeur -2, il faut d'abord que f soit définie en -1, donc que $(2-m)(-1)+3 \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq -1$.

CORRIGÉS

f est alors dérivable en -1 et on doit avoir $f'(-1) = -2$. La dérivée de f vaut :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{m(2x - mx + 3) - (mx + 1)(2 - m)}{(2x - mx + 3)^2} \\ &= \frac{2mx - m^2x + 3m - 2mx - 2 + m^2x + m}{(2x - mx + 3)^2} \\ &= \frac{4m - 2}{(2x - mx + 3)^2}. \end{aligned}$$

Au point -1, on a :

$$f'(-1) = \frac{4m - 2}{(m + 1)^2}.$$

Il faut donc avoir : $\dfrac{4m - 2}{(m + 1)^2} = -2$

$$2 - 4m = 2m^2 + 4m + 2$$

$$2m^2 + 8m = 0.$$

On obtient alors $m = 0$ ou $m = -4$, qui sont donc les deux solutions recherchées : $S = \{-4{,}0\}$.

10 Tangentes parallèles

Énoncé p. 54

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 La dérivée de f est :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9.$$

Ainsi,

$$\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = 3a^2 + 6a - 9.$$

2 D'après le cours, l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pour $a = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} & y = f'(2)(x - 2) + f(2) \\ \iff & y = (3 \times 2^2 + 6 \times 2 - 9)(x - 2) + (2^3 + 3 \times 2^2 - 9 \times 2 + 6 \\ \iff & y = 15(x - 2) + 8 \\ \iff & y = 15x - 22 \end{aligned}$$

L'équation réduite de (T) est donc $y = 15x - 22$.

3 S'il existe un point d'abscisse b en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à (T), alors $f'(b) = 15$ (les coefficients directeurs des tangentes sont nécessairement égaux).

$$\begin{aligned} f'(b) = 15 &\iff 3b^2 + 6b - 9 = 15 \\ &\iff 3b^2 + 6b - 24 = 0 \\ &\iff b^2 + 2b - 8 = 0 \text{ (en divisant tout par 3).} \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $b^2 + 2b - 8$ est :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36.$$

Il a donc deux racines :

$$b_1 = \frac{-2-6}{2} = -4 \qquad \text{et} \qquad b_2 = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Il y a donc deux points en lesquels le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ est égal à 15 : celui d'abscisse -4 et celui d'abscisse 2 (déjà vu précédemment).

4 $\mathcal{C}$ admet une ou des tangentes parallèles à l'axe des abscisses s'il existe au moins une valeur de a pour laquelle $f'(a) = 0$

$$\begin{aligned} f'(a) = 0 &\iff 3a^2 + 6a - 9 = 0 \\ &\iff a^2 + 2a - 3 = 0 \text{ (en divisant tout par 3).} \end{aligned}$$

a_1 est une racine évidente de $a^2 + 2a - 3$ donc la seconde racine est $a_2 = -3$ (on utilise le résultat $a_1 a_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1}$).

Il existe donc bien deux points (d'abscisses respectives 1 et -3) en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ est horizontale.

11 Utiliser des renseignements

Énoncé p. 55

Lycée du Parc, Lyon

1 C a pour coordonnées (2 ; 1) et appartient à $\mathcal{C}$.
Donc $f(2) = 1$.

La tangente en C à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses donc :

$$f'(2) = 0.$$

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2} ; -2\right)$ appartient à $\mathcal{C}$, donc :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2.$$

(AE) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en A, donc le coefficient directeur de (AE) est égal à la dérivée de f en l'abscisse de A.

Ce coefficient directeur est égal à :

$$\frac{\frac{3}{2}-(-2)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = 7.$$

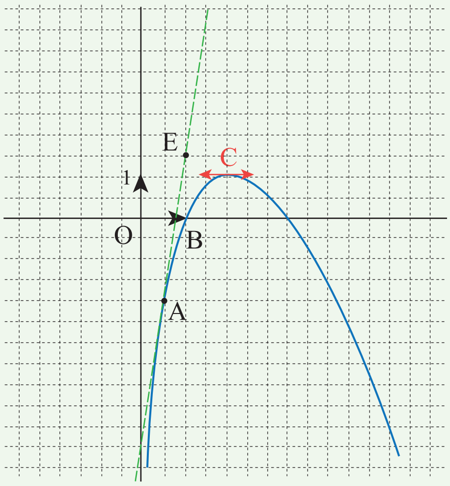
On a donc $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 7$.

2 On utilise la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$$y = 7\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2 = 7x - \frac{7}{2} - 2 = 7x - \frac{11}{2}.$$

L'équation de la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ est $y = 7x - \frac{11}{2}$.

3 On a le graphique suivant :



12 Dérivabilité en $a = 1$

Énoncé p. 55

Lycée Alain, Le Vésinet

1 On a :

$$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - \frac{1}{1^2}}{h} = \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - 1}{h}$$
$$= \frac{1-(1+h)^2}{h(1+h)^2} = \frac{-h^2-2h}{h(1+h)^2} = \frac{-2-h}{(1+h)^2}.$$

2 On a donc $\lim_{h \to 0} t(h) = -2$, d'où :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2.$$

f est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 vaut -2.

Soit : $f'(1) = -2$.

13 Valeur absolue et dérivabilité

Énoncé p. 56

Lycée Jeanne d'Albret, Saint-Germain-en-Laye

Soit h un réel non nul, le taux de variation de la fonction f entre 2 et $2+h$ est :

$$t(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}.$$

Comme $f(x) = |x^2 - 4| - 1$, alors $t(h) = \dfrac{|(2+h)^2 - 4| - 1 + 1}{h}$.

Soit après réduction :

$$t(h) = \frac{|h^2 + 4h|}{h}.$$

On écrit $t(h)$ sous la forme $\dfrac{|h|}{h} \times |h+4|$.

Deux cas doivent alors être distingués :

- Si $h > 0$, alors $t(h) = h + 4$.
- Si $h < 0$, alors $t(h) = -|h+4|$.

Il en résulte que $t(h)$ n'a pas de limite en 0. En effet, si h tend vers 0 par valeurs positives, $t(h)$ tend vers 4 (calcul effectué dans la première expression) et si h tend vers 0 par valeurs négatives, alors $t(h)$ tend vers -4 (calcul effectué dans la seconde expression).

On en déduit que f n'est pas dérivable en $a = 2$.

14 Quotients

Énoncé p. 56

Lycée Jean Renoir, Bondy

1 $f(x)$ existe si et seulement si $2x^2 - x - 1 \neq 0$.

Étudions le trinôme $2x^2 - x - 1$:

$\Delta = 9$ donc ses racines sont :

$$x_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Finalement :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2} ; 1\right\}$$

CORRIGÉS

La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est dérivable sur son ensemble de définition.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x-4)(2x^2-x-1)-(3x^2-4x+7)(4x-1)}{(2x^2-x-1)^2} \\ &= \frac{12x^3-14x^2-2x+4-(12x^3-16x^2+28x-3x^2+4x-7)}{(2x^2-x-1)^2} \\ &= \frac{5x^2-34x+11}{(2x^2-x-1)^2}. \end{aligned}$$

2 $f(x)$ existe si et seulement si $4x-7 \neq 0$, d'où :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$$

La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$f'(x) = -5 - \frac{4}{(4x-7)^2}.$$

3 $f(x)$ existe si et seulement si $(-x^2+2)(x+3) \neq 0$, soit si et seulement si $-x^2+2 \neq 0$ et $x+3 \neq 0$, d'où :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-3\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right\}$$

La fonction f est une fonction rationnelle, dérivable sur son ensemble de définition avec, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, où :

$$u(x) = 2x+3 \quad \text{et} \quad v(x) = (-x^2+2)(x+3)\,.$$

On a $u'(x) = 2$ et, en utilisant la formule de dérivation d'un produit, $v'(x) = (-2x)(x+3) + (-x^2+2)(1) = -3x^2-6x+2$.

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(-x^2+2)(x+3)-(2x+3)(-3x^2-6x+2)}{(-x^2+2)^2(x+3)^2} \\ &= \frac{4x^3+15x^2+18x+6}{(-x^2+2)^2(x+3)^2}. \end{aligned}$$

15 Produits et quotients

Énoncé p. 56

Lycée Sophie Germain, Paris

1 f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{x} + (2x-3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 2x - 3}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x-3}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

MÉTHODE

Il est intéressant d'aller jusqu'à la dernière écriture, car elle nous permettra d'étudier le signe de $f'(x)$.

f n'est pas dérivable en 0 : en effet, en revenant à la définition :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2h-3)\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2\sqrt{h}-\frac{3}{\sqrt{h}}\right).$$

Or, lorsque h se rapproche de 0, $\dfrac{3}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand ; on dit que cette quantité tend vers l'infini. La limite du taux de variation n'est donc pas un réel, et donc f n'est pas dérivable en 0.

2 g est définie et dérivable comme quotient de deux fonctions polynômes, lorsque le dénominateur est non nul.
$\Delta = 9$, le trinôme a donc deux racines, 1 et 4.
La fonction f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\ ;4\}$.

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{-3(x^2-5x+4)-(2-3x)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2}\\&=\frac{-3x^2+15x-12-4x+10+6x^2-15x}{(x^2-5x+4)^2}\\&=\frac{3x^2-4x-2}{(x^2-5x+4)^2}.\end{aligned}$$

Là encore, $g'(x)$ est sous une forme où l'étude de son signe sera facile.

3 Le dénominateur de $k(x)$ ne s'annule jamais. Par contre il y a une racine carrée.
Donc k est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}k'(x)&=\frac{\left(\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2+3)-x\sqrt{x}\times 2x}{(x^2+3)^2}\\&=\frac{\left(\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)(x^2+3)-2x^2\sqrt{x}}{(x^2+3)^2}\\&=\frac{\dfrac{3\sqrt{x}}{2}x^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\times 3-2x^2\sqrt{x}}{(x^2+3)^2}\\&=\frac{\sqrt{x}\left(\dfrac{9-x^2}{2}\right)}{(x^2+3)^2}.\end{aligned}$$

La forme obtenue à la fin peut laisser penser que k est dérivable en 0, puisque rien ne s'opposerait à remplacer x par 0 dans cette formule.

COURS INTERROS CORRIGÉS

Il nous faut revenir à la définition :

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(0+h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\sqrt{h}}{h^2+3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h^2+3}=0.$$

Donc la fonction k est bien dérivable en 0, et son ensemble de dérivabilité est finalement $\mathbb{R}_+$.

16 Recherche de fonctions dérivées

Énoncé p. 56

Lycée Richelieu, Rueil-Malmaison

1 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-x+1}$.
La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est dérivable sur son ensemble de définition. Or, le discriminant du trinôme x^2-x+1 est -3.
Donc l'équation $x^2-x+1=0$ n'admet pas de solution réelle.
On en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2-x+1)-(2x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2-2x+2-4x^2+1}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2x+3}{(x^2-x+1)^2}. \end{aligned}$$

2 On doit chercher si le dénominateur s'annule pour certaines valeurs de x.
$x^4-x^2+1=0$ est une équation dite *bicarrée* : pour la résoudre, on pose $X=x^2$, et l'équation devient alors :

$$X^2-X+1=0.$$

Cette équation est celle de la question 1., et nous avons montré qu'elle n'avait pas de solution réelle (discriminant négatif).
Donc l'équation $x^4-x^2+1=0$ n'a pas de solution non plus, et g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=-\frac{4x^3-2x}{(x^4-x^2+1)^2}.$$

3 $h(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. La fonction h est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}\right)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

17 Dérivées pêle-mêle

Énoncé p. 57

Lycée La Source, Meudon

1 $f(x) = -\dfrac{x^5}{5} + 4x^3 + \dfrac{2}{5}x + 2\pi$.

f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On dérive terme à terme pour obtenir :

$$f'(x) = -\frac{5x^4}{5} + 4 \times 3x^2 + \frac{2}{5} \times 1 + 0 = -x^4 + 12x^2 + \frac{2}{5}.$$

2 $f(x) = -\dfrac{5}{x} + 2\sqrt{x}$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car il y a la fonction racine carrée dans son expression. En dérivant terme à terme, on obtient :

$$f'(x) = -\left(-\frac{5}{x^2}\right) + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3 $f(x) = \dfrac{1}{-x+4}$.

f est dérivable sur $]-\infty; 4[$ et sur $]4; +\infty[$, et on remarque que :

$$f(x) = g(-x+4) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, on utilise la formule du cours : $\big(g(ax+b)\big)' = a \times g'(ax+b)$.

$$f'(x) = -1 \times \left(-\frac{1}{(-x+4)^2}\right) = \frac{1}{(-x+4)^2}.$$

4 $f(x) = (4-3x)^4$.

f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(x) = g(4-3x) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = x^4 \text{ et } g'(x) = 4x^3.$$

D'où :

$$f'(x) = -3 \times 4(4-3x)^3 = -12(4-3x)^3.$$

5 $f(x) = \sqrt{-2x+4}$.

f est dérivable sur $]-\infty; 2[$ car $-2x+4 > 0 \iff x < 2$. De plus,

$$f(x) = g(-2x+4) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = \sqrt{x} \text{ et } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

D'où :

$$f'(x) = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{-2x+4}} = -\frac{1}{\sqrt{-2x+4}}.$$

6 $f(x) = \dfrac{1}{(5x+3)^3}$.

f est dérivable sur $\left]-\infty; -\dfrac{3}{5}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{3}{5}; +\infty\right[$. De plus,

$$f(x) = g(5x+3) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3} \text{ et } g'(x) = -\frac{3}{x^4}.$$

CORRIGÉS

D'où :

$$f'(x) = 5 \times \left(-\frac{3}{(5x+3)^4}\right) = -\frac{15}{(5x+3)^4}.$$

7 $f(x) = |5-7x|$. f est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{5}{7}\right[$ et sur $\left]\frac{5}{7}; +\infty\right[$ car $5 - 7x = 0 \iff x = \frac{5}{7}$. De plus,

$$f(x) = g(5-7x) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = |x| \text{ et } g'(x) = \frac{|x|}{x}.$$

D'où :

$$f'(x) = -7 \times \frac{|5-7x|}{5-7x} = -\frac{7|5-7x|}{5-7x}.$$

18 Coût marginal

Énoncé p. 57

Lycée Fénelon, Paris

1
$$\begin{aligned} C_m(x) &= C(x) - C(x-1) \\ &= 180 + 12x - 0{,}01x^2 - \left[180 + 12(x-1) - 0{,}01(x-1)^2\right] \\ &= 180 + 12x - 0{,}01x^2 - 180 - 12x + 12 + 0{,}01x^2 - 0{,}02x + 0{,}01 \\ &= -0{,}02x + 12{,}01. \end{aligned}$$

2 $C'(x) = 12 - 0{,}02x$.

3 L'erreur commise est $C_m(x) - C'(x) = +0{,}01$, et ce, quel que soit l'objet produit.
Donc l'erreur produite lorsqu'on produit le 100e objet est 0,01.

19 Valeur annulant la dérivée

Énoncé p. 57

Lycée Charlemagne, Paris

1 Avec la définition de f, on peut calculer sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

On sait que $f'(a) = 0$, donc on a $u'(a)v(a) - u(a)v'(a) = 0$ (un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul, ce qui est le cas d'après les hypothèses).
On a donc $u'(a)v(a) = u(a)v'(a)$, et en divisant successivement par $v'(a)$ et $v(a)$ (on peut le faire puisque v et v' ne s'annulent pas sur I), on obtient : $\frac{u'(a)}{v'(a)} = \frac{u(a)}{v(a)} = f(a)$ par définition.

2 **(a)** $$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+1)-(x^2+3x-4)(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2x^3+3x^2+2x+3-2x^3-6x^2+8x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-3x^2+10x+3}{(x^2+1)^2}.$$

Cette dérivée s'annule si et seulement si $-3x^2+10x+3=0$.
$\Delta = 100+36 = 136 = 4 \times 34$.
Les racines sont donc $x' = \dfrac{-10-2\sqrt{34}}{-6}$ et $x'' = \dfrac{-10+2\sqrt{34}}{-6}$.
Seule x' est positive, donc c'est elle qui est notée a. $a = \dfrac{5+\sqrt{34}}{3}$.

(b) D'après la question 1, $f(a) = \dfrac{u'(a)}{v'(a)}$ avec $u(x) = x^2+3x-4$ et $v(x) = x^2+1$.

$$f(a) = \frac{2a+3}{2a}$$
$$= \frac{2 \times \frac{5+\sqrt{34}}{3} + 3}{2 \times \frac{5+\sqrt{34}}{3}}$$
$$= \frac{19+2\sqrt{34}}{10+2\sqrt{34}}$$
$$= \frac{(19+2\sqrt{34})(10-2\sqrt{34})}{(10+2\sqrt{34})(10-2\sqrt{34})}$$
$$= \frac{190-4\times 34+20\sqrt{34}-38\sqrt{34}}{100-4\times 34}$$
$$= \frac{54-18\sqrt{34}}{-36}$$
$$= \frac{18\sqrt{34}-54}{36}$$
$$= \frac{\sqrt{34}-3}{2}.$$

20 Position relative

Énoncé p. 58

Lycée Saint-Joseph-Du-Loquidy, Nantes

1 La fonction f est définie pour tous réels x tels que $2x+1 \neq 0$, soit pour $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉS

Le domaine de définition de f est donc :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

2 f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 6x + 4 \qquad v(x) = 2x + 1$$
$$u'(x) = 6 \qquad v'(x) = 2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)(x) \\ &= \frac{6(2x+1) - 2(6x+4)}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{12x + 6 - 12x - 8}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{-2}{(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

3 On a :

- $f(0) = \dfrac{6 \times 0 + 4}{2 \times 0 + 1} = 4$;
- $f'(0) = \dfrac{-2}{(2 \times 0 + 1)^2} = -2.$

Ainsi, une équation de $\mathcal{T}$ est :

$$\begin{aligned} & y = f'(0)(x - 0) + f(0) \\ \iff & y = -2x + 4. \end{aligned}$$

4 La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 a pour coefficient directeur :

$$f'(-1) = \frac{-2}{(2 \times (-1) + 1)^2} = -2.$$

Ainsi, cette tangente a le même coefficient directeur que $\mathcal{T}$; elle sont donc parallèles.

5 **MÉTHODE**

Pour trouver la position relative des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$:

- Si $f(x) - g(x) > 0$ pour $x \in I$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur I ;
- Si $f(x) - g(x) < 0$ pour $x \in I$ alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur I ;
- Si $f(x) - g(x) = 0$ pour $x = a$ alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent au point d'abscisse a.

$$\begin{aligned} f(x)-(-2x+4) &= \frac{6x+4}{2x+1}+2x-4 \\ &= \frac{6x+4}{2x+1}+\frac{(2x-4)(2x+1)}{2x+1} \\ &= \frac{6x+4+4x^2+2x-8x-4}{2x+1} \\ &= \frac{4x^2}{2x+1}. \end{aligned}$$

Or, $4x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x. Ainsi,

$$f(x)-(-2x+4)>0 \iff 2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}$$

et

$$f(x)-(-2x+4)=0 \iff 4x^2=0 \iff x=0.$$

On en conclut alors que :

- $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$;
- $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{T}$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$;
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ se coupent au point d'abscisse 0.

6 Calculons pour $a \neq 0$:

- $$\begin{aligned} f'\left(-\frac{1}{2}+a\right) &= \frac{-2}{\left[2\left(-\frac{1}{2}+a\right)+1\right]^2} \\ &= \frac{-2}{(-1+2a+1)^2}=\frac{-2}{4a^2} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f'\left(-\frac{1}{2}-a\right) &= \frac{-2}{\left[2\left(-\frac{1}{2}-a\right)+1\right]^2} \\ &= \frac{-2}{(-1-2a+1)^2}=\frac{-2}{4a^2} \end{aligned}$$

On a alors :

$$f'\left(-\frac{1}{2}+a\right)=f'\left(-\frac{1}{2}-a\right).$$

Cela signifie donc que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses $-\frac{1}{2}+a$ et $-\frac{1}{2}-a$ ont le même coefficient directeur, et sont alors parallèles.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Chapitre 3

Applications de la dérivation

Plan du chapitre

Exercice type — **Lycée Montaigne, Bordeaux**

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

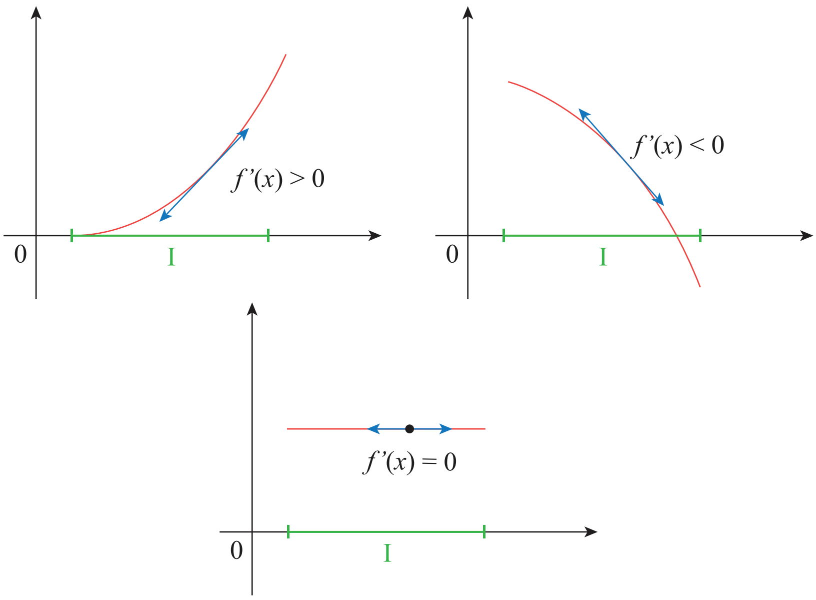
Voir corrigé page 79

1 Signe de la dérivée et sens de variation

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

$$\begin{array}{lcl} f'(x) \geqslant 0 \quad \text{sur } I & \iff & f \text{ est croissante sur } I. \\ f'(x) \leqslant 0 \quad \text{sur } I & \iff & f \text{ est décroissante sur } I. \\ f'(x) = 0 \quad \text{sur } I & \iff & f \text{ constante sur } I. \end{array}$$



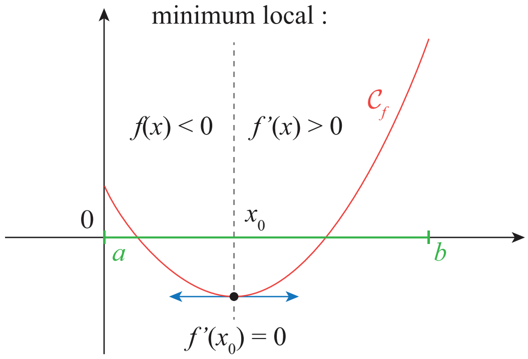
Conséquences : pour connaître le sens de variation d'une fonction, il faut déterminer le ou les signes de sa dérivée :

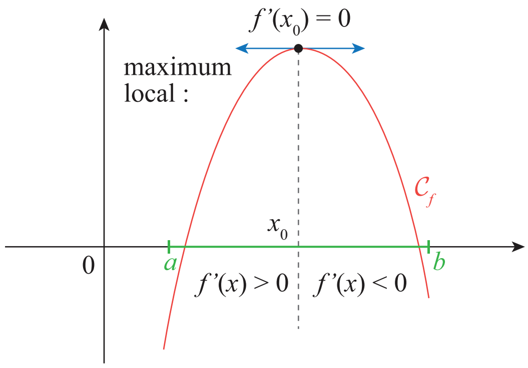
- sur les intervalles où $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante ;
- sur les intervalles où $f'(x) > 0$, f est strictement croissante.

2 Extrema d'une fonction

Soit f une fonction définie sur $[a\ ;\ b]$ et dérivable sur $]a\ ;\ b[$ (noter que l'on exclut les bornes). Soit $x_0 \in [a\ ;\ b]$.

- Si $x_0 \in]a\ ;\ b[$, f admet un extremum local en x_0 si et seulement si f' s'annule et change de signe en x_0.





- Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, il faut regarder le tableau de variation de f pour savoir si elle admet un extremum local en l'un de ces points.

Solution de l'exercice type

Lycée Montaigne, Bordeaux

- $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+2) - x^2 \times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

- On dresse ensuite un tableau de signes de $f'(x)$.

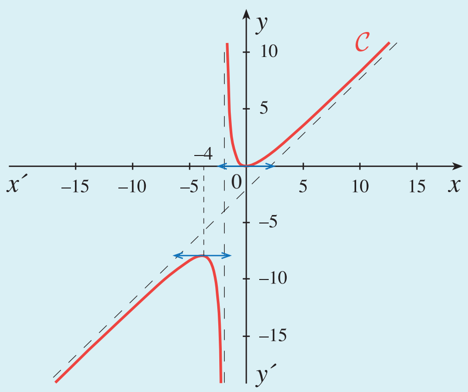
x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

- On dresse alors le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-8	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$f(-4) = \frac{16}{-2} = -8 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

Par curiosité, on peut tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice et vérifier que les variations trouvées sont cohérentes.



Voir énoncé page 77

1 V/F Extremum

10 min Corrigé p. 86

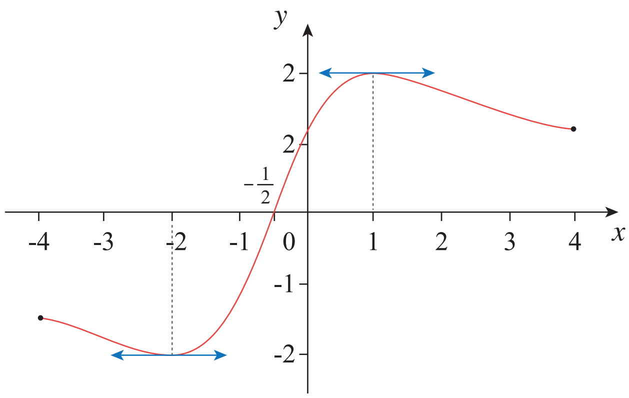
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit f la fonction définie sur $I = [1\,;\,2]$ par $f(x) = x^2 + 1$. La fonction f' ne s'annule pas sur I donc f n'admet pas d'extremum sur I.
2. Si deux fonctions ont la même dérivée, alors elles sont égales.
3. Si $f'(x_0) = 0$, alors la fonction f admet un extremum en x_0.

2 V/F Lecture graphique avec la dérivée

10 min Corrigé p. 86

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-4\,;\,4]$.
La courbe ci-dessous représente la fonction f' dérivée de f.



Dire si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifier dans chaque cas.

1. $f'(-2) = 0$.
2. La fonction f admet un extrémum local en $-\dfrac{1}{2}$.
3. La fonction f est décroissante sur $[1\,;\,4]$.
4. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.

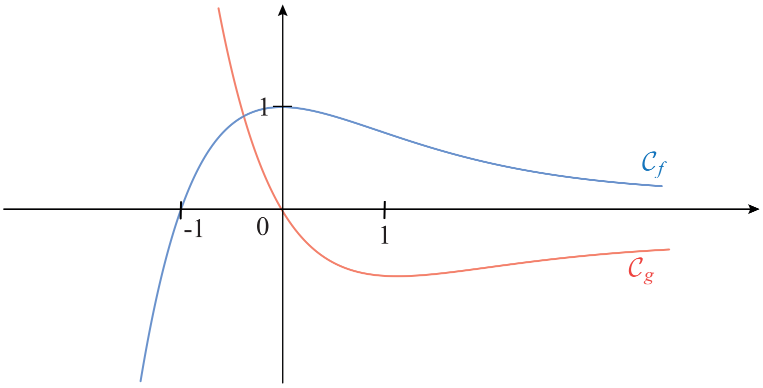
3 Lecture graphique

★ 5 min Corrigé p. 86

Lycée Carnot, Paris

On a représenté page ci-contre la courbe représentative de deux fonctions f et g, l'une des deux fonctions étant la dérivée de l'autre.

Retrouver celle qui est la dérivée de l'autre.



4 Étude d'une fonction cubique ★ 10 min

Corrigé p. 87

Lycée Clémenceau, Nantes

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1.$$

5 Étude d'une fonction rationnelle ★ 10 min

Corrigé p. 88

Lycée Clémenceau, Nantes

Après avoir précisé son domaine de définition, étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}.$$

Optimisation

6 Optimisation en économie ★★ 25 min

Corrigé p. 89

Lycée Odilon Redon, Pauillac

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets.
Les contraintes de fabrication imposent que le nombre x d'objets soit dans l'intervalle $I = [1\ ;\ 100]$.
Chaque objet est vendu 100 euros, et on suppose que tous les objets fabriqués sont vendus. Le coût unitaire de production par objet produit est donné par la fonction U définie sur I par :

$$U(x) = 2x - 83 - \frac{900}{x}.$$

INTERROS

1 **(a)** Écrire un programme en Python permettant de déterminer le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise.

(b) Quel est ce bénéfice maximal ? Pour quelle quantité d'objets vendus et fabriqués est-il réalisé ?

2 **(a)** Déterminer le bénéfice global $B(x)$ réalisé par l'entreprise pour x objets produits et vendus.

(b) Calculer $B'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction B sur I.

(c) Retrouve-t-on le résultat de la question 1 ? Expliquer pourquoi.

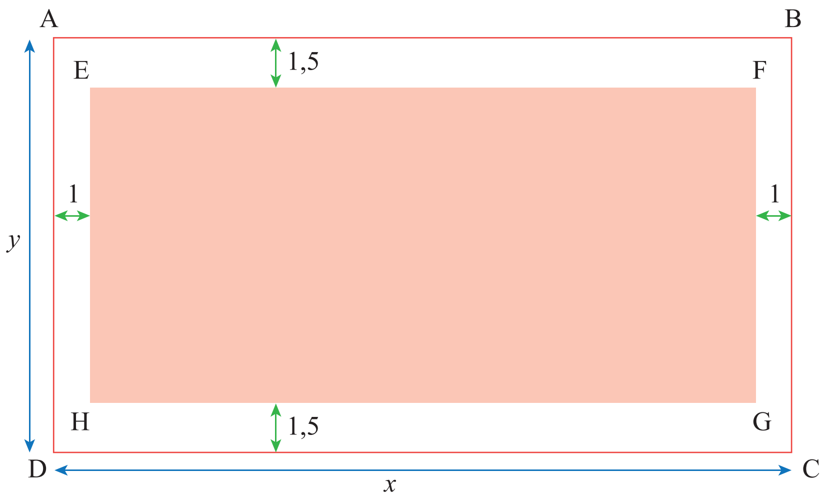
7 Optimisation dans le plan

★★ 25 min Corrigé p. 91

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-Bois

À l'intérieur de la feuille de papier rectangulaire $ABCD$ représentée ci-dessous, on dispose d'une zone rectangulaire imprimable $EFGH$ d'aire 150 cm^2.

On note $x = DC$ et $y = AD$. Les longueurs sont exprimées en cm et on suppose que $x \in [5\ ;\ 22]$ et $y > 3$.



1 Justifier que pour tout x de $[5\ ;\ 22]$, $y = 3 + \dfrac{150}{x-2}$.

2 Cas d'une feuille carrée :

(a) Démontrer que la feuille est carrée si et seulement si :

$$x^2 - 5x - 144 = 0.$$

(b) Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles la feuille est carrée ? Si oui, lesquelles ?

3 Soit g la fonction qui à tout réel x de [5 ; 22] associe l'aire, en cm^2, de la feuille.

(a) Démontrer que $g(x) = \dfrac{3x^2 + 144x}{x - 2}$.

(b) Calculer $g'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de g.

(c) Pour quelle valeur de x l'aire est-elle minimale ? Quelle est cette aire minimale ?

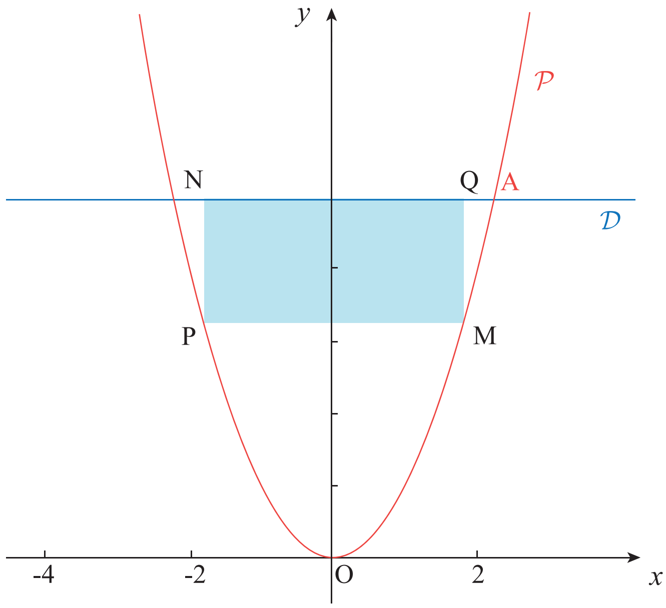
4 Pour quelles valeurs de x l'aire est-elle supérieure ou égale à 224 cm^2 ?

8 Optimisation et parabole

★ 30 min Corrigé p. 92

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

À l'intérieur de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et sous la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 5$, on veut inscrire, comme sur la figure ci-dessous, un rectangle de sorte que l'aire soit la plus grande possible. M et P appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$ et N et Q appartiennent à la droite $\mathcal{D}$. Le point A est l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ d'abscisse positive.



1 Soit x l'abscisse du point M de la parabole situé sur l'arc $\overset{\frown}{OA}$. Exprimer l'aire du rectangle $MPNQ$ en fonction de x.

2 Soit la fonction f qui à x associe l'aire du rectangle $MPNQ$.

(a) Quel est son ensemble de définition ?

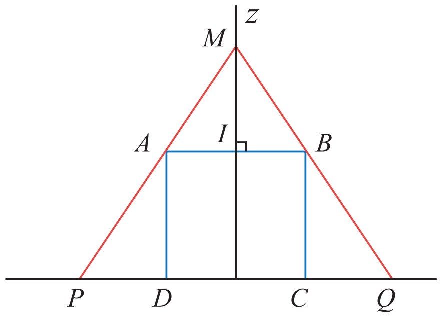
(b) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.

3 Donner la valeur exacte des coordonnées du point M qui correspond à l'aire maximale et donner la valeur exacte de cette aire maximale.

9 Recherche d'une aire minimale ★★ 50 min Corrigé p. 93

Lycée Saint-Louis de Gonzague, Paris

$ABCD$ est un carré du plan tel que $AB = 2$. I est le milieu de $[AB]$.
M est un point variable et différent de I sur la demi-droite $[Iz)$, perpendiculaire à la droite (AB) et représentée ci-dessous.



Les droites (MA) et (MB) coupent la droite (CD) en P et Q respectivement.
On pose $IM = x$. f est la fonction qui, à x, associe l'aire du triangle MPQ.

1 Quel est l'ensemble de définition de f ?

2 **(a)** Montrer que $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x}$.

(b) Où faut-il placer M pour que l'aire du triangle MPQ soit minimale ?

3 Montrer que pour tout réel x de l'ensemble de définition de f,

$$f(x) = x + 4 + \frac{4}{x}.$$

4 Déterminer, par un calcul mental simple, l'arrondi à l'unité de la mesure de l'aire du triangle MPQ lorsque $x = 1\,980$. Justifier.

10 Optimisation dans l'espace ★★★ 25 min Corrigé p. 95

Lycée international Victor Hugo, Colomiers

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 cm.
M est un point de $[AB]$ et I un point de $[AE]$ tels que $AM = EI = x$.
On construit à l'intérieur du cube le parallélépipède rectangle $AMNPIJKL$ tel que $AMNP$ soit un carré.

1 Quelles sont les valeurs possibles de x ?

2 Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du parallélépipède rectangle $AMNPIJKL$ est maximale, et donner ce volume.

11 Recherche des extrema d'une aire ★★★ 45 min Corrigé p. 96

Lycée Montesquieu, Herblay

On découpe une ficelle de longueur l en deux morceaux ; avec l'un d'eux, on forme un triangle équilatéral, et avec l'autre, un carré.

Comment couper la ficelle pour que la somme des aires obtenues soit minimale ? maximale ?

12 Un problème de minimisation d'aire ★★★ 45 min Corrigé p. 97

Lycée Riquet, Saint-Orens

1 Déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $x^3 - 216$.
On pourra remarquer que $216 = 6^3$.

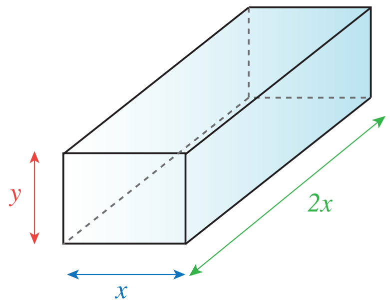
2 Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle dont le volume est égal à 576 mm^3.

On note y la hauteur ; ses autres dimensions sont x et $2x$ (x et y sont en mm).

(a) Calculer y en fonction de x.

(b) Démontrer que la surface totale, en mm^2, de ce solide est donnée par la fonction S définie pour $x \neq 0$ par :

$$S(x) = 4\left(x^2 + \frac{432}{x}\right).$$



(c) Les conditions d'emballage imposent que x soit compris entre 3 et 12 mm. Étudier le sens de variation de S sur l'intervalle [3 ; 12] et en déduire les dimensions du parallélépipède rectangle pour que la surface totale soit minimale.

CORRIGÉS

1 V/F Extremum

Énoncé p. 80

1 *Faux*. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$. On peut donc remarquer que f' ne s'annule pas sur I. Cependant, f est strictement croissante sur I. Elle admet donc un minimum en 1 et un maximum en 2.

2 *Faux*. Considérons, par exemple, les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 13$ et $g(x) = x^2 - 5$.
Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel,
$$f'(x) = g'(x) = 2x\ .$$

3 *Faux*. La fonction $f : x \to x^3$ a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$. f' s'annule en 0 mais ne change pas de signe. La fonction f n'admet pas d'extremum en 0.

2 V/F Lecture graphique avec la dérivée

Énoncé p. 80

1 *Faux*. La dérivée admet une tangente horizontale, donc $f''(-2) = 0$, mais $f'(-2) = -2$.

2 *Vrai*. En effet, pour $x = -\dfrac{1}{2}$, la dérivée s'annule et change de signe. f admet donc un extremum en cette valeur. Il s'agit d'ailleurs d'un minimum, puisque f' est d'abord négative, puis positive, donc f est d'abord décroissante, puis croissante.

3 *Faux*. Sur cet intervalle, la fonction dérivée est positive, donc f est croissante.

4 *Vrai*. $f'(1) = 2$, donc le coefficient directeur de la tangente sera bien 2.

3 Lecture graphique

Énoncé p. 80

Lycée Carnot, Paris

MÉTHODE

Pour retrouver par lecture graphique la courbe de la fonction et celle de sa dérivée, on regarde les signes d'une fonction pour voir s'ils sont en adéquation avec les variations de l'autre fonction.

Regardons le signe de la fonction f :

- $f(x) < 0$ pour $x < -1$;
- $f(x) > 0$ pour $x > -1$;

Ces signes ne correspondent pas aux variations de la fonction g : en effet, g est strictement décroissante pour $x < 1$ (et non uniquement pour $x < -1$).

Il y a donc de fortes chances pour que g soit la dérivée de f. Nous nous en assurons en regardant le signe de $g(x)$:

- pour $x < 0$, $g(x) > 0$ et f est strictement croissante ;
- pour $x > 0$, $g(x) < 0$ et f est strictement décroissante.

On peut alors conclure que $f' = g$.

4 Étude d'une fonction cubique

Énoncé p. 81

Lycée Clémenceau, Nantes

MÉTHODE

Pour étudier les variations d'une fonction, vous pouvez suivre les étapes ci-dessous dans cet ordre :

- on calcule la dérivée ;
- on étudie le signe de la dérivée ;
- si le signe de la dérivée est constant, on conclut sur les variations ; sinon, on construit un tableau de signes et de variations.

Nous devons étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1.$$

- On calcule la dérivée :

$$f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 + 2x - 4 = 2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2).$$

  Remarque : il n'est pas nécessaire de factoriser, mais nous l'avons fait ici pour réduire les coefficients afin de faciliter les futurs calculs. Faire preuve d'anticipation peut quelques fois aider.

- On étudie le signe de la dérivée.
  $f'(x)$ est du signe de $x^2 + x - 2$ (car $2 > 0$ et donc n'influe pas sur le signe de $f'(x)$).
  « $x_1 = 1$ » est une racine évidente de $x^2 + x - 2$ donc l'autre racine vérifie l'égalité :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \iff x_2 = -2.$$

  Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $a = 1$ sur $]-\infty; -2[$ et sur $]1; +\infty[$, et $f'(x) < 0$ entre les racines.

COURS · INTERROS · CORRIGÉS

- Tableau de signes et de variation :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{23}{3}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	

5 Étude d'une fonction rationnelle

Énoncé p. 81

Lycée Clémenceau, Nantes

- Domaine de définition de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$.
  La fonction f est définie pour tous réels x tels que $2x+3 \neq 0$, soit pour $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

  Ainsi, le domaine de définition de f est $\left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$.

- Variations de f.
  f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = x^2 + 1 \qquad u'(x) = 2x$$
$$v(x) = 2x + 3 \qquad v'(x) = 2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)(x) \\ &= \frac{2x(2x+3) - 2(x^2+1)}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 6x - 2x^2 - 2}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x - 2}{(2x+3)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 + 6x - 2$ (car $(2x+3)^2 > 0$), polynôme du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 36 + 16 = 52$$

et dont les racines sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{52}}{4} = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

et sa quantité conjuguée :

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}.$$

On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{2}{3}$		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	‖	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

⚠ ATTENTION

Lorsque f admet au moins une valeur interdite, comme ici, pensez à la prendre en compte dans le tableau final. Il faut donc situer les autres valeurs importantes de x par rapport à ces valeurs interdites.

6 Optimisation en économie

Énoncé p. 81

Lycée Odilon Redon, Pauillac

1 **(a)** Le nombre x d'objets produits et vendus est un nombre entier.

Pour x objets, $x \in [1\ ;\ 100]$, on calcule successivement le coût unitaire `U` donné par l'expression de $U(x)$, le coût total `C=x*U`, la recette réalisée par leur vente `R=100*x`, et enfin le bénéfice `B=R-C`.

Pour chaque valeur de `x`, on teste la valeur trouvée pour `B` et on la conserve dans une variable `M` si elle est plus grande que celle qui y est déjà présente.

On pense aussi à garder de la même façon la valeur de `x` correspondante.

Algorithme

```
M ← 0
S ← 1
Pour x de 1 à 100
     U ← 2x-83-900/x
     C ← x*U
     R ← 100*x
     B ← R-C
     Si M<B
         M ← B
         S ← x
     Fin Si
Fin Pour
Afficher S
Afficher M
```

CORRIGÉS

En Python

```
M = 0
S = 1
for x in range (1,101):
    U = 2*x-83-900/x
    C = x*U
    R = 100*x
    B = R-C
    if M < B:
        M = B
        S = x

print("S = ",S,"et M =",M)
```

(b) En exécutant l'algorithme précédent, on trouve un bénéfice maximal de 5 086 €, obtenus pour $x = 46$ objets fabriqués.

2 **(a)** La recette réalisée pour x objets vendus est $R(x) = 100x$, et donc, le bénéfice global $B(x)$ réalisé par l'entreprise est donné par :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - xU(x) \\ &= 100x - x\left(2x - 83 - \frac{900}{x}\right) \\ &= -2x^2 + 183x + 900. \end{aligned}$$

(b) Pour tout réel $x \in I$, $B'(x) = -4x + 183$. On peut alors dresser le tableau de variation de B :

x	1		$\frac{183}{4}$		100
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$	$5086{,}125$	$\searrow$	

(c) D'après les variations de B, on trouve un bénéfice maximum de 5 086,125 € pour $x = 45{,}75$ objets vendus et fabriqués.

On ne retrouve pas exactement le même résultat que précédemment car l'étude des variations de B donne un maximum pour un x réel, et non entier comme dans l'algorithme.

Comme ici le nombre d'objets x est un nombre entier, et que $B(45) = 5\,085$ et $B(46) = 5\,086$, on en déduit que le maximum de 5 086 € est obtenu pour $x = 46$ objets vendus.

7 Optimisation dans le plan

Énoncé p. 82

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-Bois

1 D'après l'énoncé, l'aire du rectangle $EFGH$ est : $(x-2)(y-3) = 150$, soit $y - 3 = \dfrac{150}{x-2}$.

On a donc bien $y = 3 + \dfrac{150}{x-2}$.

2 **(a)** Pour que la feuille soit carrée, il faut et il suffit que $x = y$, donc il faut et il suffit que $x = \dfrac{3x+144}{x-2}$.

On doit donc avoir $x^2 - 2x = 3x + 144$, donc $x^2 - 5x - 144 = 0$, ce qui est l'équation proposée.

(b) Pour cette équation du second degré, $\Delta = 25 + 4 \times 144 = 601$. Donc il existe a priori deux valeurs de x telles que la feuille soit carrée : $x' = \dfrac{5-\sqrt{601}}{2}$ et $x'' = \dfrac{5+\sqrt{601}}{2}$.
Cependant seule x" est acceptable puisque c'est la seule solution positive de l'équation appartenant à l'intervalle [5 ; 22].
Donc la seule valeur de x pour laquelle la feuille est carrée est $\dfrac{5+\sqrt{601}}{2}$.

3 **(a)**
$$\begin{aligned} g(x) &= xy \\ &= x\left(3 + \frac{150}{x-2}\right) \\ &= x\left(\frac{3(x-2)+150}{x-2}\right) \\ &= \frac{3x^2+144x}{x-2}. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(6x+144)(x-2)-(3x^2+144x)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{6x^2-12x+144x-288-3x^2-144x}{(x-2)^2} \\ &= \frac{3x^2-12x-288}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

$g'(x)$ s'annule si $3x^2 - 12x - 288 = 0$.
$\Delta = 3\,600$. Le trinôme admet donc deux racines :
$$x' = \frac{12-60}{6} = -8 \text{ et } x'' = \frac{12+60}{6} = 12.$$
Le trinôme est du signe de a, donc positif à l'extérieur des racines, et négatif à l'intérieur des racines. Le dénominateur est toujours positif.

$$g(5) = 265 \quad ; \quad g(12) = 216 \quad ; \quad g(22) = 231.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	5		12		22
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	265	$\searrow$	216	$\nearrow$	231

MÉTHODE

On ne développe jamais le dénominateur d'une fonction dérivée car son écriture sous la forme d'un carré nous permet d'affirmer qu'il est positif.

(c) D'après le tableau de variation, l'aire est minimale pour $x = 12$, et elle est alors égale à 216 cm^2.

4 L'aire est supérieure ou égale à 224 si et seulement si :

$$\frac{3x^2 + 144x}{x-2} \geqslant 224 \iff 3x^2 + 144x \geqslant 224(x-2)$$
$$\iff 3x^2 - 80x + 448 \geqslant 0.$$

$\Delta = 1\,024$. Les racines du trinôme sont donc : $x' = \dfrac{80-32}{6} = 8$ et $x'' = \dfrac{80+32}{6} = \dfrac{56}{3}$. Le trinôme est du signe de a (donc positif) à l'extérieur des racines.

x étant un nombre de l'intervalle $[5\,;22]$, l'aire de $MNPQ$ est donc supérieure ou égale à 224 si x est supérieur ou égal à $\dfrac{56}{3}$, ou si x est inférieur au égal à 8.

L'ensemble solution est donc $[5\,;8] \cup \left[\dfrac{56}{3}\,;22\right]$.

8 Optimisation et parabole

Énoncé p. 83

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

1 L'abscisse de M est x donc son ordonnée est x^2.

L'abscisse de Q est la même que celle de M, et son ordonnée est 5.

Par symétrie, l'abscisse de P est $-x$, son ordonnée est x^2, et l'abscisse de N est $-x$, et son ordonnée 5.

On a donc $PM = x - (-x) = 2x$ et $MQ = 5 - x^2$.

L'aire du rectangle $MPNQ$ est donc $2x(5 - x^2) = 10x - 2x^3$.

2 $f(x) = 10x - 2x^3$.

(a) x est positif et est au plus égal à l'abscisse de A (qui est l'antécédent de 5 par la fonction carré).
Donc $\mathcal{D}_f = \left[0\,;\sqrt{5}\right]$.

(b) $f'(x) = 10 - 6x^2$

$$= -2(3x^2 - 5)$$

$$= -2\left(\sqrt{3}x - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}x + \sqrt{5}\right).$$

Le trinôme est du signe du coefficient de x^2 (donc négatif) à l'extérieur de ses racines $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ et $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

De plus,

- $f(0) = 0$;
- $f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{5}{3}}\left(5 - \frac{5}{3}\right) = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$;
- $f\left(\sqrt{5}\right) = 0$.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\sqrt{5}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\searrow$ 0

3 D'après le tableau de variation ci-dessus, le point M correspondant à l'aire maximale a pour abscisse $\sqrt{\frac{5}{3}}$, donc son ordonnée est $\frac{5}{3}$.
La valeur exacte de l'aire maximale est, toujours d'après le tableau de variation : $\frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

9 Recherche d'une aire minimale

Énoncé p. 84

Lycée Saint-Louis de Gonzague, Paris

1 Le point M appartient à la demi-droite $[Iz)$ et il est différent de I, donc $IM > 0$. L'ensemble de définition de la fonction f est $]0\,;+\infty[$.

2 **(a)** Soit H le point d'intersection des droites (IM) et (DC). Comme $ABCD$ est un carré, les droites (AB) et (DC) sont parallèles donc la droite (IM) qui est perpendiculaire à (AB) est aussi perpendiculaire à (DC).
On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{2}PQ \times MH = PH \times MH.$$

Or, le point I appartient au segment $[MH]$ donc :

$$MH = MI + IH = 2 + x.$$

En appliquant le théorème de Thalès au triangle MPH, on obtient :

$$\frac{MI}{MH} = \frac{AI}{PH},$$

soit :

$$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{PH}.$$

On en déduit que :

$$PH = \frac{x+2}{x}.$$

En remplaçant alors dans l'expression de $f(x)$, on obtient :

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x}.$$

(b) Pour déterminer l'aire minimale du triangle MPQ, on étudie les variations de la fonction f. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x+2)^2}{x^2},$$

soit :

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

Comme $x+2$ et x^2 sont strictement positifs sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $x-2$. Il en résulte que f est strictement décroissante sur $]0\,;2]$ et strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$.
Donc la fonction f admet un minimum pour $x = 2$.
L'aire du triangle MPQ est minimale lorsque $IM = 2$.

3 Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$x + 4 + \frac{4}{x} = \frac{x(x+4)+4}{x} = \frac{x^2+4x+4}{x} = \frac{(x+2)^2}{x} = f(x).$$

4 Pour déterminer l'arrondi à l'unité de la mesure de l'aire du triangle MPQ lorsque $x = 1\,980$, on utilise l'écriture :

$$f(x) = x + 4 + \frac{4}{x}.$$

On a alors :

$$f(1\,980) = 1\,984 + \frac{4}{1\,980}.$$

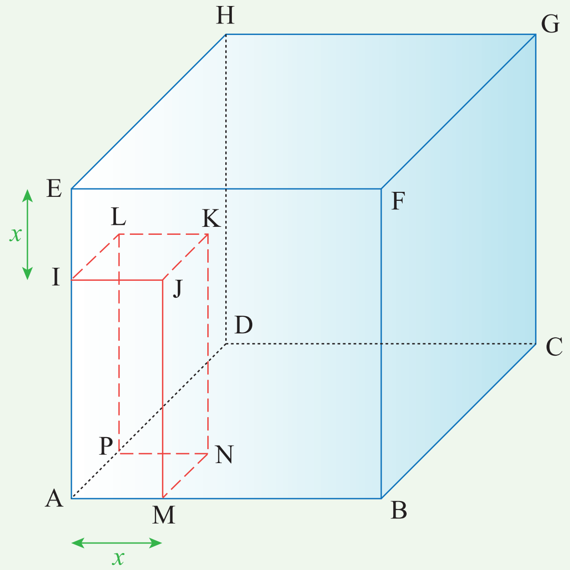
On en déduit que l'arrondi cherché est 1 984.

10 Optimisation dans l'espace

Énoncé p. 84

Lycée international Victor Hugo, Colomiers

Voici la figure correspondant à l'énoncé :



1 x est une longueur donc $x \geqslant 0$. Par ailleurs, le côté du cube étant 6, $x \leqslant 6$.
Donc $0 \leqslant x \leqslant 6$.

2 **MÉTHODE**

Aucune indication n'est donnée pour traiter cette question, et c'est volontaire. Le mot *maximale* doit faire penser à *optimisation*, et cela doit faire penser à sens de variation.

On va donc chercher à exprimer en fonction de x le volume du parallélépipède rectangle $AMNIJKL$, et on étudiera les variations de cette fonction.
La base de ce parallélépipède a pour aire x^2, et la hauteur est $6 - x$, donc son volume est $V(x) = x^2(6 - x) = -x^3 + 6x^2$.
$V'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$.
$V'(x)$ est un trinôme du second degré dont on connaît les racines (0 et 4), donc on connaît son signe. $V(0) = 0$; $V(4) = 32$; $V(6) = 0$.
On obtient donc le tableau de variation suivant pour la fonction $V(x)$:

x	0		4		6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$	0	↗	32	↘	0

D'après ce tableau de variation, la valeur de x pour laquelle le volume est maximal est 4, et le volume maximal est 32 (le tout exprimé en cm et cm^3).

CORRIGÉS

11 Recherche des extrema d'une aire

Énoncé p. 85

Lycée Montesquieu, Herblay

Soit ℓ la longueur de la ficelle, x celle du côté du carré et y celle du côté du triangle équilatéral.

On a les conditions : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et, comme $\ell = 4x + 3y$, $\dfrac{\ell}{4} \geqslant x$.
La somme des aires du carré et du triangle est :

$$S(x) = x^2 + \frac{1}{2}y\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right) = x^2 + \frac{y^2\sqrt{3}}{4}.$$

En effet, on démontre facilement par le théorème de Pythagore ou la trigonométrie que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté y mesure $\dfrac{y\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Or } y = \frac{\ell - 4x}{3}, \text{ donc : } S(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{\ell - 4x}{3}\right]^2$$
$$= x^2\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) - 2x\ell\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{36}.$$

Étudions alors les variations de la fonction S définie sur $\left[0\,;\dfrac{\ell}{4}\right]$ par :

$$S(x) = x^2\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) - 2x\ell\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{36}.$$

S est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\ell}{4}\right]$ en tant que fonction polynôme. Pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\ell}{4}\right]$, on a : $S'(x) = 2x\left(1 + \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right) - 2\ell\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\left(9 + 4\sqrt{3}\right) = 2\ell\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\ell\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\ell}{3\sqrt{3} + 4}.$$

On vérifie que $\dfrac{\ell}{3\sqrt{3} + 4}$ est dans l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\ell}{4}\right]$.

$S'(x) \geqslant 0$ équivaut à :

$$2x\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) - 2\ell\frac{\sqrt{3}}{9} \geqslant 0, \text{ soit : } x \geqslant \frac{\ell}{3\sqrt{3} + 4}.$$

La fonction S est donc décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{\ell}{3\sqrt{3}+4}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{\ell}{3\sqrt{3}+4}\,;\dfrac{\ell}{4}\right]$.

On en déduit que la fonction S admet un minimum en $\dfrac{\ell}{3\sqrt{3} + 4}$.

La somme des aires du carré et du triangle est minimale lorsque $x = \dfrac{\ell}{3\sqrt{3}+4}$.

Pour savoir pour quelle valeur de x la somme des aires est maximale, il faut comparer les valeurs de $S(0)$ et de $S\left(\dfrac{\ell}{4}\right)$.

On a :

$$S(0) = \frac{\ell^2}{12\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad S\left(\frac{\ell}{4}\right) = \frac{\ell^2}{16}.$$

Or $16 < 12\sqrt{3}$ donc :

$$S\left(\frac{\ell}{4}\right) > S(0).$$

On en déduit que la somme des aires est maximale lorsque $x = \dfrac{\ell}{4}$, c'est-à-dire lorsque l'on garde toute la ficelle pour faire le carré.

12 Un problème de minimisation d'aire

Énoncé p. 85

Lycée Riquet, Saint-Orens

1 $f : x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc pour tout $x > 6$, $x^3 > 6^3$ soit $x^3 > 216$. On en déduit alors que $x^3 - 216 > 0$ pour $x > 6$.
Pour tout $x < 6$, $x^3 < 6^3$ soit $x^3 < 216$. On en déduit alors que $x^3 - 216 < 0$.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x) = x^3$		$\nearrow$	$6^3 = 216$	$\nearrow$	
$x^3 - 216$		$-$	0	$+$	

2 **(a)** Le volume du parallélépipède est $x \times 2x \times y$.
On a donc $2x^2 y = 576$. On en déduit que $y = \dfrac{288}{x^2}$.

(b) La surface totale de ce solide est $S(x) = 2xy + 2y(2x) + 2(2x)x$ soit $S(x) = 6xy + 4x^2$.
On remplace alors y par la valeur trouvée à la question précédente.

$$S(x) = 4x^2 + 6x\left(\frac{288}{x^2}\right) = 4\left(x^2 + \frac{432}{x}\right).$$

(c) La fonction S est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $[3\ ;\ 12]$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

Pour tout x de [3 ; 12] :

$$S'(x) = 4\left(2x - \frac{432}{x^2}\right).$$

Soit après réduction au même dénominateur et factorisation :

$$S'(x) = 8\left(\frac{x^3 - 216}{x^2}\right).$$

Sur l'intervalle [3 ; 12], $\frac{8}{x^2}$ est strictement positif donc $S'(x)$ est du signe de $x^3 - 216$, qui a été étudié dans la question 1.

Il en résulte que $S'(x) > 0$ sur]6 ; 12], donc S est strictement croissante sur]6 ; 12] et $S'(x) < 0$ sur [3 ; 6[. Ainsi, S est strictement décroissante sur [3 ; 6[.

S admet donc un minimum en $x = 6$.

On en déduit que les dimensions du parallélépipède pour que la surface totale soit minimale sont 6 mm, 12 mm et $\frac{288}{36}$ soit 8 mm.

Chapitre 4

Fonction exponentielle

Plan du chapitre

Retrouvez ce cours en vidéo.

1 Définition et propriétés algébriques

Exercice type 1 — Lycée Guynemer, Compiègne

1 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}.$$

Retrouvez le corrigé de cette question en vidéo.

2 Résoudre l'équation :

$$e^{3x^2} e^{-6x} = \left(e^{2-x}\right)^2.$$

3 Résoudre l'inéquation :

$$e^{3x+2} > -2.$$

Voir corrigé page 101

1.1 Définition

Théorème 1

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 1$ et, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.

Définition 1

On appelle *fonction exponentielle* la fonction notée exp telle que :

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

COURS

1.2 Propriétés algébriques

Propriété 1

Pour tous réels x et y,

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad \text{et} \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Conséquence : en prenant $y = -x$, la première égalité donne :

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad \text{soit} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

1.3 Notation e^x

Les égalités de la propriété 1 sont identiques à celles vues au collège sur les puissances. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous allons désormais convenir de la notation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Ainsi, les égalités précédentes s'écrivent :

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y \quad , \quad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

De plus,

$$\mathrm{e}^0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x.$$

1.4 Le nombre e

Définition 2 : nombre d'Euler, ou constante de Neper

On note :

$$\mathrm{e} = \mathrm{e}^1.$$

On a l'approximation :

$$\mathrm{e} \approx 2{,}718.$$

Remarque : il existe plusieurs fonctions exponentielles. Celle que nous étudions dans ce chapitre est appelée la *fonction exponentielle de base* e.

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Guynemer, Compiègne

1 On a : $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$,

et aussi : $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$.

2 $e^{3x^2}e^{-6x}=\left(e^{2-x}\right)^2 \iff e^{3x^2-6x}=e^{2(2-x)}$.
Or, $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$ donc :

$$3x^2-6x=4-2x\ ,$$

c'est-à-dire :

$$3x^2-4x-4=0.$$

Cette équation du second degré de discriminant $\Delta=64$ admet deux solutions : $-\dfrac{2}{3}$ et 2, qui sont donc aussi les solutions de l'équation initiale.

3 $e^{3x+2}>-2$.
Cette inégalité est toujours vérifiée car pour tout réel a, $e^a>0$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

Voir énoncé page 99

2 Étude de la fonction exponentielle

Exercice type 2 — Lycée Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x)=(2-x)e^x.$$

1 Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(1-x)e^x$.

2 En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Voir corrigé page 103

2.1 Signe et sens de variation

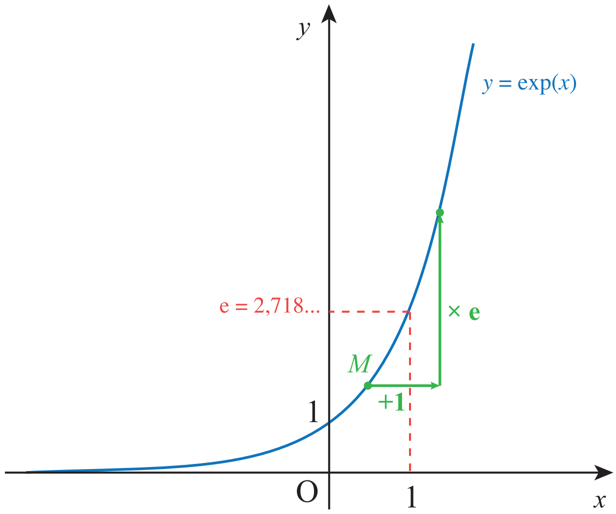
Propriétés 2

Pour tout réel x, $e^x>0$.
La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

COURS

La courbe représentative de la fonction exponentielle est la suivante :



Remarque : si on considère un point M, d'abscisse x, sur cette courbe, alors le point d'abscisse $x+1$ est obtenu en multipliant celle de M par e.

2.2 Conséquences

Propriétés 3

Pour tous réels x et y,

- $e^x = e^y \iff x = y$;
- $e^x > e^y \iff x > y$;
- $e^x < e^y \iff x < y$.

Exemple : on souhaite résoudre l'inéquation $e^{3x+1} > e^{5x+7}$:

$$\begin{aligned} e^{3x+1} > e^{5x+7} &\iff 3x+1 > 5x+7 \\ &\iff -2x > 6 \\ &\iff x < -3. \end{aligned}$$

2.3 Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$

Propriété 4

Pour tous réels a et b,

$$\left(e^{ax+b}\right)' = a e^{ax+b}.$$

Exemple : soit $f(x) = \mathrm{e}^{-3x+5}$.

Alors,

$$f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x+5}.$$

$\mathrm{e}^{-3x+5} > 0$ sur $\mathbb{R}$ (car une exponentielle est toujours strictement positive, quel que soit ce qui est mis en exposant), donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

On on déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

1 f est de la forme $u \times v$ avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = 2 - x & v(x) = \mathrm{e}^x \\ u'(x) = -1 & v'(x) = \mathrm{e}^x \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}x \\ &= (-1 + 2 - x)\mathrm{e}^x \\ &= (1-x)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

2 On déduit de la question précédente que $f'(x)$ est du signe de $1 - x$, car $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$f(1) = (2-1) \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e	$\searrow$	

Remarque : même si ce n'est pas précisé dans l'énoncé, il est toujours intéressant de calculer la valeur de l'extremum (quand il existe) et de l'insérer dans le tableau de variation.

Voir énoncé page 101

INTERROS

1 V/F Fonction exponentielle

10 min Corrigé p. 112

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Pour tous réels a et b, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
2. Le nombre $-e^{-x}$ est toujours strictement positif.
3. La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1.
4. La tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.

2 QCM Dérivation

10 min Corrigé p. 112

Pour chacune des questions suivantes, une seule des propositions est exacte. Laquelle ?

1. La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + 3x + e^{-x}$ est :
   - a $x \mapsto e^x(x+1) + 3 + e^{-x}$
   - b $x \mapsto e^x + 3 - e^{-x}$
   - c $x \mapsto e^x(x+1) + 3 - e^{-x}$
2. La dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)e^{3-5x}$ est :
   - a $x \mapsto -(5x+4)e^{3-5x}$
   - b $x \mapsto -5e^{3-5x}$
   - c $x \mapsto (3x+4)e^{3-5x}$
3. Soient f et g définies par $f(x) = x^2e^x$ et $g(x) = xe^x$. Les courbes représentatives de f et g ont, pour deux valeurs de x :
   - a des tangentes communes
   - b des tangentes parallèles
   - c ni l'un ni l'autre
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{0,5x+2}$. La tangente à sa courbe représentative dans un repère au point d'abscisse 0 a pour équation :
   - a $y = 0{,}5x + 5$
   - b $y = 0{,}5e^2x$
   - c $y = 0{,}5e^2x + e^2$

3 QCM Connaissances générales

15 min Corrigé p. 113

Pour chaque affirmation, une seule réponse est juste. Pour chaque question donner la lettre correspondant à la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

1 L'expression $g(x) = \dfrac{e^x - e^{2x}}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est :

a toujours positive **b** toujours négative

c du signe de $-x$ **d** du signe de x

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Parmi les expressions suivantes, la seule qui n'est pas égale à $f(x)$ est :

a $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ **b** $1 - \dfrac{2}{e^{2x} + 1}$

c $\dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ **d** $\dfrac{e^{2x} - 1}{1 + e^{-2x}}$

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

a La représentation graphique de f admet une tangente d'équation $y = 2 - x$.

b $f'(x) = (x+3)e^{-x}$.

c Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = x + 2$.

d $f'(-1) = 2e$.

4 L'équation $e^{-x} + e^x = m$, d'inconnue réelle x, où m est un nombre réel :

a a toujours une solution **b** a au moins deux solutions

c n'a jamais de solution **d** a au plus deux solutions

4 QCM Propriétés de la fonction exponentielle

20 min Corrigé p. 114

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Laquelle ?

1 Pour tout nombre réel x non nul, $2 - \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ est égal à :

a $\dfrac{3e^{-x} - 4}{e^{-x} - 1}$ **b** $\dfrac{1}{1 - e^x}$

c Aucune de ces deux réponses.

2 L'équation $e^{2x} - \left(e + \dfrac{1}{e}\right)e^x + 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a une solution **b** deux solutions

c aucune solution

INTERROS

3 L'inéquation $e^{2x} - (e+1)e^x + e < 0$ admet pour ensemble solution :

a $\varnothing$
b $]0\,;1[$
c $]1\,;e[$
d $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$

4 Les nombres $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ sont, pour tout x réel :

a égaux
b inverses
c opposés

Propriétés algébriques, équations et inéquations

5 Propriétés algébriques

★ 5 min Corrigé p. 115

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Simplifier et factoriser si possible les expressions suivantes :

$$A = \frac{e^{x+y}}{e^x} - e^{2y} \qquad B = \frac{e^{2x+2y}}{e^x e^{2y}}.$$

6 Équation

★ 5 min Corrigé p. 115

Lycée Lacordaire, Marseille

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{e^{3x}e^x}{e^{2x}} - e^x = 0.$$

7 Équation

★ 5 min Corrigé p. 116

Lycée Le Corbusier, Poissy

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$e^{3x-1} \times e^{x+2} = 1.$$

8 Inéquations

★★ 15 min Corrigé p. 116

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $e^{3x-5} \leqslant e^{-x^2+7}$

2 $e^{3x-1} > e^{5x-4}$

3 $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Études de fonctions

9 Dérivée et tangente

★ 10 min Corrigé p. 117

Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2 - x)e^x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **(a)** On note f' la fonction dérivée de f.
   Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = (1 - x)e^x$.
   (b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

10 Extremum et position relative

★ 15 min Corrigé p. 118

Le Chartreux, Lyon

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - 2x + e^{2x}.$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser la nature et la valeur de l'extremum de la fonction g sur $\mathbb{R}$, et en quelle valeur il est atteint.
3. En déduire que pour tout réel x, $g(x) > 0$.
4. En déduire alors la position relative de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 1$ et de la courbe Γ d'équation $y = e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

11 Positivité d'une fonction

★ 20 min Corrigé p. 119

Lycée Descartes, Cournon

Soit a un nombre réel. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + a$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer les valeurs de a telles que, pour tout x, $f(x) \geqslant 0$.

12 Conjecture et preuve

★ 25 min Corrigé p. 119

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

INTERROS

1 Tracer la fonction sur la calculatrice et faire une conjecture concernant un encadrement possible de $f(x)$ pour tout x.

2 Prouver que, pour tout x, $-1 < f(x) < 1$.

3 Dresser le tableau de variation de f.

4 Donner, à 10^{-2} près, en expliquant votre méthode, la plus petite valeur de x telle que $1 - f(x) < 0{,}001$.

13 Cosinus et sinus hyperboliques

★ 45 min Corrigé p. 120

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1 Dresser le tableau des signes de ces fonctions.

2 Calculer ch' et sh'.

Quel lien y a-t-il entre ch' et sh ? Entre sh' et ch ?

3 Dresser les tableaux de variations de ch et sh.

4 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

(a) En dérivant $f(x) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$.

(b) Par un calcul algébrique.

5 Montrer comme en 4.a ou 4.b (au choix) que :

(a) $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch} x \times \operatorname{sh} x$

(b) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

6 Donner une représentation graphique de ch et de sh.

14 Décroissance radioactive

★★ 10 min Corrigé p. 122

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Le taux d'un élément radioactif diminue de 30% en 1 500 ans.
On sait de plus que ce taux est égal à $e^{-\lambda t}$ après t années, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de la valeur λ.

15 Algorithme ★★ 20 min

Corrigé p. 123

Lycée Buffon, Paris

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Entrée
     a et n sont des nombres
     Saisir a
     n ← 0
Traitement
     Tant que exp(-n) ⩾ a
         n ← n+1
     Fin du Tant que
Sortie
     Afficher n
```

1. Qu'affiche cet algorithme si on entre $a = 0{,}3$?
2. Donner si possible une valeur de a pour laquelle l'algorithme affiche 0.
3. Qu'affiche l'algorithme si on entre $a = 10^{-20}$?

16 Fonction exponentielle et algorithme ★★ 30 min

Corrigé p. 124

Cité scolaire internationale, Grenoble

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{0{,}25x} - 5\ ,$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **(a)** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Existe-t-il un point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ?
2. On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
     P est un réel strictement positif
Initialisation
     X ← 0 et Y ← -1
Traitement
     Tant que Y < 0
         X ← X + P
         Y ← f(X)
         (f étant la fonction définie précédemment)
     Fin de Tant que
Sortie
     Afficher X-P et X
```

INTERROS

(a) On entre $P = 0,1$. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?
(b) Que fait cet algorithme ?
(c) On fait fonctionner l'algorithme avec une certaine valeur de P et on obtient en sortie les valeurs 0,892 et 0,893.
Quelle valeur de P avait-on choisi en entrée ?
(d) On entre une valeur de P égale à 0,000 1. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

17 À l'aide du graphique

★★★ 40 min Corrigé p. 124

Lycée Corneille, La-Celle-Saint-Cloud

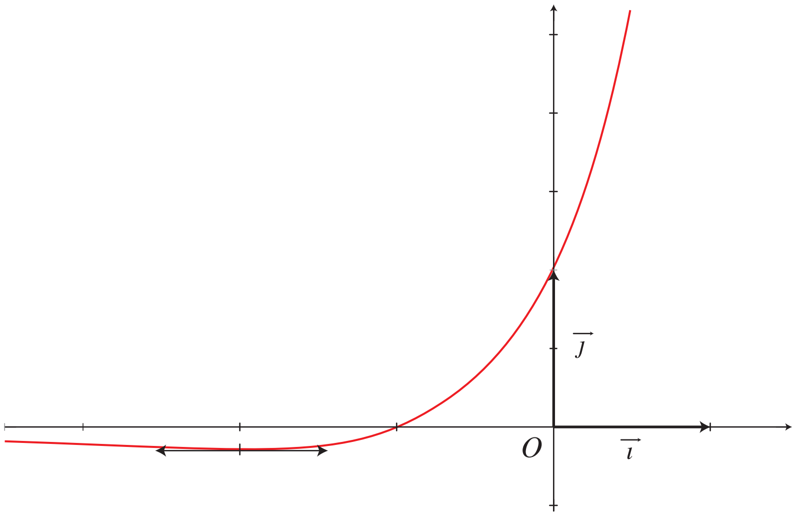
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

La courbe $\mathcal{C}$ page ci-contre représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x,$$

où a et b sont deux nombres que l'on se propose de déterminer.

La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0\,;1)$ et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse -2.



1 Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.

2 À l'aide des informations de l'énoncé, déterminer les valeurs de a et b.

3 Étudier les variations de la fonction f. Dresser son tableau de variations sur l'intervalle $[-3\,;1]$.

4 Discuter, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation sur l'intervalle $[-3\,;1]$:

$$(x+1)\mathrm{e}^x = m.$$

Aide : on raisonnera graphiquement.

18 Coût moyen minimal

★★★ 80 min Corrigé p. 126

Lycée Chaptal, Paris

Une entreprise achète une machine 30 000 euros. Elle peut la revendre au bout de t années au prix de :

$$v(t) = \frac{30}{0{,}5t+1} \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 8\,,$$

où t est exprimé en années et $v(t)$ en milliers d'euros (k€).

1 (a) Au bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50 % de sa valeur d'achat ?

(b) Quelle est sa valeur de revente au bout de 4 ans ?

(c) La différence, exprimée en k€, entre le prix d'achat de la machine et son prix de revente au bout de t années est : $D(t) = 30 - v(t)$.

Montrer que D est une fonction croissante sur l'intervalle $[0\,;\ 8]$.

2 On peut exprimer le coût total d'entretien de la machine en k€, pour une durée de t années d'utilisation, par :

$$E(t) = 2{,}5\,\mathrm{e}^{0{,}4\,t} - t - 2{,}5.$$

(a) Calculer $E'(t)$, où E' désigne la fonction dérivée de E.

(b) Montrer que E est une fonction croissante sur l'intervalle $[0\,;8]$.

3 (a) Vérifier que le coût d'usage total, en k€, de cette machine est :

$$C(t) = D(t) + E(t) = 27{,}5 - \frac{30}{0{,}5t+1} + 2{,}5\mathrm{e}^{0{,}4t} - t.$$

(b) Déduire des questions précédentes le sens de variation de C sur $[0\,;8]$.

(c) Tracer la courbe représentative Γ de C, dans un plan muni d'un repère orthogonal, avec pour unités : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 4 k€ sur l'axe des ordonnées.

On pourra utiliser le tableau de valeurs suivant :

t	0	1	2	3	4
$C(t)$	0	10,23	16,06	20,80	25,88

t	4,5	5	6	7	8
$C(t)$	28,90	32,40	41,56	54,94	74,83

4 Le coût moyen d'utilisation, en k€ et au bout de t années, est égal à :

$$U(t) = \frac{C(t)}{t} \text{ avec } 1 \leqslant t \leq 8.$$

(a) Soit M le point d'abscisse t de la courbe Γ. Montrer que $U(t)$ est le coefficient directeur de la droite (OM).

(b) Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle $U(t)$ est minimal.

CORRIGÉS

1 V/F Fonction exponentielle

Énoncé p. 104

1 Vrai. Il s'agit d'une formule du cours.

2 Faux. D'après les propriétés de la fonction exponentielle le réel e^{-x} est toujours strictement positif donc $-\mathrm{e}^{-x}$ est toujours strictement négatif.

3 Faux. La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 et non au point d'abscisse 1.

4 Vrai. Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe au point d'abscisse 0 est $f'(0)$. Or, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ donc $f'(0) = -\dfrac{1}{4}$. La tangente $\mathcal{T}$ et la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$ sont deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées et de même coefficient directeur donc elles sont parallèles.

2 QCM Dérivation

Énoncé p. 104

1 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On a : $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + 3 - \mathrm{e}^{-x}$.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. g est un produit de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{3-5x}$. Donc $g' = u'v + uv'$.
$u'(x) = 1$ et $v'(x) = -5\mathrm{e}^{3-5x}$ donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{3-5x} + (x+1) \times (-5)\mathrm{e}^{3-5x} \\ &= \left[1 - 5(x+1)\right]\mathrm{e}^{3-5x} \\ &= (1 - 5x - 5)\mathrm{e}^{3-5x} \\ &= (-5x - 4)\mathrm{e}^{3-5x} \\ &= -(5x+4)\mathrm{e}^{3-5x}. \end{aligned}$$

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a :

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x(x+2)\mathrm{e}^x.$$
$$g'(x) = 1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x.$$
$$\begin{aligned} f'(x) = g'(x) &\iff x(x+2)\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x \\ &\iff x(x+2) = x + 1 \text{ car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\ &\iff x^2 + x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Les solutions de cette dernière équation sont :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

En x_1, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f est :

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

En x_1, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g est :

$$y = g'(x_1)(x - x_1) + g(x_1).$$

Après calculs, on voit que les deux équations ne sont pas équivalentes, donc les tangentes sont distinctes, tout en ayant des coefficients directeurs égaux. Elles sont donc strictement parallèles.

Ce raisonnement est aussi valable en x_2.

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $f(0) = e^2$.
$f'(x) = 0{,}5e^{0{,}5x+2}$. Donc $f'(0) = 0{,}5e^2$.
La tangente a donc pour équation $y = 0{,}5e^2(x - 0) + e^2$, soit $y = 0{,}5e^2 x + e^2$.

3 QCM Connaissances générales

Énoncé p. 105

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $g(x) = \dfrac{e^x - e^{2x}}{x} = \dfrac{e^x\,(1 - e^x)}{x}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$1 - e^x$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	$\|$	$-$	

On constate que $g(x)$ est toujours négative.

2 Réponse $\boxed{\text{d}}$.

$$\frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{-x}\left(e^{3x} - e^x\right)}{e^{-x}\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{e^{3x} - e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

Cette expression est égale à $f(x)$ si $e^x - e^{-x} = e^{3x} - e^x$.

Or, il existe au moins une valeur de x pour laquelle cette égalité n'est pas vérifiée (par exemple pour $x = 1$, on vérifie facilement que $e - e^{-1} \neq e^3 - e$). La proposition $\boxed{\text{d}}$ est donc fausse.

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $f'(x) = e^{-x}(1 - x - 2) = e^{-x}(-1 - x)$.

On a alors $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$. Donc la droite d'équation $y = -x + 2$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Si on ne pense pas au point d'abscisse 0, il est facile de montrer, une fois la dérivée calculée, que les 3 autres propositions sont fausses.

4 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Comme $e^x \neq 0$, en multipliant les deux termes de l'équation par e^x, on obtient une équation équivalente :

$$\left(e^x\right)^2 + 1 = me^x.$$

CORRIGÉS

Puis en posant $X = \mathrm{e}^x$, on a une équation du second degré :

$$X^2 - mX + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$. Selon les valeurs de m, l'équation en X a donc zéro, une ou deux solutions (cela élimine donc les réponses $\boxed{\text{a}}$ et $\boxed{\text{b}}$). Pour avoir une solution en x, il faut de plus que l'équation en X ait une solution positive.

Il est facile de voir que pour $m = 2$, l'équation $X^2 - 2X + 1 = 0$ admet « 1 » comme racine, donc au moins dans ce cas, l'équation $\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x = m$ admet une solution, ce qui élimine la réponse $\boxed{\text{c}}$.

4 QCM Propriétés de la fonction exponentielle

Énoncé p. 105

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{\mathrm{e}^{-x} - 2}{\mathrm{e}^{-x} - 1} &= \frac{2\mathrm{e}^{-x} - 2 - \mathrm{e}^{-x} + 2}{\mathrm{e}^{-x} - 1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} - 1} \\ &= \frac{1}{1 - \mathrm{e}^x} \qquad \text{en multipliant haut et bas par } \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

2 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On pose $\mathrm{e}^x = X$.

L'équation devient alors $X^2 - \left(\mathrm{e} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) X + 1 = 0$. On calcule :

$$\Delta = \left(\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 - 4 = \mathrm{e}^2 + 2 + \frac{1}{\mathrm{e}^2} - 4 = \mathrm{e}^2 - 2 + \frac{1}{\mathrm{e}^2} = \left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2.$$

Le discriminant est strictement positif et les deux solutions sont :

$$X_1 = \frac{\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}}{2} = \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} + \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2} = \mathrm{e}.$$

On a donc soit $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow x = -1$, soit $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = 1$.

L'équation admet donc deux solutions, 1 et -1.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Ici aussi, on pose $X = \mathrm{e}^x$.

On obtient alors l'expression $X^2 - (\mathrm{e}+1)X + \mathrm{e}$.

$$\Delta = (\mathrm{e}+1)^2 - 4\mathrm{e} = \mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} + 1 - 4\mathrm{e} = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 1 = (\mathrm{e}-1)^2.$$

Le trinôme en X a deux racines, e et 1.

On peut donc factoriser l'expression de départ :

$$\mathrm{e}^{2x} - (\mathrm{e}+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e} = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} e^x - 1 > 0 &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & e^x - e > 0 \\ &\iff e^x > e \\ &\iff x > 1. \end{aligned}$$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - e$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x - 1)(e^x - e)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4 Réponse $\boxed{b}$. En multipliant par e^x le numérateur et le dénominateur, et en simplifiant, on a :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Ces deux nombres sont donc inverses.

5 Propriétés algébriques

Énoncé p. 106

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

On utilise ici les propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} A &= e^{x+y-x} - e^{2y} \\ &= e^y - e^{2y} \\ &= e^y(1 - e^y). \end{aligned}$$

$$B = e^{2x+2y-x-2y} = e^x.$$

6 Équation

Énoncé p. 106

Lycée Lacordaire, Marseille

Une simplification est possible en se ramenant à une situation $e^U = e^V$:

$$\begin{aligned} e^{3x+x-2x} - e^x = 0 &\iff e^{3x+x-2x} = e^x \\ &\iff e^{2x} = e^x \\ &\iff 2x = x \quad \text{par stricte croissance de } \exp \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

7 Équation

Énoncé p. 106

Lycée Le Corbusier, Poissy

$$\begin{aligned} e^{3x-1} \times e^{x+2} = 1 &\iff e^{(3x-1)+(x+2)} = 1 \\ &\iff e^{4x+1} = e^0 \\ &\iff 4x+1 = 0 \qquad \text{(par propriété du cours)} \\ &\iff x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

La solution de (F) est donc : $-\frac{1}{4}$.

8 Inéquations

Énoncé p. 106

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 $$\begin{aligned} e^{3x-5} \leqslant e^{-x^2+7} &\iff 3x-5 \leqslant -x^2+7 \text{ (par propriété du cours)} \\ &\iff x^2+3x-12 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $x^2+3x-12$ est $\Delta = 9+48 = 57$ donc ce dernier a deux racines :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{2}.$$

Il est du signe de $-a$ (donc négatif ici) entre les racines donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S = \left[\frac{-3-\sqrt{57}}{2} \,;\, \frac{-3+\sqrt{57}}{2}\right].$$

2 $$\begin{aligned} e^{3x-1} > e^{5x-4} &\iff \frac{e^{3x-1}}{e^{5x-4}} > 1 \\ &\iff e^{3x-1-(5x-4)} > e^0 \\ &\iff e^{-2x+3} > e^0 \\ &\iff -2x+3 > 0 \\ &\iff -2x > -3 \\ &\iff x < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc :

$$S = \left]-\infty \,;\, \frac{3}{2}\right[.$$

3 $e^{2x}+e^x-2<0 \iff (e^x)^2+e^x-2<0.$

Pour résoudre cette inéquation, on pose $X = e^x$. Ainsi,

$$e^{2x}+e^x-2<0 \iff X^2+X-2<0.$$

Le polynôme $X^2 + X - 2$ admet $X_1 = 1$ comme racine évidente donc la seconde racine X_2 est telle que $X_1 X_2 = \frac{c}{a}$, soit $X_2 = -2$. Ainsi,

$$X^2+X-2 = (X-1)(X+2) \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2 = \left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^x+2\right).$$

De plus, pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^x > 0 \text{ donc } \mathrm{e}^x + 2 > 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 < 0 &\iff \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x + 2\right) < 0 \\ &\iff \mathrm{e}^x - 1 < 0 \\ &\iff \mathrm{e}^x < 1 \\ &\iff \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^0 \\ &\iff x < 0. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc :

$$S =]-\infty\,;\ 0[.$$

9 Dérivée et tangente

Énoncé p. 107

Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

1 **(a)** f est de la forme $u \times v$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2 - x & \qquad v(x) &= \mathrm{e}^x \\ u'(x) &= -1 & \qquad v'(x) &= \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= -1 \times \mathrm{e}^x + (2-x) \times \mathrm{e}^x \\ &= \big[-1 + (2-x)\big]\mathrm{e}^x \\ &= (-1 + 2 - x)\mathrm{e}^x \\ &= (1-x)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

MÉTHODE

Quand on dérive une fonction produit dont un des facteurs est une exponentielle, on pourra toujours factoriser par cette exponentielle. Cela nous permet d'obtenir une expression factorisée de la dérivée, qui pourra par la suite noue permettre d'en étudier le signe.

(b) $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$ car pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$. Or,

$$1 - x > 0 \iff 1 > x \iff x < 1.$$

CORRIGÉS

De plus,

$$f(1) = (2-1)e^1 = e.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e	$\searrow$	

2 $\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0, donc son équation est de la forme :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0).$$

D'après les calculs précédents,

$$f'(0) = (1-0)e^0 = 1 \times 1 = 1 \qquad \text{et} \qquad f(0) = (2-0)e^0 = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \quad : \quad & y = 1(x-0) + 2 \\ \iff & y = x + 2 \end{aligned}$$

10 Extremum et position relative

Énoncé p. 107

Le Chartreux, Lyon

1 Pour tout réel x, la dérivée de g est :

$$g'(x) = -2 + 2e^{2x} = 2\left(e^{2x} - 1\right).$$

Or, $2 > 0$. Donc,

$$\begin{aligned} g'(x) \geqslant 0 \iff & e^{2x} - 1 \geqslant 0 \\ \iff & e^{2x} \geqslant 1 \\ \iff & 2x \geqslant 0 \\ \iff & x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Remarque : nous avons ici utilisé l'équivalence
« $e^X \geqslant 0 \iff X \geqslant 0$ » en posant $X = 2x$.

De plus,

$$g(0) = 1 - 2 \times 0 + e^{2\times 0} = 1 + 1 = 2.$$

On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2 Du tableau précédent, on peut conclure que g atteint son minimum pour $x = 0$, et ce minimum vaut 2.

3 De la question précédente, on déduit que pour tout réel x, $g(x) \geqslant 2$. Or, $2 > 0$; par conséquent, pour tout réel x,

$$g(x) > 0.$$

4 De la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad & g(x) > 0 \\ \iff & 1 - 2x + \mathrm{e}^{2x} > 0 \\ \iff & \mathrm{e}^{2x} > 2x - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}$, la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{2x}$ se situe toujours au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 1$.

Remarque : la lettre grecque « Γ » se lit « Gamma ».

11 Positivité d'une fonction

Énoncé p. 107

Lycée Descartes, Cournon

1 Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1 + x)\mathrm{e}^x$. Comme e^x est strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $1 + x$, donc positif pour $x > -1$ et négatif sinon. Sachant que $f(-1) = a - \mathrm{e}^{-1}$, on peut établir le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$a - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	

2 D'après le tableau de variations, le minimum de f est atteint en -1 et vaut $a - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On a alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout x si et seulement si $a - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \geqslant 0$, c'est-à-dire $a \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

12 Conjecture et preuve

Énoncé p. 107

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 À la calculatrice, il semble que pour tout x, $f(x)$ soit compris entre -1 et 1.

2 Pour tout x, $\mathrm{e}^{2x} - 1 < \mathrm{e}^{2x} + 1$ et comme $\mathrm{e}^{2x} > 0$, on a aussi :

$$-\mathrm{e}^{2x} - 1 < \mathrm{e}^{2x} - 1 \,,$$

CORRIGÉS

ce qui donne la double inégalité :

$$-(e^{2x}+1) < e^{2x}-1 < e^{2x}+1.$$

En divisant chaque membre par $e^{2x}+1$ qui est strictement positif on trouve l'inégalité cherchée :

$$-1 < f(x) < 1.$$

3 On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$
$$= \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}.$$

On constate que $f'(x) > 0$ pour tout x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

4 On cherche la plus petite valeur de x telle que $1 - f(x) < 0{,}001$, c'est-à-dire telle que $f(x) > 0{,}999$. Notons a cette valeur.

On programme la fonction f à la calculatrice, puis on affiche un premier tableau de valeurs par pas de 1 à partir de 0.

Comme $f(3) < 0{,}999 < f(4)$, on en déduit que a est compris entre 3 et 4.

On tabule à nouveau la fonction à partir de 3 par pas de 0,1. On trouve $f(3{,}8) < 0{,}999 < f(3{,}9)$.

On recommence à tabuler à partir de 3,8 par pas de 0,01 et on trouve finalement $f(3{,}8) < 0{,}999 < f(3{,}81)$. La valeur cherchée est donc $a = 3{,}81$.

13 Cosinus et sinus hyperboliques

Énoncé p. 108

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $\operatorname{ch} x > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geqslant 1$ et $e^{-x} \leqslant 1$, donc $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geqslant 0$.

Comme sh est impaire, on en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $\operatorname{sh} x \leqslant 0$.

D'où les tableaux de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh} x$		$-$	0	$+$	
$\operatorname{ch} x$		$+$	1	$+$	

2 Les fonctions ch et sh sont toutes deux dérivables en tant que sommes de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'\,x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\,x \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'\,x = \frac{\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \mathrm{ch}\,x.$$

3 Le tableau de variation de ch est alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}\,x$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}\,x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

et celui de sh est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}\,x$		$+$	1	$+$	
$\mathrm{sh}\,x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 **(a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\mathrm{ch}^2)'(x) - (\mathrm{sh}^2)'(x) \\ &= 2\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}'\,x - 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}'\,x \\ &= 2\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x - 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x = 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (\mathrm{ch}\,x)^2 - (\mathrm{sh}\,x)^2 \\ &= f(0) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (\mathrm{ch}\,x)^2 - (\mathrm{sh}\,x)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2.$$

Ou encore,

$$f(x) = \frac{1}{4}\Big((\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}) - (\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x})\Big) = \frac{4}{4} = 1.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

5 **(a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \frac{2}{4}\left((e^x)^2 - (e^{-x})^2\right)\\ &= \operatorname{sh}(2x).\end{aligned}$$

(b) Posons :

$$g(x) = 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(2x).$$

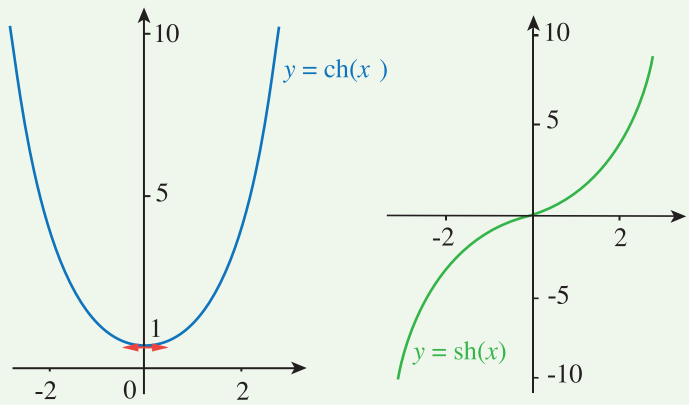
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - 2\operatorname{ch}(2x).$$

Or, g est constante donc g' est nulle.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(2x) = (\operatorname{ch} x)^2 + (\operatorname{sh} x)^2.$$

6 Les fonctions ch et sh ont pour représentations graphiques :



On appelle la fonction ch « cosinus hyperbolique » et la fonction sh « sinus hyperbolique ».

14 Décroissance radioactive

Énoncé p. 108

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Le taux d'un élément radioactif diminue de 30% en 1 500 ans. Donc :

$$e^{-\lambda \times 1\,500} = 0{,}7.$$

Un algorithme nous permettant de trouver un encadrement de λ est :

Algorithme

```
L ← 0
Pour i allant de 1 à 40:
   L ← i/100000
   f ← exp(-1500*L)
   Si |f-0.7| ⩽ 0.01 alors
     Afficher L et f
   Fin du Si
Fin du Pour
```

En Python

```python
from math import exp
L = 0
for i in range (40):
    L = i/100000
    f = exp(-1500*L)
    if abs(f-0.7) <= 0.01:
        print(L,f)
```

On trouve alors :

$$0{,}00023 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}00024.$$

Ainsi, une valeur approchée de λ à 10^{-4} est $\underline{\lambda \approx 0{,}0002}$.

15 Algorithme

Énoncé p. 109

Lycée Buffon, Paris

1 Lorsque l'on applique cet algorithme en donnant à a la valeur 0,3, on obtient les résultats successifs suivants :

n	$\exp(-n)$	test : $\exp(-n) \geqslant 0{,}3$
0	$e^0 = 1$	$1 \geqslant 0{,}3$: vrai
1	$e^{-1} \approx 0{,}37$	$0{,}37 \geqslant 0{,}3$: vrai
2	$e^{-2} \approx 0{,}14$	$0{,}14 \geqslant 0{,}3$: faux

La boucle s'achève pour $n = 2$ et la valeur affichée est donc 2.

2 L'algorithme affiche le premier entier tel que le test « $e^{-n} \geqslant a$ » soit faux.

Pour afficher 0, il faut donc que $e^{-0} \geqslant a$ soit faux, donc que $1 < a$.

On constate que pour $a = 2$, on obtient bien $n = 0$.

CORRIGÉS

3 Si $a = 10^{-20}$, le test devient faux dès que $e^{-n} < 10^{-20}$, avec n entier, c'est-à-dire dès que $e^n > 10^{20}$.

À la calculatrice, on trouve $e^{46} \approx 9{,}5 \times 10^{19}$ et $e^{47} \approx 2{,}6 \times 10^{20}$. Comme la fonction exponentielle est croissante, cela permet de trouver que si $a = 10^{-20}$, la valeur affichée est 47.

16 Fonction exponentielle et algorithme

Énoncé p. 109

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 **(a)** $f'(x) = 4 \times 0{,}25e^{0{,}25x} = e^{0{,}25x}$.

$f'(x)$ est positif pour tout x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) La dérivée ne s'annule jamais donc il n'y a aucun point où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2 **(a)** Le tableau ci-dessous donne les valeurs successives de X et Y, Y étant arrondi au 1 000e inférieur.

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
Y	−1	−0,899	−0,795	−0,689	−0,580

X	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Y	−0,468	−0,353	−0,235	−0,115	0,010

Dans la dernière colonne, Y est positif. Donc les valeurs affichées seront 0,8 et 0,9.

(b) Cet algorithme donne un encadrement d'amplitude P de la solution de l'équation $f(x) = 0$. On démarre à $Y = -1$ car c'est la valeur de $f(0)$.

(c) Ici, l'encadrement a pour amplitude 0,001 donc $P = 0{,}001$.

(d) On peut programmer l'algorithme, mais aussi utiliser la fonction table de la calculatrice, ce qui est plus rapide puisqu'on a déjà un encadrement d'amplitude 0,01.

On obtient en sortie 0,892 5 et 0,892 6.

17 À l'aide du graphique

Énoncé p. 110

Lycée Corneille, La-Celle-Saint-Cloud

1 La fonction f est le produit uv, avec :

$$u(x) = (ax + b) \text{ et } v(x) = e^x.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f l'est aussi par produit.

$$f' = u'v + uv' \Rightarrow f'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x.$$

2 D'après ce qui précède, on sait que $f'(-2) = (-2a + a + b)e^{-2}$.

D'après l'énoncé, la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2 est horizontale, donc son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $f'(-2) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(-2) = 0 &\iff (-2a + a + b)\mathrm{e}^{-2} = (b-a)\underbrace{\mathrm{e}^{-2}}_{\neq 0} = 0 \\ &\iff b - a = 0 \\ &\iff a = b. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $A \in \mathcal{C}$ donc $f(0) = 1$ (1 unité en ordonnées prend deux graduations).

$$f(0) = 1 \iff b\underbrace{\mathrm{e}^0}_{=1} = 1 \iff b = 1.$$

Finalement, on obtient $a = b = 1$ et $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.

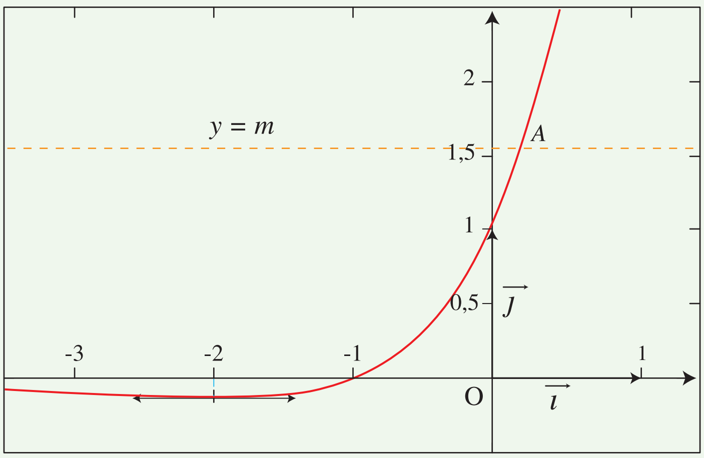
3 En substituant les valeurs de a et b dans le calcul précédent de $f'(x)$:

$$f'(x) = (x+2)\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\text{positif}} \quad \text{et} \quad f'(x) > 0 \iff x + 2 > 0 \iff x > -2.$$

x	-3		-2		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2\mathrm{e}^{-3}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}$

$f(-2) = (-2+1)\mathrm{e}^{-2} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$; $f(-2) \approx -0{,}14$ à 10^{-2} près.

4 Il s'agit de résoudre $f(x) = m$, autrement dit, de discuter du nombre d'antécédents de m par f. On peut s'aider ici d'un graphique.



- Si $m < -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution car f admet pour minimum $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

CORRIGÉS

- Si $m = -\frac{1}{e^2}$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution : -2.
- Si $-\frac{1}{e^2} < m \leqslant -2e^{-3}$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions, une dans $[-3\,;-2[$ et l'autre dans $]-2\,;1[$.
- Si $2e^{-3} < m \leqslant 2e$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-2\,;1[$, et elle n'en admet pas ailleurs car sur l'intervalle $[-3\,;-2]$, $f(x) < 2e^{-3}$.
- Si $m > 2e$, l'équation n'admet aucune solution car $2e$ est le maximum absolu de la fonction sur $[-3\,;1]$.

18 Coût moyen minimal

Énoncé p. 111

Lycée Chaptal, Paris

1 **(a)** $v(t) = \dfrac{30}{0{,}5t + 1} \Rightarrow v(0) = \dfrac{30}{0{,}5 \times 0 + 1} = 30 = v_0$.

On retrouve bien la valeur d'achat annoncée.

On cherche t_0 tel que $v(t_0) \leqslant 0{,}5\, v_0$, soit :

$$\begin{aligned} & \frac{30}{0{,}5t_0 + 1} \leqslant \frac{1}{2} \times 30 \\ \iff & \frac{1}{0{,}5t_0 + 1} \leqslant \frac{1}{2} \\ \iff & 0{,}5t_0 + 1 \geqslant 2 \\ \iff & t_0 \geqslant 2. \end{aligned}$$

La machine aura perdu la moitié de sa valeur initiale au bout de 2 ans.

(b) Au bout de 4 ans, l'entreprise pourra revendre la machine au prix de $v(4)$:

$$v(4) = \frac{30}{0{,}5 \times 4 + 1} = \frac{30}{3} = 10.$$

La valeur de revente de la machine au bout de 4 ans est de 10 000 €.

(c)
$$\begin{aligned} D(t) &= 30 - v(t) \\ &= 30 - \frac{30}{0{,}5t + 1} \\ &= 30\left(1 - \frac{1}{0{,}5t + 1}\right) \\ &= 30 \times \frac{0{,}5t + 1 - 1}{0{,}5t + 1} \\ &= \frac{15t}{0{,}5t + 1}. \end{aligned}$$

On calcule la dérivée de D par la formule du quotient :

$$D'(t) = \frac{15(0{,}5t+1) - 15t \times (0{,}5)}{(0{,}5t+1)^2}$$
$$D'(t) = \frac{15}{(0{,}5t+1)^2}.$$

On observe que $D'(t) > 0$ (le dénominateur est un carré) ; donc D est une fonction strictement croissante sur son ensemble de définition $[0\,;8]$.

2 **(a)** $E(t) = 2{,}5\mathrm{e}^{0{,}4t} - t - 2{,}5$ est dérivable en tant que somme d'une exponentielle et d'une fonction affine (sur tout $\mathbb{R}$ donc *a fortiori* sur $[0\,;8]$) :

$$E'(t) = 2{,}5 \times 0{,}4 \times \mathrm{e}^{0{,}4t} - 1 = \mathrm{e}^{0{,}4t} - 1.$$

(b) On sait, d'après l'ensemble de définition, que $t \geq 0$. Cherchons le signe de $E'(t)$.

$$\begin{aligned} E'(t) = 0 &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} - 1 = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} = 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} = \mathrm{e}^{0} \\ &\iff t = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'(t) > 0 &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} - 1 > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{0{,}4t} > 1 \\ &\iff 0{,}4t > 0 \\ &\iff t > 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, E' est strictement positive sur $]0\,;8]$ et nulle en $t = 0$. E est donc une fonction strictement croissante sur $[0\,;8]$.

3 **(a)** Le coût total de la machine est composé de la partie d'investissement « utilisée » depuis son achat, à laquelle il faut rajouter le prix de son entretien.

$$\begin{aligned} C(t) &= D(t) + E(t) \\ &= \underbrace{30 - \frac{30}{0{,}5t+1}}_{D(t)=30-v(t)} + 2{,}5\mathrm{e}^{0{,}4\times t} - t - 2{,}5 \\ &= 27{,}5 - \frac{30}{0{,}5t+1} + 2{,}5\mathrm{e}^{0{,}4\times t} - t. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

(b) On a $C(t) = D(t) + E(t)$. Or, d'après les questions précédentes, D et E sont des fonctions strictement croissantes sur $[0 ; 8]$. Leur somme C est donc elle aussi strictement croissante sur $[0 ; 8]$. Il est inutile d'étudier de signe de la dérivée.

(c) On a tracé la courbe en fin de corrigé. Nous avons respecté les proportions données par l'énoncé (1 unité en abscisses pour 1 année, 1 unité en ordonnées pour 8 k€).

4 **(a)** Le point M d'abscisse $x_M = t$ appartient à Γ si et seulement ses coordonnées vérifient l'équation de Γ : $y = C(t)$.

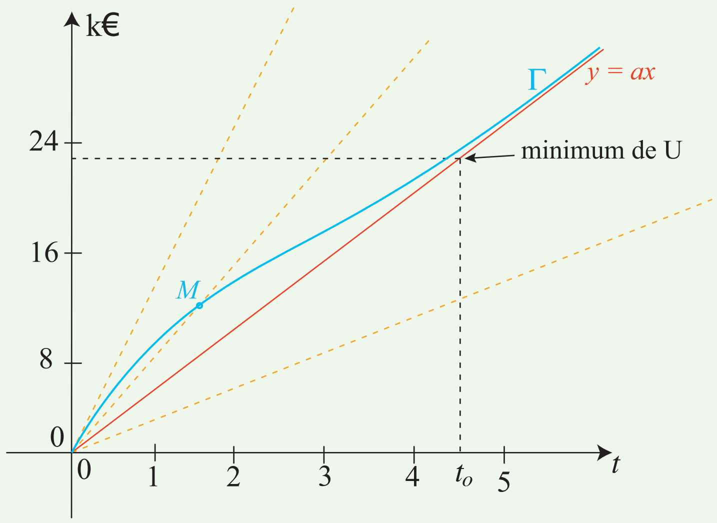
Donc $y_M = C(t)$. Le coefficient directeur a de la droite (OM) vaut donc :

$$a = \frac{y_M}{x_M} = \frac{C(t)}{t} = U(t).$$

(b) Faire varier le point M sur la courbe Γ, c'est faire varier la droite (OM). Plusieurs positions de (OM) sont indiquées en pointillés sur le graphique.

Comme (OM) passe par l'origine, elle a pour équation $y = ax$. En diminuant son coefficient directeur a, (OM) se rapproche de l'horizontale. Or diminuer a, c'est diminuer $U(t)$. Le coefficient directeur minimal de (OM) est obtenu quand (OM) est tangente à Γ et sous Γ. Cela correspond à une abscisse d'environ 4,5.

Donc, le coût minimum est atteint pour 4 années et demi, environ.



Chapitre
5

Suites numériques

Plan du chapitre

1 Généralités sur les suites numériques

Exercice type 1 — **Lycée Jules Ferry, Paris**

On considère la suite w définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

1 Calculer les quatre premiers termes de la suite w.

2 **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}.$$

(b) En déduire que la suite w est décroissante à partir d'un certain rang N que l'on déterminera.

Voir corrigé page 133

1.1 Définition

Définition 1

On appelle *suite numérique* une fonction à variable entière.

Notation : une suite est représentée, comme une fonction, par une lettre.
Supposons que l'on désigne par la lettre u une suite. Alors, la suite pourra être notée, de manière indifférente :

$$u \quad , \quad (u) \quad , \quad (u_n) \quad , \quad \big(u(n)\big)$$

COURS

Définitions 2

- On appelle *termes* les nombres qui composent la suite numérique.
- On appelle *indice du terme u_n* le nombre n.
- On appelle *rang du terme u_n* sa position dans la suite.

Exemple : si $u_0 = 7$ alors :

- « 7 » est un terme de la suite (u_n),
- « 0 » est l'indice,
- le rang de 7 est 1 (car c'est le 1er terme de la suite).

1.2 Suites définies de manière explicite

Définition 3

Une suite est définie de manière explicite si tous ses termes sont exprimés à l'aide d'une fonction dont la variable est leur rang.

Exemple : Si (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2 - 3$$

alors elle est définie de manière explicite et :

$$\begin{cases} u_0 = 0^2 - 3 = -3 \\ u_1 = 1^2 - 3 = -2 \\ u_2 = 2^2 - 3 = 1 \\ u_3 = 3^2 - 3 = 6 \\ \vdots \end{cases}$$

1.3 Suites définies par récurrence (d'ordre 1)

Définition 4

Une suite est définie par récurrence (d'ordre 1) si un terme se calcule en fonction de son précédent.

Exemple : Si (v_n) est la suite définie par son premier terme $v_0 = 5$ et par l'égalité :

$$v_{n+1} = 3v_n - 5,$$

alors (v_n) est une suite récurrente (d'ordre 1).
Cela signifie ici que pour calculer un terme de cette suite, il faut multiplier son précédent par 3, puis soustraire 5.

On a donc :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_1 = 3 \times 5 - 5 = 10 \\ v_2 = 3 \times 10 - 5 = 25 \\ v_3 = 3 \times 25 - 5 = 70 \\ \vdots \end{cases}$$

1.4 Variations d'une suite

On dit que la suite (u_n) est :

- constante si et seulement si pour tout n, on a $u_{n+1} = u_n$;
- croissante si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- strictement croissante si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} > u_n$;
- décroissante si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- strictement décroissante si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} < u_n$.

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite, on utilise principalement l'une des trois méthodes suivantes :

1.4.1 - Sens de variation de la fonction

Si la suite (u_n) est de la forme $u_n = f(n)$ alors elle a le même sens de variation que la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

Exemple : soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2\ .$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$;
la suite u est donc croissante.

1.4.2 - Différence de deux termes consécutifs

C'est la méthode générale : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- si, pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors la suite u est décroissante ;
- si, pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors la suite u est croissante.

Exemple : soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence $u_{n+} = u_n + 7$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 7) - u_n = 7 > 0$$

donc (u_n) est strictement croissante.

COURS

1.4.3 - Quotient de deux termes consécutifs

Cette méthode n'est à utiliser que si tous les termes sont strictement positifs. Dans ce cas,

- si, pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors la suite est décroissante ;
- si, pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors la suite est croissante.

Exemple : soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}\ .$$

Cette suite est bien à termes strictement positifs car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n > 0$ et $2^{n+1} > 0$.
De plus,

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}$$

donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_{n+1} \times \frac{1}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$$

donc la suite est croissante.

1.5 Suites majorées, suites minorées

On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par le réel A si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant A$;
- minorée par le réel a si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geqslant a$;
- bornée par les réels a et A si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a \leqslant u_n \leqslant A$.

Exemple : soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

- (u_n) est minorée par 0 car pour tout entier naturel n, $u_n > 0$;
- (u_n) est majorée par 1 car pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 1$;
- (u_n) est bornée car elle est minorée et majorée.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Jules Ferry, Paris

1 Les quatre premiers termes de la suite w sont w_0, w_1, w_2 et w_3.

- $w_0 = \dfrac{0^2}{2^0} = 0$ (on remplace n par 0 dans l'expression de u_n) ;
- $w_1 = \dfrac{1^2}{2^1} = \dfrac{1}{2}$ (on remplace n par 1 dans l'expression de u_n) ;
- $w_2 = \dfrac{2^2}{2^2} = 1$ (on remplace n par 2 dans l'expression de u_n) ;
- $w_3 = \dfrac{3^2}{2^3} = \dfrac{9}{8}$ (on remplace n par 3 dans l'expression de u_n).

2 **(a)** Pour tout entier naturel n, w_{n+1} s'obtient en remplaçant n par $(n+1)$ dans l'expression de w_n. Donc,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}} - \frac{n^2 \times 2^1}{2^n \times 2^1} \\ &= \frac{n^2+2n+1-2n^2}{2^{n+1}} \\ &= \frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

(b) Pour tout entier naturel n, $2^{n+1} > 0$ donc $w_{n+1} - w_n$ est du signe de $-n^2+2n+1$; le trinôme $-x^2+2x+1$ a pour discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8.$$

Ses racines sont donc :

$$\frac{-2-\sqrt{8}}{-2} = 1+\sqrt{2} > 0 \qquad \text{et} \qquad 1-\sqrt{2} < 0.$$

On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	0	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$-x^2+2x+1$	$+$	0	$-$

On en déduit alors que $-n^2+2n+1 < 0$ pour $n > 1+\sqrt{2}$, soit pour $n \geqslant 3$.

Ainsi, la suite (w) est strictement décroissante à partir du rang $N = 3$.

Voir énoncé page 129

COURS

Retrouvez les suites arithmétiques et géométriques en vidéo.

2 Suites arithmétiques

Exercice type 2 — Lycée Pierre Caraminot, Egletons

1 (a_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$a_n = 5n - 8.$$

Montrer que (a_n) est une suite arithmétique, dont on précisera la raison r et le premier terme a_0.

2 (c_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} c_0 = 10 \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}c_n + n. \end{cases}$$

Cette suite est-elle arithmétique ? Justifier.

Voir corrigé page 136

2.1 Définition

Définition 5

On dit que la suite (u_n) est *arithmétique* s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé la *raison* de la suite arithmétique.

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$ est arithmétique de raison 5.

2.2 Formule explicite du terme général

Théorème 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Alors, pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

En particulier, si $p = 0$,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Exemple : soit (u_n) la suite arithmétique définie pour $n \in \mathbb{N}$ telle que $u_5 = 10$ et $r = 3$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_5 + (n-5)r = 10 + (n-5) \times 3 = 3n - 5.$$

2.3 Sens de variation

Propriété 1

- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 7$ est strictement croissante car sa raison $(r = 7)$ est strictement positive.
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 4$ est strictement décroissante car sa raison $(r = -4)$ est strictement négative.

2.4 Somme des premiers termes

Propriété 2 : somme des premiers entiers

Pour tout entier naturel n,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque : cette propriété s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Cette égalité est à connaître par cœur.

Propriété 3 : somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Remarque : on peut aussi retenir cette formule ainsi :

(nombre de termes dans la somme) $\times$ (moyenne des termes extrêmes).

COURS

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Pierre Caraminot, Egletons

1 Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left[5(n+1) - 8\right] - \left[5n - 8\right] \\ &= 5n + 5 - 8 - 5n + 8 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Le résultat ne dépend pas de n : la différence entre deux termes consécutifs quelconques de cette suite est donc constante. La suite est donc arithmétique.
Sa raison vaut 5 (la différence entre deux termes consécutifs) et son premier terme a_0 se trouve en remplaçant n par 0 dans l'expression de a_n :

$$a_0 = 5 \times 0 - 8 = -8.$$

2 On a :

- $c_0 = 10$;
- $c_{0+1} = \dfrac{1}{2} \times c_0 + 0$, soit $c_1 = \dfrac{1}{2} \times 10 + 0 = 5$;
- $c_{1+1} = \dfrac{1}{2} c_1 + 1$, soit $c_2 = \dfrac{1}{2} \times 5 + 1 = \dfrac{7}{2}$.

Ainsi,

$$c_1 - c_0 = 5 - 10 = -5 \qquad \text{et} \qquad c_2 - c_1 = \frac{7}{2} - 5 = -\frac{3}{2}.$$

Par conséquent, $c_1 - c_0 \neq c_2 - c_1$; la suite (c_n) n'est donc pas arithmétique.

Voir énoncé page 134

3 Suites géométriques

Exercice type 3 — Lycée Pierre Caraminot, Egletons

1 (b_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $b_n = \dfrac{3 \times 12^n}{4^n}$.
Montrer que (b_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison q et le premier terme b_0.

2 (c_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} c_0 = 10 \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2} c_n + n. \end{cases}$$

Cette suite est-elle géométrique ? Justifier.

Voir corrigé page 138

3.1 Définition

Définition 6

On dit que la suite (u_n) est *géométrique* s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = qu_n \, .$$

q est alors appelé la *raison* de la suite géométrique.

Exemple : soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 7$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$.

Alors, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

3.2 Formule explicite du terme général

Théorème 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Alors, pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

En particulier, si $p = 0$,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Exemple : soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = \frac{1}{3}$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{7}{3^n}.$$

3.3 Somme des premiers termes

Propriété 4

Soit $q \neq 1$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

COURS

Propriété 5

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Solution de l'exercice type 3

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

1 Pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1} = \frac{3 \times 12^{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{3 \times 12^n \times 12^1}{4^n \times 4^1} = \frac{3 \times 12^n}{4^n} \times \frac{12}{4} = b_n \times 3.$$

Ainsi, (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme :

$$b_0 = \frac{3 \times 12^0}{4^0} = 3.$$

2 On a :

- $c_0 = 10$;
- $c_{0+1} = \frac{1}{2} \times c_0 + 0$, soit $c_1 = \frac{1}{2} \times 10 + 0 = 5$;
- $c_{1+1} = \frac{1}{2}c_1 + 1$, soit $c_2 = \frac{1}{2} \times 5 + 1 = \frac{7}{2}$.

Ainsi,

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{7}{10} \neq \frac{c_1}{c_0}.$$

La suite (c_n) n'est donc pas géométrique.

Voir énoncé page 136

Généralités

1 QCM Exprimer le terme suivant

5 min Corrigé p. 150

Indiquer la bonne réponse parmi les propositions a, b, c.

1 Si $u_n = n^2 + n - 1$, alors $u_{n+1} =$

a $n^2 + n$ b $n^2 + 3n$ c $n^2 + 3n + 1$

2 Si $v_n = (2n-1)^2$ alors $v_{n+1} =$

a n^2 b $(2n+1)^2$ c $4n^2 - 4n + 1$

3 Si $w_n = \dfrac{5n-1}{5n+1}$ alors $w_{n+1} =$

a $\dfrac{5n+4}{5n+6}$ b $\dfrac{5n-6}{5n+6}$ c $\dfrac{5n-6}{5n+1}$

2 V/F Vérifiez vos connaissances

10 min Corrigé p. 150

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1 Si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1} \end{cases},$$

la suite (u_n) est bien définie.

2 Si, pour tout entier naturel n, $v_n = 5n^2 - 10n + 7$, alors v_9 est le neuvième terme de la suite (v_n).

3 On pose $t_n = n^2 + n + 1$ pour tout entier naturel n. Alors, (t_n) est une suite croissante.

3 V/F Suites croissantes

15 min Corrigé p. 150

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1 Si $u_n = f(n)$ et (u_n) est croissante, alors f est croissante.

2 Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors (u_n) est croissante.

3 La somme de deux suites croissantes est croissante.

4 Définition explicite d'une suite ★

10 min Corrigé p. 151

Lycée Saint-Benoît, Grenoble

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \sqrt{2n+4}\,.$$

1 Compléter le programme suivant, écrit en langage Python, afin que l'appel à la fonction `u(n)` affiche une valeur approchée des termes de la suite (u_n) de u_0 et u_n, pour n entier naturel quelconque.

En Python

```
from math import sqrt

def u(n):
    for k in range(...):
        u = sqrt(...)
        print(u)
```

2 Calculer le vingtième et le centième terme de la suite.

5 Étude de la monotonie de deux suites ★

15 min Corrigé p. 152

Lycée Clémenceau, Nantes

Étudier la monotonie des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

1 $u_n = n - n^3$

2 $v_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$

6 Sens de variation d'une suite ★

20 min Corrigé p. 152

Lycée Saint-Exupéry, Marseille

On donne la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \qquad , \qquad u_0 = 0.$$

On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.

1 Montrer l'égalité :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}.$$

2 Étudier le signe de $2 + x - x^2$ sur $\mathbb{R}$.

3 Donner le sens de variation de (u_n).

COURS INTERROS CORRIGÉS

7 Suite explicite avec radical ★★ 20 min Corrigé p. 153

Lycée Odilon Redon, Pauillac

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,.$$

1 **(a)** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$n \geqslant \sqrt{n^2-1}.$$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \leqslant 2\sqrt{n}.$$

Aide : utiliser l'identité remarquable $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2$.

(c) Exprimer $u_n - u_{n-1}$ en fonction de n, et, à l'aide de la question précédente, et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2 **(a)** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

(b) Soit un réel quelconque $M > 0$. Déduire de la question précédente, un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant M$.

Suites arithmétiques

8 Recherche d'une suite arithmétique ★ 10 min Corrigé p. 154

Lycée Poincaré, Nancy

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On désigne par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

la somme des n premiers termes de la suite.

Calculer u_1 et S_{17} sachant que $u_{17} = 105$ et $r = -2$.

9 Calcul de la distance parcourue ★ 15 min Corrigé p. 155

Lycée Montesquieu, Herblay

Un ours a établi sa tanière à 20 m des ruches d'un apiculteur, situées en ligne droite à partir de son antre et espacées de 2 m. L'ours dispose de pots de miel de taille respectable, et ne peut en porter deux simultanément malgré sa grande force et sa motivation certaine.

Quelle distance parcourt ce fin gourmet s'il prélève modestement un pot de miel dans chacune des 30 ruches de l'apiculteur ?

INTERROS

10 Production croissante ★ 15 min

Corrigé p. 155

Lycée Michelet, Vanves

Une usine pharmaceutique fabrique des boîtes de médicaments.
La machine de production fonctionne 7 jours sur 7 durant le mois de juin.
La production est initialement de 3 500 boîtes de médicaments le 31 mai.
À partir du 1er juin, la production augmente de 60 boîtes par jour.
On note u_n la production le jour n du mois de juin.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite ? Expliquer brièvement.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Pourra-t-on dépasser une production journalière de 5 000 boîtes au 24 juin ?

11 Suite se ramenant à une arithmétique ★★ 20 min

Corrigé p. 155

Lycée Buffon, Paris

On donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}, \qquad u_1 = -2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{1+u_n}{u_n}$$

On admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \neq 1, \qquad u_n \neq 0 \qquad \text{et} \qquad v_n \neq 1\,.$$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}.
2. Calculer v_{n+1} en fonction de u_n.
3. Calculer u_n en fonction de v_n.
4. En déduire que (v) est arithmétique.
5. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n

12 Quatre premiers termes d'une suite ★★ 20 min

Corrigé p. 156

Lycée Louis-Le-Grand, Paris

Déterminer les quatre premiers termes u_1, u_2, u_3, u_4 d'une suite arithmétique *croissante* sachant que leur somme est 16 et que la somme de leurs carrés vaut 84.

IL1M — v. 1.0
22 avril 2026 — Chapitre 5 page 143 — #151

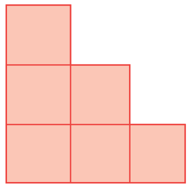
COURS
INTERROS
CORRIGÉS

13 Les carrés de chocolat

★★★ 20 min Corrigé p. 157

Lycée Hector Berlioz, Vincennes

On positionne 2 016 carrés de chocolat comme sur le dessin ci-dessous :



1 carré sur la première ligne
2 carrés sur la deuxième ligne, etc.

En détaillant le raisonnement, calculer le nombre de carrés de chocolat sur la dernière ligne.

Suites géométriques

14 Recherche de trois nombres

★ 15 min Corrigé p. 158

Lycée Notre-Dame de France, Paris

a, b et c sont trois nombres tels que :

- a, b et c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ;
- a, c et b sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique ;
- $a + b + c = 99$.

Déterminer a, b et c.

15 Le rebond

★ 20 min Corrigé p. 159

Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

Une balle élastique est lancée d'une hauteur de 100 cm au-dessus du sol. On note R_n la hauteur au n^{e} rebond et R_0 la hauteur d'où est lâchée la balle.

À chaque rebond, la hauteur atteinte est égale à $\dfrac{9}{10}$ de la hauteur précédente.

1. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.
2. Quelle est la nature de la suite (R_n) ?
3. Exprimer R_n en fonction de n.
4. On considère que la balle s'arrête dès qu'elle tombe d'une hauteur inférieure à 0,2 cm. À l'aide d'une calculatrice, déterminer au bout de combien de rebonds va cesser le mouvement.

INTERROS

16 Recherche d'une suite géométrique ★ 20 min Corrigé p. 160

Lycée Blaise Pascal, Orsay

1 (u_n) est une suite géométrique croissante dont les termes sont négatifs.
Calculer u_1, u_2 et u_3, sachant que :

$$\begin{cases} u_1 \times u_3 & = \dfrac{4}{9} \\ u_1 + u_2 + u_3 & = -\dfrac{19}{9}. \end{cases}$$

2 Calculer u_n en fonction de n.

17 $n+1$ premiers termes d'une suite ★ 20 min Corrigé p. 161

Lycée Saint-Benoît, Paris

Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_n = 2^n - 5n + 6\,.$$

1 Calculer U_0, U_1, U_2 et U_3.

2 On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.
Calculer S_n en fonction de n.

18 Capitaux et intérêts composés ★ 20 min Corrigé p. 162

Lycée Notre-Dame, Ussel

Un capital A est placé à intérêts composés au taux de 3 % l'an. On appelle C_0 le capital initial et C_n le capital après n années.

1 Expliquer la relation $C_1 = 1{,}03C_0$ et écrire le capital C_n en fonction de C_0 et de n en justifiant soigneusement cette relation.

2 **(a)** Écrire un algorithme calculant le montant du capital acquis au bout de n années.

(b) On considère un capital initial $A = 150$ euros. Déterminer, à l'aide de l'algorithme, au bout de combien d'années ce capital est doublé.

(c) Même question avec un capital initial $A = 700$ euros.

Quelle conjecture peut-on faire ?

(d) Démontrer cette conjecture.

19 Un problème d'optique ★★ 30 min Corrigé p. 164

Lycée Jehan de Chelles, Chelles

1 En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse. Soit I_0 l'intensité d'un rayon à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à sa sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0.

2 On superpose n plaques de verre identiques ; on note I_n l'intensité du rayon à sa sortie de la n^e plaque.
  - **(a)** Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.
  - **(b)** Quelle est la nature de la suite (I_n) ? Préciser le premier terme et la raison ; en déduire l'expression de I_n en fonction de I_0.
  - **(c)** Préciser, en le justifiant, le sens de variation de la suite (I_n).

3 Quelle est l'intensité initiale I_0 d'un rayon lumineux dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?

4 Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante.

20 Les empilements ★★★ 40 min Corrigé p. 165

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

Partie A

On empile des cubes comme sur la figure ci-dessous afin de construire une tour.
Le premier cube a un côté égal à 1024 mm. Puis chaque nouveau cube a un côté mesurant les 3/4 du côté du cube précédent.
On note c_0 le côté du 1er cube, c_1 celui du deuxième cube, et ainsi de suite.

1 Calculer c_1.

2 Quelle est la nature de la suite (c_n) ? Donner ses éléments caractéristiques.

3 Exprimer c_n en fonction de n.

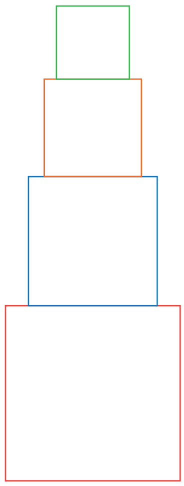
4 Quelle est la longueur du côté du 10^e cube ?

5 Quelle est la hauteur de la tour formée par les 10 premiers cubes ?

6 Donner, en fonction de n, la hauteur de la tour formée par les n premiers cubes.

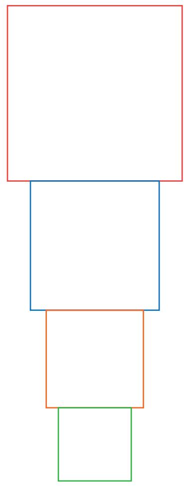
7 Justifier le fait que la tour ne pourra jamais dépasser la hauteur de 4 096 mm.

8 À l'aide de la calculatrice, dire combien il faut de cubes, au minimum, pour dépasser une hauteur de 3 000 mm.



Partie B

On empile des cubes comme sur la figure ci-contre.
Le premier cube a un côté égal à 10 cm. Puis chaque nouveau cube a un côté de 4 cm supérieur à celui du cube précédent.



1 Étude de la hauteur de l'empilement.
On note d_0 le côté du 1^er^ cube, d_1 celui du 2^e^, et ainsi de suite.

(a) Calculer d_1.

(b) Donner le nature de la suite (d_n), et ses éléments caractéristiques.

(c) Exprimer d_n en fonction de n.

(d) Quelle est la longueur du côté du 10^e^ cube ?

(e) Quelle est la hauteur de l'empilement formé par les 10 premiers cubes ?

2 Étude du volume de l'empilement.
On note v_0 le volume du premier cube, v_1 le volume du 2^e^, et ainsi de suite.

(a) Calculer v_0, v_1, et v_2.

(b) La suite (v_n) est-elle arithmétique ? Justifier.

(c) Pour $n \geqslant 1$, on note V_n le volume de l'empilement des n premiers cubes.
Justifier que $V_2 = 3\,744$.

(d) Calculer V_3.

Suites se ramenant à une suite géométrique

21 Suite arithmético-géométrique ★ 20 min

Corrigé p. 166

Lycée Descartes, Antony

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

1 Soit la suite (U_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 5 \end{cases}$$

Calculer les quatre premiers termes de la suite.

2 On pose : $V_n = U_n - 10$.
Démontrer que (V_n) est une suite géométrique. Donner son premier terme et sa raison.

Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3 Calculer : $S_{10} = \sum_{i=0}^{10} V_i = V_0 + V_1 + \cdots + V_{10}$

et $S'_{10} = \sum_{i=0}^{10} U_i = U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$.

22 Étude algorithmique d'une suite

★ 30 min Corrigé p. 168

Lycée Odilon Redon, Pauillac

Soit la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1 Écrire un algorithme permettant de calculer, et d'afficher, les premières valeurs de la suite, $u_1, u_2, u_3, \ldots$

Quelle conjecture peut-on faire quant au comportement des valeurs de u_n lorsque n devient grand ?

2 Soit la suite (v_n) définie pour tout entier n, par $v_n = u_n - 3$.

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

L'expression obtenue conforte-t-elle la conjecture précédente ?

3 Écrire un algorithme calculant la somme des termes :

$$S_{10} = \sum_{i=0}^{10} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$$

23 Une suite différente

★★ 20 min Corrigé p. 170

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{3(n+1)}u_n$.

On admettra que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

1 Calculer u_1.

2 En remarquant que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{3(n+1)}$, montrer que (u_n) est décroissante.

3 On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$.

(a) Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

(b) En déduire l'expression de v_n puis l'expression de u_n en fonction de n.

COURS INTERROS CORRIGÉS

INTERROS

24 Accroissement d'une population

★★ 30 min Corrigé p. 170

Lycée Hoche, Versailles

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population.

Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel annuel de 14 pour mille.

De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 le quittent.

En 2010, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus. On note P_n la population de l'année $(2010 + n)$ exprimée en milliers d'habitants.

1. **(a)** Déterminer P_0, P_1 et P_2.
   (b) La suite (P_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
2. Expliquer pourquoi on obtient pour tout entier naturel n :
$$P_{n+1} = 1{,}014P_n + 7.$$
3. Démontrer que la suite (U_n) définie pour tout entier n par $U_n = P_n + 500$ est une suite géométrique.
   Déterminer sa raison et son premier terme.
4. Exprimer U_n puis P_n en fonction de n.
5. **(a)** Combien d'habitants peut-on prévoir en 2025 ?
   (b) Au bout de combien d'années la population aura-t-elle doublé par rapport à l'année 2010 ?

25 Suites imbriquées

★★ 25 min Corrigé p. 172

Lycée Danielou, Rueil-Malmaison

On donne deux suites (U_n) et (V_n) telles que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 3V_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$$

1. Calculer U_1, V_1, U_2, V_2, U_3 et V_3.
2. On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par :
$$X_n = U_n + V_n \qquad \text{et} \qquad Y_n = U_n - V_n$$
   Montrer que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) est une suite constante.
   En déduire U_n et V_n en fonction de n.

26 Suite arithmético-géométrique ★★ 30 min Corrigé p. 173

Lycée Claude Monet, Paris

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

1. Calculer U_1 et U_2.
2. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$V_n = U_n + 3\,.$$
Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
3. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
4. Étudier les variations de la suite (V_n) puis de la suite (U_n).
5. Calculer $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$.

Algorithmes & programmation

27 Afficher les premiers termes ★★ 15 min Corrigé p. 174

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0{,}8u_n + 7.$$

1. Écrire un algorithme qui stocke les 20 premiers termes de cette suite dans un tableau (une liste) et qui les affiche.
2. Écrire le programme Python correspondant.
3. On admet que la suite (u_n) est croissante et que sa limite vaut 35.

   Écrire un algorithme, puis le programme Python correspondant, permettant d'afficher le premier indice n à partir duquel $u_n > 34{,}99$.

28 Suite de Fibonacci ★★ 15 min Corrigé p. 176

La suite de Fibonacci est la suite (F_n) définie par ses deux premiers termes $F_0 = F_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Écrire un algorithme permettant de stocker dans un tableau (une liste) les 101 premiers termes de cette suite et d'afficher tous les quotients $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ pour $n < 100$.
2. Écrire le programme Python correspondant.

CORRIGÉS

1 QCM Exprimer le terme suivant

Énoncé p. 139

1 Réponse $\boxed{c}$.
En effet,

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1 = n^2 + 3n + 1.$$

2 Réponse $\boxed{b}$.
En effet,

$$v_{n+1} = \big(2(n+1) - 1\big)^2 = (2n+2-1)^2 = (2n+1)^2.$$

3 Réponse $\boxed{a}$.
En effet,

$$w_{n+1} = \frac{5(n+1)-1}{5(n+1)+1} = \frac{5n+5-1}{5n+5+1} = \frac{5n+4}{5n+6}.$$

2 V/F Vérifiez vos connaissances

Énoncé p. 139

1 *Faux*. $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{1}{2-1} = 1$. Il est alors impossible de calculer u_2.

2 *Faux*. Le premier terme de la suite (v_n) est v_0. Il y a un décalage entre les indices et les rangs : v_9 est le dixième terme.

3 *Vrai*. En effet, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 1 - n^2 - n - 1 \\ &= 2n + 2. \end{aligned}$$

De plus, $t_{n+1} - t_n > 0$, donc $t_{n+1} - t_n > 0$.
La suite (t_n) est donc strictement croissante.

3 V/F Suites croissantes

Énoncé p. 139

1 *Faux*. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = n^2 - 3n$.
On a :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) - n^2 + 3n$$
$$u_{n+1} - u_n = 2n - 2$$

Si $n \geqslant 1$, $2n - 2 \geqslant 0$. Donc la suite (u_n) est croissante. Or la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3x$ est décroissante sur $\left[1\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$.

2 *Faux*. Soit $u_n = -2^n$.

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-2^{n+1}}{-2^n} = 2 \quad \text{donc} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Cependant, la suite (u_n) est décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -2^{n+1} + 2^n = -2^n$$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Il manquait la condition : $u_n > 0$.

3 *Vrai*. Soient (u_n) et (v_n) deux suites croissantes. On pose $w_n = u_n + v_n$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} & u_n < u_{n+1} \quad \text{et} \quad v_n < v_{n+1} \\ \text{donc} \quad & u_n + v_n < u_{n+1} + v_{n+1} \\ \text{soit} \quad & w_n < w_{n+1} \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc croissante.

4 Définition explicite d'une suite

Énoncé p. 140

Lycée Saint-Benoît, Grenoble

1 Le programme complété est le suivant :

En Python

```
from math import sqrt

def u(n):
    for k in range(n+1):
        u = sqrt(2*k+4)
        print(u)
```

Dans cette fonction, la variable entière `k` parcourt les valeurs de 0 à n (la fonction « `range` » compte $n+1$ valeurs, de 0 à n).

Il est à noter ici la présence de la fonction `sqrt`, permettant de calculer une racine carrée.

2 Le vingtième terme correspond à u_{19} :

$$u_{19} = \sqrt{2 \times 19 + 4} = \sqrt{42}.$$

Le centième terme correspond à u_{99} :

$$u_{99} = \sqrt{2 \times 99 + 4} = \sqrt{202}.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

5 Étude de la monotonie de deux suites

Énoncé p. 140

Lycée Clémenceau, Nantes

1 Pour tout entier naturel n,

$$u_n = n - n^3 = n(1-n^2) = n(1-n)(1+n) = -n(n+1)(n-1).$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = (n+1)(1-n-1)(1+n+1) = -n(n+1)(n+2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n-1) \\ &= n(n+1)\big[-n-2+n-1\big) \\ &= -3n(n+1). \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ sur $\mathbb{N}$; (u_n) est donc décroissante sur $\mathbb{N}$.

2 Pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(2 - \frac{3}{n+3}\right) - \left(2 - \frac{3}{n+2}\right) \\ &= \frac{-3(n+2)+3(n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{-3n-6+3n+9}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n > 0$; la suite (v_n) est donc strictement croissante.

6 Sens de variation d'une suite

Énoncé p. 140

Lycée Saint-Exupéry, Marseille

1 Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2+u_n} - u_n \\ &= \left(\sqrt{2+u_n} - u_n\right) \times \frac{\sqrt{2+u_n}+u_n}{\sqrt{2+u_n}+u_n} \\ &= \frac{(\sqrt{2+u_n}-u_n)(\sqrt{2+u_n}+u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n} \\ &= \frac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}. \end{aligned}$$

2 En posant $x = u_n$, sachant d'après l'énoncé que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}+x}.$$

$\sqrt{2+x} > 0$ et $x \geqslant 0$, donc $\sqrt{2+x}+x > 0$; $u_{n+1} - u_n$ est alors du signe de $2+x-x^2$.

Le polynôme $2+x-x^2$ a pour racines -1 et 2 (racines évidentes).

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2+x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3 $0 \leqslant x \leqslant 2$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

7 Suite explicite avec radical

Énoncé p. 141

Lycée Odilon Redon, Pauillac

1 **(a)** Pour tout entier $n \geqslant 1$, $n^2 \geqslant n^2 - 1 \geqslant 0$, et on déduit donc que :

$$n \geqslant \sqrt{n^2-1} \quad \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

(b) Pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2 &= n+1+2\sqrt{(n+1)}\sqrt{(n-1)}+n-1 \\ &= 2n+2\sqrt{n^2-1}.\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2-1} \leqslant n &\iff 2\sqrt{n^2-1} \leqslant 2n \\ &\iff 2n+2\sqrt{n^2-1} \leqslant 4n \\ &\iff \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2 \leqslant 4n \\ &\iff \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \leqslant \sqrt{4n}\end{aligned}$$

(car $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} > 0$ pour $n \geqslant 1$)

$$\iff \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \leqslant 2\sqrt{n}.$$

(c) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}u_n - u_{n-1} &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) - \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) \\ &= \sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}.\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n} \leqslant 0,$$

c'est-à-dire que $u_n - u_{n-1} \leqslant 0$, et donc que la suite (u_n) est décroissante.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

2 **(a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Comme pour tout entier n, $\sqrt{n+1} > 0$ et $\sqrt{n} \geqslant 0$, on a donc, $u_n > 0$.

De plus, pour tout entier n, $n+1 > n$, et donc, $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, car la fonction racine carrée est croissante.

On en déduit que $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$, et donc que :

$$0 < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante.}$$

(b) Soit $M > 0$, d'après l'encadrement précédent, il suffit de choisir n_0 tel que :

$$\frac{1}{2\sqrt{n_0}} \leqslant M \iff n_0 \geqslant \frac{1}{4M^2} \quad \text{pour que } 0 < u_{n_0} \leqslant M.$$

8 Recherche d'une suite arithmétique

Énoncé p. 141

Lycée Poincaré, Nancy

Ayant un terme et la raison d'une suite arithmétique, nous pouvons calculer facilement les autres termes de cette suite :

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

et en particulier pour $n = 17$:

$$u_{17} = u_1 + 16r = u_1 - 32.$$

Donc :

$$u_1 = u_{17} + 32 = 137.$$

D'après le cours,

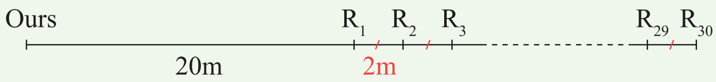
$$S_{17} = 17 \times \frac{u_1 + u_{17}}{2} = 17 \times \frac{137 + 105}{2} = 2\,057.$$

9 Calcul de la distance parcourue

Énoncé p. 141

Lycée Montesquieu, Herblay

Commençons par présenter la situation par un schéma :



Les points R_1, R_2, ..., R_{30} représentent les 30 ruches.

Au cours de son premier aller-retour, l'ours parcourt 40 m ; au voyage suivant, il en parcourt 44, puis 48 etc. À chaque voyage, la distance parcourue augmente de 4 m. La distance totale parcourue est donc la somme des trente premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 40$ et de raison 4.

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{29}$$
$$S = 30 \times \frac{u_0 + u_{29}}{2}$$
$$S = 30 \times \frac{40 + (40 + 29 \times 4)}{2}$$
$$S = 2\,940.$$

La distance totale parcourue par l'ours est 2 940 mètres.

10 Production croissante

Énoncé p. 142

Lycée Michelet, Vanves

1 $u_{n+1} = u_n + 60$.
La production augmente de 60 boîtes chaque jour, c'est une augmentation constante, la suite est donc arithmétique.

2 $u_n = u_0 + nr = 3\,500 + 60n$.

3 Il faut savoir si l'inéquation $3\,500 + 60n > 5\,000$ admet une solution inférieure ou égale à 24.

$$3\,500 + 60 \times n > 5\,000 \iff 60n > 1\,500$$
$$\iff n > 25.$$

Donc on ne pourra pas dépasser une production journalière de 5 000 boîtes au 24 juin.

11 Suite se ramenant à une arithmétique

Énoncé p. 142

Lycée Buffon, Paris

1 Par définition :

$$v_{n+1} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_{n+1}}.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

2 Pour calculer v_{n+1} en fonction de u_n, remplaçons u_{n+1} dans l'égalité précédente par :
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}.$$
On a alors :
$$v_{n+1} = \frac{1 + \dfrac{u_n}{1-u_n}}{\dfrac{u_n}{1-u_n}}$$
soit, en multipliant en haut et en bas par $1 - u_n$:
$$v_{n+1} = \frac{1-u_n+u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n}.$$

3 On a : $v_n = \dfrac{1+u_n}{u_n}$

$\iff \quad v_n u_n = 1 + u_n$

$\iff \quad u_n\big(v_n - 1\big) = 1$

$\iff \quad u_n = \dfrac{1}{v_n - 1}$, car $v_n \neq 1$.

4 Utilisons les deux égalités suivantes pour en déduire v_{n+1} en fonction de v_n :
$$v_{n+1} = \frac{1}{u_n}$$
$$u_n = \frac{1}{v_n - 1}.$$
Nous obtenons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_{n+1} = v_n - 1\ ,$$
ce qui prouve que (v_n) est une suite arithmétique de raison -1.

5 (v_n) étant arithmétique de raison $r = -1$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 + (n-1)r \qquad \text{soit} \qquad v_n = \frac{1}{2} - (n-1) = \frac{3}{2} - n.$$
Ainsi, d'après la question 3,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{\frac{3}{2} - n - 1} = -\frac{2}{2n-1}.$$

12 Quatre premiers termes d'une suite

Énoncé p. 142

Lycée Louis-Le-Grand, Paris

Notons (u_n) la suite arithmétique définie par son premier terme u_1 et sa raison r. On a donc les relations :
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 & = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 & = 84. \end{cases}$$

Or,

$$\begin{cases} u_2 &= u_1 + r \\ u_3 &= u_1 + 2r \\ u_4 &= u_1 + 3r. \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r + u_1 + 3r &= 16 \\ u_1^2 + (u_1 + r)^2 + (u_1 + 2r)^2 + (u_1 + 3r)^2 &= 84 \end{cases}$$

soit en développant :

$$\begin{cases} 4u_1 + 6r &= 16 \\ 4u_1^2 + 12ru_1 + 14r^2 &= 84 \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} 2u_1 &= 8 - 3r \\ (2u_1)^2 + 6r(2u_1) + 14r^2 &= 84 \end{cases}$$

et finalement, en remplaçant $2u_1$ par $8 - 3r$:

$$\begin{cases} 2u_1 &= 8 - 3r \\ (8 - 3r)^2 + 6r(8 - 3r) + 14r^2 &= 84 \end{cases}$$

La deuxième équation s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} & (8 - 3r)(8 - 3r + 6r) + 14r^2 = 84 \\ \iff & (8 - 3r)(8 + 3r) + 14r^2 = 84 \\ \iff & 64 - 9r^2 + 14r^2 = 84 \\ \iff & 5r^2 = 20 \\ \iff & r^2 = 4. \end{aligned}$$

Or, $r > 0$ car la suite est croissante donc $r = 2$, et la première équation donne alors :

$$2u_1 = 8 - 6 = 2.$$

Finalement :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 5 \quad \text{et} \quad u_4 = 7.$$

13 Les carrés de chocolat

Énoncé p. 143

Lycée Hector Berlioz, Vincennes

Le nombre de carrés sur chaque ligne est un terme d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.
Sur la ligne n, si on commence à la ligne 1, il y a donc au plus n chocolats.
Donc, si on fait la somme des chocolats de la ligne 1 à la n^e ligne, il peut y avoir :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \text{ chocolats.}$$

CORRIGÉS

D'après la formule du cours, il y a donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$ chocolats.
On cherche donc la plus petite valeur entière de n telle que :

$$\frac{n(n+1)}{2} \geqslant 2\,016$$

Cette inéquation est équivalente à :

$$n^2 + n - 4\,032 \geqslant 0$$

$\Delta = 16\,129$.

La plus grande des deux racines est $x' = \dfrac{-1+\sqrt{16\,129}}{2} = 63$. (l'autre racine est négative)
Donc la plus petite valeur de n entière possible est 63. Il y a donc 63 rangées de chocolat.
Sur les 62 premières rangées, on a mis $\dfrac{62 \times 63}{2} = 1\,953$ chocolats.
Il en reste donc $2\,016 - 1\,953 = 63$. La dernière rangée sera donc complète !

14 Recherche de trois nombres

Énoncé p. 143

Lycée Notre-Dame de France, Paris

En notant r la raison de la suite arithmétique et q celle de la suite géométrique, les hypothèses s'écrivent :

$$a = b - r \quad (1)$$
$$c = b + r \quad (2)$$
$$a = \frac{c}{q} \quad (3)$$
$$b = cq \quad (4)$$
$$a + b + c = 99 \quad (5)$$

De (1) et (2), on déduit : $a + c = 2b$.
De (3) et (4), on déduit : $ab = c^2$.

MÉTHODE

Il est souvent intéressant de travailler avec le terme du milieu, car cela permet d'éliminer les raisons des équations.

En remplaçant $a + c$ par $2b$ dans (5), on obtient :

$$3b = 99\,,$$

et donc :

$$b = 33.$$

Pour trouver a et c, on doit résoudre :

$$\begin{cases} a + c = 66 \\ 33a = c^2 \qquad (6) \end{cases}$$

De l'équation (6), on tire :

$$a = \frac{c^2}{33}.$$

On remplace dans la première équation a par cette valeur :

$$\frac{c^2}{33} + c = 66,$$

d'où :

$$c^2 + 33c = 66 \times 33,$$

soit :

$$c^2 + 33c - 66 \times 33 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut :

$$\Delta = 33^2 + 4 \times 66 \times 33 = 33^2 + 8 \times 33^2 = 9 \times 33^2 = (3 \times 33)^2 = 99^2.$$

On a donc deux solutions possibles :

$$c_1 = \frac{-33 - 99}{2} = -66 \qquad \text{et} \qquad c_2 = \frac{-33 + 99}{2} = 33.$$

Les solutions correspondantes pour a sont :

$$a_1 = \frac{c_1^2}{33} = \frac{(33 \times 2)^2}{33} = 33 \times 4 = 132$$

$$a_2 = \frac{c_2^2}{33} = \frac{33^2}{33} = 33.$$

Dans le premier cas, on a le triplet solution :

$$(a_1, b_1, c_1) = (132, 33, -66)$$

et dans le second cas :

$$(a_2, b_2, c_2) = (33, 33, 33).$$

On vérifie aisément que ces deux triplets conviennent.

15 Le rebond

Énoncé p. 143

Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

1 $R_{n+1} = \dfrac{9}{10} R_n$.

2 La suite R est géométrique, chaque terme se déduisant du précédent par multiplication par $\dfrac{9}{10}$.

CORRIGÉS

3 $R_n = R_0 \left(\dfrac{9}{10}\right)^n = 100\left(\dfrac{9}{10}\right)^n.$

4 On cherche n tel que $R_n < 0{,}2$, donc tel que $100\left(\dfrac{9}{10}\right)^n < 0{,}2$.

En tabulant sur la calculatrice, on obtient :

X	Y_1
55	.30433
56	.27389
57	.24650
58	.22185
59	.19967

$n = 59$. Il faudra 59 rebonds pour que le mouvement cesse.

Remarque : on sait que la suite est décroissante puisque la raison est comprise entre 0 et 1 et que le premier terme R_0 est positif.

16 Recherche d'une suite géométrique

Énoncé p. 144

Lycée Blaise Pascal, Orsay

1 Si on appelle q la raison de la suite, on a :

$$u_2 = qu_1 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{u_3}{q},$$

donc :

$$u_2^2 = u_1u_3 = \frac{4}{9}.$$

(u_n) est à termes négatifs, donc :

$$u_2 = -\frac{2}{3}.$$

Comme :

$$\begin{cases} u_1 \times u_3 & = \dfrac{4}{9} \\ u_1 + u_2 + u_3 & = -\dfrac{19}{9} \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} u_1u_3 = \dfrac{4}{9} \\ u_1 - \dfrac{2}{3} + u_3 = -\dfrac{19}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} u_1u_3 = \dfrac{4}{9} \\ u_1 + u_3 = -\dfrac{13}{9} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_3 = -u_1 - \dfrac{13}{9} \\ u_1\left(-u_1 - \dfrac{13}{9}\right) = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

u_1 est donc solution de l'équation :

$$x\left(-x - \frac{13}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

soit :

$$9x^2 + 13x + 4 = 0.$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = 13^2 - 4 \times 4 \times 9 = 25.$$

Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-13 - 5}{18} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-13 + 5}{18} = -\frac{8}{18} = -\frac{4}{9}.$$

D'où :

- $u_1 = -1$ (et dans ce cas $u_3 = -u_1 - \frac{13}{9} = -\frac{4}{9}$) ;
- ou $u_1 = -\frac{4}{9}$ (et dans ce cas $u_3 = -u_1 - \frac{13}{9} = -1$).

(u_n) est croissante, donc $u_3 \geqslant u_1$. On retient donc comme solution :

$$u_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad u_3 = -\frac{4}{9}.$$

Nous avons donc finalement :

$$u_1 = -1, \qquad u_2 = -\frac{2}{3}, \qquad u_3 = -\frac{4}{9}.$$

On remarque que la raison est $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{3}$.

2 Pour calculer u_n, utilisons simplement la définition des suites géométriques :

$$u_n = q^{n-1} u_1 = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

17 $n + 1$ premiers termes d'une suite

Énoncé p. 144

Lycée Saint-Benoît, Paris

1 Pour calculer les premiers termes, on peut directement écrire :

$$U_0 = 2^0 - 5 \times 0 + 6 = 7.$$
$$U_1 = 2^1 - 5 \times 1 + 6 = 3.$$
$$U_2 = 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0.$$
$$U_3 = 2^3 - 5 \times 3 + 6 = -1.$$

2 Pour calculer S_n en fonction de n, il faut penser à décomposer la somme :

$$U_n = \underbrace{(2^n)}_{V_n} + \underbrace{(-5n + 6)}_{W_n}$$

où (V_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 et (W_n) la suite arithmétique de raison -5 et de premier terme 6. On peut alors écrire :

$$S_n = S_n(V) + S_n(W)\,,$$

avec :

$$\begin{cases} S_n(V) = V_0 + V_1 + \cdots + V_n \\ S_n(W) = W_0 + W_1 + \cdots + W_n \end{cases}$$

$$S_n(V) = 1 + 2 + \cdots + 2^n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

$$\begin{aligned} S_n(W) &= 6 + (6-5) + (6 - 2\times 5) + \cdots + (6 - n \times 5) \\ &= (n+1)\times 6 - 5(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= 6(n+1) - 5\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{12(n+1) - 5n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(12-5n)}{2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} S_n(V) = 2^{n+1} - 1 \\ S_n(W) = \dfrac{n+1}{2}(12-5n). \end{cases}$$

On obtient donc :

$$S_n = S_n(V) + S_n(W) = 2^{n+1} - 1 + \frac{n+1}{2}(12-5n)\,.$$

Vérifions pour les quatre premiers termes :

$$S_3 = 7 + 3 + 0 - 1 = 9$$

et par le calcul précédent :

$$S_3 = 2^4 - 1 + \frac{4}{2}(12-15) = 9\,.$$

18 Capitaux et intérêts composés

Énoncé p. 144

Lycée Notre-Dame, Ussel

1 Le capital A est placé à intérêts composés au taux de 3 % l'an. Le capital obtenu au bout d'un an, C_1, est égal à la somme du capital initial C_0 et des intérêts soit $0{,}03C_0$. D'où :

$$C_1 = C_0 + 0{,}03C_0 = 1{,}03C_0\,.$$

Plus généralement, le capital obtenu au bout de $n+1$ années, C_{n+1}, est égal à la somme du capital obtenu au bout de n années C_n et des intérêts soit $0{,}03C_n$.

D'où :

$$C_{n+1} = C_n + 0{,}03C_n = 1{,}03C_n\,.$$

On en déduit que la suite (C_n) est la suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme C_0. D'après le cours, on a alors, pour tout entier naturel n, $C_n = (1{,}03)^n C_0$.

2 **(a)** Le capital C_{n+1} acquis au bout de la n^e année est donné en fonction du capital de l'année précédente C_n par la relation de récurrence : $C_{n+1} = 1{,}03C_n$, sachant que le capital vaut initialement $C_0 = A$.

L'algorithme suivant permet de calculer et d'afficher les montants des capitaux acquis les N premières années.

Algorithme

```
C ← A
Pour I de 1 à N
      C ← 1.03*C
Fin Pour
Afficher C
```

En Python

```python
def cap(A,N):
    C = A
    for i in range(1,N+1):
        C = 1.03*C
    return C
```

(b) On peut utiliser l'algorithme précédent pour $A = 150$ et différentes valeurs de N jusqu'à trouver un entier N tel que le capital affiché ait doublé.

On peut aussi modifier l'algorithme de la manière suivante :

Algorithme

```
Tant que C<2A
      C ← 1.03*C
      I ← I+1
Fin Tant que
Afficher I
```

En Python

```python
def cap2(A):
    C = A
    I = 0
    while C<2*A:
        C = 1.03*C
        I = I+1
    return I
```

Pour un capital de départ $A = 150$ euros, on trouve à l'aide de ce programme qu'il faut $N = 24$ années pour doubler ce capital.

(c) Pour un capital de départ $A = 700$ euros, on trouve de même à l'aide du programme précédent qu'il faut aussi $N = 24$ années pour doubler ce capital.

On peut conjecturer que le nombre d'années nécessaires pour doubler le capital initial est indépendant du montant de ce capital.

(d) Plus généralement, pour un capital de départ A quelconque, le capital est doublé au bout de n années si et seulement si $C_n \geqslant 2C_0$

CORRIGÉS

soit :

$$(1{,}03)^n C_0 \geqslant 2C_0\,.$$

On cherche donc le plus petit entier n tel que $(1{,}03)^n \geqslant 2$. À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$(1{,}03)^{23} < 2 < (1{,}03)^{24}\,.$$

Le capital est donc doublé au bout de 24 ans, indépendamment du capital initial.

19 Un problème d'optique

Énoncé p. 144

Lycée Jehan de Chelles, Chelles

1 Comme le rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse en traversant la plaque de verre, son intensité I_1 à sa sortie est égale à l'intensité de départ I_0 moins $0{,}23I_0$, soit $0{,}77I_0$. On a donc :

$$I_1 = 0{,}77I_0\,.$$

2 **(a)** En appliquant le raisonnement de la question précédente, l'intensité I_n du rayon à sa sortie de la n^e plaque est égale à $0{,}77I_{n-1}$.

(b) On en déduit que la suite (I_n) est une suite géométrique de raison 0,77. Son premier terme est I_0. En appliquant la formule du cours, on obtient, pour tout entier naturel n :

$$I_n = I_0 \times (0{,}77)^n\,.$$

(c) La suite (I_n) est une suite à termes strictement positifs et , pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = 0{,}77I_n$. On en déduit que $I_{n+1} < I_n$ donc la suite (I_n) est strictement décroissante.

3 Après avoir traversé 4 plaques, l'intensité est $I_0 \times (0{,}77)^4$. On cherche donc I_0 tel que $I_0 \times (0{,}77)^4 = 15$. D'où :

$$I_0 = \frac{15}{0{,}77^4}.$$

L'intensité initiale était environ 42,67.

4 Soit n le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante. Le nombre n cherché est le plus petit entier tel que :

$$I_0 \times (0{,}77)^n \leqslant \frac{1}{4} I_0\,,$$

soit :

$$(0{,}77)^n \leqslant 0{,}25\,.$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$(0{,}77)^5 \geqslant 0{,}25 \geqslant (0{,}77)^6\,.$$

On en déduit que le rayon doit avoir traversé au moins six plaques.

20 Les empilements

Énoncé p. 145

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-bois

Partie A

1 $c_0 = 1\,024$, donc $c_1 = \dfrac{3}{4} \times 1\,024 = 768$.

2 Chaque terme est égal au terme précédent multiplié par 0,75, donc cette suite est géométrique, de premier terme 1 024 (en mm) et de raison 0,75.

3 On a donc d'après le cours $c_n = 1\,024 \times 0{,}75^n$.

4 Le dixième cube est le cube $n°$ 9, puisqu'on commence la numérotation à 0.

$$c_9 = 1\,024 \times 0{,}75^9 = 1\,024 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9 \approx 76{,}9 \text{ (en mm).}$$

5 La hauteur formée par les 10 premiers cubes est :

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 + \cdots + c_9 &= c_0 + \frac{3}{4}c_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 c_0 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^9 c_0 \\
&= c_0\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \\
&= c_0\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}}{1-\frac{3}{4}}\right) \\
&= 4c_0(1-0{,}75^{10}) \\
&\approx 3\,865 \text{ mm.}
\end{aligned}$$

6 En remplaçant 9 par $n-1$ dans le raisonnement ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1} &= c_0\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}{1-\frac{3}{4}}\right) \\
&= 4c_0\big(1-0{,}75^n\big) \\
&= 4\,096\big(1-0{,}75^n\big).
\end{aligned}$$

7 Le facteur dans la parenthèse est toujours inférieur à 1, donc la tour ne pourra jamais dépasser 4 096 mm de hauteur.

CORRIGÉS

8 À la calculatrice, on obtient le tableau suivant pour la hauteur, suivant le nombre de cubes :

X	Y1
2	1792
3	2368
4	2800
5	3124
6	3367
7	3549.3
8	3685.9

Donc la hauteur dépassera 3 000 mm avec 5 cubes.

Partie B

1 **(a)** $d_1 = d_0 + 4 = 14$.
(b) (d_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme 10.
(c) On a donc $d_n = d_0 + n \times 4 = 10 + 4n$.
(d) Le dixième cube a pour côté d_9.
$d_9 = 10 + 4 \times 9 = 46$.
(e) La hauteur formée par l'empilement des dix premiers cubes est :

$$\begin{aligned} d_0 + d_1 + \cdots + d_9 &= d_0 + d_0 + 4 + d_0 + 2 \times 4 + \cdots + d_0 + 9 \times 4 \\ &= 10d_0 + 4(1 + 2 + \cdots + 9) \\ &= 100 + 4 \times \frac{9 \times 10}{2} \text{ d'après la formule du cours} \\ &= 280. \end{aligned}$$

2 **(a)** $v_0 = 1\,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$ (ça ne fait pas de mal de réviser les conversions ...).
$v_1 = 14^3 = 2\,744 \ (\text{cm}^3)$.
$v_2 = 18^3 = 5\,832 \ (\text{cm}^3)$.
(b) La suite n'est pas arithmétique car $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$.
(c) $V_1 = 10^3 = 1\,000$.
$V_2 = 1\,000 + 14^3 = 3\,744$.
(d) $V_3 = 3\,744 + 18^3 = 9\,576$.

21 Suite arithmético-géométrique

Énoncé p. 146

Lycée Descartes, Antony

1 On a :

$$\begin{cases} U_0 &= 6 \\ U_{n+1} &= \frac{1}{2}U_n + 5. \end{cases}$$

Pour calculer les quatre premiers termes, il suffit d'écrire :

$$U_0 = 6; \qquad U_1 = \frac{1}{2} \times 6 + 5 = 8;$$
$$U_2 = \frac{1}{2} \times 8 + 5 = 9; \qquad U_3 = \frac{1}{2} \times 9 + 5 = \frac{19}{2}.$$

On peut remarquer que l'on a bien calculé les quatre premiers termes, puisque l'on avait déjà U_0 !

2 Démontrons que (V_n) est bien une suite géométrique.

Nous avons :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 10\,,$$

soit :

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 5 - 10 = \frac{1}{2}U_n - 5\,.$$

Or, nous avons :

$$U_n = V_n + 10.$$

Donc :

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + 10) - 5 = \frac{1}{2}V_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Nous voyons donc bien que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Il reste à en calculer le premier terme. Nous avons :

$$V_0 = U_0 - 10 = -4\,.$$

(V_n) est donc la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -4.

Pour exprimer V_n en fonction de n, il suffit de revenir à la définition des suites géométriques :

$$V_n = q^n V_0 = -\frac{4}{2^n}, \quad \text{soit :} \quad V_n = \frac{-1}{2^{n-2}}\,.$$

Or, nous avons :

$$U_n = V_n + 10\,,$$

donc :

$$U_n = \frac{-1}{2^{n-2}} + 10\,.$$

3 Pour calculer la somme des premiers termes, utilisons les formules du cours.

CORRIGÉS

(V_n) étant une suite géométrique de raison différente de 1, nous avons :

$$\begin{aligned} S_{10} &= V_0 + V_1 + \cdots + V_{10} \\ &= V_0 + qV_0 + \cdots + q^{10}V_{10} \\ &= V_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^{10}) \\ &= V_0\frac{1-q^{11}}{1-q} \end{aligned}$$

soit :

$$S_{10} = -4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}\right) = -4\left(\frac{\frac{2^{11}-1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}}\right) = -8\left(\frac{2^{11}-1}{2^{11}}\right),$$

soit :

$$S_{10} = -2^3\left(\frac{2^{11}-1}{2^{11}}\right) = -\frac{1}{2^8}(2^{11}-1)\,.$$

Finalement :

$$S_{10} \approx -7{,}996\,.$$

Ayant $U_n = V_n + 10$, nous pouvons écrire :

$$S'_{10} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{10}$$

donc :

$$S'_{10} = V_0 + 10 + V_1 + 10 + V_2 + 10 + \cdots + V_{10} + 10$$

soit :

$$S'_{10} = S_{10} + 11 \times 10 = S_{10} + 110$$

ou encore :

$$S'_{10} = 110 - \frac{1}{2^8}(2^{11}-1)\,.$$

Finalement :

$$S'_{10} \approx 102{,}004\,.$$

22 Étude algorithmique d'une suite

Énoncé p. 147

Lycée Odilon Redon, Pauillac

1 L'algorithme suivant permet de calculer les termes U_1 à U_n.

Algorithme

```
u ← 6
Pour I de 1 à N
     u ← u/3 + 2
     Afficher u
Fin Pour
```

En Python

```python
def u(n):
    u = 6
    for i in range(1,n+1):
        u = u/3 + 2
        print(u)
```

Pour $N = 5$, le programme fournit l'affichage ci-contre.

```
4
3.333333333
3.111111111
3.037037037
3.012345679
```

En utilisant cet algorithme pour N plus grand ($N = 10$, $N = 20$, $N = 100$, …), on peut conjecturer que u_n se rapproche de 3 quand n grandit ; on écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 3.$$

2 Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3) \\ &= \frac{1}{3}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 3$.

On en déduit que, pour tout entier n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Ainsi,

$$u_n = v_n + 3 = \frac{1}{3^{n-1}} + 3.$$

Plus n est grand, plus 3^{n-1} est grand, donc plus $\dfrac{1}{3^{n-1}}$ se rapproche de 0. Par conséquent, u_n tend vers 3, ce qui conforte la conjecture émise.

3

Algorithme

```
S ← 6
u ← 6
Pour i allant de 1 à 10
     u ← u/3 + 2
     S ← S+u
Fin Pour
Afficher S
```

En Python

```python
S = 6
U = 6
for i in range(1,11):
    U = U/3 + 2
    S = S + U

print(S)
```

On obtient $S_{10} \approx 37{,}5$.

CORRIGÉS

23 Une suite différente

Énoncé p. 147

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 $$\begin{aligned} u_1 &= u_{0+1} \\ &= \frac{0+2}{3(0+1)}u_0 \quad \text{car } u_{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)}u_n \text{ et on prend } n=0 \\ &= \frac{2}{3} \times 1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2 Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ (admis dans l'énoncé) et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{n+2}{3n+3} = \frac{n+2}{(n+2)+(2n+1)}.$$

Or, pour tout entier naturel n,

$$(n+2)+(2n+1) > n+2 \qquad \text{donc} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

On en déduit alors que (u_n) est strictement décroissante.

3 **(a)** $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{(n+1)+1} \\ &= \frac{1}{n+2} \times \frac{n+2}{3(n+1)}u_n \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{n+1} \\ &= \frac{1}{3}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, et de premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0}{0+1} = 1.$$

(b) Le terme général de (v_n) est, d'après la question précédente :

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3^n}.$$

Or, $v_n = \frac{u_n}{n+1}$ donc :

$$\frac{1}{3^n} = \frac{u_n}{n+1} \qquad \text{soit :} \qquad u_n = \frac{n+1}{3^n}.$$

24 Accroissement d'une population

Énoncé p. 148

Lycée Hoche, Versailles

1 **(a)** $P_0 = 75\,000$; $P_1 = 1{,}014 \times 75\,000 + 12 - 5 = 76\,057$;
$P_2 = 1{,}014 \times 76\,057 + 7 = 77\,128{,}798$.

(b) $P_1 - P_0 = 1\,057$; $P_2 - P_1 = 1\,071{,}798$. Ces différences ne sont pas égales, donc la suite n'est pas arithmétique.

$\dfrac{76\,057}{75\,000} \approx 1{,}014\,093$ et $\dfrac{77\,128{,}798}{76\,057} \approx 1{,}014\,092$.

Ces quotients ne sont pas égaux, donc la suite n'est pas géométrique.

2 L'accroissement de la population étant de 14 pour mille, la population de l'année précédente est multipliée par 1,014. De plus, avec une arrivée de 12 milliers de personnes nouvelles et un départ de 5 milliers de personnes, on a un apport de 7 milliers de personnes.
On a donc bien $P_{n+1} = 1{,}014P_n + 7$.

3
$$\begin{aligned} U_{n+1} &= P_{n+1} + 500 \\ &= 1{,}014P_n + 7 + 500 \\ &= 1{,}014\left(P_n + \frac{507}{1{,}014}\right) \\ &= 1{,}014(P_n + 500) \\ &= 1{,}014U_n. \end{aligned}$$

Donc la suite U est bien géométrique.

Son premier terme est : $U_0 = P_0 + 500 = 75\,500$, et sa raison est 1,014.

4 $U_n = 75\,500 \times 1{,}014^n$.
Comme $P_n = U_n - 500$, on a :

$$P_n = 75\,500 \times 1{,}014^n - 500.$$

5 **(a)** Il faut calculer P_{15} car $2025 = 2010 + 15$.

$$P_{15} = 75\,500 \times 1{,}014^{15} - 500 \approx 92\,507{,}137$$

ce qui correspond à une population de 92 507 137 habitants.

(b) Il faut calculer la valeur des termes successifs de la suite et voir en quelle année la population sera de 150 millions d'habitants, donc quand P_n dépassera 150 000 puisque P_n est exprimé en milliers d'habitants.

Voici ci-contre un extrait d'une table réalisée avec un tableur (mais on peut faire la même chose avec la calculatrice).

La population aura donc doublé en 2060.

2 051	133 006,714
2 052	134 875,808
2 053	136 771,069
2 054	138 692,864
2 055	140 641,564
2 056	142 617,546
2 057	144 621,192
2 058	146 652,889
2 059	148 713,029
2 060	150 802,011

CORRIGÉS

25 Suites imbriquées

Énoncé p. 148

Lycée Danielou, Rueil-Malmaison

1 On peut directement calculer les premières valeurs :

$$\begin{cases} U_1 = 3U_0 + 2V_0 = 3 + 4 = 7 \\ V_1 = 2U_0 + 3V_0 = 2 + 6 = 8 \end{cases}$$

De même, on a :

$$\begin{cases} U_2 = 3U_1 + 2V_1 = 21 + 16 = 37 \\ V_2 = 2U_1 + 3V_1 = 14 + 24 = 38 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} U_3 = 3U_2 + 2V_2 = 111 + 76 = 187 \\ V_3 = 2U_2 + 3V_2 = 74 + 114 = 188. \end{cases}$$

2 Étudions les suites (X_n) et (Y_n) :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= U_{n+1} + V_{n+1} \\ &= 3U_n + 2V_n + 2U_n + 3V_n \\ &= 5(U_n + V_n)\,. \end{aligned}$$

On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = 5X_n\,.$$

La suite (X_n) est la suite géométrique de raison 5 et de premier terme :

$$X_0 = U_0 + V_0 = 3\,.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= U_{n+1} - V_{n+1} \\ &= 3U_n + 2V_n - 2U_n - 3V_n \\ &= U_n - V_n\,. \end{aligned}$$

On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Y_{n+1} = Y_n\,.$$

(Y_n) est une suite constante égale à $Y_0 = 1 - 2 = -1$.

Pour en déduire U_n et V_n, il suffit d'écrire :

$$X_n + Y_n = 2U_n \qquad \text{et} \qquad X_n - Y_n = 2V_n\,.$$

On a alors, par définition des suites géométriques :

$$X_n = 3 \times 5^n$$

et on a :

$$\begin{cases} U_n = \dfrac{X_n + Y_n}{2} = \dfrac{3 \times 5^n - 1}{2} \\ V_n = \dfrac{X_n - Y_n}{2} = \dfrac{3 \times 5^n + 1}{2} \end{cases}$$

26 Suite arithmético-géométrique

Énoncé p. 149

Lycée Claude Monet, Paris

1 $U_1 = \frac{1}{2}U_0 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$

$U_2 = \frac{1}{2}U_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} = U_{n+1} + 3 &= \frac{1}{2}U_n - \frac{3}{2} + 3 \\ &= \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(U_n + 3) \\ &= \frac{1}{2}V_n \,. \end{aligned}$$

Cette relation prouve que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme :

$$V_0 = U_0 + 3 = 4\,.$$

3 D'après le cours, on a : $V_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit $V_n = \frac{1}{2^{n-2}}$.

Comme $U_n = V_n - 3$, on a alors : $U_n = \frac{1}{2^{n-2}} - 3$.

4 La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$V_n = \frac{1}{2^{n-2}}$$

donc $V_n > 0$ et :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2}$$

soit :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$$

ce qui prouve que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
De plus, puisque $V_{n+1} < V_n$ pour tout n, on a également :

$$V_{n+1} - 3 < V_n - 3, \qquad \text{pour tout } n$$

c'est-à-dire :

$$U_{n+1} < U_n, \qquad \text{pour tout } n\,.$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

5 $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$
$= (V_0 - 3) + (V_1 - 3) + \cdots + (V_{10} - 3)$
$= V_0 + V_1 + \cdots + V_{10} - 11 \times 3$
$= V_0 + V_1 + \cdots + V_{10} - 33.$

Or, on a :

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_{10} = V_0 \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right].$$

Donc :

$$\begin{aligned} V_0 + V_1 + \cdots + V_{10} &= V_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\frac{1}{2}} \\ &= 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S &= 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right) - 33 \\ &= 8 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} - 33 \\ &= -2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} - 25 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{8} - 25. \end{aligned}$$

27 Afficher les premiers termes

Énoncé p. 149

1 Algorithme

```
Initialisation:
        u ← 5 (1er terme de la suite)
        L ← [5] (liste)
Traitement:
        Pour n allant de 1 à 19:
                u ← 0.8*u+7
                On ajoute à L la valeur u
        Fin du Pour
Sortie:
        Afficher L
```

2

En Python

```
u = 5 # 1er terme
L = [5] # liste avec le premier terme
# range(a,b) : les entiers de a à b-1
for n in range(1,20):
    u = 0.8*u+7
    L.append(u) # on ajoute à L la valeur obtenue

print(L) # on affiche la liste
```

3 Pour afficher le premier indice n pour lequel $u_n > 34{,}99$, on utilise une boucle « Tant que ».

Algorithme

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ⩽ 34.99:
  u ← 0.8*u+7
  n ← n+1
Fin du Tant que
Afficher n
```

À RETENIR

La condition qui vient après « Tant que » est toujours le contraire de la condition à remplir. Ici, on veut que $u_n > 34{,}99$ et le contraire de cette condition est « $u_n \leqslant 34{,}99$ ».

Programme Python

```
u = 5
n = 0
while (u<=34.99):
    u = 0.8*u+7
    n += 1
print(n)
```

Il affiche ici la valeur 36, ce qui signifie que $u_{35} \leqslant 34{,}99$ et que $u_{36} > 34{,}99$.

28 Suite de Fibonacci

Énoncé p. 149

1 **Algorithme**

```
Initialisation:
  F est une liste
  F ← [1,1] (les deux premiers termes de la suite)
Traitement:
  Pour n allant de 2 à 100:
    F ← F[n-2] + F[n-1]
    Afficher F[n-1]/F[n-2]
  Fin du Pour
```

2 **En Python**

```python
F = [1,1]
for n in range(2,100):
    F.append(F[n-2]+F[n-1])
    print(F[n-1]/F[n-2])
```

ANECDOTE

Si on fait tourner le programme ci-dessus, on voit que les quotients affichés sont, à partir d'un certain rang, tous égaux à `1.618033988749895`.

```
1.6180339887498951
1.6180339887498947
1.618033988749895
1.618033988749895
```

Bien entendu, cette valeur n'est qu'une valeur approchée de la limite des quotients $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Cette limite est appelée le *nombre d'or*.
C'est une valeur que l'on retrouve ailleurs (par exemple, le nombre d'or est une des solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$).

Chapitre
6

Fonctions trigonométriques

Plan du chapitre

1 Cercle trigonométrique et radian

Exercice type — Lycée Champollion, Grenoble

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Les questions suivantes sont indépendantes.

1 Placer sur le cercle trigonométrique les points M et N tels que :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{5\pi}{6} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) = -\frac{7\pi}{4}.$$

2 Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{17}}{7}$.

Voir corrigé page 179

1.1 Le cercle trigonométrique

Définition 1

Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (celui qui est contraire au sens des aiguilles d'une montre).

1.2 Radian

Le degré est l'unité d'angle couramment utilisée dans les sciences appliquées. Par contre, certaines notions mathématiques sont plus facilement exprimées à l'aide d'une autre unité de mesure des angles : le radian.

COURS

Définition 2

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
Le radian est défini comme étant la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc de longueur 1.

Propriété 1

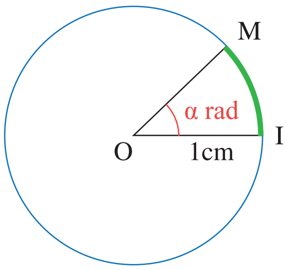
Dans un cercle de rayon 1, la mesure en radian d'un angle au centre est égal à la longueur de l'arc qu'il intercepte.

Remarque : pour un angle inscrit dans un cercle de rayon R, la longueur de l'arc intercepté est égale à la mesure en radian de l'angle multipliée par R.

1.3 Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

Propriété 2

Un point M du cercle trigonométrique est repéré par un réel α exprimant la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ si M est situé sur le demi-cercle supérieur et l'opposé de cette longueur si M est situé sur le demi-cercle inférieur.
Puisque la longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π, les réels α et $\alpha + k \times 2\pi$, avec k entier, repèrent le même point du cercle trigonométrique.
$|\alpha|$ est donc une mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$.



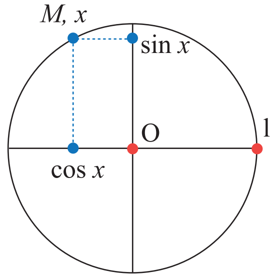
$\overset{\frown}{IM} = \alpha$ cm.

2 Sinus et cosinus d'un nombre réel

2.1 Définition

Définition 3

Soit x un nombre réel et M son image sur le cercle trigonométrique.
Le cosinus de x est égal à l'abscisse du point M.
Le sinus de x est égal à l'ordonnée du point M.



2.2 Égalité trigonométrique fondamentale et transformations

Propriété 3 : égalité fondamentale de trigonométrie

Pour tout nombre réel x,

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Propriété 4 : formules de transformations

Pour tout réel x,

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

2.3 Valeurs remarquables

α en rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

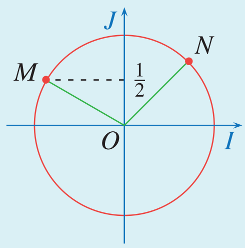
Solution de l'exercice type

Lycée Champollion, Grenoble

1 Pour M : $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$.

Donc $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Pour N : $-\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{\pi}{4}$ (sur la 1re bissectrice)



2 On a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{17}{49}$$

Donc :

$$\cos^2 x = 1 - \frac{17}{49} = \frac{32}{49}.$$

De plus, $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $\cos x \leqslant 0$.

Par suite :

$$\cos x = -\sqrt{\frac{32}{49}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Voir énoncé page 177

INTERROS

1 QCM Relations entre sin et cos

15 min

Corrigé p. 185

Pour chaque question, donner la bonne réponse.

1 Pour tout x de $]0\,;\pi[$, on a :

a $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

b $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

c $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

d $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\cos x - 1}$

2 Si $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et si $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ alors $\cos\alpha$ est égal à :

a $\dfrac{1}{2}$

b $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Dans les questions suivantes, x est un réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3 $\cos^2\dfrac{x}{3} + \sin^2\dfrac{x}{3} =$

a $\dfrac{1}{3}$

b $\dfrac{1}{9}$

c 1

4 On sait que $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. Alors, $\cos x$ est égal à :

a $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d $\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5 On sait que le réel x de la question précédente prend une des valeurs suivantes. Laquelle ?

a $\dfrac{\pi}{12}$

b $\dfrac{5\pi}{12}$

c $-\dfrac{\pi}{12}$

d $-\dfrac{5\pi}{12}$

6 $\left(\cos x + \sin x\right)\left(\cos x - \sin x\right) =$

a 1

b $1 - 2\sin^2(x)$

c $1 + 2\sin^2(x)$

d $\cos^2(x) - 1$

2 QCM Testez vos connaissances

15 min Corrigé p. 185

Pour chaque question, une seule réponse est juste. Choisir la bonne réponse.

1 Un angle a une mesure égale égale à 60°. Sa mesure en radians est :

a $-\dfrac{\pi}{6}$ b $\dfrac{\pi}{6}$ c $\dfrac{\pi}{3}$ d $\dfrac{2\pi}{3}$

2 Un angle a une mesure égale égale à 135°. Sa mesure en radians est :

a $\dfrac{\pi}{4}$ b $\dfrac{3\pi}{4}$ c $\dfrac{5\pi}{4}$ d $-\dfrac{7\pi}{4}$

3 Le point M du cercle trigonométrique est associé à un angle de 225°. Il est aussi associé à l'angle :

a $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad b $\dfrac{7\pi}{4}$ rad c $\dfrac{3\pi}{4}$ rad d $-\dfrac{7\pi}{4}$ rad

4 Le sinus de l'angle $\dfrac{9\pi}{4}$ est égal à :

a $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b $\dfrac{1}{2}$ c $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Cercle trigonométrique et radian

3 Conversions de degrés à radians ★

5 min Corrigé p. 186

Lycée Stanislas, Paris

Convertir en radians les angles suivants (exprimés en degrés).

1 15°

2 72°

3 135°

4 720°

4 Conversions de radians à degrés ★

5 min Corrigé p. 186

Lycée Montaigne, Bordeaux

Convertir les angles suivants en degrés.

1 $\dfrac{7\pi}{3}$ rad.

2 $\dfrac{13\pi}{18}$ rad.

3 $\dfrac{9\pi}{5}$ rad.

4 $\dfrac{\pi}{36}$ rad.

INTERROS

5 Placement de points

★★ 10 min Corrigé p. 186

Lycée Stanislas, Paris

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants aux angles suivants, exprimés en radians.

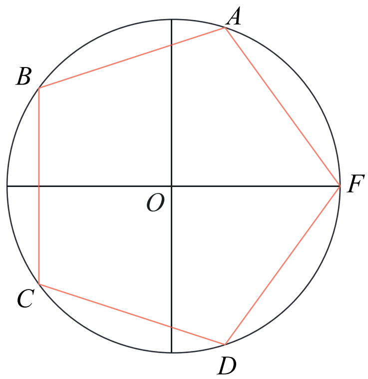
1 $\dfrac{25\pi}{3}$ **2** $\dfrac{13\pi}{2}$ **3** $\dfrac{19\pi}{6}$ **4** 121π

6 Pentagone régulier

★ 10 min Corrigé p. 187

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Le pentagone régulier ci-dessous est inscrit dans le cercle trigonométrique.



Déterminer l'angle en radian de chacun de ses sommets.

Sinus et cosinus

7 Identité trigonométrique

★ 5 min Corrigé p. 188

Lycée Stanislas, Paris

Montrer que pour tout réel x :

$$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2.$$

8 Détermination d'un sinus

★ 10 min Corrigé p. 188

Lycée Lamartine, Paris

Un angle x est tel que $x \in]-\pi\,;0]$ et $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Déterminer une valeur exacte de $\sin x$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

9 Une équation trigonométrique ★★ 10 min Corrigé p. 189

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Calculer $\sin x$ et $\cos x$ sachant que l'on a :

$$3\sin x + 4\cos x = 5.$$

Indication : on pourra utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

10 Calcul avec les angles associés ★★ 10 min Corrigé p. 189

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :

1. $\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}$
2. $\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}$
3. $1 + \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4}$

11 Équation ★★ 15 min Corrigé p. 190

Lycée Sophie Germain, Paris

1. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation : $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.
2. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

12 Pêle-mêle ★★ 15 min Corrigé p. 190

Lycée Blomet, Paris

1. Déterminer la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

   (a) $\cos\frac{5\pi}{3}$

   (b) $\sin\frac{7\pi}{6}$

   (c) $\sin\frac{113\pi}{3}$

   (d) $\cos\left(-\frac{37\pi}{4}\right)$

2. Simplifier $S = \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}$.
3. Sachant que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ et que $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, déterminer la valeur de $\cos x$.

INTERROS

13 En utilisant le carré

★★ 15 min Corrigé p. 191

Lycée Honoré de Balzac, Paris

On veut résoudre l'équation (E) : $\sqrt{3}\cos x = \sin x$ dans $[0\,;2\pi[$.

1. Démontrer que si x est solution de l'équation (E), alors x est aussi solution de l'équation $\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$.
2. Résoudre l'équation $\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$ dans $[0\,;2\pi[$.
3. Expliquer pourquoi $\cos x$ et $\sin x$ doivent avoir le même signe.
4. En déduire les solutions de l'équation (E).

14 Une somme

★★★ 15 min Corrigé p. 192

Lycée Daguin, Mérignac

On pose :

$$S = \sum_{k=0}^{19} \sin^k \frac{\pi}{4} = 1 + \sin\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \cdots + \sin^{19}\frac{\pi}{4}.$$

Donner la valeur exacte de S sous forme fractionnaire, où le dénominateur est entier.

15 Une autre somme

★★★ 20 min Corrigé p. 193

Lycée Lakanal, Seaux

Calculer la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{2\,023} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right).$$

1 QCM Relations entre sin et cos

Énoncé p. 180

1 Réponse [c]. En calculant les produits en croix, on obtient en effet pour la réponse [c] l'égalité $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.

2 Réponse [c]. Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, alors $\cos\alpha \leqslant 0$.

Donc $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Réponse [c]. C'est le cours !

4 Réponse [b]. Comme x appartient à $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on sait que $\cos x \geqslant 0$, ce qui élimine les réponses [c] et [d]. D'autre part, dans cet intervalle, $\cos x = -\sin x$ uniquement pour $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui n'est pas le cas ici. Donc la réponse [a] ne convient pas non plus. Il ne reste donc plus que la réponse [b].

5 Réponse [c]. Le sinus est négatif, le cosinus positif, donc x appartient à $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$. D'autre part, le cosinus est supérieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc x est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et 0. On trouve donc que $x = -\frac{\pi}{12}$.

6 Réponse [b]. En effet,

$$\begin{aligned}(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\\ &= (1-\sin^2(x)) - \sin^2(x)\\ &= 1 - 2\sin^2(x).\end{aligned}$$

2 QCM Testez vos connaissances

Énoncé p. 181

1 Réponse [c]. $60° = \frac{\pi}{3}$ radians. C'est une mesure à connaître par cœur.

2 Réponse [b]. $135° = 3 \times 45° = 3 \times \frac{\pi}{4}$ radians.

3 Réponse [a]. En effet, $\frac{225}{180} = \frac{5}{4}$ donc $225° = \frac{5\pi}{4}$ radians. Or, $\frac{5\pi}{4} = \frac{8\pi - 3\pi}{4}$ donc $\frac{5\pi}{4} = 2\pi - \frac{3\pi}{4}$.

Ainsi, le point M associé à 225° est aussi associé à $-\frac{3\pi}{4}$ radians.

4 Réponse [d]. $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi + \pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ donc :

$$\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

CORRIGÉS

3 Conversions de degrés à radians

Énoncé p. 181

Lycée Stanislas, Paris

MÉTHODE

Pour les conversions degrés $\longleftrightarrow$ radians, on peut utiliser la relation :

$$\frac{\pi}{180} \times \text{angle en degrés} = \text{angle en radians.}$$

1 15°.

$$\frac{\pi}{180} \times 15 = \frac{\pi}{12} \text{ rad.}$$

2 72°.

$$\frac{\pi}{180} \times 72 = \frac{2\pi}{5} \text{ rad.}$$

3 135°.

$$\frac{\pi}{180} \times 135 = \frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$$

4 720°.

$$\frac{\pi}{180} \times 720 = 4\pi \text{ rad.}$$

4 Conversions de radians à degrés

Énoncé p. 181

Lycée Montaigne, Bordeaux

1 $\frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} \text{ deg} = 420°.$

2 $\frac{13\pi}{18} \text{ rad} = \frac{13\pi}{18} \times \frac{180}{\pi} \text{ deg} = 130°.$

3 $\frac{9\pi}{5} \text{ rad} = \frac{9\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} \text{ deg} = 324°.$

4 $\frac{\pi}{36} \text{ rad} = \frac{\pi}{36} \times \frac{180}{\pi} \text{ deg} = 5°.$

5 Placement de points

Énoncé p. 182

Lycée Stanislas, Paris

1 $\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{1\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}.$

Ainsi, le point A correspondant à l'angle $\frac{25\pi}{3}$ se trouve au même endroit que le point correspondant à $\frac{\pi}{3}$ (car 8π correspond à quatre tours complets sur le cercle trigonométrique).

2 $\dfrac{13\pi}{2} = \dfrac{12\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 6\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, le point B correspondant à l'angle $\dfrac{13\pi}{2}$ se trouve au même endroit que le point correspondant à $\dfrac{\pi}{2}$ (car 6π correspond à trois tours complets sur le cercle trigonométriques).

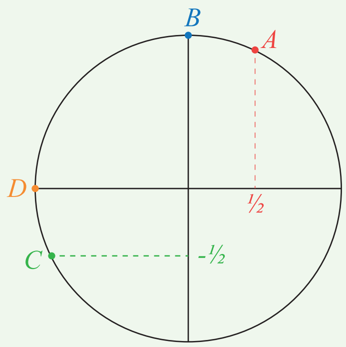
3 $\dfrac{19\pi}{6} = \dfrac{18\pi}{6} + \dfrac{1\pi}{6} = 3\pi + \dfrac{\pi}{6} = 2\pi + \left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Ainsi, le point C correspondant à l'angle $\dfrac{19\pi}{6}$ se trouve au même endroit que le point correspondant à $\pi + \dfrac{\pi}{6}$ (car 2π correspond à un tour complet sur le cercle trigonométriques).

4 $121\pi = 120\pi + \pi$.

Ainsi, le point D correspondant à l'angle 121π se trouve au même endroit que le point correspondant à π (car 120π correspond à 60 tours complets sur le cercle trigonométriques).

Nous avons placé les points A, B, C et D sur un même cercle trigonométrique suivant.



6 Pentagone régulier

Énoncé p. 182

Lycée François Mauriac, Bordeaux

- Commençons par le point F : c'est le plus simple. Il est en effet associé au nombre 0 car l'angle que forme $\overrightarrow{OF}$ avec $\vec{i}$ (vecteur unitaire de l'axe des abscisses) est nul.

- Le pentagone est régulier et possède 5 sommets. Par conséquent, l'angle $\left(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$. En effet, on divise l'angle plein (360°, donc 2π radians), en 5.

  Le nombre associé à A est donc $\dfrac{2\pi}{5}$.

CORRIGÉS

- De manière analogue, en ajoutant $\dfrac{2\pi}{5}$ pour passer d'un point à un autre, on obtient que :

  → B est associé au nombre $\dfrac{4\pi}{5}$;

  → C est associé au nombre $\dfrac{6\pi}{5}$;

  → D est associé au nombre $\dfrac{8\pi}{5}$.

7 Identité trigonométrique

Énoncé p. 182

Lycée Stanislas, Paris

Il suffit de développer :

$$\begin{aligned}(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 &= \cos^2 x + 2\cos x \times \sin x + \sin^2 x \\ &\quad + \cos^2 x - 2\cos x \times \sin x + \sin^2 x \\ &= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 2 \quad \text{car} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.\end{aligned}$$

8 Détermination d'un sinus

Énoncé p. 182

Lycée Lamartine, Paris

On sait que $x \in]-\pi\,;0]$. De plus,

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x = 1 &\iff \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &\iff \sin^2 x = 1 - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} \\ &\iff \sin^2 x = \frac{16 - 6 - 2\sqrt{5}}{16} \\ &\iff \sin^2 x = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} \\ &\iff \sin x = -\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}}\end{aligned}$$

(car $x \in]-\pi\,;0] \iff \sin x \leqslant 0$)

$$\iff \sin x = -\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

9 Une équation trigonométrique

Énoncé p. 183

Lycée Louis-le-Grand, Paris

$$3\sin x + 4\cos x = 5 \iff \sin x = \frac{5-4\cos x}{3}.$$

Utilisons ce résultat dans l'expression $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, alors :

$$\begin{aligned} & \cos^2 x + \frac{(5-4\cos x)^2}{9} = 1 \\ \text{soit} \quad & 9\cos^2 x + 25 - 40\cos x + 16\cos^2 x = 9 \\ \text{soit} \quad & 25\cos^2 x - 40\cos x + 16 = 0 \\ \text{soit} \quad & (5\cos x - 4)^2 = 0 \\ \text{d'où :} \quad & \cos x = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\sin x = \frac{5 - 4\times\frac{4}{5}}{3} = \frac{5-\frac{16}{5}}{3} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

10 Calcul avec les angles associés

Énoncé p. 183

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

1 $$\begin{aligned} \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} &= -\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2 $$\begin{aligned} \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} &= \sin\frac{\pi}{4} + \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3 $$\begin{aligned} 1 + \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4} &= 1 + \sin^2\frac{\pi}{4} + \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 \\ &= 1 + \underbrace{\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}}_{=1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

11 Équation

Énoncé p. 183

Lycée Sophie Germain, Paris

1 On pose $X = \cos x$ et on résout l'équation du second degré en X : $2X^2 + X - 1 = 0$.
Le discriminant de l'équation vaut 9, et on trouve deux solutions :

$$X_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad X_2 = -1.$$

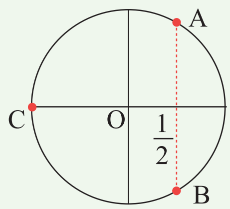
L'équation en x équivaut donc à :

- $\cos x = -1 \iff x = \pi$

ou

- $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$.

2 Les solutions correspondent aux points A, B et C représentés ci-contre.



12 Pêle-mêle

Énoncé p. 183

Lycée Blomet, Paris

1 **(a)** $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$

(b) $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$

(c) $\sin \frac{113\pi}{3} = \sin\left(\frac{114\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(38\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(19 \times 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

(d) $\cos\left(-\frac{37\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{40\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-10\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

2 $$\begin{aligned} S &= \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} \\ &= \left[\sin\frac{\pi}{8} - \sin\left(\frac{8\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right)\right] + \left[\sin\left(\frac{8\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}\right) - \sin\frac{3\pi}{8}\right] \\ &= \left[\sin\frac{\pi}{8} - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right] + \left[\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) - \sin\frac{3\pi}{8}\right] \\ &= \left[\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right] + \left[\sin\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque : nous avons utilisé ici la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - x) = \sin(x).$$

3 Sachant que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ et que $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, déterminons la valeur de $\cos x$ à l'aide de l'égalité fondamentale de trigonométrie :

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 &\iff \cos^2 x + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \\ &\iff \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ donc $\cos x < 0$.

$$\iff \cos x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13 En utilisant le carré

Énoncé p. 184

Lycée Honoré de Balzac, Paris

1 $$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos x = \sin x &\implies \left(\sqrt{3}\cos x\right)^2 = \left(\sin x\right)^2 \\ &\implies 3\cos^2 x = \sin^2 x \\ &\implies 3\cos^2 x = 1 - \cos^2 x \\ &\implies 4\cos^2 x = 1 \\ &\implies \cos^2 x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2 $\cos^2 x = \frac{1}{4} \iff \cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$.

Cette équation a donc 4 solutions dans $[0\,;2\pi[$:

$$S = \left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

3 $\sqrt{3}\cos x = \sin x$ et $\sqrt{3} > 0$. Donc $\cos x$ et $\sin x$ ont le même signe.

CORRIGÉS

4 Parmi les 4 valeurs trouvées dans la question 2, seules $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ ont un cosinus et un sinus de même signe.
De plus, il est immédiat de contrôler que ces deux valeurs sont solutions de l'équation (E). En effet, on a bien :

$$\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

et

$$\sqrt{3}\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{4\pi}{3}.$$

14 Une somme

Énoncé p. 184

Lycée Daguin, Mérignac

Notons que :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi,

$$S = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{19}.$$

On peut alors appliquer la formule :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Cela donne :

$$S = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{2^{20}-2^{10}}{2^{20}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{2^{20}-2^{10}}{2^{20}} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2^{11}\left(2^{10}-1\right)}{2^{20}\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

Finalement, on arrive à :

$$S = \frac{2^{10}-1}{2^9\left(2-\sqrt{2}\right)}.$$

Cette écriture ne convient pas à ce qui est demandé car on souhaite un dénominateur entier. Il faut donc poursuivre le calcul.

$$S = \frac{2^{10}-1}{2^9\left(2-\sqrt{2}\right)} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1\,023(2+\sqrt{2})}{1\,024}.$$

15 Une autre somme

Énoncé p. 184

Lycée Lakanal, Seaux

Remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned} S = 1 &+ \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} \\ &+ \cos\frac{6\pi}{3} + \cos\frac{7\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{3} + \cos\frac{9\pi}{3} + \cos\frac{10\pi}{3} + \cos\frac{11\pi}{3} + \cdots \end{aligned}$$

Remarquons aussi que :

- $1 + \cos\frac{3\pi}{3} = \cos\frac{6\pi}{3} + \cos\frac{9\pi}{3} = \cdots = \cos\frac{2\,016\pi}{3} + \cos\frac{2\,019\pi}{3} = 0$
- $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{7\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{3} = \cdots = \cos\frac{2\,017\pi}{3} + \cos\frac{2\,018\pi}{3} = 0$
- $\cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{10\pi}{3} + \cos\frac{11\pi}{3} = \cdots = \cos\frac{2\,020\pi}{3} + \cos\frac{2\,021\pi}{3} = 0.$

Ainsi, la somme se réduit à :

$$\begin{aligned} S &= \cos\frac{2\,022\pi}{3} + \cos\frac{2\,023\pi}{3} \\ &= \cos(674\pi) + \cos\left(674\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Chapitre
7

Produit scalaire

Plan du chapitre

Retrouvez ce cours en vidéo.

1 Géométrie non analytique

Exercice type 1 — **Lycée Notre-Dame, Boulogne**

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $AB = \sqrt{8}$.
On note I le milieu du segment $[BC]$.

1 Déterminer et construire le point G tel que :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

2 Vérifier que les points A, G et I sont alignés et calculer les nombres :

$$GA^2, \qquad GB^2, \qquad GC^2.$$

3 Étant donné un point M du plan, exprimer $2MA^2 + MB^2 + MC^2$ en fonction de MG^2.

Voir corrigé page 197

Dans cette section, nous nous placerons dans un plan euclidien.

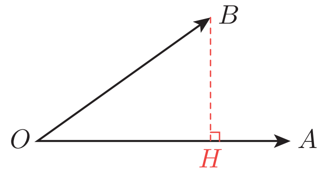
1.1 Définition du produit scalaire

Définition 1

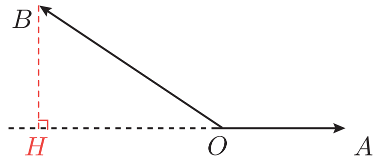
Soient $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs du plan, et H le projeté orthogonal de B sur (OA).

Le *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, noté $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, est défini par :

- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;



- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.



1.2 Orthogonalité de deux vecteurs

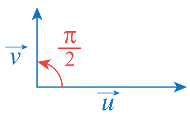
Définition 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si :

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

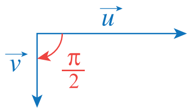
ou si :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



ou si :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$



On écrit alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Théorème 1

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 .$$

1.3 Produit scalaire et normes

Propriété 1

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan. Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

où $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ représente l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en tournant dans le sens trigonométrique.

De cette propriété, on peut conclure que :

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 .$$

1.4 Propriétés

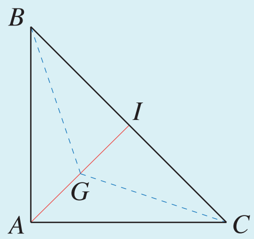
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et les réels a et b , on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie du produit scalaire) ;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Notre-Dame, Boulogne

1 Comme I est le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.



La relation vectorielle définissant le point G se réécrit donc :

$$2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{0}.$$

On en déduit que G est le milieu de $[AI]$.

2 G étant le milieu de $[AI]$, A, G et I sont donc alignés. Le triangle ABC est isocèle, donc la médiane (AI) est aussi la hauteur. D'où :

$$(GI) \perp (IB).$$

Donc :

$$GB^2 = GI^2 + IB^2.$$

...

COURS INTERROS CORRIGÉS

COURS

Solution de l'exercice type 1 (suite)

Lycée Notre-Dame, Boulogne

I est le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle ABC car c'est le milieu de l'hypoténuse. Donc :

$$IA = IB = \frac{1}{2}BC\,.$$

Or,

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 = 8 + 8 = 16,$$

donc $BC = 4$; d'où :

$$IB = \frac{1}{2}BC = 2$$

et

$$GI = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{2}IB = 1\,.$$

Ainsi,

$$GB^2 = 1 + 4 = 5$$

et de même pour GC^2 car la figure est symétrique par rapport à l'axe (AI).

$$GA^2 = GI^2 = 1\,.$$

Donc :

$$GA^2 = 1, \qquad GB^2 = GC^2 = 5\,.$$

3 On exprime les carrés des longueurs par des carrés scalaires, ce qui nous permet d'utiliser la relation de Chasles sur les vecteurs :

$$\begin{aligned}
&2MA^2 + MB^2 + MC^2\\
&= 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2\\
&= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2\\
&= 4MG^2 + \overrightarrow{MG}\cdot\left(4\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\right) + 2GA^2 + GB^2 + GC^2\\
&= 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2
\end{aligned}$$

car, d'après la définition du point G, on a :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

En utilisant les résultats de la question précédente, on trouve finalement :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + 12\,.$$

Voir énoncé page 195

2 Géométrie analytique

Exercice type 2 — Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1\ ;\ -1)$, $B(-3\ ;\ 2)$ et $C(5\ ;\ 7)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.
3. Donner une équation cartésienne de la hauteur de ABC issue de C.

Voir corrigé page 201

Dans cette section, on rapporte le plan à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

2.1 Calcul du produit scalaire

Propriété 2

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'\ .$$

Conséquence :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Exemple : on pose $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= 5\times 1 + (-2)\times 7\\ &= 5-14\\ &= -9.\end{aligned}$$

2.2 Application pour trouver la mesure d'un angle

Reprenons les vecteurs de l'exemple précédent : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

Nous avons vu que :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -9.$$

COURS

Or,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \sqrt{5^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+7^2}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \sqrt{29}\times\sqrt{50}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= 5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-9 = 5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right),$$

soit :

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -\frac{9}{5\sqrt{58}} \approx -0{,}236351579148\,.$$

On en déduit alors :

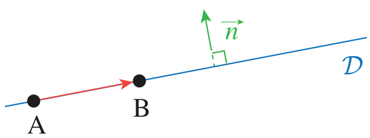
$$\left(\vec{u},\vec{v}\right) \approx 104°.$$

2.3 Vecteur normal à une droite

Définition 3

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, et soient A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$.
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit *normal* à $\mathcal{D}$ si :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$$



Propriété 3

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$. Alors, un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Remarque : tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Retrouvez ce corrigé en vidéo.

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1\ ;\ -1)$, $B(-3\ ;\ 2)$ et $C(5\ ;\ 7)$.

1
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-1\\7-(-1)\end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\2-(-1)\end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

D'où :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times(-4)+8\times 3 = 8.$$

2 On sait que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC\times AB\times\cos\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = 8$.
De plus,

$$AB = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5\,;$$
$$AC = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & 5\sqrt{80}\cos\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = 8 \\ \iff\ & \cos\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \frac{8}{5\sqrt{80}} \\ \iff\ & \cos\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) \approx 0{,}179 \\ \iff\ & \left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) \approx 80^\circ. \end{aligned}$$

3 Soit $M(x\ ;\ y)$ sur la hauteur de ABC issue de C. Alors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 &\iff \begin{pmatrix}x-5\\y-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -4(x-5)+3(y-7) = 0 \\ &\iff -4x+3y-1 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de cette hauteur est $-4x+3y-1=0$.

Voir énoncé page 199

INTERROS

1 V/F Connaissance du cours

10 min Corrigé p. 209

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Un produit scalaire est toujours positif.
2. Si $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ alors $\vec{u} = \vec{v}$.
3. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ ($k \in \mathbb{R}$) est un cercle de centre le milieu de $[AB]$.
4. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls orthogonaux, alors :
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

2 QCM Dans un repère

20 min Corrigé p. 210

Déterminer parmi les réponses a, b, c celle qui est correcte.

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $I(3\ ;\ -5)$, $J(2\ ;\ 1)$ et $K(7\ ;\ y)$. Si (IJ) est perpendiculaire à (JK), alors y vaut :
   a $\frac{11}{6}$ b $-\frac{11}{6}$ c $\frac{5}{6}$
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, soit $A(2\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ \sqrt{3})$ et $C(1\ ;\ -\sqrt{3})$. Une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est :
   a $\frac{\pi}{3}$ b $\frac{2\pi}{3}$ c $\frac{\pi}{6}$
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $-5x + 3y + 1 = 0$. Un vecteur normal de $\mathcal{D}$ est :
   a $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$
4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, soit les droites D_1 et D_2 d'équations respectives :
$$D_1\ :\ 2x + 4y + 5 = 0 \qquad \text{et} \qquad D_2\ :\ -5x + \frac{5}{2}y - 12 = 0.$$
   Les droites D_1 et D_2 sont :
   a parallèles b confondues c perpendiculaires
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, si $A(-3; 5)$ et $B(5; -3)$ alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$:
   a -1 b 0 c -30

Géométrie non analytique

3 Dans un carré

★ 5 min Corrigé p. 210

Lycée Pasteur, Paris

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté 3.

Calculer, en justifiant, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$
3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$
4. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

4 Vecteurs et parallélogramme

★ 10 min Corrigé p. 211

Lycée Marceau, Chartres

Soit, dans le plan orienté, un parallélogramme $ABCD$ tel que :

$$AB = 6 \text{ cm}, \qquad AD = 4 \text{ cm} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{2\pi}{3}.$$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. **(a)** Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

   (b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ (utiliser la question **(a)**).

   (c) Les points C et D se projettent orthogonalement en C' et D' sur la droite (AB).
   Calculer AC' et AD'.

5 Une relation vectorielle

★ 10 min Corrigé p. 212

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Soit ABC un triangle.
Soit I le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AI]$.

1. Montrer que le point K vérifie la relation :

$$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}.$$

2. Trouver la valeur du réel α tel que, pour tout point M :

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MK}.$$

3. En déduire l'ensemble des points M tels que :

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MI} = 0.$$

INTERROS

6 Ensemble de points

★ 10 min Corrigé p. 213

Lycée Pasteur, Paris

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 5$.

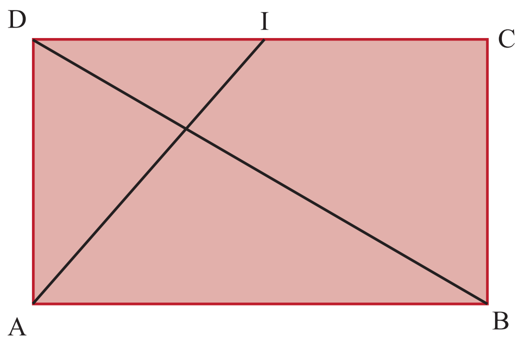
1. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 3.$$
2. Déterminer l'ensemble des points N du plan vérifiant :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = -1.$$

7 Dans un rectangle

★ 10 min Corrigé p. 213

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AD = 1$ et $AB = \sqrt{2}$. I est le milieu de $[CD]$.



1. Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}$.
2. En remarquant que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$, calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI}$.
3. Démontrer que les droites (BD) et (AI) sont perpendiculaires.

8 Configuration géométrique

★ 20 min Corrigé p. 214

Lycée Sophie Germain, Paris

ABC est un triangle. On considère les points D et E extérieurs au triangle ABC tels que les deux triangles ABD et ACE soient rectangles isocèles en A.

1. Faire une figure.
2. **(a)** Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. **(a)** Calculer $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD}$.
   (b) Que peut-on en conclure ?

9 Une autre configuration géométrique ★ 20 min

Corrigé p. 215

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Soit A et B deux points tels que $AB = 5$.

1 **(a)** Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 10$?

(b) En déduire la construction d'un point C tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$ et $AC = 4$.

2 Soit D et E les points définis par :

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$$

et

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Calculer :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \quad , \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}.$$

En déduire que $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Que représente la droite (CD) pour le triangle BDE ?

10 Lignes de niveau d'une application ★★ 30 min

Corrigé p. 217

Lycée Saint-Marc, Lyon

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On note I le milieu de $[AB]$, et pour tout point M du plan :

$$f(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

1 Calculer $f(A)$, $f(B)$, $f(I)$ et $f(C)$.

2 Quel est l'ensemble E_0 des points M du plan tels que $f(M) = 0$?

Dessiner E_0.

3 Montrer que pour tout M :

$$f(M) = MI^2 - 1.$$

4 Déterminer, suivant les valeurs du réel k, l'ensemble E_k des points M du plan tels que $f(M) = k$.

Dessiner E_2 sur la figure.

INTERROS

11 Recherche d'ensemble de points

★★ 50 min Corrigé p. 219

Lycée Victor Hugo, Marseille

Soient A et B deux points tels que : $AB = 4$ cm.

On définit pour un point M du plan $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{A}(M) = \text{Aire}(AMB)$$
$$f(M) = MA - MB$$
$$g(M) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$$
$$h(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$
$$j(M) = MA^2 - MB^2$$

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan vérifiant :

1. $\mathcal{A}(M) = 4$;
2. $f(M) = 0$;
3. $g(M) = 0$;
4. $h(M) = 0$;
5. $j(M) = -24$.

Géométrie analytique

12 Calcul d'angle

★ 10 min Corrigé p. 221

Lycée Sophie Germain, Paris

Soient, dans un repère orthonormé, les points $A(1\,;\,3)$, $B(4\,;\,-2)$ et $C(-1\,;\,3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$, au degré près.

13 Équation de la médiatrice

★ 10 min Corrigé p. 221

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(-3\,;\,2)$ et $B(5\,;\,-4)$.
Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

14 Équation cartésienne de droites ★ 10 min

Corrigé p. 222

Lycée Montaigne, Bordeaux

On se place dans un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

1. $\mathrm{A}(-1\ ;\ 2)$, $\mathrm{B}(4\ ;\ -3)$ et $\mathcal{D}$ est la médiatrice de [AB].
2. $\mathcal{D}$ est la droite passant par $\mathrm{A}(1\ ;\ 3)$ et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $2x-5y+3=0$.
3. $\mathcal{D}$ est la tangente au cercle de centre O et de rayon 3 passant par le point d'abscisse 2.
4. $\mathcal{D}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et passe par le point $\mathrm{A}(-1\ ;\ 2)$.

15 Nature d'un triangle ★ 15 min

Corrigé p. 223

Lycée Alain, Caen

Soit, dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les points :

$$A(-2\,;0),\qquad B(1\,;\sqrt{3})\qquad \text{et}\qquad C(-2\,;2\sqrt{3}).$$

1. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
   En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

16 Droites perpendiculaires ★ 20 min

Corrigé p. 224

Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles

$ABCD$ est un carré, I et J sont les points tels que :

$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\qquad ;\qquad \overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}.$$

Démontrer de deux manières différentes (en utilisant le produit scalaire les deux fois) que les droites (AI) et (BJ) sont perpendiculaires.

17 Angles et intersection ★★ 20 min

Corrigé p. 225

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-3\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 5)$ et $C(5\ ;\ -4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les distances AB et AC.
3. Déduire des questions précédentes une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

INTERROS

4 Soit $D(1{,}5\ ;\ 3)$. Montrer que $(CD) \perp (AB)$ et que $(BD) \perp (AC)$.

5 Que représente le point D pour le triangle ABC ?

6 Soit H le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

Sans faire de calcul, expliquer pourquoi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$. En déduire que $AH = 3$.

18 La droite d'Euler

★★ 30 min Corrigé p. 226

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(-5\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -2)$ et $C(7\ ;\ 4)$.

1 Trouver les coordonnées du centre de gravité G de ABC.

2 Trouver les coordonnées du centre I du cercle circonscrit à ABC.

3 Trouver les coordonnées de l'orthocentre H de ABC (point d'intersection des hauteurs).

4 Montrer que G, I et H sont alignés.

5 La *droite d'Euler* de ABC est la droite (GH). Donner une équation cartésienne de cette droite.

1 V/F Connaissance du cours

Énoncé p. 202

1 *Faux*. Dans le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\vec{u}(2\,;\,5)$ et $\vec{v}(1\,;\,-5)$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 - 5 \times 5 = -23$$

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est strictement négatif.

2 *Faux*. Soit $\vec{u}(2\,;\,0)$, $\vec{v}(0\,;\,8)$ et $\vec{w}(0\,;\,15)$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 0 \times 8 = 0$$
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 0 + 0 \times 15 = 0$$

Cependant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas égaux.

3 *Faux*. Soit I le milieu de $[AB]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)\\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA^2 = -\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2 = -\dfrac{1}{4}AB^2$.

Par suite,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \iff MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k$$
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \iff MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$$

Si $k + \dfrac{1}{4}AB^2 < 0$, alors l'ensemble cherché est vide.

4 *Vrai*.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Par suite,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

On a donc aussi :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$$

D'où :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

Et comme $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ sont positifs, alors $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

CORRIGÉS

2 QCM Dans un repère

Énoncé p. 202

1 Réponse [a]. On a : $\overrightarrow{IJ}(-1\ ;6)$ et $\overrightarrow{JK}(5\ ;y-1)$. Les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{JK}=0$, soit :

$$-5+6(y-1)=0$$

Cette équation admet pour unique solution : $y=\dfrac{11}{6}$.

2 Réponse [b]. D'après le cours, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
Or, $\overrightarrow{AB}(-1\ ;\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{AC}(-1\ ;-\sqrt{3})$.
Donc $\|\overrightarrow{AB}\|^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2=4$ et $\|\overrightarrow{AC}\|^2=\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2=4$.
On a alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
De plus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)^2-\sqrt{3}^2=-2$ donc $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{1}{2}$.
Or, parmi les propositions, seul $\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$.
La bonne réponse est donc [b].

3 Réponse [a]. Si $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite.

4 Réponse [c]. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\vec{u}_1(-4\ ;2)$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est $\vec{u}_2\left(-\dfrac{5}{2}\ ;-5\right)$, d'après le cours.

$$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=-4\times\left(-\frac{5}{2}\right)+(-5)\times2=0.$$

Les vecteurs directeurs de ces deux droites sont donc orthogonaux, et les droites sont perpendiculaires.

5 Réponse [c]. En effet, si $A(-3;5)$ et $B(5;-3)$ alors :

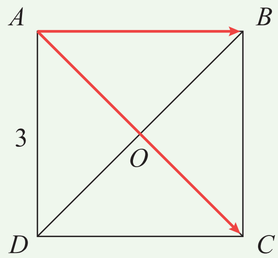
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}=-3\times5+5\times(-3)=-15-15=-30.$$

3 Dans un carré

Énoncé p. 203

Lycée Pasteur, Paris

1

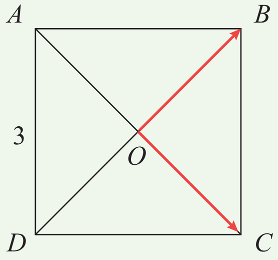


O est le projeté orthogonal de B sur (AC), donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=AO\times AC\\&=\frac{1}{2}AC\times AC\\&=\frac{1}{2}\times18=9.\end{aligned}$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

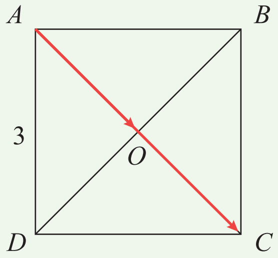
2



$\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux donc :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0.$$

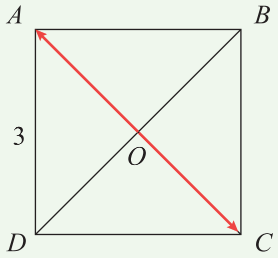
3



$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} &= AC \times AO \\ &= AC \times \frac{1}{2}AC \\ &= 9.\end{aligned}$$

4



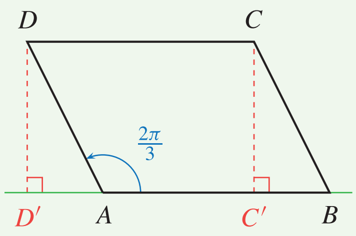
$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires et de sens opposés :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= -OA \times OC \\ &= -\frac{1}{2}AC \times \frac{1}{2}AC = -\frac{1}{4}AC^2 \\ &= -\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

4 Vecteurs et parallélogramme

Énoncé p. 203

Lycée Marceau, Chartres



1 On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= AB \times AD \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -12\end{aligned}$$

CORRIGÉS

2 **(a)** On a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\\ &= 36 - 12 = 24\\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})\\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2\\ &= -12 - 36 = -48\end{aligned}$$

(c) On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC' = 24 \quad \text{et} \quad AB = 6\,,$$

donc :

$$AC' = 4$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -AB \times AD' = -12 \quad \text{et} \quad AB = 6.$$

Ainsi :

$$AD' = 2.$$

5 Une relation vectorielle

Énoncé p. 203

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

1 K est le milieu de $[AI]$, et on a donc :

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{0}$$

Par ailleurs, I étant le milieu de $[BC]$, on a :

$$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{KI} = -2\overrightarrow{KA}$$

On en déduit donc la relation vectorielle :

$$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{0}$$

2 En utilisant la relation de Chasles, on a pour tout point M du plan,

$$\begin{aligned}&2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\\ &= 2\left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}\right) + \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}\right) + \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC}\right)\\ &= 4\overrightarrow{MK} + \underbrace{2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}}_{=\overrightarrow{0}}\end{aligned}$$

d'où, en identifiant :

$$\alpha = 4.$$

3 On a : $2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MI}=0$

$$\begin{aligned}&\iff (2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{MI}=0\\&\iff 4\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{MI}=0\\&\iff \overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{MI}=0\\&\iff M \text{ est sur le cercle de diamètre } [IK].\end{aligned}$$

L'ensemble des points M cherché est donc le cercle de diamètre $[IK]$.

6 Ensemble de points

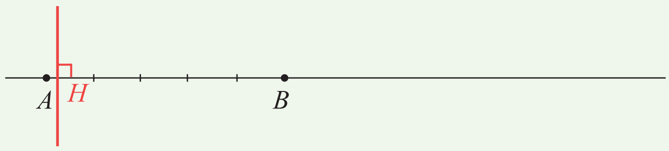
Énoncé p. 204

Lycée Pasteur, Paris

1 Notons H le projeté orthogonal de M sur (AB). Alors,

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=3 \iff AH\times AB=3 \iff AH=\frac{3}{AB}=\frac{3}{5}.$$

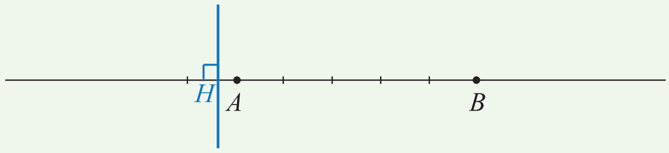
Le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$ étant positif, l'angle $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)$ est aigu (compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians). On obtient la droite rouge suivante :



2 Notons H le projeté orthogonal de N sur (AB). Alors,

$$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}=-1 \iff |AH\times AB|=1 \iff |AH|=\frac{1}{5}.$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}$ étant négatif, l'angle $\left(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AB}\right)$ est obtus (compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π radians). On obtient la droite bleue suivante :



7 Dans un rectangle

Énoncé p. 204

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}&=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}\right)\\&=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DI}\\&=AD^2+0 \text{ car } \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DI}\\&=1.\end{aligned}$$

CORRIGÉS

2 $$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}\right)\\ &= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DI}\\ &= 0+BA\times DI\times\cos\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{DI}\right)\\ &= BA\times DI\times(-1)=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-1)\\ &= -1.\end{aligned}$$

3 Pour démontrer que (BD) et (AI) sont perpendiculaires, on peut démontrer que $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AI}=0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AI} &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AI}\\ &= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}\\ &= -1+1 \text{ (d'après les questions précédentes)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, (BD) et (AI) sont perpendiculaires.

8 Configuration géométrique

Énoncé p. 204

Lycée Sophie Germain, Paris

1 Voir figure page suivante (en fin de corrigé).

2 **(a)** $$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}) &= (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})\\ &= \frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+\frac{\pi}{2}\\ &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+\pi\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} &= AD\times AE\times\cos(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})\\ &= AD\times AE\times\cos\left(\pi+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)\end{aligned}$$

Or, $AD=AB$, $AE=AC$ et $\cos\left(\pi+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)=-\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} &= -AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\ &= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

3 **(a)** $$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})\\ &= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ car les droites (DA) et (AB) d'une part, (AE) et (AC) d'autre part sont perpendiculaires d'après l'énoncé.
De plus,

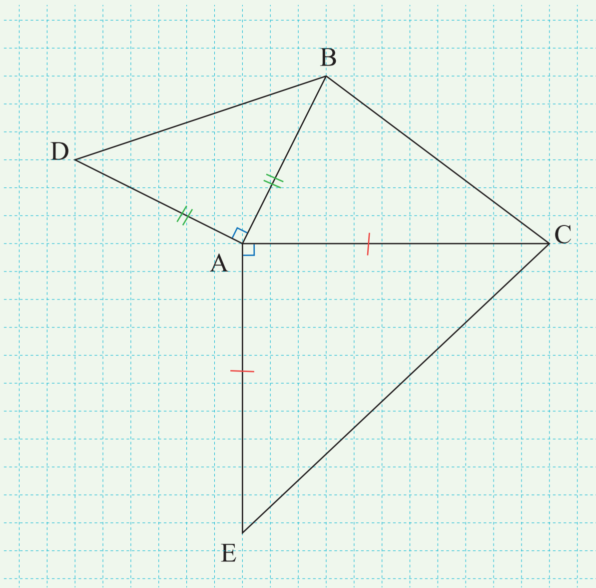
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},$$

et d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

On a donc $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

(b) On en déduit que les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires.



9 Une autre configuration géométrique

Énoncé p. 205

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

1 **(a)** Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB).

Par définition, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, et on souhaite que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 10$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 10$.

Or, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} > 0 \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \end{cases}$

On a donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 10 \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ AB \times AH = 10 \end{cases}$.

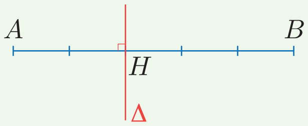
Comme $AB = 5$, on en déduit $AH = 2$.

La seule position possible pour H est donc :

H étant le projeté orthogonal de M sur (AB), M est sur la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par H.

CORRIGÉS

Conclusion : l'ensemble de tous les points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=10$ est la droite Δ.

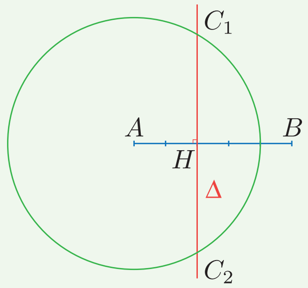


(b) On a :

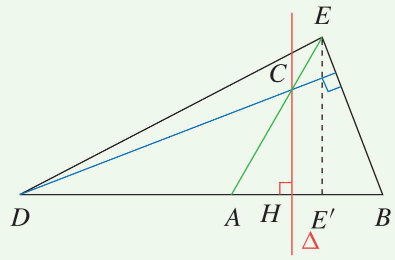
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10 \iff C\in\Delta$$
$$AC=4 \iff C\in\mathcal{C}(A,4)$$

Le point C doit donc appartenir à la fois à la droite Δ et au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 4.

Comme la distance du point A à la droite Δ est 2 ($AH=2$), la droite Δ est sécante au cercle $\mathcal{C}$ et il y a deux points possibles : C_1 et C_2.



2 On a :



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$$

Or, C se projette en H sur (AB) donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-5\times DH$$

$$\begin{aligned} DH &= DA+AH\\ &=\frac{7}{5}AB+2\\ &=\frac{7}{5}\times 5+2\\ &=9.\end{aligned}$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -AB \times DH = -5 \times 9 = -45.$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} = AC \times AE = 4 \times 6 = 24.$$
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = -AD \times AE' = -7 \times 3 = -21.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{CD}\\ &= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\\ &= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}\\ &= 45-21-24\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

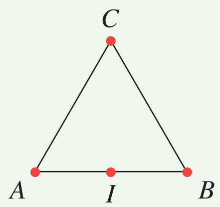
Donc $(BE) \perp (CD)$, ce qui prouve que la droite (CD) est la hauteur issue de D dans le triangle BED.

10 Lignes de niveau d'une application

Énoncé p. 205

Lycée Saint-Marc, Lyon

Commençons par faire un schéma :



1 On a par définition :

$$f(A) = \overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$$

et

$$f(B) = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BB} = 0.$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}f(I) &= \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\ &= IA \times IB \times \cos\big(\underbrace{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}_{=\pi}\big)\\ &= -IA \times IB = -1.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a par définition :

$$f(C) = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}).$$

Le triangle étant équilatéral, on a :

$$CA = CB = 2$$

CORRIGÉS

Et

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{3}$$

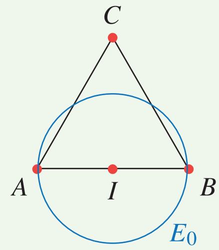
Dans les deux cas, $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \dfrac{1}{2}$ donc :

$$f(C) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

2 Pour E_0, on cherche l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 &\iff \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = 0\\
&\iff MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 0\\
&\iff MI^2 = -\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{AB^2}{4}\\
&\iff IM = \frac{AB}{2} = IA.
\end{aligned}$$

M est donc sur le cercle de centre I et de rayon IA. On a donc le schéma :



3 On a :
$$\begin{aligned}
f(M) &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\\
&= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}
\end{aligned}$$

I étant le milieu de $[AB]$, on a alors :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

Et comme précédemment, on a :

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{4}AB^2 = -1$$

D'où, finalement :

$$f(M) = MI^2 - 1$$

4 Pour déterminer E_k, reprenons l'expression de $f(M)$ déterminée à la question précédente :

$$MI^2 - 1 = k$$

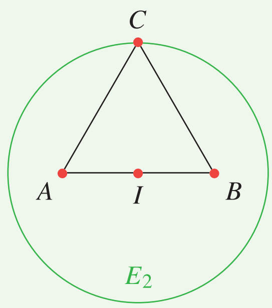
Ce qui est équivalent à :

$$MI^2 = k + 1$$

- Si $k \geqslant -1$, on obtient le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+1}$;
- si $k < -1$, c'est l'ensemble vide.

Remarque : si $k = -1$, l'ensemble est réduit au point I.

Comme $f(C) = 2$, E_2 est le cercle de centre I passant par C.



11 Recherche d'ensemble de points

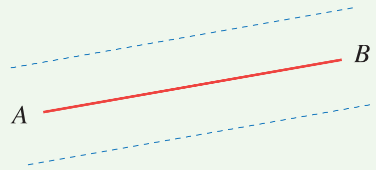
Énoncé p. 206

Lycée Victor Hugo, Marseille

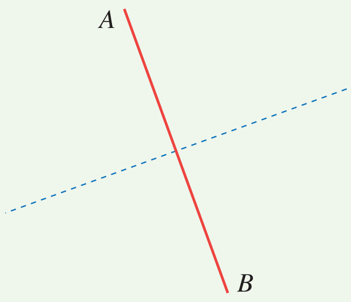
1 Notons $[MH]$ la hauteur du triangle AMB ; on a alors :

$$\mathcal{A}(AMB) = \frac{AB \times MH}{2}.$$

Pour que l'aire en question vaille 4, il faut et il suffit que $MH = 2$, puisque $AB = 4$; on obtient donc deux droites parallèles à (AB) et distantes de 2 cm de cette dernière, ainsi que le montre la figure suivante :



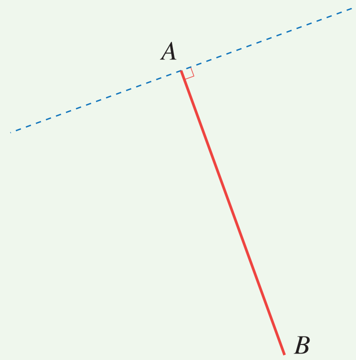
2 On obtient $MA = MB$, soit la médiatrice de $[AB]$, d'où le schéma :



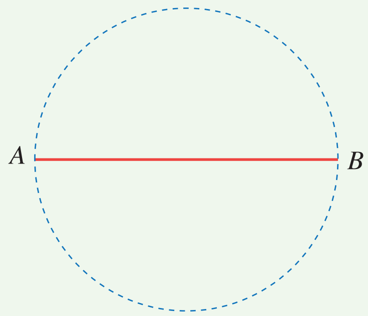
3 Ici, on doit avoir :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

(AM) doit donc être perpendiculaire à (AB) (c'est une condition nécessaire et suffisante) ; on obtient donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par A.



4 On obtient ici le cercle de diamètre $[AB]$ (cas classique du cours) :



5 On utilise ici l'identité remarquable suivante :

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{BA}).$$

En introduisant le milieu I de $[AB]$, on obtient :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

On a donc finalement :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

On doit donc avoir :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = -12.$$

Considérons le point H de la droite (AB) tel que :

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{BA} = -12,$$

c'est-à-dire, comme H, I et B sont alignés, $HI \times BA = 12$ et $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{BA}$ de sens contraire.

Alors l'ensemble des points M est la droite passant par H perpendiculaire à (AB), comme le montre le schéma suivant (on doit avoir $IH = 3$ cm) :

12 Calcul d'angle

Énoncé p. 206

Lycée Sophie Germain, Paris

1 $\overrightarrow{AB}(3\,;-5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;0)$. Donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times(-2) - 5\times 0 = -6$$

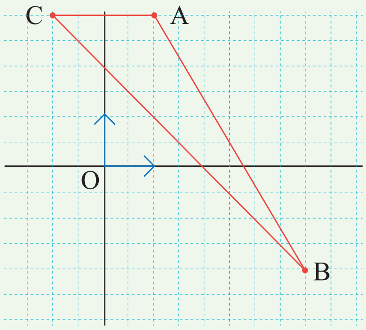
2 On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$.

$AB = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ et $AC = 2$. Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-6}{2\sqrt{34}}$.

À la calculatrice, on trouve $\widehat{BAC} \approx 121°$.

Remarque : il peut être prudent de faire une figure pour vérifier la vraisemblance des résultats :



13 Équation de la médiatrice

Énoncé p. 206

Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

Soit I le milieu de $[AB]$,

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \quad \text{donc} \quad I(1\,;-1).$$

Notons Δ la médiatrice de $[AB]$.

CORRIGÉS

Δ est la perpendiculaire à (AB) en I ; c'est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ qui vérifient :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Or,

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{IM} & \text{a pour coordonnées} & (x-1\ ;\ y+1) \\ \overrightarrow{AB} & \text{a pour coordonnées} & (8\ ;\ -6) \end{array}$$

donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\iff 8(x-1) - 6(y+1) = 0 \\ &\iff 8x - 6y - 14 = 0 \\ &\iff 4x - 3y - 7 = 0 \end{aligned}$$

Une équation de Δ est alors :

$$4x - 3y - 7 = 0.$$

14 Équation cartésienne de droites

Énoncé p. 207

Lycée Montaigne, Bordeaux

1 On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le milieu de [AB] est $\mathrm{I}\left(\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x\ ;\ y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IM}} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 5\left(x - \frac{3}{2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff 5x - 5y - 10 = 0 \\ &\iff x - y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $x - y - 2 = 0$.

2 Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}'$, soit par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ainsi, une équation de $\mathcal{D}$ est de la forme :

$$-5x - 2y + c = 0 \qquad , \qquad c \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{A}(1\ ;\ 3) \in \mathcal{D} \iff -5 \times 1 - 2 \times 3 + c = 0 \iff c = 11.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $5x + 2y - 11 = 0$.

3 Notons A le point d'abscisse 2 appartenant au cercle de centre O et de rayon 3 (donc d'équation $x^2 + y^2 = 3^2$). Son ordonnée est donc : $y_A = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.
Ainsi, $A\left(2\ ;\ \sqrt{5}\right)$.

$\mathcal{D}$ est tangente au cercle en A donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{5}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$; d'après le cours, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc :

$$2x + \sqrt{5}y + c = 0,\ c \in \mathbb{R}.$$

$A \in \mathcal{D}$ donc $2x_A + \sqrt{5}y_A + c = 0$, soit :

$$c = -2x_A - \sqrt{5}y_A = -4 - 5 = -9.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc :

$$2x + \sqrt{5}y - 9 = 0.$$

4
$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(x\ ;\ y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0\\
&\iff \begin{pmatrix}x+1\\ y-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = 0\\
&\iff 2(x+1) - 1(y-2) = 0\\
&\iff 2x - y + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $2x - y - 4 = 0$.

15 Nature d'un triangle

Énoncé p. 207

Lycée Alain, Caen

1 On a :

$$\overrightarrow{AB}(3\ ;\sqrt{3}),\qquad \text{donc}\quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{AC}(0\ ;2\sqrt{3}),\qquad \text{donc}\quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}\,.$$

On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (3 \times 0) + (\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}) = 6$$

et

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}).$$

D'où :

$$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{6}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\,.$$

On sait de plus que :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

donc :

$$\sin^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

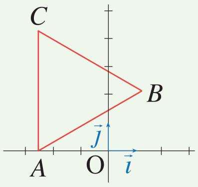
CORRIGÉS

D'où :

$$\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est positif, on sait que la mesure principale de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}.$$



La figure permet d'affirmer que :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$$

donc que $\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 On a :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| \iff AB = AC$$

donc ABC est isocèle en A.

De plus,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}.$$

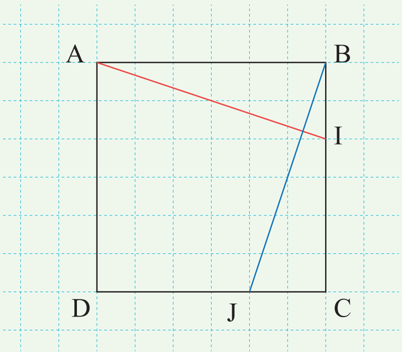
Le triangle ABC est donc équilatéral.

16 Droites perpendiculaires

Énoncé p. 207

Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles

La figure n'est pas demandée, mais elle peut aider... comme souvent en géométrie !



- *Une première méthode :*
  On considère le repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right)$.
  Dans ce repère : $A(0\,;\,1)$, $B(1\,;\,1)$, $I\left(1\,;\,\frac{2}{3}\right)$ et $J\left(\frac{2}{3}\,;\,0\right)$.
  On a donc :
  $$\overrightarrow{AI}\left(1\,;\,-\frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BJ}\left(-\frac{1}{3}\,;\,-1\right).$$
  Donc :
  $$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ} = 1\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-1)=0.$$
  Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont donc orthogonaux, et les droites (AI) et (BJ) sont donc perpendiculaires.
- *Une deuxième méthode, utilisant la relation de Chasles :*
  $$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}\\ &= 0+AB\times\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)+BC\times\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+0\\ &= -\frac{1}{3}AB^2+\frac{1}{3}BC^2\\ &= 0 \text{ car } AB = BC.\end{aligned}$$

MÉTHODE

Utiliser la relation de Chasles pour faire apparaître soit des vecteurs orthogonaux, soit des vecteurs dont on peut exprimer la longueur, est une technique plutôt répandue.

17 Angles et intersection

Énoncé p. 207

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$ donc :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times 8+3\times(-6) = 48-18 = 30.$$

2 $AB = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$.
$AC = \sqrt{8^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$.

CORRIGÉS

3 On sait que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$ donc :

$$30 = 10\sqrt{45}\cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right).$$

Ainsi,

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{30}{10\sqrt{45}} \approx 0{,}447.$$

On en déduit alors que $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) \approx 63°$.

4 $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3{,}5\\7\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3{,}5 \times 6 + 7 \times 3 = -21 + 21 = 0.$$

Donc $(CD) \perp (AB)$.

De plus, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1{,}5\\-2\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = -1{,}5 \times 8 + (-2) \times (-6) = -12 + 12 = 0.$$

Donc $(BD) \perp (AC)$.

5 De la question précédente, on déduit que D est l'intersection des hauteurs du triangle ABC, donc l'orthocentre de ABC.

6 Par définition, H est le projeté orthogonal de B sur (AC). Donc, par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$.

Or, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$ d'après la question 1.

Donc $AH \times AC = 30$, soit $AH = \dfrac{30}{AC} = \dfrac{30}{10} = 3$.

18 La droite d'Euler

Énoncé p. 208

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 D'après le cours,

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{-5+1+7}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{1-2+4}{3} = 1. \end{cases}$$

Ainsi, $G(1\ ;\ 1)$.

2 Le centre du cercle circonscrit à ABC est le point d'intersection des médiatrices.

- *Médiatrice de* $[AB]$: le milieu M_1 de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = -2 \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la médiatrice de $[AB]$. Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0 &\iff \begin{pmatrix}-2-x\\ -\dfrac{1}{2}-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-(-5)\\ -2-1\end{pmatrix}=0\\ &\iff \begin{pmatrix}-2-x\\ -\dfrac{1}{2}-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ -3\end{pmatrix}=0\\ &\iff 6(-2-x)-3\left(-\frac{1}{2}-y\right)=0\\ &\iff -6x+3y-\frac{21}{2}=0\\ &\iff 12x-6y+21=0.\end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ est $12x-6y+21=0$.

- *Médiatrice de* $[AC]$: le milieu M_2 de $[AC]$ a pour coordonnées :

$$x_2=\frac{x_A+x_C}{2}=1 \quad \text{et} \quad y_2=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{5}{2}.$$

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la médiatrice de $[AC]$. Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0 &\iff \begin{pmatrix}1-x\\ \dfrac{5}{2}-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7-(-5)\\ 4-1\end{pmatrix}=0\\ &\iff \begin{pmatrix}1-x\\ \dfrac{5}{2}-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\ 3\end{pmatrix}=0\\ &\iff 12(1-x)+3\left(\frac{5}{2}-y\right)=0\\ &\iff -12x-3y+\frac{39}{2}=0\\ &\iff 24x+6y-39=0.\end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de la médiatrice de $[AC]$ est $24x+6y+39=0$.

Trouvons maintenant les coordonnées de leur point d'intersection en résolvant le système :

$$\begin{cases}12x-6y+21=0 & (E_1)\\ 24x+6y-39=0 & (E_2)\end{cases}.$$

- $(E_1)+(E_2) \iff 36x-18=0 \iff x=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$;
- $2(E_1)-(E_2) \iff -18y+81=0 \iff y=\dfrac{81}{18}=\dfrac{9}{2}$.

Ainsi, $I\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{9}{2}\right)$.

CORRIGÉS

3 • *Hauteur passant par B* : soit $M(x\ ;\ y)$ sur cette hauteur. Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}=0 &\iff \begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}=0\\ &\iff 12x+3y-6=0\\ &\iff 4x+y-2=0.\end{aligned}$$

• *Hauteur passant par C* : soit $M(x\ ;\ y)$ sur cette hauteur. Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}=0 &\iff \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-7\\y-4\end{pmatrix}=0\\ &\iff 6x-3y-30=0\\ &\iff 2x-y-10=0.\end{aligned}$$

Pour trouver l'intersection de ces deux droites, on résout le système :

$$\begin{cases}4x+y-2=0 & (E_1)\\ 2x-y-10=0 & (E_2)\end{cases}$$

• $(E_1)+(E_2) \iff 6x-12=0 \iff x=2$;
• $(E_1)-2(E_2) \iff 3y+18=0 \iff y=-6$.

Ainsi, $H(2\ ;\ -6)$.

4 $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\ \frac{9}{2}-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{7}{2}\end{pmatrix}$.

De plus, $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}2-1\\-6-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$.

$$-\frac{1}{2}\times(-7)-\frac{7}{2}\times 1=0$$

donc $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun donc G, I et H sont alignés.

5 $$\begin{aligned}M(x\ ;\ y)\in(GH) &\iff \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff 1\times(y-1)-(-7)(x-1)=0\\ &\iff 7x+y-8=0.\end{aligned}$$

Ainsi, une équation de la droite d'Euler de ABC est $7x+y-8=0$.

Chapitre
8

Applications du produit scalaire

Plan du chapitre

1 Géométrie non analytique

Exercice type 1 — **Lycée Carnot, Cannes**

Toutes les longueurs sont exprimées en centimètres.
On considère le triangle ABC tel que $AB = 6$, $AC = 9$ et $BC = 5$.

1. Déterminer une valeur approchée de $\widehat{BCA}$ au degré près.
2. Déterminer une valeur approchée au dixième de la médiane de ABC issue de C.
3. Déterminer une valeur approchée au centième de l'aire de ABC (exprimée en cm^2).
4. Placer le point M tel que $MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit minimal.

Voir corrigé page 233

1.1 Théorème d'Al-Kashi

Théorème 1 : théorème d'Al-Kashi

Dans tout triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right),$$

où $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$ désigne l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarques

- Les côtés sont interchangeables. On a donc aussi :

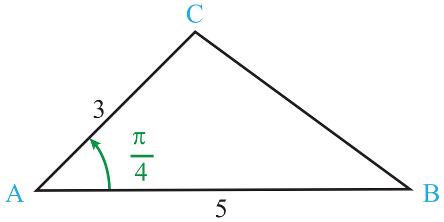
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right),$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right).$$

- Si ABC est rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore.

COURS

Exemple : soit un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$.



$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)\\ &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 25 + 9 - 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 34 - 15\sqrt{2}\\ BC &= \sqrt{34 - 15\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

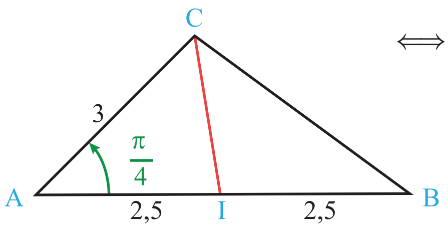
1.2 Théorème de la médiane

Théorème 2

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[AB]$. Alors,

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

Exemple : soit un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$.
Nous avons vu dans l'exemple précédent que $BC^2 = 34 - 15\sqrt{2}$.



$$\begin{aligned}&CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2\\ \iff\ & 3^2 + \left(34 - 15\sqrt{2}\right) = 2CI^2 + \frac{1}{2} \times 5^2\\ \iff\ & 2CI^2 = 9 + 34 - 15\sqrt{2} - \frac{25}{2}\\ \iff\ & CI^2 = \frac{61 - 30\sqrt{2}}{2}\\ \iff\ & CI = \sqrt{\frac{61 - 30\sqrt{2}}{4}}.\end{aligned}$$

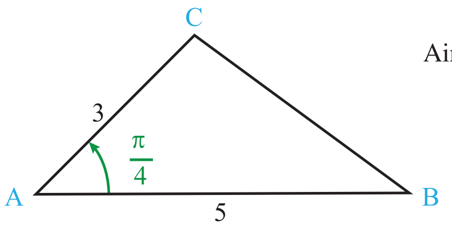
1.3 Aire d'un triangle

Théorème 3

Dans tout triangle ABC,

$$\begin{aligned}\text{Aire}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{A} \\ &= \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \widehat{B} \\ &= \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \widehat{C}.\end{aligned}$$

Exemple : soit un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$.



$$\begin{aligned}\text{Aire}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{A} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{15\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

1.4 Lignes de niveau

1.4.1 - Cercle

Propriété 1

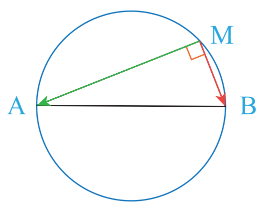
Pour tous points A, B et M du plan,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

où I est le milieu de $[AB]$.

Propriété 2

Soient A et B deux points du plan. L'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



COURS

1.4.2 - Centre de gravité d'un triangle

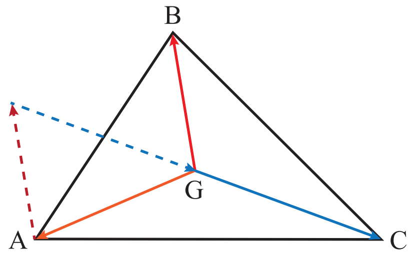
Définition 1 : rappel de collège

Le *centre de gravité* d'un triangle ABC est le point d'intersection de ses médianes.

Propriété 3

Soit ABC un triangle quelconque.
Le centre de gravité G de ABC vérifie l'égalité :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$



Propriété 4

Soient A, B et C trois points quelconques du plan.
Quel que soit le point M du plan,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Propriété 5

Dans un repère cartésien, le centre de gravité G d'un triangle ABC où $A(x_A\ ;\ y_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B)$ et $C(x_C\ ;\ y_C)$ a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad ; \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Propriété 6

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Quel que soit le point M du plan,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Propriété 7

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Soit M un point quelconque du plan.

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimal lorsque $M = G$.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Carnot, Cannes

1 Utilisons le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{C} \\ 6^2 &= 9^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos \widehat{C} \\ 36 &= 81 + 25 - 90 \cos \widehat{C} \\ \cos \widehat{C} &= \frac{81 + 25 - 36}{90} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

d'où $\widehat{C} \approx 39°$.

2 Posons I le milieu de $[AB]$.

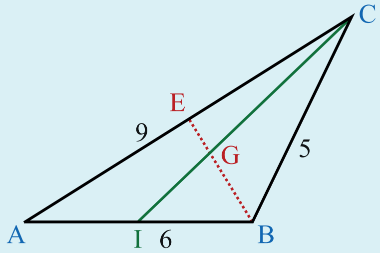
$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= 2CI^2 + \frac{AB^2}{2} \text{(théorème de la médiane)} \\ 81 + 25 &= 2CI^2 + \frac{36}{2} \\ CI^2 &= \frac{81 + 25 - 18}{2} \\ CI &= \sqrt{44} \approx 6{,}6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

3 D'après le cours, $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \widehat{C}$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{2} \times 9 \times 5 \times \sin(39°) \\ &\approx 28{,}32 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

4 D'après le cours, le point M tel que $MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit minimal est le centre de gravité G de ABC, intersection de deux médianes.

Illustration à l'échelle $1/2$ *:*



Voir énoncé page 229

COURS

2 Géométrie analytique

Exercice type 2 — **Lycée Jeanson, Paris**

Dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on définit les points $A(-1; 2)$ et $B(3; 4)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.
3. Quel est l'ensemble des points $M(x; y)$ dont une équation cartésienne est :
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0?$$
Vérifier que B appartient à cet ensemble.

Voir corrigé page 236

Dans ce paragraphe, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

2.1 Équations cartésiennes de droites perpendiculaires

Propriété 8

Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

La droite (Δ) , perpendiculaire à (d), a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, vecteur normal à (d).

Exemple : on considère la droite (d) d'équation cartésienne :
$$-3x + 5y - 7 = 0.$$
Soit (Δ) la droite perpendiculaire à (d) passant par $A(2; -1)$. Alors, un vecteur normal à (d) est $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et une équation cartésienne de (Δ) est de la forme :
$$(\Delta) \ : \ 5x + 3y + c = 0 \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$
De plus,
$$\begin{aligned} A \in (\Delta) &\iff 5x_A + 3y_A + c = 0 \\ &\iff 5 \times 2 + 3 \times (-1) + c = 0 \\ &\iff c = -7. \end{aligned}$$
Une équation cartésienne de (Δ) est donc :
$$5x + 3y - 7 = 0.$$

MÉTHODE : obtention d'une équation cartésienne perpendiculaire

Ceci est une méthode plus directe que l'exemple précédent pour obtenir une équation cartésienne d'une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.

On considère la droite (d) d'équation cartésienne :

$$-3x + 5y - 7 = 0.$$

$\vec{u}'\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de (d).
Soit alors (Δ) la droite perpendiculaire à (d) passant par $A(2; -1)$. Alors,

$$\begin{aligned}
M(x; y) \in (\Delta) &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix}x-2\\y-(-1)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = 0 \\
&\iff 5(x-2) + 3(y+1) = 0 \\
&\iff 5x + 3y - 7 = 0.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une équation cartésienne de (Δ).

2.2 Équations cartésiennes de cercles

Propriété 9 : équation canonique de cercles

Dans un repère orthonormal, l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\,.$$

Exemple : soit le cercle de centre $\Omega(-3; 5)$ et de rayon $R = 4$. Alors, son équation cartésienne canonique est :

$$\big(x-(-3)\big)^2 + (y-5)^2 = 4^2$$

soit :

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 16.$$

MÉTHODE : à partir d'une équation cartésienne développée

On considère l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + 12x - 2y + 12 = 0.$$

Nous allons montrer que cet ensemble est un cercle dont on précisera les caractéristiques.

...

COURS INTERROS CORRIGÉS

COURS

MÉTHODE

1 On regroupe les x^2 et x ensemble d'une part, les y^2 et y d'autre part :

$$\left(x^2+12x\right)+\left(y^2-2y\right)+12=0.$$

2 On voit ce qu'il y a entre parenthèses comme les débuts d'une identité remarquable :

$$\left(x^2+12x\right)=\left(x+\frac{12}{2}\right)^2-\left(\frac{12}{2}\right)^2=(x+6)^2-36$$

et

$$\left(y^2-2y\right)=\left(y-\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2=(y-1)^2-1.$$

3 On réécrit l'équation avec ces informations de sorte à obtenir l'équation canonique d'un cercle :

$$\begin{aligned}&(x+6)^2-36+(y-1)^2-1+12=0\\&(x+6)^2+(y-1)^2=25\\&(x+6)^2+(y-1)^2=5^2.\end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x;\ y)$ est donc le cercle de centre $\Omega(-6;\ 1)$ et de rayon $R=5$.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Jeanson, Paris

1 La médiatrice de $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par son milieu, que nous allons noter I, avec :

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+3}{2}=1 \qquad \text{et} \qquad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+4}{2}=3.$$

On cherche donc une équation cartésienne de la droite (m), perpendiculaire à (AB) passant par $I(1;\ 3)$.

$$\begin{aligned}M(x;\ y)\in(m) &\iff \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\&\iff \begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3-(-1)\\4-2\end{pmatrix}=0\\&\iff 4(x-1)+2(y-3)=0\\&\iff 4x+2y-10=0\\&\iff 2x+y-5=0.\end{aligned}$$

Remarque : il n'est pas obligatoire de simplifier au maximum les coefficients d'une équation cartésienne, mais si nous pouvons le faire, c'est mieux... pour avoir les nombres les plus petits possibles.

Solution de l'exercice type 2 (suite) **Lycée Jeanson, Paris**

2 Cherchons maintenant une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$: nous en connaissons le centre $I(1; 3)$; il nous faut en connaître le rayon.
Pour cela, calculons :

$$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-1-1\\2-3\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$IA^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5.$$

Ainsi, l'équation cartésienne canonique du cercle est, d'après la propriété 9 de ce cours :

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

3 Recherchons l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0 \\ \iff & \left(x^2 + 2x\right) + \left(y^2 - 4y\right) - 15 = 0 \\ \iff & \left[(x+1)^2 - 1\right] + \left[(y-2)^2 - 4\right] - 15 = 0 \\ \iff & (x+1)^2 + (y-2)^2 = 20. \end{aligned}$$

Ainsi, cet ensemble est le cercle de centre $A(-1; 2)$ et de rayon $R = \sqrt{20}$.

Pour vérifier si B appartient à ce cercle, on remplace x et y par les coordonnées du point dans l'équation canonique (par exemple) :

$$\begin{aligned} (x_B+1)^2 + (y_B-2)^2 = 20 & \iff (3+1)^2 + (4-2)^2 = 20 \\ & \iff 4^2 + 2^2 = 20 \\ & \iff 20 = 20. \end{aligned}$$

Les coordonnées de B vérifient l'équation du cercle ; par conséquent, B appartient à ce cercle.
Ce cercle est donc le cercle de centre A et de rayon AB.

Voir énoncé page 234

INTERROS

1 V/F Vérifications de connaissances

10 min Corrigé p. 244

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 ABC est un triangle tel que $AB = 10$, $AC = 12$ et $BC = 20$.

L'arrondi à l'unité de la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$ est 131°.

2 Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont pour équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0 \qquad \text{et} \qquad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 7.$$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont le même centre.

3 $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O, l'origine du repère, et de rayon 1 et (d) est la droite d'équation cartésienne $x + y - \sqrt{2} = 0$.

(d) est tangente à $\mathcal{C}$.

2 QCM Équations de cercles

20 min Corrigé p. 245

Choisir l'unique réponse correcte parmi celles proposées pour chaque question.

Dans un repère orthonormal d'origine O, on a : $A(1 ; -3)$ et $B(-4 ; 0)$.

$\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

1 Une équation de $\mathcal{C}$ est :

- **a** $x^2 + y^2 + 3(x + y) = 4$
- **b** $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$
- **c** Autre chose

2 Le rayon de ce cercle est :

a 0   **b** 34   **c** $\frac{\sqrt{34}}{2}$

3 Le point $E(1 ; 0)$:

- **a** appartient à ce cercle
- **b** n'appartient pas à ce cercle
- **c** on ne peut pas savoir

4 Soit un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1.

Soit un (les) point(s) du cercle $\mathcal{C}$ d'abscisse 1, et la (les) tangente(s) à $\mathcal{C}$ en ce(s) point(s).

- **a** Il y a une seule tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par un tel point et elle a pour équation $y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$.
- **b** Il y a deux tangentes à $\mathcal{C}$ en des points d'abscisses 1.
- **c** Il n'y a pas de tangente au cercle en un point d'abscisse 1.

5 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 + 14x - 10y + 48 = 0$$

a pour périmètre :

a $2\pi\sqrt{74}$ b 52π c $2\pi\sqrt{26}$

3 QCM Parallélogramme et Al-Kashi

20 min Corrigé p. 246

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O tel que $AB = 5$, $AD = 4$ et $BD = 7$.

1 L'angle $\widehat{DAB}$ a pour mesure, arrondie au degré :

a 102° b 2° c on ne peut pas savoir

2 La diagonale $[AC]$ a pour longueur arrondie à l'unité :

a 7 b 33 c 6

3 L'angle $\widehat{CAB}$ a pour mesure, arrondie au degré :

a 43° b 137° c on ne peut pas savoir

4 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} =$

a 4 b -4 c BA^2

Géométrie non analytique

4 Calcul de longueur

★ 10 min Corrigé p. 247

Lycée Sophie Germain, Paris

ABC est un triangle. H est le pied de la hauteur issue de A, $H \in [BC]$.

On a : $AB = 3$, $BH = 2$ et $HC = 3$.

1 Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2 En déduire la longueur AC.

5 Ligne de niveau

★ 10 min Corrigé p. 248

Lycée La Source, Meudon

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 10$. Soit I le milieu de $[AB]$.

1 Soit M un point du plan. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 25$.

2 En déduire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 11$.

6 Théorème d'Al-Kashi

★ 10 min Corrigé p. 248

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3.

Soient $[AB]$ et $[AC]$ deux cordes de $\mathcal{C}$ telles que $AB = 3$ et $\widehat{BAC} = 80°$, C appartenant au grand arc $\widehat{AB}$.

1 Faire une figure.

2 Quelle est la nature du triangle OAB ?

En déduire la mesure de l'angle $\widehat{OAC}$, puis la valeur approchée au centième de la longueur AC.

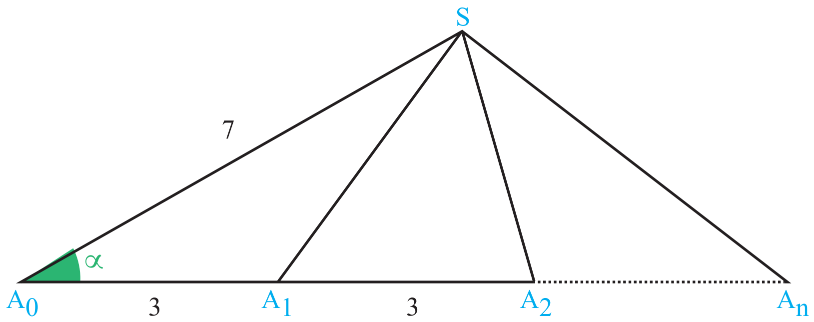
3 En déduire la valeur approchée au centième de l'aire de ABC.

7 Relations métriques et suites

★★ 20 min Corrigé p. 249

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

On construit $n+1$ points alignés $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tels que $A_kA_{k+1} = 3$. Soit alors S le point tel que $A_0S = 7$ et $\widehat{A_1A_0S} = \alpha$, où $\alpha \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.



1 Justifier que $SA_2^2 = 2SA_1^2 - 31$.

2 Justifier que $SA_1^2 = 58 - 42\cos\alpha$, puis en déduire SA_1 et SA_2.

3 On pose (u_n) la suite définie par $u_0 = 7$, $u_1 = \sqrt{58 - 42\cos\alpha}$ et $u_n = SA_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}^2 - u_n^2 + 18}$.

4 Proposer un algorithme qui permet d'afficher u_{50}.

8 Formule de Héron

★★★ 40 min Corrigé p. 251

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Soit un triangle ABC, et H le pied de la hauteur issue du sommet B. On note AB = c, AC = b, BC = a et BH = h.

1. Exprimer h en fonction de c et $\sin \widehat{A}$, puis en déduire que l'aire du triangle ABC est :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}.$$
2. À l'aide de la formule d'Al-Kashi, exprimer $\sin^2 \widehat{A}$ en fonction de a, b et c.
3. En notant $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, montrer alors que :
$$\sin^2 \widehat{A} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}.$$
4. En déduire alors que :
$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$
Cette dernière formule est appelée la *formule de Héron*.
5. Application : calculer l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour mesure 7 cm, 12 cm et 9 cm.

Géométrie analytique

9 Médiatrices et cercle

★ 15 min Corrigé p. 252

Lycée Pasteur, Paris

Soit (O, I, J) un repère orthonormé. On pose $A(1; 2)$, $B(-1; -2)$ et $C(0; 3)$.

1. Soient K le milieu du segment $[AC]$ et L celui de $[BC]$.
   Déterminer les coordonnées des points K et L.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1), médiatrice de $[AC]$, et de (d_2), médiatrice de $[BC]$.
3. En déduire une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

10 Équations de droites et de cercles

★ 15 min Corrigé p. 254

Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(1\ ; -2)$, $B(4\ ; -1)$ et $C(4\ ; 4)$.

1. **(a)** Déterminer une équation de la médiatrice D_1 de $[AB]$.
   (b) Déterminer une équation de la médiatrice D_2 de $[BC]$.
2. En déduire une équation du cercle circonscrit à ABC.

11 Cercle et droites

★★ 20 min Corrigé p. 255

Lycée Louis Vincent, Metz

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(-1; 2)$, $B(9; 7)$ et $C(0; -5)$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (BC) est $4x - 3y - 15 = 0$.
3. Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (BC) est $3x + 4y - 5 = 0$.
4. À l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur (BC).
5. Déterminer une équation du cercle (Γ) de centre A et tangent à la droite (BC).
6. Déterminer les abscisses des points d'intersection de (Γ) avec l'axe des abscisses.

12 Étude d'un cercle

★★ 20 min Corrigé p. 257

Lycée Clémenceau, Nantes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

Déterminer le rayon du cercle passant par $A(2\ ; -1)$ et $B(1\ ; 3)$ et dont le centre est sur la droite d'équation :

$$x + y + 1 = 0.$$

13 Distance d'un point à une droite

★★ 25 min Corrigé p. 259

Lycée La Source, Meudon

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x + y + 2 = 0$ et le point $A(2; 4)$.

1. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
2. Déterminer une équation de la droite Δ, perpendiculaire à $\mathcal{D}$, passant par A.
3. Calculer les coordonnées de H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
4. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AH]$.
5. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées en deux points $P(x_P; y_P)$ et $Q(x_Q; y_Q)$.

   Déterminer leurs coordonnées, en convenant que $y_Q > y_P$.

14 Équation d'un cercle

★★★ 20 min

Corrigé p. 260

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0.$$

1. Déterminer les coordonnées du centre Ω de ce cercle et son rayon.
2. Vérifier que le point $A(-1\ ;\ 1)$ appartient à ce cercle et déterminer une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - y = 4$.
   Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}'$ de centre Ω tel que $\mathcal{D}$ soit tangente à $\mathcal{C}'$.

CORRIGÉS

1 V/F Vérifications de connaissances

Énoncé p. 238

1 D'après le théorème d'Al-Kashi,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned} & 20^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \times 10 \times 12 \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ \iff & 400 = 100 + 144 - 240 \cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ \iff & \frac{400 - 100 - 144}{-240} = \cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ \iff & \cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\frac{13}{20} \\ \iff & \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(-\frac{13}{20}\right) \approx 130{,}54° \approx 131°. \end{aligned}$$

L'affirmation est donc *vraie*.

2 $\mathcal{C}_1 \ : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$
$\iff (x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 6$
$\iff (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 6$
$\iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 11.$
Ainsi, le centre de $\mathcal{C}_1$ est $\Omega_1(2; -1)$ et celui de $\mathcal{C}_\in$ est $\Omega_2(2; 1)$.
L'affirmation est donc *fausse*.

3 L'équation cartésienne canonique de $\mathcal{C}$ est : $x^2 + y^2 = 1$.
(d) a pour équation cartésienne : $x + y - \sqrt{2} = 0$, ou encore $y = \sqrt{2} - x$.
Si $M(x;\ y)$ appartient à $\mathcal{C}$ et (d), alors :

$$\begin{aligned} x^2 + (\sqrt{2} - x)^2 = 1 \iff & x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x + x^2 = 1 \\ \iff & 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ est :

$$\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0.$$

Il admet donc une racine : $x_0 = -\dfrac{-2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
La droite et le cercle n'ayant qu'un unique point d'intersection, la droite est tangente au cercle.
L'affirmation est alors *vraie*.

2 QCM Équations de cercles

Énoncé p. 238

1 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Le centre du cercle est I, milieu de $[AB]$.
I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1-4}{2} ; \dfrac{-3+0}{2}\right)$, donc $I\left(-\dfrac{3}{2} ; -\dfrac{3}{2}\right)$.
Le rayon du cercle est la longueur AI (ou BI).

$$\begin{aligned} AI^2 &= \left(-\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}+3\right)^2 \\ &= \frac{25}{4} + \frac{9}{4} = \frac{34}{4}. \end{aligned}$$

Donc une équation du cercle est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{34}{4}$, ou encore, en développant :

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \frac{34}{4}$$

On obtient finalement : $x^2 + y^2 + 3(x+y) = 4$.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Le carré du rayon est $\dfrac{34}{4}$, donc le rayon est $\sqrt{\dfrac{34}{4}} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En remplaçant x par 1 et y par 0 dans l'équation du cercle, on obtient :

$$1^2 + 0^2 + 3(1+0) = 1 + 3 = 4$$

Les coordonnées de E vérifient l'équation du cercle, donc E appartient au cercle $\mathcal{C}$.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Si $x = 1$, on a :

$$1^2 + y^2 + 3(1+y) = 4$$

et donc :

$$y^2 + 3y = 0$$

ou, en factorisant :

$$y(y+3) = 0$$

Cette équation a pour solutions 0 et -3, donc il y a deux points du cercle d'abscisse 1, le point E et le point de coordonnées $(1 ; -3)$, et il y a donc deux tangentes.

5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On ramène l'équation du cercle à la forme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 14x - 10y + 48 = 0 \\ \iff & (x+7)^2 - 49 + (y-5)^2 - 25 + 48 = 0 \\ \iff & (x+7)^2 + (y-5)^2 = 26 \end{aligned}$$

Ce cercle a pour centre le point $I(-7 ; 5)$ et pour rayon $R = \sqrt{26}$.
Par suite, son périmètre est $2\pi R = 2\pi\sqrt{26}$.

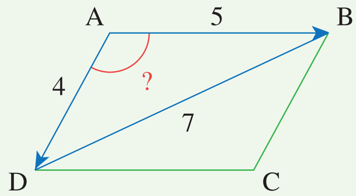
3 QCM Parallélogramme et Al-Kashi

Énoncé p. 239

MÉTHODE

Pour chacune des questions, nous allons utiliser le théorème d'Al-Kashi dans un triangle bien choisi.

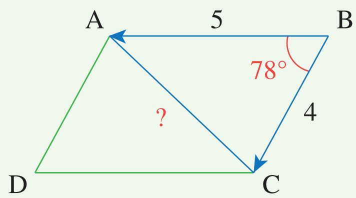
1 Réponse $\boxed{a}$.



$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \times AB \times \cos(\widehat{DAB})$$
$$49 = 16 + 25 - 40 \times \cos(\widehat{DAB})$$

Donc : $\cos(\widehat{DAB}) = -\dfrac{8}{40} = -\dfrac{1}{5}$.
À la calculatrice, ceci correspond à un angle d'environ 102°.

2 Réponse $\boxed{c}$.

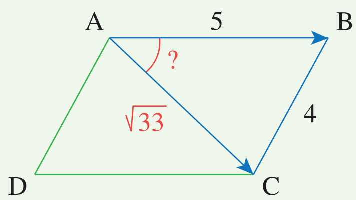


Puisque l'angle $\widehat{DAB}$ mesure environ 102°, l'angle $\widehat{ABC}$ mesure environ $180° - 102° = 78°$.
Cependant, il vaut mieux reprendre la valeur plus précise donnée par la calculatrice. On a alors :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

On obtient : $AC^2 = 33$ et donc $AC \approx 6$.

3 Réponse $\boxed{a}$.



La réponse $\boxed{\text{b}}$ est évidemment fausse compte tenu de la valeur de l'angle $\widehat{DAB}$. On a :

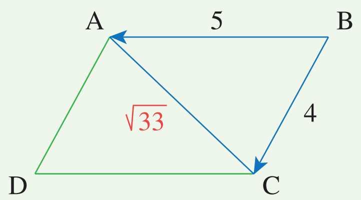
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{CAB})$$

$$16 = 33 + 25 - 2 \times 5 \times \sqrt{33} \times \cos(\widehat{CAB})$$

Donc : $\cos(\widehat{CAB}) = \dfrac{42}{10\sqrt{33}}$.

La calculatrice donne alors $\widehat{CAB} \approx 43°$.

4 Réponse $\boxed{\text{a}}$.



On a $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

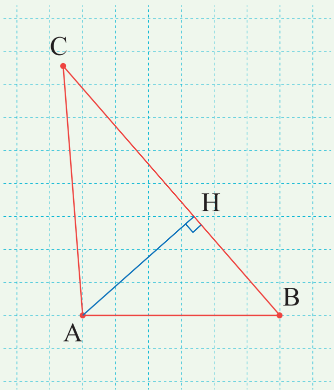
Donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{25 + 16 - 33}{2} = 4$.

4 Calcul de longueur

Énoncé p. 239

Lycée Sophie Germain, Paris

1 Voilà une figure approximative :



$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$.

Or, $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{HB}{AB} = \dfrac{2}{3}$ (dans le triangle ABH rectangle en H).

Donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times (2 + 3) \times \dfrac{2}{3} = 10$.

CORRIGÉS

2 On a :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \\ AC^2 &= 9 + 25 - 20 \\ AC^2 &= 14 \\ AC &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

Remarque : on pourrait aussi pu calculer AC à l'aide du théorème de Pythagore dans AHB pour trouver AH, puis dans AHC pour trouver AC. Cette méthode nous sert juste pour nous familiariser avec le théorème d'Al-Kashi.

5 Ligne de niveau

Énoncé p. 239

Lycée La Source, Meudon

1 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 - IA \times IB \end{aligned}$$

(car $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires de sens opposés)

$$\begin{aligned} &= MI^2 - 5\times 5 \\ &= MI^2 - 25. \end{aligned}$$

2 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 11 \iff MI^2 - 25 = 11$

$$\begin{aligned} &\iff MI^2 = 36 \\ &\iff MI = 6. \end{aligned}$$

L'ensemble des points M est donc l'ensemble des points à une distance de 6 du point : c'est le cercle de centre I et de rayon 6.

6 Théorème d'Al-Kashi

Énoncé p. 240

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

1 La figure est mise page ci-contre, en fin d'exercice.

2 $OA = OB = AB$ donc OAB est un triangle équilatéral. On en déduit que $\widehat{OAB} = 60°$ et donc que $\widehat{OAC} = 20°$.
Or, AOC est isocèle en O car $OA = OC$ donc :

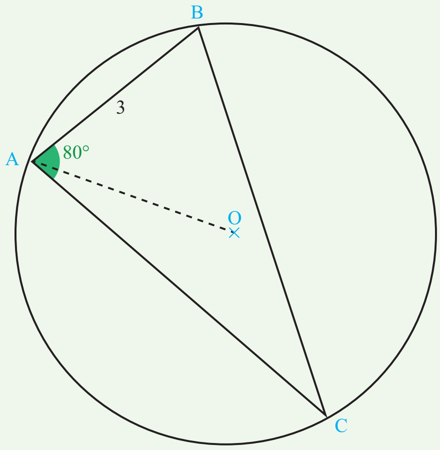
$$\widehat{AOC} = 180° - 2\times 20° = 140°.$$

Le théorème d'Al-Kashi appliqué au triangle OAC donne :

$$\begin{aligned} AC^2 &= OA^2 + OC^2 - 2 \times OA \times OC \times \cos \widehat{AOC} \\ &= 9 + 9 - 18 \cos\left(140°\right) \end{aligned}$$

soit $AC \approx 5{,}64$.

3 $$\begin{aligned} \text{Aire}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{CAB} \\ &\approx \frac{1}{2} \times 3 \times 5{,}64 \times \sin 80° \\ &\approx 8{,}33. \end{aligned}$$



7 Relations métriques et suites

Énoncé p. 240

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

1 Le théorème de la médiane appliqué dans le triangle SA_0A_2 donne :

$$SA_0^2 + SA_2^2 = 2SA_1^2 + \frac{A_0A_2^2}{2}$$

ce qui donne :

$$49 + SA_2^2 = 2SA_1^2 + 18 \iff SA_2^2 = 2SA_1^2 - 31.$$

2 Le théorème d'Al-Kashi appliqué au triangle SA_0A_1 donne :

$$\begin{aligned} SA_1^2 &= SA_0^2 + A_1A_0^2 - 2 \times SA_0 \times A_0A_1 \times \cos\alpha \\ SA_1^2 &= 49 + 9 - 42\cos\alpha \\ SA_1^2 &= 58 - 42\cos\alpha. \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$SA_1 = \sqrt{58 - 42\cos\alpha}.$$

De la question précédente, on peut alors déduire :

$$SA_2^2 = 2(58 - 42\cos\alpha) - 31$$

$$SA_2 = \sqrt{85 - 84\cos\alpha}.$$

3 Par construction, dans le triangle SA_nA_{n+2}, le théorème de la médiane donne :

$$SA_n^2 + SA_{n+2}^2 = 2SA_{n+1}^2 + \frac{A_nA_{n+2}^2}{2}.$$

Donc :

$$SA_{n+2}^2 = 2SA_{n+1}^2 - SA_n^2 + 18.$$

Autrement dit,

$$u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}^2 - u_n^2 + 18}.$$

4 **Algorithme**

```
a ← angle
u ← 7
v ← √(58-42cos(a))
Pour n allant de 0 à 48:
   w ← √(2*v*v-u*u+18)
   u ← v
   v ← w
Fin du Pour
Afficher w
```

En Python

```python
from math import sqrt, cos, pi

a = pi/3 # angle arbittraire
u = 7
v = sqrt(58-42*cos(a))

for n in range(49):
    w = sqrt(2*v*v-u*u+18)
    u = v
    v = w

print(w)
```

Ce programme affiche : 146.62537297480264.

8 Formule de Héron

Énoncé p. 240

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 Dans le triangle AHB, rectangle en H, on a : $\sin \widehat{A} = \dfrac{h}{c}$, donc $h = c \times \sin \widehat{A}$.

L'aire de ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times h \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}.$$

2 La formule d'Al-Kashi est :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}\,,$$

ce qui donne :

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \widehat{A}\,,$$

ou encore :

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\cos^2 \widehat{A} = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}.$$

Or, $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$, donc $\cos^2 \widehat{A} = 1 - \sin^2 \widehat{A}$, ce qui donne :

$$1 - \sin^2 \widehat{A} = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}\,,$$

soit :

$$\sin^2 \widehat{A} = 1 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}.$$

3 Développons :

$$\begin{aligned}
&\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}\\
&= \frac{4\dfrac{a+b+c}{2}\left(\dfrac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\dfrac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\dfrac{a+b+c}{2} - c\right)}{b^2c^2}\\
&= \frac{2(a+b+c)\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)\left(\dfrac{a-b+c}{2}\right)\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)}{b^2c^2}\\
&= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4b^2c^2}\\
&= \frac{\left[2bc + (b^2 + c^2 - a^2)\right]\left[2bc - (b^2 + c^2 - a^2)\right]}{4b^2c^2}
\end{aligned}$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}&=\frac{(2bc)^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2}\\&=1-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2}\\&=\sin^2\widehat{A}.\end{aligned}$$

4 De la question 1, on déduit que :

$$\mathcal{A}^2=\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\widehat{A}.$$

En remplaçant alors $\sin^2\widehat{A}$ par l'expression trouvée à la question 3, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2&=\frac{1}{4}b^2c^2\times\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}\\&=p(p-a)(p-b)(p-c).\end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ étant un nombre positif, en prenant la racine carrée des deux membres de cette dernière égalité, on obtient :

$$\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

5 $p=\dfrac{7+9+12}{2}=14$ donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)}\\&=\sqrt{14\times7\times5\times2}\\&=\sqrt{980}\\\mathcal{A}&=14\sqrt{5}\text{ cm}^2.\end{aligned}$$

9 Médiatrices et cercle

Énoncé p. 241

Lycée Pasteur, Paris

1 K est le milieu de $[AC]$ donc :

$$x_K=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad y_K=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}.$$

Ainsi, $K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

L est le milieu de $[BC]$ donc :

$$x_L=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad y_L=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $L\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

2 • Soit $M(x;\, y)$ un point de (d_1), médiatrice de $[AC]$. Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AC}=0 &\iff \begin{pmatrix}x-\frac{1}{2}\\ y-\frac{5}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=0\\ &\iff -\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\\ &\iff -x+\frac{1}{2}+y-\frac{5}{2}=0\\ &\iff -x+y-2=0.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (d_1) est donc : $-x+y-2=0$.

• Soit $M(x;\, y)$ un point de (d_2), médiatrice de $[BC]$. Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 &\iff \begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}\\ y-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}=0\\ &\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)+5\left(y-\frac{1}{2}\right)=0\\ &\iff x+\frac{1}{2}+5y-\frac{5}{2}=0\\ &\iff x+5y-2=0.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (d_2) est donc : $x+5y-2=0$.

3 Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre Ω, le point d'intersection des médiatrices, dont les coordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases}-x+y-2=0\\ x+5y-2=0\end{cases}.$$

On résout ce système en ajoutant les deux équations :

$$(-x+y-2)+(x+5y-2)=0 \iff 6y-4=0 \iff y=\frac{2}{3}$$

et en remplaçant y par $\frac{2}{3}$ dans la première équation (par exemple) :

$$-x+\frac{2}{3}-2=0 \iff x=-\frac{4}{3}.$$

D'où $\Omega\left(-\frac{4}{3};\, \frac{2}{3}\right)$.

Le rayon du cercle est ΩC (par exemple).

$$\overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}0+\frac{4}{3}\\ 3-\frac{2}{3}\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ \frac{7}{3}\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\Omega C^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{16+49}{9}=\frac{65}{9}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

L'équation cartésienne canonique du cercle circonscrit au triangle ABC est alors :

$$\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{65}{9}.$$

10 Équations de droites et de cercles

Énoncé p. 241

Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles

1 **(a)** La médiatrice de $[AB]$ est la droite qui passe par le milieu I de $[AB]$ et qui est perpendiculaire à (AB).

On a : $I\left(\frac{1+4}{2}\ ;\ \frac{-2-1}{2}\right)$, donc $I\left(\frac{5}{2}\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}(3\ ;\ 1)$.

$$\begin{aligned}M\in D_1 &\iff \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ &\iff \left(x-\frac{5}{2}\right)\times 3+\left(y+\frac{3}{2}\right)\times 1=0\\ &\iff 3x+y-\frac{15}{2}+\frac{3}{2}=0\\ &\iff 3x+y-6=0\end{aligned}$$

Une équation de D_1 est donc $3x+y-6=0$.

(b) La médiatrice de $[BC]$ est la droite qui passe par le milieu J de $[BC]$ et qui est perpendiculaire à (BC).

On a : $J\left(\frac{4+4}{2}\ ;\ \frac{4-1}{2}\right)$, donc $J\left(4\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{BC}(0\ ;\ 5)$.

$$\begin{aligned}M\in D_2 &\iff \overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ &\iff (x-4)\times 0+\left(y-\frac{3}{2}\right)\times 5=0\\ &\iff y-\frac{3}{2}=0\\ &\iff y=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Une équation de D_2 est donc $y=\frac{3}{2}$.

(c) Le point d'intersection K de ces deux droites vérifie :

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}\\ 3x+y-6=0\end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{3}{2}\\ x=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Donc $K\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ est, par propriété (intersection des médiatrices), le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Il reste à trouver le rayon de ce cercle, en calculant par exemple KA.

$$KA=\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{2}}.$$

L'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est donc :

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

11 Cercle et droites

Énoncé p. 242

Lycée Louis Vincent, Metz

1 La figure complète se trouve en fin de corrigé.

2 Soit $M(x;\,y)$ un point de (BC). Alors, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-9\\y-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-9\\-5-7\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM}\text{ et }\overrightarrow{BC}\text{ colinéaires} &\iff -12(x-9)-(-9)(y-7)=0\\
&\iff -12x+108+9y-63=0\\
&\iff -12x+9y+45=0\\
&\iff -3(4x-3y-15)=0\\
&\iff 4x-3y-15=0 \text{ car } -3\neq 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (BC) est donc $4x-3y-15=0$.

3 $(\Delta)\perp(BC)$ et $A\in(\Delta)$ donc, pour tout point $M(x;\,y)\in(\Delta)$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 &\iff \begin{pmatrix}x-(-1)\\y-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix}=0\\
&\iff -9(x+1)-12(y-2)=0\\
&\iff -9x-12y-9+24=0\\
&\iff -9x-12y+15=0\\
&\iff -3(3x+4y-5)=0\\
&\iff 3x+4y-5=0 \text{ car } -3\neq 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (Δ) est donc $3x+4y-5=0$.

4 H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $(AH)\perp(BC)$ et $H\in(BC)$. H est donc l'intersection de (Δ) et (BC). Pour trouver ses coordonnées, on doit résoudre le système formé par les équations de ces deux droites.

CORRIGÉS

$$\begin{cases} 4x-3y-15=0 & L_1 \\ 3x+4y-5=0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 16x-12y-60=0 & L_1' \leftarrow 4L_1 \\ 9x+12y-15=0 & L_2' \leftarrow 3L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 25x-75=0 & L_1' \leftarrow L_1'+L_2' \\ 3x+4y-5=0 & L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{75}{25}=3 \\ 3\times 3+4y-5=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{5-9}{4}=-1 \end{cases}$$

Ainsi, $H(3;-1)$.

5 Le cercle (Γ) étant tangent à (BC) et ayant pour centre A, son rayon est égal à AH.

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ AH &= 5. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (Γ) est donc :

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=5^2$$

soit :

$$(x+1)^2+(y-2)^2=25.$$

6 Les points d'intersection de (Γ) avec l'axe des abscisses sont les points de (Γ) d'ordonnée nulle, donc leur abscisse vérifie :

$$(x+1)^2+(0-2)^2=25$$

soit, après simplification :

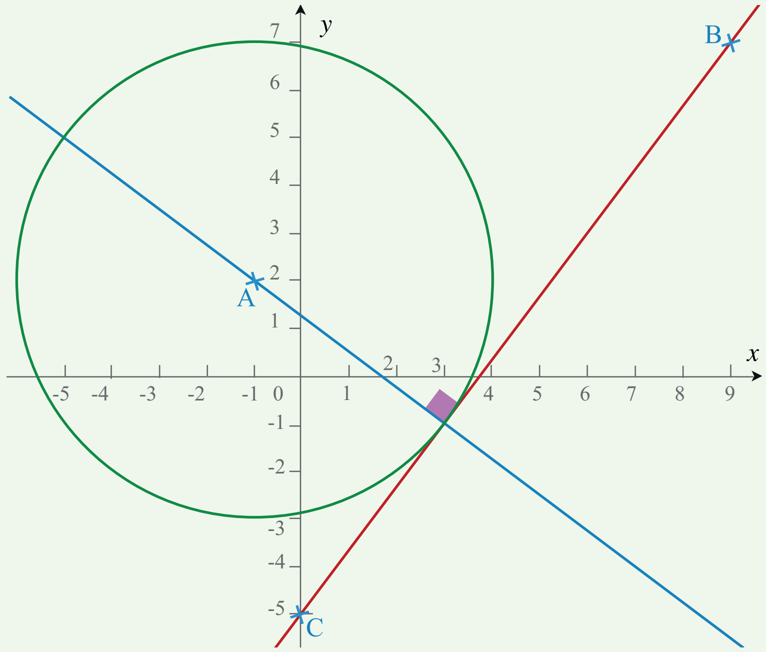
$$x^2+2x-20=0,$$

équation dont le discriminant est égal à $2^2-4\times 1\times(-20)=84>0$, donc ayant deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{84}}{2}=\frac{-2-\sqrt{4\times 21}}{2}=\frac{-2-2\sqrt{21}}{2}=-1-\sqrt{21}$$

et donc :

$$x_2=-1+\sqrt{21}.$$



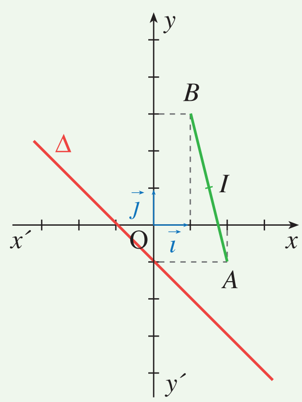
12 Étude d'un cercle

Énoncé p. 242

Lycée Clémenceau, Nantes

Le cercle que l'on doit déterminer passe par les deux points $A(2\ ;-1)$ et $B(1\ ;3)$. Le centre appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Étudions le schéma suivant :



Le milieu de $[AB]$ est $I\left(\dfrac{3}{2}\ ;1\right)$. Cherchons une équation de la médiatrice de $[AB]$, écrivons pour cela qu'avec I, milieu de $[AB]$, le point $M(x\ ;y)$ est

CORRIGÉS

sur la médiatrice si et seulement si :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Or $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées :

$$\left(x - \frac{3}{2}\ ;\ y - 1\right)$$

et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1\ ;\ 4)$, donc une équation de la médiatrice de $[AB]$ est :

$$-\left(x - \frac{3}{2}\right) + 4(y - 1) = 0$$

Soit :

$$x - 4y + \frac{5}{2} = 0$$

Déterminons-en alors l'intersection avec la droite donnée :

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - 4y + \dfrac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

En faisant la différence des deux équations, nous obtenons :

$$5y - \frac{3}{2} = 0$$

Donc :

$$y = \frac{3}{10} \quad \text{et} \quad x = -\frac{13}{10}$$

sont les coordonnées du centre du cercle. Notons Ω ce centre :

$$\Omega\left(-\frac{13}{10}\ ;\ \frac{3}{10}\right)$$

Et

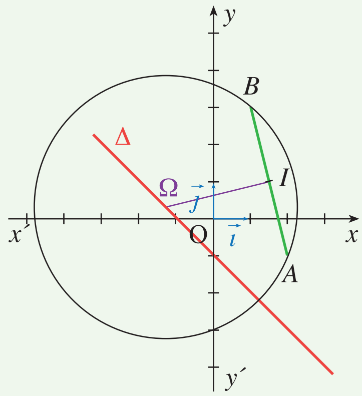
$$r = \|\overrightarrow{\Omega B}\|$$

Donc :

$$\|\Omega B\|^2 = r^2 = \left(1 + \frac{13}{10}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1258}{100}$$

D'où :

$$r = \sqrt{12{,}58} \approx 3{,}55$$



13 Distance d'un point à une droite

Énoncé p. 242

Lycée La Source, Meudon

1 Par définition, un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x+y+2=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, et un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

MÉTHODE

Pour rappel, la droite d'équation $ax+by+c=0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

2 Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ donc un vecteur directeur de Δ est $\vec{n}$. Ainsi, une équation cartésienne de Δ est de la forme $1x-2y+c=0$, où $c\in\mathbb{R}$.
Or, $A\in\Delta$ donc $x_A-2y_A+c=0$, soit $2-2\times 4+c=0$. On obtient alors $c=6$.
Une équation cartésienne de Δ est donc $x-2y+6=0$.

3 Par définition, H est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ. Ses coordonnées sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} 2x+y+2=0 & (L_1)\\ x-2y+6=0 & (L_2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}(L_1)-2(L_2) &\iff (2x+y+2)-2(x-2y+6)=0\\ &\iff 5y=10\\ &\iff y=2.\end{aligned}$$

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} 2(L_1)+(L_2) &\iff 2(2x+y+2)+(x-2y+6)=0 \\ &\iff 5x=-10 \\ &\iff x=-2. \end{aligned}$$

Ainsi, $H(-2;2)$.

4 Le centre I du cercle $\mathcal{C}$ est le milieu de $[AH]$, et a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A+x_H}{2};\frac{y_A+y_H}{2}\right)=\left(\frac{2+(-2)}{2};\frac{4+2}{2}\right)=(0;3).$$

Le carré du rayon de $\mathcal{C}$ est :

$$IA^2=(2-0)^2+(4-3)^2=4+1=5.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est donc :

$$x^2+(y-3)^2=5.$$

5 Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec d'axe des ordonnées ont une abscisse nulle. On remplace donc x par 0 dans l'équation de $\mathcal{C}$ pour trouver les valeurs de y qui satisfont cette équation :

$$\begin{aligned} (y-3)^2=5 &\iff y-3=-\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad y-3=\sqrt{5} \\ &\iff y=3-\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad y=3+\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(0;3-\sqrt{5})$ et $Q(0;3+\sqrt{5})$.

14 Équation d'un cercle

Énoncé p. 243

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

1 On considère que x^2-6x est le début d'un carré parfait, et de même que y^2-4y est le début d'un carré parfait.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} x^2-6x+9&=(x-3)^2 \quad \text{et} \quad x^2-6x=(x-3)^2-9; \\ y^2-4y+4&=(y-2)^2 \quad \text{et} \quad y^2-4y=(y-2)^2-4. \end{aligned}$$

Finalement :

$$x^2+y^2-6x-4y-4=(x-3)^2-9+(y-2)^2-4-4=0.$$

Donc :

$$(x-3)^2+(y-2)^2=17.$$

Ω a donc pour coordonnées $(3\,;2)$, et le rayon du cercle est $\sqrt{17}$.

2 En remplaçant x et y dans le premier membre de l'équation du cercle par les coordonnées de A, on obtient :

$$(-1-3)^2+(1-2)^2=4^2+1^2=17.$$

Donc, puisque les coordonnées de A vérifient l'équation du cercle, A appartient bien au cercle.

La tangente en A à $\mathcal{C}$ passe par A et est perpendiculaire au rayon ΩA.
Par conséquent, $M(x\ ;\ y)$ appartient à cette tangente si et seulement si :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=0 &\iff (x+1)\times(-1-3)+(y-1)\times(1-2)=0\\ &\iff -4x-4-y+1=0\\ &\iff y=-4x-3.\end{aligned}$$

3 $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}'$ si $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au rayon de $\mathcal{C}'$ ayant un point commun H avec $\mathcal{D}$.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(1\ ;\ 1)$. On doit donc avoir : $\overrightarrow{\Omega H}\cdot\vec{u}=0$.
Il faut donc trouver les coordonnées du point H intersection de $\mathcal{C}'$ avec $\mathcal{D}$. Les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de H vérifient :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}x-y=4\\ \begin{pmatrix}x-3\\ y-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=0\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{l}x-y=4\\ (x-3)\times 1+(y-2)\times 1=0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}y=x-4\\ x-3+x-6=0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}y=x-4\\ x=\dfrac{9}{2}\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{9}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Le point H a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{9}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.
Calculons ΩH^2 pour avoir le carré du rayon du cercle :

$$\Omega H^2=\left(\frac{9}{2}-3\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2=\frac{9}{2}.$$

Le cercle $\mathcal{C}'$ a donc pour équation :

$$(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{9}{2}.$$

Chapitre 9

Probabilités conditionnelles

Plan du chapitre

Exercice type

Lycée Virlogeux, Riom

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. Ce test présente les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint de cette maladie ait un test positif est $0{,}95$.
- la probabilité qu'un individu non atteint par cette maladie ait un test négatif est aussi $0{,}95$.

On choisit un individu au hasard et on note M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1 On réalise un dépistage dans une population donnée dans laquelle la proportion d'individus atteints de la maladie est $0{,}001$.

(a) Construire un arbre représentant cette situation.

(b) Calculer la probabilité de l'événement T.

(c) Calculer la probabilité qu'un individu présentant un test positif soit atteint de la maladie. Cette probabilité est appelée valeur prédictive du test.

2 On veut étudier les variations de cette valeur prédictive selon la proportion d'individus atteints de la maladie dans la population.

(a) On considère une population à risque pour la maladie considérée : dans cette population, un quart des individus sont atteints. Quelle est alors la valeur prédictive du test ?

(b) On considère maintenant une population dans laquelle la proportion d'individus atteints de la maladie est x. Déterminer en fonction de x la valeur prédictive du test pour cette population.
Pour quelle valeur de x un individu dont le test est positif a-t-il autant de chance d'être malade que d'être sain ?

Voir corrigé page 266

COURS

1 Conditionnement

Définition 1

A et B sont deux événements d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $p_A(B)$ est :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Remarques

- La probabilité de B sachant A est la probabilité que B soit réalisé dans l'univers A.
- Dans le cas d'équiprobabilité,

$$p_A(B) = \frac{\text{nombre d'événements élémentaires de } A \cap B}{\text{nombre d'événements élémentaires de } A}.$$

À RETENIR

Pour calculer $p_A(B)$, vous pouvez :

- soit utiliser la définition si vous connaissez $p(A \cap B)$ et $p(A)$;
- soit déterminer les résultats qui réalisent A et, parmi ceux-ci, calculer la probabilité de ceux qui réalisent B.

Propriété 1

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors,

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B).$$

Théorème 1

Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$. Alors :

$$p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1.$$

2 Indépendance

Définition 2

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω. Deux événements A et B de probabilités non nulles sont *indépendants* si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Propriété 2

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si :

$$p_A(B) = p(B) \qquad \text{ou} \qquad p_B(A) = p(A).$$

Propriété 3

Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

3 Formule des probabilités totales

Définition 3

Les événements $E_1, \ldots, E_n$ forment une partition de Ω si et seulement si :

- les E_i sont deux à deux incompatibles ($E_i \cap E_j = \varnothing$ pour $i \neq j$),
- aucun des E_i n'est impossible ($E_i \neq \varnothing$ pour tout entier i),
- et la réunion des E_i est l'univers ($E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega$).

Remarque : on dit aussi que $(E_1, \ldots, E_n)$ forment un système complet d'événements.

Théorème 2 : formule des probabilités totales

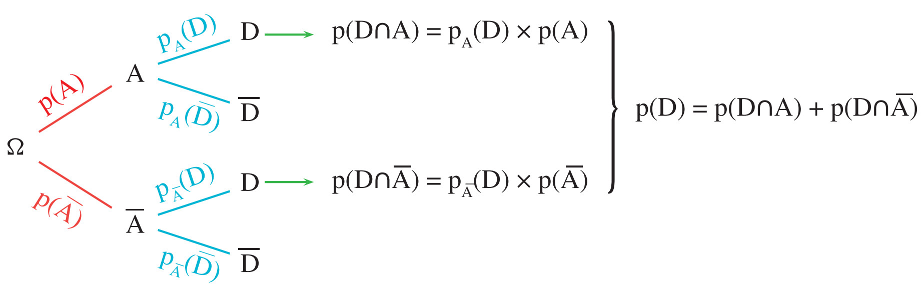
Soit p une probabilité définie sur un univers Ω et $E_1, \ldots, E_n$ un système complet d'événements, alors pour tout événement B :

$$p(B) = p(B \cap E_1) + p(B \cap E_2) + \cdots p(B \cap E_n).$$

Remarque : cette dernière formule revient aussi à écrire :

$$p(B) = p_{E_1}(B)p(E_1) + p_{E_2}(B)p(E_2) + \cdots p_{E_n}(B)p(E_n).$$

Dans le cas d'une partition à deux événements A et D, on peut schématiser la formule des probabilités totales ainsi :

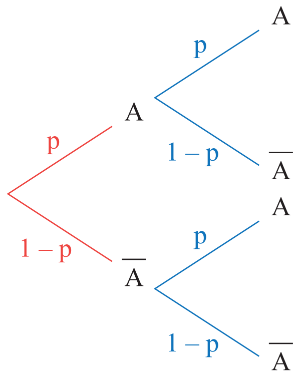


COURS

4 Succession de deux épreuves indépendantes

Imaginons une épreuve à 2 issues (A et $\overline{A}$ par exemple) que l'on répète deux fois de façon indépendante, c'est-à-dire que les issues de la seconde fois ne sont nullement influencées par celles de la première fois.

Alors, la situation peut se représenter par l'arbre suivant :



Ainsi,

- la probabilité d'obtenir deux fois l'événement A est p^2 ;
- la probabilité d'obtenir une seule fois l'événement A est $= 2p(1-p)$;
- la probabilité de ne pas obtenir l'événement A est $(1-p)^2$.

Exemple : on lance un dé cubique équilibré deux fois de suite, en considérant que les lancers sont indépendants.

On pose A : « obtenir un multiple de 3. » Ainsi, $p = p(A) = \frac{1}{3}$.

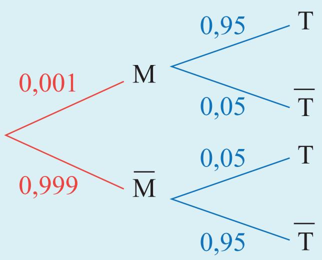
La probabilité d'obtenir un multiple de 3 une seule fois sur les deux lancers est :

$$2p(1-p) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Solution de l'exercice type — **Lycée Virlogeux, Riom**

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

1 **(a)** On peut représenter la situation par l'arbre ci-dessous :

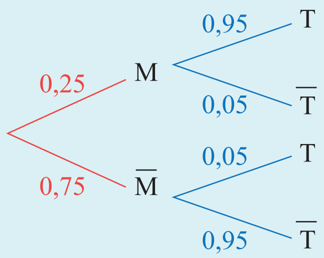


Solution de l'exercice type (suite) Lycée Virlogeux, Riom

(b) $$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= 0{,}001 \times 0{,}95 + 0{,}999 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}0509. \end{aligned}$$

(c) On a : $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0{,}001 \times 0{,}95}{0{,}0509} \approx 0{,}0187.$

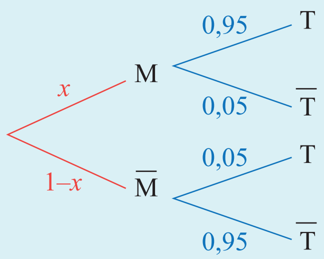
2 **(a)** On obtient le nouvel arbre :



En faisant le même calcul que précédemment, on obtient :

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}95}{0{,}25 \times 0{,}95 + 0{,}75 \times 0{,}05} \approx 0{,}864.$$

(b) On obtient maintenant cet arbre :



En faisant le même calcul que précédemment, on obtient :

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{x \times 0{,}95}{x \times 0{,}95 + (1-x) \times 0{,}05} = \frac{0{,}95x}{0{,}05 + 0{,}9x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{0{,}95x}{0{,}05 + 0{,}9x} = 0{,}5 &\iff 0{,}95x = 0{,}45x + 0{,}025 \\ &\iff 0{,}5x = 0{,}025 \\ &\iff x = 0{,}05. \end{aligned}$$

Conclusion : un individu dont le test est positif a autant de chance d'être malade que sain lorsque 5% de la population est atteinte par cette maladie.

Voir énoncé page 263

INTERROS

1 QCM Propriétés des probabilités

15 min Corrigé p. 278

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 A et B sont deux événements relatifs à une même épreuve tels que $p(A) = 0{,}3$, $p_A(B) = 0{,}4$ et $p_{\bar{A}}(B) = 0{,}2$.

a $p(B) = 0{,}26$ **b** $p(A \cap B) = 0{,}4$ **c** $p(A \cup B) = \dfrac{109}{130}$

2 A et B sont des événements relatifs à une même épreuve tels que $p(A) = 0{,}6$, $p(A \cup B) = 0{,}8$ et $p(A \cap B) = p(A)p(B)$. Alors

a $p(A \cap B) = 0{,}48$ **b** $p(B) = 0{,}2$ **c** $p_A(B) = 0{,}5$

3 A et B sont deux événements relatifs à une même épreuve tels que $p(A \cap B) = 0{,}8$ et $p_A(B) = 0{,}25$.

a $p(A) = 0{,}2$ **b** C'est impossible **c** $p(B) = 0{,}9$

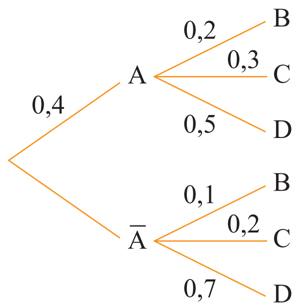
4 A et B sont deux événements relatifs à une même épreuve tels que $p(A \cap B) = 0{,}12$ et $p(\bar{A} \cap B) = 0{,}36$.

a $p_B(A) = 0{,}24$ **b** $p_B(A) = 0{,}48$ **c** $p_B(A) = 0{,}25$

2 V/F Interprétation d'un arbre

15 min Corrigé p. 278

On a résumé des informations d'une expérience dans l'arbre ci-dessous :



Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1 $p_A(D) = 0{,}2$

2 $p(C) = 0{,}2$

3 $p(B) = 0{,}14$

4 $p_D(A) = \dfrac{5}{16}$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

3 QCM D'après un sujet de bac

10 min Corrigé p. 279

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

Les élèves de deux classes de 1re (désignées par 1reA et 1re B) sont répartis selon leur spécialité (qui sont abrégées en NSI, SVT, Math) de la façon suivante :

Spécialité	1re A	1re B	Total
NSI	16	8	24
SVT	12	14	26
Math	6	10	16
Total	34	32	66

On interroge un élève au hasard. Les données précédentes sont à utiliser pour les quatre questions suivantes :

1 La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la 1re A est égale à :

a $\dfrac{1}{66}$ **b** $\dfrac{1}{34}$ **c** $\dfrac{17}{33}$

2 La probabilité que l'élève interrogé suive l'enseignement de spécialité Math ou appartienne à la 1re A est égale à :

a $\dfrac{2}{3}$ **b** $\dfrac{25}{33}$ **c** $\dfrac{1}{11}$

3 La probabilité que l'élève interrogé suive la spécialité Math sachant qu'il appartient à la 1re A est égale à :

a $\dfrac{1}{34}$ **b** $\dfrac{1}{11}$ **c** $\dfrac{3}{17}$

4 La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la 1re A sachant qu'il suit la spécialité Math est égale à :

a $\dfrac{3}{17}$ **b** $\dfrac{14}{17}$ **c** $\dfrac{3}{8}$

4 V/F Événements indépendants

10 min Corrigé p. 279

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1 On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir face au dixième lancer sachant qu'on a obtenu pile à tous les lancers précédents est strictement supérieure à 0,5.

2 Si A et B sont deux événements définis sur le même espace probabilisé tels que $P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(B) = \dfrac{3}{5}$ et $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{4}{15}$, alors les événements A et B sont indépendants.

3 **(a)** Dans une classe de terminale S, les trois quarts des élèves sont des filles. Une fille sur trois a son permis de conduire du premier coup alors que cela n'est le cas que d'un garçon sur dix. On interroge au hasard un élève de la classe. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est $0{,}275$.

(b) On interroge un élève ayant eu son permis du premier coup. La probabilité que ce soit un garçon est $0{,}1$.

Conditionnement

5 Notations

★ 5 min Corrigé p. 280

Lycée La Source, Meudon

Dans une population, on choisit une personne au hasard et on considère les événements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme »
- H : « la personne choisie est un homme »
- R : « la personne choisie est retraitée »

Donnez la notation correspondant à chacune des probabilités suivantes :

1. Parmi les femmes, 25% sont des retraitées.
2. Un tiers des hommes sont retraités.
3. Chez les personnes retraitées, 45% sont des femmes.
4. Lorsqu'on interroge un homme, la probabilité pour que ce ne soit pas un retraité est 67%.

6 Centre de vacances

★ 15 min Corrigé p. 281

Lycée Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

Un centre de vacances accueillant 200 adolescents propose deux activités : équitation et tir à l'arc.

Les adolescents peuvent s'inscrire à une, deux ou aucune activité(s).

73% choisissent de s'inscrire à l'équitation, 66% s'inscrivent au tir à l'arc, et parmi ces derniers, 75% se sont aussi inscrits à l'équitation.

On choisit au hasard un adolescent et on note les événements :

- E : « l'adolescent fait de l'équitation »
- T : « l'adolescent fait du tir à l'arc »

1. À l'aide des événements E et T, traduire en terme de probabilité les informations données dans l'énoncé.

2 Compléter le tableau d'effectifs suivant :

	E	$\overline{E}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			200

3 Pierre est inscrit à l'équitation. Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas de tir à l'arc ?

4 Juliette est inscrite au tir à l'arc. Quelle est la probabilité qu'elle fasse aussi de l'équitation ?

5 Quelle est la probabilité que l'adolescent ne fasse aucune activité ?

6 Quelle est la probabilité que l'adolescent fasse au moins l'une des deux activités ?

7 Arbre pondéré

★ 20 min Corrigé p. 281

Lycée Virlogeux, Riom

Dans une ville , une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio ;
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :

- T l'événement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\bar{T}$ son événement contraire ;
- B l'événement « le ménage consomme des produits bio » et $\bar{B}$ son événement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1 Donner sans justification la probabilité $p(T)$ de l'événement T.

2 Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

3 **(a)** Calculer la probabilité de l'événement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio »

(b) Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.

4 Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième).

INTERROS

8 Pannes électroniques

★ 20 min Corrigé p. 282

Lycée Voltaire, Paris

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.

1. On note F l'événement :« l'appareil fonctionne parfaitement », et $\overline{F}$ l'événement contraire de F. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{F}$.
2. On fait subir à chaque appareil un test avant la livraison ; on constate que :
   - quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test.
   - quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.

   On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

   (a) Montrer que les probabilités des événements « T et F » et « T et $\overline{F}$ » sont respectivement égales à $\frac{9}{10}$ et $\frac{1}{110}$.

   (b) En déduire la probabilité de T.

   (c) Calculer la probabilité de F sachant T.

9 Génétique

★ 30 min Corrigé p. 283

Lycée Stanislas, Paris

Une population est constituée de 100 personnes (40 hommes et 60 femmes) telles que :

- 50 personnes ont les yeux bleus,
- 60 % des hommes ont les yeux bleus.

On choisit au hasard une personne. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

Calculer, sous forme de fraction irréductible, les probabilités des événements suivants :

1. A : « Avoir choisi un homme ».
2. B : « Avoir choisi un homme aux yeux bleus ».
3. C : « Avoir choisi une femme aux yeux bleus ».
4. D : « Avoir choisi une personne aux yeux bleus, sachant que c'est une femme ».
5. E : « Avoir choisi une femme, sachant que c'est une personne ayant les yeux bleus ».

10 Vaccin et maladie

★★ 10 min Corrigé p. 284

Lycée Clémenceau, Nantes

Un vaccin contre une maladie contagieuse n'est pas toujours totalement efficace.

Une étude réalisée sur un grand nombre d'individus a montré que :

- 30% de la population sont vaccinés ;
- un individu vacciné contracte la maladie une fois sur cinq ;
- un individu non vacciné contracte la maladie dans un cas sur trois.

On choisit au hasard un individu de la population.

On note :

- V : « l'individu choisi est vacciné »
- M : « l'individu choisi est malade »

Représentez la situation par un arbre pondéré.

Déterminer la probabilité qu'un individu soit malade.

11 Arbre pondéré

★★ 40 min Corrigé p. 285

Lycée Galilée, Gennevilliers

Pour payer ses études de médecine, Watson est gardien de nuit dans une grande résidence de 100 appartements. Celle-ci est munie d'un système anti-intrusion (antivol) ultra-moderne, mais qui provoque quelquefois de fausses alarmes.

D'après le constructeur du système, la probabilité d'une fausse alarme, c'est-à-dire que l'alarme se déclenche alors qu'il n'y a pas d'intrusion, est de 0,02.

Par ailleurs, les statistiques sur les trois dernières années montrent que :

Année	1999	2000	2001
Nombre d'intrusions	28	30	26
Nombre d'intrusions qui ont déclenché l'alarme	25	28	23

On effectuera tous les calculs avec une précision de 0,001.

1 D'après ces données, et en interprétant les fréquences statistiques comme des probabilités, montrer que :

(a) La probabilité d'avoir une intrusion un jour quelconque de l'année est de 0,077 (à 0,001 près).

(b) La probabilité qu'il y ait une intrusion et que l'alarme se déclenche est de 0,069 (à 0,001 près).

2 Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche sachant qu'il y a eu une intrusion ?

INTERROS

3 Représenter les résultats précédents sous forme d'arbre pondéré.
Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche ?

4 Une nuit Watson est réveillé en sursaut par l'alarme. Il consulte son ami Sherlock pour connaître la probabilité qu'il s'agisse d'une intrusion.
Quelle réponse donne Sherlock ?

12 Tickets de péage

★★ 30 min Corrigé p. 286

Lycée Virlogeux, Riom

Dans tout cet exercice, on donnera la valeur exacte de chaque résultat.

Grâce à un système de détecteur, une borne de péage automatique peut délivrer des tickets à deux hauteurs différentes selon le véhicule détecté afin que le conducteur ne soit pas obligé de sortir pour le saisir :

- s'il s'agit d'une voiture, d'une moto ou d'une camionnette, le ticket sort en bas ;
- s'il s'agit d'un camion, le ticket sort en haut.

La société d'autoroute a modélisé le fonctionnement défectueux du détecteur de l'une de ces bornes :

- lorsqu'un camion passe, il n'est correctement détecté que deux fois sur trois ;
- lorsqu'un autre type de véhicule passe, son conducteur est contraint d'en sortir pour saisir son ticket en haut une fois sur quatre.

On estime qu'à cette borne de péage, 60 % des véhicules sont des camions.

On considère les événements suivants :

- C : « Le véhicule qui se présente est un camion » ;
- H : « Le ticket sort en haut » ;
- B : « Le ticket sort en bas ».

Notation : pour tout événement E et tout événement F de probabilité non nulle, on note $p(E)$ la probabilité de l'événement E et $p_F(E)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.

1 Donner les probabilités : $p(C), p_{\bar{C}}(H)$ et $p_{\bar{C}}(B)$.

2 Construire un arbre probabiliste présentant la situation.

3 Calculer la probabilité que le ticket sorte en haut.

4 Montrer que la probabilité qu'un conducteur ne soit pas obligé de sortir de son véhicule pour saisir le ticket vaut 0,7.

13 Prise d'initiative

★★ 25 min Corrigé p. 287

Lycée Sophie Germain, Paris

Une coopérative d'achat mène une enquête auprès de ses adhérents et leur fait remplir un questionnaire à propos de leur équipement en Smartphone.

L'enquête révèle que 80 % des adhérents possèdent un Smartphone. Mais aussi que 15 % de ceux qui n'en ont pas vont en acheter un dans l'année, alors que 30 % de ceux qui sont déjà équipé vont renouveler leur équipement.

On choisit au hasard le questionnaire d'un des adhérents.

1. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation, en définissant précisément les événements considérés.
2. Quelle est la probabilité de choisir le questionnaire d'un adhérent déjà équipé et qui va renouveler son matériel ?
3. Si au moins 25 % des adhérents souhaitent acheter un Smartphone cette année, la coopérative va mettre en place un service spécial d'information pour faciliter le choix de l'équipement. D'après cette enquête, va-t-elle le mettre en place ?
4. Sachant que la personne va acheter un Smartphone dans l'année, quelle est la probabilité que ce soit son premier équipement ?

14 Sondage anonyme

★★★ 20 min Corrigé p. 287

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

Voici une technique pour permettre des réponses anonymes à une question. On propose à chaque personne sondée de faire comme ci-dessous :

- lancez une pièce de monnaie. Si elle tombe sur pile, répondez à la question : « Est-ce que vous fumez plus d'un paquet de cigarette par jour ? ».
- Si elle tombe sur face, relancez la pièce une deuxième fois, et répondez à la question : « Êtes-vous tombé sur pile au deuxième lancer ? ».

Chacune des personnes sondées répond en cochant la case oui ou la case non au bas de la fiche explicative. On ne sait donc pas à quelle question elle a répondu oui, ou non. Il y a donc plus de chance que les personnes répondent honnêtement.

1. Modéliser la situation par un arbre en notant r la proportion (inconnue) de gros fumeurs parmi les personnes interrogées.
2. Sur un grand nombre de personnes, on a obtenu 45 % de oui. À combien peut-on estimer la proportion de personnes fumant plus d'un paquet de cigarettes par jour ?
3. Inversement, quelle devrait être la proportion de oui pour que la proportion de gros fumeurs (plus d'un paquet par jour) soit inférieure à 10 % ?

15 Probabilités et suites

★★★ 45 min Corrigé p. 288

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Pierre et Jean-Philippe jouent souvent au ping-pong ensemble, et lorsqu'ils jouent, ils font de nombreuses parties d'affilée. Lors de la première partie, ils ont autant de chance de gagner l'un que l'autre.

Ils ont remarqué que, si Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,6, alors que s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,7.

On note G_n l'événement « Pierre gagne la n-ième partie ».

1 **(a)** Donner les valeurs de $p(G_1)$ et de $p(\bar{G}_1)$.

(b) Calculer $p(G_2)$ et $p(\bar{G}_2)$.

2 (u_n) et (v_n) sont les deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = p(G_n) \quad \text{et} \quad v_n = p(\bar{G}_n).$$

(a) Construire un arbre pondéré pour la n-ième et la $(n+1)$-ième partie.

(b) En déduire que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}3v_n, \\ v_{n+1} = 0{,}4u_n + 0{,}7v_n. \end{cases}$$

(c) Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante. Donner la valeur de $u_n + v_n$ pour tout n.

(d) Démontrer que la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique.

Exprimer $4u_n - 3v_n$ en fonction de n.

3 **(a)** En utilisant les résultats des questions 2.c et 2.d, exprimer u_n et v_n en fonction de n.

(b) Si les deux amis font un très grand nombre de parties, qui a le plus de chances de gagner la dernière ?

Indépendance

16 Deux différents dés

★ 10 min Corrigé p. 289

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Simon lance un dé à six faces (numérotées de 1 à 6) et un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4) non pipés. Soit A l'événement : « le dé à six faces tombe sur un nombre pair » et soit B l'événement : « le dé à quatre faces tombe sur un nombre impair ».

1 Quelle est la probabilité, $p(A)$ que le dé à six faces tombe sur un nombre pair ?

2. Quelle est la probabilité, $p(B)$ que le dé à quatre faces tombe sur un nombre impair ?
3. Quelle est la probabilité, $p(A \cap B)$ que le dé à six faces tombe sur un nombre pair et que le dé à quatre faces tombe sur un nombre impair ?
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

17 Lancers successifs de dés

★ 15 min Corrigé p. 290

Lycée Marie Curie, Sceaux

On lance 3 fois de suite un dé à 6 faces (numérotées de 1 à 6) non pipé (c'est-à-dire non truqué). Soient x , y et z les chiffres obtenus lors des trois lancers.

On considère deux événements :

- $A = « x \times y \times z = 12 »$
- $B = « x + y = 4 »$.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

18 Généralisation d'un résultat

★★★ 20 min Corrigé p. 291

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

La famille Potter comporte 2 enfants. On considère les événements :

- A : « il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter »
- B : « la famille Potter a au plus une fille ».

1. A et B sont-ils indépendants ?
2. Même question si la famille Potter comporte 3 enfants.
3. Généraliser le résultat à n enfants.

Succession de deux épreuves indépendantes

19 Détermination d'une proportion

★ 10 min Corrigé p. 292

Lycée Jules Ferry, Paris

Une entreprise reçoit des matières premières de deux fournisseurs A et B. On note p la proportion de matières premières livrées par le fournisseur A.

Comment choisir p pour que le fournisseur A livre les matières premières deux semaines de suite avec une probabilité supérieure à 0,8 ?

CORRIGÉS

1 QCM Propriétés des probabilités

Énoncé p. 268

1 Réponse $\boxed{a}$:

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A)p_A(B) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}4 + (1 - 0{,}3) \times 0{,}2 = 0{,}26. \end{aligned}$$

ATTENTION

Il ne faut pas confondre $p(A \cap B)$ avec $p_A(B)$, la réponse $\boxed{b}$ est donc fausse.

2 Réponse $\boxed{c}$: si A et B sont tels que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, alors

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A) \times p(B), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &0{,}8 = 0{,}6 + p(B) - 0{,}6 \times p(B) \\ &\iff 0{,}4 \times p(B) = 0{,}2 \iff p(B) = 0{,}5. \end{aligned}$$

Donc

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A)p(B)}{p(A)} = p(B) = 0{,}5$$

3 Réponse $\boxed{b}$. En effet, d'après le cours,

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ donc } P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{0{,}8}{0{,}25} = 3{,}2 > 1$$

ce qui est impossible.

4 Réponse $\boxed{c}$: comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0{,}12 + 0{,}36 = 0{,}48.$$

Comme $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}48}$, alors $p_B(A) = 0{,}25$.

2 V/F Interprétation d'un arbre

Énoncé p. 268

1 Faux : $p_A(D) = 0{,}5$.

2 Faux : $p(C) = p(A)p_A(C) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(C) = 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}24$

3 Vrai : $p(B) = p(A)p_A(B) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B) = 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}14$

4 Faux : $p_D(A) = \dfrac{p(D \cap A)}{p(D)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}5}{0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}7} = \dfrac{0{,}2}{0{,}62} = \dfrac{10}{31}$.

3 QCM D'après un sujet de bac

Énoncé p. 269

1 Réponse $\boxed{c}$: l'ensemble des élèves des deux classes comportent 66 élèves.

On interroge un élève au hasard, il y a donc équiprobabilité des choix des élèves interrogés.

N'oubliez pas de justifier l'équiprobabilité, ici, par le mot « hasard ».

Soit E_1 l'événement « l'élève choisi appartient à la 1re A ».

Alors $p(E_1) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{34}{66} = \dfrac{17}{33}$.

2 Réponse $\boxed{a}$: soit M l'événement « l'élève choisi suit l'enseignement spécialité Math » et E l'événement « l'élève choisi suit l'enseignement de spécialité Math ou appartient à la 1re A ».

L'événement E est la réunion des deux événements M et E_1 et donc :

$$p(E) = p(M \cup E_1) = p(M) + p(E_1) - p(M \cap E_1).$$

Il y a toujours équiprobabilité des choix des élèves interrogés, d'où :

$$p(M) = \frac{16}{66} = \frac{8}{33} \quad \text{et} \quad p(M \cap E_1) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}.$$

On en déduit que : $p(E) = \dfrac{8}{33} + \dfrac{17}{33} - \dfrac{3}{33} = \dfrac{22}{33} = \dfrac{2}{3}$.

3 Réponse $\boxed{c}$: par lecture du tableau, la probabilité demandée est égale à $\dfrac{6}{34}$ (car il y a 6 élèves suivant l'enseignement des mathématiques sur les 34 élèves de la 1re A), soit après simplification : $\dfrac{3}{17}$.

4 Réponse $\boxed{c}$: par lecture graphique du tableau, la probabilité demandée est égale à $\dfrac{6}{16}$ (car il y a 6 élèves dans la 1re A sur les 16 qui suivent l'enseignement de spécialité Math), soit après simplification : $\dfrac{3}{8}$.

4 V/F Événements indépendants

Énoncé p. 269

1 Faux. La pièce étant parfaitement équilibrée, la probabilité d'avoir face à un lancer quelconque est de $\dfrac{1}{2}$. Les lancers successifs étant indépendants, le fait d'avoir obtenu neuf fois de suite pile lors des lancers antérieurs n'a aucune influence sur le dixième lancer ... même si l'intuition nous incite à penser qu'on devrait voir apparaître « face » !

2 Vrai. On commence par calculer $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

On compare ensuite avec le produit $P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

On a bien $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ce qui prouve l'indépendance des événements A et B.

3 **(a)** Vrai. On définit les événements :

- S : « L'élève a réussi le permis de conduire ».
- F : « L'élève interrogé est une fille ».
- G : « L'élève interrogé est une garçon ».

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (F, G) :

$$P(S) = P_F(S)P(F) + P_G(S)P(G).$$

On obtient alors :

$$P(S) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = 0{,}275.$$

(b) Faux. On cherche à calculer $P_S(G)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, puisque $P(S)$ est non nul, on a :

$$P_S(G) = \frac{P(S \cap G)}{P(S)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}25}{0{,}275} = \frac{1}{11}.$$

Une valeur approchée de $P_S(G)$ à 0,001 près est 0,091.

5 Notations

Énoncé p. 270

Lycée La Source, Meudon

1 *Parmi les femmes, 25% sont des retraitées.*

Ici, « parmi les femmes » signifie que l'on se place dans un univers autre que l'ensemble de la population. C'est donc une probabilité conditionnelle : sous condition que la personne soit une femme, 25% sont retraitées.

L'affirmation se note donc : $P_F(R) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

2 *Un tiers des hommes sont retraités.*

On sait ici que l'événement H est réalisé. Il s'agit donc d'une probabilité conditionnelle.

L'affirmation se note alors : $P_H(R) = \frac{1}{3}$.

3 *Chez les personnes retraitées, 45% sont des femmes.*

« Chez les personnes retraitées » signifie que l'univers est changé : on se place dans l'ensemble des personnes retraitées. Il s'agit donc d'une probabilité conditionnelle.

L'affirmation se note donc : $P_R(F) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.

4 *Lorsqu'on interroge un homme, la probabilité pour que ce ne soit pas un retraité est 67%.*

« Lorsqu'on interroge un homme » signifie que l'on se place dans l'ensemble des hommes : il s'agit d'une probabilité conditionnelle.

L'affirmation se note alors : $P_H(\overline{R}) = \dfrac{67}{100}$.

6 Centre de vacances

Énoncé p. 270

Lycée Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

1 D'après l'énoncé :

$$P(E) = 0{,}73 \quad ; \quad P(T) = 0{,}66 \quad ; \quad P_T(E) = 0{,}75.$$

2 Le tableau complété est le suivant :

	E	$\overline{E}$	Total
T	99	33	132
$\overline{T}$	47	21	68
Total	146	54	200

3 On nous demande ici de calculer $P_E(\overline{T})$. Nous allons utiliser la formule des probabilités élémentaires pour la déterminer. En effet, d'après le tableau des effectifs :

$$P_E(\overline{T}) = \frac{47}{146}.$$

4 De la même façon, on obtient :

$$P_T(E) = \frac{99}{132} = \frac{3}{4}.$$

5 D'après le tableau des effectifs,

$$P(\overline{E} \cap \overline{T}) = \frac{21}{200}.$$

6 De même,

$$P(E \cup T) = P(E) + P(T) - P(E \cap T) = \frac{146 + 132 - 99}{200} = \frac{179}{200}.$$

7 Arbre pondéré

Énoncé p. 271

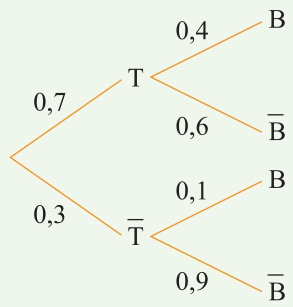
Lycée Virlogeux, Riom

1 $p(T) = 0{,}7$ (le 70 % de l'énoncé !).

2 $p_T(B) = 0{,}4$ et $p_{\overline{T}}(B) = 0{,}1$ (là encore, c'est dans l'énoncé).

Les autres probabilités sont obtenues en utilisant le fait que la somme des probabilités des branches partant d'un nœud est toujours égale à 1.

CORRIGÉS



3 **(a)** $p(T \cap B) = p(T) \times p_T(B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$.

(b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(T \cap B) + p(\bar{T} \cap B) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}28 + 0{,}03 \\ &= 0{,}31. \end{aligned}$$

4 $p_B(T) = \dfrac{p(B \cap T)}{p(B)} = \dfrac{0{,}28}{0{,}31} \approx 0{,}90$.

8 Pannes électroniques

Énoncé p. 272

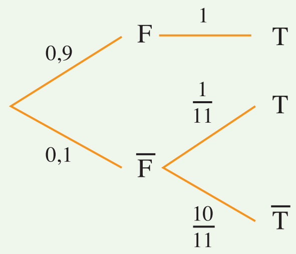
Lycée Voltaire, Paris

1 On sait que $p(F) + p(\overline{F}) = 1$ par la loi des contraires.

On sait par ailleurs que $p(F) = \dfrac{9}{10}$. Donc :

$$p(\overline{F}) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

2 On représente sous forme d'un arbre pondéré, les événements en jeu et les probabilités données directement par l'énoncé.
On note que $p_F(T) = 1$ car, si l'appareil est bon, il passe toujours le test avec succès.



(a) Un appareil défectueux $(\overline{F})$ passe le test avec succès (T) avec une probabilité $\frac{1}{11}$. On peut donc écrire :

$$p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{11}.$$

Utilisons maintenant les probabilités conditionnelles.

On cherche $p(T \cap \overline{F})$ en fonction de $p_{\overline{F}}(T)$.

On va donc utiliser la formule des probabilités conditionnelles :

$$p(T \cap \overline{F}) = \underbrace{p(\overline{F})}_{\frac{1}{10}} \times \underbrace{p_{\overline{F}}(T)}_{\frac{1}{11}} = \frac{1}{10 \times 11} = \frac{1}{110}.$$

De la même façon :

$$p(T \cap F) = \underbrace{p(F)}_{\frac{9}{10}} \times \underbrace{p_F(T)}_{1} = \frac{9}{10}.$$

(b) Réaliser T s'obtient en réalisant ou bien $T \cap F$ ou bien $T \cap \overline{F}$. On utilise ici la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(T \cap F) + p(T \cap \overline{F}) \\ &= \frac{9}{10} + \frac{1}{110} \\ &= \frac{9 \times 11 + 1}{110} \\ &= \frac{100}{110} \\ &= \frac{10}{11}. \end{aligned}$$

(c) On demande $p_T(F)$ On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$p_T(F) = \frac{p(T \cap F)}{p(T)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{11}} = \frac{9 \times 11}{10 \times 10} = \frac{99}{100}.$$

Un appareil ayant passé le test avec succès a donc 99 % de chances d'être bon.

9 Génétique

Énoncé p. 272

Lycée Stanislas, Paris

Un tel énoncé se traduit bien à l'aide d'un tableau à deux entrées. Il est facile de calculer les quelques effectifs qui ne sont pas donnés dans l'énoncé .

Il y a $0{,}6 \times 40 = 24$ hommes aux yeux bleus, donc $50 - 24 = 26$ femmes aux yeux bleus.

Il restent donc $40 - 24 = 16$ hommes qui n'ont pas les yeux bleus et $60 - 26 = 34$ femmes qui n'ont pas les yeux bleus.

	Homme	Femme	Total
Yeux bleus	24	26	50
Pas les Yeux bleus	16	34	50
Total	40	60	100

Comme toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies, on est en situation d'équiprobabilité.

La probabilité est donc égale au nombre de personne dans l'événement choisi, divisé par le nombre de personne de l'univers de référence.

1 A : choisir un homme dans la population totale : $p(A) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$.

2 B : choisir un homme aux yeux bleus dans la population totale :
$p(B) = \dfrac{24}{100} = \dfrac{6}{25}$.

3 C : choisir une femme aux yeux bleus parmi la population totale :
$p(C) = \dfrac{26}{100} = \dfrac{13}{50}$.

4 D : choisir une personne aux yeux bleus, parmi la population des femmes :
$p(D) = \dfrac{26}{60} = \dfrac{13}{30}$.

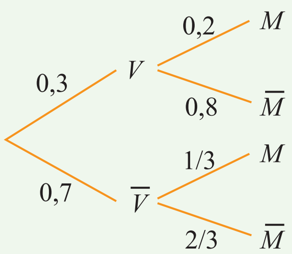
5 E : choisir une femme parmi la population des personnes aux yeux bleus :
$p(E) = \dfrac{26}{50} = \dfrac{13}{25}$.

10 Vaccin et maladie

Énoncé p. 273

Lycée Clémenceau, Nantes

L'arbre correspondant à la situation est le suivant :



On a alors :

$$\begin{aligned} P(M) &= P(V \cap M) + P(\overline{V} \cap M) \\ &= P(V) \times P_V(M) + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(M) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}7 \times \frac{1}{3} \\ &\approx 0{,}293. \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu soit malade est d'environ 0,293.

11 Arbre pondéré

Énoncé p. 273

Lycée Galilée, Gennevilliers

On va noter A : « L'alarme s'est déclenchée » et I : « Il y a eu intrusion ».

Il convient de remarquer que 2000 est une année bissextile.

1 **(a)** Cette question renvoie aux liens entre statistiques et probabilités, et notamment à la loi des grands nombres (la fréquence d'un événement converge vers sa probabilité) qui autorise à interpréter les fréquences statistiques comme des probabilités. La fréquence statistique i des intrusions par jour se calcule par :

$$i = \frac{28 + 30 + 26}{2 \times 365 + 366} \approx 0{,}076\,6.$$

On en déduit que la probabilité d'une intrusion est de $p(I) = 0{,}077$ à 10^{-3} près. Puis que $p(\bar{I}) = 0{,}923$ à 10^{-3} près.

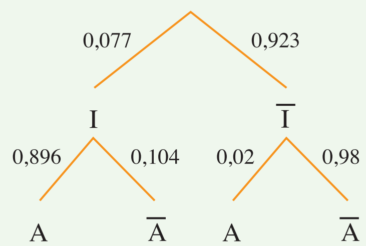
(b) D'après le tableau statistique, on peut également calculer la probabilité $p(I \cap A)$ en tant que fréquence du nombre d'intrusions ayant déclenché l'alarme :

$$p(I \cap A) = \frac{25 + 28 + 23}{2 \times 365 + 366} \approx 0{,}069\,3.$$

2 On demande la probabilité conditionnelle $p_I(A)$. L'énoncé ne nous la donne pas directement, donc il faut utiliser la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$p_I(A) = \frac{p(A \cap I)}{p(I)} \approx \frac{0{,}069}{0{,}077} \approx 0{,}896.$$

3 On peut maintenant représenter les données sous forme d'arbre :



On demande $p(A)$ qu'on va calculer avec la loi des probabilités totales :

$$A = (I \cap A) \cup (\bar{I} \cap A)$$

$$p(A) = \underbrace{p(I \cap A)}_{\text{calculé précédemment}} + p(\bar{I} \cap A)$$

$$p(\bar{I} \cap A) = p(\bar{I}) \times p_{\bar{I}}(A) \approx 0{,}923 \times 0{,}02 \approx 0{,}018.$$

$$p(A) \approx 0{,}069 + 0{,}018 \approx 0{,}087.$$

4 Dans cette question, on sait que l'alarme s'est déclenchée. On demande la probabilité qu'il s'agisse d'une intrusion sachant que l'alarme s'est déclenchée, soit $p_A(I)$. Par définition des probabilités conditionnelles :

$$p_A(I) = \frac{p(I \cap A)}{p(A)} \approx \frac{0{,}069}{0{,}087} \approx 0{,}793.$$

Sherlock répondra qu'il y a plus de 3 chances sur 4 qu'il y ait eu intrusion.

12 Tickets de péage

Énoncé p. 274

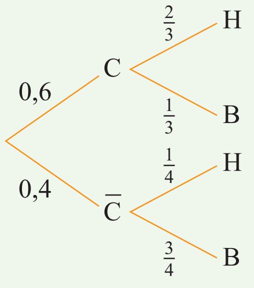
Lycée Virlogeux, Riom

1 **MÉTHODE**

L'énoncé dit *donner* les probabilités : il ne s'agit pas de les calculer, elles sont dans l'énoncé ou s'en déduisent directement.

$$p(C) = 0{,}6\ ; \quad p_{\bar{C}}(H) = 0{,}25\ ; \quad p_{\bar{C}}(B) = 0{,}75.$$

2



3 $p(H) = p(H \cap C) + p(H \cap \bar{C}) = 0{,}6 \times \dfrac{2}{3} + 0{,}4 \times \dfrac{1}{4} = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5.$

4 La probabilité cherchée est :

$$p(H \cap C) + p(B \cap \bar{C}) = 0{,}6 \times \frac{2}{3} + 0{,}4 \times \frac{3}{4} = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

13 Prise d'initiative

Énoncé p. 275

Lycée Sophie Germain, Paris

On note :

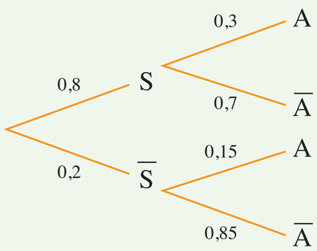
- S l'événement : « l'adhérent a déjà un Smartphone »,
- A l'événement : « l'adhérent va acheter un Smartphone dans l'année ».

On assimile les pourcentages aux probabilités d'obtenir les différents événements si l'on choisit un adhérent au hasard.

1 D'après les données de l'énoncé :

- $P(S) = 0{,}8$ donc $P(\bar{S}) = 0{,}2$;
- $P_S(A) = 0{,}3$ et $P_{\bar{S}}(A) = 0{,}15$.

Cela donne l'arbre ci-contre :



2 On cherche : $P(S \cap A) = P(S) \times P_S(A) = 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}24$.

3 Il faut calculer $P(A)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A \cap S) + P\left(A \cap \bar{S}\right) = 0{,}24 + 0{,}2 \times 0{,}15 = 0{,}27.$$

Cela signifie que $P(A) > 0{,}25$. La probabilité qu'un adhérent achète un Smartphone dans l'année est donc supérieure à 25 %, la coopérative peut donc mettre en place son service.

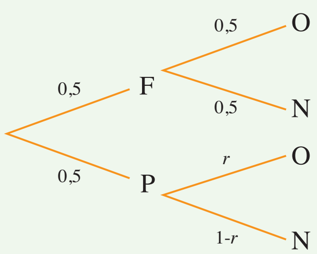
4 Il faut ici calculer : $P_A\left(\bar{S}\right) = \dfrac{P(A \cap \bar{S})}{P(A)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}27} = \dfrac{1}{9}$.

14 Sondage anonyme

Énoncé p. 275

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

1 O correspond à l'événement « la personne répond oui », F (respectivement P) à l'événement « la personne a obtenu face (respectivement pile) au premier lancer ». Comme il y a autant de chances d'obtenir pile que face, on obtient l'arbre de la page ci-contre.



CORRIGÉS

2 $p(\mathrm{O}) = 0{,}45$. Or, $p(\mathrm{O}) = p(\mathrm{F} \cap \mathrm{O}) + p(\mathrm{P} \cap \mathrm{O}) = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5r$.
On a donc $0{,}45 - 0{,}25 = 0{,}5r$, d'où $0{,}5r = 0{,}2$ et $r = 0{,}4$. Il y a donc environ 40 % de gros fumeurs.

3 $p(\mathrm{O})$ est maintenant inconnue. On cherche $p(\mathrm{O})$ telle que :

$$r = \frac{P(O) - 0{,}25}{0{,}5} \leqslant 0{,}1.$$

On trouve alors $P(O) \leqslant 0{,}3$.

Il faudrait donc obtenir *au plus* 30 % de oui pour avoir *au plus* 10 % de gros fumeurs.

15 Probabilités et suites

Énoncé p. 276

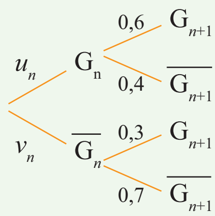
Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 **(a)** $p(G_1) = 0{,}5$ et $p(\bar{G}_1) = 0{,}5$.

(b) $$\begin{aligned} p(G_2) &= p(G_1)p_{G_1}(G_2) + p(\bar{G}_1)p_{\bar{G}_1}(G_2) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}45. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\bar{G}_2) &= 1 - p(G_2) \\ &= 0{,}55. \end{aligned}$$

2 **(a)**



(b) $$\begin{aligned} u_{n+1} &= p(G_{n+1}) = 0{,}6u_n + 0{,}3v_n, \\ v_{n+1} &= p(\overline{G_{n+1}}) = 0{,}4u_n + 0{,}7v_n. \end{aligned}$$

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} + v_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}3v_n + 0{,}4u_n + 0{,}7v_n = u_n + v_n.$$

Donc la suite $(u_n + v_n)$ est constante. On sait que $u_1 + v_1 = 1$, donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n + v_n = 1$.

Remarque : ceci est logique : à chaque étape, il n'y a que deux événements incompatibles : Pierre gagne ou perd ! Donc la somme des probabilités de ces événements doit être égale à 1.

(d) $$\begin{aligned} 4u_{n+1} - 3v_{n+1} &= 4(0{,}6u_n + 0{,}3v_n) - 3(0{,}4u_n + 0{,}7v_n) \\ &= 1{,}2u_n - 0{,}9v_n = 0{,}3(4u_n - 3v_n). \end{aligned}$$

Donc la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique de raison 0,3. Son premier terme est $4u_1 - 3v_1 = 0{,}5$. Donc $4u_n - 3v_n = 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1}$.

3 **(a)** On a le système :

$$\begin{cases} u_n + v_n = 1, \\ 4u_n - 3v_n = 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} v_n = 1 - u_n, \\ 4u_n - 3(1 - u_n) = 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} v_n = 1 - u_n, \\ 7u_n = 3 + 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{3}{7} + \dfrac{0{,}5}{7} \times 0{,}3^{n-1}, \\ v_n = 1 - u_n = \dfrac{4}{7} - \dfrac{0{,}5}{7} \times 0{,}3^{n-1} \end{cases}$$

(b) Comme $0 < 0{,}3 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}3^{n-1} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{4}{7}.$$

Par conséquent au bout d'un grand nombre de parties, Jean-Philippe a plus de chances de gagner que Pierre.

16 Deux différents dés

Énoncé p. 276

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 Il y a 3 nombres pairs sur 6 donc $p(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2 Il y a 2 nombres impairs sur 4, donc $p(B) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

3 Notons $(n_1 \,;\, n_2)$ le couple de nombres obtenus, n_1 étant le nombre issu du dé à 6 faces et n_2, celui du dé à 4 faces.

$$A \cap B = \{(2\,;1), (2\,;3), (4\,;1), (4\,;3), (6\,;1), (6\,;3)\}.$$

De plus, il y a :

6 (issues pour le dé cubique) $\times$ 4 (possibilités pour le dé à 4 faces) $= 24$ couples possibles.

Ainsi,

$$p(A \cap B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

4 On constate que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

17 Lancers successifs de dés

Énoncé p. 277

Lycée Marie Curie, Sceaux

L'univers Ω est l'ensemble de tous les triplets (a,b,c) où a, b, et c sont trois entiers compris entre 1 et 6. Il existe ainsi 216 résultats possibles.

Le dé étant par hypothèse non pipé, on est en situation d'équiprobabilité.

La probabilité d'un événement élémentaire (a,b,c) est :

$$P(\{(a,b,c)\}) = \frac{1}{216}.$$

L'événement A est la réunion des événements élémentaires :

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,2,6) & ; & (1,3,4) & ; & (1,4,3) & ; & (1,6,2) & ; & (2,1,6) \; ; \\
(2,2,3) & ; & (2,3,2) & ; & (2,6,1) & ; & (3,1,4) & ; & (3,2,2) \; ; \\
(3,4,1) & ; & (4,1,3) & ; & (4,3,1) & ; & (6,1,2) & ; & (6,2,1).
\end{array}$$

Donc :

$$P(A) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}.$$

L'événement B est la réunion des événements élémentaires :

$$(1,3,z) \quad ; \quad (2,2,z) \quad ; \quad (3,1,z) \quad \text{où} \quad z \quad \text{décrit} \quad \{1,\ldots,6\}.$$

Donc :

$$P(B) = \frac{3 \times 6}{216} = \frac{1}{12}.$$

Or, l'événement $A \cap B$ est la réunion des événements élémentaires : $(1,3,4)$, $(2,2,3)$, $(3,1,4)$.
Donc :

$$P(A \cap B) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$

et

$$P(A)P(B) = \frac{5}{72} \times \frac{1}{12} = \frac{5}{864}.$$

Ainsi,

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B).$$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

MÉTHODE

Pour savoir si deux événements sont indépendants, on calcule la probabilité de leur intersection et on la compare au produit de leurs probabilités. L'indépendance est une notion délicate et l'intuition est, en ce domaine, souvent mauvaise conseillère !

18 Généralisation d'un résultat

Énoncé p. 277

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 Avec 2 enfants, l'univers des possibles est :

$$\Omega = \{(G,G); (G,F); (F,G); (F,F)\}$$

L'événement (F,G) correspond ici au fait que l'aînée est une fille et le cadet, un garçon.

Alors,

- $p(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$;
- $p(B) = \dfrac{3}{4}$ (« au plus une fille » signifie « aucune fille ou une fille » ;
- $p(A \cap B) = \dfrac{2}{4}$ (en effet, $A \cap B$ est l'événement « il y a deux enfants de sexes différents, dont au plus une fille », ce qui correspond aux événements (F,G) et (G,F).

On s'aperçoit alors que $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

2 Dans cette question, il y a 3 enfants. L'univers des possibles est alors :

$$\Omega' = \{(F,F,F); (F,F,G); (F,G,F); (F,G,G); (G,F,F); (G,F,G); (G,G,F); (G,G,G)\}.$$

- $p(A) = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$;
- $p(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$;
- $p(A \cap B) = \dfrac{3}{8} = p(A) \times p(B)$.

Donc A et B sont cette fois-ci indépendants.

3 Avec n enfants, il y a en tout 2^n n-uplets possibles (n enfants, 2 possibilités par enfant).

- $p(A) = 1 - \dfrac{2}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. En effet, tous les n-uplets conviennent sauf ceux composés uniquement de garçons et ceux composés uniquement de filles.
- $p(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$. En effet, il y a un n-uplet avec 0 fille (celui composé uniquement de garçons) et n avec uniquement une fille ;
- $p(A \cap B) = \dfrac{n}{2^n}$. En effet, on ne s'intéresse ici qu'aux n-uplets où il y a au moins un garçon et au plus une fille, donc les n-uplets du type $(F,G,G,\dots,G)$ ou $(G,G,\dots,G,F,G,G,\dots)$: ces n-uplets sont formés en mettant « F » n'importe où parmi les n positions possibles ; il y en a donc n.

COURS INTERROS CORRIGÉS

$$\text{Or, } p(A)\times p(B) = \left(1-\frac{2}{2^n}\right)\times\frac{n+1}{2^n}$$
$$= \frac{n+1}{2^n} - \frac{2}{2^n}\times\frac{n+1}{2^n}$$
$$= \frac{2^n(n+1)-2(n+1)}{2^n\times 2^n}$$
$$= \frac{2(n+1)(2^{n-1}-1)}{2^{2n}}.$$

Ainsi,
$$p(A)\times p(B) = p(A\cap B)$$
$$\iff \frac{2(n+1)(2^{n-1}-1)}{2^{2n}} = \frac{n}{2^n}$$
$$\iff 2(n+1)(2^{n-1}-1) = n\times 2^n$$
$$\iff (n+1)(2^{n-1}-1) = n\times 2^{n-1}$$
$$\iff n\times 2^{n-1} + 2^{n-1} - n - 1 = n\times 2^{n-1}$$
$$\iff 2^{n-1} = n+1.$$

Un tableau des valeurs de 2^{n-1} et $n+1$ (sur la calculatrice par exemple) montre que $n+1$ croît bien moins vite que 2^{n-1}, ce qui signifie que $n+1 \neq 2^{n-1}$ pour $n \geqslant 4$.

Ainsi, il n'existe qu'une valeur de n pour laquelle $2^{n-1} = n+1$, donc pour laquelle $p(A)\times p(B) = p(A\cap B)$, donc pour laquelle A et B sont indépendants.

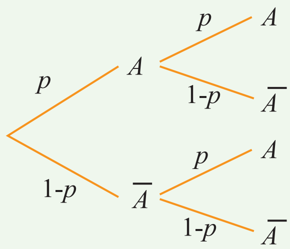
Remarque : on dit que $n+1$ a une croissance *linéaire* alors que 2^{n-1} a une croissance *exponentielle*.

19 Détermination d'une proportion

Énoncé p. 277

Lycée Jules Ferry, Paris

L'arbre correspondant à la situation est le suivant :



On cherche alors p tel que :

$$p\times p \geqslant 0{,}8 \iff p \geqslant \sqrt{0{,}8} \iff p \geqslant 0{,}895.$$

Ainsi, si le fournisseur A livre au moins 89,5% des matières premières, il fournira au moins 80% des matières premières deux semaines consécutives.

Chapitre 10

Variables aléatoires

Plan du chapitre

Exercice type — Lycée Mansart, Saint-Cyr-l'École

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans une tombola, 100 tickets sont en jeu, répartis comme suit :

- un ticket permet de gagner 100 euros ;
- neuf tickets permettent de gagner 10 euros ;
- les autres tickets sont perdants.

Pour pouvoir jouer, il faut miser 3 euros.

Un joueur mise 3 euros et tire un ticket au hasard. On appelle X son gain (différence entre ce qu'il gagne et la mise).

1 Déterminer la loi de probabilité de X.

2 Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il à l'avantage des joueurs ou des organisateurs de la tombola ? Justifier la réponse.

Voir corrigé page 297

1 Définition et loi de probabilité

Définition 1 : variable aléatoire réelle discrète

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un univers fini constitué de n événements distincts. On appelle *variable aléatoire réelle discrète* définie sur Ω toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

- $X(e_i) = x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$;
- l'ensemble $X(\Omega) = \{x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ \ldots \ ; \ x_n\}$ est fini.

On notera $(X = x_i)$ l'événement « X prend la valeur x_i ».

COURS

Exemple : lors d'un jeu, on peut ne rien gagner, mais on peut aussi gagner 1 000 € ou 50 000 €. Si X est la variable aléatoire qui, à chaque issue du jeu, associe la somme que l'on gagne, alors elle peut prendre les 3 valeurs : 0, 1 000 € et 50 000 €. On notera alors :

$$X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\,000\ ;\ 50\,000\}.$$

Définition 2 : loi de probabilité

On considère une variable aléatoire X sur un univers Ω telle que :

- $X(\Omega) = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ x_n\}$;
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $p(X = x_i) = p_i$.

La *loi de probabilité* de X est la donnée de toutes les valeurs p_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

On présente habituellement cette loi sous forme d'un tableau :

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Remarque : on a toujours :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Exemple : on lance un dé parfaitement équilibré ; on gagne 5 euros si l'on obtient un nombre pair, et l'on perd 3 euros sinon. On note X la variable aléatoire qui, à un lancer du dé, associe le gain algébrique, c'est-à-dire un nombre positif s'il s'agit d'un gain ou négatif dans le cas de pertes, du joueur.

Établir la loi de probabilité de X, c'est calculer $p(X = 5)$ et $p(X = -3)$.

Or,

$$p(X = 5) = p(A)$$

où A est l'événement : « obtenir 2, 4 ou 6 » d'où :

$$p(X = 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

et :

$$p(X = -3) = p(B)$$

où B est l'événement : « obtenir 1, 3 ou 5 » d'où :

$$p(X = -3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2 Espérance, variance et écart-type

2.1 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $p_i = P(X = x_i)$.
L'*espérance* de X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n.$$

Exemple : on considère la variable aléatoire X définie par la loi de probabilité suivante :

Valeurs de X	-1	-2	3	4
$p(X = x_i)$	$0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}1$

Alors,

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1) \times 0{,}3 + (-2) \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}1 \\ &= 1{,}4. \end{aligned}$$

À RETENIR

L'espérance mathématique représente la valeur moyenne de X si l'expérience est répétée un grand nombre de fois.

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire, et soient a et b deux nombres réels. Alors,

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Exemple : soit X la variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{3 ; 5 ; 7\}$ et $E(X) = 6$.
On pose alors $Y = 2X - 5$. Cela signifie que $y_i = 2x_i - 5$ donc :

$$Y(\Omega) = \{2 \times 3 - 5 ; 2 \times 5 - 5 ; 2 \times 7 - 5\} \text{ soit } Y(\Omega) = \{1 ; 5 ; 9\}.$$

De plus, $E(Y) = E(2X - 5) = 2E(X) - 5 = 2 \times 6 - 5 = 12 - 5 = 7$.

Définition 4 : jeu équitable

si X est une variable aléatoire prenant pour valeurs les gains possibles d'un jeu, on dira que le jeu est *équitable* si $E(X) = 0$.

COURS

2.2 Variance

Définition 5

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $p_i = P(X = x_i)$.
On appelle *variance* de X l'espérance de la variable aléatoire $\big(X - E(X)\big)^2$.

On la note $V(X)$. On a donc :

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2\big).$$

Exemple : on considère la variable aléatoire X définie par la loi de probabilité suivante :

Valeurs de X	-1	-2	3	4
$p(X = x_i)$	$0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}1$

Alors, $E(X) = 1{,}4$ (voir exemple 2.1). La loi de probabilité de $\big(X - E(X)\big)^2$ est :

Valeurs de $\big(X - E(X)\big)^2$	$5{,}76$	$11{,}56$	$2{,}56$	$6{,}76$
$p(X = x_i)$	$0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}1$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V(X) &= E\big[(X - E(X))^2\big] \\ &= 5{,}76 \times 0{,}3 + 11{,}56 \times 0{,}1 + 2{,}56 \times 0{,}5 + 6{,}76 \times 0{,}1 \\ &= 4{,}84. \end{aligned}$$

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire, et soient a et b deux nombres réels. Alors,

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Propriété 3 : formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$V(X) = E\big(X^2\big) - \big[E(X)\big]^2.$$

Exemple :

Valeurs de X	-1	-2	3	4
Valeurs de X^2	1	4	9	16
$p(X = x_i)$	$0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}1$

$$\begin{aligned} V(X) &= (1 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}1 + 9 \times 0{,}5 + 16 \times 0{,}1) - 1{,}4^2 \\ &= 4{,}84. \end{aligned}$$

2.3 Écart-type

Définition 6

Soit X une variable aléatoire. On appelle *écart-type* de X le nombre :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire, et soient a et b deux nombres réels. Alors,

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Solution de l'exercice type

Lycée Mansart, Saint-Cyr-l'École

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

1 La variable aléatoire X peut prendre trois valeurs : 97 (dans le cas où le joueur achète le ticket gagnant 100 euros dont il convient de déduire la mise de 3 euros), 7 (gain de 10 euros moins la mise de 3 euros) et enfin -3 (cas d'un billet perdant).
On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être choisis par le joueur. On est donc en situation d'équiprobabilité.

- Il existe un seul billet permettant de gagner 100 euros donc :

$$p(X = 97) = \frac{1}{100}.$$

- Il existe 9 billets permettant de gagner 10 euros donc :

$$p(X = 7) = \frac{9}{100}.$$

- Enfin, il existe 90 billets perdants donc :

$$p(X = -3) = \frac{90}{100}.$$

Finalement, on a :

Valeurs de X	97	7	-3
$p(X = x_i)$	0,01	0,09	0,9

2 On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= 97 \times 0{,}01 + 7 \times 0{,}09 + (-3) \times 0{,}9 \\ &= -1{,}1. \end{aligned}$$

Comme l'espérance mathématique n'est pas nulle, le jeu n'est pas équitable. Si le joueur jouait un très grand nombre de fois, il pourrait espérer un « gain » moyen de $-1{,}1$ euro. Le jeu est donc défavorable au joueur et favorable aux organisateurs de la tombola (ce qui était prévisible…)

Voir énoncé page 293

INTERROS

1 V/F Variable aléatoire

5 min Corrigé p. 308

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les réponses.

1. Si une variable aléatoire X ne prend que des valeurs positives ou nulle, alors $E(X) \geqslant 0$.
2. Si $E(X) \geqslant 0$, alors la variable aléatoire X ne prend que des valeurs positives ou nulles.

2 QCM En fonction de n

15 min Corrigé p. 308

On justifiera toutes les réponses.
Une urne contient 10 boules blanches et n boules noires ($n \geqslant 2$).
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
Si on tire une boule blanche on gagne 2 euros, si on tire une boule noire on perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain (qui peut être négatif) obtenu par le joueur.

1. Les valeurs prises par X sont :

   a 2 et 3 **b** 2 et -3 **c** autre réponse.

2. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

a

x_i	-3	2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{n}{n+10}$	$\dfrac{10}{n+10}$

b

x_i	-3	2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{n}$

c

x_i	3	2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{n}{n+10}$	$\dfrac{10}{n+10}$

3. L'espérance de X est :

   a 1 **b** 0 **c** $\dfrac{-3n+20}{n+10}$

4. Le jeu est favorable au joueur si :

   a $n \geqslant 7$ **b** $n \geqslant 6$ **c** $n \leqslant 6$

3 La base

★ 5 min Corrigé p. 308

Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

On lance un dé truqué à six faces. Les probabilités d'obtenir chaque face sont les suivantes :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,2	0,1	p_3	0,06	0,2	p_6

1. Calculer p_3 et p_6 sachant que $p_3 = 3p_6$.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X qui à chaque face associe le nombre affiché.

4 Pièce truquée

★ 7 min Corrigé p. 308

Lycée Clémenceau, Nantes

Mathieu propose le jeu suivant avec une pièce truquée (on estime à 0,4 la probabilité de tomber sur « Pile »).

On mise 20 €, puis on lance la pièce deux fois.

On gagne 25 € par « Pile » obtenu sur les deux lancers.

1. X est la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer $P(X \leqslant 5)$.

5 Ventes

★ 10 min Corrigé p. 309

Lycée Camille Vernet, Valence

Un commercial vend entre 0 et 5 installations photovoltaïques par semaine. Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre d'installations vendues. X suit la loi de probabilité indiquée dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'installations vendues k	0	1	2	3	4	5
Probabilité $P(X = k)$	0,16	0,1	0,35	0,24	0,1	0,05

1. Calculer $P(X \geqslant 2)$ et $P(X < 4)$.
2. Calculer l'espérance de X. Quelle interprétation peut-on en donner ?

INTERROS

6 Cotisation moyenne

★ 10 min Corrigé p. 309

Lycée Honoré de Balzac, Paris

Le club de loisirs d'une petite ville propose à ses adhérents trois types d'activités : de la gymnastique, des sorties vélo ou de la formation informatique. Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une seule des trois activités. 50% font de la gymnastique, 30% font du vélo et les autres font de l'informatique.
Les tarifs du club sont les suivants : 15 euros pour l'adhésion au club, 60 euros pour la gymnastique, 50 euros pour l'informatique et 30 euros pour le vélo.
On interroge un membre du club au hasard. On appelle S la variable aléatoire qui donne la somme totale payée par ce membre.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire S.
2. Calculer l'espérance de S et en donner une interprétation.

7 Ticket gagnant

★ 15 min Corrigé p. 310

Lycée International Europole, Grenoble

Un supermarché de San Francisco distribue des tickets à ses 1 000 premiers clients. 500 tickets font gagner 10 \$, 90 font gagner 20 \$, 10 font gagner 50 \$ et 400 ne font rien gagner. Un ticket est distribué au hasard à chaque client à son passage en caisse. X est la variable aléatoire qui à chaque ticket distribué associe le gain inscrit sur celui-ci.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un ticket faisant gagner 20 \$ ou plus ?
4. Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

8 Interprétation de l'espérance

★ 15 min Corrigé p. 310

Lycée Albert Chatelet, Douai

Une variable aléatoire X a la loi de probabilité suivante :

Valeur a_i de X	-1	1	3	5
Probabilité $P(X = a_i)$	0,4	0,2		0,15

1. Compléter la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
3. Calculer de deux manières différentes $P(X \geqslant 3)$ (pour la deuxième méthode, on utilisera l'événement contraire).
4. Si X représente le gain obtenu à l'issue d'une expérience, que représente concrètement $E(X)$?

9 Gagner à la loterie

★ 15 min Corrigé p. 311

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

Une loterie est constituée de 800 billets vendus chacun 2 €. Un des billets fait gagner 500 €, deux billets font gagner chacun 100 € et 6 billets font gagner 10 €. Tous les autres sont perdants.

1 Un joueur achète un billet. On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

- **(a)** Donner, en tenant compte de l'achat initial du billet, la loi de probabilité de G.
- **(b)** Calculer l'espérance mathématique de G.
- **(c)** Le jeu est-t-il favorable à l'organisateur ou aux joueurs ?

2 Pour être sûre de gagner, une personne achète tous les billets. Elle gagne donc tous les lots.

- **(a)** Quelle somme débourse-t-elle à l'achat ?
- **(b)** Quelle somme correspond au gain de tous les lots ?
- **(c)** Quelle somme cette personne a-t-elle perdue ?
- **(d)** Quelle est la perte moyenne par billet acheté ? Comparer ce résultat à l'espérance mathématique calculée dans la question 1.b.

10 Un sac

★ 15 min Corrigé p. 312

Lycée Charlemagne, Paris

Un sac contient trois boules numérotées : deux portent le numéro 4 et une porte le numéro 3.
On tire au hasard une boule du sac, on note son numéro a et on la remet dans le sac.
On répète une deuxième fois l'expérience et on désigne par b le numéro de la boule tirée.

1 Décrire l'expérience aléatoire.

2 Quel est l'univers de cette expérience ?

3 On admet que :

$$p(3\,;3) = \frac{1}{9} \quad ; \quad p(3\,;4) = p(4\,;3) = \frac{2}{9}.$$

Calculer $p(4\,;4)$.

4 Soit X la variable aléatoire qui, au résultat noté $(a\,;b)$, associe $a + b$.

- **(a)** Donner la loi de probabilité de X.
- **(b)** Calculer son espérance et sa variance.

INTERROS

11 Jeu équitable

★ 15 min Corrigé p. 312

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

Lors d'une loterie, un joueur mise 2 euros. Lors du tirage, trois résultats sont possibles. La probabilité qu'il gagne 10 euros est $\frac{2}{11}$, la probabilité qu'on lui rembourse sa mise est $\frac{1}{4}$, et il ne reçoit rien le reste du temps. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue du tirage.

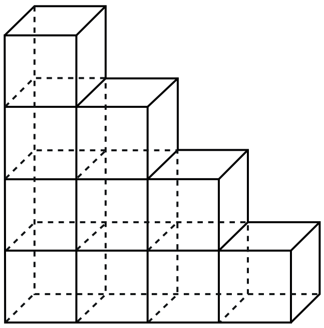
1. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.
2. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$.
   (a) Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
   (b) L'organisateur souhaite que le jeu soit équitable, c'est-à-dire que $E(X) = 0$. Il va changer la règle du jeu. La probabilité que le joueur gagne ne change pas, mais si le joueur gagne, il reçoit une somme S. Déterminer la valeur de S.

12 Un jeu d'enfant

★ 15 min Corrigé p. 312

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Un jeu de construction est composé de 10 cubes de même taille. Un enfant les assemble de manière à obtenir le solide ci-dessous dont il peint ensuite toutes les faces. Par exemple, le cube en bas à droite a 5 de ses faces qui sont peintes. Il sépare à nouveau les 10 cubes et en tire un au hasard. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de faces peintes sur le cube choisi.



1. Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer son espérance et interpréter par une phrase le résultat.
4. Calculer l'écart-type de X.

13 Dé tétraédrique

★ 20 min Corrigé p. 313

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

On considère un dé tétraédrique truqué dont les faces portent les numéros 2, 4, 5 et 7.
On note p_2, p_4, p_5 et p_7 les probabilités de tomber respectivement sur 2, 4, 5 ou 7. On appelle X la variable aléatoire qui, à la face obtenue, associe le nombre indiqué dessus.

On sait que :

- $p_2 = p_5$,
- il y a deux fois moins de chances d'obtenir le 4 que le 5,
- il y a trois fois plus de chances d'obtenir le 7 que le 2.

1 **(a)** Montrer que $p_4 = \frac{1}{11}$. Tous les détails des calculs devront clairement apparaître sur la copie.
(b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
(c) Calculer l'espérance de X.

2 On lance une fois ce dé.
Soit A l'événement : « on obtient une face avec un numéro pair ».
Soit B l'événement : « on obtient une face avec un numéro supérieur à 3 ».
Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

3 Décrire par une phrase chacun des événements $\overline{A}$, $A \cap B$ et $A \cup B$, puis calculer leurs probabilités.

14 Tirage de boules dans une urne ★ 20 min Corrigé p. 314

Institut Notre-Dame, Meudon

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une rouge, une verte et une bleue. On tire au hasard et successivement deux boules, on note les couleurs obtenues dans l'ordre des tirages, la première boule étant replacée dans l'urne avant le second tirage.

1 Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

2 On instaure la règle suivante : le tirage d'une boule rouge rapporte un point, celui d'une verte deux points et celui d'une bleue fait perdre trois points.
(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T définie par la somme des points marqués dans l'expérience précédente.
(b) Calculer l'espérance de T. Le jeu est-il équitable ?

3 Calculer la probabilité pour un joueur de perdre la partie, c'est-à-dire d'avoir un total négatif de points.

15 Propriétés ★★ 20 min Corrigé p. 316

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

Valeurs de X	0	1	2	3	4
$p_i = p(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

1 Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

2 Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = -2X + 3$.
Déterminer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

3 a est un nombre réel positif et b un nombre réel. Z est la variable aléatoire définie par $Z = aX + b$.
Déterminer a et b tels que $V(Z) = 0{,}25$ et $E(Z) = 1{,}42$.

16 Somme des chiffres

★ 20 min Corrigé p. 317

Lycée La Bruyère, Versailles

On choisit au hasard un nombre entre 0 et 25 (compris) et on définit la variable aléatoire qui lui associe la somme de ses chiffres.

1 Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et son écart-type.

2 Soit la variable aléatoire $Y = -2X + 5$.
Donner son espérance et son écart-type.

17 Des numéros et des couleurs

★ 25 min Corrigé p. 318

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-fossés

Une urne contient trois boules vertes numérotées respectivement 1, 2, 3, deux boules rouges numérotées respectivement 1 et 2, et une boule noire numérotée 1.
On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne.
On note la couleur et le numéro de chaque boule tirée.

1 À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer toutes les issues possibles de l'expérience.

2 On nomme A, B et C les trois événements suivants :

- A : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
- B : « La deuxième boule porte le numéro 1 ».
- C : « Les deux boules tirées portent le même numéro ».

(a) Calculer la probabilité des événements A, B et C.
(b) Définir par une phrase les événements $A \cap C$, $A \cup C$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, puis calculer leurs probabilités respectives.

3 X est la variable aléatoire qui, à chaque issue de l'expérience, associe la somme des deux numéros obtenus.

(a) Donner l'ensemble des valeurs prises par X.
(b) Déterminer la loi de probabilité de X.
(c) Déterminer l'espérance et la variance de X.

18 Dodécaèdre

★★ 15 min Corrigé p. 319

Lycée Édouard Herriot, Lyon

On lance un dé équilibré dont les 12 faces sont numérotées de 1 à 12.
Si le numéro obtenu est pair, le joueur gagne 2 points.
Si le numéro obtenu est un multiple de 3, le joueur gagne 3 points.
Si le numéro obtenu est supérieur ou égal à 10, le joueur gagne 4 points.
Dans tous les autres cas, le joueur perd 5 points.
Les gains sont cumulables si le numéro obtenu réalise plusieurs de ces conditions.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui, à un lancer, associer le gain obtenu.
2. Déterminer l'espérance mathématique de X. Ce jeu est-il équitable ?
3. Combien de points devrait-on prendre au joueur lorsqu'il perd pour que le jeu soit équitable ?

19 Sac de boules

★★ 15 min Corrigé p. 320

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires (n désigne un entier naturel strictement positif).
On organise un jeu consistant, pour chaque joueur, à prélever dans le sac une boule au hasard.
Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 10 € ; si la boule est jaune, il reçoit 2 € ; si la boule est noire, il ne reçoit rien.
Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1 €.
On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur (somme reçue moins la mise).

1. Quel est le nombre de boules dans le sac ?
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .
3. Déterminer, en fonction de n, l'espérance mathématique de X_n .
4. On souhaite que l'espérance soit négative. Quel nombre minimal de boules noires doit-il y avoir dans le sac ?

20 Loi d'une variable aléatoire

★★★ 20 min Corrigé p. 321

Lycée La Bruyère, Versailles

Une urne contient 10 boules blanches et n boules noires, n étant un nombre entier supérieur ou égal à 2.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
Pour chaque boule blanche obtenue on gagne 2 € et pour une boule noire on perd 3 €. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

INTERROS

1 *Le joueur tire une boule.*

- **(a)** Quelles sont les valeurs prises par X ?
- **(b)** Donner, en fonction de n, la loi de probabilité de X.
- **(c)** Exprimer $E(X)$ en fonction de n.
- **(d)** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

2 Le joueur tire successivement deux boules sans remise.

- **(a)** Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
- **(b)** Donner la loi de probabilité de X.
- **(c)** Exprimer $E(X)$ en fonction de n.
- **(d)** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est défavorable au joueur.

21 La bonne proportion

★★★ 30 min Corrigé p. 322

Lycée Notre-Dame de Sainte-Croix, Neuilly-sur-Seine

Marie propose le jeu suivant à Pierre. Un sac contient n boules noires et une boule blanche (avec n un entier strictement positif). Pierre tire une boule au hasard, note sa couleur, la remet dans le sac puis tire une nouvelle boule. Si les deux boules tirées sont noires, Marie donne 1 € à Pierre. Si elles sont blanches, Marie donne 10 € à Pierre. Si elles sont de couleurs différentes, Pierre donne 3,50 € à Marie.
On note G la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Pierre (qui peut être négatif si c'est une perte).

1 On suppose dans cette question que $n = 6$.

- **(a)** Combien y a-t-il de boules dans l'urne ?
- **(b)** Faire un arbre pondéré.
- **(c)** Déterminer la loi de probabilité de G.
- **(d)** Calculer l'espérance mathématique de G.
- **(e)** Interpréter ce résultat.

2 Dans le cas général.

- **(a)** Combien y a-t-il de boules dans l'urne ?
- **(b)** Quelle est, en fonction de n, la probabilité de tirer une boule noire au premier tirage ?
- **(c)** Faire un arbre pondéré.
- **(d)** Calculer la loi de probabilité de G.
- **(e)** Calculer l'espérance mathématique de G en fonction de n.
- **(f)** Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?
- **(g)** Pour quelles valeurs de n le jeu risque-t-il de rapporter le plus d'argent à Marie ?

Algorithmes & programmation

22 Transformation affine ★ 5 min

Corrigé p. 324

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Dans un programme Python, on suppose connues les listes `X` et `P` contenant respectivement les valeurs et leurs probabilités d'une variable aléatoire X.

On considère la variable $Y = -3X + 5$.

Écrire la portion de code permettant de créer la liste `Y` contenant toutes les valeurs de la variable aléatoire Y.

23 Calcul des paramètres de dispersion ★★ 10 min

Corrigé p. 325

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On considère un algorithme dans lequel sont définis deux listes : la liste `X`, dans laquelle se trouvent les valeurs d'une variable aléatoire, et la liste `P`, dans laquelle se trouvent les probabilités des valeurs de X.

1. Écrire un algorithme qui calcule et affiche l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
2. Écrire un programme Python comportant trois fonctions : une pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire X à partir des listes `X` et `P`, une qui calcule la variance, et une autre qui calcule d'écart-type.

   Aide : ces trois fonctions admettent pour arguments `X` et `P`.

24 Formule de König-Huygens ★★ 10 min

Corrigé p. 326

Lycée Marie Curie, Sceaux

On considère un programme Python commençant par les lignes suivantes :

```
X = [-5,-3,0,1,2,10]
P = [0.2,0.3,0.05,0.05,0.3,0.1]
```

où `X` est une liste comportant toutes les valeurs d'une variable aléatoire X, et `P` une liste comportant toutes les probabilités (ordonnées) des valeurs de X (ainsi, `P[i]` est la probabilité que X prenne la valeur `X[i]` pour i variant de 0 à 5).

Compléter cet algorithme afin qu'il affiche la variance de X à l'aide de la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2.$$

Pour cela, on pourra faire appel à la fonction `esperance` de l'exercice 23.

1 V/F Variable aléatoire

Énoncé p. 298

1. *Vrai*. D'après la formule du calcul de l'espérance, si X ne prend que des valeurs positives, l'espérance est obtenue par produit puis somme de quantités positives. Donc $E(X) \geqslant 0$.
2. *Faux*. Contre-exemple : la variable aléatoire X qui prend la valeur -1 avec une probabilité de 0,1 et la valeur 1 avec une probabilité de 0,9 a pour espérance $E(X) = 0{,}1 \times (-1) + 0{,}9 \times 1 = 0{,}8$. Donc $E(X) > 0$, mais X prend une valeur négative.

2 QCM En fonction de n

Énoncé p. 298

1. Réponse $\boxed{\text{b}}$. Si on tire une boule blanche, $X = 2$. Si on tire une boule noire, $X = -3$.
2. Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, le nombre total de boules est $n + 10$, et les valeurs prises par X sont -3 et 2.
3. Réponse $\boxed{\text{c}}$. D'après le cours : $E(X) = \dfrac{n}{n+10} \times (-3) + \dfrac{10}{n+10} \times 2$.
4. Réponse $\boxed{\text{c}}$. Le jeu est favorable au joueur si $E(X) > 0$, donc si $-3n + 20 > 0$, c'est-à-dire $n < \dfrac{20}{3}$.

3 La base

Énoncé p. 299

Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

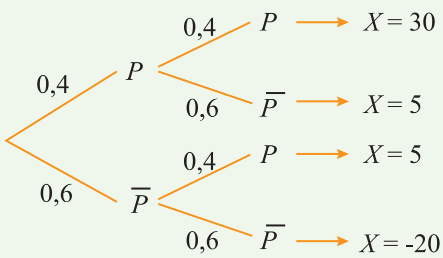
1. La somme des probabilités de toutes les issues doit être égale à 1, et comme $p_3 = 3p_6$, on a $0{,}2 + 0{,}1 + 3p_6 + 0{,}06 + 0{,}2 + p_6 = 1$, d'où $4p_6 = 0{,}44$. On a donc $p_6 = 0{,}11$ et $p_3 = 0{,}33$.
2. $$\begin{aligned} E(X) = {} & 0{,}2 \times 1 + 0{,}1 \times 2 + 0{,}33 \times 3 + 0{,}06 \times 4 + 0{,}2 \times 5 \\ & + 0{,}11 \times 6 \\ E(X) = {} & 3{,}29. \end{aligned}$$

4 Pièce truquée

Énoncé p. 299

Lycée Clémenceau, Nantes

1. D'après l'arbre suivant, $X = \{-20; 5; 30\}$.



2 • La probabilité d'obtenir deux fois « Face » est $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.
Donc $P(X = -20) = 0{,}36$.

• La probabilité d'obtenir une fois « Face » et une fois « Pile », donc de l'événement « PF ou FP » est $2 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}48$.
Donc $P(X = 5) = 0{,}48$

• La probabilité d'obtenir deux fois « Pile » est $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.
Donc $P(X = 30) = 0{,}16$.

On peut résumer tout ceci dans un tableau :

$X = x_i$	-20	5	30
$P(X = x_i)$	0,36	0,48	0,16

3 $$\begin{aligned} P(X \leqslant 5) &= P(X = -25) + P(X = 5) \\ &= 1 - P(X = 30) \\ &= 1 - 0{,}16 \\ &= 0{,}84. \end{aligned}$$

5 Ventes

Énoncé p. 299

Lycée Camille Vernet, Valence

1 $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0{,}16 - 0{,}1 = 0{,}74$.
$P(X < 4) = 1 - P(X \geqslant 4) = 1 - 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}85$.

MÉTHODE

Pour calculer la probabilité d'un événement du type $(X > a)$ ou $(X < a)$, il faut étudier si la probabilité de l'événement contraire n'est pas plus simple à calculer.

2 $E(X) = 0{,}16 \times 0 + 0{,}1 \times 1 + 0{,}35 \times 2 + 0{,}24 \times 3 + 0{,}1 \times 4 + 0{,}05 \times 5$
$E(X) = 0{,}1 + 0{,}7 + 0{,}72 + 0{,}4 + 0{,}25$
$E(X) = 2{,}17$.
Ce résultat signifie que sur de nombreuses semaines, le commercial peut espérer vendre en moyenne $2{,}17$ installations par semaine.

6 Cotisation moyenne

Énoncé p. 300

Lycée Honoré de Balzac, Paris

1 La loi de probabilité de la variable aléatoire S est :

Valeurs s_i	45	65	75
$P(S = s_i)$	0,3	0,2	0,5

2 L'espérance de S est :

$$E(S) = 0{,}3 \times 45 + 0{,}2 \times 65 + 0{,}5 \times 75$$
$$E(S) = 13{,}5 + 13 + 37{,}5$$
$$E(S) = 64.$$

Cela signifie que si l'on interroge au hasard un grand nombre de membres de ce club, le montant moyen de leur cotisation sera proche de 64 euros.

MÉTHODE

Une tel exercice est en réalité très proche d'un exercice de statistique. Les pourcentages correspondent aux probabilités. Et le calcul de l'espérance est exactement le calcul de la moyenne d'une série statistique. C'est au niveau de l'interprétation qu'il y a une légère différence, car dans le contexte « probabilité », on interroge un membre au hasard, quitte à répéter l'expérience plusieurs fois, alors qu'en statistiques, on considère tous les résultats en même temps. C'est pour cela que pour interpréter l'espérance, on dit que la moyenne des résultats de nombreuses répétitions s'approche de l'espérance.
En revanche, on peut utiliser la calculatrice de la même façon qu'en statistiques.

7 Ticket gagnant

Énoncé p. 300

Lycée International Europole, Grenoble

1 La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 10, 20 et 50.

2 La loi de probabilité de X est :

Gain x_i	0	10	20	50
$P(X = x_i)$	0,4	0,5	0,09	0,01

3 $P(X \geqslant 20) = P(X = 20) + P(X = 50) = 0{,}09 + 0{,}01 = 0{,}1.$

4 $E(X) = 0 \times 0{,}4 + 10 \times 0{,}5 + 20 \times 0{,}09 + 50 \times 0{,}01 = 7{,}3.$

8 Interprétation de l'espérance

Énoncé p. 300

Lycée Albert Chatelet, Douai

1 La somme des probabilités est égale à 1 donc :

$$P(X = 3) = 1 - 0{,}4 - 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}25.$$

2 $E(X) = 0{,}4 \times (-1) + 0{,}2 \times 1 + 0{,}25 \times 3 + 0{,}15 \times 5$
$E(X) = -0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}75 + 0{,}75$
$E(X) = 1{,}3.$

3 $P(X \geqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 5) = 0,25 + 0,15 = 0,4$.

Avec l'événement contraire :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 3) &= 1 - P(X < 3) \\ &= 1 - P(X = -1) - P(X = 1) \\ &= 1 - 0,4 - 0,2 \\ &= 0,4. \end{aligned}$$

4 E(X) représente le gain moyen par expérience que l'on pourrait espérer après un grand nombre de répétitions de l'expérience.

9 Gagner à la loterie

Énoncé p. 301

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

1 **(a)** Les valeurs prises par G sont 498 pour 1 billet, 98 pour 2 billets, 8 pour 6 billets et -2 pour les 791 billets restants. La loi de probabilité de G est donc la suivante :

Gain	498	98	8	-2
Probabilité	$\dfrac{1}{800}$	$\dfrac{2}{800}$	$\dfrac{6}{800}$	$\dfrac{791}{800}$

(b) $E(G) = 498 \times \dfrac{1}{800} + 98 \times \dfrac{2}{800} + 8 \times \dfrac{6}{800} - 2 \times \dfrac{791}{800}$

$E(G) = \dfrac{498 + 196 + 48 - 1582}{800}$

$E(G) = -1,05$.

(c) Comme l'espérance de la variable aléatoire qui donne le gain du joueur est négative, cela signifie que le jeu est favorable à l'organisateur.

2 **(a)** Pour acheter les 800 billets, la personne débourse :

$$800 \times 2 = 1\ 600 \text{ euros.}$$

(b) Les 9 billets gagnants permettent de gagner au total :

$$500 + 2 \times 100 + 6 \times 10 = 760 \text{ euros.}$$

(c) La personne a donc perdu $1\ 600 - 760 = 840$ euros.

(d) Cela revient à une perte moyenne par billet de $\dfrac{840}{800} = 1,05$ euros. On peut donc considérer qu'elle « gagne » en moyenne $-1,05$ euros par billet, ce qui est égal à l'espérance de gain du joueur calculée précédemment.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

10 Un sac

Énoncé p. 301

Lycée Charlemagne, Paris

1. Il s'agit de la répétition deux fois du tirage d'une boule parmi trois.
2. L'univers est : $\{(4\ ;4),(4\ ;3),(3\ ;3),(3\ ;4)\}$.
3. $p(4\ ;4) = 1 - (p(3\ ;3) + p(3\ ;4) + p(4\ ;3)) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.
4. **(a)** X prend les valeurs 6, 7 et 8.

Sa loi de probabilité est :

x_i	6	7	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

(b) $E(X) = 6 \times \frac{1}{9} + 7 \times \frac{4}{9} + 8 \times \frac{4}{9} = \frac{22}{3}$.

$$V(X) = \frac{1}{9}\left(6 - \frac{22}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\left(7 - \frac{22}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\left(8 - \frac{22}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

11 Jeu équitable

Énoncé p. 302

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

1. En tenant compte de la mise, les valeurs prises par X sont 8, -2 et 0.

La loi de probabilité de X est :

Gain x_i	-2	0	8
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{44}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{11}$

$E(X) = -2 \times \frac{25}{44} + 0 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{2}{11} = \frac{14}{44} = \frac{7}{22}$.

2. **(a)** Le jeu n'est pas favorable à l'organisateur, car l'espérance du gain du joueur est positive.

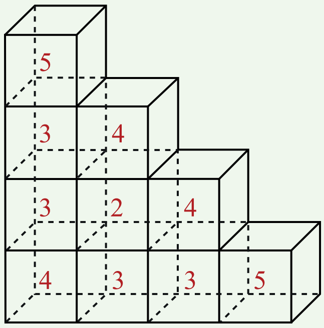
(b) Pour que $E(X) = 0$, on doit avoir $-2 \times \frac{25}{44} + (S - 2) \times \frac{2}{11} = 0$.
Cela donne la condition $-50 + 8S - 16 = 0$, c'est-à-dire $S = \frac{66}{8} = 8{,}25$.
Pour que le jeu soit équitable, il faut que lorsqu'il gagne, le joueur ne gagne que 8,25 euros.

12 Un jeu d'enfant

Énoncé p. 302

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Sur le schéma représenté page suivante, le nombre de faces peintes a été inscrit sur chaque cube.



1 D'après les observations précédentes, $X(\Omega) = \{2\,;3\,;4\,;5\}$.

2 La loi de probabilité de X est :

Valeurs de X	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	$\frac{4}{10} = 0{,}4$	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{2}{10} = 0{,}2$

3
$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1 \\ &= 3{,}6. \end{aligned}$$

On peut en déduire que si l'enfant répète un grand nombre de fois cette expérience, chaque cube aura en moyenne entre 3 et 4 faces peintes.

4 Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	2	3	4	5
Valeurs de X^2	4	9	16	25
$p(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Alors, la variance de X est :

$$\begin{aligned} V(X) &= \big(4 \times 0{,}1 + 9 \times 0{,}4 + 16 \times 0{,}3 + 25 \times 0{,}2\big) - 3{,}6^2 \\ &= 0{,}84. \end{aligned}$$

Ainsi, l'écart-type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}84} \approx 0{,}9.$$

13 Dé tétraédrique

Énoncé p. 302

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1 **(a)** Sachant que la somme des probabilités vaut 1, avec les trois indications de l'énoncé on obtient les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} p_2 + p_4 + p_5 + p_7 = 1 \\ p_2 = p_5 \\ p_5 = 2p_4 \\ p_7 = 3p_2 \end{cases}$$

On trouve donc :

$$\begin{cases} p_5 = 2p_4 \\ p_2 = 2p_4 \\ p_7 = 6p_4 \\ 2p_4 + p_4 + 2p_4 + 6p_4 = 1 \end{cases}$$

Par conséquent, on a bien $p_4 = \dfrac{1}{11}$.

(b) On en déduit les probabilités d'obtenir chaque valeur :

$p(X = 4) = p_4 = \dfrac{1}{11}$.

$p(X = 2) = P(X = 5) = 2p_4 = \dfrac{2}{11}$.

$p(X = 7) = 6p_4 = \dfrac{6}{11}$.

On peut rassembler ces résultats dans le tableau suivant :

x_i	2	4	5	7
p_i	$\dfrac{2}{11}$	$\dfrac{1}{11}$	$\dfrac{2}{11}$	$\dfrac{6}{11}$

(c) $E(X) = 2 \times \dfrac{2}{11} + 4 \times \dfrac{1}{11} + 5 \times \dfrac{2}{11} + 7 \times \dfrac{6}{11} = \dfrac{60}{11}$.

2 $p(A) = p(X = 2) + p(X = 4) = \dfrac{3}{11}$.

$p(B) = 1 - p(X = 2) = \dfrac{9}{11}$.

3 $\overline{A}$ est l'événement : « on obtient une face avec un numéro impair », donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \dfrac{8}{11}$.

$A \cap B$ est l'événement : « on obtient une face avec un numéro pair supérieur à 3 », donc $p(A \cap B) = p(X = 4) = \dfrac{1}{11}$.

$A \cup B$ est l'événement : « on obtient un numéro pair ou un numéro plus grand que 3 ». On constate que toutes les issues conviennent, donc $p(A \cup B) = 1$.

14 Tirage de boules dans une urne

Énoncé p. 303

Institut Notre-Dame, Meudon

1 Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire, c'est donner l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire et, pour chaque résultat, la probabilité associée.

Comme on tire successivement deux boules, les résultats possibles sont les couples dont la première composante correspond à la boule obtenue au premier tirage et la deuxième composante correspond à la boule obtenue au deuxième tirage. Si on désigne la boule rouge par R, la verte par V et la bleue par B, on a :

$$\Omega = \{(R,R),(R,V),(R,B),(V,R),(V,V),(V,B),(B,R),(B,V),(B,B)\}$$

Les boules sont indiscernables au toucher, elles ont donc toutes la même probabilité d'être tirées et on est en situation d'équiprobabilité. Comme il existe 9 résultats possibles à cette expérience aléatoire, la probabilité de chacun des résultats est $\frac{1}{9}$.

2 **(a)** La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :

- -6 (quand on tire deux boules bleues),
- -2 (quand on tire une boule rouge et une bleue),
- -1 (quand on tire une boule verte et une bleue),
- $+2$ (quand on tire deux boules rouges),
- $+3$ (quand on tire une boule rouge et une verte),
- $+4$ (quand on tire deux boules vertes).

Il existe un seul couple correspondant au tirage de deux boules bleues donc :

$$P(T=-6) = \frac{1}{9}.$$

Il existe deux couples correspondant au tirage d'une rouge et d'une bleue : (R,B) et (B,R) donc :

$$P(T=-2) = \frac{2}{9}.$$

En raisonnant de même, on obtient :

$$P(T=-1) = \frac{2}{9} \quad , \quad P(T=2) = \frac{1}{9},$$
$$P(T=3) = \frac{2}{9} \quad , \quad P(T=4) = \frac{1}{9}.$$

On peut récapituler ces résultats dans un tableau :

K	-6	-2	-1	$+2$	$+3$	$+4$
$P(T=K)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

On vérifie que la somme des probabilités est bien égale à 1.

(b) $E(T) = -6\times\frac{1}{9} - 2\times\frac{2}{9} - 1\times\frac{2}{9} + 2\times\frac{1}{9} + 3\times\frac{2}{9} + 4\times\frac{1}{9} = 0.$
Donc, le jeu est équitable.

CORRIGÉS

3 Le joueur perd la partie lorsqu'il a un nombre négatif de points, c'est-à-dire lorsque T prend les valeurs -6 ou -2 ou -1. Soit A l'événement « le joueur perd la partie ».

$$P(A) = P(T=-6) + P(T=-2) + P(T=-1)$$
$$P(A) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}$$
$$P(A) = \frac{5}{9}.$$

La probabilité que le joueur perde la partie est $\frac{5}{9}$.

Remarque : cela n'est pas contradictoire avec $E(T) = 0$.

15 Propriétés

Énoncé p. 303

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 $E(X) = 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}1$
$= 2{,}1.$

Pour calculer la variance, ajoutons une ligne à la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3	4
Valeurs de X^2	0	1	4	9	16
$p_i = p(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$V(X) = \big(0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}4 + 16 \times 0{,}1\big) - 2{,}1^2$$
$$= 1{,}69.$$

Ainsi, l'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$.

2 D'après le cours,

- $E(Y) = E(-2X+3) = -2E(X) + 3 = -2 \times 2{,}1 + 3 = -1{,}2.$
- $V(Y) = V(-2X+3) = (-2)^2 V(X) = 4 \times 1{,}69 = 6{,}76.$
- $\sigma(Y) = \sigma(-2X+3) = |-2|\sigma(X) = 2 \times 1{,}3 = 2{,}6.$

3 $V(Z) = 0{,}25 \iff a^2 V(X) = 0{,}25$

$$\iff a^2 = \frac{0{,}25}{1{,}69}$$
$$\iff a = \sqrt{\frac{0{,}25}{1{,}69}} \text{ car } a > 0$$
$$\iff a = \frac{0{,}5}{1{,}3} = \frac{5}{13}.$$

$$\begin{aligned} E(Z) = 1{,}42 &\iff aE(X) + b = 1{,}42 \\ &\iff a \times 2{,}1 + b = 1{,}42 \\ &\iff b = 1{,}42 - 2{,}1a \\ &\iff b = \frac{142}{100} - \frac{21}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{199}{325}. \end{aligned}$$

16 Somme des chiffres

Énoncé p. 304

Lycée La Bruyère, Versailles

1 Le tableau suivant donne la somme des chiffres des nombres de 0 à 25.

Nombre	Somme des chiffres
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	1
11	2
12	3

Nombre	Somme des chiffres
13	4
14	5
15	6
16	7
17	8
18	9
19	10
20	2
21	3
22	4
23	5
24	6
25	7

Les nombres étant tirés au hasard, chacun des 26 nombres a pour probabilité $\frac{1}{26}$ d'être tiré.

On obtient donc la loi de probabilité page suivante pour X.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{26}$	$\frac{2}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{26}$

x_i	6	7	8	9	10
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{2}{26}$	$\frac{2}{26}$	$\frac{1}{26}$

On a donc :

- $E(X) = 0 \times \frac{1}{26} + 1 \times \frac{2}{26} + \cdots + 10 \times \frac{1}{26} = \frac{127}{26}$.

CORRIGÉS

- $V(X) = \frac{1}{26}\left(0 - \frac{127}{26}\right)^2 + \frac{2}{26}\left(1 - \frac{127}{26}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{26}\left(10 - \frac{127}{26}\right)^2 = \frac{4\,905}{676}.$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{4\,905}{676}} \approx 2{,}69.$

2 $E(Y) = -2E(X) + 5 = -\frac{62}{13}$, et $\sigma(Y) = 2\sigma(X) = 2\sqrt{\frac{4\,905}{676}} \approx 5{,}39.$

17 Des numéros et des couleurs

Énoncé p. 304

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-fossés

1 Le tableau ci-dessous permettra de répondre à toutes les questions :

2ᵉ boule \ 1ʳᵉ boule	V_1	V_2	V_3	R_1	R_2	N_1
V_1	V_1V_1	V_1V_2	V_1V_3	V_1R_1	V_1R_2	V_1N_1
V_2	V_1V_2	V_2V_2	V_3V_2	R_1V_2	R_2V_2	N_1V_2
V_3	V_1V_3	V_2V_3	V_3V_3	R_1V_3	R_2V_3	N_1V_3
R_1	V_1R_1	V_2R_1	V_3R_1	R_1R_1	R_2R_1	N_1R_1
R_2	V_1R_2	V_2R_2	V_3R_2	R_1R_2	R_2R_2	N_1R_2
N_1	V_1N_1	V_2N_1	V_3N_1	R_1N_1	R_2N_1	N_1N_1

Il y a donc 36 issues possibles.

2 **(a)** $p(A) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$. Il suffit pour trouver ce résultat de compter les issues où ne figurent pas deux fois la même couleur.

$p(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. En effet il y a trois lignes pour lesquelles la deuxième boule porte le numéro 1.

$p(C) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$. Là encore on compte dans le tableau précédent les cases où les deux boules portent le même numéro.

(b)
- $A \cap C$: « les 2 boules tirées sont de couleurs différentes et portent le même numéro ».

$$P(A \cap C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

- $A \cup C$: « les 2 boules tirées sont de couleurs différentes ou portent le même numéro ».

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ &= \frac{11}{18} + \frac{14}{36} - \frac{2}{9} \\ &= \frac{28}{36} = \frac{7}{9} \text{ (vérifiable dans le tableau).} \end{aligned}$$

- $\overline{B}$: « la 2[e] boule porte le numéro 2 ou 3 ».

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{2}.$$

- $\overline{A} \cup B$: « les 2 boules tirées ont la même couleur ou la deuxième porte le numéro 1 ».

$$P(\overline{A} \cup B) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

3 **(a)** On peut avoir une somme égale à 2, 3, 4, 5 ou 6.

(b) En utilisant le tableau ci-dessus, on obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

(c) $E(X) = 2 \times \frac{9}{36} + 3 \times \frac{12}{36} + 4 \times \frac{10}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{10}{3}.$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{9}{36}\left(2 - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{12}{36}\left(3 - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{10}{36}\left(4 - \frac{10}{3}\right)^2 \\ &\quad + \frac{4}{36}\left(5 - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{36}\left(6 - \frac{10}{3}\right)^2 \\ &= \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

18 Dodécaèdre

Énoncé p. 305

Lycée Édouard Herriot, Lyon

1 Pour commencer, on va calculer le gain obtenu pour chaque face.

Propriété	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pair		2		2		2		2		2		2
Multiple de 3			3			3			3			3
Supérieur ou égal à 10										4	4	4
Autres cas	−5				−5		−5					
Total	−5	2	3	2	−5	5	−5	2	3	6	4	9

Comme le dé est équilibré, chaque issue a la même probabilité de se réaliser.

On obtient ainsi la loi de probabilité des gains page suivante.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

Gains	-5	2	3	4	5	6	9
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2 $E(X)=\dfrac{(-5)\times 3+2\times 3+3\times 2+4\times 1+5\times 1+6\times 1+9\times 1}{12}$

$E(X)=\dfrac{21}{12}$

$E(X)=\dfrac{7}{4}$

$E(X)=1{,}75.$

Comme l'espérance est positive, le jeu est favorable au joueur ; il n'est donc pas équitable.

3 En appelant S le nombre de points à prendre au joueur quand il perd, l'espérance devient :

$E(X)=\dfrac{(-S)\times 3+2\times 3+3\times 2+4\times 1+5\times 1+6\times 1+9\times 1}{12}$

$E(X)=\dfrac{-3S+36}{12}.$

L'espérance est donc nulle pour $-3S+36=0$, c'est-à-dire $S=12$.

Il faut donc prendre 12 points au joueur quand il perd pour que le jeu soit équitable.

19 Sac de boules

Énoncé p. 305

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 Il y a en tout $n+3+1=n+4$ boules dans le sac.

2 La loi de probabilité de X_n est :

Valeurs de X_n	-1	1	9
$p(X_n=x_i)$	$\frac{n}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{1}{n+4}$

En effet, il y a une mise de départ : 1 €. Donc quand le joueur gagne 2 €, au final, il ne gagne que 1 €. Il en est de même pour les autres valeurs de X_n.

3 $E(X_n)=(-1)\times\dfrac{n}{n+4}+1\times\dfrac{3}{n+4}+9\times\dfrac{1}{n+4}$

$=\dfrac{12-n}{n+4}.$

4 $E(X_n) < 0 \iff \dfrac{12-n}{n+4} < 0$

$\iff 12 - n < 0$ car $n > 0$ donc $n + 4 > 0$

$\iff n > 12.$

Il faut donc qu'il y ait au minimum 13 boules noires pour que l'espérance mathématique de X_n soit strictement négative.

20 Loi d'une variable aléatoire

Énoncé p. 305

Lycée La Bruyère, Versailles

1 **(a)** X peut prendre les valeurs -3 et 2.

(b) Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité de X :

x_i	-3	2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{n}{10+n}$	$\dfrac{10}{10+n}$

(c) $E(X) = \dfrac{-3n+20}{10+n}$.

(d) Le jeu est favorable au joueur si $E(X) > 0$. Or, n est un nombre positif, donc le jeu est favorable au joueur si et seulement si $-3n + 20 > 0$.

$$-3n + 20 > 0 \Leftrightarrow n < \frac{20}{3}$$

n étant un nombre entier, le jeu est favorable au joueur si et seulement si n est au plus égal à 6. Comme n est supérieur ou égal à 2, les seules valeurs pour lesquelles le jeu est favorable au joueur sont 2, 3 , 4 , 5 et 6.

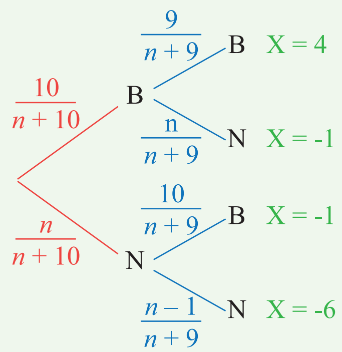
2 **(a)** Le joueur peut perdre les deux parties, auquel cas son gain algébrique est -6.

Il peut gagner une partie et perdre l'autre, auquel cas son gain algébrique est -1.

Il peut aussi gagner les deux parties, auquel cas son gain algébrique est 4.

Les trois valeurs possibles pour X sont donc -6, -1 et 4.

(b) L'expérience peut être représentée par l'arbre suivant :



Ainsi, on a par exemple :

$$p(B \cap B) = \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} = \frac{90}{(n+10)(n+9)}.$$

On obtient donc la loi de probabilité suivante :

x_i	-6	-1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$	$\frac{20n}{(n+10)(n+9)}$	$\frac{90}{(n+10)(n+9)}$

(c) $$E(X) = \frac{-6n(n-1) - 20n + 360}{(n+10)(n+9)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

(d) n étant un entier naturel, le dénominateur de $E(X)$ est positif.
Pour le numérateur, il faut trouver les racines.
$\Delta = 8\,836 = 94^2$. Les deux racines sont donc :

$$n' = \frac{14-94}{-12} = \frac{20}{3} \quad \text{et} \quad n'' = \frac{14+94}{-12} = -9.$$

Le coefficient de n^2 étant négatif, on en déduit que $E(X)$ est positif entre les racines, soit pour $0 < n < \frac{20}{3}$, et négatif pour $n > \frac{20}{3}$.
Le jeu est donc défavorable au joueur dès que n est supérieur ou égal à 7, comme précédemment.

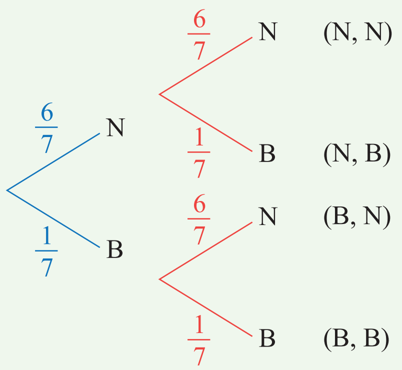
21 La bonne proportion

Énoncé p. 306

Lycée Notre-Dame de Sainte-Croix, Neuilly-sur-Seine

1 **(a)** Il y a $6 + 1 = 7$ boules dans l'urne.

(b) On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant :



(c) La variable aléatoire G prend la valeur 1 lorsque les deux boules sont noires, la valeur 10 si les deux boules sont blanches et la valeur $-3{,}5$ si les boules sont de couleurs différentes.
Le jeu consiste en la répétition de deux expériences identiques et indépendantes.

La probabilité d'une liste de résultats est donc égale au produit de chaque résultat de la liste. On a alors la loi de probabilité suivante :

- $P(G=1) = \frac{6}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{36}{49}$.
- $P(G=10) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$.
- $P(G=-3{,}5) = \frac{6}{7} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{12}{49}$.

(d) $E(G) = 1 \times \frac{36}{49} + 10 \times \frac{1}{49} - 3{,}5 \times \frac{12}{49}$
$= \frac{4}{49}$.

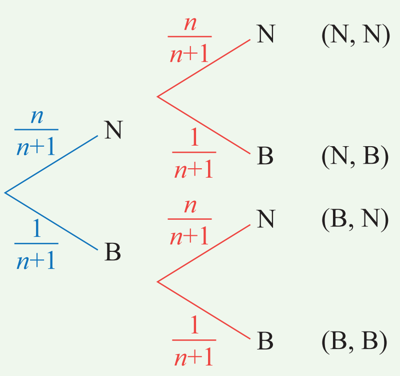
(e) Cela signifie que sur un grand nombre de parties, Pierre peut espérer gagner en moyenne $\frac{4}{49}$ euros par partie.

2 On refait les mêmes raisonnements en remplaçant 6 par n.

(a) Il y a $n+1$ boules dans l'urne.

(b) La probabilité de tirer une boule noire à chaque tirage est donc $\frac{n}{n+1}$.

(c) L'arbre associé à l'expérience est :



(d) $P(G=1) = \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$.
$P(G=10) = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$.

CORRIGÉS

$$P(G=-3{,}5)=\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\times\frac{n}{n+1}=\frac{2n}{(n+1)^2}.$$

(e) $E(G)=1\times\dfrac{n^2}{(n+1)^2}+10\times\dfrac{1}{(n+1)^2}-3{,}5\times\dfrac{2n}{(n+1)^2}$

$E(G)=\dfrac{n^2-7n+10}{(n+1)^2}$.

(f) Le jeu est équitable lorsque $E(G)=0$, c'est-à-dire lorsque $n^2-7n+10=0$.
Le discriminant de cette équation du second degré en n vaut 9. Elle a donc deux solutions : 2 et 5.
Le jeu est donc équitable lorsqu'il y a 2 ou 5 boules noires et une blanche.

(g) Le jeu risque risque de rapporter le plus d'argent à Marie lorsque l'espérance du gain de Pierre est minimale. Il faut donc trouver pour quelle(s) valeur(s) entière(s), l'expression $\dfrac{n^2-7n+10}{(n+1)^2}$ est minimale.
Posons $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}$ et étudions les variations de f sur $[1\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(2x-7)(x+1)^2-2(x+1)(x^2-7x+10)}{(x+1)^4}\\&=\frac{(2x-7)(x^2+2x+1)-2(x+1)(x^2-7x+10)}{(x+1)^4}\\&=\frac{9(x^2-2x-3)}{(x+1)^4}.\end{aligned}$$

Le numérateur s'annule pour $x=-1$ et $x=3$.
La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $[1\,;3]$ (entre les racines), puis croissante.
Le minimum du gain pour Pierre est donc atteint quand $n=3$.
Le gain pour Marie est alors 0,125 €.

22 Transformation affine

Énoncé p. 307

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Le bout de code permettant de construire la liste Y définie par $Y=-3X+5$ est le suivant :

```
Y = []
for i in X:
    Y.append(-3*i+5)
```

Explications :

- on commence par initialiser la variable `Y` comme étant une liste vide (crochets sans rien à l'intérieur) ;
- on parcourt la liste `X` avec l'instruction « `for i in X:` » : ici, chaque valeur que va prendre la variable `i` sera une valeur contenue dans la liste `X` ;
- on ajoute la valeur « `-3*i+5` » dans la liste `Y` car $Y = -3X + 5$, ce qui signifie que chaque valeur de Y est obtenue en multipliant par -3 chaque valeur que prend X et en ajoutant 5.

23 Calcul des paramètres de dispersion

Énoncé p. 307

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 **Algorithme**

```
X et P sont deux listes
n ← longueur de X
E ← 0 (espérance de X)
V ← 0 (variance de X)
Pour i allant de 0 à n-1:
  E ← E + X[i]*P[i]
Fin du Pour
Pour i allant de 0 à n-1:
  V ← V + (X[i]-E)²*P[i]
Fin du Pour
s < √V (écart-type)
```

2 Ici, un programme modulaire est demandé : c'est un programme dans lequel il y a plusieurs fonctions (modules).

Un programme possible est celui présenté page suivante.

À RETENIR

Dans un programme Python,

- `len(<liste>)` renvoie la longueur de la liste (le nombre d'items) ;
- `x**0.5` renvoie la racine carrée de x.

Ainsi, en tapant par exemple :

```
X = [-5,-3,0,1,2,10]
P = [0.2,0.3,0.05,0.05,0.3,0.1]
print("L'espérance est :",esperance(X,P))
print("La variance est :",variance(X,P))
print("L'écart-type est :",ecartype(X,P))
```

on affiche les paramètres de dispersion de la variable aléatoire X définie dans le programme.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

En Python

```
X = [-5,-3,0,1,2,10]
P = [0.2,0.3,0.05,0.05,0.3,0.1]

def esperance(X,P):
    e = 0
    for i in range(len(X)):
        e += X[i]*P[i]
    return e

def variance(X,P):
    v = 0
    e = esperance(X,P)
    for i in range(len(X)):
        v += P[i]*(X[i]-e)**2
    return v

def ecartype(X,P):
    return variance(X,P)**0.5

print("L'espérance est :",esperance(X,P))
print("La variance est :",variance(X,P))
print("L'écart-type est :",ecartype(X,P))
```

24 Formule de König-Huygens

Énoncé p. 307

Lycée Marie Curie, Sceaux

La formule de König-Huygens sous-entend que l'on connaît la variable aléatoire X^2. Il faut donc la calculer avant tout.

Pour cela, on utilise le code suivant :

En Python

```
Y = []
for i in X:
    Y.append(i*i)

V = esperance(Y,P) - esperance(X,P)**2
print(V)
```

Ainsi, la liste `Y` contient le carré des valeurs contenues dans la liste `X` (donc $Y = X^2$).

En utilisant la fonction `esperance` de l'exercice 23, cela donne :

```
V = esperance(Y,P) - esperance(X,P)**2
```

Chapitre 11

Automatismes de Seconde

Dans cette partie, vous trouverez des exercices dans lesquels, pour chaque question, 4 propositions sont données, dont une seule est correcte.
À vous de trouver laquelle.

1 Opérations, fraction, puissances

★ 20 min Corrigé p. 341

1 Quel est le résultat de : $(5-3)\times(2-7)-(-4+1)$?

a -13 b -7 c -5 d 13

2 Identifier la proposition donnant l'opposé du nombre 2.

a -2 b $-0{,}5$ c $0{,}2$ d $0{,}5$

3 Identifier la proposition donnant la valeur exacte de 4%.

a $0{,}04$ b $0{,}4$ c 25 d 400

4 Identifier la proposition donnant l'inverse du nombre 5.

a -5 b $-0{,}5$ c $0{,}2$ d $0{,}5$

5 Identifier la proposition donnant la valeur exacte de $\frac{3}{1000}+\frac{1}{100}$.

a $\frac{4}{1100}$ b $0{,}13$ c $0{,}013$ d $0{,}031$

6 Identifier la proposition donnant la valeur exacte de $5+2\times 3-1$.

a 9 b 10 c 14 d 20

7 Identifier la proposition donnant un ordre de grandeur de 101×99.

a 100 b $1\,000$ c $10\,000$ d $100\,000$

8 Quel est un ordre de grandeur de $298+403+197$?

a 700 b 800 c 900 d $1\,000$

9 Identifier la proposition donnant la valeur exacte de $7+(-2)-(-3)$.

a 2 b 6 c 8 d 12

10 Identifier la proposition donnant la valeur exacte de $\frac{3}{4}$.

a -1 b $0{,}34$ c $0{,}75$ d $3{,}4$

11 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\frac{24}{27}$.

a $\frac{4}{3}$ b $\frac{4}{7}$ c $\frac{8}{9}$ d $\frac{25}{28}$

SUJET

12 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\frac{7}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$.

a $\frac{17}{20}$ b $\frac{12}{22}$ c $\frac{10}{30}$ d $\frac{10}{60}$

13 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) \div \frac{2}{7}$.

a $\frac{7}{2}$ b $\frac{40}{7}$ c $\frac{7}{40}$ d $\frac{2}{140}$

14 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $2 \times \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \div 3$.

a $\frac{7}{15}$ b $\frac{13}{15}$ c $\frac{14}{15}$ d $\frac{22}{15}$

15 Identifier la proposition donnant une puissance égale à $3^7 \times 2^7$.

a 5^7 b 6^7 c 5^{49} d 6^{14}

16 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\frac{(7^5)^3}{7^8 \times 7^{-9}}$.

a 7^{-16} b 7^9 c 7^{14} d 7^{16}

17 Identifier la proposition donnant l'écriture scientifique de 4 900 000.

a 4900000×10^{-5} b 49×10^5
c $4{,}9 \times 10^6$ d $0{,}49 \times 10^7$

18 Identifier la proposition donnant l'écriture scientifique de 0,008 7.

a $8{,}7 \times 10^{-3}$ b 87×10^{-4}
c $8{,}7 \times 10^3$ d $0{,}0087 \times 10^4$

19 Identifier la proposition donnant l'écriture scientifique de 231×10^6.

a $2{,}31 \times 10^4$ b $0{,}231 \times 10^3$ c $2{,}31 \times 10^8$ d $0{,}231 \times 10^9$

20 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

a $\frac{5}{7}$ b $\frac{17}{12}$ c $\frac{17}{24}$ d $\frac{5}{12}$

21 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$.

a $\frac{1}{3}$ b $\frac{1}{10}$ c $\frac{2}{3}$ d $\frac{2}{10}$

22 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}$.

a $\frac{14}{15}$ b $\frac{29}{35}$ c $\frac{6}{35}$ d $\frac{42}{5}$

23 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\frac{5}{6} \div 2$.

a $\frac{2{,}5}{3}$ b $\frac{5}{3}$ c $\frac{2{,}5}{6}$ d $\frac{5}{12}$

24 Identifier la proposition donnant une puissance égale à $7^9 \times 7^{-6}$.

a 7^{-54} b 7^3 c 49^3 d 7^{15}

25 Identifier la proposition donnant une puissance égale à $9^5 \div 9^7$.

a 9^{-2} b 9^2 c 9^{12} d 1^{35}

26 Identifier la proposition donnant une puissance égale à $(3^4)^5$.

a 7^5 b 12^5 c 3^9 d 3^{20}

27 Identifier la proposition donnant une puissance égale à $2^5 \times 4^5$.

a 6^{10} b 8^5 c 8^{10} d 8^{25}

28 Identifier la proposition donnant l'écriture scientifique de 90 000 000.

a 90000000×10^{-7} b 90×10^6
c 9×10^7 d $0{,}9 \times 10^8$

29 Identifier la proposition donnant l'écriture scientifique de 0,000 037.

a $0{,}37 \times 10^5$ b $3{,}7 \times 10^{-4}$ c $3{,}7 \times 10^{-5}$ d 37×10^{-6}

30 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\dfrac{2}{3}$.

a $\dfrac{1}{2}$ b $\dfrac{3}{2}$ c $\dfrac{3}{4}$ d $\dfrac{4}{6}$

31 Identifier la proposition donnant une fraction égale à $\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{2}\right) \div \dfrac{4}{3}$.

a $\dfrac{-28}{30}$ b $\dfrac{-21}{40}$ c $\dfrac{21}{40}$ d $\dfrac{1}{4}$

2 Proportionnalité

★★ 20 min Corrigé p. 342

1 Identifier la proposition exprimant une durée égale à 90 min.

a 0,9 h b 1,3 h c 1,5 h d 9 h

2 Identifier la proposition donnant le prix de vingt timbres, sachant que huit timbres coûtent 12 €.

a 20 € b 28 € c 30 € d 32 €

3 Identifier la proposition donnant la masse de 700 mL d'huile, sachant qu'un litre de cette huile a une masse de 900 g.

a 270 g b 630 g c 700 g d 778 g

4 Identifier la proposition donnant la vitesse moyenne d'un cycliste parcourant 7 km en 12 min.

a 19 km/h b 35 km/h c 42 km/h d 58 km/h

5 Identifier la proposition donnant le nombre de jetons dans un lot où les 24 jetons rouges représentent 6% de l'ensemble.

a 144 b 240 c 400 d 600

SUJET

6 Identifier la proposition correspondant à la couleur la moins représentée dans un lot de jetons, sachant qu'un tiers des jetons sont rouges, qu'un quart sont verts, que 20% sont bleus et que tous les autres sont jaunes.

a Rouges | b Bleus | c Verts | d Jaunes

7 Identifier la proposition donnant la proportion de jetons ronds et blancs, sachant que deux cinquièmes des jetons sont ronds et que trois quarts des jetons ronds sont blancs.

a 30% | b 40% | c 60% | d 75%

8 Identifier la proposition donnant l'opération permettant de calculer 65% de 740.

a $\dfrac{65 \times 100}{740}$ | b $\dfrac{65 \times 740}{100}$ | c $\dfrac{65 \div 100}{740}$ | d $\dfrac{740 \times 100}{65}$

9 Identifier la proposition donnant une superficie égale à 2 500 cm^2.

a 0,25 m^2 | b 2,5 m^2 | c 25 m^2 | d 250 m^2

10 Identifier la proposition donnant un volume équivalent à 0,45 L.

a 0,45 cm^3 | b 4,5 cm^3 | c 45 cm^3 | d 450 cm^3

11 Identifier la proposition donnant une vitesse égale à 90 km/h.

a 9 m/s | b 15 m/s | c 25 m/s | d 30 m/s

12 Identifier la proposition donnant la proportion de jetons noirs sur l'ensemble de deux lots d'effectifs distincts tels que 30% des jetons du premier et 40% de ceux du second sont noirs.

a 12% | b 35%
c 70% | d On ne peut pas savoir.

13 Identifier la proposition exprimant une durée égale à 3h24min.

a 3,24 h | b 324 min | c 3,4 h | d 340 min

14 Identifier la proposition donnant le prix de trois cahiers, sachant que cinq de ces cahiers coûtent 13 €.

a 7,20 € | b 7,80 € | c 8,10 € | d 8,50 €

15 Identifier la proposition donnant la vitesse moyenne d'un train parcourant 37 km en 12 min.

a 150 km/h | b 180 km/h | c 185 km/h | d 200 km/h

16 Identifier la proposition donnant le nombre total de billes dans un sac où les 39 billes vertes représentent 15% de l'ensemble.

a 124 | b 260 | c 390 | d 585

17 Identifier la proposition correspondant à la couleur la moins représentée dans un lot de billes, sachant que trois huitièmes des billes sont rouges, qu'un cinquième sont vertes, que 25% sont bleues et que toutes les autres sont jaunes.

a Rouges | b Vertes | c Bleues | d Jaunes

18 Identifier la proposition donnant la proportion de billes rouges et brillantes, sachant que quatre cinquièmes des billes sont rouges et que un cinquième des billes rouges sont brillantes.

a 16% b 20% c 40% d 80%

19 Identifier la proposition donnant une superficie égale à 1,8 m^2.

a 180 cm^2 b 1 800 cm^2 c 18 000 cm^2 d 180 000 cm^2

20 Identifier la proposition donnant un volume équivalent à 2,1 L.

a 21 cm^3 b 210 cm^3 c 2 100 cm^3 d 21 000 cm^3

21 Identifier la proposition donnant la proportion de billes noires sur l'ensemble de deux lots de même effectif, sachant que 10% des billes du premier lot et 80% de celles du second lot sont noires.

a 45% b 70%
c 90% d On ne peut pas savoir.

22 Identifier la proposition donnant une vitesse égale à 72 km/h.

a 18 m/s b 20 m/s c 22 m/s d 24 m/s

23 Identifier la proposition donnant la masse de 300 mL d'un liquide tel que la masse d'un litre est égale à 1,4 kg.

a 300 g b 380 g c 420 g d 450 g

3 Évolutions et variations

★★ 5 min Corrigé p. 343

1 Identifier la proposition donnant l'opération permettant de calculer 38% de 570.

a $\dfrac{570 \times 100}{38}$ b $\dfrac{38 \div 100}{570}$ c $\dfrac{38 \times 100}{570}$ d $\dfrac{38 \times 570}{100}$

2 Identifier la proposition donnant le taux d'évolution global associé à une hausse de 15% suivie d'une hausse de 40%.

a 55% b 58% c 61% d 65%

3 Identifier la proposition donnant le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 35%.

a -35 b 0,35 c 0,65 d 1,35

4 Identifier la proposition donnant le prix d'un article initialement à 150 € et bénéficiant d'une réduction de 30%.

a 45 € b 105 € c 120 € d 149.70 €

5 Identifier la proposition donnant le prix initial d'un article vendu à 300 € après une augmentation de 20%.

a 240 € b 250 € c 280 € d 360 €

6 Identifier la proposition donnant le taux d'évolution d'un article dont le prix est passé de 250 € à 200 €.

a 25% b -20% c -25% d -50%

SUJET

7 Identifier la proposition donnant le coefficient multiplicateur global associé à la succession de cinq augmentations de 3%.

a $1{,}03^5$ b $1{,}15$ c $1{,}5$ d $1 + 0{,}03^5$

8 Identifier la proposition donnant le taux d'évolution réciproque associé à une baisse de 20%.

a 15% b 20%
c 25% d On ne peut pas savoir.

9 Identifier la proposition donnant une relation correcte entre le prix initial p_1 et le prix final p_2 d'un article ayant subit une hausse de 10% puis une baisse de 10%, sachant que p_1 est strictement positif.

a $p_2 < p_1$ b $p_2 > p_1$
c $p_2 = p_1$ d Cela dépend de p_1.

10 Identifier la proposition donnant le taux d'évolution correspondant au doublement d'une valeur non nulle.

a 50% b 100%
c 200% d Cela dépend.

4 Calcul littéral

★ 10 min Corrigé p. 343

1 La forme développée et réduite de $(3x + 5)^2$ est :

a $3x^2 + 30x + 25$ b $3x^2 + 25$
c $9x^2 + 25$ d $9x^2 + 30x + 25$

2 La forme développée et réduite de $(x - 2)^2$ est :

a $x^2 + 4$ b $x^2 - 4$ c $x^2 - 4x + 4$ d $x^2 + 4x - 4$

3 Identifier la proposition donnant une forme factorisée de $x^2 - 36$.

a $(x + 2)(x - 18)$ b $2(x - 18)$
c $(x - 6)(x + 6)$ d $(x - 6)^2$

4 Identifier la proposition donnant la valeur de l'expression $x^2 + 4x + 5$ lorsque x est égal à -3.

a 8 b -13 c -16 d 2

5 La forme développée et réduite de $7x - 4(3x - 5)$ est :

a $21x^2 - 47x + 20$ b $20 - 5x$
c $15x$ d $-6x^2$

6 Une forme factorisée de $4x(x - 1) + 5(x - 1)$ est :

a $4x^2 - 9x - 5$ b $(4x + 1)(x - 5)$
c $4x^2 + x - 5$ d $(4x + 5)(x - 1)$

7 Une forme factorisée de $(5x + 3)^2 - (x - 4)^2$ est :

a $(4x - 1)(6x - 1)$ b $24x^2 + 25$
c $24x^2 + 38x - 7$ d $(4x + 7)(6x - 1)$

8 Identifier la proposition donnant la valeur de $a^2 - ab + b^2$ lors que a est égal à 5 et que b est égal à -2.

a 31 **b** 19 **c** 39 **d** 16

9 Identifier la proposition donnant une expression littérale égale à $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

a $\frac{1}{a-b}$ **b** $\frac{b-a}{ab}$ **c** $\frac{a-b}{ab}$ **d** $\frac{0}{a-b}$

10 La forme développée et réduite de $(x-3)(x-5)$ est :

a $x^2 + 15$ **b** $x^2 - 15$ **c** $x^2 - 8x + 15$ **d** $x^2 + 8x - 15$

5 Équations et inéquations

★★ 15 min Corrigé p. 344

1 Une solution de l'inéquation $3x - 5 > 2x$ est :

a $x = -1$ **b** $x = 4$ **c** $x = 5$ **d** $x = 7$

2 L'ensemble des solutions de l'équation $2x - 1 = 2x + 1$ est :

a $\mathbb{R}$ **b** $\{0\}$ **c** $\varnothing$ **d** $\{-2\}$

3 L'ensemble des solutions de l'inéquation $-7x \leqslant 28$ est :

a $]-\infty; -4]$ **b** $[-4; +\infty[$ **c** $]-\infty; -4[$ **d** $]-4; +\infty[$

4 L'ensemble des solutions de l'équation $(x+2)(x-3) = 0$ est :

a $[-2; 3]$ **b** $\{-2; 3\}$ **c** $\{-3; 2\}$ **d** $[-3; 2]$

5 L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-5)(1-x) \geqslant 0$ est :

a $]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$ **b** $[1; 5]$
c $[-5; 1]$ **d** $\{1; 5\}$

6 L'unique solution de l'équation $\frac{3}{x} = 7$ est :

a $x = \frac{1}{21}$ **b** $x = 21$ **c** $x = \frac{3}{7}$ **d** $x = \frac{7}{3}$

7 L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 16$ est :

a $\{4\}$ **b** $\{8\}$ **c** $\{-8; 8\}$ **d** $\{-4; 4\}$

8 L'ensemble des solutions réelles de l'équation $x^2 + 1 = 0$ est :

a $\left\{\sqrt{-1}\right\}$ **b** $\{-1\}$ **c** $\varnothing$ **d** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

9 L'ensemble des solutions de l'inéquation $6x + 7 < 1$ est :

a $]-\infty; -1[$ **b** $]-1; +\infty[$ **c** $]-\infty; -1]$ **d** $[-1; +\infty[$

10 L'ensemble des solutions de l'équation $5x - 2(3x-4) = 8 - x$ est :

a $\varnothing$ **b** $\{0\}$ **c** $\{1\}$ **d** $\mathbb{R}$

11 L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-1)^2 \leqslant 0$ est :

a $\varnothing$ **b** $]-\infty; 1]$ **c** $\{1\}$ **d** $\mathbb{R}$

SUJET

6 Fonctions

★ 15 min Corrigé p. 345

1 Identifier la proposition donnant l'image de 3 par la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (x-6)(1-x)$.

[a] -6 [b] 2 [c] 5 [d] 6

2 Identifier la proposition donnant l'image de -5 par la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 7x + 1$.

[a] 26 [b] 11 [c] 1 [d] 61

3 Identifier la proposition donnant un antécédent de 6 par la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 2x - x^2 + 5$.

[a] 1 [b] 5 [c] -19 [d] 0

4 Identifier la proposition donnant les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (x-1)^2$.

[a] $(0; -1)$ [b] $(1; 2)$ [c] $(2; 3)$ [d] $(4; 9)$

5 Identifier la proposition où l'expression $f(x)$ correspond à celle d'une fonction linéaire.

[a] $f(x) = 3$ [b] $f(x) = x+3$ [c] $f(x) = x^3$ [d] $f(x) = 3x$.

6 Identifier la proposition où l'expression $f(x)$ correspond à celle d'une fonction linéaire.

[a] $f(x) = x^2$ [b] $f(x) = \frac{x}{2}$ [c] $f(x) = x+2$ [d] $f(x) = \frac{2}{x}$

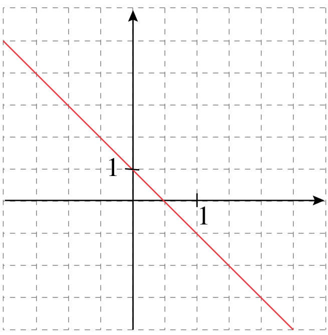
7 Identifier la proposition donnant le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(0; 5)$ et $B(1; 8)$.

[a] -3 [b] 3 [c] 5 [d] $\frac{1}{3}$

8 Identifier la proposition donnant le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(-2; 7)$ et $B(5; 1)$.

[a] $-\frac{6}{7}$ [b] -2 [c] $\frac{8}{3}$ [d] $-\frac{1}{2}$

9 Identifier la proposition donnant le coefficient directeur de la droite représentée ci-dessous.



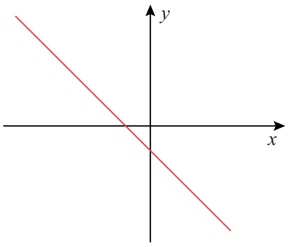
[a] $-\frac{1}{2}$ [b] -2

[c] 3 [d] $\frac{3}{2}$

10 Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 4 appartenant à la droite de coefficient directeur 0,6 passant par le point $A(1; -1)$?

a 0,8 **b** 1,8 **c** 2,4 **d** $-1{,}6$

11 Identifier la proposition pouvant donner l'équation réduite de la droite représentée ci-dessous.



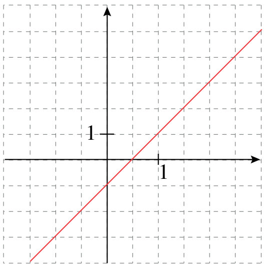
a $y = 2x + 1$

b $y = -2x - 1$

c $y = -2x + 1$

d $y = 2x - 1$

12 Identifier la proposition donnant l'équation réduite de la droite représentée ci-dessous.



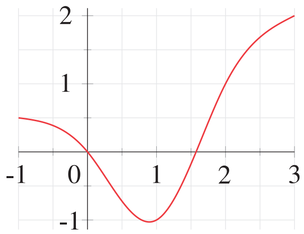
a $y = 2x - 1$

b $y = -1 - 2x$

c $y = x + 2$

d $y = x - 2$

13 Identifier la proposition donnant un antécédent de 1 par la fonction f définie graphiquement par la courbe représentée ci-dessous.



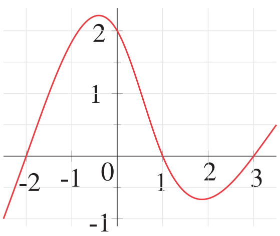
a -1

b 1

c 0

d 2

14 Identifier la proposition donnant l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$, où f est la fonction définie par la représentation graphique ci-dessous.



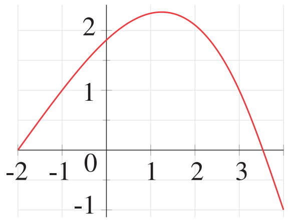
a $[-1; 2]$

b $\{2\}$

c $[-2; 3]$

d $\{-2; 1; 3\}$

15 Identifier la proposition donnant l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) > 1$, où f est la fonction définie par la représentation graphique ci-dessous.



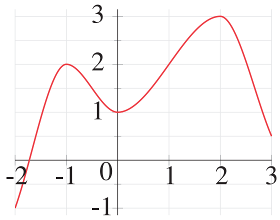
[a] $[-2; -1[\cup]3; 4]$

[b] $]-1; 3[$

[c] $[-1; 3]$

[d] $]1; 4]$

16 Identifier la proposition donnant un intervalle sur lequel la fonction définie graphiquement par la courbe ci-dessous est croissante.



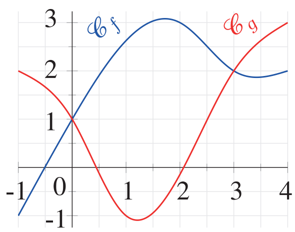
[a] $[2; 3]$

[b] $[-1; 1]$

[c] $[-2; 0]$

[d] $[0; 2]$

17 Identifier la proposition donnant l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$, où f et g sont les fonctions définies respectivement par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentées ci-dessous.



[a] $[-1; 0] \cap [3; 4]$

[b] $]0; 3[$

[c] $[-1; 0] \cup [3; 4]$

[d] $[0; 3]$

7 Probabilités

★ 7 min Corrigé p. 346

1 Identifier la proposition ne pouvant pas correspondre à la probabilité d'un évènement.

[a] 0 [b] $\frac{4}{5}$ [c] $\frac{5}{4}$ [d] 1

2 Identifier la proposition donnant la probabilité d'obtenir une boule rouge en tirant une boule au hasard dans une urne opaque contenant trois boules rouges, quatre boules vertes et une boule bleue, toutes indiscernables au toucher.

[a] $\frac{1}{3}$ [b] $\frac{1}{2}$ [c] $\frac{3}{8}$ [d] $\frac{3}{5}$

3 Identifier la proposition donnant la probabilité de l'évènement contraire à un évènement de probabilité $\frac{3}{5}$.

a $\frac{5}{3}$ **b** $\frac{2}{5}$ **c** $\frac{2}{3}$ **d** $\frac{-3}{5}$

4 Identifier la proposition donnant la probabilité d'obtenir *pile* au quatrième lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée, sachant qu'on a obtenu *face* aux trois premiers lancers.

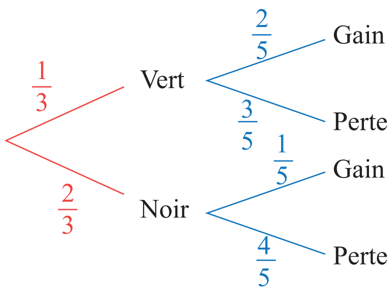
a $\frac{1}{4}$ **b** $\frac{1}{16}$ **c** $\frac{1}{2}$ **d** $\frac{3}{4}$

5 En considérant le tableau croisé d'effectifs ci-dessous, identifier la proposition donnant la probabilité qu'un jeton soit rouge sachant qu'il est rond.

	Rouge	Vert
Rond	1	9
Carré	8	7

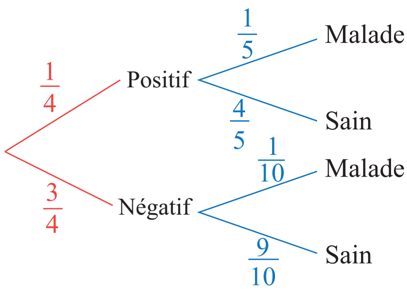
a $\frac{1}{9}$ **b** $\frac{1}{10}$ **c** $\frac{9}{25}$ **d** $\frac{1}{25}$

6 En considérant l'arbre pondéré ci-dessous, identifier la proposition donnant la probabilité que le jeton soit vert sachant que le joueur a gagné.



a $\frac{2}{15}$ **b** $\frac{1}{2}$ **c** $\frac{1}{3}$ **d** $\frac{2}{5}$

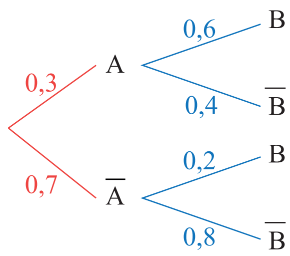
7 En considérant l'arbre pondéré ci-dessous, identifier la proposition donnant la probabilité qu'un individu soit malade et négatif au test.



a $\frac{1}{4}$ **b** $\frac{1}{5}$ **c** $\frac{1}{20}$ **d** $\frac{3}{40}$

SUJET

8 En considérant l'arbre de probabilité ci-dessous, identifier la proposition donnant la probabilité de l'évènement B.



a 0,18 **b** 0,14 **c** 0,32 **d** 0,8

9 Identifier la proposition donnant la valeur de x dans le tableau suivant, qui donne la loi de probabilité de l'expérience aléatoire consistant à faire tourner une roue de loterie partagée en quatre secteurs de couleurs distinctes.

Issue	Rouge	Vert	Bleu	Jaune
Probabilité	0,1	0,4	0,3	x

a 0,75 **b** 0,2 **c** 0,8 **d** 0,25

8 Statistiques

★ 15 min Corrigé p. 346

1 Identifier la proposition correcte concernant les séries statistiques :

A : 3; 5; 7 et B : 1; 5; 24.

a Les séries A et B ont le même moyenne et la même médiane.

b Les séries A et B ont la même médiane mais pas la même moyenne.

c Les séries A et B n'ont ni la même moyenne, ni la même médiane.

d Les séries A et B ont la même moyenne mais pas la même médiane.

2 Identifier la proposition correcte concernant les séries statistiques :

A : 4; 5; 8 et B : 2; 4; 6; 12.

a Les séries A et B ont le même moyenne et la même médiane.

b Les séries A et B ont la même médiane mais pas la même moyenne.

c Les séries A et B n'ont ni la même moyenne, ni la même médiane.

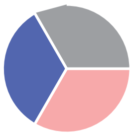
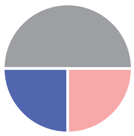
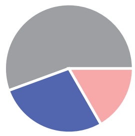
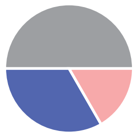
d Les séries A et B ont la même moyenne mais pas la même médiane.

3 Identifier la proposition donnant la valeur de la note x telle que la moyenne pondérée de la série suivante soit égale à 11.

Note	8	13	x
Coefficient	1	2	1

a 9 **b** 10 **c** 12 **d** 11

4 Identifier la proposition pouvant représenter la répartition de 30 élèves dans différents groupes, sachant que le premier groupe compte 15 élèves, que le deuxième en compte 10 et que tous les autres élèves sont dans le troisième groupe.

a  b  c  d 

5 Identifier la proposition donnant la valeur de la note x telle que la moyenne pondérée de la série suivante soit égale à 12.

Note	8	10	x
Coefficient	2	1	2

a 17 b 18 c 12

d Impossible si x doit être inférieur à 20.

6 Identifier la proposition donnant la valeur de la note x telle que la moyenne pondérée de la série suivante soit égale à 13.

Note	11	10	x
Coefficient	1	2	1

a Impossible si x doit être inférieur à 20.

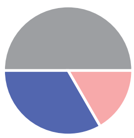
b 13 c 15 d 18

7 Identifier la proposition donnant la valeur du coefficient x tel que la moyenne pondérée de la série suivante soit égale à 13.

Note	10	12	14
Coefficient	1	2	x

a 3 b 5 c 8 d Impossible.

8 Identifier la proposition pouvant correspondre aux effectifs des trois groupes d'élèves associés au diagramme circulaire ci-dessous.



a 8; 8; 8 b 10; 8; 6 c 12; 8; 4 d 6; 12; 6

9 Identifier la proposition donnant la valeur du coefficient x tel que la moyenne pondérée de la série suivante soit égale à 15.

Note	8	13	14
Coefficient	2	1	x

a 2 b 9 c 16 d Impossible.

SUJET

10 Identifier la proposition donnant la valeur du premier quartile Q_1 ainsi que celle du troisième quartile Q_3 de la série statistique suivante.

5; 12; 8; 14; 9; 13; 10; 11.

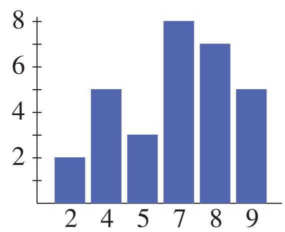
a $Q_1 = 9$ et $Q_3 = 11$ b $Q_1 = 12$ et $Q_3 = 13$
c $Q_1 = 8$ et $Q_3 = 12$ d $Q_1 = 5$ et $Q_3 = 14$

11 Identifier la proposition donnant la valeur du premier quartile Q_1 ainsi que celle du troisième quartile Q_3 de la série statistique suivante.

9; 13; 7; 15; 11; 8; 14; 10; 12; 16

a $Q_1 = 8$ et $Q_3 = 13$ b $Q_1 = 10$ et $Q_3 = 15$
c $Q_1 = 9$ et $Q_3 = 14$ d $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 10$

12 Identifier la proposition donnant l'étendue de la série de notes représentée par le diagramme en barres ci-dessous.



a 2 b 9 c 7 d 6

1 Opérations, fraction, puissances

Énoncé p. 327

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a : $2 \times (-5) - (-3) = -10 + 3 = -7$.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. C'est la définition de l'opposé d'un nombre.

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $4\% = \dfrac{4}{100} = 0{,}04$.

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. C'est la définition d'un inverse.

5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On a : $0{,}003 + 0{,}01 = 0{,}013$.

6 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a : $5 + 6 - 1 = 10$.

7 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $101 \approx 100$ et $99 \approx 100$ donc, on fait 100×100.

8 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $298 \approx 300$, $403 \approx 400$ et $197 \approx 200$, donc on fait $300 + 400 + 200 = 900$.

9 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On fait : $7 - 2 + 3 = 10 - 2 = 8$.

10 Réponse $\boxed{\text{c}}$. C'est à connaître par cœur.

11 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\dfrac{24}{27} = \dfrac{8 \times 3}{9 \times 3} = \dfrac{8}{9}$.

12 Réponse $\boxed{\text{a}}$. On a : $\dfrac{7}{10} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{14 + 3}{20} = \dfrac{17}{20}$.

13 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On a : $\dfrac{16 - 15}{20} \times \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{40}$.

14 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On a : $\dfrac{6}{5} + \dfrac{4}{15} = \dfrac{18 + 4}{15} = \dfrac{22}{15}$.

15 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Le calcul donne $(3 \times 2)^7 = 6^7$.

16 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Cela donne : $7^{15-8+9} = 7^{16}$.

17 Réponse $\boxed{\text{c}}$. L'écriture scientifique est de la forme $a \times 10^n$, avec $0 < a < 10$.

18 Réponse $\boxed{\text{a}}$.

19 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On a : $2{,}31 \times 10^2 \times 10^6$.

20 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a : $\dfrac{8 + 9}{12} = \dfrac{17}{12}$.

21 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a : $\dfrac{6 - 5}{10} = \dfrac{1}{10}$.

22 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Cela donne : $\dfrac{2 \times 3}{5 \times 7} = \dfrac{6}{35}$.

23 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Cela donne : $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{12}$.

24 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a : $7^{9-6} = 7^3$.

25 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Cela donne : $9^{5-7} = 9^{-2}$.

26 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On a en effet $3^{4 \times 5} = 3^{20}$.

27 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Cela donne : $(2 \times 4)^5 = 8^5$.

28 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Voir la définition de l'écriture scientifique.

CORRIGÉ

29 Réponse $\boxed{c}$.

30 Réponse $\boxed{d}$. $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times 2}{3 \times 2}$.

31 Réponse $\boxed{b}$. Cela donne : $\dfrac{8-15}{10} \times \dfrac{3}{4} = -\dfrac{21}{40}$.

2 Proportionnalité

Énoncé p. 329

1 Réponse $\boxed{c}$. $90\text{min} = 60\text{min} + 30\text{min} = 1\text{h}30\text{min} = 1{,}5\text{h}$.

2 Réponse $\boxed{c}$. On fait : $\dfrac{20 \times 12}{8} = \dfrac{5 \times 4 \times 2 \times 6}{4 \times 2} = 5 \times 6 = 30$.

3 Réponse $\boxed{b}$. On fait : $\dfrac{700\text{mL} \times 900\text{g}}{1000\text{mL}} = 630\text{g}$.

4 Réponse $\boxed{b}$. Il y a 5×12 minutes dans une heure, donc la vitesse est $5 \times 7 = 35$ km.

5 Réponse $\boxed{c}$. On fait : $\dfrac{24 \times 100}{6} = 400$.

6 Réponse $\boxed{b}$. On calcule : $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{20}{60} + \dfrac{15}{60} + \dfrac{12}{60} = \dfrac{47}{60}$ donc la proportion de jetons jaunes est $1 - \dfrac{47}{60} = \dfrac{13}{60}$. $\dfrac{12}{60}$ est donc la proportion la plus faible, soit 20%.

7 Réponse $\boxed{a}$. On calcule : $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{10} = 30\%$.

8 Réponse $\boxed{b}$. $\dfrac{65}{100} \times 740 = \dfrac{65 \times 740}{100}$.

9 Réponse $\boxed{a}$. 1 m^2 = 10 000 cm^2 donc il faut diviser 2 500 par 10 000.

10 Réponse $\boxed{d}$. 1 000 cm^3 = 1 L et $0{,}45 \times 1\,000 = 450$.

11 Réponse $\boxed{c}$. 90 km/h = 90 000 m/3 600 s = 25 m/s.

12 Réponse $\boxed{d}$. En effet, si le premier lot comporte 100 jetons et le second, 200, il y a en tout $30 + 80 = 110$ jetons, soit $\dfrac{110}{300} \times 100 \approx 33{,}7\%$ de jetons noirs. Mais si les deux lots ont 100 jetons, il y a en tout 70 jetons, soit $\dfrac{70}{200} \times 100 = 35\%$ de jetons noirs. Tout dépend donc du nombre de jetons dans chacun des lots.

13 Réponse $\boxed{c}$. $3\text{h}24\text{min} = 3 \times 60\text{min} + 24\text{min} = \dfrac{204}{60}\text{h} = 3{,}4\text{h}$.

14 Réponse $\boxed{b}$. On calcule : $\dfrac{3 \times 13}{5} = 7{,}8$.

15 Réponse $\boxed{c}$. Dans une heure, il y a 5×12 minutes, donc on calcule $37 \times 5 = 185$.

16 Réponse $\boxed{b}$. On calcule : $\dfrac{39 \times 100}{15} = 260$.

17 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On calcule : $\frac{3}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{33}{40}$ donc il y a $\frac{7}{40}$ de billes jaunes, ce qui est inférieur aux autres proportions.

18 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}\times 100\%=4\times 4\%=16\%$.

19 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $1\text{ m}^2=10\,000\text{ cm}^2$. On multiplie donc $1{,}8\text{ m}^2$ par 10 000.

20 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On doit multiplier 2,1 L par 1 000.

21 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Si on suppose que les deux lots ont 100 billes, il y a en tout 90 billes noires, soit 90%.

22 Réponse $\boxed{\text{b}}$. 72 km/h = 72 000m/3 600s = 20m/s.

23 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On calcule : $\frac{1\,400\times 300}{1000}=420$.

3 Évolutions et variations

Énoncé p. 331

1 Réponse $\boxed{\text{d}}$. 38% de 570 se calcule en faisant : $\frac{38}{100}\times 570=\frac{38\times 570}{100}$.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On fait : $1{,}15\times 1{,}4=1{,}61$, qui correspond à une hausse de 61%.

3 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $1-\frac{35}{100}=1-0{,}35=0{,}65$.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On peut dire que 30% de 150 correspond à 45 €, donc on fait : $150-45=105$.

5 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On fait : $300\div 1{,}2=300\times\frac{10}{12}=\frac{12\times 250}{12}=250$.

6 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $\frac{200-250}{250}\times 100=\frac{-50}{5\times 50}\times 100=-0{,}2\times 100=-20\%$.

7 Réponse $\boxed{\text{a}}$. C'est du cours.

8 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Une baisse de 20% revient à multiplier par 0,8. On fait alors $\frac{1}{0{,}8}=\frac{10}{8}=1{,}25$, qui correspond à une hausse de 25%.

9 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Le coefficient multiplicateur global est $1{,}1\times 0{,}9=0{,}99<1$, donc il s'agit d'une baisse globale.

10 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Doubler une valeur revient à la multiplier par 2, soit $1+\frac{100}{100}$.

4 Calcul littéral

Énoncé p. 332

1 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On utilise l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Cela donne ici :

$$(3x+5)^2=(3x)^2+2\times 5\times 3x+5^2=9x^2+30x+25.$$

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On utilise l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

CORRIGÉ

3 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

4 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On remplace x par -3 dans l'expression :

$$(-3)^2 + 4 \times (-3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 14 - 12 = 2.$$

5 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $7x - 4(3x - 5) = 7x - 12x + 20 = -5x + 20$.

6 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Le facteur commun est ici $(x - 1)$.

7 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On utilise $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = (5x + 3)$ et $b = (x - 4)$.

$$(5x + 3 - x + 4)(5x + 3 + x - 4) = (4x + 7)(6x - 1).$$

8 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On remplace a par 5 et b par -2 :

$$a^2 - ab + b^2 = 5^2 - 5 \times (-2) + (-2)^2 = 25 + 10 + 4 = 39.$$

9 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1 \times b}{ab} - \dfrac{1 \times a}{ab} = \dfrac{b - a}{ab}$.

10 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On développe :

$$(x - 3)(x - 5) = x^2 - 5x - 3x + 15 = x^2 - 8x + 15.$$

5 Équations et inéquations

Énoncé p. 333

1 Réponse $\boxed{\text{d}}$. L'inéquation donne directement : $3x - 2x > 5$, d'où $x > 5$. Donc toutes valeurs *inférieures ou égales* à 5 ne conviennent pas. Seule 7 est supérieur à 5.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $2x - 1 = 2x + 1 \iff -1 = 1$, ce qui est impossible, donc l'équation n'a pas de solution.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On divise par -7, qui est négatif, donc on change le sens de l'inégalité.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On utilise le théorème du produit nul :

$$(x+2)(x-3) = 0 \iff x+2 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

5 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On peut résoudre l'inéquation à l'aide d'un tableau de signes, comme en Seconde, mais on peut aussi utiliser les résultats vus en Première : les racines du polynôme $(x - 5)(1 - x)$ sont 5 et 1, et en développant, on trouve $-x^2 + 6x - 5$. Donc les branches de la parabole sont vers le bas, et le polynôme est positif entre les racines.

6 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\dfrac{3}{x} = 7 \iff \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{7} \iff x = \dfrac{3}{7}$.

7 Réponse $\boxed{\text{d}}$. D'après le cours, $x^2 = a \iff x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$, et $\sqrt{16} = 4$.

8 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $x^2 > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$; il ne peut pas être nul.

9 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $6x + 7 < 1 \iff 6x < -6 \iff x < -1$.

10 Réponse $\boxed{d}$. On a :

$$5x - 2(3x - 4) = 8 - x \iff 5x - 6x + 8 = 8 - x \iff 0 = 0,$$

ce qui est toujours vrai, donc tous les réels sont solutions.

11 Réponse $\boxed{c}$. Un carré est toujours positif *ou nul* donc :

$$(x - 1)^2 \leqslant 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

6 Fonctions

Énoncé p. 334

1 Réponse $\boxed{d}$. On remplace x par 3.

$$f(3) = (3 - 6)(1 - 3) = -3 \times (-2) = 6.$$

2 Réponse $\boxed{d}$. $f(-5) = (-5)^2 - 7 \times (-5) + 1 = 25 + 35 + 1 = 61.$

3 Réponse $\boxed{a}$. On résout l'équation $f(x) = 6$:

$$-x^2+2x+5 = 6 \iff x^2-2x+1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

4 Réponse $\boxed{d}$. Il faut ici calculer l'image des abscisses données et vérifier si elles sont égales ou non à l'ordonnée associée.

$f(0) = 1 \neq -1$ donc le point de coordonnées $(0; -1)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f. On fait de même pour les autres propositions.

On vérifie que $f(4) = 3^2 = 9$.

5 Réponse $\boxed{d}$. Une fonction linéaire est de la forme $f(x) = ax$.

6 Réponse $\boxed{b}$. $f(x) = \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}x.$

7 Réponse $\boxed{b}$. Le coefficient directeur se calcule ainsi :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 5}{1 - 0} = 3.$$

8 Réponse $\boxed{a}$. $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1 - 7}{5 - (-2)} = \dfrac{-6}{7}.$

9 Réponse $\boxed{b}$. Il faut faire attention aux unités reportées sur les axes. Les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(1; -1)$ appartiennent à la droite, ce qui donne un coefficient directeur égal à -2.

10 Réponse $\boxed{a}$. Le coefficient directeur est 0,6 donc, pour passer de $x = 1$ à $x = 4$, on doit ajouter $3 \times 0{,}6 = 1{,}8$ en ordonnée, ce qui donne $-1 + 1{,}8 = 0{,}8$.

11 Réponse $\boxed{b}$. Le coefficient directeur de la droite est négatif (donc on exclut les propositions $\boxed{a}$ et $\boxed{d}$). De plus, l'ordonnée à l'origine est négative, ce qui exclut la proposition $\boxed{c}$.

12 Réponse $\boxed{a}$. Les points de coordonnées $(0; -1)$ et $(1; 1)$ sont sur la droite, donc le coefficient directeur est égal à 2 et l'ordonnée à l'origine est -1.

CORRIGÉ

13 Réponse $\boxed{d}$. En effet, le point de la courbe qui a pour ordonnée 1 a pour abscisse 2.

14 Réponse $\boxed{d}$. En effet, la courbe coupe l'axe des abscisses en 3 points d'abscisses respectives -2, 1 et 3.

15 Réponse $\boxed{b}$. En effet, tous les points de la courbe dont les ordonnées sont dans $]-1;3[$ ont une ordonnée strictement supérieure à 1.

16 Réponse $\boxed{d}$. Sur $[0;2]$, la courbe « monte » donc la fonction est croissante.

17 Réponse $\boxed{c}$. En effet, dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ signifie que le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ a une abscisse comprise dans $[-1;0]$ *ou* dans $[3;4]$.

7 Probabilités

Énoncé p. 336

1 Réponse $\boxed{c}$. Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 (inclus). Or, $\frac{5}{4} > 1$.

2 Réponse $\boxed{c}$. Il y a $3+4+1=8$ boules, dont 3 rouges.

3 Réponse $\boxed{b}$. On calcule : $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

4 Réponse $\boxed{c}$. Au « Pile ou Face » avec une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir « Pile » est toujours égale à $\frac{1}{2}$, quels que soient les résultats des lancers précédents.

5 Réponse $\boxed{b}$. « Sachant que le jeton est rond » nous impose que l'univers pris en compte a pour cardinal $1+9=10$. Il y a un jeton rouge sur les 10, d'où une probabilité de $\frac{1}{10}$.

6 Réponse $\boxed{b}$. $P(G)=\frac{4}{15}$ (probabilités totales) et $P_G(V)=\frac{2/15}{4/15}=\frac{1}{2}$.

7 Réponse $\boxed{d}$. $P(N\cap M)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{40}$.

8 Réponse $\boxed{c}$. $P(B)=0{,}3\times0{,}6+0{,}7+0{,}2=0{,}18+0{,}14=0{,}32$.

9 Réponse $\boxed{b}$. La somme des probabilités doit être égale à 1, donc :

$$0{,}1+0{,}4+0{,}3+x=1 \iff x=1-0{,}8=0{,}2.$$

8 Statistiques

Énoncé p. 338

1 Réponse $\boxed{b}$. La moyenne de A est $(3+5+7)\div 3=5$ et celle de B est $(1+5+24)\div 3=10$.
La médiane de A est 5, et celle de B est 5 aussi.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. La moyenne de A est $\dfrac{17}{3}$ et celle de B est 6. La médiane de A est 5, et celle de B est $\dfrac{4+6}{2} = 5$.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. La moyenne est : $\dfrac{8+26+x}{4} = 11$. On résout l'équation : $34 + x = 44$, soit $x = 10$.

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. 15 élèves représentent la moitié de 30. Donc les propositions $\boxed{\text{a}}$ et $\boxed{\text{c}}$ sont à exclure (la partie grise ne représentant pas la moitié). La proposition $\boxed{\text{b}}$ est aussi à exclure car les 30 élèves sont répartis suivant la répartition 15 / 10 / 5.

5 Réponse $\boxed{\text{a}}$. La moyenne est : $\dfrac{16+10+2x}{5} = 12$.
On résout l'équation : $26 + 2x = 60$, soit $x = 17$.

6 Réponse $\boxed{\text{a}}$. La moyenne est : $\dfrac{11+20+x}{4} = 13$. On résout l'équation : $31 + x = 52$, soit $x = 52 - 31 = 21$, donc impossible (car $x \leqslant 20$).

7 Réponse $\boxed{\text{b}}$. La moyenne est : $\dfrac{10+24+14x}{3+x} = 13$.
On résout l'équation : $34 + 14x = 13(3+x)$, soit $x = 5$.

8 Réponse $\boxed{\text{b}}$. La partie grise représente la moitié de l'effectif total alors que les autres ne sont pas identiques (elle représentent à peut près une répartition 1/3 - 2/3). Les propositions $\boxed{\text{a}}$ et $\boxed{\text{d}}$ sont donc à exclure. Seule la réponse $\boxed{\text{b}}$ propose une répartition 1/3 - 2/3 - 1/2.

9 Réponse $\boxed{\text{d}}$. La moyenne est : $\dfrac{16+13+14x}{3+x} = 15$. On résout l'équation : $29+14x = 15(3+x)$, soit $x = 29-45 < 0$, ce qui est impossible.

10 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On ordonne la série : 5; 8|9; 10|11; 12|13; 14. $Q_1 = 8$ et $Q_3 = 12$.

11 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On ordonne la série : 7; 8; $\boxed{9}$; 10; 11; 12; 13; $\boxed{14}$; 15; 16.

12 Réponse $\boxed{\text{d}}$. L'étendue est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite, soit ici : $8 - 2 = 6$.

Chapitre 12

Bac blanc

La durée de l'épreuve est de 2 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'épreuve est constituée de deux parties : une partie « Automatismes » sous forme d'un QCM sur 6 points, et une partie constituée de 3 exercices sur 14 points.

Première partie : automatismes

1 QCM – 6 points

★ 10 min Corrigé p. 352

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

1 L'expression $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{1}{4}$ est égale à :

a $-\frac{3}{12}$ b $\frac{3}{7}$ c $\frac{1}{4}$ d $\frac{1}{2}$

2 Un prix augmente de 25 %, puis baisse de 20 %. Globalement, le prix a :

a augmenté de 5 % b stagné
c baissé de 5 % d augmenté de 45 %

3 Pour $a \neq 0$, l'expression $\frac{(a^3)^2}{a^{-4}}$ se simplifie en :

a a^2 b a^{10} c a^{-2} d a^{24}

4 La forme développée de $(3x-2)^2$ est :

a $3x^2 - 12x + 4$ b $9x^2 - 4$
c $3x^2 - 4$ d $9x^2 - 12x + 4$

5 L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x - 1 > 5x + 3$ est :

a $]-\infty\,;\,-2[$ b $]-2\,;\,+\infty[$ c $]-\infty\,;\,2[$ d $]2\,;\,+\infty[$

6 La solution de l'équation $2x - 5 = 7x + 10$ est :

a $x = 3$ b $x = -3$ c $x = 1$ d $x = -1$

7 La droite passant par $A(0\,;\,3)$ et $B(2\,;\,7)$ a pour coefficient directeur :

a 2 b -2 c 0,5 d 4

8 15 % de 60 est égal à :

a 4 b 12 c 9 d 45

SUJET

9 Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$, alors l'image de -2 est :

a 0 b 12 c 4 d -8

10 Une vitesse de 72 km/h est égale à :

a 20 m/s b 7,2 m/s c 25,9 m/s d 120 m/s

11 Un article coûte 80 €. Son prix passe à 100 €. Le taux d'évolution est de :

a 20% b 25% c 80% d -20%

12 La droite passant par les points $A(1\ ;\ 3)$ et $B(3\ ;\ 7)$ a pour ordonnée à l'origine :

a 2 b 1 c 3 d -1

Deuxième partie

2 Exercice 1 – 4,5 points

★★ 30 min

Corrigé p. 353

Dans une population, 80 % des individus sont vaccinés contre une maladie. Parmi eux, 5 % tombent malades. Parmi ceux qui ne sont pas vaccinés, 30 % tombent malades. On choisit un individu au hasard et on note V l'évènement « l'individu est vacciné » et M l'évènement « l'individu est malade ».

1 Construire un arbre pondéré représentant la situation.

2 Calculer la probabilité que l'individu soit vacciné et malade.

3 Montrer que $P(M) = 0{,}1$.

4 Sachant que l'individu est malade, quelle est la probabilité qu'il soit vacciné ? (Donner le résultat sous forme de fraction irréductible).

3 Exercice 2 – 5 points

★★ 40 min

Corrigé p. 353

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, on considère les points $A(1\ ;\ 0)$, $B(3\ ;\ 0)$ et $C(2\ ;\ -1)$.

1 (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

(b) Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

2 (a) Justifier que la fonction du second degré f dont la courbe passe par les points A, B et C est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

(b) Justifier que $y = 2x - 6$ est l'équation réduite de la tangente T à la courbe représentative de f au point B.

(c) Montrer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation cartésienne $4x - 2y + 5 = 0$.

4 Exercice 3 – 4,5 points

★★ 40 min Corrigé p. 354

Une population de bactéries compte 1 000 individus à l'instant $n = 0$. On observe que chaque heure, la population augmente de 20 %, mais que 100 bactéries meurent à cause du milieu. On note u_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Déterminer la valeur de la population initiale u_0 pour laquelle l'effectif resterait constant chaque heure.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 500$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
4. Conjecturer le comportement à longs termes de cette population de bactéries à l'aide de la suite (u_n).

CORRIGÉ

1 QCM – 6 points

Énoncé p. 349

1 Réponse $\boxed{\text{c}}$. En effet,

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{1}{4} &= \frac{2}{3}-\frac{5}{12}\\ &= \frac{8-5}{12}\\ &= \frac{3}{12}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, augmenter de 25 % puis baisser de 20 % revient à multiplier par $1{,}25 \times 0{,}8 = 1$.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a :

$$\frac{(a^3)^2}{a^{-4}} = \frac{a^6}{a^{-4}} = a^{6-(-4)} = a^{10}.$$

4 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On a :

$$(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2\times 3x\times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4.$$

5 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet,

$$\begin{aligned}3x-1 > 5x+3 &\iff -2x > 4\\ &\iff x < \frac{4}{-2}\\ &\iff x < -2.\end{aligned}$$

6 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a :

$$\begin{aligned}2x-5 = 7x+10 &\iff -5x = 15\\ &\iff x = \frac{15}{-5}\\ &\iff x = -3.\end{aligned}$$

7 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Le coefficient directeur est calculé ainsi :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{2-0} = \frac{4}{2} = 2.$$

8 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On a :

$$15\,\% \times 60 = 0{,}15 \times 60 = 9.$$

9 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet,

$$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12.$$

10 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, on a :

$$72 \text{ km/h} = \frac{72}{3{,}6} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}.$$

11 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet,

$$t = \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{100 - 80}{80} = \frac{20}{80} = 0{,}25 = 25\,\%.$$

12 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, le coefficient directeur est :

$$m = \frac{7-3}{3-1} = 2,$$

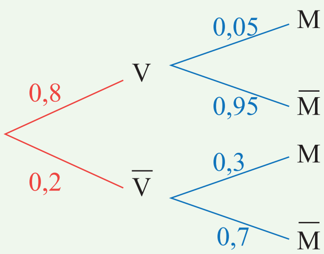
et l'ordonnée à l'origine p vérifie :

$$y_A = mx_A + p \iff 3 = 2 \times 1 + p \iff p = 1.$$

2 Exercice 1 – 4,5 points

Énoncé p. 350

1 L'arbre pondéré est le suivant :



2 $P(V \cap M) = 0{,}8 \times 0{,}05 = 0{,}04.$

3
$$\begin{aligned} P(M) &= P(V \cap M) + P(\bar{V} \cap M) \\ &= 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}3 \\ &= 0{,}04 + 0{,}06 \\ &= 0{,}1. \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} P_M(V) &= \frac{P(V \cap M)}{P(M)} \quad \text{(d'après le cours)} \\ &= \frac{0{,}04}{0{,}1} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

3 Exercice 2 – 5 points

Énoncé p. 350

1 **(a)** $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -1 + 1 = 0.$$

ABC est alors rectangle en C.

CORRIGÉ

(b) Le centre du cercle est $I(2\ ;\ 0)$, et son rayon est $R = 1$.
D'après la formule du cours, une équation cartésienne du cercle est donc :
$$(x-2)^2 + y^2 = 1.$$

2 **(a)** Les points $A(1\ ;\ 0)$ et $B(3\ ;\ 0)$ appartiennent à la courbe, donc 1 et 3 sont les racines de f.
On en déduit que f est de la forme $f(x) = a(x-1)(x-3)$.
De plus, $C(2\ ;\ -1)$ appartient à la courbe, donc :
$$\begin{aligned} f(2) = -1 &\iff a(2-1)(2-3) = -1 \\ &\iff -a = -1 \\ &\iff a = 1. \end{aligned}$$
D'où :
$$f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3.$$

(b) $f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(3) = 2$. L'équation de la tangente est donnée par la formule :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a),$$
ce qui donne ici :
$$T : y = 2(x-3) + 0 \iff T : y = 2x - 6.$$

(c) $$\begin{aligned} 4x - 2y + 5 = 0 &\iff 2y = 4x + 5 \\ &\iff y = 2x + 2{,}5. \end{aligned}$$
Le coefficient directeur de T est donc le même que celui de la droite d'équation $4x - 2y + 5 = 0$ (ici, ils sont égaux à 2), donc les droites sont parallèles.

4 Exercice 3 – 4,5 points

Énoncé p. 351

1 Une augmentation de 20% se traduit par la multiplication de u_n par $1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2$.
Ensuite, on diminue de 100 ne nombre de bactéries, ce qui donne au final l'égalité :
$$u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100.$$

2 Si l'effectif restait constant chaque heure, cela signifierait que $u_1 = u_0$.
Or, $u_1 = 1{,}2u_0 - 100$, donc :
$$\begin{aligned} u_0 = 1{,}2u_0 - 100 &\iff u_0 - 1{,}2u_0 = -100 \\ &\iff -0{,}2u_0 = -100 \\ &\iff u_0 = \frac{-100}{-0{,}2} \\ &\iff u_0 = 500. \end{aligned}$$

3 **(a)** Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ &= (1{,}2u_n - 100) - 500 \\ &= 1{,}2u_n - 600 \\ &= 1{,}2\left(u_n - \frac{600}{1{,}2}\right) \\ &= 1{,}2(u_n - 500) \\ &= 1{,}2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = 500.$$

(b) D'après le cours,

$$v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1{,}2^n$$

car (v_n) est une suite géométrique.

Or,

$$v_n = u_n - 500$$

donc :

$$u_n = v_n + 500$$

$$\text{soit } u_n = 500 \times 1{,}2^n + 500.$$

4 Plus n grandit, plus $1{,}2^n$ devient grand (car $1{,}2 > 1$).

On peut alors conjecturer que le terme u_n grandit de plus en plus sans limite (on peut dire que « u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ »).

Or, u_n représente le nombre de bactéries au bout de n heures.

On peut alors conjecturer que ce nombre augmente sans arrêt d'heure en heure à l'infini.

Annexe A

Memento Python

Saisies	
`a = input("Entrez une valeur")`	a est une chaine de caractères
`n = int(input("Valeur:"))`	n est un nombre *entier*
`n = float(input("Valeur:"))`	n est un nombre *réel*
Opérations mathématiques	
`a+b , a-b`	Somme/différence de deux nombres
`a*b`	Produit de deux nombres
`a/b`	Quotient de deux nombres
`a//b`	Division euclidienne de a par b
`a**n`	Résultat de a^n
`round(a,n)`	Arrondi de a avec n décimales
Nombres aléatoires (`from random import *`)	
`random()`	Renvoie un nombre aléatoire entre 0 (inclus) et 1 (exclus)
`randint(a,b)`	Renvoie un nombre entier compris entre a et b (inclus)
Fonctions mathématiques (`from math import *`)	
`log(x)`	Renvoie le logarithme népérien de x
`exp(x)`	Renvoie la valeur e^x
`sqrt(x)`	Renvoie la valeur de $\sqrt{x}$
`cos(x)`	Renvoie la valeur de $\cos(x)$
`sin(x)`	Renvoie la valeur de $\sin(x)$
`pi`	Nombre π
Listes	
`L = [a,b]`	Liste contenant les variables `a` et `b`
`L[i]`	Élément à la position $i+1$ dans `L`. `L[0]` est le 1er élément de la liste.
`L.append(c)`	Ajoute la variable `c` à la liste `L`
Fonctions Python	

`def nomFonction(variables):`
`    ...`
 	
`    return ...`
	Mot clé : `def` suivi du nom de la fonction suivi de deux parenthèses. Entre parenthèses : nom des variables (facultatif) `return` renvoie la valeur d'une ou plusieurs variables.

Tests	

`if <condition 1>:`
`    <instruction 1>`
`elif <condition 2>:`
`    <instruction 2>`
`else:`
`    <instruction 3>`
	Si `<condition 1>` est vraie, `<instruction 1>` est exécutée, sinon : si `<condition 2>` est vraie, `<instruction 2>` est exécutée, sinon `<instruction 3>` est exécutée.

Boucles	
`range(n)`	Parcourt les entiers de 0 à $n-1$ (inclus)
`range(a,b+1)`	Parcourt les entiers de a à b (inclus)
`for i in range(n):` `    <instruction>`	La variable `i` prend les valeurs de 0 à $n-1$ et pour chaque valeur de `i`, `<instruction>` est exécutée.
`while <condition>:` `    <instruction>`	`<instruction>` est exécutée tant que `<condition>` est vraie.
Calculs des premiers termes d'une suite (exemples)	

`def termes(n):`
`    p = 1`
`    L = [p]`
`    for k in range(1,n+1):`
`        p = 0.2*p+0.7`
`        L.append(p)`
`    return L`
	Cette fonction renvoie la liste des n premiers termes de la suite définie par : $\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7 \end{cases}$
	La boucle permet de calculer p_1, p_2, ..., p_n et de les mettre dans la liste `L`.

`U=[3+2*n for n in range(10)]`	Liste créée *par compréhension* contenant les 10 premiers termes de la suite définie par $u_n = 3 + 2n$.

Annexe B

Liste des vidéos