

Probabilités

$\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ est l'univers constitué de n éventualités, A et B sont deux événements.

• Probabilité d'un événement

$$p(\Omega) = 1 \qquad p(\emptyset) = 0 \qquad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ et } B \text{ incompatibles} \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

• Loi de probabilité

À chaque éventualité e_i , on associe une probabilité p_i .

Éventualités	e_1	e_2	\dots	e_n
Probabilités	p_1	p_2	\dots	p_n

On doit avoir : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

S'il y a équiprobabilité : $p_i = \frac{1}{n}$.

• Variable aléatoire

$X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ est une variable aléatoire. On note $p_i = p(X = x_i)$.

Espérance : $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$

Variance : $V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$
 $= E(X^2) - [E(X)]^2$ (formule de König-Huygens)

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Écritures avec le symbole « sigma » :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad ; \quad V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2$$

Propriétés : pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $E(aX + b) = aE(X) + b$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Jeu équitable : $E(G) = 0$, où G est la variable aléatoire représentant les gains possibles du jeu.

• Probabilités conditionnelles

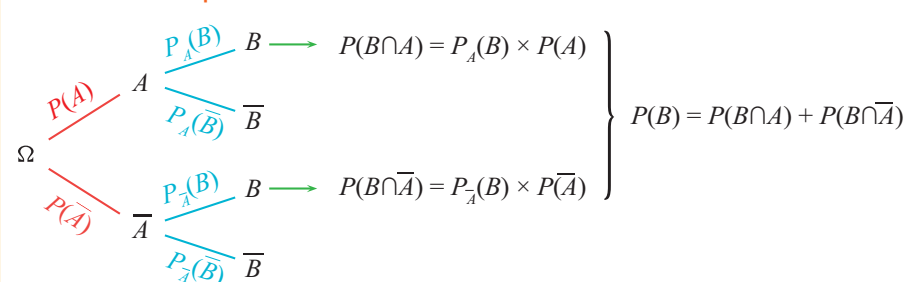
Probabilité de B sachant A : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$

$$\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

• Formule des probabilités totales



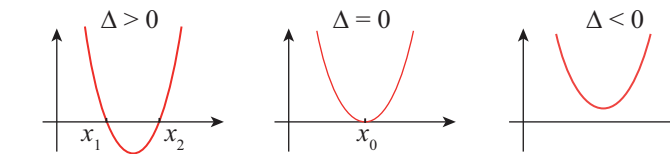
Le second degré

$f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.

• Types de paraboles (pour $a > 0$)



• Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	Pas de solution

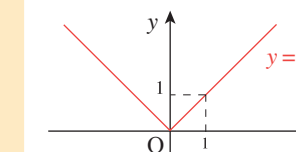
• Factorisation de $(ax^2 + bx + c)$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	Ne se factorise pas

• Signe de $f(x)$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																						
<table border="1"> <tr> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>signe de a</td> <td>0</td> <td>signe de $(-a)$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>signe de a</td> <td></td> </tr> </table>	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0			signe de a		<table border="1"> <tr> <td>$-\infty$</td> <td>x_0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>signe de a</td> <td>0</td> <td>signe de a</td> </tr> </table>	$-\infty$	x_0	$+\infty$	signe de a	0	signe de a	<table border="1"> <tr> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td colspan="2">signe de a</td> </tr> </table>	$-\infty$	$+\infty$	signe de a	
$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																					
signe de a	0	signe de $(-a)$	0																					
		signe de a																						
$-\infty$	x_0	$+\infty$																						
signe de a	0	signe de a																						
$-\infty$	$+\infty$																							
signe de a																								

La fonction valeur absolue

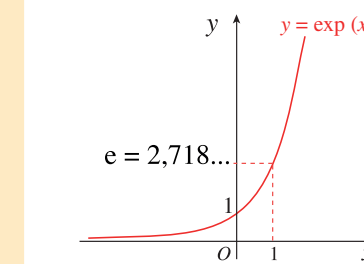


$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{si } x < 0$$

$x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

La fonction exponentielle



$x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

$e^0 = 1$; $e^1 = e (\approx 2,718)$; $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:	
$e^{x+y} = e^x \times e^y$	$e^{nx} = (e^x)^n$
$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$(e^x)' = e^x$; $(e^{kx})' = ke^{kx}$; $x > y \Leftrightarrow e^x > e^y$; $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$

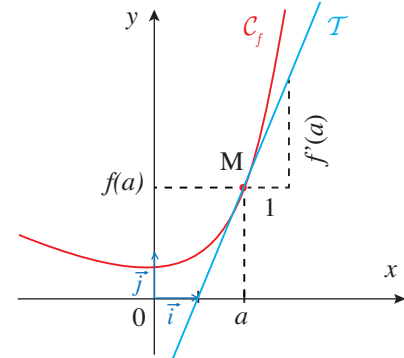
Dérivation

● Nombre dérivé

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

f est dérivable en $a \iff \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers $\lambda \in \mathbb{R}$ quand h tend vers 0.

$\lambda = f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a .



● Équation de la tangente

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C}_f au point $M(a; f(a))$.

Équation de \mathcal{T} : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

● Dérivées usuelles

$f(x)$	k réel	x	x^2	$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x}$	\sqrt{x}
$f'(x)$	0	1	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Domaine de dérivabilité	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$]0; +\infty[$

● Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle, et $k \in \mathbb{R}$.

Fonction	ku	$u + v$	uv	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	$f(ax + b)$
Fonction dérivée	ku'	$u' + v'$	$u'v + uv'$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$a \times f'(ax + b)$

● Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Pour tout $x \in I$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$
Sens de variation de f	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I	f est constante sur I

● Extremum local

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et f une fonction dérivable sur $]a; b[$.

f admet un extremum local en $x_0 \in]a; b[\iff \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(x) \text{ change de signe en } x_0 \end{cases}$

Suites

● Définition

Une suite est une fonction dont la variable est entière.

Notations possibles d'une suite : $(u(n))$ ou (u_n) .

● Modes de génération

Mode	Notation	Exemple
Explicite	$u_n = f(n)$	$u_n = n^2$, avec $f(x) = x^2$
Relation de récurrence	$u_{n+1} = f(u_n)$	$u_{n+1} = u_n^2$, avec $f(x) = x^2$

● Sens de variation d'une suite

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite est croissante.

$u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite est décroissante.

Si la suite est définie de façon explicite sur \mathbb{N} par $u_n = f(n)$, où f est une fonction monotone sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) a le même sens de variation que f .

● Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_p + (n - p)r, \forall p \in \mathbb{N}$$

$r > 0$	$r < 0$	$r = 0$
la suite est croissante	la suite est décroissante	la suite est constante

Somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des $n + 1$ premiers termes :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

● Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n$

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = u_p \times q^{n-p}, \forall p \in \mathbb{N}$$

Sens de variation lorsque $u_0 > 0$ et $q > 0$:

$q > 1$	$0 < q < 1$	$q = 1$
la suite est croissante	la suite est décroissante	la suite est constante

Somme des puissances positives d'un réel $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Somme des $n + 1$ premiers termes ($q \neq 1$) :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

● Capital C_n placé à taux fixe t %

(C_n) est une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$ et :

$$C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

Trigonométrie

\mathcal{P} est un plan muni du repère orthonormé direct (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) .

● Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit M un point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{OI}; \vec{OM}) = x$.

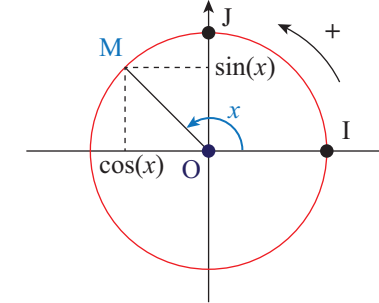
$\cos x$: abscisse de M ;

$\sin x$: ordonnée de M .

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$



1 radian : angle tel que $\widehat{IM} = OI$.

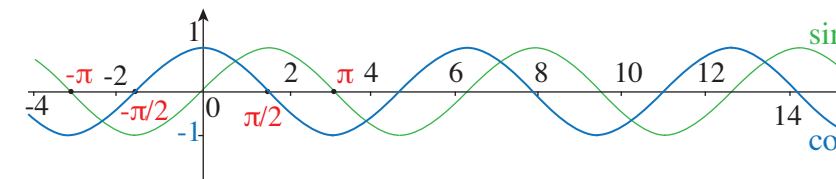
Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Propriétés de symétrie :

α	$-x$	$x + \pi$	$\pi - x$
$\cos \alpha$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\sin \alpha$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$

● Fonctions trigonométriques



Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π -périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire :

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire :

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Dérivées : $(\sin x)' = \cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Produit scalaire

O, A et B sont trois points distincts du plan muni d'un repère orthonormé.

$\vec{u} = \vec{OA}$, avec $\vec{u}(x; y)$; $\vec{v} = \vec{OB}$, avec $\vec{v}(x'; y')$.

● Différentes expressions du produit scalaire

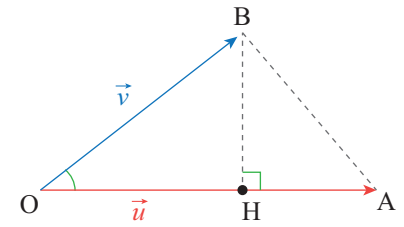
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \cos(\vec{OA}, \vec{OB})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$



Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA) .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ ont le même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ ont des sens opposés} \end{cases}$$

● Propriétés

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

Équation du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Théorème de la médiane :

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

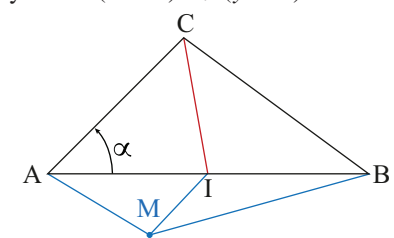
Théorème d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \alpha$$

Pour tout point M du plan,

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ minimal pour $M = G$ (centre de gravité de ABC).



Vecteur normal, vecteur directeur

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{cases} \text{colinéaires} & \iff xy' - x'y = 0 \\ \text{orthogonaux} & \iff xx' + yy' = 0 \end{cases}$$

$\vec{u} \neq \vec{0}$ vecteur directeur de $(AB) \iff \vec{u}$ colinéaire à \vec{AB}

$\vec{u} \neq \vec{0}$ vecteur normal à $(AB) \iff \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$

Soient a et b deux nombres réels non simultanément nuls et \mathcal{D} une droite.

$$\mathcal{D} \text{ a pour équation } ax + by + c = 0 \iff \begin{cases} \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D} \\ \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{D} \end{cases}$$