INTERROS des LYCÉES

Collection dirigée par Éric MAURETTE

Nouvelle épreuve anticipée

NOUVEAU PROGRAMME

maths

tronc commun

1re

Nathalie DEFLORAINE

Nathan

Remerciements

L'autrice et l'équipe de Prepamath Éditions tiennent à remercier Stéphane Pasquet pour l'aide précieuse qu'il a apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Stéphane Pasquet
Coordination éditoriale : François Déliac
Conception couverture : Simon Geliot

Votre avis nous intéresse : `contact@prepamath.fr`

Retrouvez les Interros des Lycées et des informations scientifiques sur :

Facebook : facebook.com/interrosdeslycees
Instagram : @interrosdeslycees

Avant-propos

Cet ouvrage est conforme au nouveau programme du module spécifique de mathématiques intégré à l'enseignement scientifique de la classe de première générale, entré en vigueur à la rentrée 2026. En tant qu'enseignement des mathématiques du tronc commun, il s'adresse aux élèves de première générale n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques.

Depuis la session 2026, tous les élèves de première générale et technologique passent en fin d'année **une épreuve anticipée de mathématiques**, qui s'ajoute aux épreuves anticipées de français. Pour accompagner les élèves dans cette nouvelle échéance, nous proposons un entraînement étalé sur toute l'année, comprenant notamment **deux bacs blancs et un entraînement aux automatismes**, centré principalement sur les notions travaillées dans les classes antérieures.

Dans ce programme, une place importante est accordée à l'utilisation des outils numériques. C'est pourquoi un chapitre est consacré à l'utilisation du tableur, qui permet aux élèves de manipuler des données, de représenter des phénomènes et de s'initier à une démarche expérimentale.

Les notions de variation instantanée et de variation globale ne figurent pas explicitement au programme du tronc commun. Toutefois, deux chapitres leur sont dédiés dans une partie intitulée « **Vers les maths complémentaires** » en page 167. Ces chapitres sont facultatifs, mais *leur étude est vivement recommandée aux élèves qui envisagent de poursuivre en terminale avec l'option « Mathématiques complémentaires »*, dans laquelle ces notions jouent un rôle fondamental.

Chaque chapitre propose :

- un rappel de cours structuré et accessible, mettant en évidence les notions essentielles ;
- des exercices variés permettant une appropriation progressive des concepts ;
- des QCM et exercices d'entraînement favorisant l'acquisition d'automatismes ;
- des énoncés d'exercices *réellement posés* dans les classes de première ; certains sont des applications immédiates du cours, tandis que d'autres nécessitent une réflexion approfondie et constituent un bon entraînement pour les élèves qui souhaiteraient intégrer l'option « *Mathématiques complémentaires* » en terminale.
- des corrigés détaillés permettant à l'élève de comprendre ses erreurs et de progresser.

Enfin, cet ouvrage ne se substitue pas au travail réalisé en classe. Il se veut un support complémentaire, destiné à accompagner l'élève dans ses apprentissages et à favoriser un dialogue constructif avec son professeur.

Nous espérons que ce livre contribuera à redonner confiance aux élèves qui en manquent, à éveiller leur curiosité et à leur faire découvrir le plaisir de pratiquer les mathématiques.

L'autrice

Table des matières

VERS LES MATHS COMPLÉMENTAIRES

Méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous conseillons le livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et E. Maurette, aux Éditions Prepamath.

Faire des « feed-back »

Le « feed-back » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral. Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé.

Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- Idem pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

Pour acquérir de la rapidité, 3 voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.
- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoirs surveillés. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.

Chapitre

1

Analyse de l'information chiffrée

Plan du chapitre

1 Introduction

L'analyse de l'information chiffrée permet de comprendre, interpréter et exploiter des données issues de situations réelles.

2 Proportion et pourcentage

Exercice type 1 **Lycée Louis Vincent, Metz**

1. Dans une entreprise de 450 salariés, il y a 20% de cadres. Combien y a-t-il de cadres dans cette entreprise ?
2. Une réserve de protection d'oiseaux contient 2 700 oiseaux. On dénombre 216 grues cendrées. Calculer la proportion en pourcentage de grues cendrées dans la réserve.
3. Lors d'un concert, il y a 304 spectateurs de moins de 16 ans, ce qui représente 76% du public. Combien de spectateurs ont assisté au concert ?

Voir corrigé page 2

2.1 Rappel

Une série statistique se définit à l'aide d'une population et d'un caractère.

Définition 1 : population-caractère

La *population* E est l'ensemble des individus étudiés.
Le *caractère* est la qualité que l'on choisit d'étudier chez ces individus.
Une *sous-population* A est une partie de la population.

Exemple : un campus universitaire compte 10 000 étudiants. On s'intéresse aux 2 500 étudiants inscrits en première année de licence.
L'ensemble des étudiants du campus représente la population. Les étudiants de première année de licence sont une sous-population des étudiants du campus.

Définition 2 : proportion

Soit A une sous-population d'une population E. On note n_E et n_A respectivement le nombre d'individus dans la population E et dans la sous-population A.
La *proportion* (ou *fréquence*) de A dans E est le nombre :

$$p = \frac{n_A}{n_E}.$$

La proportion s'exprime en fraction, en écriture décimale (si elle existe), en pourcentage.

Exemple : la proportion d'étudiants de première année de licence sur ce campus est : $p = \dfrac{2500}{10000} = 0{,}25$ soit 25%.

À RETENIR

Si n_{total} est l'effectif total d'une population et n_{partiel} celui d'une sous-population alors :

$$\text{proportion} = \frac{n_{\text{partiel}}}{n_{\text{total}}} = \frac{\text{pourcentage}}{100}$$

ou encore, en renversant l'égalité :

$$\text{pourcentage} = 100 \times \frac{n_{\text{partiel}}}{n_{\text{total}}}.$$

Solution de l'exercice type 1

Lycée Louis Vincent, Metz

MÉTHODE

- La proportion p d'une sous-population de n individus dans une population de N individus est donnée par $p = \dfrac{n}{N}$.
- Pour calculer une proportion p d'une quantité N, on calcule $p \times N$.

- Le nombre de cadres de l'entreprise est $\dfrac{20}{100} \times 450 = 90$.
- La proportion de grues cendrées dans la réserve est $p = \dfrac{216}{2\,700} = 0{,}08$ soit $0{,}08 \times 100 = 8\%$.
- On note N le nombre de spectateurs ayant assisté au concert.
  On a $\dfrac{76}{100} \times N = 304$ soit $N = \dfrac{304}{0,76} = 400$.

Voir énoncé page 1

3 Tableau croisé d'effectifs

Définition 3 : tableau croisé d'effectifs

Un *tableau croisé d'effectifs* est un tableau à double entrée.
Il donne les effectifs portant sur deux caractères d'une même population.
Les valeurs de l'un des caractères sont présentées en ligne et celles de l'autre caractère sont présentées en colonne.

Définition 4 : marges

Les sommes des colonnes et des lignes (nommées « Total ») sont aussi appelées les *marges* du tableau.

Définition 5

C_2 C_1	B	B'	Total
A	n_1	n_2	s_1
A'	n_3	n_4	s_2
Total	s'_1	s'_2	N

n_1 désigne l'effectif vérifiant à la fois A et B.
s_1 désigne l'effectif marginal de A.
N désigne l'effectif total.

Exemple : le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'un lycée suivant leur classe et leur sexe.
Il y a 1 000 élèves au total dans le lycée. Parmi eux, on compte 170 filles en classe de Seconde. 165 élèves sont des garçons et en classe de Terminale.

Classe Sexe	2^{nde}	1^{re}	T^{le}	Total
Filles	170	165	160	495
Garçons	180	160	165	505
Total	350	325	325	1000

4 Diagramme en barres, diagramme circulaire

4.1 Diagramme en barres

Définition 6

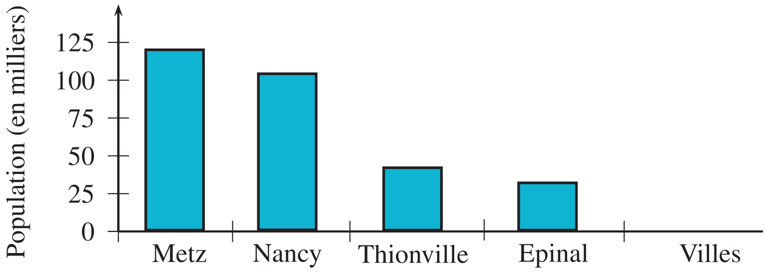
- Un *diagramme en barres* (ou *à bâtons*) est un graphique représentant une série statistique.
  À chaque valeur, on associe un segment vertical ou un rectangle vertical de largeur constante et réduite, dont la longueur est proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence).
- Un *diagramme en barres empilées* est un diagramme en barres où on représente les rectangles avec différentes couleurs suivant les caractères étudiés.

Exemples (diagramme en barres)

- Une série statistique à une variable.
  Considérons la population de plusieurs villes de France.

Ville	Metz	Nancy	Thionville	Épinal
Population	121000	105000	43000	33000

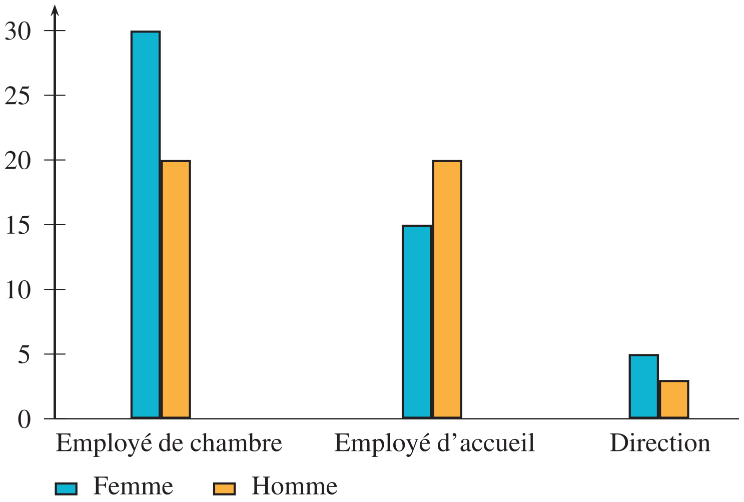
Les données de ce tableau peuvent être représentées par le diagramme suivant :



- Une série statistique à deux variables.
  Considérons le personnel d'un grand hôtel.

	Employé de chambre	Employé d'accueil	Direction
Femme	30	15	5
Homme	20	20	3

On peut représenter cette situation de deux manières différentes, selon la variable principale choisie. Si on choisit le type d'emploi comme variable principale, on obtient le graphique suivant.

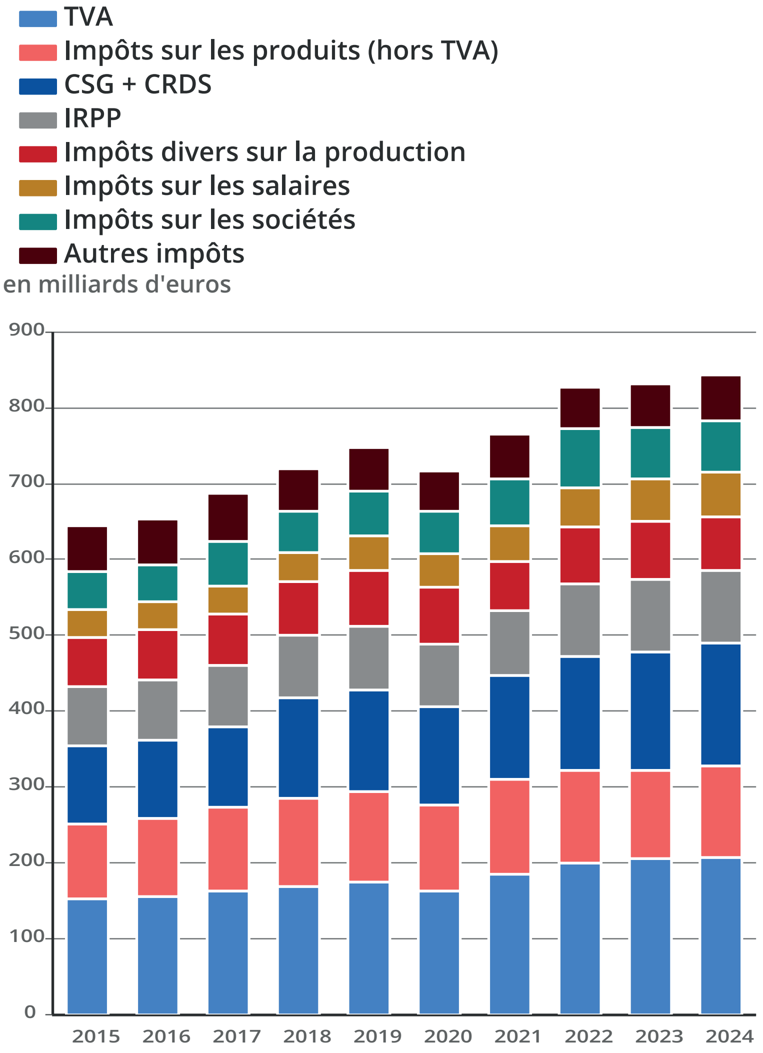


Remarque : on peut utiliser un tableur pour créer le diagramme en barres d'une série statistique.

MÉTHODE

- Créer le tableau croisé sur une feuille de calcul.
- Sélectionner ce tableau, choisir le menu « Insertion » puis le bouton « Histogramme » ou le menu « Diagramme » selon le logiciel. Choisir alors la forme souhaitée.

Exemple (diagramme empilé) : le diagramme ci-dessous est un diagramme empilé qui montre l'ensemble des impôts en France entre les années 2015 et 2024. Sur ce graphique, la hauteur totale des barres représente la somme totale des impôts perçus par l'État.



Par exemple, en 2023, l'État a perçu près de 800 milliards d'euros d'impôts au total. En 2013, ce montant était d'environ 600 milliards d'euros. La tendance de ces montants est à la hausse, la seule exception étant en 2020 (savez-vous pourquoi ?).

Pour connaître le montant représenté par une catégorie de revenu, il faut calculer la différence entre les limites hautes et basses d'une zone du graphique.

Par exemple, l'impôt sur les sociétés en 2022 est représenté par la zone qui s'étend d'environ 690 à 730. Or, $730 - 690 = 40$; on peut donc estimer que l'impôt sur les sociétés en 2022 s'élevait environ à 40 milliards d'euros.

Les détails complets se trouvent à l'adresse :

`https://www.insee.fr/fr/statistiques/2381408`

MÉTHODE

- Pour comparer le même caractère sur plusieurs populations, on place des barres côte à côte dans un même diagramme en barres avec la même légende.
- Pour comparer l'importance de plusieurs caractères dans une population, il est parfois utile de représenter les caractères dans des diagrammes en barres empilées où apparaissent tous les caractères étudiés.

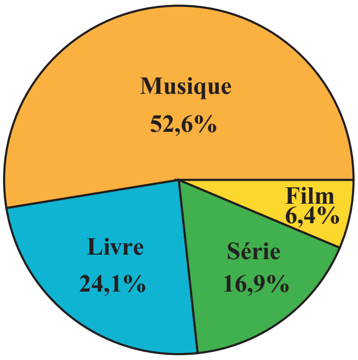
4.2 Diagramme circulaire

Définition 7

- Un *diagramme circulaire* ou « *camembert* » est un disque partagé en secteurs angulaires dont la mesure de chaque angle est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) des différentes valeurs du caractère étudié. La somme totale des mesures des secteurs angulaires est donc égale à 360°.
- Un diagramme *semi-circulaire* représente les données de la même façon mais sur un demi-disque. La somme totale des mesures des secteurs angulaires est donc égale à 180°.

Exemple : le diagramme ci-contre montre la répartition des 18 960 ventes d'un site de téléchargement sur une semaine.

Un tour complet correspond à 360°.
La musique représente 52,6% des ventes.
Le secteur qui représente la musique a donc un angle de $\dfrac{52,6}{100} \times 360 \approx 189,4°$.



MÉTHODE : construire un diagramme circulaire

L'effectif total est représenté par l'angle plein, mesurant 360°. On utilise les propriétés de la proportionnalité pour déterminer les mesures des angles des différents secteurs angulaires.
Mais on peut aussi utiliser un tableur pour créer le diagramme circulaire d'une série statistique.

- Créer le tableau statistique sur une feuille de calcul.
- Sélectionner ce tableau, choisir le menu « Insertion » puis le bouton « Diagramme circulaire » ou le menu « Diagramme » selon le logiciel. Choisir alors la forme souhaitée.

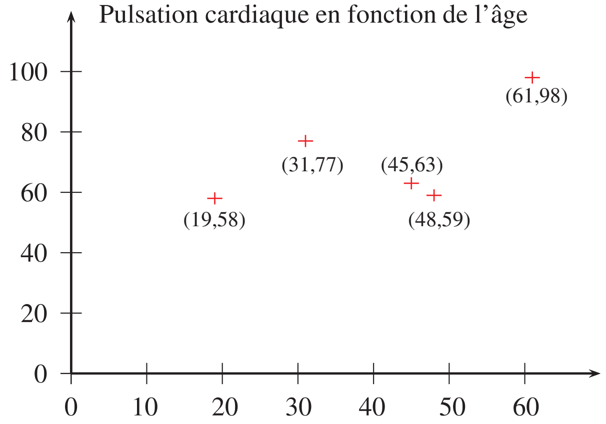
La comparaison des populations se fait en plaçant des barres côte à côte dans un même diagramme en barres, ou en plaçant deux diagrammes circulaires côte à côte avec la même légende.

5 Nuage de points

Définition 8 : nuage de points

On considère une série statistique composée de deux caractères. Le *nuage de points* associé à cette série est l'ensemble des points ayant pour abscisses les valeurs du premier caractère et pour ordonnées les valeurs du second caractère.

Exemple : le nuage de points ci-dessous représente la pulsation cardiaque en fonction de l'âge.



Remarque : la forme du nuage de points donne une indication sur l'existence d'un lien ou non entre les deux caractères étudiés.

MÉTHODE

On peut utiliser un tableur pour créer le nuage de points d'une série statistique.

- Créer le tableau statistique sur une feuille de calcul.
- Sélectionner ce tableau, choisir le menu « Insertion » puis le bouton « Nuage de points » ou le menu « Diagramme » selon le logiciel. Choisir alors la forme souhaitée.

6 Ajustement affine

Exercice type 2

Lycée Louis Vincent, Metz

Le tableau suivant donne le nombre de *vélos électriques vendus* dans une région française entre 2018 et 2023.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de ventes y_i	2800	3200	3900	4800	5600	6300

(D'après une étude régionale sur la mobilité durable)

1 Calculer le taux d'évolution en pourcentage du nombre de ventes entre 2022 et 2023.

2 Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal en prenant comme unités graphiques :

- 2 cm pour 1 année en abscisse ;
- 1 cm pour 500 ventes en ordonnée, en commençant à 2 500.

3 Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
Placer ce point sur le graphique.

4 On admet que la droite (D) de coefficient directeur 730, passant par le point G, fournit un bon ajustement affine du nuage de points jusqu'en 2025.

(a) Déterminer une équation de la droite (D).

(b) Tracer la droite (D) dans le repère précédent.

(c) Déterminer graphiquement, en laissant apparents les traits de construction, une estimation du nombre de ventes en 2025.

(d) Vérifier cette estimation par le calcul.

Voir corrigé page 10

On considère une série statistique à deux variables $(x_i;\, y_i)$ représentée par le nuage de n points de coordonnées $(x_1;\, y_1), (x_2;\, y_2), \ldots, (x_n;\, y_n)$.

6.1 Point moyen

Définition 9 : point moyen

Le *point moyen* d'une série statistique est le point $G(\overline{x};\, \overline{y})$ où :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ et } \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Remarque : $\overline{x}$ est la moyenne des n nombres $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.
$\overline{y}$ est la moyenne des n nombres $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$.

6.2 Ajustement affine

Définition 10

Une *droite d'ajustement affine* est une droite qui passe au plus près des points du nuage. Pour que l'ajustement affine soit le plus précis possible, il faut que la droite d'ajustement passe par le point moyen $G(\overline{x};\, \overline{y})$.

MÉTHODE : déterminer la droite d'ajustement affine

- Méthode graphique : on trace la droite « au jugé » (c'est-à-dire à la main) puis on lit le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b de cette droite.
- Méthode numérique : on utilise la calculatrice, le tableur ou un programme.

6.3 Interpolation - Extrapolation

Un ajustement affine (ou autre) permet de faire des estimations pour des valeurs manquantes.

Définition 11

- *Interpoler*, c'est faire une estimation d'une valeur à l'intérieur des valeurs connues de la série.
- *Extrapoler*, c'est faire une estimation d'une valeur à l'extérieur des valeurs connues.

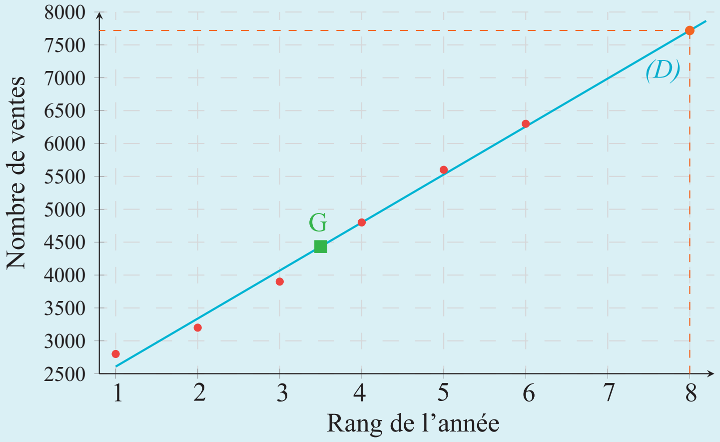
Solution de l'exercice type 2

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Entre 2022 et 2023, le nombre de ventes passe de 5 600 à 6 300. Le taux d'évolution est : $\dfrac{6300-5600}{5600} = \dfrac{700}{5600} = 0,125$, soit en pourcentage :

$$0,125 \times 100 = 12,5\%.$$

2 Le nuage de points est représenté ci-dessous.



3 On calcule la moyenne des abscisses :

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

On calcule la moyenne des ordonnées :

$$\overline{y} = \frac{2800+3200+3900+4800+5600+6300}{6} = \frac{26600}{6} \approx 4433,33.$$

Ainsi, le point moyen est : $G(3,5\,;4433,33)$.

4 **(a)** On sait que la droite (D) a pour coefficient directeur 730, donc elle est de la forme $y = 730x + b$.

Comme elle passe par le point moyen $G(3,5; 4433,33)$, on remplace :

$$4433,33 = 730 \times 3,5 + b \iff 4433,33 = 2555 + b$$
$$\iff b = 4433,33 - 2555 = 1878,33.$$

Donc une équation de la droite (D) est $y = 730x + 1878,33$.

(b) Voir graphique.

(c) L'année 2025 correspond au rang $x = 8$.

Graphiquement, en lisant l'ordonnée du point de la droite d'ajustement d'abscisse 8, on obtient environ 7700. On peut donc estimer à environ 7700 le nombre de vélos électriques vendus en 2025.

(d) On remplace x par 8 dans l'équation de la droite :

$$y = 730 \times 8 + 1878,33 = 5840 + 1878,33 = 7718,33.$$

L'estimation graphique est cohérente avec le calcul.

Voir énoncé page 8

1 V/F Pourcentage d'évolution

4 min — Corrigé p. 19

1 Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 2% est 1,2.

2 Le taux d'évolution correspondant à un coefficient multiplicateur égal à 1,36 est 36%

3 Un prix a augmenté de 2% puis de 5%. Le taux d'évolution global est de 7%.

4 Un prix a augmenté de 15%. Pour retrouver sa valeur initiale, il doit baisser de 15%.

2 V/F Exploiter un tableau croisé

4 min — Corrigé p. 19

Ce tableau indique la composition de l'association sportive d'un lycée.

	Basket	Volley	Natation	Total
Internes	30	40	60	130
Externes	36	62	12	110
Total	66	102	72	240

Les affirmations suivantes sont-elles *vraies* ou *fausses* ?

1 30 membres de cette association sont internes et pratiquent le basket.

2 Parmi les membres de l'association, 110 sont internes.

3 Cette association compte exactement 60 nageurs.

4 Exactement 62 personnes de l'association pratiquent le volley.

3 QCM Pourcentage

10 min — Corrigé p. 20

Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1 Amy souhaite acheter une automobile qui vaut 13 500 euros. Cet achat représente 60% de son budget. Le budget dont dispose Amy est de :

a 20 000 euros
b 8 100 euros
c 22 500 euros
d 21 600 euros

2 Pour un prix de 100 euros, une augmentation de 2 euros correspond à :

a Une hausse de 2%
b Une hausse de 102%
c Une multiplication par 0,02
d Une multiplication par 1,02

3 Si le prix du baril de pétrole augmente une première fois de 50% puis une seconde fois de 50%, alors le prix du baril :

a a doublé
b a augmenté de 100%
c a augmenté de 255%
d a augmenté de 125%

4 Un prix a doublé. Cela signifie que ce prix a augmenté de :

a 50%	**b** 100%
c 150%	**d** 200%

Proportions

4 Calculer, utiliser des proportions

★ 5 min Corrigé p. 20

Lycée Louis Vincent, Metz

Sur l'étiquette d'un pot de pâte à tartiner de 350 g, on peut lire qu'il contient 16,5% de chocolat, et 12% de noisettes entre autres.

Quelle est la masse de chocolat et la masse de noisettes contenus dans ce pot, au gramme près.

5 Proportion

★ 5 min Corrigé p. 20

Lycée Louis Vincent, Metz

On a demandé à des élèves s'ils venaient à pied au lycée. 32,8% des réponses (c'est-à-dire 123 réponses) ont été négatives.

Combien d'élèves ont été interrogés ?

6 Proportion de proportion

★ 15 min Corrigé p. 21

Lycée Louis Vincent, Metz

1 **(a)** En France, le groupe sanguin le plus répandu est le groupe A, qui concerne 45% de la population. Dans ce groupe, environ 85% sont de rhésus positif.

Quel pourcentage de la population française est du groupe A avec un rhésus positif ?

(b) On compte environ 67 millions de français. Combien sont du groupe A avec un rhésus positif (arrondir au million près) ?

2 Dans une boisson au jus de fruits, on trouve 40% de pur jus d'agrumes, dont 60% de pur jus d'orange. Quel est le pourcentage de pur jus d'orange dans cette boisson ?

3 Parmi les spectateurs d'un match, 62% sont des supporters du football club de Metz, et parmi eux, il y a 27% d'abonnés. Quelle est la proportion d'abonnés supporters de Metz parmi les spectateurs ?

4 On étudie les résultats d'un groupe de candidats au Baccalauréat. 72% d'entre eux sont admis au premier groupe et le reste est admis à l'oral de rattrapage. Parmi ceux qui vont à l'oral, 35% échouent. Quel est le pourcentage de reçus au final ?

5 Suite à une épidémie de grippe, 2,75% des élèves d'un lycée sont malades et absents depuis plus d'une semaine et 5% des élèves sont malades. Parmi les élèves malades, quelle est la proportion d'élèves absents depuis plus d'une semaine ?

Tableaux croisés d'effectifs

7 Construire un tableau croisé

★ 10 min

Corrigé p. 21

Lycée Louis Vincent, Metz

Les jardiniers de la ville doivent répartir 300 fleurs blanches, roses ou violettes dans les parterres de la ville. Pour cela, ils disposent uniquement de tulipes et de 120 jacinthes. Chaque fleur est soit blanche, soit rose, soit violette. 50% des jacinthes ainsi que 40 tulipes sont blanches. 80 tulipes sont roses et 90 fleurs sont violettes.

1 Construire à la main un tableau croisé d'effectifs montrant la répartition des fleurs selon leur nom et leur couleur.

2 Quelle est la fréquence de tulipes sur le total des fleurs ?

8 Comprendre un tableau

★ 10 min

Corrigé p. 21

Lycée Saint Exupéry, Mantes La Jolie

Une agence organise des voyages classés par genre et par destination dans le tableau d'effectifs suivant :

	Europe	Afrique	Amérique	Asie	Total
Aventure	3	8	4	5	
Séjour détente	9		8	7	34
Circuit car	12	2	10	6	
Total					

1 Déterminer le nombre de séjours Détente en Afrique.

2 Déterminer la fréquence des voyages d'aventure par rapport à chaque destination.

3 Déterminer la fréquence des séjours détente.

Tableaux croisés d'effectifs et proportions

9 Comprendre un tableau

★★ 10 min Corrigé p. 22

Lycée Louis Vincent, Metz

Le tableau suivant (établi par l'INSEE, enquête emploi, en mars 2024) nous donne la répartition par sexe et par catégorie socioprofessionnelle de la population active occupant un emploi.

	Hommes (en milliers)	Femmes (en milliers)	Total (en milliers)
Agriculteurs exploitants	289	103	392
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	1 344	711	2 055
Cadres, professions intellectuelles supérieures	3 933	2 998	6 931
Professions intermédiaires	3 633	4 054	7 687
Employés	1 924	5 987	7 911
Ouvriers	4 673	1 170	5 843
Total	15 796	15 023	30 819

Recopier et compléter, en précisant les calculs nécessaires, le texte suivant :

Les résultats seront arrondis à l'unité.

1 Il y a . . . % de femmes dans l'ensemble de la population active occupant un emploi.

2 . . . % des employés sont des femmes.

3 . . . % des employés sont des hommes.

4 . . . % de l'ensemble de la population active occupant un emploi sont des employés.

5 . . . % de l'ensemble des femmes actives occupant un emploi sont des employées.

6 En 2024, un ouvrier sur . . . était une femme.

10 Comprendre un tableau

★★ 15 min Corrigé p. 22

Lycée Louis Vincent, Metz

Une cité scolaire compte 1 500 élèves répartis en trois catégories : 330 internes, 735 demi-pensionnaires et les externes.

On compte dans la cité 60 % de filles et, parmi celles-ci 20 % sont des internes.

De plus, 55 % des garçons de cette cité scolaire sont demi-pensionnaires.

1 Calculer la proportion, en pourcentage, de filles internes dans cet établissement.

2 Compléter les effectifs manquants du tableau ci-dessous :

	Externes	D.P.	Internes	Total
Garçons				
Filles				
Total				1 500

3 À l'aide du précédent tableau, déterminer dans cette cité :

(a) la proportion de garçons,
(b) la proportion d'élèves internes et garçons,
(c) la proportion d'internes parmi les garçons,
(d) la proportion d'internes ou de garçons,
(e) la proportion de garçons parmi les internes.

Représentation graphique des données

11 Diagramme en barres

★★ 10 min Corrigé p. 23

Lycée Saint Exupéry, Mantes La Jolie

Le tableau ci-dessous montre les proportions en pourcentages de bacheliers dans une génération selon la filière et le sexe en 2021 (source INSEE) :

	Bac général	Bac technologique	Bac professionnel	Total
Femmes	52,5	16,8	19,2	88,5
Hommes	38,1	16,2	24,6	78,9
Total	45,1	16,5	22,0	83,6

Représenter ce tableau de fréquence par un diagramme en barres cumulées.

12 Diagramme en barres

★★ 10 min Corrigé p. 24

Lycée Louis Vincent, Metz

Le tableau ci-dessous donne l'âge moyen des époux lors du mariage en France (source INSEE) :

	2000	2005	2010	2015	2020	2025
Femmes	31	32,6	33,8	35,1	36,7	37,5
Hommes	33,6	35,3	36,5	37,7	39,3	39,8

1 Construire le diagramme en barres cumulées permettant de comparer, pour chaque année, l'âge moyen des femmes et des hommes qui se sont mariés.

2 En supposant l'évolution régulière, estimer les âges moyens lors du mariage en 2030.

13 Diagramme circulaire

★★ 10 min Corrigé p. 25

Lycée Saint Exupéry, Mantes La Jolie

Les 540 élèves d'un lycée sont répartis de la façon suivante.

Classe	2^{nde}	1^{re} Générale	1^{re} Techno.	T^{le} G	T^{le} Techno
Effectifs	180	150	36	144	30

1. Donner le pourcentage correspondant à chaque classe.
2. Représenter cette série statistique à l'aide d'un diagramme circulaire.

14 Nuage de points

★★ 15 min Corrigé p. 26

Lycée Louis Vincent, Metz

Le maire d'une ville a mis en place une politique pour réduire les incivilités sur les voies publiques de sa commune. Un bilan a été établi pour comptabiliser le nombre d'incivilités durant les 6 dernières années et ces données sont résumées dans le tableau suivant.

Année	Rang de l'année x_i	Nombre d'incivilités y_i
2020	0	857
2021	1	810
2022	2	720
2023	3	604
2024	4	375
2025	5	273

1. Le maire annonce à ses concitoyens que sa politique de lutte contre les incivilités a permis de réduire leur nombre de plus de 60 % entre 2020 et 2025. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.
2. Construire le nuage de points associé à ce tableau.
3. Décrire la forme du nuage.
4. Peut-on prévoir le nombre approximatif d'incivilités en 2026 ?

Ajustement affine

15 Interpolation, extrapolation

★★ 20 min Corrigé p. 27

Lycée Louise Michel, Gisors

Le tableau page suivante donne le nombre annuel, exprimé en milliers, de trottinettes électriques vendues en France durant les cinq premières années de forte croissance du marché.

Année	2018	2019	2020	2021	2022
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de trottinettes vendues en milliers : y_i	82,4	95,8	111,6	126,9	138,7

1 Dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques :

- 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses,
- 1 cm pour 10 milliers de trottinettes vendues sur l'axe des ordonnées,

représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ pour i entier variant de 0 à 4.

2 L'allure du nuage de points permet-il d'envisager un ajustement affine ?

3 **(a)** Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

(b) Tracer, *au jugé*, une droite (D) d'ajustement affine du nuage.

(c) Placer le point G et tracer la droite (D) sur le graphique précédent.

(d) En utilisant l'ajustement affine obtenu, donner une estimation du nombre de trottinettes vendues en 2026.

4 Le tableau suivant donne le nombre annuel de trottinettes vendues, exprimé en milliers, de 2022 à 2026.

Année	2022	2023	2024	2025	2026
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de trottinettes vendues en milliers : y_i	138,7	121,5	105,2	89,6	74,8

(a) Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces nouvelles valeurs.

(b) L'ajustement affine précédent est-il encore adapté ?
Justifier la réponse.

Vers les maths complémentaires

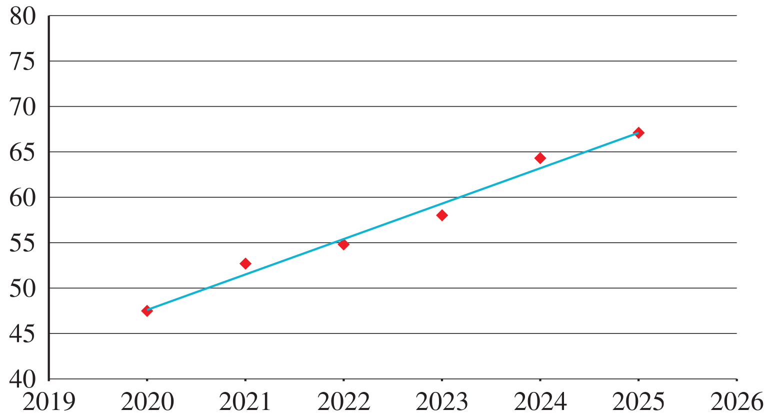
16 Pour aller plus loin

★★★ 15 min Corrigé p. 28

Lycée Louis Vincent, Metz

On étudie, à l'aide de la feuille de calcul suivante, l'évolution des dépenses en soins hospitaliers en France, en milliards d'euros.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	2020	2021	2022	2023	2024	2025
2	Dépense en soins hospitaliers (milliard d'euros)	47,6	52,7	54,8	58	64,3	67,1
3	Évolution depuis 2020		10,71%	15,13%	21,85%	35,08%	40,97%
4							
5							



1 Les cellules de la ligne 3 sont au format pourcentage avec deux décimales. Pour obtenir l'évolution, en pourcentage, de la dépense en soins hospitaliers depuis l'année 2020, laquelle de ces trois formules a été entrée en C3 puis recopiée vers la droite :

a `=(C2−$B2)/B2` **b** `=(C2−$B2)/$B2`

c `=(C2−B$2)/B$2`

2 Énoncer par une phrase en français ce que signifie le résultat affiché en G3.

3 Le nuage des six points $M_i\ (x_i\ ;\ y_i)$ où x_i correspond à l'année, comprise entre 2020 et 2025 et y_i correspond à la dépense en soins hospitaliers en milliards d'euros, a été représenté sur le tableur.

Peut-on tracer une droite modélisant correctement la dépense ?

4 Pour ce nuage de points, le tableur propose la droite d'ajustement d'équation : $y = 3{,}92x - 7\,870{,}9$.

En supposant que ce modèle reste valable dans les trois années suivant 2025, prévoir la dépense en soins hospitaliers en 2028.

(On arrondira la réponse à 0,1 milliard d'euros.)

1 V/F Pourcentage d'évolution

Énoncé p. 11

1 *Faux*. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 2% est $1 - \frac{2}{100} = 0{,}98$.

2 *Vrai*. $c = 1 + \frac{t}{100} = 1 + 0{,}36$ soit une augmentation de 36%.

3 *Faux*. Une augmentation de 2% suivie d'une augmentation de 5% revient à multiplier par $1{,}02 \times 1{,}05 = 1{,}071$ soit une augmentation de 7,1%.

4 *Faux*. Le coefficient multiplicateur associé à cette hausse de 15% est $c = 1{,}15$.

Pour retrouver la valeur initiale on cherche c' tel que :

$$1{,}15 \times c' = 1$$

soit

$$c' = \frac{1}{1{,}15} \approx 0{,}87$$

ce qui correspond à une baisse de 13%.

MÉTHODE

- Dire qu'il y a une évolution de t% entre une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f signifie que :

$$V_f = \left(1 + \frac{t}{100}\right) V_i.$$

$c = 1 + \frac{t}{100}$ est le *coefficient multiplicateur* de V_i à V_f.
On a donc :

$$c = \frac{V_f}{V_i}.$$

- Dans le cas d'évolutions successives, le *coefficient multiplicateur global* est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution. Il permet de déterminer le *taux d'évolution global*.

2 V/F Exploiter un tableau croisé

Énoncé p. 11

1 *Vrai*.

2 *Faux*. 110 élèves sont externes.

3 *Faux*. L'association comporte 72 nageurs.

4 *Faux*. L'association compte exactement 102 volleyeurs.

3 QCM Pourcentage

Énoncé p. 11

MÉTHODE

- Pour déterminer le pourcentage que représente une quantité a par rapport à une quantité b, on effectue l'opération $\dfrac{a}{b}$.
- Pour déterminer la quantité que représente $a\%$ d'une quantité b, on effectue l'opération $\dfrac{a}{100} \times b$.
- Augmenter de $a\%$ revient à multiplier par $1 + \dfrac{a}{100}$.
- Diminuer de $a\%$ revient à multiplier par $1 - \dfrac{a}{100}$.

1 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Le budget d'Amy est de $\dfrac{13\,500}{0{,}6} = 22\,500$ euros.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Pour un prix de 100 euros, une augmentation de 2 euros correspond à une hausse de $\dfrac{2}{100} = 2\%$.

3 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Augmenter de 50% revient à multiplier par $1 + \dfrac{50}{100} = 1{,}5$ donc deux hausses successives de 50% correspondent à une multiplication par $1{,}5^2 = 2{,}25 = 1 + \dfrac{125}{100}$ soit une hausse de 125%.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Le prix a doublé, on lui a ajouté la même valeur ou on l'augmente de lui-même. On augmente donc ce prix de 100%.

4 Calculer, utiliser des proportions

Énoncé p. 12

Lycée Louis Vincent, Metz

- $\dfrac{16{,}5}{100} \times 350 \approx 58$. Le pot contient donc environ 58 g de chocolat.
- $\dfrac{12}{100} \times 350 = 42$. Le pot contient donc 42 g de noisettes.

5 Proportion

Énoncé p. 12

Lycée Louis Vincent, Metz

Si on note T le nombre total d'élèves interrogés, on a :

$$T \times \frac{32{,}8}{100} = 123 \iff T = \frac{123}{\dfrac{32{,}8}{100}} = 123 \times \frac{100}{32{,}8} = 375.$$

On a donc interrogé 375 élèves.

6 Proportion de proportion

Énoncé p. 12

Lycée Louis Vincent, Metz

1 (a) $\frac{45}{100} \times \frac{85}{100} = \frac{3\,825}{10\,000} = 0{,}382\,5$.

38,25% de la population française est de groupe A avec un rhésus positif.

(b) $\frac{38{,}25}{100} \times 67 \approx 26$.

Environ 26 millions de français sont du groupe A avec un rhésus positif.

2 Il s'agit d'un pourcentage de pourcentage. $0{,}40 \times 0{,}6 = 0{,}24$ soit 24%.

3 $0{,}62 \times 0{,}27 = 0{,}1674$ soit 16,74%.

4 72% des élèves sont admis donc 28% sont admis au second groupe. Parmi ceux-ci, 35% échouent, soit $0{,}28 \times 0{,}35 = 0{,}098$, ce qui représente 9,8%.

Il y a donc $100 - 9{,}8 = 90{,}2$% d'élèves reçus au final.

5 $p = \frac{0{,}0275}{0{,}05} = 0{,}55$ soit 55%.

7 Construire un tableau croisé

Énoncé p. 13

Lycée Louis Vincent, Metz

MÉTHODE

Dans le tableau, on porte d'abord les données de l'énoncé puis on le complète.

1 On a le tableau suivant :

	Blanche	Rose	Violette	Total
Tulipes	40	80	180-40-80=60	180
Jacinthes	60	120-60-30=30	90-60=30	120
Total	300-90-110=100	80+30=110	90	300

2 Il y a $\frac{180}{300} = 0{,}6$ soit 60% de tulipes sur le total des fleurs.

8 Comprendre un tableau

Énoncé p. 13

Lycée Saint Exupéry, Mantes La Jolie

	Europe	Afrique	Amérique	Asie	Total
Aventure	3	8	4	5	20
Séjour détente	9	10	8	7	34
Circuit car	12	2	10	6	30
Total	24	20	22	18	84

1 Il y a $34 - 7 - 8 - 9 = 10$ séjours Détente en Afrique.

2 La fréquence des voyages Aventure est :

- en Europe, $\frac{3}{24} = 0{,}125$,
- en Afrique, $\frac{8}{20} = 0{,}4$,
- en Amérique, $\frac{4}{22} = \frac{2}{11}$,
- en Asie, $\frac{5}{18}$.

3 La fréquence des séjours détente est $\frac{34}{84} = \frac{17}{42} \approx 0{,}405$.

9 Comprendre un tableau

Énoncé p. 14

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Il y a $\frac{15\,023}{30\,819} \approx 0{,}487$, soit 49% de femmes dans l'ensemble de la population active occupant un emploi.

2 $\frac{5\,987}{7\,911} \approx 0{,}757$, soit 76% des employés sont des femmes.

3 $100 - 76 = 24$, soit 24% des employés sont des hommes.

4 $\frac{7\,911}{30\,819} \approx 0{,}256$, soit 26% de l'ensemble de la population active occupant un emploi sont des employés.

5 $\frac{5\,987}{15\,023} \approx 0{,}399$, soit 40% de l'ensemble des femmes actives occupant un emploi sont des employées.

6 En 2024, un ouvrier sur 5 était une femme.

En effet $\frac{1\,170}{5\,843} \approx 0{,}20 = \frac{1}{5}$.

10 Comprendre un tableau

Énoncé p. 14

Lycée Louis Vincent, Metz

1 La proportion, en pourcentage, de filles internes dans cet établissement est :

$$p = 0{,}60 \times 0{,}2 = 0{,}12 \text{ soit } 12\%.$$

2 Il y a 60% de filles, soit $0{,}6 \times 1\,500 = 900$ filles.

Parmi elles, 20% sont internes soit $0{,}2 \times 900 = 180$ filles internes.

Il y a donc $1\,500 - 900 = 600$ garçons.

55% des garçons sont demi-pensionnaires, soit :

$$0,55 \times 600 = 330.$$

Il y a 330 internes et 735 demi-pensionnaires donc :

$$1\,500 - 330 - 735 = 435 \text{ élèves externes.}$$

Il y a :

$$330 - 180 = 150 \text{ garçons internes}$$

et

$$600 - 150 - 330 = 120 \text{ garçons externes.}$$

Ce qui permet de calculer le nombre de filles externes :

$$435 - 120 = 315$$

ainsi que le nombre de filles demi-pensionnaires :

$$735 - 330 = 405.$$

	Externes	D.P.	Internes	Total
Garçons	120	330	150	600
Filles	315	405	180	900
Total	435	735	330	1 500

(a) La proportion de garçons est $100 - 60 = 40\%$.

(b) La proportion d'élèves internes et garçons est $\frac{150}{1500} = 0,1$ soit 10%.

(c) La proportion d'interne parmi les garçons est $\frac{150}{600} = 0,25$ soit 25%.

(d) La proportion d'internes ou de garçons est $\frac{330 + 600 - 150}{1500}$, c'est-à-dire 0,52, soit 52%.

(e) La proportion de garçons parmi les internes est $\frac{150}{330} \approx 0,455$ soit environ 45,5%.

11 Diagramme en barres

Énoncé p. 15

Lycée Saint Exupéry, Mantes La Jolie

MÉTHODE

On peut construire deux types de diagrammes (l'un répondant à une lecture horizontale du tableau l'autre à une lecture verticale du tableau).

- Le diagramme correspondant à la lecture horizontale du tableau répond à la question : pour chaque sexe, quelle est la répartition des bacheliers par filière ? On trace une barre par sexe et une couleur par filière. Les barres sont de même taille puisque les données sont exprimées en pourcentages.

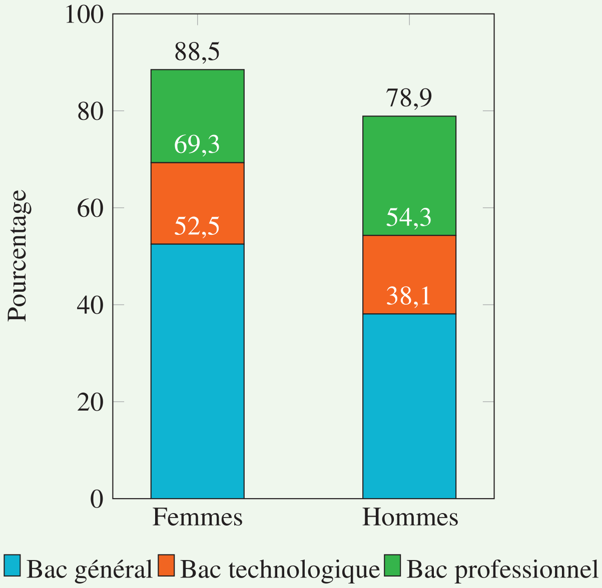


Figure 1.1 – *Répartition par sexe et type de baccalauréat*

- Le diagramme correspondant à la lecture verticale du tableau répond à la question : pour chaque filière, quelle est la répartition entre sexes ? On trace une barre par filière et une couleur par sexe. Les barres ont toutes la même hauteur puisque nous travaillons à partir de pourcentage. Nous pourrions intégrer une information supplémentaire (le nombre de bacheliers) qui se traduirait pas des hauteurs différentes.

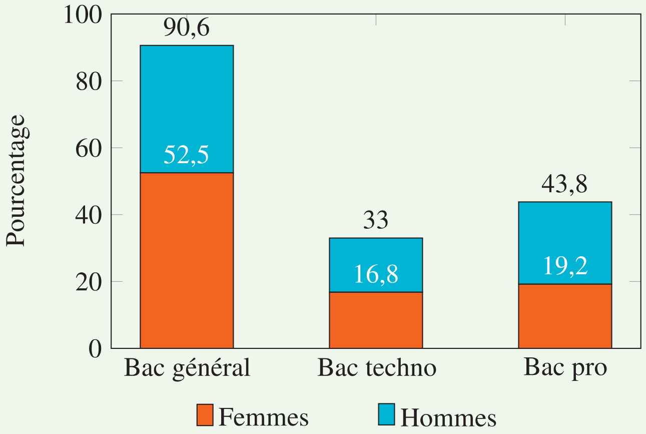


Figure 1.2 – *Répartition par filière et par sexe*

12 Diagramme en barres

Énoncé p. 15

Lycée Louis Vincent, Metz

1 On trace côte à côte une barre représentant les femmes et les hommes.

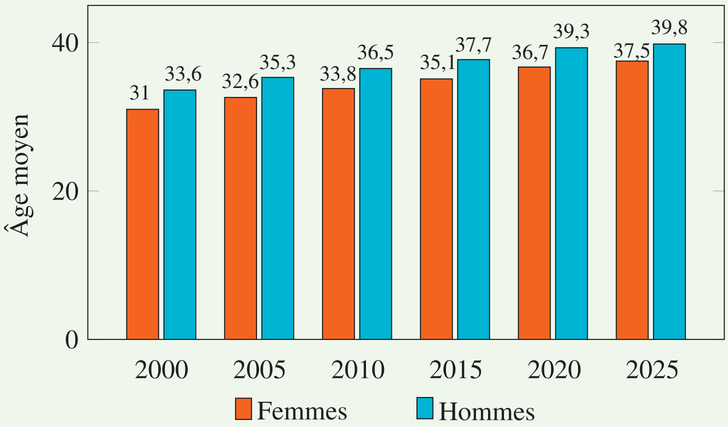


Figure 1.3 – *Âge moyen des époux lors du mariage entre 2000 et 2025*

2 En supposant que cette évolution est régulière, on peut estimer que l'âge moyen des femmes lors du mariage en 2030 sera de

$$37{,}5 + 0{,}8 = 38{,}3 \text{ ans}$$

et celui des hommes de

$$39{,}8 + 0{,}5 = 40{,}3 \text{ ans.}$$

13 Diagramme circulaire

Énoncé p. 16

Lycée Saint Exupéry, Mantes La Jolie

1 L'effectif total est de 540.

Le pourcentage d'élèves en seconde est :

$$\frac{180}{540} \approx 0{,}333 \text{ soit environ } 33{,}3\%.$$

On procède de la même manière pour chaque classe.

2 On calcule tout d'abord les différentes mesures d'angles, représentant chaque effectif. Pour cela, on utilise la proportionnalité, en retenant que les 540 élèves représentent les 360° du diagramme circulaire.

Classe	2^{nde}	1^{re} G	1^{re} Techno	T^{le} G	T^{le} Techno	Total
Effectifs	180	150	36	144	30	540
Mesure d'angle	120°	100°	24°	96°	20°	360°

En effet en utilisant le produit en croix :

- 180 élèves représentent ainsi 120° car $\dfrac{180}{540} \times 360 = 120$;

- 150 élèves représentent 100° car $\dfrac{150}{540} \times 360 = 100$;
- 36 élèves représentent 24° car $\dfrac{36}{540} \times 360 = 24$;
- 144 élèves représentent ainsi 96° car $\dfrac{144}{540} \times 360 = 96$;
- 30 élèves représentent ainsi 20° car $\dfrac{30}{540} \times 360 = 20$.

On obtient le diagramme suivant :

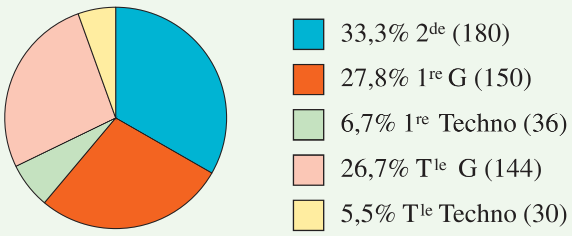


Figure 1.4 – *Répartition des élèves par classe*

14 Nuage de points

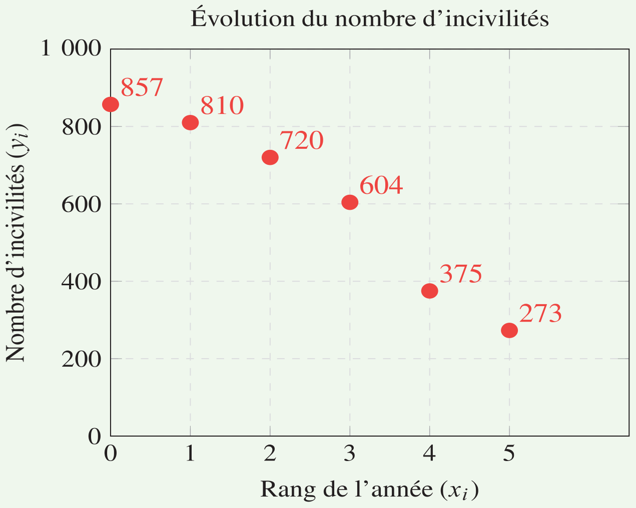
Énoncé p. 16

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Entre 2020 et 2025, le nombre d'incivilités est passé de 857 à 273 soit un taux d'évolution de $\dfrac{273 - 857}{857} \approx -0{,}68$ soit une baisse de 68%.

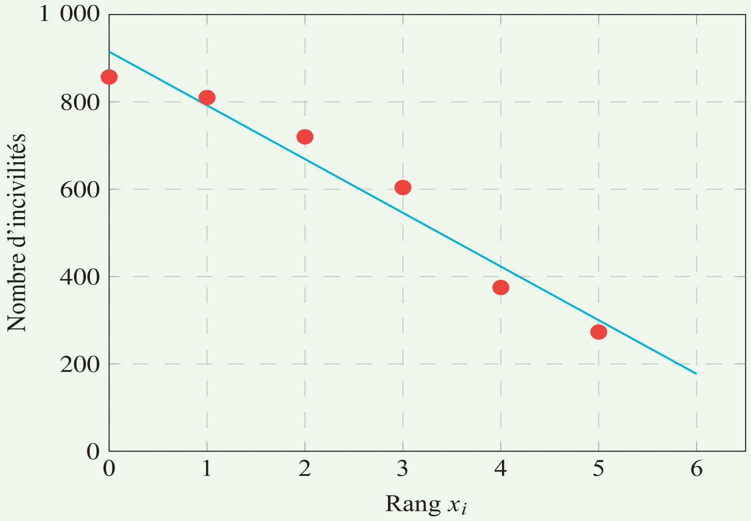
Le maire a donc raison.

2 Le nuage de points associé à ce tableau est le suivant :



3 Le nuage a la forme d'une droite.

4 Pour trouver une approximation du nombre d'incivilités en 2026, on va tracer une droite.



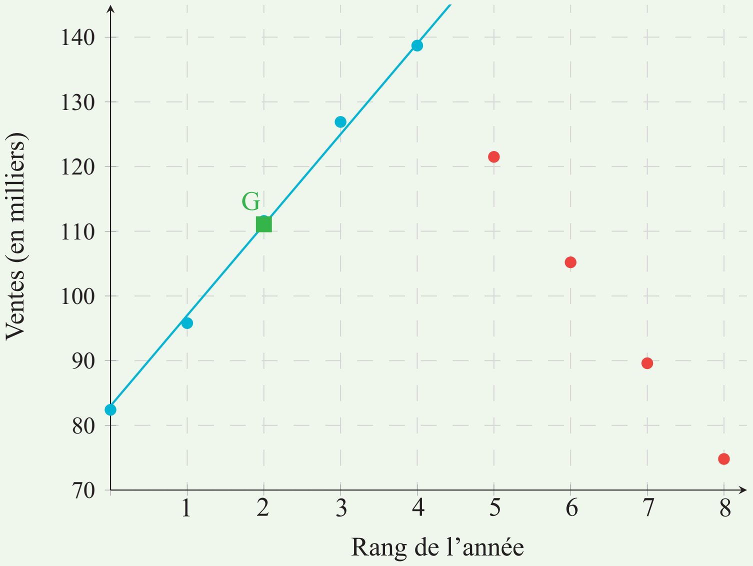
Si cette tendance se poursuit, le nombre d'incivilités en 2026 sera aux alentours de 200.

15 Interpolation, extrapolation

Énoncé p. 16

Lycée Louise Michel, Gisors

1



2 Le nuage de points est allongé, un ajustement affine paraît possible.

3 **(a)** $\overline{x} = \dfrac{0+1+2+3+4}{5} = 2$ et $\overline{y} = \dfrac{555{,}4}{5} = 111{,}08$.

Le point moyen a pour coordonnées $G(2; 111{,}08)$.

(b) Une droite adaptée pourrait être la droite d'équation :

$$y = 14x + 83.$$

Elle passe près du point moyen et suit la tendance du nuage.

Une autre droite d'ajustement proche pouvait être acceptée, à condition qu'elle suive convenablement le nuage de points.

(c) 2026 correspond à l'indice 8. On remplace x par 8 dans l'équation et on obtient :

$$y = 14 \times 8 + 83 = 195$$

soit environ 195 milliers de trottinettes.

4 **(a)** Les nouveaux points (en rouge) montrent une nette baisse.

(b) La droite d'ajustement ne correspond plus à la réalité.

16 Pour aller plus loin

Énoncé p. 17

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$.

2 Le résultat affiché en G3 correspond à l'évolution des dépenses entre 2020 et 2025.

3 La forme du nuage semble globalement alignée donc on peut tracer une droite.

4 On calcule y pour $x = 2028$:

$$y = 3{,}92 \times 2028 - 7\,870{,}9 = 78{,}86$$

soit environ 78,9 milliards d'euros.

Chapitre 2

Phénomènes aléatoires

Plan du chapitre

1 Introduction

Jusqu'en seconde, l'étude des phénomènes aléatoires se ramène à des cas simples de situations la plupart du temps équiprobables. Dans la réalité, les choses sont souvent un peu plus complexes et on commence ici à découvrir d'autres cas.

2 Fréquence marginale - Fréquence conditionnelle

Exercice type 1

Lycée Louis Vincent, Metz

Un restaurant effectue un sondage auprès de ses clients d'une journée pour savoir s'ils sont très satisfaits, satisfaits ou non satisfaits des repas à emporter et des repas sur place. On donne les résultats du sondage dans le tableau suivant :

	Très satisfaits	Satisfaits	Non satisfaits	Total
Sur place	10	12	8	30
À emporter	14	21	15	50
Total	24	33	23	80

1 Combien y a-t-il de personnes satisfaites par leur plat à emporter ?

2 On considère le nombre $\frac{21}{50}$.
Exprimer ce nombre à l'aide d'un pourcentage. Que représente-t-il ?

3 Calculer la fréquence marginale des clients ayant pris un repas sur place.

4 Calculer la fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux ayant pris un repas sur place.

5 Suite à ce sondage, le gérant du restaurant affirme que les clients prenant un repas à emporter sont plus souvent très satisfaits que ceux qui prennent un repas sur place. A-t-il raison ?

Voir corrigé page 30

Définition 1 : fréquence marginale

La *fréquence marginale* d'une valeur est le quotient de l'effectif total de cette valeur par l'effectif total.

Exemple : le tableau suivant donne la répartition des élèves de première et de terminale d'un lycée :

	générale	techno	Total
Première	174	96	270
Terminale	208	84	292
Total	382	180	562

Sur l'ensemble des 562 élèves du lycée, 382 sont en filière générale.
La fréquence marginale de la valeur « générale » est donc égale à :

$$\frac{382}{562} = \frac{191}{281} \approx 0{,}6797$$

soit environ 67,97 %.

Définition 2 : fréquence conditionnelle

La *fréquence conditionnelle* de la valeur A parmi B notée $f_B(A)$ correspond à la fréquence du caractère A dans la sous-population vérifiant le caractère B.

Exemple : dans l'exemple précédent, parmi les 270 élèves de première, 174 sont en filière générale. Donc la fréquence conditionnelle des élèves de filière générale parmi les élèves de première est :

$$\frac{174}{270} = \frac{29}{45} \approx 0{,}6444$$

soit environ 64,44 %.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Louis Vincent, Metz

1 21 personnes sont satisfaites de leur repas à emporter.

2 Le nombre $\frac{21}{50} = 0{,}42$ soit 42 % représente les personnes satisfaites parmi celles ayant pris des repas à emporter.

3 La fréquence marginale des clients ayant pris un repas sur place est :

$$\frac{30}{80} = \frac{3}{8}.$$

➜ Solution de l'exercice type 1 (suite) **Lycée Louis Vincent, Metz**

4 La fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux ayant pris un repas sur place est :

$$\frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$$

5 La fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux ayant pris un repas à emporter est :

$$\frac{14}{50} = 0{,}28.$$

$0{,}28 < 0{,}33$ donc le restaurateur a tort.

Voir énoncé page 29

3 Probabilité conditionnelle et arbre pondéré

Exercice type 2 **Lycée Virlogeux, Riom**

Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés.
Aucun participant n'abandonne la course.

- Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures ; les autres, en plus de 5 heures.
- Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours en plus de 5 heures ; les autres, en moins de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

- L l'événement « le cycliste est licencié dans un club » et $\overline{L}$ son événement contraire,
- M l'événement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\overline{M}$ son événement contraire.

1 À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)$.

2 Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

3 Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.

4 Déterminer $P(M)$.

5 Un organisateur affirme qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Voir corrigé page 33

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition 3 : probabilité de B sachant A

A et B sont deux événements d'un même univers Ω, tels que $P(A) \neq 0$.
La *probabilité de l'événement B sachant A*, notée $P_A(B)$ est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Remarques

- La probabilité de B sachant A est la probabilité que B soit réalisé dans l'univers A.
- Dans une situation d'*équiprobabilité*, on a :

$$P_A(B) = \frac{\text{nombre d'événements élémentaires de } A \cap B}{\text{nombre d'événements élémentaires de } A}.$$

À RETENIR

Pour calculer $P_A(B)$, vous pouvez :

- soit utiliser la définition si vous connaissez $P(A \cap B)$ et $P(A)$.
- soit déterminer les résultats qui réalisent A et, parmi ceux-ci, calculer la probabilité de ceux qui réalisent B.

Propriété 1

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B).$$

Théorème 1

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. Alors :

$$P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1.$$

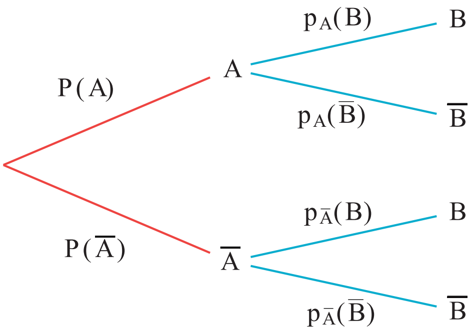
3.2 Arbre pondéré

On peut représenter une expérience aléatoire par un arbre pondéré de probabilités.

Un arbre pondéré de probabilités est constitué de branches.

Les événements élémentaires A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ s'appellent des *nœuds*.

$\overline{A}$ est l'événement contraire de A.



À RETENIR

- Dans un arbre, la somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin (suite de branches décrivant une succession d'événements) est égale au produit des probabilités situées sur les branches qui le composent.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement. On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice type 2

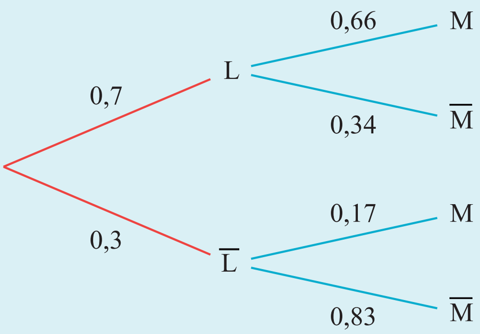
Lycée Virlogeux, Riom

1 $P(L)$ représente la probabilité que le cycliste soit licencié. 70% des participants sont licenciés donc $P(L) = 0{,}7$. Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures donc $P_L(M) = 0{,}66$.

Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours en plus de 5 heures donc :

$$P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right) = 0{,}83.$$

2 L'arbre pondéré représentant la situation est le suivant.



Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Virlogeux, Riom

3 La probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures est :

$$\begin{aligned} P(L \cap M) &= P(L) \times P_L(M) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}66 \\ &= 0{,}462. \end{aligned}$$

4 $$\begin{aligned} P(M) &= P(L \cap M) + P(\overline{L} \cap M) \\ &= P(L) \times P_L(M) + P(\overline{L}) \times P_{\overline{L}}(M) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}66 + 0{,}3 \times 0{,}17 \\ &= 0{,}513. \end{aligned}$$

5 On a :

$$P_M(L) = \frac{P(M \cap L)}{P(M)} = \frac{0{,}462}{0{,}513} \approx 0{,}900\,6.$$

Donc un peu plus de 90% des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club.

Voir énoncé page 31

4 Indépendance en probabilité de deux événements

4.1 Événements indépendants

Définition 4

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont *indépendants* lorsque $P_A(B) = P(B)$.

Propriété 2

- Si B est indépendant de A alors A est indépendant de B et :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

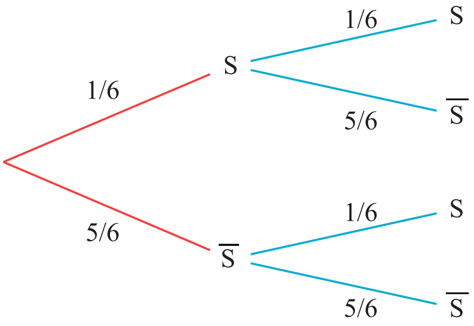
- Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

4.2 Successions d'épreuves indépendantes

Définition 5

Des expériences aléatoires qui se succèdent sont *indépendantes* si le résultat de chacun n'influe pas sur le résultat des autres. On peut alors modéliser cette succession d'épreuves par un arbre dont les sous-arbres associés à la deuxième épreuve sont identiques.

Exemple : on lance deux fois de suite un dé équilibré à 6 faces et on note les numéros obtenus.
On note S l'événement « le numéro obtenu est le 6 ».
Le résultat du lancer du premier dé n'influence pas le résultat du deuxième lancer. On peut modéliser cette succession d'épreuves indépendantes par un arbre pondéré.



La probabilité d'obtenir un seul 6 est :

$$\begin{aligned} p &= P(S;\overline{S}) + P(\overline{S};S) \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

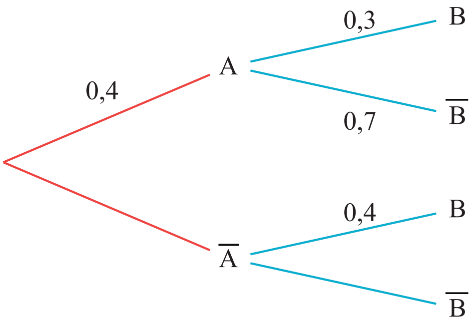
1 V/F Interprétation d'un arbre

15 min

Corrigé p. 44

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

On considère l'arbre pondéré ci-dessous où A et B sont deux événements.



1 $P_A(B) = 0{,}3$.
2 $P(\overline{A}) = 0{,}6$.
3 $P(A \cap B) = 0{,}7$.
4 $P_A(\overline{B}) = 0{,}7$.
5 $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4$.
6 $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}6$.
7 On admet que $P(B) = 0{,}36$.
Les événements A et B sont indépendants.

2 V/F Probabilités conditionnelles

15 min

Corrigé p. 44

Dans une grande entreprise, 30% des salariés sont cadres et parmi eux, 20% pratiquent le télétravail. Parmi les salariés non cadres, seulement 10% pratiquent le télétravail. On choisit au hasard un salarié et on note C et T les événements respectifs : « le salarié est cadre » et « le salarié pratique le télétravail ».

Indiquer pour chaque affirmation suivante si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1 $P(\overline{C}) = 0{,}7$.
2 $P(C \cap T) = 0{,}2$.
3 $P_C(\overline{T}) = 0{,}8$.
4 $P(\overline{C} \cap T) = 0{,}1$.
5 On admet que 13% des salariés pratiquent le télétravail.
  (a) Les événements C et T sont indépendants.
  (b) $P_T(C) \approx 0{,}462$.

3 QCM Probabilités conditionnelles

15 min

Corrigé p. 44

Pour chaque question, indiquer la ou les bonnes réponses.

Si besoin, les probabilités sont données arrondies au millième.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des médailles de la France aux Jeux Olympiques de Paris de 2024.

	Individuel(I)	Par équipe(E)	Total
Or(O)	10	6	16
Argent(A)	18	8	26
Bronze(B)	12	10	22
Total	40	24	64

On choisit une médaille au hasard et on note I, E, O, A, B les événements :

- I : « la médaille est une médaille individuelle »,
- E : « la médaille est une médaille par équipe »,
- O : « la médaille est en or »,
- A : « la médaille est en argent »,
- B : « la médaille est en bronze ».

1 $P(O) =$

a 0,25 **b** 0,157 **c** 0,625

2 $P(\overline{I}) =$

a 0,625 **b** 0,375 **c** 0,094

3 $P(I \cap A) =$

a 0,45 **b** 0,281 **c** 0,692

4 La probabilité que la médaille soit en bronze sachant que c'est une médaille individuelle est notée :

a $P_I(B)$ **b** $P(I \cap B)$ **c** $P_B(I)$

5 $P_A(\overline{I}) =$

a 0,45 **b** 0,125 **c** 0,308

6 La probabilité que la médaille soit une médaille en or par équipe est notée :

a $P(O \cap \overline{I})$ **b** $P_O(\overline{I})$ **c** $P_{\overline{I}}(O)$

7 La probabilité que la médaille choisie ne soit pas une médaille en or est égale à :

a 0,25 **b** $P(A)$ **c** 0,75

8 La probabilité que la médaille choisie soit une médaille par équipe sachant qu'elle est en bronze est égale à :

a 0,156 **b** $P_B(E)$ **c** 0,455

Calculer des fréquences à partir d'un tableau

4 Calculer des fréquences

★ 15 min Corrigé p. 45

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

Une association sportive de 360 adhérents propose trois sports : volley, boxe française et vélo. Chaque adhérent est inscrit à un seul sport parmi les trois. L'association compte 160 adhérents adultes, les autres étant juniors. On sait aussi que 25 % des adhérents sont inscrits au volley et 40 % à la boxe française. De plus, 50 juniors sont inscrits en volley et 60 adultes sont inscrits en vélo.

1. Construire le tableau croisé d'effectifs correspondant en différenciant les caractéristiques Juniors/Adultes d'une part et Volley/Boxe française/Vélo d'autre part.
2. Calculer la fréquence marginale des adhérents adultes.
3. Calculer la fréquence marginale des adhérents inscrits au vélo.
4. Calculer la fréquence conditionnelle des adhérents juniors parmi ceux inscrits à la boxe.
5. Calculer la fréquence conditionnelle des adhérents inscrits au volley parmi les adultes.

Calculer des probabilités à partir d'un tableau

5 Calculer des probabilités

★ 15 min Corrigé p. 45

Lycée La Merci, Montpellier

Une entreprise fabrique des chaudières de deux types :

- des chaudières dites « à cheminée » ;
- des chaudières dites « à ventouse ».

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses.

On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

- C : « La chaudière est à cheminée » ;
- V : « La chaudière est à ventouse » ;
- D : « La chaudière présente un défaut ».

1 Construire le tableau croisé d'effectifs correspondant en différenciant les caractéristiques Cheminée/Ventouse d'une part et Défaut/Sans défaut d'autre part.

2 Déterminer $P(C)$ et $P(V)$.

3 Calculer $P(C \cap D)$ et $P(V \cap D)$.

4 Calculer :

- **(a)** la probabilité qu'une chaudière à ventouse présente un défaut.
- **(b)** la probabilité qu'une chaudière à cheminée présente un défaut.

5 Calculer $P(D)$ et $P(\overline{D})$.

6 Calculer des probabilités

★★ 15 min Corrigé p. 46

Lycée Louis Vincent, Metz

Dans une classe de 25 élèves, 15 s'intéressent à la musique, 8 s'intéressent à la danse et 3 s'intéressent à la musique et à la danse.

1 Construire le tableau croisé d'effectifs correspondant.

2 On note M et D les événements :

- M : « l'élève s'intéresse à la musique »,
- D : « l'élève s'intéresse à la danse ».

Que signifient les événements suivants : $\overline{M}$, $M \cap D$, $M \cap \overline{D}$.

3 On choisit un élève au hasard. Calculer $P(\overline{M} \cap \overline{D})$.

4 On choisit un élève au hasard parmi ceux qui s'intéressent à la musique. Quelle est la probabilité que cet élève s'intéresse à la danse ?

Calculer des probabilités à l'aide d'un arbre

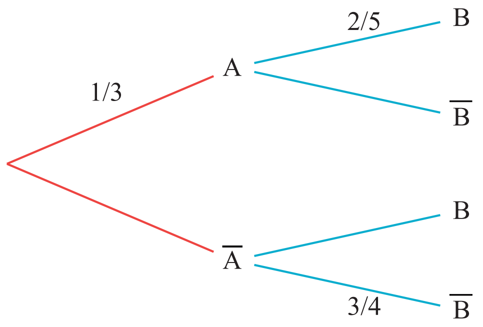
7 Interpréter un arbre

★ 10 min Corrigé p. 47

Lycée Charlemagne, Thionville

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B.

1 Compléter l'arbre pondéré page suivante.



2 Calculer les probabilités suivantes sous forme d'une fraction irréductible.

- **(a)** $P(A \cap B)$
- **(b)** $P(\overline{A} \cap B)$
- **(c)** $P(A \cap \overline{B})$
- **(d)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

8 Calculer des probabilités

★ 15 min Corrigé p. 47

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

Un laboratoire pharmaceutique met au point un test pour dépister une maladie. Une étude sur un échantillon de personnes montre que :

- Le test est positif dans 4% des cas.
- 7% des personnes ayant un test positif ne sont en fait pas malades (faux positifs).
- 93,12% des personnes testées ont un test négatif et ne sont pas malades.

On choisit une personne au hasard et on considère les événements :

- T :« le test est positif » ;
- M : « la personne est malade ».

1 Traduire les informations de l'énoncé en termes de probabilités.

2 Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

3 Calculer la probabilité que la personne ne soit pas malade sachant que son test est négatif.

4 En déduire la probabilité que la personne soit malade sachant que son test est négatif (faux négatif).

5 Dans quels cas le test commet-il une erreur ?

6 Calculer la probabilité que le test commette une erreur.

Étudier l'indépendance de deux événements

9 Événements indépendants ★ 5 min

Corrigé p. 48

Lycée St Exupéry, Créteil

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher :

- cinq boules noires numérotées 1 ; 1 ; 3 ; 4 ; 4,
- cinq boules rouges numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

On prélève au hasard une boule dans cette urne et on note :

- N l'événement : « La boule est noire » ;
- I l'événement : « La boule porte un numéro impair ».

Les événements N et I sont-ils indépendants ?

10 Indépendance de deux événements ★ 5 min

Corrigé p. 48

Lycée Lumière, Luxeuil-les-Bains

Une étude réalisée sur les étudiants d'une université a permis d'établir que 70% des étudiants possèdent un ordinateur et que, parmi ceux-ci, 40% possèdent une automobile. On sait aussi que 55% des étudiants de l'université ne possèdent pas d'automobile. On choisit au hasard un étudiant de cette université et on note :

- O l'événement « l'étudiant possède un ordinateur »,
- A l'événement « l'étudiant possède une automobile ».

Les événements O et A sont-ils indépendants ?

11 Indépendance de deux événements ★ 15 min

Corrigé p. 49

Lycée La Source, Meudon

Le cuisinier d'un centre de vacances a confectionné des beignets pour le goûter :

- 30 % des beignets sont à l'ananas, les autres sont aux pommes ;
- 35 % des beignets à l'ananas sont aromatisés à la cannelle, ainsi que 45% des beignets aux pommes.

On choisit un beignet au hasard et on définit les événements :

- A : « Le beignet choisi est à l'ananas » ;
- C : « Le beignet choisi est aromatisé à la cannelle ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

12 Indépendance de deux événements ★★ 15 min Corrigé p. 49

Lycée La Source, Meudon

1 On considère deux événements indépendants A et B tels que $P(A) = 0{,}75$ et $P(A \cap B) = 0{,}25$. Calculer $P(B)$.

2 On considère deux événements indépendants C et D tels que $P(C \cup D) = 0{,}403\,7$ et $P(C) = 0{,}11$. Calculer $P(D)$.

Modéliser une succession d'événements indépendants

13 Successions d'événements indépendants ★★★ 30 min Corrigé p. 50

Lycée Doisneau, Corbeil-Essonnes

Une joueuse de basket réussit un panier à trois points avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$. Cette joueuse effectue trois tirs successifs à trois points et on suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres.

On note :

- R_1 l'événement : « La joueuse réussit son premier tir » ;
- R_2 l'événement : « La joueuse réussit le deuxième tir » ;
- R_3 l'événement : « La joueuse réussit le troisième tir ».

Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1 Expliquer pourquoi cette expérience est constituée de trois épreuves successives indépendantes. Que peut-on en déduire pour les probabilités des événements R_1, R_2 et R_3 ?

2 Construire un arbre pondéré représentant cette situation.

3 **(a)** Calculer la probabilité que la joueuse réussisse ses trois tirs.
(b) En déduire la probabilité qu'elle rate au moins un tir.

4 Calculer la probabilité qu'elle réussisse exactement un tir.

Vers les maths complémentaires

14 Pour aller plus loin ★★★ 30 min Corrigé p. 51

Lycée Louis Vincent, Metz

Un jeu consiste à lancer de la main gauche une balle dans un seau. Parmi l'ensemble des joueurs, $\frac{5}{6}$ sont droitiers et $\frac{1}{6}$ sont gauchers.

Pour un joueur droitier, la probabilité de mettre la balle dans le seau est $\frac{1}{4}$.

Pour un joueur gaucher, cette probabilité est $\frac{1}{2}$.

1 On choisit au hasard un individu dans cette population. On note :

- G l'événement « l'individu choisi est gaucher »,
- S l'événement « l'individu met la balle dans le seau ».

(a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
(b) Déterminer la probabilité de l'événement $G \cap S$.
(c) Calculer la probabilité de l'événement S.
(d) Calculer la probabilité que la personne choisie soit droitière sachant qu'elle a mis la balle dans le seau.

2 Dans cette question, on a sélectionné Pierre, un joueur droitier. Il lance deux balles l'une après l'autre. On suppose les deux lancers indépendants.

(a) Modéliser la situation par un arbre pondéré.
(b) Déterminer la probabilité que, à l'issue des deux lancers, il y ait exactement une balle dans le seau.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

1 V/F Interprétation d'un arbre

Énoncé p. 36

1. *Vrai.* $P_A(B)$ est au 2^e niveau de l'arbre.
2. *Vrai.* $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
3. *Faux.* $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.
4. *Vrai.* $P_A(\overline{B})$ est au 2^e niveau de l'arbre.
5. *Faux.* $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$.
6. *Vrai.* $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ est au 2^e niveau de l'arbre.
7. *Faux.* $P_A(B) = 0{,}3 \neq 0{,}36$.

2 V/F Probabilités conditionnelles

Énoncé p. 36

1. *Vrai.* $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
2. *Faux.* $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$.
3. *Vrai.* $P_C(\overline{T}) = 1 - P_C(T) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
4. *Faux.* $P(\overline{C} \cap T) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(T) = 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}07$.
5. **(a)** *Faux.* $P_C(T) = 0{,}2 \neq 0{,}13$.

   (b) *Vrai.* $P_T(C) = \dfrac{P(C \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}13} \approx 0{,}462$.

3 QCM Probabilités conditionnelles

Énoncé p. 37

1. Réponse $\boxed{\text{a}}$. $P(O) = \dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.
2. Réponse $\boxed{\text{b}}$. $P(\overline{I}) = \dfrac{24}{64} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.
3. Réponse $\boxed{\text{b}}$. $P(I \cap A) = \dfrac{18}{64} = \dfrac{9}{32} \approx 0{,}281$.
4. Réponse $\boxed{\text{a}}$.
5. Réponse $\boxed{\text{c}}$. $P_A(\overline{I}) = \dfrac{8}{26} = \dfrac{4}{13} \approx 0{,}308$.
6. Réponse $\boxed{\text{a}}$.
7. Réponse $\boxed{\text{c}}$. $P(\overline{O}) = 1 - P(O) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.
8. Réponse $\boxed{\text{b}}$ et $\boxed{\text{c}}$. $P_B(E) = \dfrac{10}{22} \approx 0{,}455$.

4 Calculer des fréquences

Énoncé p. 38

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

1
- Il y a $360 - 160 = 200$ adhérents Juniors.
- $0{,}25 \times 360 = 90$ adhérents pratiquent le volley et $0{,}4 \times 360 = 144$ pratiquent la boxe française, donc $360 - 90 - 144 = 126$ adhérents pratiquent le vélo.
- $90 - 50 = 40$ adultes sont inscrits en volley et $126 - 60 = 66$ juniors sont inscrits en vélo.
- Il y a donc $200 - 66 - 50 = 84$ juniors et $160 - 40 - 60 = 60$ adultes inscrits en Boxe.

	Volley	Boxe	Vélo	Total
Juniors	50	84	66	200
Adultes	40	60	60	160
Total	90	144	126	360

2 La fréquence marginale des adhérents adultes est :

$$\frac{160}{360} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

3 La fréquence marginale des adhérents inscrits au vélo est :

$$\frac{126}{360} = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

4 La fréquence conditionnelle des adhérents juniors parmi ceux inscrits à la boxe est :

$$f_B(J) = \frac{84}{144} = \frac{7}{12} \approx 0{,}58.$$

5 La fréquence conditionnelle des adhérents inscrits au volley parmi les adultes est :

$$f_A(V) = \frac{40}{160} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

5 Calculer des probabilités

Énoncé p. 38

Lycée La Merci, Montpellier

1 On obtient le tableau suivant :

	Défaut	Sans défaut	Total
Cheminée	9	891	900
Ventouse	30	570	600
Total	39	1461	1500

Nous avons ici tenu compte de la méthode présentée page suivante.

MÉTHODE

Dans un tableau on peut calculer directement les probabilités $P_A(B)$.

$$P_A(B) = \frac{\text{nombre d'issues dans } A \cap B}{\text{nombre d'issues dans } A}$$

Nombres d'issues dans	A	$\overline{A}$	Total
B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$	B
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B}$
Total	A	$\overline{A}$	

2
- $P(C) = \dfrac{900}{1\,500} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$
- $P(V) = \dfrac{600}{1\,500} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4.$

3
- $P(C \cap D) = \dfrac{9}{1\,500} = \dfrac{3}{500} = 0{,}006.$
- $P(V \cap D) = \dfrac{30}{1\,500} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02.$

4 **(a)** $P_V(D) = \dfrac{30}{600} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05.$

(On pouvait aussi utiliser l'information de l'énoncé).

(b) $P_C(D) = \dfrac{9}{900} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ (même remarque).

5
- $$P(D) = P(D \cap V) + P(D \cap C) = 0{,}02 + 0{,}006 = 0{,}026.$$
- $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}026 = 0{,}974.$

6 Calculer des probabilités

Énoncé p. 39

Lycée Louis Vincent, Metz

1 Le tableau croisé est le suivant :

	M	$\overline{M}$	Total
D	3	5	8
$\overline{D}$	12	5	17
Total	15	10	25

2 $\overline{M}$ est l'événement « l'élève ne s'intéresse pas à la musique »,
$M \cap D$ est l'événement « l'élève s'intéresse à la musique et à la danse »,
$M \cap \overline{D}$ est l'événement « l'élève s'intéresse à la musique mais pas à la danse ».

3 On choisit un élève au hasard. On est donc en situation d'équiprobabilité.

$$P(\overline{M}\cap\overline{D})=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

4 Il s'agit d'une probabilité conditionnelle. La probabilité que cet élève s'intéresse à la danse sachant qu'il s'intéresse à la musique est :

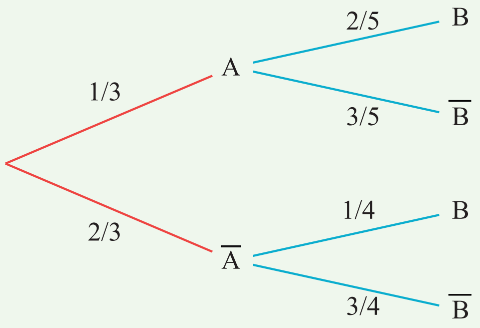
$$P_M(D)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

7 Interpréter un arbre

Énoncé
p. 39

Lycée Charlemagne, Thionville

1 L'arbre complété est le suivant :



2 **(a)** $P(A\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}.$

(b) $P(\overline{A}\cap B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}.$

(c) $P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.$

(d) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$

8 Calculer des probabilités

Énoncé
p. 40

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

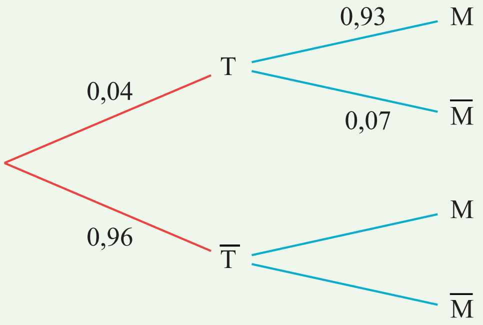
MÉTHODE

- Pour étudier de telles situations, on les représente à l'aide d'un arbre pondéré.
- On reporte sur les branches les probabilités connues puis on complète par les probabilités sur les autres branches.

1 D'après les informations de l'énoncé :

$$P(T)=0{,}04,\ P_T(\overline{M})=0{,}07 \text{ et } P(\overline{T}\cap\overline{M})=0{,}9312.$$

2 L'arbre pondéré décrivant la situation est le suivant :



3 $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{T} \cap \overline{M})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}9312}{0{,}96} = 0{,}97.$

4 $P_{\overline{T}}(M) = 1 - P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03.$

5 Le test commet une erreur lorsqu'il est positif et que la personne n'est pas malade ou lorsque le test est négatif et la personne est malade.

$$\begin{aligned} p &= P(T \cap \overline{M}) + P(\overline{T} \cap M) \\ &= 0{,}04 \times 0{,}07 + 0{,}96 \times 0{,}03 \\ &= 0{,}0316. \end{aligned}$$

9 Événements indépendants

Énoncé p. 41

Lycée St Exupéry, Créteil

$P(N) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ car il y a 5 boules noires parmi les 10 boules.

$P_I(N) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ car il y a 3 boules noires parmi les 6 boules portant un numéro impair.

Ainsi $P(N) = P_I(N)$; les événements N et I sont donc indépendants.

10 Indépendance de deux événements

Énoncé p. 41

Lycée Lumière, Luxeuil-les-Bains

MÉTHODE

Déterminer si deux événements O et A sont indépendants c'est, par exemple, déterminer si $P_O(A) \neq P(A)$. Il faut donc calculer ces deux probabilités.

D'après l'énoncé $P_O(A) = 0{,}4$ et $P(\overline{A}) = 0{,}55$ donc :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}45.$$

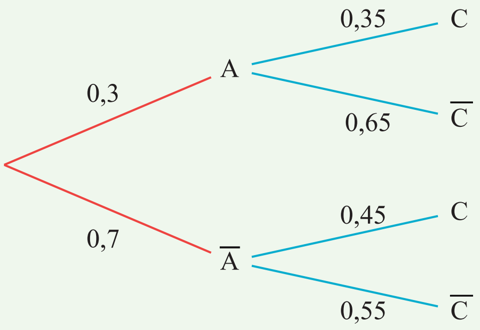
Ainsi $P_O(A) \neq P(A)$ donc les événements O et A ne sont pas indépendants.

11 Indépendance de deux événements

Énoncé
p. 41

Lycée La Source, Meudon

1 L'arbre pondéré décrivant la situation est le suivant :



2 $P_A(C) = 0{,}35$ d'après l'énoncé. Or,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}35 + 0{,}7 \times 0{,}45 \\ &= 0{,}42. \end{aligned}$$

$P_A(C) \neq P(C)$ donc les événements A et C ne sont pas indépendants.

12 Indépendance de deux événements

Énoncé
p. 42

Lycée La Source, Meudon

1 A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc :

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}.$$

2 $$\begin{aligned} P(C \cup D) &= P(C) + P(D) - P(C \cap D) \\ &= P(C) + P(D) - P(C) \times P(D) \end{aligned}$$

car C et D sont indépendants.

D'où :

$$0{,}403\,7 = 0{,}11 + P(D) - 0{,}11 \times P(D)$$

ou encore

$$0{,}403\,7 - 0{,}11 = 0{,}89 \times P(D).$$

Ainsi,

$$P(D) = \frac{0{,}2937}{0{,}89} = 0{,}33.$$

13 Successions d'événements indépendants

Énoncé p. 42

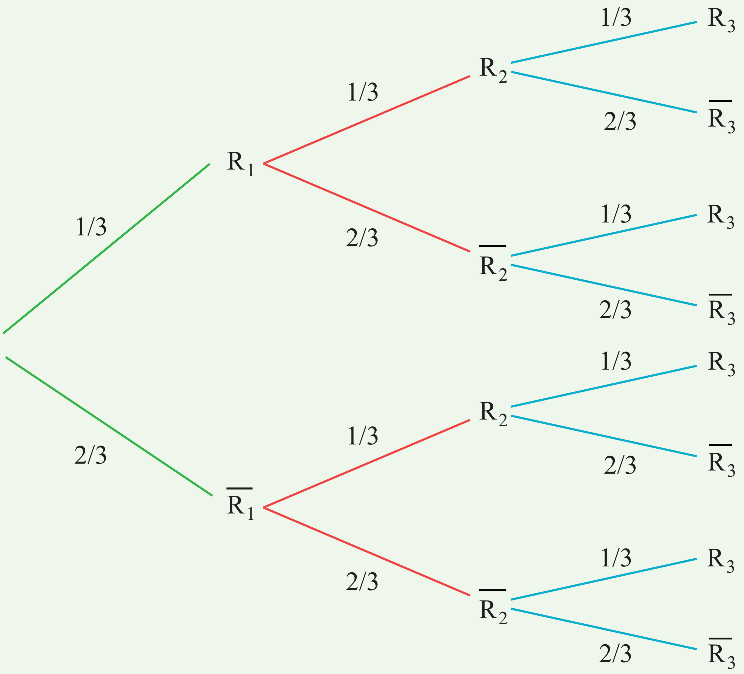
Lycée Doisneau, Corbeil-Essonnes

MÉTHODE

- Les épreuves sont *indépendantes* : les probabilités sur les branches restent identiques d'une épreuve à l'autre.
- La probabilité d'une issue (ici R_1, $\overline{R_2}$, $\overline{R_3}$) est égale au produit des probabilités rencontrées sur le chemin qui mène à cette issue.

1 On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres, donc cette expérience est constituée de trois épreuves successives indépendantes. On en déduit que : $P(R_1) = P(R_2) = P(R_3)$.

2 L'arbre pondéré représentant la situation est le suivant :



3 **(a)** La probabilité que la joueuse réussisse ses trois tirs correspond à la probabilité du chemin passant par R_1, R_2 et R_3.

Elle est donc égale à :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

(b) L'événement « La joueuse rate au moins un tir » est l'événement contraire de l'événement « La joueuse réussit ses trois tirs » soit :

$$1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

4 Il y a trois chemins qui mènent à l'événement « La joueuse réussit exactement un tir » :

- celui qui passe par R_1, $\overline{R_2}$ et $\overline{R_3}$,
- celui qui passe par $\overline{R_1}$, R_2 et $\overline{R_3}$,
- celui qui passe par $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$ et R_3.

Sa probabilité est donc égale à :

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}.$$

La probabilité que la joueuse réussisse exactement un tir est égale à $\frac{4}{9}$.

14 Pour aller plus loin

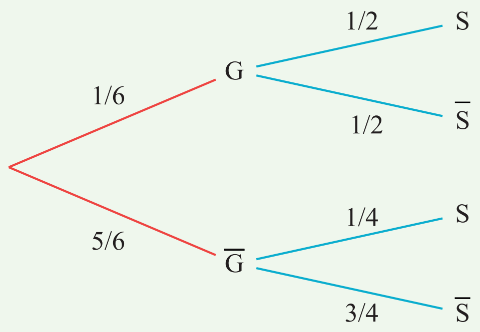
Énoncé p. 42

Lycée Louis Vincent, Metz

MÉTHODE

- La probabilité de l'intersection $G \cap S$ se calcule en multipliant les probabilités du chemin associé à $G \cap S$.
- La probabilité de S se calcule en additionnant les probabilités de tous les chemins associés à S.

1 **(a)** L'arbre décrivant la situation est le suivant :

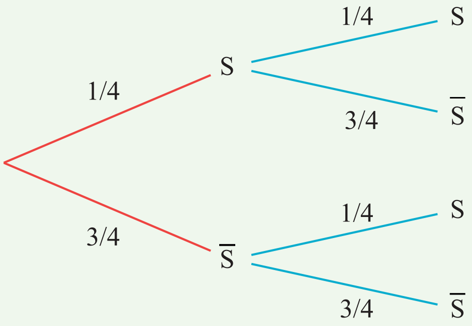


(b) $P(G \cap S)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$

(c)
$$\begin{aligned}P(S)&=P(G\cap S)+P(\overline{G}\cap S)\\&=\frac{1}{12}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

(d) $$P_S(\overline{G}) = \frac{P(S \cap \overline{G})}{P(S)} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{7}{24}} \qquad = \frac{5}{7}.$$

2 **(a)** L'arbre décrivant la situation est le suivant :



(b) $$p = P(S;\overline{S}) + P(\overline{S};S) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Chapitre 3

Croissance linéaire

Plan du chapitre

1 Introduction

Que ce soit en économie ou dans la vie quotidienne, les modèles mathématiques sont omniprésents. On différencie les phénomènes discrets et les phénomènes continus.

Lorsque les modèles utilisés génèrent des valeurs augmentant ou diminuant de façon constante, on parle de croissance linéaire.

2 Fonctions affines

Exercice type 1 **Lycée Bellevue, Alès**

1. Déterminer la fonction affine f de la forme $f(x) = ax + b$ telle que $f(-1) = 5$ et $f(2) = 1$.
2. Représenter graphiquement la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 3x - 2.$$
3. Déterminer le sens de variation de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \frac{-5 + 3x}{4}.$$

Voir corrigé page 54

Définition 1 : fonction affine

- Une fonction *affine* f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.
- Elle est représentée par une droite dont a est le *coefficient directeur* et b l'*ordonnée à l'origine*.

Remarques

- Si $a = 0$, la fonction f est *constante*.
- Si $b = 0$, la fonction f est *linéaire*.

Propriété 1 : accroissement d'une fonction affine

Le *taux d'accroissement* de la fonction f entre les abscisses x_1 et x_2 est égal à :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{(avec } x_1 \neq x_2\text{).}$$

Propriété 2 : sens de variation d'une fonction affine

Le signe du coefficient directeur a donne le sens de variation de la fonction :

- si $a > 0$, la fonction affine est *croissante* sur $\mathbb{R}$,
- si $a < 0$, la fonction affine est *décroissante* sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Bellevue, Alès

1 Le coefficient a correspond au taux d'accroissement de f :

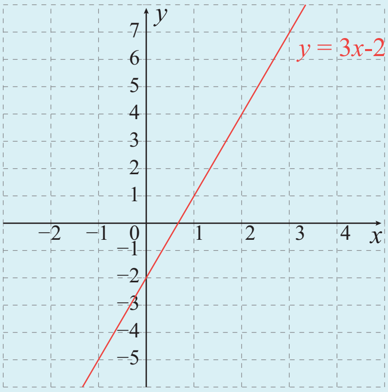
$$a = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - 5}{3} = \frac{-4}{3}.$$

Pour déterminer b, on utilise une image avec $f(x) = -\frac{4}{3}x + b$.

$$f(2) = 1 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\times 2 + b = 1 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 + \frac{8}{3} \Leftrightarrow b = \frac{11}{3}.$$

La fonction affine f a pour expression : $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$.

2 La représentation graphique de g est une droite. L'ordonnée à l'origine vaut -2 donc la droite passe par le point $(0; -2)$. Le coefficient directeur vaut 3. Donc à partir du point $(0; -2)$, on « avance » d'une unité et on « monte » de 3 unités. La droite passe donc par le point $(1; 1)$.



3 $h(x) = \frac{-5 + 3x}{4} = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$. Il s'agit d'une fonction affine avec $a = \frac{3}{4}$, positif donc h est strictement croissante.

Voir énoncé page 53

3 Suite numérique

Exercice type 2 **Lycée Galois, Sartrouville**

1 On considère la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 0{,}5n^2 + 1$.
Calculer les trois premiers termes et le terme de rang 100.

2 On considère la suite v définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = 1 + \dfrac{2}{n}$.
Calculer les termes v_3, v_4, v_5 et v_{100} sous forme de fraction irréductible.

3 On considère la suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n - 5$.
Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

4 On considère la suite (v_n) définie par son terme initial $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = n + v_n$.
Calculer les termes v_1, v_2, v_3 et v_4.

Voir corrigé page 57

3.1 Notion de suite numérique

Définition 2 : suite numérique

Une *suite numérique* est une fonction dont la variable notée n est un entier naturel.
Le nombre $u(n)$ est appelé le *terme de rang* n de la suite u.

Remarque : la suite u se note également (u_n) ou $(u(n))$.

ATTENTION

Ne pas confondre u_n ou $u(n)$ qui est le terme de rang n de la suite et (u_n) ou $(u(n))$ qui est la notation de la suite u.

Exemple : la suite :

$$0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ \ldots$$

est la suite des nombres pairs.
On note $(u(n))$ cette suite. Ainsi $u(0) = 0$, $u(1) = 2$, $u(2) = 4, \ldots$

Propriété 3

Dans un repère, la *représentation graphique* d'une suite $(u(n))$ est le nuage de points de coordonnées $(n; u(n))$ pour tout entier naturel n.

3.2 Sens de variation

Définition 3 : suite croissante ou décroissante

Soit u une suite numérique.

- Dire que la suite u est croissante signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Dire que la suite u est décroissante signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Dire que la suite u est constante signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

3.3 Différentes façons de définir une suite

Définition 4 : avec une formule explicite

On définit le terme général u_n en fonction de son indice n.

Exemple : si (u_n) est la suite définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 0{,}5n + 1$ alors elle est définie de manière explicite et :

- $u_0 = 0{,}5 \times 0 + 1 = 1$,
- $u_1 = 0{,}5 \times 1 + 1 = 1{,}5$,
- $u_2 = 0{,}5 \times 2 + 1 = 2$,
- ...

Définition 5 : avec une relation de récurrence

Une suite (u_n) est définie par *récurrence* quand elle est définie par la donnée :

- de son terme initial, généralement u_0 ;
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant.

Cette relation est appelée *relation de récurrence*.

Exemple : si (v_n) est la suite définie par $v_0 = -1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 0{,}5v_n + 1$ alors elle est définie par récurrence et :

- $v_1 = 0{,}5 \times v_0 + 1 = 0{,}5$,
- $v_2 = 0{,}5 \times v_1 + 1 = 1{,}25$,
- $v_3 = 0{,}5 \times v_2 + 1 = 1{,}625$,
- ...

Solution de l'exercice type 2

Lycée Galois, Sartrouville

1 Cette suite est définie de manière explicite.

- $u_0 = 0{,}5 \times 0^2 + 1 = 1$; $u_1 = 0{,}5 \times 1^2 + 1 = 1{,}5$;
- $u_2 = 0{,}5 \times 2^2 + 1 = 3$;
- $u_{100} = 0{,}5 \times 100^2 + 1 = 5\,001$.

2 Cette suite est définie de manière explicite.

- $v_3 = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$;
- $v_4 = 1 + \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{2}$;
- $v_5 = 1 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{7}{5}$;
- $v_{100} = 1 + \dfrac{2}{100} = \dfrac{51}{50}$.

3 Cette suite est définie par une relation de récurrence.

- $u_1 = 2 \times u_0 - 5 = 2 \times (-3) - 5 = -11$;
- $u_2 = 2 \times u_1 - 5 = 2 \times (-11) - 5 = -27$;
- $u_3 = 2 \times u_2 - 5 = 2 \times (-27) - 5 = -59$;
- $u_4 = 2 \times u_3 - 5 = 2 \times (-59) - 5 = -123$.

4 Cette suite est définie par une relation de récurrence.

- $v_1 = 0 + v_0 = 2$;
- $v_2 = 1 + v_1 = 1 + 2 = 3$;
- $v_3 = 2 + v_2 = 2 + 3 = 5$;
- $v_4 = 3 + v_3 = 3 + 5 = 8$.

Voir énoncé page 55

4 Suites arithmétiques

Exercice type 3

Lycée Galois, Sartrouville

1 On considère la suite arithmétique u de raison -2 et de terme initial $u_0 = 10$.

(a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

(b) Calculer u_1 puis u_2.

2 On considère la suite v définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 3n + 4$. Calculer les termes v_0, v_1 et v_{10}.

• • •

Exercice type 3 (suite)

Lycée Galois, Sartrouville

3 On considère la suite w de terme initial $w_0 = 9$ et définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_{n+1} = w_n + 5$.

(a) Calculer w_1 et w_2.

(b) Donner la nature de la suite w et préciser la raison.

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de w_n en fonction de n.

(d) Calculer w_{10}.

Voir corrigé page 59

Définition 6 : suite arithmétique

Une suite u est *arithmétique* lorsqu'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé la *raison* de la suite.

Exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$$

est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison 1.

Remarque : une suite est donc arithmétique si tout terme se déduit du terme précédent en ajoutant un même nombre réel r, ou si la différence entre deux termes successifs est constante.

Théorème 1 : formule explicite

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors, pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_0 + n \times r.$$

Exemple : soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = 1 + n \times 2 = 2n + 1.$$

Propriété 4 : représentation graphique et sens de variation

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

- Dans un repère orthogonal, les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont *alignés*.
- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

Remarque : une suite arithmétique permet de modéliser un phénomène *discret à croissance linéaire*.

Solution de l'exercice type 3

Lycée Galois, Sartrouville

1 **(a)** u est une suite arithmétique de raison -2 et de terme initial $u_0 = 10$ donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - 2.$$

(b)
- $u_1 = u_0 - 2 = 10 - 2 = 8\,;$
- $u_2 = u_1 - 2 = 8 - 2 = 6.$

2 v est une suite arithmétique définie de manière explicite.

- $v_0 = 3 \times 0 + 4 = 4\,;$
- $v_1 = 3 \times 1 + 4 = 7\,;$
- $v_{10} = 3 \times 10 + 4 = 34.$

3 **(a)**
- $w_1 = w_0 + 5 = 9 + 5 = 14\,;$
- $w_2 = w_1 + 5 = 14 + 5 = 19.$

(b) La relation de récurrence « $w_{n+1} = w_n + 5$ » nous indique que chaque terme se déduit du précédent en ajoutant 5.
Ainsi w est une suite arithmétique de raison 5.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = w_0 + n \times r = 9 + 5n.$$

(d) $w_{10} = 9 + 5 \times 10 = 59.$

Voir énoncé page 57

1 V/F Suite arithmétique

10 min — Corrigé p. 65

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}.$$

Les affirmations suivantes sont-elles *vraies* ou *fausses* ? Justifiez vos réponses.

1 $u_2 = 0{,}5$.

2 La suite u est arithmétique.

3 Le cinquième terme de la suite est $u_5 = 1{,}25$.

4 La forme explicite de u est $u_n = \frac{n}{4}$.

5 La fonction affine associée à cette suite est linéaire.

6 Si $n \geqslant 100$ alors $u_n > 25$.

7 Le cinquième terme de la suite arithmétique v de raison 2 et de premier terme $-\frac{1}{2}$ est 9,5.

8 On considère la suite arithmétique w de raison -2 et de premier terme 4. Le coefficient directeur de la droite qui contient tous les points de coordonnées $(n; w_n)$ est 4.

9 Les termes d'une suite arithmétique ne peuvent pas être tous égaux.

2 QCM Suite arithmétique

5 min — Corrigé p. 65

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses.

Soit la suite arithmétique u définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 4. \end{cases}$$

1 Le terme u_2 vaut :

a -7 b -3 c 13

2 La raison de la suite est :

a 5 b 4 c -4

3 La suite est :

a croissante b décroissante c constante

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$

a $n - 4$ b $-4n + 5$ c $5n - 4$

Fonction affine

3 Fonction affine

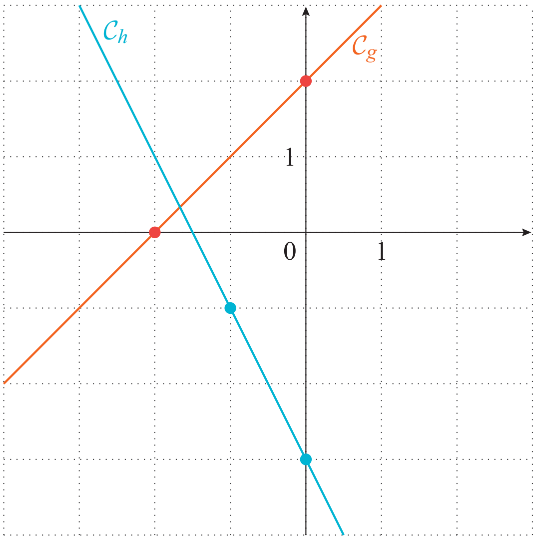
★ 15 min Corrigé p. 66

Lycée Alain, Le Vésinet

1 Déterminer l'expression $f(x)$ de la fonction affine f telle que :

$$f(-1) = -3 \qquad \text{et} \qquad f(2) = 3.$$

2 Dans le repère ci-dessous, les fonctions g et h sont représentées.



Donner l'expression de chacune de ces fonctions affines.

3 **(a)** Représenter la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$ dans le repère ci-dessus.

(b) Quel est le sens de variation de la fonction k sur $\mathbb{R}$?

4 Croissance linéaire

★★ 15 min Corrigé p. 67

Lycée Brel, La Courneuve

La pression de l'eau sur un plongeur se calcule à l'aide de la formule $P = \dfrac{F}{S}$, où P est la pression, en pascal (Pa), F est la force de pression exercée, en newton (N), et S, la surface corporelle, en m^2.

1 La pression de l'eau définit-elle une croissance linéaire en fonction de F ou de S ? Justifier.

2 La surface corporelle moyenne d'un humain adulte est de $1{,}73\ m^2$.

(a) Calculer la pression de l'eau sur un plongeur lorsque la force vaut 2,595 N.

(b) Calculer la force de pression exercée sur un plongeur lorsque la pression est de 1 bar, soit 10^5 Pa.

5 Fonction affine

★★ 20 min Corrigé p. 67

Lycée Aubrac, Pantin

La température $f(x)$ en degré Fahrenheit (°F) en fonction de la température x en °C vérifie une croissance linéaire telle que $f(37) = 98{,}6$ et $f(100) = 212$.

1. Déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la représentation graphique de f, puis en déduire l'expression de f.
2. Convertir 107,6 °F en °C.
3. Déterminer l'expression de la température en °C en fonction de celle en °F. Obtient-on une fonction affine ? Justifier.

Suites numériques

6 Suite et Python

★ 5 min Corrigé p. 68

Lycée St Exupéry, Toulouse

Voici une fonction u en langage Python.

```python
def u(n):
    u=2*n**2-3*n+5
    return u
```

1. Définir la suite explicite (u_n) dont cette fonction permet de calculer les termes.
2. Que vaut u_{10} ?

7 Suite et tableur

★ 5 min Corrigé p. 68

Lycée Brel, La Courneuve

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E
1	n	0	1	2	3
2	u_n	-2	`=3*C1^2+5*C1-2`		
3					

1. Si on étend la formule de la case `C2` à la case `D2`, quelle est la valeur de u_2 ?
2. Exprimer le terme général u_n en fonction de n en utilisant la formule donnée par le tableur.

Suites arithmétiques

8 Suite arithmétique

★ 15 min Corrigé p. 69

Lycée Alain, Le Vésinet

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 48$ et de raison -5.

1 Donner la relation de récurrence vérifiée par (u_n), puis la formule explicite de (u_n).

2 Calculer u_5.

3 Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

9 Suite arithmétique et Python

★★ 20 min Corrigé p. 69

Lycée Déodat, Toulouse

On considère la suite arithmétique (u_n) dont le terme de rang n s'obtient grâce à l'algorithme ci-dessous :

```
def suite(n):
    u=10
    for k in range(1,n+1):
        u=u+4
        return u
```

1 **(a)** Préciser le premier terme u_0 ainsi que la raison.
(b) En déduire la formule explicite de u_n.

2 **(a)** En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1\,000$.
(b) Modifier la fonction Python précédente pour qu'elle réponde à la question précédente.

10 Modéliser

★★ 20 min Corrigé p. 70

Lycée Montaigne, Bordeaux

Une famille décide d'épargner afin de pouvoir s'offrir un voyage. La première année, elle économise 500 euros. Chaque année, elle augmente la somme épargnée de 100 euros. Pour $n \geqslant 1$, on note s_n la somme épargnée l'année n.

1 Déterminer s_1, s_2, s_3 et s_4.

2 Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.

3 En déduire la nature de la suite (s_n) puis son terme général.

4 Déterminer dans combien d'années la famille pourra partir en voyage sachant que le voyage coûte 4 200 euros.

11 Modéliser

★★ 20 min Corrigé p. 70

Lycée Michelet, Vanves

En 2025, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un influenceur était de 9 000. On suppose que, chaque année, il obtient 1 500 followers supplémentaires. f_n désigne le nombre d'abonnés en $2025 + n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2026 et 2027.
2. Exprimer f_{n+1} en fonction de f_n.
3. Quelle est la nature de la suite ? En déduire une expression de f_n en fonction de n.
4. Existe-t-il une année pour laquelle le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à 2025 ? Si oui, laquelle ?

Vers les maths complémentaires

12 Suite homographique

★★★ 30 min Corrigé p. 71

Lycée St-Exupéry, Mantes-la-Jolie

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 1}{4u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1.
2. On considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 0{,}5}.$$

   - **(a)** Calculer v_0.
   - **(b)** Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 4$.
     Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   - **(c)** En déduire une expression de v_n pour tout entier naturel n.
   - **(d)** En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1}{0{,}4 + 4n} - 0{,}5.$$

   - **(e)** Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < -0{,}499$.

1 V/F Suite arithmétique

Énoncé p. 60

1 *Vrai*. On a :

- $u_1 = u_0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$,
- $u_2 = u_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

2 *Vrai*. La suite u est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ car :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}.$$

3 *Faux*. Le cinquième terme de la suite est $u_4 = 1$.

4 *Vrai*. La forme explicite de la suite est :

$$u_n = u_0 + n \times r = 0 + n \times \frac{1}{4} = \frac{n}{4}.$$

5 *Vrai*. La fonction affine associée à la suite est définie par :

$$f(n) = \frac{n}{4} = \frac{1}{4}n, \text{ qui est une fonction linéaire.}$$

6 *Faux*. $r = \frac{1}{4} > 0$ donc la suite est croissante. $u_{100} = 25$ donc si $n \geqslant 100$ alors $u_n \geqslant 25$ (inégalité *large* et non *stricte*).

7 *Faux*. Le cinquième terme de la suite arithmétique v de raison 2 et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$ est :

$$v_4 = v_0 + 4 \times 2 = -\frac{1}{2} + 8 = 7{,}5.$$

8 *Faux*. La droite qui contient tous les points de coordonnées $(n; w_n)$ a pour équation $y = -2x + 4$. Elle a donc pour coefficient directeur -2.

9 *Faux*. Si la raison de la suite vaut 0, tous les termes de la suite seront égaux.

2 QCM Suite arithmétique

Énoncé p. 60

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On a :

- $u_1 = u_0 - 4 = 5 - 4 = 1$;
- $u_2 = u_1 - 4 = 1 - 4 = -3$.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $u_{n+1} = u_n - 4$ est l'expression par récurrence d'une suite arithmétique de raison $r = -4$.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. La raison de la suite est négative donc la suite est décroissante.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. L'expression du terme général de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -4$ est $u_n = u_0 + n \times r = 5 - 4n$.

3 Fonction affine

Énoncé p. 61

Lycée Alain, Le Vésinet

1 $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$.

- Calcul de a :

$$a = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$$
$$a = \frac{3 + 3}{3}$$
$$a = 2.$$

$f(x) = 2x + b$.

- Calcul de b :

$$\begin{aligned} f(2) = 3 &\iff 2 \times 2 + b = 3 \\ &\iff 4 + b = 3 \\ &\iff b = -1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 2x - 1$.

2
- La courbe de g passe par le point $(0; 2)$ donc l'ordonnée à l'origine est :

$$b = 2.$$

Elle passe également par le point $(-2; 0)$ donc :

$$a = \frac{2 - 0}{0 - (-2)}$$
$$a = \frac{2}{2}$$
$$a = 1.$$

Ainsi $g(x) = x + 2$.

- De manière identique, la courbe de h passe par $(0; -3)$ donc :

$$b = -3.$$

Elle passe également par le point $(-1; -1)$ donc :

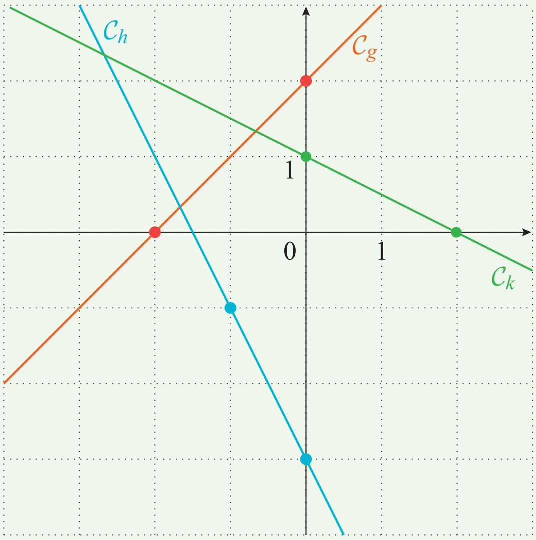
$$a = \frac{-3 - (-1)}{0 - (-1)}$$
$$a = \frac{-2}{1}$$
$$a = -2.$$

Ainsi $h(x) = -2x - 3$.

3 **(a)** Pour tracer la droite représentant la fonction k, il faut tracer deux points. On donne deux valeurs à x et on calcule les valeurs de $k(x)$ correspondantes.

- Si $x = 0$ alors $k(0) = 1$. On place le point $(0; 1)$.
- Si $x = 2$ alors $k(2) = 0$. On place le point $(2; 0)$.

Ensuite, on trace la droite passant par ces deux points.



(b) Pour la fonction affine k, le coefficient directeur $a = -\frac{1}{2}$ est négatif donc la fonction k est décroissante.

4 Croissance linéaire

Énoncé p. 61

Lycée Brel, La Courneuve

1 La pression de l'eau définit une croissance linéaire en fonction de F puisque P peut s'écrire sous la forme $P = \frac{1}{S} \times F$.

2 **(a)** On remplace S par $1{,}73$ et F par $2{,}595$ et on obtient :

$$P = \frac{2{,}595}{1{,}73} = 1{,}5.$$

Ainsi, la pression de l'eau est de 1,5 Pa.

(b) Lorsque $P = 10^5$, on a :

$$10^5 = \frac{F}{1{,}73} \iff F = 10^5 \times 1{,}73 = 173\ 000.$$

La force exercée est donc de 173 000 N.

5 Fonction affine

Énoncé p. 62

Lycée Aubrac, Pantin

1 f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$. Elle est représentée par une droite d'équation $y = ax + b$ où a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

- Calcul de a :

$$a = \frac{f(100) - f(37)}{100 - 37} = \frac{212 - 98{,}6}{63} = \frac{113{,}4}{63} = 1{,}8.$$

Ainsi $f(x) = 1{,}8x + b$.

- Calcul de b :

$$\begin{aligned} f(100) = 212 &\iff 1{,}8 \times 100 + b = 212 \\ &\iff b = 212 - 180 = 32. \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 1{,}8x + 32$.

Le coefficient directeur est donc 1,8 et l'ordonnée à l'origine 32.

2 On cherche x tel que $f(x) = 107{,}6$.

$$\begin{aligned} f(x) = 107{,}6 &\iff 1{,}8x + 32 = 107{,}6 \\ &\iff 1{,}8x = 107{,}6 - 32 \\ &\iff 1{,}8x = 75{,}6 \\ &\iff x = \frac{75{,}6}{1{,}8} = 42. \end{aligned}$$

Donc 107,6°F correspond à 42°C.

3 Notons y la température en °F. Nous voulons isoler x (la température en °C) dans l'équation.

$$\begin{aligned} y = 1{,}8x + 32 &\iff y - 32 = 1{,}8x \\ &\iff x = \frac{y - 32}{1{,}8} = \frac{1}{1{,}8}y - \frac{32}{1{,}8} \\ &\iff x = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9}. \end{aligned}$$

On obtient donc $g(y) = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9}$, qui est l'expression d'une fonction affine.

6 Suite et Python

Énoncé p. 62

Lycée St Exupéry, Toulouse

1 La forme explicite de cette suite est : $u_n = 2n^2 - 3n + 5$.

2 $u_{10} = 2 \times 10^2 - 3 \times 10 + 5 = 175$.

7 Suite et tableur

Énoncé p. 62

Lycée Brel, La Courneuve

1 $u_2 = 3 \times 2^2 + 5 \times 2 - 2 = 20$.

2 $u_n = 3n^2 + 5n - 2$

8 Suite arithmétique

Énoncé p. 63

Lycée Alain, Le Vésinet

1 La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_{n+1} = u_n - 5, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La formule explicite de la suite est :

$$u_n = u_0 + n \times r = 48 - 5n.$$

2 $u_5 = 48 - 5 \times 5 = 23$.

3 $r = -5$ est négatif donc la suite est strictement décroissante.

9 Suite arithmétique et Python

Énoncé p. 63

Lycée Déodat, Toulouse

1 **(a)** C'est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 4$.

(b) La formule explicite est donc :

$$u_n = u_0 + n \times r = 10 + 4n.$$

2 **(a)** On cherche n tel que :

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 1000 &\iff 10 + 4n \geqslant 1\,000 \\ &\iff 4n \geqslant 990 \\ &\iff n \geqslant \frac{990}{4} \\ &\iff n \geqslant 247{,}5. \end{aligned}$$

Le plus petit entier est donc 248.

(b) La fonction modifiée est la suivante :

```python
def suite():
    u=10
    n=0
    while u<1000:
        u=u+4
        n=n+1
    return(n)
```

10 Modéliser

Énoncé p. 63

Lycée Montaigne, Bordeaux

À RETENIR

- Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_n + r.$$
- Si (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
- Si (u_n) est arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p, on a : $u_n = u_p + (n - p) \times r$.

1
- $s_1 = 500$,
- $s_2 = 500 + 100 = 600$,
- $s_3 = 600 + 100 = 700$,
- $s_4 = 700 + 100 = 800$.

2 $s_{n+1} = s_n + 100$.

3 (s_n) est une suite arithmétique de raison 100 et de premier terme $s_1 = 500$. La suite commence donc au terme s_1. Ainsi,

$$\begin{aligned} s_n &= s_1 + (n-1) \times r = 500 + (n-1) \times 100 \\ &= 500 + 100n - 100 \\ &= 400 + 100n. \end{aligned}$$

4 On cherche n tel que $s_n \geqslant 4\,200$.

$$\begin{aligned} s_n \geqslant 4\,200 &\iff 400 + 100n \geqslant 4\,200 \\ &\iff 100n \geqslant 3\,800 \\ &\iff n \geqslant 38. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille pourra partir en voyage au bout de 38 années.

11 Modéliser

Énoncé p. 64

Lycée Michelet, Vanves

1
- Le nombre d'abonnés en 2026 correspond à :
$$f_1 = 9\,000 + 1\,500 = 10\,500.$$
- Le nombre d'abonnés en 2027 est :
$$f_2 = 10\,500 + 1\,500 = 12\,000.$$

2 $f_{n+1} = f_n + 1500$.

3 (f_n) est donc une suite arithmétique de raison 1 500 et de premier terme $f_0 = 9\,000$ (qui correspond au nombre d'abonnés en 2025).

$$f_n = f_0 + n \times r = 9\,000 + 1\,500n.$$

4 On cherche s'il existe une valeur n telle que $f_n = 3 \times 9\,000 = 27\,000$.

$$\begin{aligned} 9\,000 + 1\,500n = 27\,000 &\iff 1\,500n = 18\,000 \\ &\iff n = \frac{18\,000}{1\,500} = 12. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre d'abonnés devrait avoir triplé au bout de 12 années, soit en $2025 + 12 = 2037$.

12 Suite homographique

Énoncé p. 64

Lycée St-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-u_0 - 1}{4u_0 + 3} \\ &= \frac{-2-1}{4 \times 2 + 3} \\ u_1 &= -\frac{3}{11}. \end{aligned}$$

2 **(a)**

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{u_0 + 0{,}5} \\ &= \frac{1}{2{,}5} \\ &= 0{,}4. \end{aligned}$$

(b) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 0{,}5} - \frac{1}{u_n + 0{,}5} \\ &= \frac{1}{\frac{-u_n - 1}{4u_n + 3} + 0{,}5} - \frac{1}{u_n + 0{,}5} \\ &= \frac{1}{\frac{-u_n - 1 + 0{,}5(4u_n + 3)}{4u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 0{,}5} \\ &= \frac{4u_n + 3}{u_n + 0{,}5} - \frac{1}{u_n + 0{,}5} \\ &= \frac{4u_n + 2}{u_n + 0{,}5} \\ &= \frac{4(u_n + 0{,}5)}{u_n + 0{,}5} \\ &= 4. \end{aligned}$$

(c) La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 4 et de premier terme 0,4.

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 + n \times r = 0{,}4 + 4n.$$

(d) Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{u_n + 0{,}5}$.

Ainsi,

$$\frac{1}{v_n} = u_n + 0{,}5$$

et donc :

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 0{,}5 = \frac{1}{0{,}4 + 4n} - 0{,}5.$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n < -0{,}499 &\iff \frac{1}{0{,}4+4n} - 0{,}5 < -0{,}499 \\ &\iff \frac{1}{0{,}4+4n} < 0{,}001 \\ &\iff 0{,}4 + 4n > 1\,000 \\ &\iff n > \frac{1\,000 - 0{,}4}{4}. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1\,000 - 0{,}4}{4} = 249{,}9.$$

L'entier cherché est donc 250.

Chapitre 4

Croissance exponentielle

Plan du chapitre

1 Introduction

Lorsque les modèles mathématiques génèrent des valeurs augmentant ou diminuant de façon proportionnelle à la valeur précédente, on parle de croissance exponentielle.

2 Suites géométriques

Exercice type 1 **Lycée Genevoix, Montrouge**

1 On considère la suite géométrique u de raison 4 et de terme initial $u_0 = 1$.

(a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

(b) Calculer u_1 puis u_2.

2 On considère la suite v définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2 \times 3^n$.
La suite v est-elle géométrique ?

3 On considère la suite w de terme initial $w_0 = 3$ et définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_{n+1} = 5w_n$.

(a) Calculer w_1 et w_2.

(b) Donner la nature de la suite w et préciser la raison.

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de w_n en fonction de n.

(d) Calculer w_4.

Voir corrigé page 75

Définition 1 : suite géométrique

Une suite u est *géométrique* lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.
q est appelé la *raison* de la suite.

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2{,}5u_n$$

est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 2,5.

Remarque : une suite est donc géométrique si tout terme se déduit du terme précédent en le multipliant par un même nombre réel q.

Théorème 1 : formule explicite

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Exemple : soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$ alors, pour tout entier n, $u_n = 5 \times 2^n$.

Propriété 1

- Comme pour les suites arithmétiques, les suites géométriques peuvent être définies à partir du rang 1, 2, ...
- Si u est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et p, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

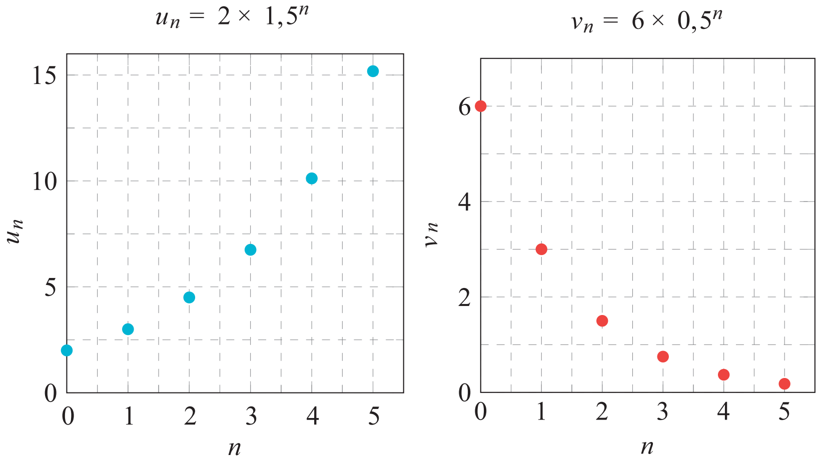
Propriété 2 : représentation graphique et sens de variation

(u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme *positif*.

- Dans un repère orthogonal, une suite géométrique u se représente par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$ qui suivent une évolution exponentielle.
- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est décroissante.
- Si $q > 1$ alors (u_n) est croissante.
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.

Remarque : les suites géométriques correspondent à des croissances dites « exponentielles ». Elles croissent de plus en plus vite si $q > 1$, et elles décroissent de plus en plus lentement si $0 < q < 1$.

Exemples :



Solution de l'exercice type 1

Lycée Genevoix, Montrouge

1 **(a)** Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 4u_n.$$

(b)
- $u_1 = 4 \times u_0 = 4 \times 1 = 4$,
- $u_2 = 4 \times u_1 = 4 \times 4 = 16$.

2 v est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 3.

3 **(a)**
- $w_1 = 5w_0 = 5 \times 3 = 15$,
- $w_2 = 5 \times w_1 = 5 \times 15 = 75$.

(b) w est une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $w_0 = 3$ puisqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 5.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = w_0 \times 5^n = 3 \times 5^n.$$

(d) $w_4 = 3 \times 5^4 = 1875$.

Voir énoncé page 73

3 Fonctions exponentielles

Exercice type 2 **Lycée Genevoix, Montrouge**

1 Simplifier les expressions suivantes :

(a) $A = \dfrac{1{,}1^3 \times 1{,}1^{7{,}1}}{2{,}2}$ **(b)** $B = \dfrac{(2{,}3^5)^{0{,}1}}{2{,}3^4}$

(c) $C = (3^x + 4)\,(3^x - 4)$

2 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2^x$.

(a) Indiquer le sens de variations de la fonction f.

(b) Compléter le tableau en arrondissant à 10^{-3} :

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

Voir corrigé page 77

Définition 2 : fonction exponentielle de base *a*

Soit $a > 0$. La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a*.

Exemple : la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1{,}5^x$ est la fonction exponentielle de base 1,5.

$$f(0) = 1{,}5^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad f(1) = 1{,}5^1 = 1{,}5.$$

Pour calculer les valeurs de a^x, on utilise la touche a^x.

Remarques

- Lorsque x est un nombre entier, a^x correspond à une puissance de a.
- Cette fonction est le prolongement à tout réel x de la suite géométrique (u_n) où, pour tout entier naturel n, $u_n = a^n$.

Propriété 3 : propriétés algébriques

a et b désignent des nombres réels strictement positifs, x et y des nombres réels positifs.

- $a^0 = 1$
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x \times b^x$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Exemples

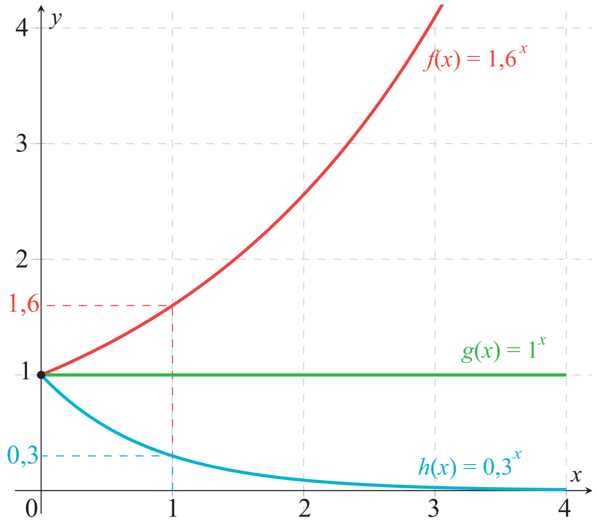
- $3^{1,3} \times 3^5 = 3^{6,3}$;
- $\dfrac{3^{1,5}}{3^{0,8}} = 3^{0,7}$;
- $(3^{3,2})^{1,5} = 3^{4,8}$.

Propriété 4 : représentation graphique et sens de variation

Soit a un réel strictement positif.
Sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction exponentielle de base a est :

- croissante lorsque $a > 1$.
- constante lorsque $a = 1$.
- décroissante lorsque $0 < a < 1$.

Exemple : soient $f(x) = 1{,}6^x$, $g(x) = 1^x$ et $h(x) = 0{,}3^x$.



Remarque : les fonctions exponentielles permettent de modéliser des *situations continues* (variable réelle) à *croissance (ou décroissance) exponentielle*.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Genevoix, Montrouge

1 **(a)**

$$A = \frac{1,1^3 \times 1,1^{7,1}}{2,2} = \frac{1,1^{3+7,1}}{2 \times 1,1} = \frac{1,1^{10,1-1}}{2} = \frac{1,1^{9,1}}{2}.$$

(b)

$$B = \frac{(2,3^5)^{0,1}}{2,3^4} = (2,3)^{5\times 0,1} \times 2,3^{-4} = (2,3)^{0,5-4} = (2,3)^{-3,5}.$$

…

Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Genevoix, Montrouge

(c) $C = \left(3^x + 4\right)\left(3^x - 4\right)$

(on reconnait l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$)

$= (3^x)^2 - 4^2$

$= 3^{2x} - 16.$

2 **(a)** $f(x)$ est de la forme a^x avec $a = 2$ $(a > 1)$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b)

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	1	1,414	2	2,828	4

Voir énoncé page 76

4 Racine n-ième

Définition 3 : racine n-ième

Soit a un réel strictement positif.
L'équation $x^n = a$ d'inconnue x admet une *unique solution réelle positive* :

$$x = a^{\frac{1}{n}}.$$

$a^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la *racine n-ième* de a, notée aussi $\sqrt[n]{a}$.

Exemple : la solution réelle positive de l'équation $x^3 = 7$ est $x = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$.

Remarque : en particulier, la solution réelle positive de l'équation $x^2 = a$ est :

$$x = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5} = \sqrt{a}.$$

5 Taux d'évolution moyen

Exercice type 3

Lycée Louis Vincent, Metz

En France, la proportion de déchets recyclés, exprimée en pourcentage des déchets d'emballages ménagers, est passée de 50% en 2004 à 71% en 2024.

1 Calculer, en pourcentage, le taux d'évolution de la proportion de déchets recyclés entre 2004 et 2024.

2 Calculer, en pourcentage, le taux d'évolution annuel moyen de la proportion de déchets recyclés entre 2004 et 2024. Arrondir au centième.

Voir corrigé page 80

5.1 Évolutions successives

Propriété 5

Une valeur initiale V_i subit plusieurs évolutions successives : $t_1\%$ (de coefficient multiplicateur CM_1), suivie de $t_2\%$, suivie de...

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}_i \arrow[r, bend left, "\times \mathrm{CM}_1"] \arrow[rrrr, bend right, "\times \mathrm{CM}_{\text{global}}"'] & \mathrm{V}_1 \arrow[r, bend left, "\times \mathrm{CM}_2"] & \mathrm{V}_2 & \cdots \arrow[r, bend left, "\times \dots"] & \mathrm{V}_f
\end{tikzcd}$$

Le *coefficient multiplicateur global* est le produit des coefficients multiplicateurs intermédiaires :

$$\mathrm{CM}_{\text{global}} = \mathrm{CM}_1 \times \mathrm{CM}_2 \times \dots$$

Le *taux d'évolution global* est donc égal à :

$$t_{\text{global}} = \mathrm{CM}_{\text{global}} - 1.$$

Exemple : le nombre d'abonnés d'un quotidien augmente de 10 % puis augmente de 20 %. Le taux d'évolution globale est de 32%.
En effet, augmenter de 10 % (resp. 20 %) revient à multiplier par 1,1 (resp. 1,2) :

$$\mathrm{CM}_{\text{global}} = 1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32.$$

Le taux d'évolution global est :

$$t_{\text{global}} = \mathrm{CM}_{\text{global}} - 1 = 1{,}32 - 1 = 0{,}32.$$

Donc le nombre d'abonnés a augmenté de 32%.

5.2 Taux d'évolution moyen

Propriété 6

On suppose qu'au cours de n périodes, le taux d'évolution global d'une quantité est t_{global}.
Alors, le *taux d'évolution moyen* par période est :

$$t_{\text{moyen}} = (1 + t_{\text{global}})^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Remarque :

$$t_{\text{moyen}} = \left(\mathrm{CM}_{\text{global}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Exemple : un prix augmente de 69% en deux mois.
On cherche le taux d'évolution mensuel moyen.

Le taux d'évolution global est :

$$t_{\text{global}} = 0{,}69.$$

Il y a deux périodes considérées.
Le taux mensuel moyen est donc :

$$(1 + t_{\text{global}})^{\frac{1}{2}} - 1 = (1 + 0{,}69)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}3\,,$$

ce qui correspond à une hausse mensuelle de 30%.

Solution de l'exercice type 3

Lycée Louis Vincent, Metz

MÉTHODE

Soit une quantité qui passe d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f.

- Le *coefficient multiplicateur global* est égal à :

$$\text{CM}_{\text{global}} = \frac{V_f}{V_i}.$$

- Le *taux d'évolution global* vérifie l'égalité :

$$1 + t_{\text{global}} = \text{CM}_{\text{global}}.$$

- Le *taux d'évolution moyen* est le taux qui, appliqué n fois, donnerait la même évolution globale. Il vérifie l'égalité :

$$(1 + t_{\text{moyen}})^n = \text{CM}_{\text{global}}.$$

1 On calcule le coefficient multiplicateur global :

$$\text{CM}_{\text{global}} = \frac{0{,}71}{0{,}5} = 1{,}42 = 1 + \frac{42}{100}.$$

Le taux d'évolution est donc de +42%.

2 Le taux d'évolution annuel moyen t_{moyen} de la proportion de déchets recyclés entre 2004 et 2024 vérifie :

$$\begin{aligned}(1 + t_{\text{moyen}})^{20} = 1{,}42 \Rightarrow 1 + t_{\text{moyen}} &= 1{,}42^{\frac{1}{20}} \\ \Rightarrow t_{\text{moyen}} &= 1{,}42^{\frac{1}{20}} - 1 \\ \Rightarrow t_{\text{moyen}} &\approx 0{,}017\,7.\end{aligned}$$

Le taux d'évolution annuel moyen est donc d'environ 1,77%.

Voir énoncé page 78

1 V/F Vérifiez vos connaissances

10 min

Corrigé p. 87

Les affirmations suivantes sont-elles *vraies* ou *fausses* ? Justifiez vos réponses.

1 On considère la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$. Le terme de rang 3 vaut 8.

2 La suite géométrique (v_n) telle que $v_6 = 50$ et $v_7 = 60$ a pour raison $\frac{5}{6}$.

3 L'expression de la fonction exponentielle f de base 4,5 est $f(x) = x^{4,5}$.

4 Le carré du nombre $a = 2^{1,5}$ est égal à 8.

2 QCM Suites géométriques

10 min

Corrigé p. 87

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses.

1 Le troisième terme de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 5$ est :

a $u_3 = 2 \times 5^3$ **b** $u_2 = 2 \times 5^2$ **c** 50

2 La suite géométrique telle que $u_0 = 5$, $u_1 = 30$ et $u_2 = 180$ a pour raison :

a 25 **b** 6 **c** 7

3 Si (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_2 = 1$, alors $u_7 =$

a 8 **b** 16 **c** 32

4 Si (u_n) est une suite géométrique de raison 6 et de premier terme $u_0 = 5$ alors $u_n =$

a $5 + 6n$ **b** 6×5^n **c** 5×6^n

3 QCM Fonction exponentielle

10 min

Corrigé p. 87

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses.

1 $a^{3,2} \times a^{2,5} =$

a $a^{0,7}$ **b** $a^{5,7}$ **c** a^8

2 $\dfrac{\left(a^{4,9}\right)^2 \times a^{5,2}}{a^{15}} =$

a 1 **b** $a^{14,21}$ **c** $a^{109,852}$

3 $f(x) = 2{,}3^x$, $\left(f(2)\right)^3 =$

a $4{,}6^3$ **b** $2{,}3^5$ **c** $2{,}3^6$

4 $g(x) = 4{,}1^x$, $g(3) \times g(2{,}5) =$

a $4{,}1^{5,5}$ **b** $5{,}5^{5,1}$ **c** $\approx 2345{,}9$

Suites géométriques

4 Sens de variation

★ 10 min ➡ Corrigé p. 88

Lycée Corot, Morestel

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 960$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de (v_n).

5 Modéliser

★★ 15 min ➡ Corrigé p. 88

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

Un influenceur vérifie régulièrement son nombre d'abonnés sur les réseaux sociaux. Il estime que sur TikTok, son nombre d'abonnés augmente en moyenne de 7% par mois. Il débute l'année 2025 avec 10 000 abonnés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre estimé d'abonnés de cet influenceur au n-ième mois.

1. Donner a_0, puis calculer a_1 et a_2.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} en fonction de a_n.
3. En déduire la nature de la suite a. Préciser sa raison.
4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_n en fonction de n.
5. Cet influenceur s'est fixé comme objectif d'atteindre les 25 000 abonnés d'ici à la fin de l'année 2025. Devrait-il atteindre son objectif ?

6 Modéliser

★★ 20 min ➡ Corrigé p. 89

Lycée Gand, Amiens

En 2020, Baptiste a acheté une voiture. Son prix était alors de 10 500 €.

La valeur de cette voiture baisse de 14% par an. La valeur de cette voiture peut être modélisée par une suite. On note P_n la valeur de la voiture l'année $2020 + n$. On a donc $P_0 = 10\,500$.

1. **(a)** Déterminer la nature de la suite (P_n).
   (b) Quelle était la valeur de cette voiture en 2024 ?
2. Baptiste aimerait savoir à partir de quelle année la valeur de sa voiture sera inférieure à 1 500 €. Pour le savoir, il réalise un programme Python.

(a) Compléter le programme suivant pour qu'il réponde à la question posée.

```
def algo():
    P=10500
    n=2020
    while P........... :
        P=..........
        n=n+1
    return(n)
```

(b) Quelle valeur renvoie ce programme ?

7 Comparaison de suites

★★ 30 min Corrigé p. 90

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

Camille a deux propositions pour son salaire lors de son arrivée dans une entreprise le 01/01/2025 :

- *Proposition 1 :* elle commence avec un salaire de 2 000 € mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 115 €.
- *Proposition 2 :* elle commence avec un salaire de 2 000 € mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 5%.

1 On note u_n son salaire du mois de janvier de l'année $2025 + n$ avec la proposition 1.

(a) Déterminer u_0 puis calculer u_1.

(b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

(c) Exprimer u_n en fonction de n.

(d) Déterminer à partir de quelle année son salaire mensuel sera supérieur à 2 800 € avec la proposition 1.

2 On note v_n son salaire du mois de janvier de l'année $2025 + n$ avec la proposition 2.

(a) Déterminer v_0 puis calculer v_1.

(b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

(c) Exprimer v_n en fonction de n.

(d) Déterminer à partir de quelle année son salaire mensuel sera supérieur à 2 800 € avec la proposition 2.

3 Déterminer la proposition permettant d'avoir un salaire mensuel le plus élevé en 2035.

Fonctions exponentielles

8 Sens de variation

★ 10 min Corrigé p. 91

Lycée Vincent d'Indy, Privas

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 0{,}33^x$.
  - **(a)** Quel est le sens de variation de f ?
  - **(b)** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $0{,}33^x \leqslant 0{,}33^{1{,}8}$.

2 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = 4^x$.
  - **(a)** Quel est le sens de variation de g ?
  - **(b)** Calculer $g(3{,}5)$.
  - **(c)** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4^x \geqslant 128$.

Racine n-ième

9 Résolution d'équations

★ 10 min Corrigé p. 91

Lycée Jean Puy, Roanne

Résoudre sur $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

1 $x^2 = 0{,}5184$

2 $x^4 = 0{,}0081$

3 $x^4 = 6{,}859$

4 $x^5 = 7{,}59375$

Taux d'évolution moyen

10 Évolutions successives

★ 10 min Corrigé p. 92

Lycée Ruffié, Limoux

La population d'une ville augmente de 1% entre 2023 et 2024, puis de 2% entre 2024 et 2025.

1 Déterminer le coefficient multiplicateur associé à chacune de ces évolutions.

2 Déterminer le coefficient multiplicateur global.

3 En déduire le taux d'évolution global entre 2023 et 2025.

4 La ville comptait 20 000 habitants en 2023.
Déterminer le nombre d'habitants en 2025.

11 Taux d'évolution moyen

★★ 10 min Corrigé p. 92

Lycée Montaigne, Bordeaux

La subvention accordée par une entreprise à son club sportif était de 3 000 € pour l'année 2021. Depuis 2018, l'évolution de la subvention en pourcentage d'une année à l'autre est celle décrite dans le tableau ci-dessous :

Année	2019	2020	2021	2022	2023
Évolution en pourcentage	+17%	+15%	+10%	+9%	+6%

Par exemple, le taux d'évolution de la subvention de 2020 à 2021 est de +10%.

1. Calculer, pour chacune des années, le montant de la subvention attribuée (à l'euro près).
2. Le responsable sportif se plaint d'une diminution continuelle des subventions depuis l'année 2019. Qu'en pensez-vous ?
3. Calculer le pourcentage de diminution ou d'augmentation de la subvention de 2018 à 2023.
4. Calculer le taux moyen annuel de 2018 à 2023.
5. Si, à partir de 2023 le taux reste à +6%, quel sera le montant de la subvention en 2032 ?

Vers les maths complémentaires

12 Pour aller plus loin

★★★ 30 min Corrigé p. 93

Lycée Boucher, Paris

En 2020, une grande entreprise s'est dotée d'un centre de vidéoconférences qui permet de réaliser de grandes économies dans le budget « déplacement des cadres ».

Lors d'un conseil d'administration de fin d'année, le responsable du centre de vidéoconférences fait le compte rendu suivant : on a observé un fort accroissement de l'utilisation de cette technologie, le nombre de vidéoconférences, qui était de 30 en 2020, a augmenté de 20 % tous les ans.

1. On s'intéresse au nombre d'utilisations de la vidéoconférence lors de l'année $2020+n$. On modélise la situation par une suite géométrique (u_n) où le terme u_n est une estimation de ce nombre d'utilisations lors de l'année $2020+n$.
   - **(a)** Donner la raison q et le premier terme u_0 de cette suite.
   - **(b)** Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   - **(c)** Vérifier qu'en 2025, on a atteint 74 utilisations de la vidéoconférence.

2 On considère la fonction écrite en langage Python :

```
def seuil(A):
    u=30
    n=0
    while u<A:
        u=u+u*0.2
        n=n+1
    return(n)
```

(a) On entre dans la console `seuil(100)`.

Recopier et compléter avec autant de colonnes que nécessaire le tableau suivant.

Les valeurs de U seront données approchées par défaut à l'entier près.

Test $U < A$		vrai	…
Valeur de U	30	36	…
Valeur de n	0	1	…

(b) Quelle est la valeur affichée en sortie de ce programme ?

(c) Interpréter cette valeur affichée dans le contexte de ce problème.

3 Le coût de l'installation des appareils de vidéoconférences sera amorti quand le nombre total d'utilisations aura dépassé 400.

À partir de quelle année cette installation sera-t-elle amortie ? Justifier la réponse.

1 V/F Vérifiez vos connaissances

Énoncé p. 81

1 *Vrai*. Le terme de rang 3 de la suite est :

$$u_3 = u_0 \times 2^3 = 1 \times 2^3 = 8.$$

2 *Faux*. La raison de la suite est le nombre q tel que $v_7 = q \times v_6$ soit :

$$q = \frac{v_7}{v_6} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5}.$$

3 *Faux*. L'expression de la fonction exponentielle f de base 4,5 est :

$$f(x) = 4{,}5^x.$$

4 *Vrai*. $a^2 = \left(2^{1{,}5}\right)^2 = 2^{1{,}5\times 2} = 2^3 = 8.$

2 QCM Suites géométriques

Énoncé p. 81

1 Réponses $\boxed{\text{b}}$ et $\boxed{\text{c}}$. Le troisième terme de la suite de premier terme u_0 est u_2.

$$u_2 = u_0 \times q^2 = 2 \times 5^2 = 50.$$

2 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{30}{5} = 6.$

3 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $u_7 = u_2 \times q^{7-2} = 1 \times 2^5 = 32.$

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 6^n.$

3 QCM Fonction exponentielle

Énoncé p. 81

1 Réponses $\boxed{\text{b}}$. $a^{3{,}2} \times a^{2{,}5} = a^{3{,}2+2{,}5} = a^{5{,}7}.$

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. On a :

$$\frac{\left(a^{4{,}9}\right)^2 \times a^{5{,}2}}{a^{15}} = \frac{a^{4{,}9\times 2+5{,}2}}{a^{15}} = \frac{a^{15}}{a^{15}} = a^{15-15} = a^0 = 1.$$

3 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $(f(2))^3 = (2{,}3^2)^3 = 2{,}3^{2\times 3} = 2{,}3^6.$

4 Réponse $\boxed{\text{a}}$ et $\boxed{\text{c}}$. On a :

$$g(3) \times g(2{,}5) = 4{,}1^3 \times 4{,}1^{2{,}5} = 4{,}1^{3+2{,}5} = 4{,}1^{5{,}5} \approx 2\,345{,}9.$$

4 Sens de variation

Énoncé p. 82

Lycée Corot, Morestel

À RETENIR

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme strictement positif.

- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.
- Si $q > 1$ alors (u_n) est strictement croissante.

1
- $v_1 = v_0 \times \frac{1}{2} = 960 \times \frac{1}{2} = 480.$
- $v_2 = 480 \times \frac{1}{2} = 240.$
- $v_3 = 240 \times \frac{1}{2} = 120.$
- $v_4 = 120 \times \frac{1}{2} = 60.$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$.

Puisque v est une suite géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n = 960 \times \frac{1}{2}^{n}.$$

3 v_0 est positif et $0 < q < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante.

5 Modéliser

Énoncé p. 82

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

À RETENIR

- Une suite (u_n) est géométrique de raison q si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = qu_n.$$
- Si (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
- Si (u_n) est géométrique de raison q alors pour tous entiers naturels n et p, on a :
$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

1 L'influenceur débute l'année avec 10 000 abonnés donc $a_0 = 10\,000$. Chaque mois, son nombre d'abonnés augmente de 7%, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 1,07.

Donc,

$$a_1 = 10\,000 \times 1{,}07 = 10\,700$$

et

$$a_2 = 10\,700 \times 1{,}07 = 11\,449.$$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1{,}07 \times a_n$.

3 a est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}07$ et de premier terme $a_0 = 10\,000$.

4 Puisque a est une suite géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = a_0 \times q^n = 10\,000 \times 1{,}07^n.$$

5 D'ici la fin de l'année, 12 mois se seront écoulés.

$$a_{12} = 10\,000 \times 1{,}07^{12} \approx 22\,522.$$

Il n'atteindra donc pas son objectif.

6 Modéliser

Énoncé p. 82

Lycée Gand, Amiens

1 **(a)** Chaque année, la valeur de la voiture baisse de 14 %. Elle est donc multipliée par :

$$1 - \frac{14}{100} = 0{,}86.$$

(P_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}86$ et de premier terme $P_0 = 10\,500$.

(b) La valeur de la voiture en $2024 = 2020 + 4$ est donnée par P_4. Or,

$$P_n = P_0 \times q^n = 10\,500 \times 0{,}86^n$$

donc

$$P_4 = 10\,500 \times 0{,}86^4 \approx 5\,744 \text{ €}.$$

2 Le programme complété est le suivant :

```
def algo():
    P=10500
    n=2020
    while P>=1500 :
        P=0.86*P
        n=n+1
    return(n)
```

3 La valeur renvoyée par le programme est 2033.

7 Comparaison de suites

Énoncé p. 83

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

1 **(a)** u_0 est le salaire mensuel pendant l'année 2025 donc :

$$u_0 = 2\,000\,€.$$

u_1 est le salaire mensuel pendant l'année 2026 donc :

$$u_1 = u_0 + 115 = 2\,115\,€.$$

(b) Chaque année, on ajoute 115 euros au salaire mensuel donc :

$$u_{n+1} = u_n + 115.$$

(u_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2\,000$ et raison $r = 115$ (de la forme $u_{n+1} = u_n + r$).

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + n \times r = 2\,000 + 115n.$$

(d) On cherche n tel que $u_n > 2\,800$.

$$\begin{aligned} u_n > 2\,800 &\iff 2\,000 + 115n > 2\,800 \\ &\iff 115n > 800 \\ &\iff n > \frac{800}{115}. \end{aligned}$$

n est un entier donc $n \geqslant 7$.

Le salaire mensuel sera supérieur à 2800 euros à partir de l'année $2025 + 7 = 2032$.

2 **(a)** v_0 est le salaire mensuel pendant l'année 2025 donc :

$$v_0 = 2\,000\,€.$$

v_1 est le salaire mensuel pendant l'année 2026 donc :

$$v_1 = v_0 \times 1{,}05 = 2\,100\,€.$$

En effet, augmenter de 5% revient à multiplier par 1,05.

(b) $v_{n+1} = 1{,}05 v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $v_0 = 2\,000$ (de la forme $v_{n+1} = q v_n$).

(c) $v_n = v_0 \times q^n = 2\,000 \times 1{,}05^n$.

(d) On cherche n tel que $v_n > 2800$.

$$\begin{aligned} v_n > 2\,800 &\iff 2\,000 \times 1{,}05^n > 2\,800 \\ &\iff 1{,}05^n > \frac{2\,800}{2\,000} \\ &\iff 1{,}05^n > \frac{7}{5} \\ &\iff 1{,}05^n > 1{,}4. \end{aligned}$$

On utilise le menu table de la calculatrice en saisissant la fonction définie par $f(x) = 1{,}05^x$.

On obtient :

$$1{,}05^6 \approx 1{,}34 \text{ et } 1{,}05^7 \approx 1{,}407.$$

Le salaire mensuel sera donc supérieur à 2 800 € à partir de l'année $2025 + 7 = 2032$.

On peut aussi saisir la suite (v_n) dans le menu « Suites » de la calculatrice, soit avec sa forme explicite $v_n = 2\,000 \times 1{,}05^n$, soit avec sa forme de récurrence $v_{n+1} = 1{,}05 v_n$ et $v_0 = 2\,000$.

3 On cherche quelle proposition permettra le salaire mensuel le plus élevé en 2035. $2035 = 2025 + 10$. Il faut donc calculer u_{10} et v_{10}.

- $u_{10} = 2\,000 + 115 \times 10 = 3\,150$ euros mensuels en 2035 avec la proposition 1.
- $v_{10} = 2\,000 \times 1{,}05^{10} \approx 3\,258$ euros mensuels environ avec la proposition 2.

La proposition 2 est celle qui permet donc d'avoir un salaire mensuel plus élevé.

8 Sens de variation

Énoncé p. 84

Lycée Vincent d'Indy, Privas

1 **(a)** $0 < 0{,}33 < 1$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Comme la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$0{,}33^x \leqslant 0{,}33^{1{,}8} \iff x \geqslant 1{,}8$$

donc l'ensemble solution à l'inéquation est :

$$S = [1{,}8; +\infty[.$$

2 **(a)** $4 > 1$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) $g(3{,}5) = 4^{3{,}5} = 128$.

(c) Comme la fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} 4^x \geqslant 128 &\iff 4^x \geqslant 4^{3{,}5} \\ &\iff x \geqslant 3{,}5. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble solution à l'inéquation est :

$$S = [3{,}5; +\infty[.$$

9 Résolution d'équations

Énoncé p. 84

Lycée Jean Puy, Roanne

À RETENIR

Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul. L'équation $x^n = a$, d'inconnue x, a une unique solution positive : $x = a^{\frac{1}{n}}$

1 $x^2 = 0{,}5184 \iff x = 0{,}5184^{\frac{1}{2}} = 0{,}72.$

2 $x^4 = 0{,}0081 \iff x = 0{,}0081^{\frac{1}{4}} = 0{,}3.$

3 $x^4 = 6{,}859 \iff x = 6{,}859^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}618.$

4 $x^5 = 7{,}59375 \iff x = 7{,}59375^{\frac{1}{5}} = 1{,}5.$

10 Évolutions successives

Énoncé p. 84

Lycée Ruffié, Limoux

1 Augmenter de 1% (respectivement 2%) revient à multiplier par :

$$1 + \frac{1}{100} = 1{,}01 \text{ (respectivement } 1{,}02).$$

2 $c_{\text{global}} = 1{,}01 \times 1{,}02 = 1{,}0302.$

3
$$\begin{aligned} t_{\text{global}} &= c_{\text{global}} - 1 \\ &= 1{,}0302 - 1 \\ &= 0{,}0302 \\ &= \frac{3{,}02}{100}. \end{aligned}$$

L'évolution globale est une hausse de 3,02%.

4 $20\,000 \times 1{,}0302 = 20\,604.$

La ville compte 20 604 habitants en 2025.

11 Taux d'évolution moyen

Énoncé p. 85

Lycée Montaigne, Bordeaux

1 Puisque nous connaissons le montant de 2021 (3 000 €), nous allons calculer les années suivantes par multiplication et les années précédentes par division.

- En 2021, la subvention était de 3 000 €.
- Entre 2021 et 2022, elle a augmenté de 9%, donc elle a été multipliée par 1,09 soit une subvention de :
$$3\,000 \times 1{,}09 = 3\,270 \text{ €}.$$
- Entre 2022 et 2023, elle a augmenté de 6%, donc elle a été multipliée par 1,06 soit une subvention de :
$$3\,270 \times 1{,}06 \approx 3\,466 \text{ €}.$$
- Entre 2020 et 2021, la subvention a été augmentée de 10%, soit un coefficient multiplicateur de 1,1. La subvention en 2020 est donc de :
$$\frac{3\,000}{1{,}1} \approx 2\,727 \text{ €}.$$

- Entre 2019 et 2020, la subvention a été augmentée de 15%, soit un coefficient multiplicateur de 1,15. La subvention en 2019 est donc de :
$$\frac{2\,727}{1{,}15} \approx 2\,371\text{ €}.$$
- Entre 2018 et 2019, la subvention a été augmentée de 17%, soit un coefficient multiplicateur de 1,17. La subvention en 2018 est donc de :
$$\frac{2\,371}{1{,}17} \approx 2\,026\text{ €}.$$

2 Le responsable confond la diminution du taux de croissance avec une diminution du montant. Le taux passe de $+17\%$ à $+6\%$, donc la subvention augmente moins vite. Cependant, tant que le taux reste positif, le montant de la subvention continue de monter chaque année.

Le club reçoit donc plus d'argent chaque année, pas moins.

3 Pour trouver l'évolution globale, on multiplie les coefficients multiplicateurs entre eux :
$$\text{CM}_{\text{global}} = 1{,}17 \times 1{,}15 \times 1{,}10 \times 1{,}09 \times 1{,}06 \approx 1{,}71.$$
Le taux d'évolution global est donc :
$$\text{CM}_{\text{global}} - 1 \approx 0{,}71$$
soit une hausse d'environ 71% sur la période.

4 De 2018 à 2023 il y a 5 évolutions.

On cherche le taux t tel que $(1+t)^5 = 1{,}71$.
$$\begin{aligned}(1+t)^5 = 1{,}71 &\iff 1+t = 1{,}71^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}1133\\ &\iff t \approx 0{,}1133.\end{aligned}$$
Le taux moyen annuel est d'environ 11,33%.

5 Si le taux reste bloqué à $+6\%$ à partir de 2023, il faut calculer l'évolution sur 9 ans (de 2023 à 2032).
$$\text{Valeur}_{2032} = \text{Valeur}_{2023} \times 1{,}06^9 = 3\,466 \times 1{,}06^9 \approx 5\,856.$$
La subvention en 2032 serait d'environ 5 856 €.

12 Pour aller plus loin

Énoncé p. 85

Lycée Boucher, Paris

1 **(a)** Augmenter de 20%, c'est multiplier par 1,2 donc la raison de la suite (u_n) est $q = 1{,}2$.

Le nombre de vidéoconférences était de 30 en 2020 donc :
$$u_0 = 30.$$

(b) D'après le cours, on sait que, pour tout n,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc :

$$u_n = 30 \times 1{,}2^n.$$

(c) $2025 = 2020 + 5$ donc :

$$u_5 = 30 \times 1{,}2^5 \approx 74{,}65 > 74.$$

Donc en 2025, on a atteint 74 utilisations de la vidéoconférences.

2 **(a)** Le tableau complété est le suivant :

Test $U < A$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de U	30	36	43	52	62	74	89	107
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7

(b) La valeur affichée en sortie de cet algorithme est la dernière valeur de n, soit 7.

(c) $n = 7$ correspond à $2020 + 7 = 2027$, donc 2027 est l'année à partir de laquelle le nombre annuel de vidéoconférences dépassera 100.

3 Le coût de l'installation des appareils de vidéoconférences sera amorti quand le nombre total d'utilisations aura dépassé 400.

Le tableau ci-dessous donne le nombre total de vidéoconférences :

Nombre annuel	30	36	43	52	62	74	89	107
Nombre total	30	66	109	161	223	297	386	493
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Année	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027

L'installation sera donc amortie à partir de l'année 2027.

Chapitre
5

Second degré

Plan du chapitre

1 Introduction

La notion de second degré est fondamentale pour modéliser de nombreux phénomènes où les variations ne sont pas linéaires. Elle permet d'étudier des situations dans lesquelles une grandeur dépend d'une autre selon une relation du type $ax^2 + bx + c$, donnant lieu à des courbes appelées *paraboles*.

Exercice type **Lycée Louis Vincent, Metz**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$.

1 Montrer que : $f(x) = -2(x+1)(x-4)$.

2 Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3 Faire un schéma à main levée de l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

4 Expliquer pourquoi le maximum de la fonction f est atteint lorsque $x = 1{,}5$.

5 Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

6 Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Voir corrigé page 99

2 Rappels de seconde

Définition 1 : fonction carré

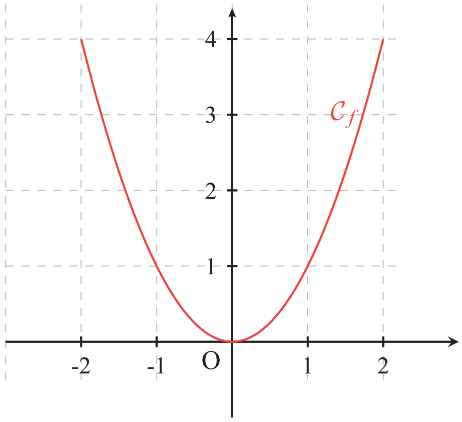
La fonction carré est la fonction qui, à tout nombre réel x, associe son carré x^2.

Propriété 1 : sens de variation

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriété 2 : représentation graphique

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction carré est une *parabole* dont le sommet est l'origine du repère. Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriété 3 : équation de la forme $x^2 = a$

Les solutions de l'équation $x^2 = a$ avec $a > 0$ sont : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

3 Fonction polynôme du second degré

3.1 Cas général

Définition 2

On appelle *fonction polynôme du second degré* ou *fonction trinôme* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Propriété 4 : courbe représentative

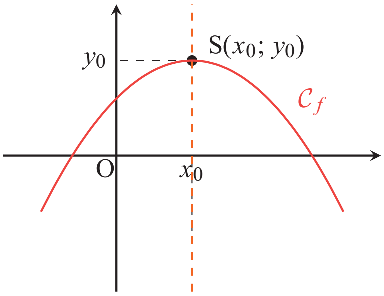
La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une *parabole* qui possède un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = x_0$ et un sommet $S(x_0; y_0)$ situé sur cet axe.

Propriété 5 : variations

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Les variations de f dépendent du signe de a et sont résumées ci-après :

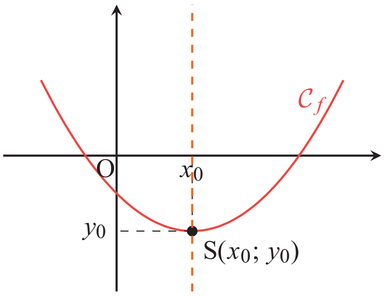
Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f		↗	$f(x_0)$	↘	



Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f		↘	$f(x_0)$	↗	



Propriété 6

Si l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions, l'abscisse du sommet de la parabole est la moyenne de ces deux valeurs.

4 Cas particuliers

4.1 Fonction $x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$

Propriété 7

La courbe représentative d'une fonction polynôme définie par $f(x) = ax^2$ est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ et dont le sommet est $S(0; 0)$. La parabole passe par le point $(1; a)$.

4.2 Fonction $x \mapsto ax^2 + c$ avec $a \neq 0$

Propriété 8

La courbe représentative d'une fonction polynôme définie par $f(x) = ax^2 + c$ est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ et dont le sommet est $S(0; c)$. La parabole passe par le point $(1; a + c)$.

À RETENIR

- La courbe représentative d'une fonction trinôme de la forme $f(x) = ax^2$ est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées de sommet $S(0; 0)$. La courbe passe par le point $(1; a)$.
- La courbe représentative d'une fonction trinôme de la forme $f(x) = ax^2+c$ est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées de sommet $S(0; c)$. La courbe passe par le point $(1; a + c)$.

4.3 Fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$

Propriété 9

La courbe représentative d'une fonction polynôme définie par :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

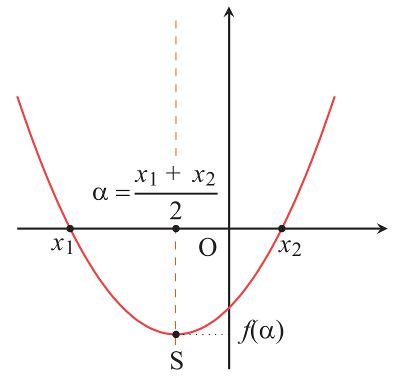
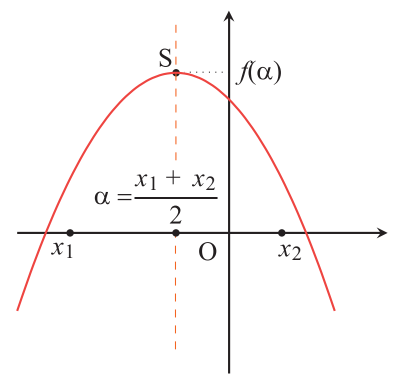
est une parabole dont le sommet est le point :

$$S\left(\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}; f(\alpha)\right)$$

et dont l'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$.

La courbe passe par les points $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$.

Remarque : x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses. Ce sont les *racines* du polynôme.

$a > 0$	$a < 0$
	

5 Signe du trinôme

MÉTHODE

Pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, on étudie le signe de chacun des trois facteurs et on dresse un tableau de signes.

Solution de l'exercice type

Lycée Louis Vincent, Metz

1 On développe le second membre de l'égalité.

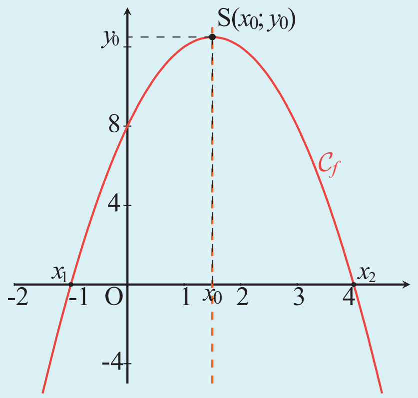
$$\begin{aligned} -2(x+1)(x-4) &= -2(x^2 - 4x + x - 4) \\ &= -2(x^2 - 3x - 4) \\ &= -2x^2 + 6x + 8 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

2 Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on utilise la forme factorisée $-2(x+1)(x-4)$.

$$\begin{aligned} -2(x+1)(x-4) = 0 &\iff x + 1 = 0 \text{ ou } x - 4 = 0 \\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

3 f est un trinôme du second degré donc sa courbe représentative est une parabole.
$a = -2$ est négatif donc la parabole est « tournée vers le bas ».
$x_1 = -1$ et $x_2 = 4$ sont les racines du polynôme, ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses. La parabole passe donc par les points de coordonnées $(-1; 0)$ et $(4; 0)$.

Le sommet S de la parabole a pour abscisse $x_0 = \dfrac{-1+4}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ et pour ordonnée $y_0 = f(1{,}5) = 12{,}5$.
L'axe de symétrie a pour équation $x = 1{,}5$.



Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Louis Vincent, Metz

4 $a = -2$ est négatif donc la fonction est croissante puis décroissante.
Son maximum est atteint en :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Il vaut $f(1{,}5) = 12{,}5$.

5 Le tableau de variations est alors :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$12{,}5$	$\searrow$	

6 Pour étudier le signe de $f(x)$ on utilise un tableau de signes.

$$x + 1 > 0 \iff x > -1.$$
$$x - 4 > 0 \iff x > 4.$$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Voir énoncé page 95

1 V/F Second degré

10 min · Corrigé p. 109

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1 Si $f(x) = a(x-2)(x-5)$ alors $f(2) = f(5)$.

2 Si une parabole ne coupe pas l'axe des abscisses alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.

3 Si $f(x) = 2(x-1)^2$ alors f admet deux racines distinctes.

4 La courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2(x-3)(x+1)$$

coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -3 et 1.

5 Le tableau de signes suivant est-il correct ?

x	$-\infty$		12		4		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+16$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+12)(4x+16)$		$+$	0	$-$		$-$	

2 V/F Fonction $x \mapsto ax^2 + c$

10 min · Corrigé p. 109

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$.

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1 Le minimum de f est 0.

2 Le sommet de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $S(0; -3)$.

3 L'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ a pour équation $x = -3$.

3 QCM Second degré

10 min · Corrigé p. 109

Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1 L'équation $x^2 = 16$ admet :

a une seule solution : 4
b deux solutions : -4 et 4
c deux solutions : -16 et 16
d aucune solution réelle

2 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2$. Alors :

a f est décroissante sur $\mathbb{R}$
b f est croissante sur $\mathbb{R}$
c f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty[$
d f est croissante sur $]-\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$

3 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2$. Alors :

a la parabole est « tournée vers le haut »

b la fonction admet un minimum en 0

c la fonction admet un maximum en 0

d le sommet est $(-2; 0)$

4 Les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction définie par $h(x) = 3x^2 - 7$ sont :

a $(0; -7)$ **b** $(3; -7)$

c $(-7; 0)$ **d** $(0; 7)$

5 L'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction définie par $h(x) = 3x^2 - 7$ est :

a la droite d'équation $y = -7$ **b** la droite d'équation $x = 3$

c la droite d'équation $x = 0$ **d** la droite d'équation $y = 0$

4 QCM Trinôme

10 min — Corrigé p. 110

Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1 On considère la fonction définie par $f(x) = (x-4)(x+1)$.
Les racines de f sont :

a 4 et 1 **b** -4 et 1

c 4 et -1 **d** -4 et -1

2 On considère la fonction définie par $f(x) = 2(x-3)(x+5)$.
L'axe de symétrie de la parabole est :

a la droite d'équation $x = 1$ **b** la droite d'équation $x = -1$

c la droite d'équation $y = 1$ **d** la droite d'équation $y = -1$

3 On considère la fonction définie par $f(x) = (x-2)(x-6)$.
Alors $f(2)$ vaut :

a 8 **b** 0

c -8 **d** 2

4 On considère la fonction définie par $f(x) = 3(x+2)(x-5)$.
Une forme correcte de l'abscisse du sommet est :

a $\dfrac{-2+5}{2}$ **b** $\dfrac{2+5}{2}$

c $\dfrac{-2-5}{2}$ **d** $\dfrac{3}{2}$

Rappels de seconde

5 Équations $x^2 = a$

★ 10 min Corrigé p. 110

Lycée Jean Monnet, Montpellier

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $x^2 = 36$
2 $x^2 = 7$
3 $x^2 = 0$
4 $x^2 = -27$
5 $4x^2 = 16$
6 $-2x^2 + 8 = 0$

Fonctions $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto ax^2 + c$

6 Fonction $x \mapsto ax^2$

★ 10 min Corrigé p. 111

Lycée Sophie Germain, Paris

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2$.

1 Dresser le tableau de variations de f.
2 Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 3$.

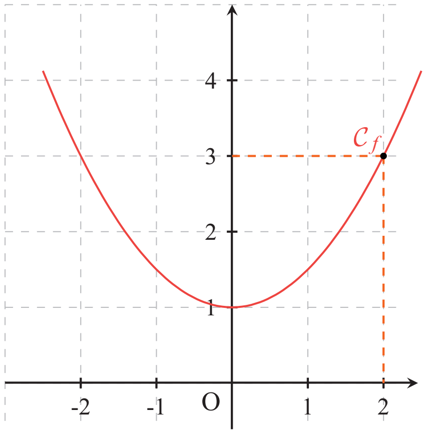
7 Lecture d'une courbe

★★ 10 min Corrigé p. 111

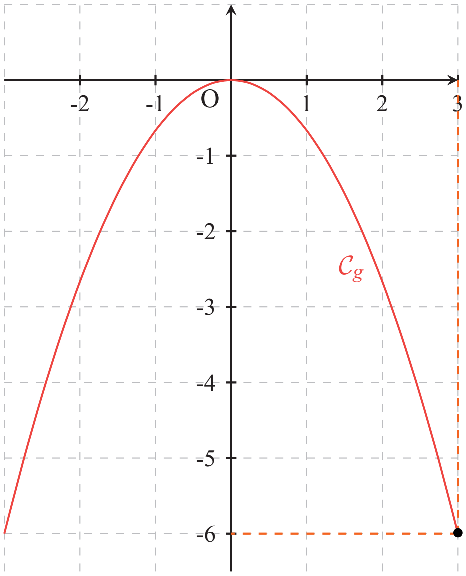
Lycée Kerneuzec, Quimperlé

On considère les fonctions f et g dont les représentations graphiques sont les paraboles données ci-dessous. Pour chacune d'elles, déterminer son expression puis dresser son tableau de variation.

1



2



Fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$

8 Reconnaître un trinôme

★ 5 min Corrigé p. 112

Lycée Le Corbusier, Paris

Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré.

1 $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

2 $g(x) = 4x^2 - 3$

3 $h(x) = -3(x + 7)(x - 2)$

4 $k(x) = 2(x - 1)^2 + 4$

9 Trouver l'axe de symétrie

★★ 15 min Corrigé p. 113

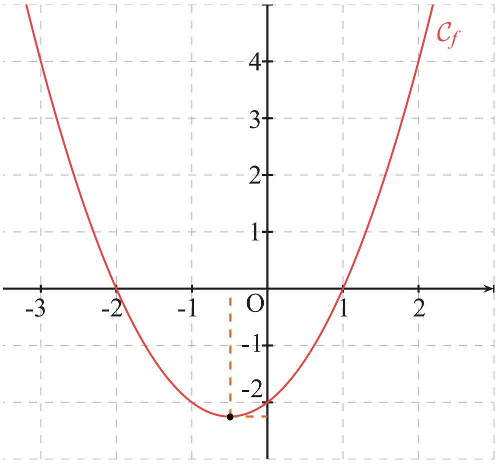
Lycée Jean Puy, Roanne

On considère la fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par : $f(x) = x^2 + x - 2$.

1 **(a)** Montrer que 1 et -2 sont deux racines de f.

(b) Que peut-on en déduire graphiquement ?

2 On a tracé ci-dessous la parabole représentant f.



(a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.

(b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.

Fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

10 Lecture graphique

★ 15 min Corrigé p. 114

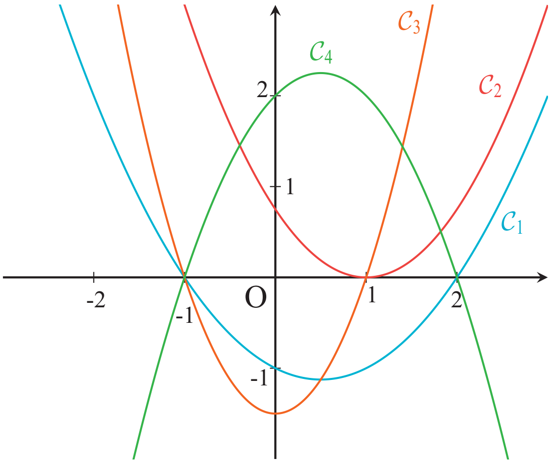
Lycée Montaigne, Bordeaux

Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 1{,}5(x - 1)(x + 1)$ $\qquad g(x) = 0{,}75(x - 1)^2$

$h(x) = 0{,}5(x - 2)(x + 1)$ $\qquad k(x) = -(x - 2)(x + 1)$

Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données en justifiant votre réponse.



11 Signe d'un polynôme

★ 10 min Corrigé p. 115

Lycée Eiffel, Talange

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+1)(-x+5)$.

1. Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

12 Bilan

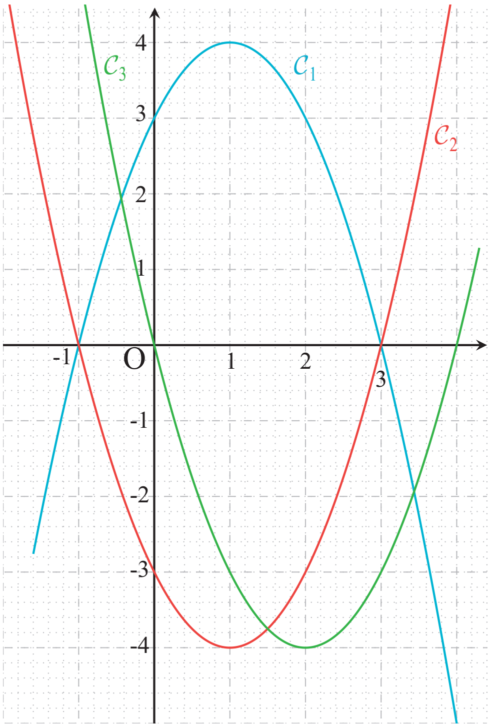
★★ 20 min Corrigé p. 115

Lycée Bayen, Châlons

On considère la fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

1. Calculer l'image de -1 par f.
2. Montrer que 3 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
3. En utilisant les questions 1 et 2, donner une forme factorisée de $f(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $[-4; 4]$.
5. Parmi les trois courbes suivantes, déterminer, en justifiant, celle qui représente graphiquement la fonction f.



13 Bénéfice

★★ 20 min

Corrigé p. 116

Lycée Montaigne, Bordeaux

Un artisan fabrique des confitures qu'il vend par carton de dix pots.

Pour $x \in [0; 160]$, le coût en euros de fabrication de x cartons de dix pots est :

$$f(x) = 0{,}25x^2 + 500.$$

1 **(a)** Déterminer le coût de fabrication de 60 cartons de 10 pots de confiture.

(b) Pour combien de cartons le coût de fabrication est-il de 2 525 € ?

2 Chaque carton de confitures est vendu 30 €.
Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x.

3 Soit B la fonction bénéfice définie sur l'intervalle [0; 160].

(a) Montrer que $B(x) = -0{,}25x^2 + 30x - 500$.

(b) Montrer que $B(x) = -0{,}25(x - 100)(x - 20)$.

4 Quel nombre de cartons doit vendre cet artisan s'il veut réaliser un bénéfice positif ?

5 Quel nombre de cartons doit-il vendre pour que son bénéfice soit maximal ? Calculer alors ce bénéfice.

Vers les maths complémentaires

14 Modélisation

★★ 20 min

Corrigé p. 117

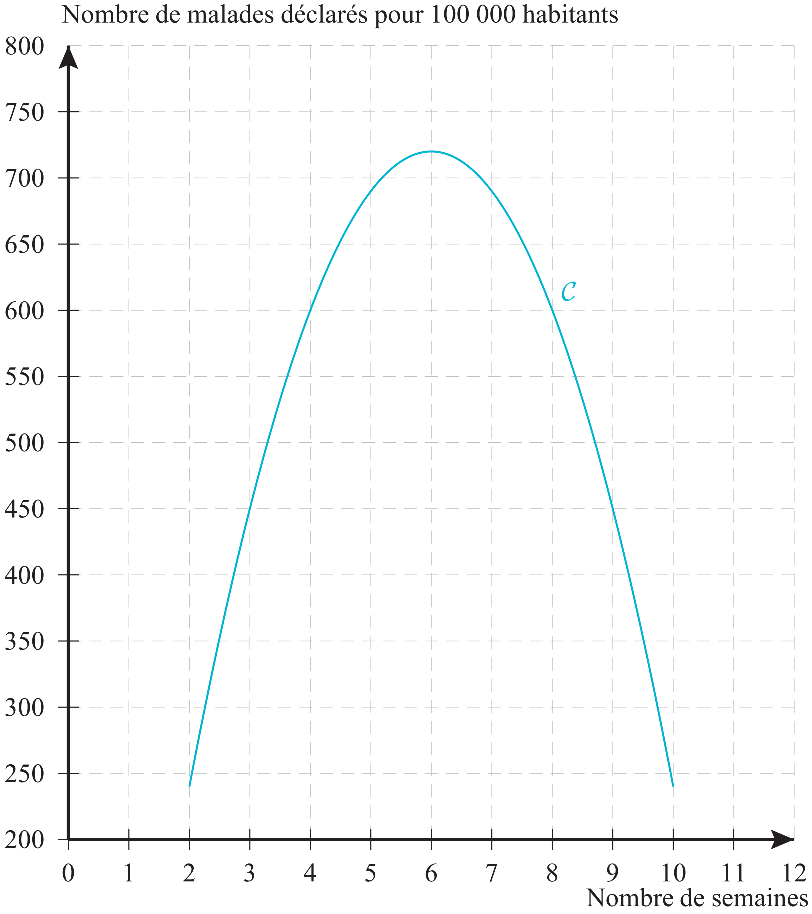
Lycée Chatelet, Douai

On s'intéresse à une modélisation de la propagation de l'épidémie de la grippe en France durant l'hiver 2024 - 2025. Les relevés statistiques, fournis par le réseau Sentinelle, du nombre de cas pour 100 000 habitants sur la période du 29 décembre 2024 au 1$^{\text{er}}$ mars 2025 ont permis de mettre en évidence une courbe de tendance, à l'aide d'un tableur.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in [2\ ;\ 10]$, par :

$$f(x) = -30x^2 + 360x - 360.$$

On admet que $f(x)$ modélise le nombre de malades déclarés pour 100 000 habitants au bout de x semaines écoulées depuis le début de l'épidémie. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (voir graphique page suivante).



1 À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

- **(a)** Selon ce modèle, au bout de combien de semaines le pic de l'épidémie a-t-il été atteint ?
- **(b)** Déterminer le nombre de semaines pendant lesquelles le nombre de malades a été supérieur ou égal à 600.
- **(c)** Montrer que $f(x) \geqslant 600$ équivaut à $-x^2 + 12x - 32 \geqslant 0$.
- **(d)** Montrer que 4 et 8 sont des racines du polynôme défini par $g(x) = -x^2 + 12x - 32$.
- **(e)** En déduire une factorisation de $g(x)$.
- **(f)** Étudier le signe de $g(x)$.
- **(g)** Comparer avec le résultat obtenu dans la question 2.

2
- **(a)** Calculer $f(2)$ et $f(10)$. En déduire l'axe de symétrie de la parabole puis les coordonnées de son sommet.
- **(b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[2; 10]$.

1 V/F Second degré

Énoncé p. 101

1. *Vrai.* $f(2) = 0$ et $f(5) = 0$.
2. *Vrai.*
3. *Faux.* $2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
4. *Faux.* $f(x) = 2(x-3)(x+1)$ est de la forme $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$. La parabole représentative coupe donc l'axe des abscisses aux points d'abscisses 3 et -1.
5. *Faux.* Dans la première ligne, les valeurs ne sont pas correctes. Les racines de $(x+12)(4x+16)$ sont -12 et -4. Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-12		-4		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+16$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+12)(4x+16)$		$+$	0	$-$		$+$	

2 V/F Fonction $x \mapsto ax^2 + c$

Énoncé p. 101

À RETENIR

La courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole de sommet $S(0; c)$. Elle possède les mêmes variations que la fonction $x \mapsto ax^2$.

1. *Faux.* Ici $a = 1$ donc la fonction est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$ donc elle admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = -3$.
2. *Vrai.* Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(0; c)$ soit $(0; -3)$.
3. *Faux.* L'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

3 QCM Second degré

Énoncé p. 101

1. Réponses $\boxed{\text{b}}$.
2. Réponse $\boxed{\text{c}}$. C'est une fonction de la forme $f(x) = ax^2$ avec $a = 5$ positif.
3. Réponse $\boxed{\text{c}}$. C'est une fonction de la forme $f(x) = ax^2$ avec $a = -2$ négatif. Elle est donc croissante sur $]-\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$.
4. Réponse $\boxed{\text{a}}$. C'est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + c$ avec $a = 3$ et $c = -7$. Le sommet de la parabole est donc le point $S(0; c)$.

5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. C'est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + c$ avec $a = 3$ et $c = -7$. L'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 0$.

4 QCM Trinôme

Énoncé p. 102

1 Réponses $\boxed{\text{c}}$. $f(4) = 0$ et $f(-1) = 0$, 4 et -1 sont donc les racines du polynôme.

2 Réponse $\boxed{\text{b}}$. f est de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = 3$ et $x_2 = -5$. L'axe de symétrie est la droite d'équation :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1.$$

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. 2 est une racine du polynôme.

4 Réponse $\boxed{\text{a}}$. f est de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = -2$ et $x_2 = 5$. L'abscisse du sommet est $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-2 + 5}{2}$.

5 Équations $x^2 = a$

Énoncé p. 103

Lycée Jean Monnet, Montpellier

MÉTHODE

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = a$ possède :

- deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$. $\mathcal{S} = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$.
- une solution 0 si $a = 0$. $\mathcal{S} = \{0\}$.
- aucune solution si $a < 0$. $\mathcal{S} = \varnothing$.

1 L'équation $x^2 = 36$ a deux solutions $\sqrt{36} = 6$ et $-\sqrt{36} = -6$.
L'ensemble de solution est $\mathcal{S} = \{-6; 6\}$.

2 L'équation $x^2 = 7$ a deux solutions $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.
Donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

3 L'équation $x^2 = 0$ a une solution unique 0. Donc $\mathcal{S} = \{0\}$.

4 L'équation $x^2 = -27$ n'a pas de solution réelle. Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

5 $4x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{16}{4} = 4$. L'équation $x^2 = 4$ a deux solutions $\sqrt{4} = 2$ et $-\sqrt{4} = -2$. L'ensemble de solution est donc $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.

6 $-2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-8}{-2} = 4$. Donc $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$

6 Fonction $x \mapsto ax^2$

Énoncé p. 103

Lycée Sophie Germain, Paris

À RETENIR

Une fonction trinôme de la forme $f(x) = ax^2$ avec $a \neq 0$ a pour tableau de variations l'un des tableaux suivants :

- Si $a > 0$ alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	

- Si $a < 0$ alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(0) = 0$	$\searrow$	

1 Ici $a = \dfrac{1}{3}$ donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	

2 $f(x) = 3 \iff \dfrac{1}{3}x^2 = 3 \iff x^2 = 9 \iff x = -\sqrt{9}$ ou $x = \sqrt{9}$.

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$.

7 Lecture d'une courbe

Énoncé p. 103

Lycée Kerneuzec, Quimperlé

MÉTHODE : fonctions de la forme $x \mapsto ax^2$

Pour déterminer l'expression d'une fonction associée à une parabole $\mathcal{C}$.

- Si $\mathcal{C}$ a pour sommet l'origine du repère, l'expression de f est de la forme $f(x) = ax^2$.
- Si $\mathcal{C}$ est tournée vers le haut alors $a > 0$, si $\mathcal{C}$ est tournée vers le bas alors $a < 0$
- Pour déterminer a, on lit l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 ou on utilise un point de $\mathcal{C}$.

MÉTHODE : fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + c$

Pour déterminer l'expression d'une fonction $x \mapsto ax^2 + c$ associée à une parabole $\mathcal{C}$

- Si $\mathcal{C}$ a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, l'expression de f est de la forme $f(x) = ax^2 + c$.
- Si $\mathcal{C}$ est tournée vers la haut alors $a > 0$, si $\mathcal{C}$ est tournée vers la bas alors $a < 0$
- Pour déterminer c, on lit l'ordonnée du sommet.
- Pour déterminer a, on lit l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1.
  Or, $f(1) = a \times 1^2 + c = a + c$. La valeur de a s'obtient en résolvant l'équation : $a = f(1) - c$.

1 Cette parabole représente une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + c$; son sommet est $S(0; 1)$ donc $c = 1$. Elle passe par le point $(2; 3)$ donc $f(2) = 3$. Ainsi,

$$a \times 2^2 + 1 = 3 \iff a \times 4 = 2 \iff a = \frac{2}{4}$$

donc $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘		↗	
			$f(0) = 1$		

2 Cette parabole représente une fonction de la forme $g(x) = ax^2$; son sommet est $S(0; 0)$. Elle passe par le point $(3; -6)$ donc $g(3) = -6$. Ainsi,

$$a \times 3^2 = -6 \iff a \times 9 = -6 \iff a = -\frac{6}{9}$$

donc $g(x) = -\dfrac{2}{3}x^2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
			0		
g		↗		↘	

8 Reconnaître un trinôme

Énoncé p. 104

Lycée Le Corbusier, Paris

À RETENIR

Une fonction polynôme du second degré est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

1 $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$. Ici $a = -2$, $b = 3$ et $c = -1$.

2 $g(x) = 4x^2 - 3$. Ici, $a = 4$, $b = 0$ et $c = -3$.

3 Il faut d'abord développer l'expression.

$$\begin{aligned} h(x) &= -3(x+7)(x-2) \\ &= -3(x^2 - 2x + 7x - 14) \\ &= -3x^2 - 15x + 42. \end{aligned}$$

On a alors : $a = -3$, $b = -15$ et $c = 42$.

4
$$\begin{aligned} k(x) &= 2(x-1)^2 + 4 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 4 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 + 4 \\ &= 2x^2 - 4x + 6. \end{aligned}$$

Alors, $a = 2$, $b = -4$ et $c = 6$.

9 Trouver l'axe de symétrie

Énoncé p. 104

Lycée Jean Puy, Roanne

MÉTHODE

Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors l'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

1 **(a)**
- $f(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$.
- $f(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 4 - 4 = 0$.

Donc 1 et -2 sont deux racines de f.

(b) La parabole représentant f admet pour axe de symétrie la droite d'équation :

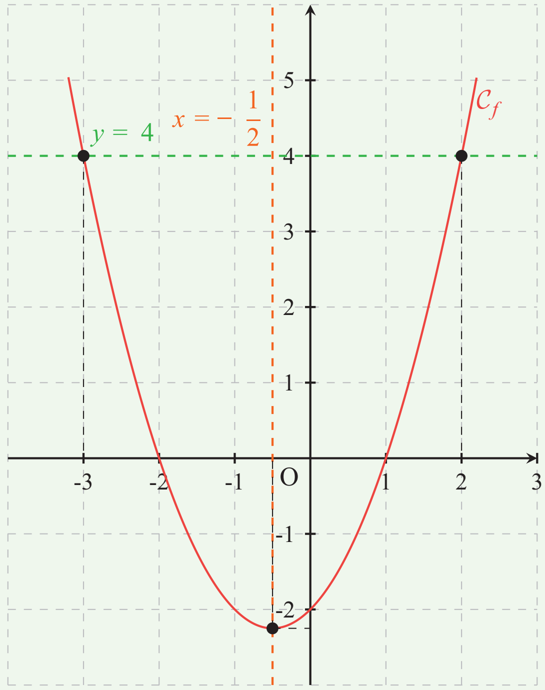
$$x = \frac{1-2}{2} = \frac{-1}{2}.$$

2 **(a)** Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$, on cherche les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 4$. On trouve $x = -3$ et $x = 2$.

On obtient la courbe représentée page ci-contre.

(b) Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$, on cherche les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés sous l'axe des abscisses.

$$\mathcal{S} =]-2; 1[.$$



10 Lecture graphique

Énoncé p. 105

Lycée Montaigne, Bordeaux

MÉTHODE

Pour déterminer l'expression d'une fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ associée à une parabole $\mathcal{C}$:

- on détermine les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ;
- si $\mathcal{C}$ est tournée vers la haut alors $a > 0$, si $\mathcal{C}$ est tournée vers la bas alors $a < 0$;
- pour déterminer a, on choisit un point de coordonnées $(x_0; y_0)$ de $\mathcal{C}$ et on résout l'équation $y_0 = f(x_0)$ d'inconnue a.

1 La fonction f a deux racines qui sont -1 et 1. Donc la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 1. De plus $a = 1{,}5$ est positif donc la fonction est décroissante puis croissante, c'est donc $\mathcal{C}_3$.

2 La fonction g n'a qu'une racine qui est 1. Ainsi la courbe de la fonction g coupe une seule fois l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. C'est donc $\mathcal{C}_2$.

3 La fonction h a deux racines qui sont -1 et 2. Donc la courbe de la fonction h coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 2. De plus $a = 0{,}5$ est positif donc la fonction est décroissante puis croissante, c'est donc $\mathcal{C}_1$.

4 La fonction k a deux racines qui sont -1 et 2. Donc la courbe de la fonction k coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 2. De plus $a = -1$ est négatif donc la fonction est croissante puis décroissante, c'est donc $\mathcal{C}_4$.

11 Signe d'un polynôme

Énoncé p. 106

Lycée Eiffel, Talange

MÉTHODE

Pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré, on étudie le signe de chacun des facteurs et on dresse un tableau de signes.

1
- $2x + 1 > 0 \iff x > -\dfrac{1}{2}$ et $2x + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$.
- $-x + 5 > 0 \Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5$ et $-x + 5 = 0 \iff x = 5$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$-$	

2 Pour trouver les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$, on utilise la dernière ligne du tableau.

$$\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]5; +\infty\right[.$$

12 Bilan

Énoncé p. 106

Lycée Bayen, Châlons

1
$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 2 \times (-1) - 3 \\ &= 1 + 2 - 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'image de -1 par la fonction f est donc 0.

2
$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 - 2 \times 3 - 3 \\ &= 9 - 6 - 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent 3 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

3 Le coefficient principal de $f(x)$ polynôme du second degré est $a = 1$. On sait que $f(-1) = f(3) = 0$. Ainsi,

$$f(x) = 1 \times (x - (-1))(x - 3) = (x + 1)(x - 3).$$

4 On a :

$$x + 1 = 0 \iff x = -1 \text{ et } x + 1 > 0 \iff x > -1.$$

De plus,

$$x - 3 = 0 \iff x = 3 \text{ et } x - 3 > 0 \iff x > 3.$$

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$+$	

5
- La courbe $\mathcal{C}_3$ ne convient pas puisqu'elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 et 4.
- La courbe $\mathcal{C}_1$ ne convient pas puisqu'elle est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-1; 3]$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3. De plus, elle est au-dessous de l'axe des abscisses uniquement sur l'intervalle $[-1; 3]$.
- La fonction f est donc représentée par la courbe $\mathcal{C}_2$.

13 Bénéfice

Énoncé
p. 107

Lycée Montaigne, Bordeaux

1 **(a)** On calcule :

$$f(60) = 0{,}25 \times 60^2 + 500 = 1\,400.$$

Le coût de fabrication est de 1 400 €.

(b) On cherche x tel que $f(x) = 2\,525$. On résout :

$$\begin{aligned} 0{,}25x^2 + 500 = 2\,525 &\iff x^2 = \frac{2\,525 - 500}{0{,}25} = 8\,100 \\ &\iff x = -\sqrt{8\,100} \text{ ou } x = \sqrt{8\,100} \\ &\iff x = -90 \text{ ou } x = 90. \end{aligned}$$

Or $x \in [0; 160]$ donc $x = 90$.

Pour 90 cartons le coût de fabrication est de 2 525 €.

2 La recette $R(x)$ est égale à $30x$.

3 **(a)** Le bénéfice est égal à :

$$R(x) - f(x) = 30x - (0{,}25x^2 + 500) = -0{,}25x^2 + 30x - 500.$$

(b) On développe le second membre :

$$\begin{aligned}-0{,}25(x-100)(x-20) &= -0{,}25(x^2-20x-100x+2000)\\ &= -0{,}25(x^2-120x+2000)\\ &= -0{,}25x^2+30x-500\\ &= B(x).\end{aligned}$$

4 On étudie le signe de $B(x)$. Pour cela on utilise la forme factorisée de $B(x)$ et on dresse un tableau de signes.

Les racines de $B(x)$ sont 100 et 20.

$$x-100>0 \iff x>100 \text{ et } x-20>0 \iff x>20.$$

x	$-\infty$		20		100		$+\infty$
$-0{,}25$		$-$		$-$		$-$	
$x-100$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-20$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$		$-$	

En utilisant la dernière ligne du tableau, on constate que $B(x)$ est positif pour $x \in]20; 100[$. Il faut donc vendre entre 20 et 100 cartons pour réaliser un bénéfice positif.

5 $B(x)$ est un trinôme du second degré avec $a = -0{,}25$ négatif, B est donc croissante, puis décroissante. Le sommet de la parabole représentant B a pour coordonnées $\left(\dfrac{20+100}{2} = 60; B(60)\right)$. Le bénéfice est donc maximal pour $x = 60$ et vaut $B(60) = 400$. Il faut donc vendre 60 cartons pour obtenir un bénéfice de 400 €.

x	0		60		160
B			400		
		↗		↘	
	-500				$-2\,100$

14 Modélisation

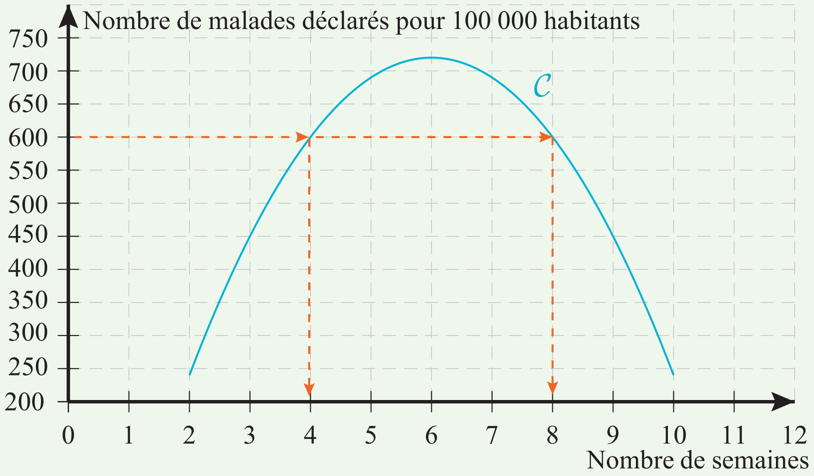
Énoncé p. 107

Lycée Chatelet, Douai

1 **(a)** Selon ce modèle, au bout de six semaines, le pic de l'épidémie a été atteint. Nous lisons l'abscisse du sommet de la parabole.

(b) Le nombre de semaines pendant lesquelles le nombre de malades a été supérieur ou égal à 600 est 4.

De la semaine 4 à la semaine 8, sur cet intervalle, la courbe est située au-dessus de la droite d'équation $y = 600$ (voir graphique page suivante).



(c)
$$\begin{aligned} f(x) \geqslant 600 &\iff -30x^2 + 360x - 360 \geqslant 600 \\ &\iff -30x^2 + 360x - 960 \geqslant 0 \\ &\iff 30(-x^2 + 12x - 32) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Puisque 30 est un nombre réel strictement positif, nous pouvons diviser les deux membres de l'inégalité par 30. Nous obtenons ainsi l'inégalité demandée.

(d) $g(4) = -4^2 + 12 \times 4 - 32 = 0$; $g(8) = -8^2 + 12 \times 8 - 32 = 0$.

Donc 4 et 8 sont des racines du polynôme g.

(e) On peut donc factoriser $g(x)$: $g(x) = -1(x-4)(x-8)$.

(f)

x	2		4		8		10
-1		$-$		$-$		$-$	
$x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(g) D'après le tableau, on voit que $g(x) \geqslant 0$ pour $x \in [4; 8]$.

Il en résulte que l'ensemble des solutions sur $[2; 10]$ de l'inéquation $f(x) \geqslant 600$ est $[4; 8]$.

2 **(a)** $f(2) = 240$ et $f(10) = 240$ donc 2 et 10 sont solutions de l'équation $f(x) = 240$ donc la droite d'équation $x = \dfrac{2+10}{2} = 6$ est axe de symétrie de la parabole représentant f.

Le sommet de la parabole est le point S de coordonnées $(6; f(6))$ soit $(6; 720)$.

(b)

x	2		6		10
f			$f(6) = 720$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	240				240

Chapitre
6

Utilisation d’un tableur

Plan du chapitre

1 Vocabulaire et premières formules

Exercice type

Lycée Louis Vincent, Metz

Le foyer socio-éducatif d’un lycée a interrogé 40 élèves sur leur *moyen de transport* pour venir en cours.

Moyen de transport	Bus	Voiture	Vélo	À pied
Effectif	18	10	6	6

1 Saisir ce tableau dans un tableur.

2 Calculer l’effectif total.

3 Calculer la fréquence de chaque moyen de transport en pourcentage.

4 Représenter ces données par un *diagramme en barres*, puis par un *diagramme circulaire*.

5 Indiquer quel moyen de transport est le plus utilisé.

Voir corrigé page 122

Définition 1 : tableur

Un *tableur* est un logiciel qui permet d’organiser des données, d’effectuer des calculs et de produire des représentations graphiques.

Définition 2 : feuille de calcul

Le document sur lequel on travaille avec un tableur est une *feuille de calcul*.

- Une feuille de calcul est formée de *colonnes* (A, B, C, …) et de *lignes* (1, 2, 3, …).
- L’intersection d’une colonne et d’une ligne est une *cellule*.
- Une cellule est repérée par son *adresse* : A1, C4, D7, …
- Une formule commence toujours par le symbole =.

Remarque : on peut utiliser les opérations suivantes.

- l'addition : `+`
- la soustraction : `-`
- la multiplication : `*`
- la division : `/`

Exemples (exemples de formules)

`=B2+C2` `=SOMME(B2:E2)` `=B2*100/F2`

2 Recopier une formule

Quand une formule a été saisie dans une cellule, on peut la *recopier* vers le bas ou vers la droite. Le tableur adapte automatiquement les références.

Exemple :

`=B2*C2`

saisie en D2 devient, après recopie vers le bas,

`=B3*C3`

en D3.

Remarques (le symbole $)

Le caractère $ permet de *bloquer* une ligne ou une colonne.

- `$A1` : la colonne A est fixée ;
- `A$1` : la ligne 1 est fixée ;
- `$A$1` : la cellule A1 est entièrement fixée.

3 Quel graphique choisir ?

Le tableur permet notamment de construire :

- un *diagramme en barres* pour comparer des effectifs ;
- un *diagramme circulaire* pour représenter une répartition ;
- un *nuage de points* pour étudier le lien entre deux variables.

3.1 Construire un diagramme en barres

Le diagramme en barres permet de comparer visuellement les effectifs de plusieurs catégories.

MÉTHODE : construire un diagramme en barres

- Créer le tableau croisé sur une feuille de calcul.
- Sélectionner ce tableau.
- Choisir le menu « Insertion ».
- Choisir *Diagramme en barres* ou *Histogramme* suivant le logiciel.
- Ajouter éventuellement un titre et une légende.

3.2 Construire un diagramme circulaire

On utilise un diagramme circulaire lorsqu'on souhaite représenter une *répartition*.

MÉTHODE : construire un diagramme circulaire

- Créer le tableau statistique.
- Sélectionner les cellules utiles.
- Choisir le menu « Insertion ».
- Choisir *Diagramme circulaire* ou *Diagramme* suivant le logiciel, puis choisir la forme du diagramme circulaire souhaitée.
- Afficher si besoin les pourcentages sur le graphique.

3.3 Construire un nuage de points

Le *nuage de points* permet de visualiser le lien entre deux grandeurs numériques.

MÉTHODE : construire un nuage de points

- Créer le tableau statistique sur une feuille de calcul.
- Sélectionner ce tableau.
- Choisir le menu « Insertion ».
- Choisir *Nuage de points* ou *Diagramme* suivant le logiciel et choisir la forme du nuage souhaitée.
- Ajouter éventuellement un titre et une légende.

MÉTHODE : ajouter une droite d'ajustement

- Construire le nuage de points.
- Cliquer sur la série de points.
- Choisir *Ajouter une courbe de tendance* ou *droite d'ajustement*.
- Afficher éventuellement l'équation de la droite.

4 Pour aller plus loin

Un tableur ne sert pas seulement à faire des graphiques : il peut aussi être utilisé pour calculer une évolution, compléter un tableau de valeurs d'une fonction ou étudier une suite numérique.

Exemple :

- `=B2*1,04` pour augmenter une valeur de 4 % ;
- `=2*A2^3-5*A2^2+2*A2+1` pour calculer l'image d'un nombre par une fonction.

Solution de l'exercice type **Lycée Louis Vincent, Metz**

1 Tableur :

	A	B	C	D	E
1	Transport	Effectif	Fréquence	Angle	Total
2	Bus	18	`=B2/$B$6`	`=C2*360`	
3	Voiture	10			
4	Vélo	6			
5	À pied	6			
6	Total	40			

2 Pour calculer une fréquence, on divise l'effectif par le total. Pour que la cellule du total reste fixe lors de la recopie, on utilise une *référence absolue*.
Ici, le total vaut : $18+10+6+6=40$.
Les fréquences sont donc :

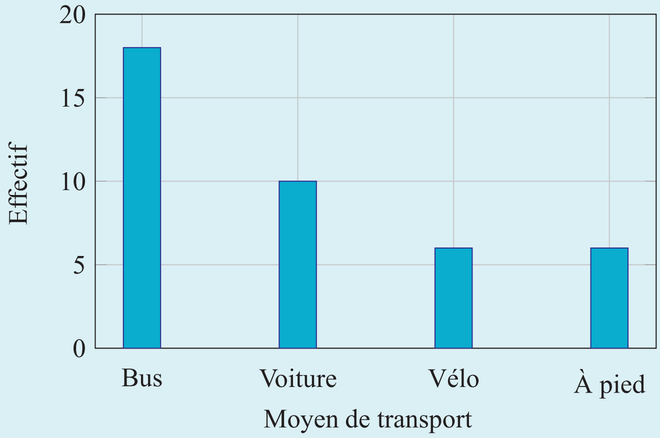
$$\text{Bus : } \frac{18}{40}=45\%, \qquad \text{Vélo : } \frac{6}{40}=15\%,$$

$$\text{Voiture : } \frac{10}{40}=25\%, \qquad \text{À pied : } \frac{6}{40}=15\%.$$

Solution de l'exercice type (suite)

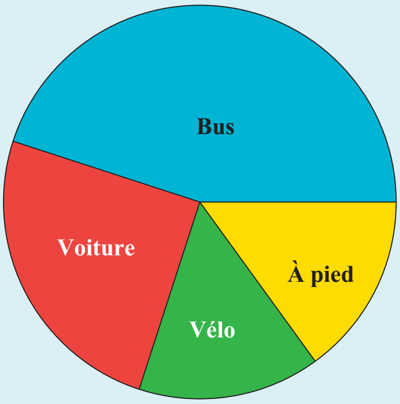
Lycée Louis Vincent, Metz

3 Diagramme en barres.



4 Diagramme circulaire.
Les angles correspondants aux fréquences calculées à la question 2 sont :

$$162°, 90°, 54°, 54°.$$



5 Le moyen de transport le plus utilisé est le bus (qui a l'effectif le plus grand).

Voir énoncé page 119

1 QCM Tableur

10 min

Corrigé p. 127

Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1 Dans un tableur, à quoi correspond la cellule B3 ?

- **a** à la colonne 3 et à la ligne B
- **b** à la ligne 3 et à la colonne B
- **c** à la troisième cellule de la feuille
- **d** à une cellule située dans la colonne A

2 On veut calculer la somme des valeurs contenues dans les cellules B2 et C2. Quelle formule doit-on saisir ?

- **a** `B2 + C2`
- **b** `=B2 + C2`
- **c** `=B2 ; C2`
- **d** `SOMME(B2,C2)`

3 On saisit en cellule C2 la formule `=B2*2`. Que devient cette formule si on la recopie en C3 ?

- **a** `=B2*2`
- **b** `=B3*2`
- **c** `=C2*2`
- **d** `=B2*3`
- **e** `4A2+7`

4 Que signifie la formule `=B2/$B$6` ?

- **a** La cellule B2 est fixée
- **b** La cellule B6 est fixée
- **c** La ligne 6 est fixée uniquement
- **d** La colonne B est fixée uniquement

5 On veut calculer la fréquence (en %) d'une valeur contenue en B2 par rapport au total en B6. Quelle formule est correcte ?

- **a** `=B2/B6*100`
- **b** `=B2*B6/100`
- **c** `=B2+100/B6`
- **d** =100/B2*B6

Formules

2 Utilisation du tableur

★

10 min

Corrigé p. 127

Lycée Jean Monnet, Montpellier

On considère la feuille de calcul ci-contre.

1 On saisit en C1 la formule `=2*A1+3*B1`. Quelle valeur s'affiche ?

2 Que devient cette formule lorsqu'on la recopie en C2 ?

3 Quelle valeur s'affiche alors en C2 ?

	A	B	C
1	25	34	
2	35	28	
3	36	32	
4	45	23	

3 Références absolues

★ 5 min

Corrigé p. 127

Lycée Sophie Germain, Paris

Expliquer la différence entre :

$$A1, \qquad \$A1, \qquad A\$1, \qquad \$A\$1.$$

Dans chacun des cas, dire ce qui est bloqué lors de la recopie.

4 Pourcentages

★ 10 min

Corrigé p. 127

Lycée Talma, Brunoy

Le gérant d'un magasin fait le bilan des recettes de la journée.

	Épicerie	Boucherie	Fromages	Fruits et légumes	Boissons	Total
Recette en €	3680	2675	1545	1670	4500	
Pourcentage						

1. Créer ce tableau sur une feuille de calcul.
2. Quelle formule écrire pour calculer le pourcentage de la recette de l'épicerie ?
3. Quelle formule obtient-on en recopiant vers la droite ?
4. Calculer les pourcentages arrondis au centième.

Nuage de points

5 Nuage de points

★ 10 min

Corrigé p. 128

Lycée Michelet, Vanves

On relève la température moyenne d'une ville à différentes heures.

Heure	8	10	12	14	16	18
Température (°C)	12	14	18	21	20	17

1. Construire le nuage de points correspondant à l'aide d'un tableur.
2. Peut-on ajuster ce nuage par une droite ? Justifier.

Suite et tableur

6 Suites

★ 5 min Corrigé p. 129

Lycée Hélène Boucher, Thionville

Une population de bactéries compte initialement 4000 individus et augmente de 4% par semaine.

1 Recopier et compléter un tableau donnant l'effectif au bout de 0, 1, 2, 3 semaines.
2 Quelle formule faut-il entrer dans le tableur pour obtenir l'effectif d'une semaine à la suivante ?
3 Compléter le tableau jusqu'à 10 semaines.

Fonction et tableur

7 Fonction et tableur

★ 5 min Corrigé p. 130

Lycée Jean Zay, Jarny

On considère la fonction :

$$f(x) = 7x^3 - 8{,}5x^2 + 2{,}3x + 1$$

définie sur [0; 2].

1 Compléter un tableau de valeurs avec un pas de 0,1.
2 Représenter les points obtenus.
3 Utiliser le tableau pour conjecturer les abscisses d'éventuels extremums.

1 QCM Tableur

Énoncé p. 124

1. Réponses $\boxed{\text{b}}$.
2. Réponse $\boxed{\text{b}}$. Une formule est toujours précédée de =.
3. Réponse $\boxed{\text{b}}$. La recopie vers le bas change les références.
4. Réponse $\boxed{\text{b}}$. La cellule est totalement fixée (ni la ligne, ni la colonne ne changent).
5. Réponse $\boxed{\text{a}}$. Formule d'un pourcentage $\frac{\text{partie}}{\text{total}} \times 100$.

2 Utilisation du tableur

Énoncé p. 124

Lycée Jean Monnet, Montpellier

1. On remplace A1 et B1 par les nombres contenus dans les cellules.

$$\text{C1} = 2 \times 25 + 3 \times 34 = 152.$$

2. La formule recopiée en C2 devient :

`=2*A2+3*B2`

3. La valeur affichée est :

$$2 \times 35 + 3 \times 28 = 154.$$

3 Références absolues

Énoncé p. 125

Lycée Sophie Germain, Paris

Le symbole \$ sert à empêcher certaines références de changer lors d'une recopie.

- A1 : ni la ligne ni la colonne ne sont bloquées.
- \$A1 : la colonne A est fixée.
- A\$1 : la ligne 1 est fixée.
- \$A\$1 : la cellule A1 est entièrement fixée.

4 Pourcentages

Énoncé p. 125

Lycée Talma, Brunoy

1. Tableur :

	Épicerie	Boucherie	Fromages	Fruits et légumes	Boissons	Total
Recette en €	3680	2675	1545	1670	4500	`=SOMME(B2:F2)` 14070
Pourcentage	26,15	19,01	10,99	11,87	31,98	100

2 Un pourcentage se calcule par : $\dfrac{\text{partie}}{\text{total}} \times 100$.
Pour calculer le pourcentage de la recette de l'épicerie, on peut écrire dans la cellule `B3` :

`=B2/$G$2*100`

3 En recopiant vers la droite, on obtient dans `C3` :

`=C2/$G$2*100`.

4 Voir dernière ligne du tableur à la question 1.

5 Nuage de points

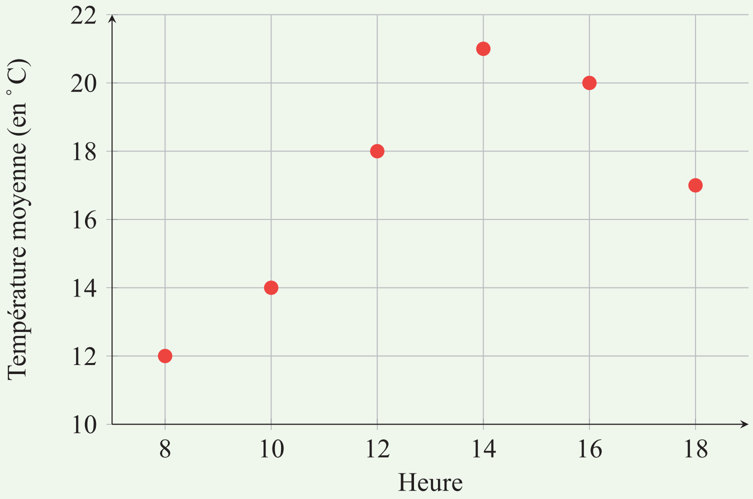
Énoncé p. 125

Lycée Michelet, Vanves

1 On représente les données par les points du plan de coordonnées :

$$(8;\,12),\ (10;\,14),\ (12;\,18),\ (14;\,21),\ (16;\,20),\ (18;\,17).$$

Le nuage de points correspondant est le suivant :



2 Une droite d'ajustement ne semble pas convenir.
En effet, les points du nuage ne sont pas sensiblement alignés : la température croît jusqu'à 14 h puis décroît ensuite. L'évolution observée n'est donc pas linéaire.
On en déduit qu'il n'est pas pertinent d'ajuster ce nuage de points par une droite.

6 Suites

Énoncé p. 126

Lycée Hélène Boucher, Thionville

1 La population augmente de 4% par semaine, donc on multiplie chaque effectif par 1,04.

Semaine	0	1	2	3
Effectif	4000	4160	4326,4	4499,46

Calculs :

$$u_1 = 4000 \times 1{,}04 = 4160$$
$$u_2 = 4160 \times 1{,}04 = 4326{,}4$$
$$u_3 = 4326{,}4 \times 1{,}04 = 4499{,}46$$

2 Dans un tableur, si la cellule contenant 4000 est `B2`, on saisit la formule :

`=B2*1,04`

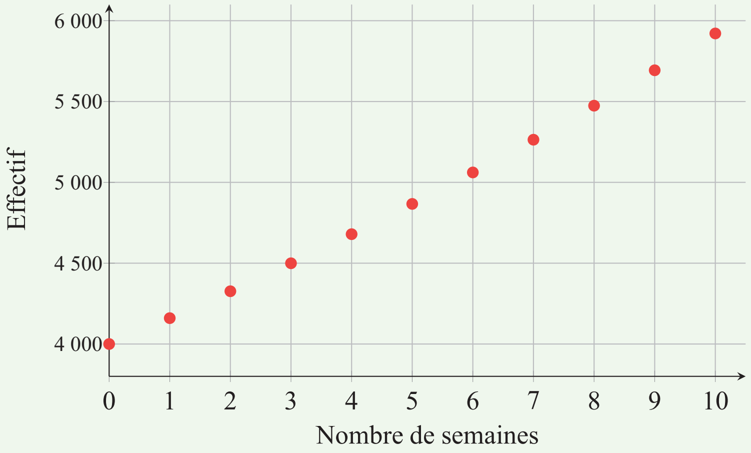
puis on recopie vers la droite pour obtenir les valeurs suivantes.

3 On complète le tableau jusqu'à 10 semaines :

Semaine	0	1	2	3	4	5
Effectif	4000	4160	4326,4	4499,46	4679,43	4866,61

Semaine	6	7	8	9	10
Effectif	5061,28	5263,73	5474,28	5693,25	5920,98

On représente ces données par un nuage de points :



On constate que les points ne sont pas alignés : la croissance n'est pas linéaire mais exponentielle.

Conclusion : il s'agit d'une *suite géométrique* de raison 1,04.

7 Fonction et tableur

Énoncé p. 126

Lycée Jean Zay, Jarny

1 On calcule les valeurs de la fonction

$$f(x) = 7x^3 - 8{,}5x^2 + 2{,}3x + 1$$

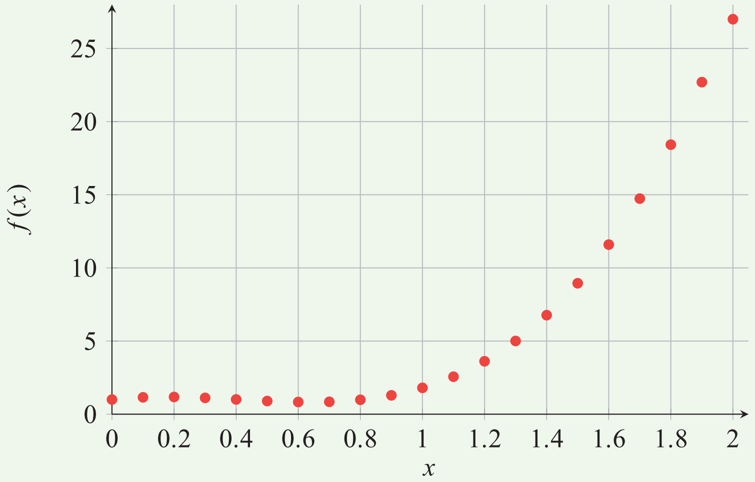
sur l'intervalle [0; 2] avec un pas de 0,1.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$f(x)$	1	1,152	1,176	1,114	1,008	0,900	0,832	0,846

x	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$f(x)$	0,984	1,288	1,800	2,562	3,616	5,004	6,768	8,950

x	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	11,592	14,736	18,424	22,698	27,6

2 On représente les points obtenus :



3 À la lecture du tableau de valeurs, on observe que :

- la fonction semble croître jusqu'aux environs de $x = 0{,}2$;
- elle décroît ensuite jusqu'aux environs de $x = 0{,}6$;
- puis elle croît de nouveau.

On peut donc conjecturer :

- un *maximum local* pour une abscisse voisine de 0,2 ;
- un *minimum local* pour une abscisse voisine de 0,6.

Conclusion : les éventuels extremums semblent être atteints pour des valeurs de x proches de 0,2 et de 0,6.

Chapitre 7

Automatismes de Seconde

Dans ce chapitre, vous trouverez des exercices dans lesquels, pour chaque question, quatre propositions sont données, dont une seule est correcte.

À vous de trouver laquelle.

1 Opérations, fraction, puissances

★★ 60 min Corrigé p. 143

1 Calculer $36{,}4 + 5{,}1 + 3{,}6$.

a 45 **b** $44{,}1$ **c** $45{,}1$ **d** $46{,}1$

2 Calculer $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$.

a $\frac{7}{6}$ **b** $\frac{11}{6}$ **c** $\frac{10}{6}$ **d** $\frac{3}{2}$

3 Calculer $\frac{5}{8} \times \frac{4}{5}$.

a $\frac{5}{32}$ **b** $\frac{1}{2}$ **c** $\frac{9}{40}$ **d** $\frac{4}{13}$

4 Calculer $2^3 \times 2^4$.

a 2^8 **b** 2 **c** 2^7 **d** 2^{12}

5 Calculer $\frac{2^6}{2^2}$.

a $\frac{4}{1100}$ **b** 2^4 **c** 2^8 **d** 2^{-4}

6 Calculer $0{,}25 \times 400$.

a 10 **b** 20 **c** 100 **d** 200

7 Calculer les $\frac{3}{4}$ de 200.

a 75 **b** 125 **c** 50 **d** 150

8 Calculer $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

a $\frac{2}{6}$ **b** $\frac{4}{9}$ **c** $\frac{4}{6}$ **d** $\frac{2}{9}$

9 Calculer $5 - (-3)$.

a 2 **b** -8 **c** 8 **d** -2

10 Calculer $7 \times (-2)$.

a -14 **b** 9 **c** -9 **d** 14

11 Calculer $\frac{7}{4} - \frac{1}{2}$.

a $\frac{3}{4}$ **b** $\frac{5}{4}$ **c** $\frac{6}{4}$ **d** $\frac{7}{8}$

12 Calculer $\frac{9}{5} \div \frac{3}{2}$.

a $\frac{5}{6}$ **b** $\frac{27}{10}$ **c** $\frac{3}{10}$ **d** $\frac{6}{5}$

13 Calculer 10% de 840.

a 840 **b** 80 **c** 84 **d** 8,4

14 Calculer 0,5% de 600.

a 3 **b** 0,3 **c** 30 **d** 300

15 Calculer $\frac{1}{10}$ de 1250.

a 12,5 **b** 150 **c** 250 **d** 125

16 Calculer le tiers de la moitié de 18.

a 3 **b** 6 **c** 9 **d** 12

17 Calculer la moitié du quart de 400.

a 50 **b** 200 **c** 100 **d** 25

18 À quelle fraction correspond $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$?

a $\frac{16}{15}$ **b** $\frac{3}{5}$ **c** $\frac{7}{9}$ **d** $\frac{34}{45}$

19 À quelle fraction d'une journée correspondent 3 heures ?

a $\frac{3}{12}$ **b** $\frac{1}{8}$ **c** $\frac{1}{12}$ **d** $\frac{1}{6}$

20 Compléter : $\frac{14}{3} + \cdots = 2$.

a $-\frac{14}{3}$ **b** $-\frac{11}{3}$ **c** $\frac{8}{3}$ **d** $-\frac{8}{3}$

21 Calculer $\left(-\frac{7}{2}\right)^2$.

a $\frac{49}{4}$ **b** $\frac{14}{4}$ **c** $-\frac{49}{4}$ **d** $\frac{7}{4}$

22 Donner 30% sous forme d'une fraction irréductible.

a $\frac{30}{1000}$ **b** $\frac{3}{10}$ **c** $\frac{10}{3}$ **d** $\frac{1}{3}$

23 Donner la forme décimale de $\frac{3}{4}$.

a 7,5 **b** 0,34 **c** 0,074 **d** 0,75

24 Donner la forme décimale de 150%.

a 15 **b** 1,5 **c** 150 **d** 0,15

25 Calculer $3^2 - 2^3$.

a 17 **b** 1 **c** 5 **d** -1

26 Calculer $(5 - 2) \times 4$.

a 3 **b** 7 **c** 20 **d** 12

27 Calculer $1{,}2 + 0{,}08$.

a 1,28 **b** 1,208 **c** 0,2 **d** 1,80

28 Calculer $\frac{5}{2} + (\frac{7}{2} + \frac{9}{5}) \times \frac{1}{3}$.

a $\frac{83}{15}$ **b** $\frac{49}{15}$ **c** $\frac{29}{10}$ **d** $\frac{64}{15}$

29 Calculer $2 \times \pi \times 5$ au dixième près.

a 10,0 **b** 15,7 **c** 62,8 **d** 31,4

30 Donner un ordre de grandeur de $49{,}7 \div 1{,}99$.

a 20 **b** 25 **c** 50 **d** 12,5

2 Proportionnalité

★★ 60 min Corrigé p. 144

1 Dans un groupe de 120 personnes, il y a 6 adolescents. Quel est le pourcentage d'adolescents ?

a 5% **b** 0,5% **c** 6% **d** 20%

2 Un yaourt de 125 g contient 12 g de sucre. Quel est le pourcentage de sucre ?

a 9,6% **b** 10,4% **c** 12% **d** 96%

3 Quel pourcentage d'une journée représentent 6 heures ?

a 6% **b** 20% **c** 30% **d** 25%

4 45 des 150 adhérents d'un club jouent du piano. Quel est le pourcentage de pianistes ?

a 45% **b** 15% **c** 30% **d** 3%

5 Parmi 500 personnes, 165 préfèrent le rouge. Quel est le pourcentage correspondant ?

a 16,5% **b** 35% **c** 33% **d** 3,3%

6 Un lot de 300 billets compte 18 billets gagnants. Quel est le pourcentage de billets perdants ?

a 6%   b 96%   c 94%   d 82%

7 Calculer 10% de 50% de 840.

a 42   b 4,2   c 420   d 84

8 Calculer 80% de 20% de 1000.

a 800   b 16   c 200   d 160

9 Dans un zoo, 52% des animaux sont des mammifères et, parmi eux, 40% sont carnivores. Quel pourcentage des animaux sont des mammifères carnivores ?

a 20,8%   b 92%   c 12%   d 40%

10 Dans une classe, 60% des élèves sont des filles et 20% d'entre elles sont externes. Quel pourcentage d'élèves de la classe sont des filles externes ?

a 12%   b 80%   c 20%   d 40%

11 Donner le pourcentage correspondant à 0,25.

a 0,25%   b 2,5%   c 25%   d 250%

12 Donner le pourcentage correspondant à $\frac{3}{4}$.

a 7,5%   b 0,75%   c 75%   d 34%

13 À quelle fraction irréductible correspond 12% ?

a $\frac{1}{12}$ b $\frac{12}{100}$ c $\frac{6}{25}$ d $\frac{3}{25}$

14 À quelle écriture décimale correspond 81% ?

a 0,081   b 81   c 0,81   d 8,1

15 À quelle écriture décimale correspond 0,5% ?

a 0,005   b 0,5   c 5   d 0,05

16 Dans une entreprise de 400 salariés, 24% sont cadres. Combien y a-t-il de cadres ?

a 104   b 24   c 76   d 96

17 Parmi 80 oiseaux, 15% sont des perruches. Combien y a-t-il de perruches ?

a 12   b 15   c 20   d 8

18 Dans une salle de spectacle, 9% des 1200 spectateurs ne sont pas encore arrivés. Combien manque-t-il de spectateurs ?

a 111   b 108   c 12   d 90

19 Combien de minutes y a-t-il dans 5% d'une heure ?

a 3   b 5   c 6   d 30

20 Le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de 40 à 10 est :

a 0,25 **b** 2,5 **c** 4 **d** 0,4

21 Si 8 stylos coûtent 12 €, alors 1 stylo coûte :

a 96 € **b** 4 € **c** 0,67 € **d** 1,5 €

22 Un plan est à l'échelle 1/100. Une longueur réelle de 5 m est représentée par :

a 50 cm **b** 0,5 cm **c** 500 cm **d** 5 cm

23 Une recette pour 4 personnes nécessite 300 g de farine. Pour 10 personnes, il faut :

a 1 200 g **b** 750 g **c** 700 g **d** 600 g

24 Dans un triangle agrandi avec un coefficient 3, une longueur de 4 cm devient :

a 1,33 cm **b** 64 cm **c** 7 cm **d** 12 cm

3 Évolutions et variations

★★ 40 min Corrigé p. 145

1 Augmenter de 15% revient à multiplier par :

a 1,5 **b** 0,85 **c** 0,15 **d** 1,15

2 Diminuer de 29% revient à multiplier par :

a 1,29 **b** 0,29 **c** 0,79 **d** 0,71

3 Un prix passe de 100 € à 120 €. Le taux d'évolution est :

a 20% **b** 0,2% **c** 1,2% **d** 120%

4 Une masse est multipliée par 0,84. Le taux d'évolution est :

a −16% **b** +16% **c** +84% **d** −84%

5 Une quantité augmente de 20% puis baisse de 20%. L'évolution globale est :

a 0% **b** +4% **c** −4% **d** −20%

6 Une hausse de 25% est compensée par une baisse de :

a 20% **b** 15% **c** 25% **d** 30%

7 Après une augmentation de 50%, un prix vaut 12 €. Son prix initial était :

a 18€ **b** 8€ **c** 6€ **d** 10€

8 Un bijou coûte 120 € après une baisse de 20%. Son prix initial était :

a 100€ **b** 96€ **c** 150€ **d** 144€

9 Une quantité baisse de 10% puis augmente de 15%. L'évolution globale est :

a +25% **b** +3,5% **c** +5% **d** −5%

10 Le coefficient multiplicateur associé à deux hausses successives de 10% puis 20% est :

a 1,02 **b** 1,3 **c** 1,12 **d** 1,32

11 Le prix TTC s'obtient en augmentant le prix HT de 20%. Pour retrouver le prix HT à partir du prix TTC, il faut multiplier par :

a $\frac{6}{5}$ **b** $\frac{5}{6}$ **c** 1,2 **d** 0,8

12 Une population de 2400 bactéries baisse de 10% par heure. Au bout de 2 heures, elle vaut :

a 2160 **b** 1944 **c** 240 **d** 1920

13 Une quantité est multipliée par 3. Cela correspond à une augmentation de :

a 300% **b** 200% **c** 150% **d** 30%

4 Calcul littéral

★ 20 min Corrigé p. 146

1 La forme réduite de $2x + 5x - 3$ est :

a $10x$ **b** $3x + 2$ **c** $7x - 3$ **d** $7x + 3$

2 La forme développée de $3(x - 4)$ est :

a $x - 12$ **b** $3x + 12$ **c** $3x - 12$ **d** $3x - 4$

3 La forme développée de $(x + 2)(x + 5)$ est :

a $x^2 + 10x + 7$ **b** $x^2 + 7x + 10$
c $x^2 + 7x$ **d** $x^2 + 3x + 10$

4 La forme développée de $(a - b)^2$ est :

a $a^2 - 2b^2$ **b** $a^2 + 2ab + b^2$
c $a^2 - b^2$ **d** $a^2 - 2ab + b^2$

5 La forme factorisée de $5x + 15$ est :

a $x(5 + 15)$ **b** $15(x + 1)$
c $5(x + 3)$ **d** $5(x + 15)$

6 La forme factorisée de $x^2 - 9$ est :

a $(x - 3)(x + 3)$ **b** $(x - 9)(x + 1)$
c $(x - 3)^2$ **d** $x(x - 9)$

7 La forme réduite de $-(a - b)$ est :

a $a - b$ **b** $-a - b$ **c** $b + a$ **d** $b - a$

8 La forme factorisée de $x^2 + 2x$ est :

a $(x + 1)^2$ **b** $x(x + 2)$ **c** $x^2(1 + 2)$ **d** $2x(x + 1)$

9 La forme développée de $(2x - 1)^2$ est :

a $2x^2-4x+1$ **b** $4x^2 - 1$ **c** $4x^2-4x+1$ **d** $4x^2+4x+1$

5 Équations et inéquations

★★ 30 min Corrigé p. 147

1 Une solution de l'équation $3x + 12 = 5x - 8$ est :

a $x = 2$ **b** $x = 10$ **c** $x = 3$ **d** $x = -2$

2 Une solution de l'équation $8{,}5x + 5 = -1{,}5x + 3$ est :

a $x = 2$ **b** $x = -2$ **c** $x = -0{,}2$ **d** $x = 0{,}2$

3 Une solution de l'équation $3(x - 5) + 1 = 4x + 7$ est :

a $x = -7$ **b** $x = 21$ **c** $x = 7$ **d** $x = -21$

4 Une solution de l'équation $2(x - 3) - 4 = 7x$ est :

a $x = -2$ **b** $x = \frac{2}{5}$ **c** $x = -\frac{2}{5}$ **d** $x = 2$

5 L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 0{,}25$ est :

a $\{0{,}5\}$ **b** $\left\{0{,}25^2\right\}$ **c** $\{-0{,}5; 0{,}5\}$ **d** $[-0{,}25; 0{,}25]$

6 L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 64 = 0$ est :

a $\{8\}$ **b** $\{-64; 64\}$ **c** $\{-4; 4\}$ **d** $\{-8; 8\}$

7 L'unique solution de l'équation $\frac{5}{x} = 20$ est :

a $x = 25$ **b** $x = \frac{1}{4}$ **c** $x = \frac{5}{20^2}$ **d** $x = 4$

8 L'unique solution de l'équation $\frac{2}{x} = \frac{7}{5}$ est :

a $x = \frac{2}{7}$ **b** $x = \frac{5}{7}$ **c** $x = \frac{10}{7}$ **d** $x = \frac{7}{10}$

9 L'ensemble des solutions de l'équation $(x - 3)(x + 5) = 0$ est :

a $\{8\}$ **b** $\{-5; 3\}$ **c** $\{-15; \}$ **d** $\{-3; 5\}$

10 L'ensemble des solutions de l'inéquation $4x - 7 > 5$ est :

a $]3; +\infty[$ **b** $\left]-\infty; -\frac{7}{4}\right[$ **c** $]12; +\infty[$ **d** $]-\infty; 3[$

11 L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x + 1 \leqslant 5$ est :

a $[2; +\infty[$ **b** $]-\infty; 2]$ **c** $[-2; +\infty[$ **d** $]-\infty; -2]$

6 Fonctions

★ 20 min Corrigé p. 148

1 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.
$f(3)$ vaut :

a 3 **b** 5 **c** 6 **d** 7

2 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
Un antécédent de 0 par la fonction f est :

a -1 **b** 0 **c** 1 **d** 3

3 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Parmi les points proposés, quel est celui qui appartient à la courbe représentative de f ?

$\boxed{a}$ $A(5; 2)$ $\boxed{b}$ $B(2; 1)$ $\boxed{c}$ $C(2; 5)$ $\boxed{d}$ $D(1; 2)$

4 On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$. Parmi les points proposés, quel est celui qui appartient à la courbe représentative de g ?

$\boxed{a}$ $A(4; 8)$ $\boxed{b}$ $B(6; -36)$ $\boxed{c}$ $C(-9; -81)$ $\boxed{d}$ $D(-3; 9)$

5 Dans un repère du plan, on considère les points $A(50; 100)$ et $B(30; 60)$. On note a le coefficient directeur de la droite (AB). On peut affirmer que :

$\boxed{a}$ $a = 2$ $\boxed{b}$ $a = 0{,}5$ $\boxed{c}$ $a = -2$ $\boxed{d}$ $a = -0{,}5$

6 Dans un repère du plan, on considère la droite D de coefficient directeur $-0{,}5$ et passant par le point $A(0; 2)$. On note B le point de la droite D dont l'abscisse est égale à 1. L'ordonnée du point B est égale à :

$\boxed{a}$ 2 $\boxed{b}$ 1,5 $\boxed{c}$ 3,5 $\boxed{d}$ 3

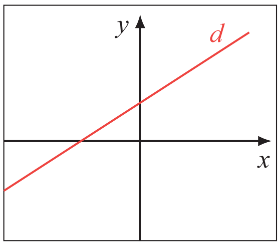
7 La représentation graphique d'une fonction affine est toujours :

$\boxed{a}$ une parabole $\boxed{b}$ une droite
$\boxed{c}$ une hyperbole $\boxed{d}$ un cercle

8 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x - 5$. La fonction f est . . .

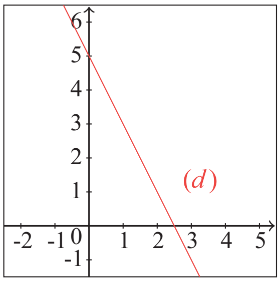
$\boxed{a}$ une fonction linéaire $\boxed{b}$ une fonction affine
$\boxed{c}$ une fonction constante $\boxed{d}$ une fonction quadratique

9 On considère une droite d représentée ci-dessous. d est la représentation graphique de la fonction :



$\boxed{a}$ $f(x) = x + 2$
$\boxed{b}$ $f(x) = x - 2$
$\boxed{c}$ $f(x) = -x + 2$
$\boxed{d}$ $f(x) = -x - 2$

10 On considère une fonction affine représentée ci-dessous par la droite (d). Quel est l'antécédent de 3 par la fonction f ?



$\boxed{a}$ -1
$\boxed{b}$ 0
$\boxed{c}$ 1
$\boxed{d}$ 2,5

7 Probabilités

★★ 30 min Corrigé p. 148

« Un jeu de 32 cartes est composé de 4 couleurs (Trèfle, Carreau, Cœur et Pique). Dans chaque couleur il y a 8 cartes de hauteurs différentes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). »

On tire au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un Trèfle ?

a $\frac{4}{8}$ **b** $\frac{1}{4}$ **c** $\frac{1}{8}$ **d** $\frac{1}{32}$

2 On tire au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

a $\frac{4}{8}$ **b** $\frac{1}{4}$ **c** $\frac{1}{8}$ **d** $\frac{1}{32}$

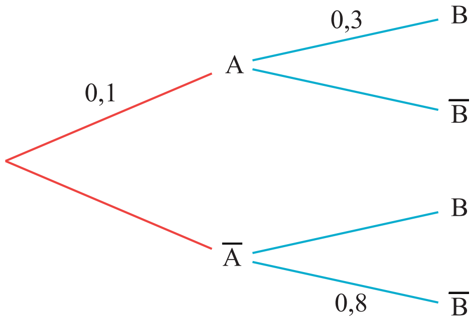
3 On tire au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure (valet, dame ou roi) ?

a $\frac{3}{32}$ **b** $\frac{3}{8}$ **c** $\frac{3}{4}$ **d** $\frac{1}{2}$

4 On tire au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un as ou un Pique ?

a $\frac{2}{32}$ **b** $\frac{8}{32}$ **c** $\frac{11}{32}$ **d** $\frac{12}{32}$

5 On considère l'arbre de probabilité ci-dessous.



On cherche la probabilité de l'événement $\overline{A}$.

a $p(\overline{A}) = 0{,}2$ **b** $p(\overline{A}) = 0{,}6$
c $p(\overline{A}) = 0{,}9$ **d** $p(\overline{A}) = 0{,}83$

6 On considère l'arbre de probabilité ci-dessus. On cherche la probabilité de l'événement $A \cap B$.

a $p(A \cap B) = 0{,}3$ **b** $p(A \cap B) = 0{,}03$
c $p(A \cap B) = 0{,}4$ **d** $p(A \cap B) = 0{,}5$

7 On considère l'arbre de probabilité précédent. On cherche la probabilité $p_A(B)$.

a $p_A(B) = 0{,}21$ **b** $p_A(B) = 0{,}4$
c $p_A(B) = 0{,}03$ **d** $p_A(B) = 0{,}3$

8 On considère l'arbre de probabilité précédent. On cherche la probabilité $p(B)$.

a $p(B) = 0{,}4$ **b** $p(B) = 0{,}3$
c $p(B) = 0{,}21$ **d** $p(B) = 0{,}75$

	A	$\overline{A}$	Total
B	40	110	150
$\overline{B}$	30	20	50
Total	70	130	200

9 On considère le tableau croisé d'effectifs ci-dessus. On cherche la probabilité de l'événement $\overline{A}$.

a $p(\overline{A}) = \dfrac{110}{130}$ **b** $p(\overline{A}) = \dfrac{130}{200}$
c $p(\overline{A}) = \dfrac{110}{150}$ **d** $p(\overline{A}) = \dfrac{70}{130}$

10 On considère le tableau croisé d'effectifs ci-dessus. On cherche la probabilité de l'événement $A \cap B$.

a $p(A \cap B) = \dfrac{40}{70}$ **b** $p(A \cap B) = \dfrac{40}{150}$
c $p(A \cap B) = \dfrac{70+150}{200}$ **d** $p(A \cap B) = \dfrac{40}{200}$

11 On considère le tableau croisé d'effectifs ci-dessus. On cherche la probabilité $p_A(B)$.

a $p_A(B) = \dfrac{40}{70}$ **b** $p_A(B) = \dfrac{40}{150}$
c $p_A(B) = \dfrac{40}{200}$ **d** $p_A(B) = \dfrac{40}{70+150}$

8 Statistiques

★ 15 min Corrigé p. 149

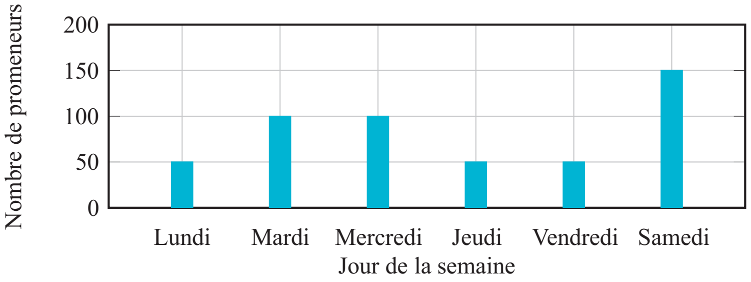
1 Un diagramme semi-circulaire est partagé en 3 parts correspondant à 50%, 25% et 25%. Quelle est la mesure de l'angle de la part 50% ?

a 45° **b** 90° **c** 180° **d** 360°

2 Dans un diagramme circulaire, une mesure d'angle de 180° représente :

a la moitié du diagramme. **b** la totalité du diagramme
c le quart du diagramme **d** le tiers du diagramme

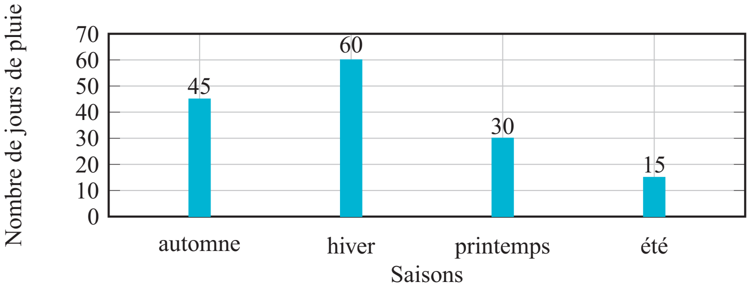
3 La semaine dernière, le gardien du jardin botanique a relevé le nombre de promeneurs venus dans le jardin. Le graphique ci-dessous représente la répartition de ces promeneurs en fonction des jours de cette semaine.



Par rapport au nombre total de promeneurs, quel est le pourcentage de ceux qui sont venus le jeudi ?

a 25% **b** 10% **c** 20% **d** 50%

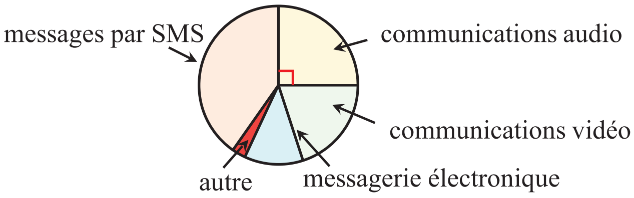
4 Au cours de l'an passé, il a plu 150 jours dans une ville. Voici la répartition des jours de pluie au cours des saisons dans cette ville.



Par rapport au nombre total de jours de pluie, quel est le pourcentage de jours pluvieux qui ont eu lieu au printemps ?

a 3% **b** 20% **c** 25% **d** 30%

5 Voici la répartition des communications effectuées par des lycéens avec leur téléphone portable :



Quelle proportion des communications effectuées, les communications audio représentent-elles ?

a 90% **b** 45% **c** 25% **d** 20%

6 Voici une série de valeurs : 20 ; 0 ; 9 ; 10 ; 17 ; 14 ; 0

La moyenne de cette série est 10. Quelle est la justification correcte parmi les propositions suivantes :

- **a** La moyenne est 10 car c'est la moitié de 20.
- **b** La moyenne est 10 car il y a dans la série autant de valeurs inférieures à 10 que de valeurs supérieures à 10.
- **c** La moyenne est 10 car la valeur 10 est au milieu de la série.
- **d** La moyenne est 10 car : $\dfrac{20+0+9+10+17+14+0}{7}=10$

1 Opérations, fraction, puissances

Énoncé p. 131

1 Réponse $\boxed{c}$. On a :

$$36{,}4 + 5{,}1 + 3{,}6 = (36{,}4 + 3{,}6) + 5{,}1 = 40 + 5{,}1 = 45{,}1.$$

2 Réponse $\boxed{d}$. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

3 Réponse $\boxed{b}$. $\frac{5}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{5 \times 4}{4 \times 2 \times 5} = \frac{1}{2}$.

4 Réponse $\boxed{c}$. $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$.

5 Réponse $\boxed{b}$. $\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$.

6 Réponse $\boxed{c}$. $0{,}25 \times 400 = 0{,}25 \times 4 \times 100 = 100$.

7 Réponse $\boxed{d}$. $\frac{3}{4} \times 200 = 3 \times \frac{200}{4} = 3 \times 50 = 150$.

8 Réponse $\boxed{b}$. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

9 Réponse $\boxed{c}$. $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$.

10 Réponse $\boxed{a}$. $7 \times (-2) = -7 \times 2 = -14$.

11 Réponse $\boxed{b}$. $\frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$.

12 Réponse $\boxed{d}$. $\frac{9}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{9}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{9 \times 2}{5 \times 3} = \frac{6}{5}$.

13 Réponse $\boxed{c}$. $0{,}1 \times 840 = 84$.

14 Réponse $\boxed{a}$. $\frac{0{,}5}{100} \times 600 = 0{,}5 \times 6 = 3$.

15 Réponse $\boxed{d}$. $\frac{1}{10} \times 1250 = 125$.

16 Réponse $\boxed{a}$. $\frac{1}{3} \times \frac{18}{2} = \frac{18}{2 \times 3} = 3$.

17 Réponse $\boxed{a}$. $\frac{1}{2} \times \frac{400}{4} = \frac{1}{2} \times 100 = 50$.

18 Réponse $\boxed{b}$. $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

19 Réponse $\boxed{b}$. Il y a 24 heures dans une journée. $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

20 Réponse $\boxed{d}$. $\frac{14}{3} - \frac{8}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

21 Réponse $\boxed{a}$. $\left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{(-7)^2}{2^2} = \frac{49}{4}$.

22 Réponse $\boxed{b}$. $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

23 Réponse $\boxed{d}$. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$.

24 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $150\% = \dfrac{150}{100} = 1{,}5$.

25 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$.

26 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $(5-2) \times 4 = 3 \times 4 = 12$.

27 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $1{,}2 + 0{,}08 = 1{,}28$.

28 Réponse $\boxed{\text{d}}$.

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} + (\frac{7}{2} + \frac{9}{5}) \times \frac{1}{3} &= \frac{5}{2} + (\frac{35}{10} + \frac{18}{10}) \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{5}{2} + \frac{53}{10} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{5}{2} + \frac{53}{30}\\ &= \frac{75}{30} + \frac{53}{30}\\ &= \frac{128}{30}\\ &= \frac{64}{15}.\end{aligned}$$

29 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $2 \times \pi \times 5 = 10 \times \pi \approx 31{,}4$.

30 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Ordre de grandeur $50 \div 2 = 25$.

2 Proportionnalité

Énoncé p. 133

1 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $\dfrac{6}{120} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$ soit 5%.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $\dfrac{12}{125} = 0{,}096$ soit 9,6%.

3 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $\dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ soit 25%.

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\dfrac{45}{150} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$ soit 30%.

5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\dfrac{165}{500} = \dfrac{33}{100} = 0{,}33$ soit 33%.

6 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\dfrac{18}{300} = \dfrac{3}{50} = 0{,}06$. Il y a 6% de billets gagnants donc 94% de billets perdants.

7 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $0{,}10 \times 0{,}5 \times 840 = 0{,}5 \times 84 = 42$.

8 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $0{,}8 \times 0{,}2 \times 1000 = 160$.

9 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $0{,}4 \times 0{,}52 = 0{,}208$ soit 20,8%.

10 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$ soit 12%.

11 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $0{,}25 = \dfrac{25}{100}$.

12 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{100}$.

13 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $12\% = \dfrac{12}{100} = \dfrac{3}{25}$.

14 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $81\% = \dfrac{81}{100} = 0{,}81$.

15 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $0{,}05\% = \dfrac{0{,}5}{100} = 0{,}005$.

16 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $\dfrac{24}{100} \times 400 = \dfrac{24 \times 400}{100} = 24 \times 4 = 96$.

17 Réponse $\boxed{\text{a}}$.

$$\frac{15}{100} \times 80 = \frac{15 \times 80}{100} = \frac{5 \times 3 \times 8 \times 10}{10 \times 2 \times 5} = \frac{8 \times 3}{2} = 4 \times 3 = 12.$$

18 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $\dfrac{9 \times 1200}{100} = 9 \times 12 = 108$.

19 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $\dfrac{5 \times 60}{100} = \dfrac{300}{100} = 3$.

20 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $40 \times x = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

21 Réponse $\boxed{\text{d}}$. 1 stylo coûte $\dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ €.

22 Réponse $\boxed{\text{d}}$. L'échelle 1/100 signifie que 1 cm sur la carte représente 100 cm dans la réalité. 5 m = 500 cm dans la réalité est donc représenté par 5 cm.

23 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On calcule : $\dfrac{300}{4} \times 10 = 750$.

24 Réponse $\boxed{\text{d}}$. 4×3.

3 Évolutions et variations

Énoncé p. 135

1 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Augmenter de 15% c'est multiplier par $1 + \dfrac{15}{100} = 1{,}15$.

2 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Diminuer de 29% c'est multiplier par $1 - \dfrac{29}{100} = 0{,}71$.

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. On calcule $\dfrac{v_f - v_i}{v_i} = \dfrac{120 - 100}{100} = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$ ce qui correspond à une augmentation de 20%.

4 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $0{,}84 = 1 - \dfrac{16}{100}$ ce qui correspond à une baisse de 16%.

5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Augmenter de 20% revient à multiplier par 1,2, diminuer de 20% revient à multiplier par 0,8 ; $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96 = 1 - \dfrac{4}{100}$ ce qui correspond à une baisse de 4%.

6 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Une hausse de 25% revient à multiplier par 1,25. On cherche x tel que $1{,}25 \times x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$ soit une baisse de 20%.

7 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Augmenter de 50% revient à multiplier par 1,5. On cherche x tel que $1{,}5x = 12 \Leftrightarrow x = \dfrac{12}{1{,}5} = 12 \times \dfrac{2}{3} = 8$.

8 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Une baisse de 20% revient à multiplier par 0,8. On fait alors $\dfrac{1}{0{,}8} = \dfrac{10}{8} = 1{,}25$, qui correspond à une hausse de 25%.

9 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Baisser de 10% revient à multiplier par 0,9 ; augmenter de 15% revient à multiplier par 1,15. $0{,}9 \times 1{,}15 = 1{,}035$ soit une hausse de 3,5%.

10 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Augmenter de 10% puis de 20% revient à multiplier par $1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$.

11 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Pour retrouver le prix HT à partir du prix TTC, il faut diviser par 1,2 ce qui revient à multiplier par $\dfrac{5}{6}$. $\dfrac{1}{1{,}2} = \dfrac{1}{\frac{12}{10}} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

12 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Une baisse de 10% correspond à une diminution de 240 bactéries. Après la première heure, il restera $2400 - 240 = 2160$ bactéries. Une autre baisse de 10% correspond à une perte de 216 bactéries. Il restera donc $2160 - 216 = 1944$ bactéries.

13 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Multiplier par 3 revient à multiplier par $1 + 2 = 1 + \dfrac{200}{100}$ soit une hausse de 200%.

4 Calcul littéral

Énoncé p. 136

1 Réponse $\boxed{\text{c}}$.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On utilise la double distributivité :

$$3(x - 4) = 3 \times x - 3 \times 4 = 3x - 12.$$

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 5) &= x \times x + 5 \times x + 2 \times x + 2 \times 5\\ &= x^2 + 5x + 2x + 10\\ &= x^2 + 7x + 10.\end{aligned}$$

4 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Il s'agit d'une identité remarquable.

5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $5x + 15 = 5x + 5 \times 3 = 5(x + 3)$.

6 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Il s'agit de l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = x$ et $b = 3$.

7 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $-(a - b) = -a + b = b - a$

8 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $x^2 + 2x = x(x + 2)$. Le facteur commun est x.

9 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$. Il s'agit de l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

5 Équations et inéquations

Énoncé p. 137

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$.

$$\begin{aligned} 3x + 12 = 5x - 8 &\iff 3x - 5x = -8 - 12 \\ &\iff -2x = -20 \\ &\iff x = 10. \end{aligned}$$

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$.

$$\begin{aligned} 8{,}5x + 5 = -1{,}5x + 3 &\iff 8{,}5x + 1{,}5x = 3 - 5 \\ &\iff 10x = -2 \\ &\iff x = -0{,}2. \end{aligned}$$

3 Réponse $\boxed{\text{d}}$.

$$\begin{aligned} 3(x - 5) + 1 = 4x + 7 &\iff 3x - 15 + 1 = 4x + 7 \\ &\iff 3x - 4x = 7 + 15 - 1 \\ &\iff -x = 21 \\ &\iff x = -21. \end{aligned}$$

4 Réponse $\boxed{\text{a}}$.

$$\begin{aligned} 2(x - 3) - 4 = 7x &\iff 2x - 6 - 4 = 7x \\ &\iff 2x - 7x = 6 + 4 \\ &\iff -5x = 10 \\ &\iff x = -2. \end{aligned}$$

5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. D'après le cours, $x^2 = a \iff x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$, et $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

6 Réponse $\boxed{\text{d}}$.

$$\begin{aligned} x^2 - 64 = 0 &\iff (x - 8)(x + 8) = 0 \\ &\iff x - 8 = 0 \text{ ou } x + 8 = 0 \\ &\iff x = 8 \text{ ou } x = -8. \end{aligned}$$

7 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $\dfrac{5}{x} = 20 \iff \dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{20} \iff x = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$.

8 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\dfrac{2}{x} = \dfrac{7}{5} \iff \dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{7} \iff x = \dfrac{10}{7}$.

9 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Il s'agit d'une équation produit nul.

$$(x - 3)(x + 5) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -5$$

10 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $4x - 7 > 5 \iff 4x > 12 \iff x > \dfrac{12}{4} \iff x > 3$.

11 Réponse $\boxed{\text{c}}$.

$$\begin{aligned} -2x + 1 \leqslant 5 &\iff -2x \leqslant 5 - 1 \\ &\iff -2x \leqslant 4 \\ &\iff x \geqslant \frac{4}{-2} \\ &\iff x \geqslant -2. \end{aligned}$$

6 Fonctions

Énoncé
p. 137

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On remplace x par 3.

$$f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5.$$

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $f(1) = 3(1)^2 - 2 \times (1) - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$.

3 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$ donc la courbe passe par $(2; 5)$.

4 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $g(-3) = (-3)^2 = 9$ donc la courbe passe par $(-3; 9)$.

5 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Le coefficient directeur est défini par :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{60 - 100}{30 - 50} = \frac{-40}{-20} = 2.$$

6 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Le coefficient directeur vérifie :

$$-0{,}5 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_B - 2}{1 - 0} = y_B - 2 \iff y_B = -0{,}5 + 2 = 1{,}5.$$

7 Réponse $\boxed{\text{b}}$.

8 Réponse $\boxed{\text{b}}$.

9 Réponse $\boxed{\text{a}}$. L'ordonnée à l'origine de cette droite est positive et le coefficient directeur également.

10 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On cherche l'abscisse du point d'ordonnée 3 de la droite.

7 Probabilités

Énoncé
p. 139

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Il y a 8 trèfles sur les 32 cartes soit $\dfrac{1}{4}$.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Il y a 4 as sur les 32 cartes soit $\dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Il y a $3 \times 4 = 12$ figures sur les 32 cartes soit $\dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$.

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Il y a 8 « Pique » et 3 as (on ne compte pas deux fois l'as de Pique) soit 11 cartes sur les 32 cartes soit $\dfrac{11}{32}$.

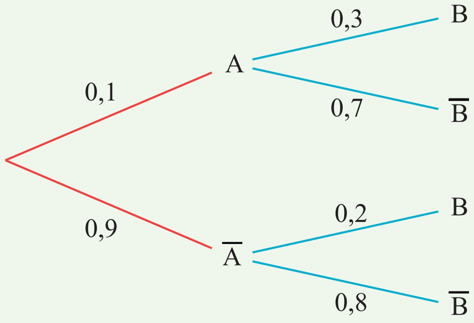
5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

6 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $p(A \cap B) = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03$.

7 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $p_A(B) = 0{,}3$ (c'est écrit sur la deuxième branche de l'arbre).

8 Réponse $\boxed{\text{c}}$.

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}21.$$



9 Réponse $\boxed{\text{b}}$. On regarde la 3^{e} ligne du tableau.

10 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On regarde la valeur à l'intersection de la colonne de A et de la ligne de B.

11 Réponse $\boxed{\text{a}}$. On regarde sur la colonne de A les éléments qui sont dans B.

8 Statistiques

Énoncé p. 140

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Un diagramme semi-circulaire mesure 180°.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Un diagramme circulaire mesure 360°.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Il y a eu $50 + 100 + 100 + 50 + 50 + 150 = 500$ visiteurs donc 50 sont venus le jeudi soit une proportion de $\dfrac{50}{500} = \dfrac{1}{10}$ soit 10%.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Il a plu $45+60+30+15 = 150$ jours dont 30 au printemps soit une proportion de $\dfrac{30}{150} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ soit 20%.

5 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Les communications audio représentent $\dfrac{1}{4}$ des communications soit 25%.

6 Réponse $\boxed{\text{d}}$. C'est la définition de la moyenne.

Chapitre

8

Bac blanc

La durée de l'épreuve est de 2 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'épreuve est constituée de deux parties : une partie « Automatismes » sous forme d'un QCM sur 6 points, et une partie constituée de 2 exercices sur 14 points.

Première partie : automatismes

1 QCM – 6 points

★ 40 min Corrigé p. 154

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

1 On considère le nombre $A = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$. La valeur de A est :

a $\frac{1}{3}$ **b** $\frac{7}{12}$ **c** $\frac{1}{6}$ **d** $\frac{4}{12}$

2 L'expression $10^{-3} \times (10^2)^4$ est égale à :

a 10^{-24} **b** 10^3 **c** 10^5 **d** 10^9

3 Un prix augmente de 25 %. Pour revenir à son prix initial, il doit subir une diminution de :

a 15% **b** 20% **c** 25% **d** 75%

4 Dans une classe de 32 élèves, 75 % des élèves pratiquent un sport en club. Le nombre d'élèves sportifs est :

a 8 **b** 18 **c** 24 **d** 26

5 La solution de l'équation $3x - 5 = 7x + 3$ est :

a $x = -2$ **b** $x = 2$ **c** $x = -\frac{1}{2}$ **d** $x = 0{,}5$

6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3$. L'image de -2 par f est :

a -11 **b** -7 **c** 1 **d** 5

7 La loi d'Ohm s'écrit $U = R \times I$. On souhaite exprimer I en fonction de U et R. On a :

a $I = U - R$ **b** $I = \frac{R}{U}$ **c** $I = \frac{U}{R}$ **d** $I = U \times R$

8 Dans un repère, on considère les points $A(1; 2)$ et $B(3; 8)$. Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

a 3 **b** 2 **c** 0,5 **d** -3

9 Une vitesse de 15 mètres par seconde (15 m/s) correspond à :

a 54 km/h **b** 15 km/h **c** 45 km/h **d** 1,5 km/h

10 Soit la série statistique suivante : 4; 12; 8; 15; 10. La médiane de cette série est :

a 8 **b** 9,85 **c** 10 **d** 12

11 La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $P(S) = 0{,}85$. La probabilité qu'il rate sa cible est :

a 0,15 **b** $-0{,}85$ **c** 1,15 **d** 0,25

12 La forme développée de l'expression $(2x - 3)^2$ est :

a $4x^2 - 9$ **b** $4x^2 + 9$ **c** $2x^2 - 12x + 9$ **d** $4x^2 - 12x + 9$

Deuxième partie

2 Exercice 1 – 7 points

★★ 40 min Corrigé p. 154

Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

On dispose des informations suivantes :

- 45% des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé, parmi eux, 30% ont également une batterie défectueuse ;
- seulement 20% des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

Un technicien chargé de réparer et de reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock.

On considère les événements suivants :

- E : « Le smartphone choisi a un écran cassé. »
- B : « Le smartphone choisi a une batterie défectueuse. »

1 Par simple lecture de l'énoncé, indiquer :

(a) la probabilité que le smartphone ait une batterie défectueuse sachant qu'il a un écran cassé.

(b) la probabilité que le smartphone ait une batterie défectueuse sachant que son écran n'est pas cassé.

2 Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.

3 Déterminer la probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse.

4 Sachant que le smartphone choisi a une batterie défectueuse, quelle est la probabilité qu'il ait un écran cassé ?

3 Exercice 2 – 7 points

★★★ 40 min Corrigé p. 155

Une personne souhaite louer une maison à partir du 1^{er} janvier 2025 et a le choix entre deux formules de contrat :

- Contrat $n°1$: le loyer augmente chaque année de 200 euros.
- Contrat $n°2$: le loyer augmente chaque année de 5%.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n le loyer annuel de l'année $2025 + n$ pour le contrat $n°1$.
- v_n le loyer annuel de l'année $2025 + n$ pour le contrat $n°2$.

Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 3 600 euros.

On a donc $u_0 = v_0 = 3\,600$.

1 Étude de la suite (u_n).

  (a) Déterminer le loyer annuel de l'année 2026 pour le contrat $n°1$.

  (b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire le loyer annuel de l'année 2035.

2 Étude de la suite (v_n).

  (a) Déterminer le loyer annuel de l'année 2026 pour le contrat $n°2$.

  (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis en déduire le loyer annuel de l'année 2035.

3 On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```python
u=3600
v=3600
n=0
while u>=v:
    u=u+200
    v=1.05*v
    n=n+1
print(n)
```

Après exécution, le programme renvoie la valeur 6.

Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

1 QCM – 6 points

Énoncé p. 151

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{7}{12}$.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $10^{-3}\times(10^2)^4=10^{-3}\times10^8=10^{-3+8}=10^5$.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Augmenter de 25% revient à multiplier par 1,25. On cherche c' tel que $1{,}25\times c'=1$, $c'=\frac{1}{1{,}25}=0{,}8$ soit une baisse de 20%.

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On calcule $\frac{75}{100}\times32=24$.

5 Réponse $\boxed{\text{a}}$. On a :
$3x-5=7x+3\Leftrightarrow3x-7x=3+5\Leftrightarrow-4x=8\Leftrightarrow x=-2$.

6 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $f(-2)=2(-2)^2-3=8-3=5$.

7 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $U=R\times I\Leftrightarrow I=\frac{U}{R}$.

8 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Le coefficient directeur est donné par :

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-2}{3-1}=3.$$

9 Réponse $\boxed{\text{a}}$. 15m/s $=15\times3\,600$ m/h $=54\,000$ m/h $=54$ km/h.

10 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On range les valeurs par ordre croissant 4 ;8 ;10 ;12 ;15.
Il y a 5 valeurs, la médiane est la 3$^{\text{e}}$ valeur.

11 Réponse $\boxed{\text{a}}$. La probabilité qu'il rate sa cible est :

$$P(\overline{S})=1-P(S)=1-0{,}85=0{,}15.$$

12 Réponse $\boxed{\text{d}}$. $(2x-3)^2=(2x)^2-2\times(2x)\times3+3^2=4x^2-12x+9$.

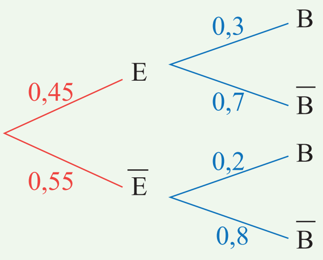
2 Exercice 1 – 7 points

Énoncé p. 152

1 **(a)** La probabilité que le smartphone ait une batterie défectueuse sachant qu'il a un écran cassé est $P_E(B)=0{,}3$.

(b) La probabilité que le smartphone ait une batterie défectueuse sachant que son écran n'est pas cassé est $P_{\overline{E}}(B)=0{,}2$.

2 On a l'arbre suivant :



3 $$\begin{aligned} P(B) &= P(E\cap B)+P(\overline{E}\cap B)\\ &= P(E)\times P_E(B)+P(\overline{E})\times P_{\overline{E}}(B)\\ &= 0{,}45\times 0{,}3+0{,}55\times 0{,}2\\ &= 0{,}245. \end{aligned}$$

4 $$P_B(E)=\frac{P(B\cap E)}{P(B)}=\frac{0{,}45\times 0{,}3}{0{,}245}\approx 0{,}551.$$

3 Exercice 2 – 7 points

Énoncé p. 153

1 **(a)** Le loyer annuel de l'année 2026 pour le contrat $n°1$ est :

$$u_1=u_0+200=3800 \quad \text{soit} \quad 3\,800 \text{ euros.}$$

(b) (u_n) est une suite arithmétique de raison 200 et de premier terme u_0 donc pour tout entier n, $u_n=u_0+n\times 200=3600+200n$. Le loyer de l'année 2035 sera donc $u_{10}=3600+200\times 10=5\,600$.

2 **(a)** Augmenter de 5% revient à multiplier par 1,05. Le loyer annuel de l'année 2026 pour le contrat $n°2$ est donc :

$$v_1=v_0\times 1{,}05=3780 \quad \text{soit} \quad 3\,780 \text{ euros.}$$

(b) (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme v_0 donc pour tout entier n, $v_n=v_0\times 1{,}05^n=3600\times 1{,}05^n$.

Le loyer annuel de l'année 2035 sera donc, en euros :

$$v_{10}=3600\times 1{,}05^{10}\approx 5\,864.$$

3 $n=6$ est la première valeur de n pour laquelle $u_n<v_n$.
Cela signifie qu'à partir de 2025 + 6, soit à partir de 2031, le contrat $n°1$ est plus avantageux que le contrat $n°2$.

Chapitre 9

Bac blanc 2

La durée de l'épreuve est de 2 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. L'épreuve est constituée de deux parties. Une partie Automatismes sous forme d'un QCM sur 6 points et une partie constituée de 3 exercices sur 14 points.

Première partie : automatismes

1 Exercice 1 – 6 points

★ 40 min

Corrigé p. 161

1 On considère le nombre $A = \frac{3}{7} - \frac{2}{4}$. La valeur de A est :

a $\frac{1}{11}$ **b** $\frac{1}{3}$ **c** $-\frac{1}{14}$ **d** $\frac{2}{28}$

2 Un prix augmente de 10% puis baisse de 20%. L'évolution globale est :

a Une baisse de 10% **b** Une baisse de 12%
c Une hausse de 10% **d** Une baisse de 30%

3 Un objet coûte 300 €. Son prix augmente de 30 %. Son nouveau prix est :

a 90 € **b** 330 € **c** 300,30 € **d** 390 €

4 On a représenté une fonction affine par une droite de coefficient directeur -2 et d'ordonnée à l'origine 3. Quelle est l'expression de $f(x)$?

a $3x - 2$ **b** $-2x + 3$ **c** $-\frac{2}{3}x$ **d** $-\frac{3}{2}x$

5 La droite d'équation $y = 2x - 3$ passe par le point :

a $A(2; -3)$ **b** $B(1{,}5; 0)$ **c** $C(0; 3)$ **d** $D(-3; 2)$

6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.
L'image de -2 par f est :

a -11 **b** 13 **c** -5 **d** 7

7 La solution de l'équation $4x = 0$ est :

a -4 **b** $\frac{1}{4}$ **c** 0 **d** $-\frac{1}{4}$

8 L'équation $5x - 2 = -3x + 7$ a pour solution :

a $\frac{9}{8}$ **b** $-\frac{9}{8}$ **c** $\frac{9}{2}$ **d** $\frac{5}{2}$

9 Les solutions de l'équation $(x-7)(x+9)=0$ sont :

a $x=-7$ et $x=9$ **b** $x=7$ et $x=-9$
c $x=-7$ et $x=-9$ **d** $x=7$ et $x=9$

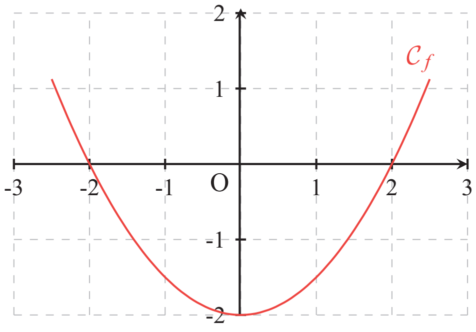
10 L'expression développée réduite de $(3x+4)^2$ est :

a $3x^2+12x+16$ **b** $3x^2+24x+16$
c $9x^2+16$ **d** $9x^2+24x+16$

11 Un train part à 8h40 et arrive à 10h25. Quelle est la durée du trajet :

a 2h20min **b** 2h25min **c** 1h45min **d** 1h30min

12 La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f.



L'expression de f est :

a $f(x)=-2x^2-2$ **b** $f(x)=2x^2-2$
c $f(x)=0{,}5x^2-2$ **d** $f(x)=0{,}5x^2+2$

Deuxième partie

2 Exercice 2 – 7 points

★★★ 40 min Corrigé p. 162

Une lycéenne de terminale étudie pour son grand oral l'évolution de la population de grenouilles de l'étang de sa commune. Selon le club des écologistes de cette commune, cette population serait en voie de disparition. Pour effectuer son étude, la lycéenne ne dispose d'abord que des deux relevés suivants, effectués par le club :

Année du relevé (au premier novembre)	2022	2023
Population de grenouilles	1 000	950

La lycéenne modélise l'évolution de la population de grenouilles à l'aide d'une suite.

1 *Première modélisation.*

La lycéenne fait l'hypothèse qu'une suite arithmétique permet de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. Elle note cette suite (u_n) où u_0 est la population de grenouilles le premier novembre 2022, et plus généralement, u_n est la population de grenouilles le premier novembre $(2022+n)$.

- **(a)** Calculer la raison r de la suite (u_n).
- **(b)** Selon ce modèle, quelle serait la population de grenouilles le premier novembre 2025 ? Le premier novembre 2032 ? Le premier novembre $(2022+n)$?
- **(c)** Déterminer l'année où la population de grenouilles aura totalement disparu selon ce modèle.
- **(d)** La lycéenne reçoit le relevé effectué le premier novembre 2024 : 903 grenouilles. Est-ce que ce nouveau résultat confirme son hypothèse ?

2 *Seconde modélisation.*

Poursuivant sa réflexion, la lycéenne se demande si cette évolution pourrait mieux être modélisée en supposant que la population de grenouilles diminue de 5% chaque année. Elle modélise alors la population par une suite v, où v_0 est la population de grenouilles le premier novembre 2022 et plus généralement, v_n la population de grenouilles le premier novembre $(2022+n)$.

Des aides au calcul sont disponibles à la fin de l'énoncé.

- **(a)** Justifier que la suite v est une suite géométrique de raison $0{,}95$.
- **(b)** Expliquer pourquoi ce nouveau modèle semble mieux adapté.
- **(c)** Quelle serait alors, à l'entier près, la population de grenouilles le premier novembre 2025 ?
- **(d)** Pour tout entier naturel n, écrire v_n en fonction de n.
- **(e)** En déduire, à l'entier près, quelle serait la population de grenouilles le premier novembre 2032 ?

3 Cette espèce sera considérée en danger critique d'extinction quand sa population sera inférieure à cinquante individus. Donner un encadrement, à dix ans près, de l'année à laquelle cela se produira.

Aide aux calculs

n	0	1	2	3	4	5	10
$1\,000 \times 0{,}95^n$	1 000	950	903	857	815	774	599

n	20	30	40	50	60	70	80
$1000 \times 0{,}95^n$	358	215	129	77	46	28	17

3 Exercice 3 – 7 points

★★ 40 min Corrigé p. 163

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres au départ de Paris. Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.

De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :

- 40 % des clients optent pour l'avion ;
- parmi les clients ayant choisi le train, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.

On considère les événements suivants :

A : « le client a choisi l'avion » ;

V : « le client a choisi l'option "visites guidées" ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer $p_A(V)$.
3. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.
4. Calculer la valeur exacte de la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il a choisi l'option « visites guidées ».
5. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante.
   Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prenne l'option « visites guidées » ?

Aide aux calculs : $0{,}58^2 = 0{,}3364$.

1 Exercice 1 – 6 points

Énoncé p. 157

1 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\frac{3}{7} - \frac{2}{4} = \frac{3}{7} - \frac{1}{2} = \frac{6}{14} - \frac{7}{14} = -\frac{1}{14}$.

2 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Augmenter de 10% revient à multiplier par 1,1, diminuer de 20% revient à multiplier par 0,8 soit une évolution globale de $1{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}88$ qui correspond à une baisse de 12%.

3 Réponse $\boxed{\text{d}}$. Augmenter de 30% revient à multiplier par 1,3. $300 \times 1{,}3 = 390$.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$.

5 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $2 \times 1{,}5 - 3 = 0$ donc la droite passe par le point B.

6 Réponse $\boxed{\text{b}}$. $f(-2) = 3 \times (-2)^2 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$.

7 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{4} = 0$.

8 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} 5x - 2 = -3x + 7 &\iff 5x + 3x = 7 + 2 \\ &\iff 8x = 9 \\ &\iff x = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

9 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Il s'agit d'une équation produit nul :

$$x - 7 = 0 \text{ ou } x + 9 = 0$$

soit :

$$x = 7 \text{ ou } x = -9.$$

10 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On a :

$$(3x + 4)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16.$$

11 Réponse $\boxed{\text{c}}$. De 8h40 à 9h00, il y a 20 minutes. Puis, de 9h00 à 10h25, il y a 1h25min, ce qui fait en tout :

$$0\text{h}20\text{min} + 1\text{h}25\text{min} = 1\text{h}45\text{min}.$$

12 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Il s'agit de la représentation d'une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + c$ avec $a > 0$ car la parabole est tournée vers le « haut ».
Cette parabole a pour sommet $S(0; -2)$ donc $c = -2$.
De plus $f(2) = 0$ donc :

$$a \times 2^2 - 2 = 0 \iff a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

donc $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$.

2 Exercice 2 – 7 points

Énoncé p. 158

1 **(a)** Puisque la population de grenouille a baissé de 50 individus entre les deux premières années de l'étude, la raison de la suite est -50.

(b) En 2025, soit deux ans après 2023, la population serait de :

$$950 - 2 \times 50 = 850 \text{ individus.}$$

En 2032, soit 10 ans après le début de l'étude, la population serait de :

$$1\,000 - 10 \times 50 = 500 \text{ individus.}$$

En $2022 + n$, soit n années après le début de l'étude, la population serait de :

$$u_n = u_0 - 50n = 1\,000 - 50n.$$

(c) Selon ce modèle, la population aura disparu lorsque $u_n \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 0 &\iff 1\,000 - 50n \leqslant 0 \\ &\iff 1\,000 \leqslant 50n \\ &\iff \frac{1\,000}{50} \leqslant n \\ &\iff 20 \leqslant n. \end{aligned}$$

Donc la population aura disparu dans 20 ans, en 2042.

(d) Selon son modèle, en 2024, il y aura :

$$950 - 50 = 900 \text{ individus,}$$

ce qui ne correspond pas aux 903 grenouilles observées : ce nouveau résultat ne confirme pas son hypothèse.

2 **(a)** Une diminution de 5% correspond à une multiplication par 0,95. Donc, pour calculer un terme de la suite, on multiplie le précédent par 0,95. C'est la définition d'une suite géométrique de raison 0,95.

(b) Les trois premières valeurs mesurées sont les populations en 2022, 2023, 2024 : 1 000, 950, 903.

Puisque la suite v est géométrique, alors son terme général est :

$$v_n = v_0 \times 0{,}95^n = 1\,000 \times 0{,}95^n.$$

Donc, en s'aidant de la table de valeurs en fin d'énoncé, on a :

- $v_0 = 1\,000$,
- $v_1 = 1\,000 \times 0{,}95^1 = 950$,
- $v_2 = 1\,000 \times 0{,}95^2 = 903$.

On retrouve bien les valeurs observées les trois premières années (1 000 individus en 2022, 950 en 2023, et 903 en 2024), donc ce modèle semble adapté.

(c) Le premier novembre 2025 correspond à l'année $2022 + 3$, donc la population sera :

$$v_3 = 1\,000 \times 0{,}95^3 \approx 857 \text{ grenouilles.}$$

(d) Nous avons montré plus haut que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n = 1\,000 \times 0{,}95^n.$$

(e) L'année 2032 correspond à 2022 + 10, soit :

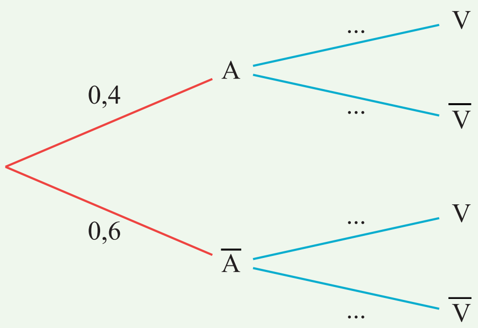
$$v_{10} = 1\,000 \times 0{,}95^{10} \approx 599 \text{ grenouilles.}$$

3 Dans la table de valeurs, on lit que $1\,000 \times 0{,}95^n$ deviendra inférieur à 50 lorsque n est compris entre 50 et 60. Cela veut dire que le plus petit n tel que $v_n < 50$ est compris entre 50 et 60, et donc que la population de grenouilles sera inférieure à cinquante individus 50 à 60 ans après le début de l'étude, soit entre 2072 et 2082.

3 Exercice 3 – 7 points

Énoncé p. 160

1 La situation peut être représentée par l'arbre suivant :



2
$$\begin{aligned} P_A(V) &= \frac{P(A \cap V)}{P(A)} \\ &= \frac{0{,}12}{0{,}4} \\ &= \frac{12}{40} \\ &= 0{,}3. \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} p(V) &= P(A \cap V) + P(\overline{A} \cap V) \\ &= 0{,}12 + 0{,}6 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}12 + 0{,}3 \\ &= 0{,}42. \end{aligned}$$

4 On calcule :

$$P_V(A) = \frac{P(V \cap A)}{P(V)} = \frac{0{,}12}{0{,}42} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}.$$

5 Les deux clients sont choisis de manière indépendante donc :

$$P(\overline{V}; \overline{V}) = P(\overline{V}) \times P(\overline{V}) = (1 - 0{,}42)^2 = 0{,}58^2 = 0{,}3364.$$

Vers l'option Mathématiques complémentaires

Les deux chapitres qui suivent (Variation instantanée et Variation globale) ne figurent pas explicitement dans le programme de première du tronc commun en mathématiques.

Toutefois, leur étude est vivement recommandée pour les élèves envisageant de poursuivre en terminale avec l'option mathématiques complémentaires, dans laquelle ces notions jouent un rôle fondamental.

Chapitre

10

Variation instantanée

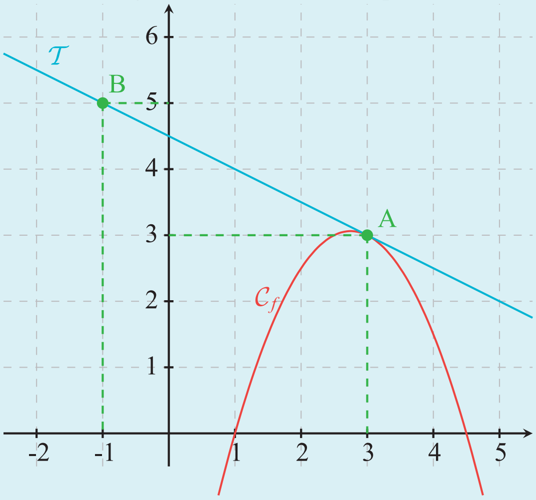
Plan du chapitre

1 Introduction

La notion de variation instantanée est fondamentale pour modéliser l'évolution de phénomènes continus dans divers domaines scientifiques. Elle permet d'analyser comment une grandeur change à un instant précis plutôt que sur un intervalle de temps. Cette idée repose sur le concept de nombre dérivé, qui correspond au taux de variation instantané d'une fonction en un point.

Exercice type **Lycée Louis Vincent, Metz**

Dans le repère orthonormé ci-dessous, $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f et $\mathcal{T}$ est la tangente à cette courbe au point d'abscisse 3.



1. Lire les coordonnées des points A et B.
2. Calculer le coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$.
3. En déduire le nombre dérivé de la fonction f en 3.

Voir corrigé page 170

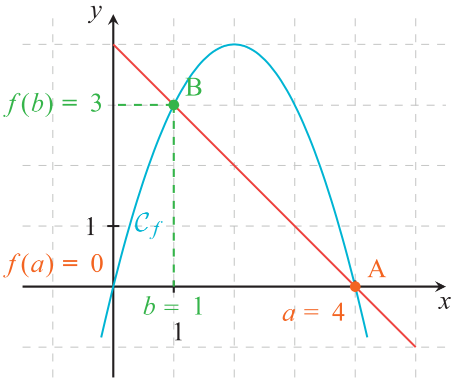
2 Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I, et A et B les points de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f d'abscisses respectives a et b.

Définition 1 : sécante

Une *sécante* à la courbe $\mathcal{C}_f$ est une droite passant par deux points A et B distincts de la courbe.

Exemple :



La droite passant par les points $A(4; 0)$ et $B(1; 3)$ est une sécante à la courbe.

Définition 2 : taux d'accroissement et sécante

Le *coefficient directeur* de la sécante (AB) est le *taux d'accroissement* de f entre a et b. Il est défini par le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemple : sur le graphique précédent, le taux d'accroissement entre 4 et 1 vaut :

$$\frac{f(1) - f(4)}{1 - 4} = \frac{3 - 0}{-3} = -1.$$

Le coefficient directeur de la sécante (AB) vaut -1.

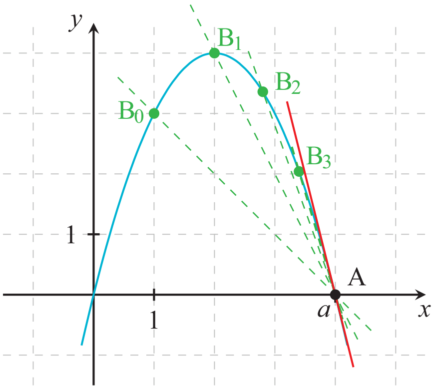
Définition 3 : tangente

Quand B se rapproche de A, la sécante (AB) se rapproche d'une droite « position limite » des sécantes passant par A, cette droite est appelée *tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A* .

Propriété 1

Quand elle existe, cette tangente est *unique* et vient frôler la courbe $\mathcal{C}_f$ autour du point A.

Exemple :



Quand le point B se rapproche du point A, la droite en rouge passant par le point A frôle la courbe en ce point : c'est la tangente à la courbe au point A.

3 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition 4 : nombre dérivé et tangente

Lorsque la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ existe au point d'abscisse a et qu'elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, on dit que f est *dérivable* en a.
Le coefficient directeur (ou pente) de cette tangente est appelé *nombre dérivé de* f *en* a. Il est noté $f'(a)$.

4 Équation d'une tangente

Propriété 2 : équation réduite d'une tangente

Lorsque la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est $y = mx + p$, où m est son coefficient directeur.

Remarque : on détermine le réel p à l'aide des coordonnées d'un point de $\mathcal{T}$, par exemple le point A.

Propriété 3 : formule générale

Lorsque la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, une équation de $\mathcal{T}$ est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

5 Modélisation

Propriété 4

Soit f une fonction modélisant une évolution. Alors :

- le taux d'accroissement correspond à la *vitesse moyenne*, en valeur absolue, de cette évolution entre a et b ;
- $f'(a)$ correspond à la *vitesse instantanée*, en valeur absolue, de cette évolution quand $x = a$.

Solution de l'exercice type

Lycée Louis Vincent, Metz

MÉTHODE

Pour déterminer le nombre dérivé de f en x_A, on détermine le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse x_A.
Lorsque cette tangente passe également par un point $B(x_B ; y_B)$, on a :

$$f'(x_A) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

1 Le point A a pour coordonnées $(3; 3)$ et le point B a pour coordonnées $(-1; 5)$.

2 Le coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

3 Le nombre dérivé de la fonction f en 3 est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$.

Ainsi, $f'(3) = -\dfrac{1}{2}$.

Voir énoncé page 167

1 V/F Nombre dérivé et tangente

5 min — Corrigé p. 178

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1 Si $f'(0) = 3$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 est horizontale.

2 Si $f'(4) = -1$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 a pour coefficient directeur -1.

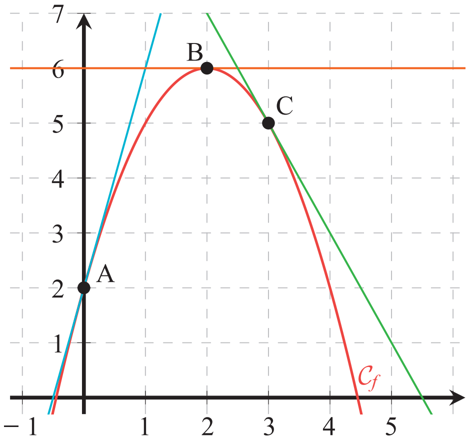
3 Si $f'(-2) = 0$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 est horizontale.

4 Si $f'(3) = 2$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour coefficient directeur 2.

2 QCM Nombre dérivé

5 min — Corrigé p. 178

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses. On considère la courbe d'une fonction f tracée dans un repère orthonormé.



1 Trois tangentes sont tracées. On peut lire :

a $f'(0) = 2$ **b** $f'(2) = 0$ **c** $f'(3) = -2$

2 La tangente au point A a pour équation :

a $y = 2x + 4$ **b** $y = 4x$ **c** $y = 4x + 2$

3 Le taux d'accroissement de f entre 0 et 2 est :

a 4 **b** 3 **c** 2

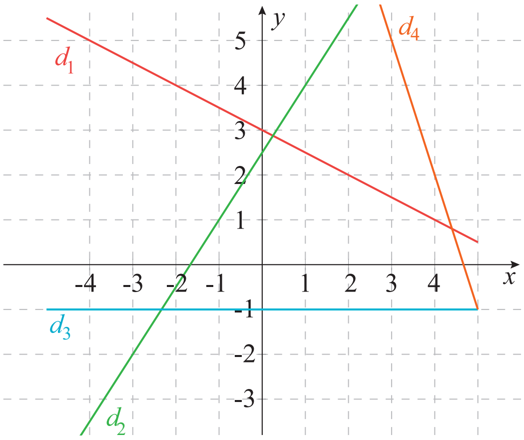
Droite, sécante et tangente

3 Lecture graphique

★ 5 min Corrigé p. 178

Lycée Louis Vincent, Metz

Dans le repère tracé ci-dessous, lire les coefficients directeurs de chaque droite.

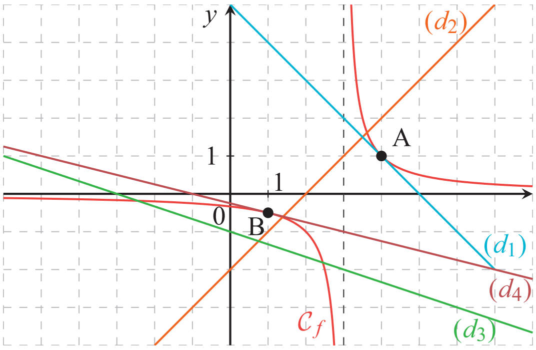


4 Lecture graphique

★ 5 min Corrigé p. 179

Lycée Genevoix, Montrouge

Sur la représentation graphique ci-dessous, on a représenté une fonction et quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



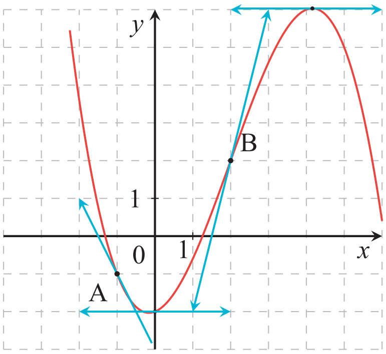
1. Quelles sont les droites qui sont des sécantes à la courbe ?
2. Quelles sont celles qui sont des tangentes à la courbe ? Préciser alors en quel(s) point(s).

Nombre dérivé et tangente à la courbe représentative d'une fonction

5 Lecture graphique

★ 15 min Corrigé p. 180

Lycée Honoré de Balzac, Paris



Soit f une fonction dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessus.

1 Par lecture graphique donner les nombres $f'(0)$ et $f'(4)$.

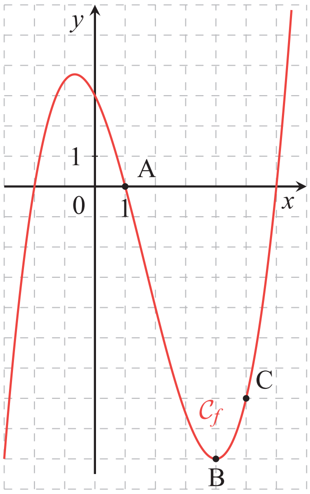
2 **(a)** Par lecture graphique déterminer les nombres $f'(-1)$ et $f'(2)$.
(b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A puis celle au point B

3 On sait que $f'(3) = 2$. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

6 Nombre dérivé et tangente

★★ 20 min Corrigé p. 181

Lycée Argouges, Grenoble



Soit f une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Soient A, B et C les points d'abscisses respectives 1, 4 et 5.
À l'aide du graphique, déterminer :

1 les images de 1, 4 et 5.

2 le signe de $f'(1)$, $f'(4)$ et $f'(5)$.

3 le nombre de tangentes « horizontales » à la courbe.

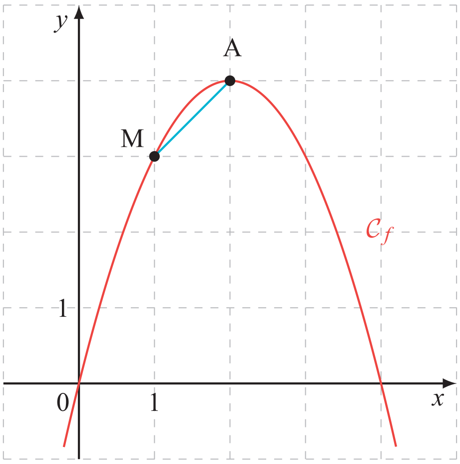
4 les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

7 Conjecture

★ 10 min Corrigé p. 181

Lycée Camille Vernet, Valence

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+4x$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. On considère les points A et M de la courbe d'abscisses respectives 2 et x, où x est un réel.



1 Que représente le nombre $\tau = \dfrac{f(2) - f(x)}{2-x}$?

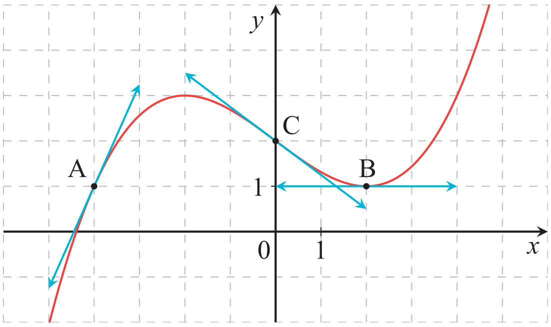
2 Faire un tableau de valeurs de $\dfrac{f(2) - f(x)}{2-x}$ pour x variant de 1,9 à 2 avec un pas de 0,01.

3 Conjecturer alors le nombre dérivé de f en 2.

8 Nombre dérivé et tangente

★★ 20 min Corrigé p. 181

Lycée Honoré de Balzac, Paris



Soit f une fonction dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessus. Les points A, B et C appartiennent à $\mathcal{C}_f$. Les coordonnées de A sont $(-4; 1)$, celles de B sont $(2; 0)$ et celles de C sont $(0; 2)$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point B une tangente parallèle à l'axe des abscisses. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A passe par le point de coordonnées $\left(-3; \dfrac{13}{4}\right)$ et celle en C passe par le point de coordonnées $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

1 Par lecture graphique donner la pente de la tangente aux points A, B et C.

2 En déduire une équation de chacune des tangentes.

9 Tangente formule générale

★ 15 min Corrigé p. 182

Lycée Renoir, Angers

Soit une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1 Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 4 sachant que $g(4) = -1$ et $g'(4) = 2$.

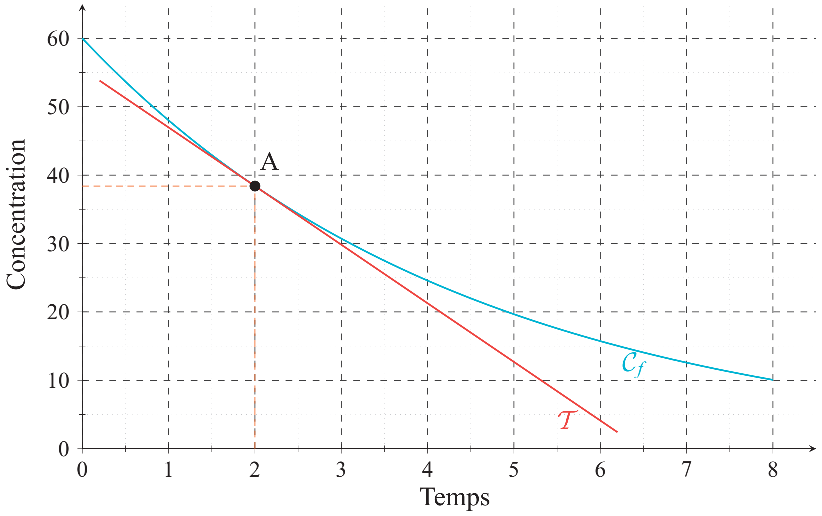
2 Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2 sachant que $g'(2) = 6$ et que la tangente passe par le point $A(2; 7)$.

10 Modèle d'évolution

★★ 15 min Corrigé p. 183

Lycée du Parc, Lyon

Après l'administration d'un médicament, la quantité présente dans le sang d'un patient diminue au fil du temps. On modélise la quantité (en mg/L) par la fonction f définie sur $[0; 8]$ par $f(t) = 60 \times 0{,}8^t$ où t désigne le temps écoulé, en heures, après l'injection. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



1 Calculer $f(0), f(2), f(4)$. Interpréter le résultat $f(0)$.

2 Calculer le taux de variation moyen de la quantité de médicament entre 1^{re} heure et la 3^{e} heure. Que représente ce résultat dans le contexte de l'exercice ?

3 On considère les points $A(2;\ f(2))$ et $B(4;\ f(4))$. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB). On donnera sa valeur arrondie au dixième.

4 On admet que le nombre dérivé de f en 2 représente la *vitesse instantanée de disparition du médicament.*

On l'approche par le taux $\dfrac{f(2,1) - f(2)}{0,1}$.

Calculer cette valeur (arrondie au dixième).

5 Comparer le résultat de la question 3 avec celui de la question 4. Expliquer pourquoi ces deux valeurs sont proches.

Vers les maths complémentaires

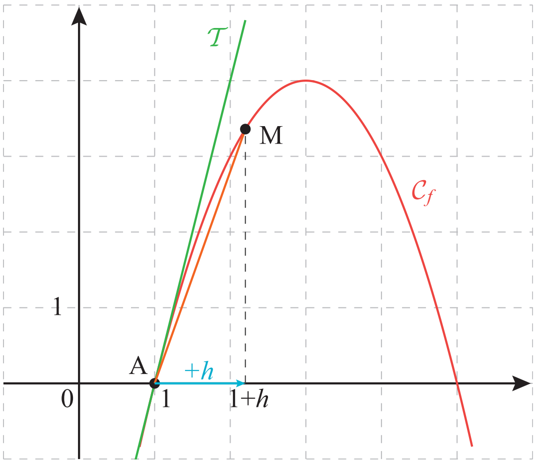
11 Nombre dérivé

★★ 20 min Corrigé p. 184

Lycée Charlemagne, Thionville

On considère la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

On a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ci-dessous.



On note $A(1;\ f(1))$ le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $1 + h$, où h est réel.

La droite (AM) est une sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1 Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(1)$.

2 **(a)** Calculer $f(1+h)$ en fonction de h.

(b) Montrer que $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = 4-h$.

(c) Que représente le calcul de la question précédente pour la droite (AM) ?

3 On a écrit la fonction Python suivante :

```
def nbre_deriv():
    for i in range(1,6):
        h=10**(-i)
        nd=4-h
        print(nd)
        return nd
```

En utilisant cette fonction Python, compléter le tableau suivant :

h	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	10^{-4}	10^{-5}
$4-h$					

4 **(a)** Lorsque h tend vers 0, que fait le point M sur la courbe ?

(b) Lorsque h tend vers 0, vers quelle droite tend la droite (AM) ?

(c) Lorsque h tend vers 0, vers quel nombre tend $-h+4$?

(d) Recopier et compléter la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le nombre $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}$ tend vers …

(e) Comparer avec le résultat trouvé à la question 1.

1 V/F Nombre dérivé et tangente

Énoncé p. 171

À RETENIR

$f'(a)$ est le coefficient directeur (ou pente) de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a. Lorsque $f'(a) = 0$ la tangente au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses. On dit qu'elle est « horizontale ».

1 *Faux*. $f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0. Ici il vaut 3.

2 *Vrai*.

3 *Vrai*.

4 *Vrai*.

2 QCM Nombre dérivé

Énoncé p. 171

1 Réponses $\boxed{\text{b}}$ et $\boxed{\text{c}}$. $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a. Au point A d'abscisse 0 la tangente a pour coefficient directeur 4. Donc $f'(0) = 4$. Au point B d'abscisse 2 la tangente est « horizontale ». Donc $f'(2) = 0$. Au point C d'abscisse 3 la tangente a pour coefficient directeur -2. Donc $f'(3) = -2$.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. La tangente au point A a pour coefficient directeur 4 et pour ordonnée à l'origine 2. Elle a donc pour équation $y = 4x + 2$.

3 Réponse $\boxed{\text{c}}$. Le taux d'accroissement de f entre 0 et 2 est :

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 - 2}{2 - 0} = 2.$$

3 Lecture graphique

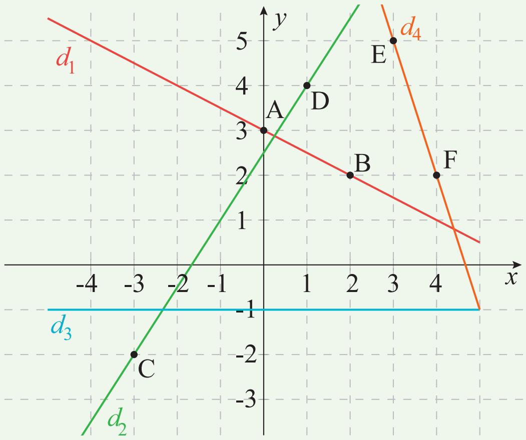
Énoncé p. 172

Lycée Louis Vincent, Metz

MÉTHODE

Pour « lire » le coefficient directeur d'une droite tracée dans un repère, on rejoint deux de ses points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ par un parcours horizontal suivi d'un parcours vertical : ces parcours sont orientés (+ ou −) et mesurés (nombre d'unités). Le coefficient directeur a est alors l'écart d'ordonnées $y_B - y_A$ (parcours vertical) divisé par l'écart d'abscisses $x_B - x_A$ (parcours horizontal).

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



Ainsi, d_1 passe par les points de coordonnées $A(0; 3)$ et $B(2; 2)$.

Son coefficient directeur vaut :

$$\frac{2-3}{2-0} = -\frac{1}{2}.$$

d_2 passe par les points de coordonnées $C(-3; -2)$ et $D(1; 4)$. Pour aller de C à D, le déplacement horizontal est de 4 unités, le déplacement vertical est de 6 unités. Ainsi le coefficient directeur est :

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

d_3 est une droite parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur vaut 0.

d_4 passe par les points $E(3; 5)$ et $F(4; 2)$. Pour aller de E à F, le déplacement horizontal est de 1 unité, le déplacement vertical est de -3 unités.

Ainsi le coefficient directeur est :

$$\frac{-3}{1} = -3.$$

4 Lecture graphique

Énoncé p. 172

Lycée Genevoix, Montrouge

1 Les droites (d_2) et (d_3) sont des sécantes à la courbe.

2 La droite (d_1) est la tangente au point d'abscisse 4 et la droite (d_2) est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

5 Lecture graphique

Énoncé p. 173

Lycée Honoré de Balzac, Paris

1 Aux points d'abscisses respectives 0 et 4, la tangente est « horizontale » (parallèle à l'axe des abscisses). Donc, $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$.

2 **(a)** $f'(-1)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point A. Cette tangente passe par les points de coordonnées $(-2; 1)$ et $(0; -3)$ donc :

$$f'(-1) = \frac{-3-1}{0-(-2)} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Une équation de la tangente au point A d'abscisse -1 est donc :

$$y = -2x + p.$$

Cette droite passe par le point $A(-1; -1)$. Donc,

$$-1 = -2 \times (-1) + p \iff -1 = 2 + p \iff p = -3.$$

Ainsi, une équation de la tangente au point A est :

$$y = -2x - 3.$$

(b) $f'(2)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point B. Cette tangente passe par les points de coordonnées $(1; -2)$ et $(3; 6)$ donc :

$$f'(2) = \frac{6-(-2)}{3-(1)} = \frac{8}{2} = 4.$$

Une équation de la tangente au point B d'abscisse 2 est donc :

$$y = 4x + p.$$

Cette droite passe par le point $B(2; 2)$. Donc,

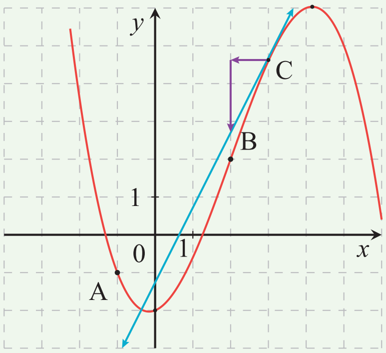
$$2 = 4 \times (2) + p \iff 2 = 8 + p \iff p = -6.$$

Ainsi une équation de la tangente au point B est :

$$y = 4x - 6.$$

3 $f'(3) = 2$ donc le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 3 est 2.

On se place au point C d'abscisse 3, on recule d'une unité sur l'axe des abscisses et on « descend » de 2 unités sur l'axe des ordonnées.



6 Nombre dérivé et tangente

Énoncé p. 173

Lycée Argouges, Grenoble

1 $f(1) = 0$, $f(4) = -9$ et $f(5) = -7$

2 $f'(1) < 0$ car la tangente est de coefficient directeur négatif, car la fonction affine correspondant est décroissante.

$f'(4) = 0$ car la tangente en B est « horizontale » (parallèle à l'axe des abscisses).

$f'(5) > 0$ car la tangente est de coefficient directeur positif, car la fonction affine correspondant est croissante.

3 Il y a deux tangentes « horizontales » à la courbe.

4 Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ pour lesquels la tangente est « horizontale » :

$$x_1 \approx -1{,}6 \text{ et } x_2 = 4.$$

7 Conjecture

Énoncé p. 174

Lycée Camille Vernet, Valence

1 Le nombre $\tau = \dfrac{f(2) - f(x)}{2 - x}$ représente le taux d'accroissement de f entre 2 et x. C'est le coefficient directeur de la sécante (AM).

2 Le tableau complété est le suivant :

x	1,9	1,91	1,92	1,93	1,94	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99
$\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01

3 Lorsque x se rapproche de 2 , le point M se rapproche de A et la sécante (AM) devient la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A. $f'(2)$ représente le coefficient directeur de cette tangente donc $f'(2) = 0$.

8 Nombre dérivé et tangente

Énoncé p. 174

Lycée Honoré de Balzac, Paris

1 La pente de la tangente au point A est le coefficient directeur de la tangente.

Cette tangente passe par $A(-4; 1)$ et le point $\left(-3; \dfrac{13}{4}\right)$ donc le coefficient vaut :

$$f'(-4) = \frac{\frac{13}{4} - 1}{-3 - (-4)} = \frac{\frac{9}{4}}{1} = \frac{9}{4}.$$

La tangente au point B d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses donc le coefficient directeur de la tangente vaut $f'(2) = 0$.

La tangente au point C passe par le point de coordonnées $\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Donc le coefficient directeur de la tangente vaut :

$$f'(0) = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2 - 0} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}.$$

2 Le coefficient directeur de la tangente au point A est $\frac{9}{4}$ donc :

$$y = \frac{9}{4}x + p.$$

A est un point de cette tangente donc :

$$1 = \frac{9}{4} \times (-4) + p \iff 1 = -9 + p \iff p = 10.$$

L'équation de la tangente au point A est $y = \frac{9}{4}x + 10$.

La tangente en B est « horizontale » donc $y = p$.

Elle passe par B donc $y = 0$.

La tangente en C a pour équation :

$$y = -\frac{3}{4}x + p.$$

Elle passe par $C(0; 2)$ donc :

$$2 = -\frac{3}{4} \times 0 + p \iff p = 2.$$

Donc,

$$y = -\frac{3}{4}x + 2.$$

9 Tangente formule générale

Énoncé p. 175

Lycée Renoir, Angers

1 Une équation de la tangente au point d'abscisse 4 s'écrit :

$$y = g'(4)(x - 4) + g(4).$$

On sait que $g(4) = -1$ et $g'(4) = 2$. Ainsi,

$$y = 2(x - 4) - 1 = 2x - 8 - 1 = 2x - 9.$$

2 Une équation de la tangente au point d'abscisse 2 s'écrit :

$$y = g'(2)(x - 2) + g(2).$$

On sait que $g'(2) = 6$ et que la tangente passe par le point $A(2; 7)$ ce qui signifie que $g(2) = 7$. Ainsi,

$$y = 6(x - 2) + 7 = 6x - 12 + 7 = 6x - 5.$$

10 Modèle d'évolution

Énoncé p. 175

Lycée du Parc, Lyon

1
- $f(0) = 60 \times 0{,}8^0 = 60 \times 1 = 60$,
- $f(2) = 60 \times 0{,}8^2 = 60 \times 0{,}64 = 38{,}4$,
- $f(4) = 60 \times 0{,}8^4 = 60 \times 0{,}4096 = 24{,}576$.

La valeur $f(0) = 60$ signifie qu'au moment de l'injection, la quantité de médicament dans le sang est de 60 mg/L.

2 On calcule d'abord $f(1)$ et $f(3)$:

$$f(1) = 60 \times 0{,}8 = 48$$

$$f(3) = 60 \times 0{,}8^3 = 60 \times 0{,}512 = 30{,}72.$$

Le taux d'évolution moyen entre $t = 1$ et $t = 3$ est :

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

donc :

$$\frac{30{,}72 - 48}{2} = \frac{-17{,}28}{2} = -8{,}64.$$

Ainsi, le taux d'évolution moyen est :$-8{,}64$.

Entre la 1^{re} heure et la 3^e heure, la quantité de médicament diminue en moyenne de 8,64 mg/L par heure.

3 Le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par :

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}.$$

Or, $f(4) = 24{,}576$ et $f(2) = 38{,}4$. Donc :

$$\frac{24{,}576 - 38{,}4}{2} = \frac{-13{,}824}{2} = -6{,}912.$$

Ainsi, le coefficient directeur de la droite (AB) vaut $-6{,}912$, arrondi au dixième : $-6{,}9$.

4 On approche $f'(2)$ par le taux :

$$\frac{f(2{,}1) - f(2)}{0{,}1}.$$

$f(2{,}1) = 60 \times 0{,}8^{2,1} \approx 60 \times 0{,}6258 = 37{,}549$.

On en déduit :

$$\frac{f(2{,}1) - f(2)}{0{,}1} = \frac{37{,}548 - 38{,}4}{0{,}1} = \frac{-0{,}852}{0{,}1} = -8{,}52.$$

Arrondi au dixième, $f'(2) \approx -8{,}5$.

À l'instant $t = 2$, la quantité de médicament diminue instantanément d'environ 8,5 mg/L par heure.

5 À la question 3, on a trouvé un coefficient directeur égal à $-6{,}9$.

À la question 4, on a trouvé une valeur approchée du nombre dérivé : $-8{,}5$. Ces deux valeurs sont proches car elles mesurent toutes les deux une vitesse de diminution :

- la première correspond à une *vitesse moyenne* entre $t = 2$ et $t = 4$;
- la seconde correspond à une *vitesse instantanée* à l'instant $t = 2$.

La vitesse instantanée est plus précise pour décrire le comportement de la fonction au voisinage de $t = 2$.

La quantité de médicament dans le sang diminue au cours du temps, et cette diminution peut être étudiée soit par une vitesse moyenne, soit par une vitesse instantanée donnée par le nombre dérivé.

11 Nombre dérivé

Énoncé p. 176

Lycée Charlemagne, Thionville

1 $f'(1)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point A.

Cette tangente passe par le point A et par le point de coordonnées $(2; 4)$.

Le coefficient directeur est donc l'écart d'ordonnées sur l'écart d'abscisses soit $\frac{4}{1} = 4$. Ainsi, $f'(1) = 4$.

2 **(a)**
$$\begin{aligned} f(1+h) &= -(1+h)^2 + 6(1+h) - 5 \\ &= -(1^2 + 2h + h^2) + 6 + 6h - 5 \\ &= -1 - 2h - h^2 + 6 + 6h - 5 \\ &= -h^2 + 4h. \end{aligned}$$

(b) $f(1) = 0$ donc :
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \frac{-h^2 + 4h - 0}{h} = \frac{h(-h+4)}{h} = -h + 4.$$

(c) Ce calcul représente le coefficient directeur de la droite (AM).

3 Le tableau complété est le suivant :

h	0,1	0,01	0,001	10^{-4}	10^{-5}
$4 - h$	3,9	3,99	3,999	3,9999	3,99999

4 **(a)** Lorsque h tend vers 0, le point M se rapproche du point A.

(b) Lorsque h tend vers 0, la droite (AM) tend vers la tangente $\mathcal{T}$.

(c) La valeur de $\frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1}$ tend vers 4.

(d) Lorsque h tend vers 0, le nombre $\frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1}$ tend vers 4.

(e) On retrouve la valeur de $f'(1)$ donnée à la question 1.

Chapitre

11

Variation globale

Plan du chapitre

1 Introduction

La notion de variation globale est essentielle pour décrire l'évolution d'une grandeur sur un intervalle donné dans de nombreux contextes scientifiques.

Exercice type **Lycée Louis Vincent, Metz**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3{,}5x^2 - 3x + 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2x + 3)(3x - 1)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que la fonction admet deux extremums locaux. Préciser la nature et la valeur de chaque extremum ainsi que la valeur de x en laquelle il est atteint.

Voir corrigé page 188

2 Fonction dérivée

2.1 Définition et propriétés

Définition 1 : fonction dérivée

f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si f est dérivable en tout réel x de I.
La fonction qui associe à tout réel x de I son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f et notée f'.

Propriété 1 : dérivées des fonctions usuelles

Le tableau suivant résume les dérivées des fonctions de référence définies sur $\mathbb{R}$.

Fonction f	Fonction dérivée f'
Fonction constante $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction identité $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carré $f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

2.2 Dérivée d'une somme et d'un produit par un réel

Propriété 2

On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- La fonction $u + v$ définie par $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et :

$$(u + v)' = u' + v'$$

- Soit k un réel. La fonction $k \times u$ définie par $(k \times u)(x) = k \times u(x)$ est dérivable sur I et :

$$(k \times u)' = k \times u'$$

2.3 Dérivée des polynômes de degré inférieur ou égal à 3

Propriété 3

Un polynôme est constitué d'une somme de termes. Chaque terme est l'expression d'une fonction de référence ou du produit d'une fonction de référence par un réel. Pour calculer la fonction dérivée d'un polynôme, il suffit de dériver « chaque terme » et d'en faire la somme.

Fonction	Dérivée
Fonction affine $f(x) = ax + b$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$	$f'(x) = a$
Fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$	$f'(x) = 2ax + b$
Fonction de degré 3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

3 Sens de variation et signe de la dérivée

f est une fonction dérivable sur un intervalle I

Théorème 1

- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Propriété 4

- Si f' s'annule en changeant de signe alors la fonction f admet un extremum local.
- Si f est d'abord croissante puis décroissante, cet extremum local est un *maximum local*.
- Si f est d'abord décroissante puis croissante, cet extremum local est un *minimum local*.

4 Tableau de variations

Comment remplir un tableau de variations ?

- On cherche, s'il n'est pas donné, l'ensemble de définition de la fonction.
- On étudie le sens de variation de la fonction en étudiant le signe de la fonction dérivée.
- On cherche les images des valeurs qui annulent la dérivée et les images des bornes de l'ensemble de définition lorsque c'est possible.
- On remplit ensuite un tableau du type suivant :

x	a		x_1		x_2		b
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(a)$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$f(b)$

Solution de l'exercice type

Lycée Louis Vincent, Metz

MÉTHODE

Pour dresser le tableau de variations d'une fonction.

- Dans la 1ère ligne on place les valeurs qui annulent la dérivée entre les bornes de l'ensemble de définition.
- Dans la 2e ligne, on place le signe de $f'(x)$ que l'on a préalablement étudié.
- Dans la dernière ligne, on indique par des flèches les variations de la fonction en utilisant le théorème du cours.
- On place également les images des valeurs annulant la dérivée et les images des bornes de l'ensemble de définition lorsque c'est possible.

1 On a, pour tout réel x,

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3{,}5 \times 2x - 3 = 6x^2 + 7x - 3.$$

2 Pour montrer l'égalité, on développe la forme qui est donnée dans l'énoncé.

$$\begin{aligned}(2x+3)(3x-1) &= 6x^2 - 2x + 9x - 3\\ &= 6x^2 + 7x - 3\\ &= f'(x).\end{aligned}$$

3 Pour étudier le signe de $f'(x)$, on étudie le signe du produit $(2x+3)(3x-1)$ à l'aide d'un tableau de signes. Pour cela on résout :

$$\begin{aligned}(2x+3)(3x-1) = 0 &\iff 2x + 3 = 0 \text{ ou } 3x - 1 = 0\\ &\iff x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

On étudie le signe de chacun des facteurs.

- $x \mapsto 2x + 3$ est une fonction affine avec $a = 2$ positif.
  $2x + 3$ est donc négatif sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$ puis positif sur $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
- $x \mapsto 3x - 1$ est une fonction affine avec $a = 3$ positif.
  $3x - 1$ est donc négatif sur $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ puis positif sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

•••

➜ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Louis Vincent, Metz

4
- Sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$, $f'(x)$ est positif donc f est croissante.
- Sur $\left]-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right[$, $f'(x)$ est négatif donc f est décroissante.
- Sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$, $f'(x)$ est positif donc f est croissante.

5 $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{53}{8} = 6{,}625$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{54}$.

On ne peut pas calculer ici les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	$\frac{53}{8}$	↘	$\frac{25}{54}$	↗	

6 On a un maximum local qui vaut $\frac{53}{8}$ atteint pour $x = -\frac{3}{2}$ et un minimum local qui vaut $\frac{25}{54}$ atteint pour $x = \frac{1}{3}$.

Voir énoncé page 185

1 V/F Tableau de variations

10 min
Corrigé p. 195

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $[-5; 4]$:

x	-5		$-1{,}5$		3		4
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	3	↘	-2	↗	6	↘	2

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Le minimum de f sur $[-5; 4]$ est 2.
2. $f(1) < f(3)$.
3. $f'(-1) < 0$.
4. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 est « horizontale ».
5. f est positive sur $[3; 4]$.
6. Pour tout réel x de $[-5; 4]$, $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

2 QCM Fonction dérivée

5 min
Corrigé p. 195

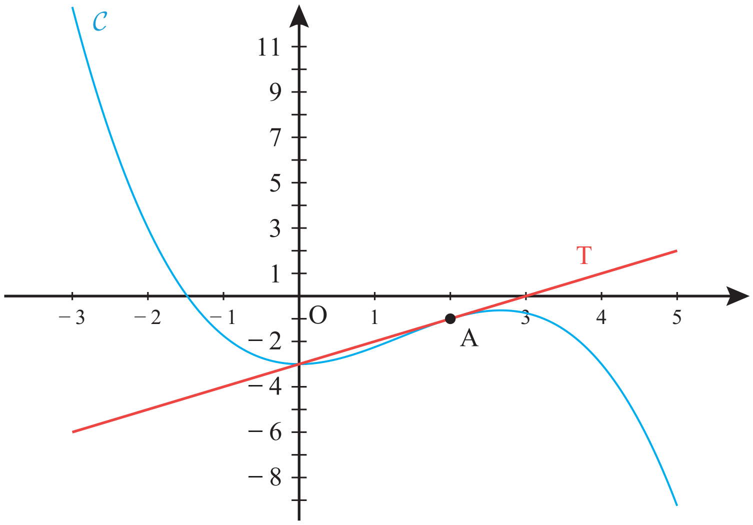
Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1. Si $f(x) = -3$ alors :
   a $f'(x) = 3$ **b** $f'(x) = 0$ **c** $f'(x) = -3$
2. Si $f(x) = 3x - 2$ alors :
   a $f'(x) = 3 - 2$ **b** $f'(x) = 1$ **c** $f'(x) = 3$
3. Si $f(x) = x^2 + 2x + 3$ alors :
   a $f'(x) = 2x + 3$ **b** $f'(x) = 2x + 5$ **c** $f'(x) = 2x + 2$
4. Si $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ alors :
   a $f'(x) = 3x - 4$ **b** $f'(x) = 6x - 3$ **c** $f'(x) = 6x - 4$

3 QCM Lecture graphique

20 min
Corrigé p. 195

La courbe $\mathcal{C}$ page suivante est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-3\ ;\ 5]$. Le point $A(2\ ;\ -1)$ est un point de $\mathcal{C}$. T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A. Elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3. La dérivée f' s'annule en 0 et $\dfrac{8}{3}$.



Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1 Quelle est la valeur de $f'(2)$?

a 1 **b** -3 **c** -1

2 Combien l'équation $f(x) = -2$ a-t-elle de solution(s) ?

a une **b** zéro **c** trois

3 Que dire de $f'(-2)$?

a $f'(-2) < 0$ **b** $f'(-2) > 0$ **c** $f'(-2) = 0$

4 Combien de tangente(s) horizontale(s) la courbe admet-elle ?

a une **b** deux **c** aucune

5 Quelle proposition sur le signe de $f'(x)$ est vraie ?

a Pour tout x, $f' < 0$

b f' change de signe sur $[0\,;\;5]$

c $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-3\,;\;-2]$

6 Sur lequel de ces intervalles ou réunion d'intervalles, f est-elle négative ?

a $\left[\dfrac{-3}{2}\,;\;5\right]$

b $[-3\,;\;0]$

c $[-3\,;\;0] \cup \left[\dfrac{8}{3}\,;\;5\right]$

Dériver une fonction

4 Calculer des dérivées

★ 10 min Corrigé p. 196

Lycée Thiers, Marseille

Dans chaque cas, on considère l'expression $f(x)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Calculer alors l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée f'.

1 $f(x) = 7$

2 $f(x) = -x$

3 $f(x) = 3 - 2x$

4 $f(x) = x^2 - 2x$

5 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$

Étudier les variations d'une fonction

5 Variations

★★ 15 min Corrigé p. 196

Lycée Michelet, Vanves

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 + 3{,}5x^2 - 3x + 1$.

1 Calculer $f'(x)$.

2 Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2x + 3)(3x - 1)$.

3 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4 Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer un extremum

6 Extremum

★★ 15 min Corrigé p. 198

Lycée Talma, Brunoy

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 6x - 10$.

1 Calculer $f'(x)$.

2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3 Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4 En déduire que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. Préciser sa nature et en quelle valeur de x il est atteint.

Vers les maths complémentaires

7 Modélisation

★★★ 60 min Corrigé p. 198

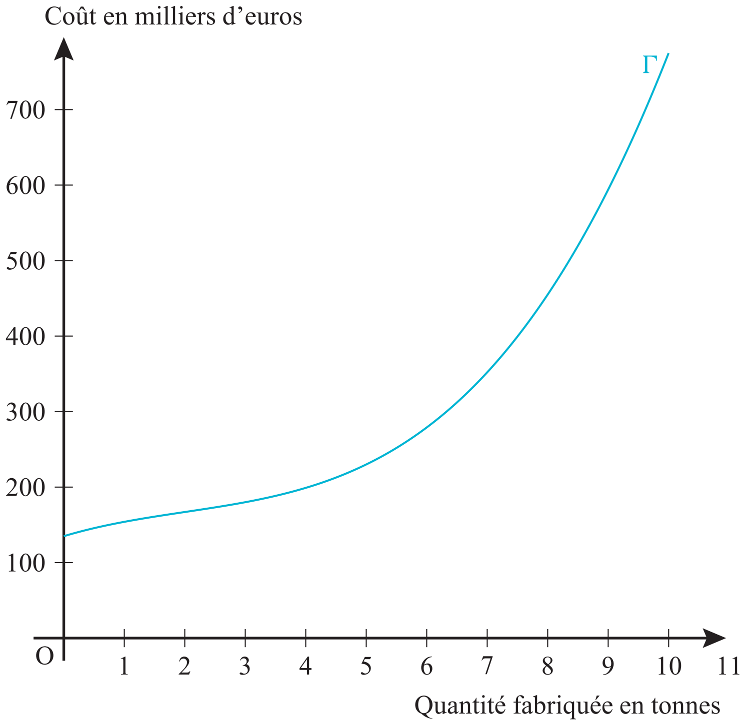
Lycée Charlemagne, Thionville

Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 tonnes de cet alliage et en vend toute la production.

1 Le coût total de production de x tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est :

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135,$$

où x appartient à l'intervalle $[0\,;\,10]$. La courbe Γ, représentant la fonction C dans un repère du plan, est tracée ci-dessous.



Donner par lecture graphique :

- **(a)** le coût total d'une production de 4 tonnes ;
- **(b)** la quantité correspondant à un coût total de production de 600 milliers d'euros.

2 Déterminer par le calcul :

- **(a)** le coût total de production de 6 tonnes de l'alliage.

(b) le coût moyen de production d'une tonne lorsque l'entreprise produit 6 tonnes.

3 Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage produit a été fixé à 60 milliers d'euros la tonne.

(a) Calculer la recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage.

(b) On note R la fonction qui modélise la recette, exprimée en milliers d'euros, pour x tonnes vendues.

Donner une expression de $R(x)$ en fonction de x.

(c) Représenter graphiquement la fonction R sur l'intervalle $[0\,;\,10]$, dans le même repère que la courbe Γ.

(d) Pour quelles valeurs de x l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

4 On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

(a) Montrer que l'expression de $B(x)$, lorsque x appartient à l'intervalle $[0\,;\,10]$ est :

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$

(b) On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$.

(c) On admet que $B'(x)$ peut s'écrire

$$B'(x) = (x+2)(18-3x).$$

Étudier le signe de B' et en déduire les variations de B sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

(d) Déterminer la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal.

1 V/F Tableau de variations

Énoncé p. 190

1 *Faux*. Le minimum de f sur $[-5; 4]$ est -2 atteint pour $x = -1{,}5$.

2 *Vrai*. Sur $[-1{,}5; 3]$ la fonction f est croissante et 1 et 3 appartiennent à cet intervalle donc $f(1) < f(3)$.

3 *Faux*. Sur $[-1{,}5; 3]$ la fonction f est croissante donc sur cet intervalle $f'(x) > 0$, $-1 \in [-1{,}5; 3]$ donc $f'(-1) > 0$.

4 *Vrai*. $f'(3) = 0$. Or $f'(3)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 3. Cette tangente est donc parallèle à l'axe des abscisses ; on dit qu'elle est « horizontale ».

5 *Vrai*. Sur l'intervalle $[3; 4]$, f est décroissante, $f(3) = 6$ et $f(4) = 2$ donc pour tout $x \in [3; 4]$, $2 \leqslant f(x) \leqslant 6$ donc $f(x) \geqslant 0$.

6 *Faux*. Contre-exemple : $f(3) = 6$.

2 QCM Fonction dérivée

Énoncé p. 190

À RETENIR

a, b, c sont des réels $a \neq 0$.

Fonction	Dérivée
$f(x) = b$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

1 Réponse **b**. f est une fonction constante.

2 Réponse **c**. f est une fonction affine.

3 Réponse **c**. f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$.

$$f'(x) = 2ax + b = 2 \times 1x + 2 = 2x + 2.$$

4 Réponse **c**. f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -4$ et $c = 1$.

$$f'(x) = 2ax + b = 2 \times 3x - 4 = 6x - 4.$$

3 QCM Lecture graphique

Énoncé p. 190

1 Réponse **a**. $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente. Cette tangente passe par $A(2; -1)$ et $B(3; 0)$. Donc :

$$f'(2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 + 1}{3 - 2} = 1.$$

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. $\mathcal{C}$ coupe trois fois la droite d'équation $y = -2$.

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Sur $[-3; 0]$ la fonction f est décroissante donc pour $x \in]-3; 0]$, $f'(x) < 0$. Ainsi $f'(-2) < 0$.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. La dérivée s'annule en changeant de signe en deux valeurs.

5 Réponse $\boxed{\text{b}}$. Sur $[0; 5]$, f est croissante puis décroissante donc f' change de signe sur cet intervalle.

6 Réponse $\boxed{\text{a}}$. f est négative quand $\mathcal{C}$ est située sous l'axe des abscisses.

4 Calculer des dérivées

Énoncé p. 192

Lycée Thiers, Marseille

MÉTHODE

On commence par repérer la forme de la fonction :

- fonction usuelle ;
- fonction de la forme $k \times u(x)$;
- fonction de la forme $u(x) + v(x)$;
- association des formes connues $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1 f est une fonction constante donc sa dérivée est $f'(x) = 0$.

2 f est une fonction de la forme $k \times u(x)$ avec $k = -1$ et $u(x) = x$ alors sa dérivée est de la forme $f'(x) = k \times u'(x)$. Or $u'(x) = 1$.

Donc $f'(x) = -1$.

3 f est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 3$ donc sa dérivée est de la forme $f'(x) = a$. Donc $f'(x) = -2$.

4 f est de la forme $u + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = -2x$. Alors sa dérivée est de la forme $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -2$. Ainsi $f'(x) = 2x - 2$.

5 f est de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a = 1, b = 2, c = 0$ et $d = 5$.

Donc $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ainsi $f'(x) = 3 \times 1x^2 + 2 \times 2x + 0 = 3x^2 + 4x$.

5 Variations

Énoncé p. 192

Lycée Michelet, Vanves

MÉTHODE

- Si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ sur I, f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ sur I, f est constante sur I.

1 f est de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a = 2$, $b = 3{,}5$, $c = -3$ et $d = 1$.

f' est de la forme $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ainsi,

$$f'(x) = 3 \times 2 \times x^2 + 2 \times (3{,}5) \times x - 3 = 6x^2 + 7x - 3.$$

2 Pour montrer l'égalité on développe le second membre.

$$\begin{aligned}(2x+3)(3x-1) &= 2x \times 3x - 2x + 3 \times 3x - 3\\ &= 6x^2 - 2x + 9x - 3\\ &= 6x^2 + 7x - 3\\ &= f'(x).\end{aligned}$$

3 Pour étudier le signe de $f'(x)$ on va étudier le signe de chaque facteur et dresser un tableau de signes.

- $2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -\dfrac{3}{2}$.
- $2x + 3 > 0 \iff 2x > -3 \iff x > -\dfrac{3}{2}$.
- $3x - 1 = 0 \iff 3x = 1 \iff x = \dfrac{1}{3}$.
- $3x - 1 > 0 \iff 3x > 1 \iff x > \dfrac{1}{3}$.

On dresse le tableau de signes.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $2x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4 On dresse ensuite le tableau de variations.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	6,625	↘	$\frac{25}{54}$	↗	

6 Extremum

Énoncé p. 192

Lycée Talma, Brunoy

À RETENIR

Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en x_0 alors f admet un extremum en x_0. Cet extremum est soit un minimum, soit un maximum.

1 f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = -10$.
$f'(x) = 2ax + b$. Ainsi $f'(x) = 2 \times 1x + 6 = 2x + 6$.

2 $2x + 6 > 0 \iff 2x > -6 \iff x > -\frac{6}{2} \iff x > -3.$

Sur $]-\infty; -3[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

Sur $]-3; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.

3 On a :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	
			-19		

4 f' s'annule en changeant de signe en $x = -3$ donc f admet un extremum en $x = -3$.

Cet extremum est un minimum qui vaut -19 atteint pour $x = -3$.

7 Modélisation

Énoncé p. 193

Lycée Charlemagne, Thionville

1 **(a)** On lit l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 soit 200.
Le coût total de production de 4 tonnes est d'environ 200 milliers d'euros.

(b) On lit l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 600 soit environ 9 tonnes.

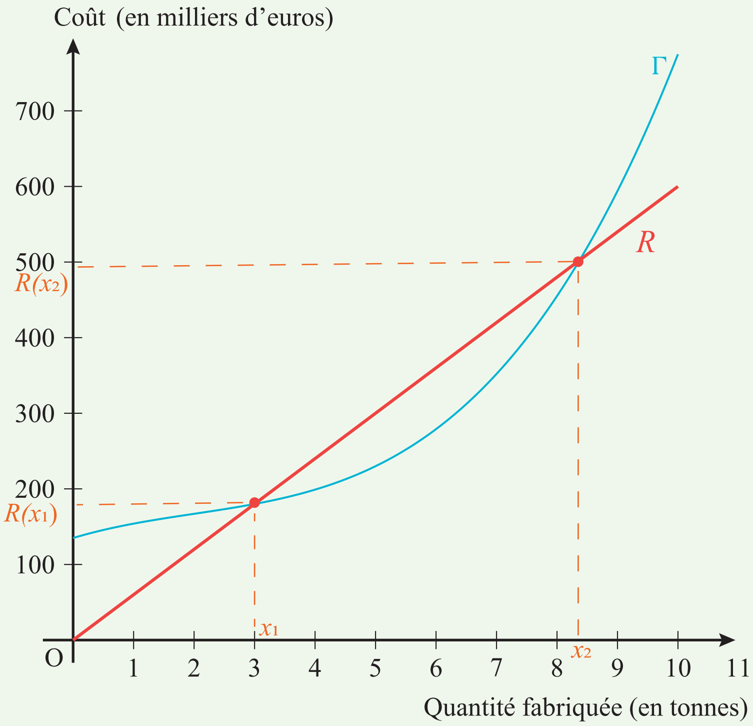
2 **(a)** On calcule $C(6) = 6^3 - 6 \times 6^2 + 24 \times 6 + 135 = 144 + 135 = 279$.
Le coût total de production de 6 tonnes est 279 milliers d'euros.

(b) Lorsque l'entreprise produit 6 tonnes, elle dépense 279 milliers d'euros. Cette dépense est répartie sur chaque tonne $\frac{279}{6} = 46{,}5$ donc le coût moyen dans ces conditions, est de 46,5 milliers d'euros.

3 **(a)** La recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage est de 300 milliers d'euros $60 \times 5 = 300$.

(b) L'expression de $R(x)$ en fonction de x est alors $R(x) = 60x$.

(c)



(d) L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la droite représentant la recette est au-dessus de la courbe Γ. Nous lisons : x appartient à l'intervalle $[3\ ;\ \approx 8{,}4]$.

4 **(a)** Le bénéfice est la différence entre les recettes et les coûts.

$$B(x) = 60x - \left(x^3 - 6x^2 + 24x + 135\right) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$

(b) $B'(x) = -(3x^2) + 6(2x) + 36 = -3x^2 + 12x + 36.$

(c) x étant positif, $x + 2$ est strictement positif par conséquent le signe de $B'(x)$ est celui de $18 - 3x$ ou de $6 - x$.

Sur $\mathbb{R}$, $6 - x > 0 \iff x < 6$. Il en résulte :

$$\text{si } x \in [0\ ;6[,\ B'(x) > 0 \text{ ou si } x \in]6\ ;\ 10],\ B'(x) < 0.$$

(d) Tableau :

x	0		6		10
Signe de $B'(x)$		+	0	−	
Variations de B			81		
		↗		↘	
	−135				−175

(e) En lisant le tableau de variations, la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal est de 6 tonnes.