INTERROS des LYCÉES

Collection dirigée par Éric MAURETTE

maths

Term

Stéphane PASQUET

Nathan

09157544_001.indd 1 16/04/2020 15:40

Remerciements

L'auteur et l'équipe de Prepamath Éditions tiennent à remercier Matthieu Berret pour l'aide précieuse qu'il a apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Anna Michalak, Stéphane Pasquet

Coordination éditoriale : François Déliac

Conception couverture : Simon Geliot

Votre avis nous intéresse : contact@prepamath.fr

© Éditions Nathan 2026 - ISBN 9782095065409

Avant-propos

Cette nouvelle édition, entièrement revue et corrigée, est conforme au programme de la spécialité mathématiques de Terminale et intègre, pour la première fois, **une partie Mathématiques expertes** (pages 453 à 546) destinée aux élèves ayant choisi cet enseignement optionnel. Vous y trouverez les trois grands chapitres au programme (Arithmétique, Nombres complexes, Matrices et graphes), accompagnés d'un mémento dédié.

En cette année de préparation finale au baccalauréat, le contenu du programme de spécialité introduit de nombreuses notions nouvelles, dont la maîtrise demande la pratique régulière d'exercices variés : équations différentielles, intégration, combinatoire, loi des grands nombres, loi binomiale.

Chaque chapitre s'articule en quatre parties :

- un rappel de cours concis, construit autour d'un ou plusieurs exercices types, qui condense l'essentiel à retenir ;
- des QCM et vrai/faux pour tester rapidement la solidité de vos connaissances et vous préparer aux épreuves du baccalauréat et des concours post-bac ;
- des exercices progressifs réellement posés en lycée, allant des applications immédiates aux problèmes les plus exigeants. De nombreux exercices intègrent des programmes en Python téléchargeables sur :

  `www.prepamath.fr/ILTM`
- des solutions détaillées, parfois plus complètes que ce qui serait attendu en devoir, afin d'éclairer les notions fondamentales.

Un sujet de bac blanc complète la partie dédiée à l'enseignement de spécialité.

Rappelons que cet ouvrage n'est pas un manuel de cours : il complète, sans le remplacer, le travail mené en classe et le dialogue avec votre professeur. Des vidéos pédagogiques, accessibles par QR Code sur tablette ou smartphone, viennent en appui des exercices clés.

Vos remarques et suggestions sont les bienvenues :

`contact@prepamath.fr`

Je vous souhaite une excellente et profitable lecture.

L'auteur

Table des matières

Méthodes de travail

Les conseils qui suivent ont été mis en pratique par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour approfondir votre méthode de travail et obtenir les meilleurs résultats pendant vos études, nous vous recommandons la lecture du livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et E. Maurette.

Faire des « feed-back »

Le « ***feed-back*** » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral. Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices de manière approfondie plutôt que d'en survoler un grand nombre. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé.

Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- *Idem* pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudié, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable d'en survoler l'ensemble avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

Pour acquérir de la rapidité, trois voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.

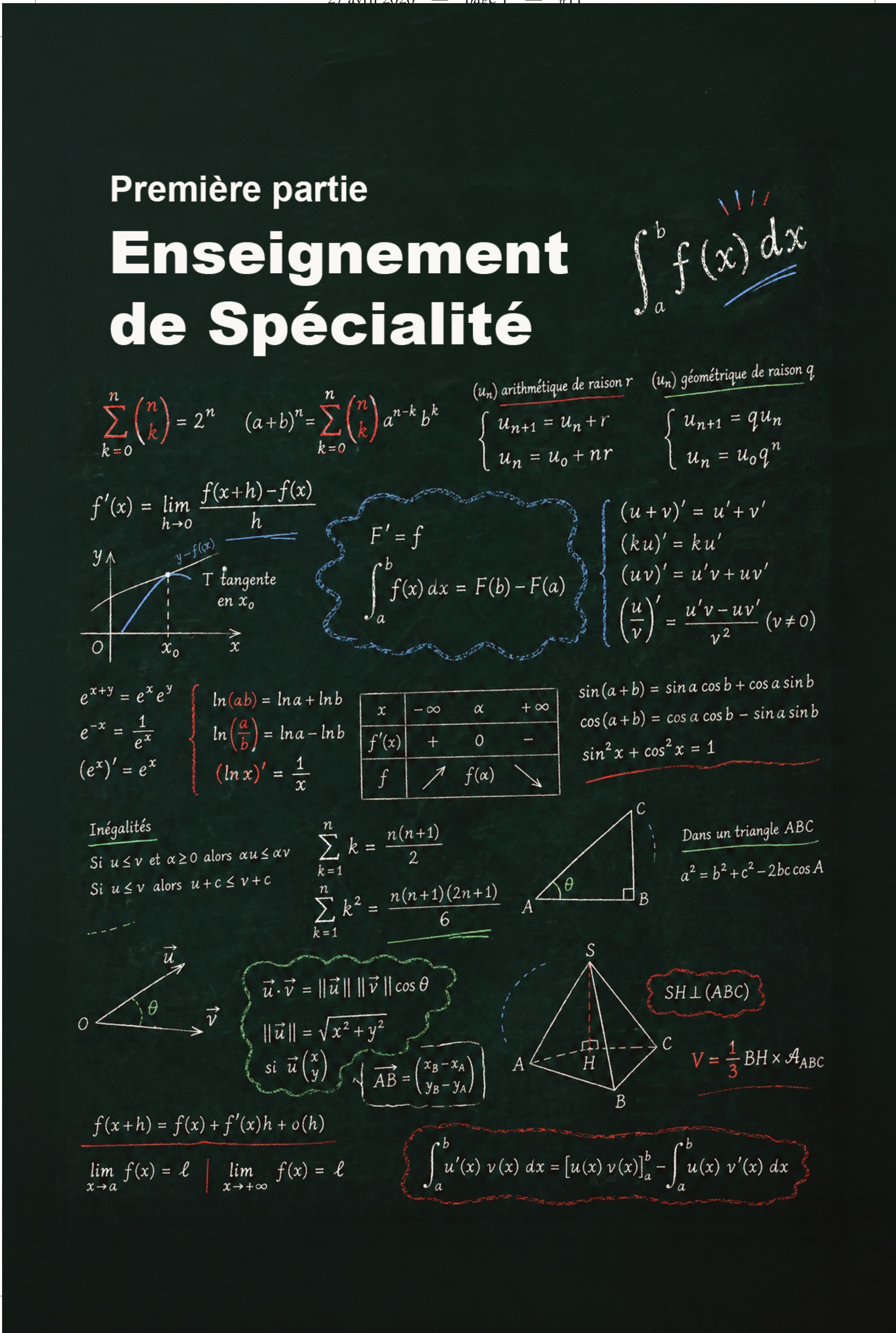
- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoirs surveillés. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.

Spécial Baccalauréat

- Lisez attentivement l'intégralité de l'énoncé. Cela vous permettra de repérer l'exercice qui vous semble le plus facile, de manière à commencer par celui-ci.
- Lorsque vous commencez un exercice basé sur des documents, vous devez lister au brouillon les informations que vous pouvez en tirer et qui vont vous permettre de résoudre la problématique ainsi que les notions du cours que vous allez devoir utiliser pour construire votre argumentation. Pour les exercices de QCM, prenez le temps de bien confronter les différentes propositions aux documents et à vos connaissances afin de cocher LA bonne réponse.
- Si vous êtes habitués à utiliser la méthode du feed-back exposée dans les premières pages de cet ouvrage, il est bon d'envisager un court feed-back mental sur les parties du cours concernées par l'épreuve du jour. Si vous êtes nerveux, cela vous aidera à vous mettre en confiance et à « démystifier » l'épreuve, que vous pourrez aborder avec la même sérénité qu'un devoir surveillé classique.
- Il faut absolument soigner la présentation. Au cours de l'année scolaire, votre professeur s'est habitué à votre style de rédaction, à votre écriture. Il sait ce que vous valez. Ce n'est pas le cas du correcteur qui lira votre copie. Il n'aura ni l'indulgence que pourrait avoir votre professeur, ni la patience d'essayer de vous déchiffrer si votre copie est présentée comme un brouillon. Par conséquent, il vous faut faire un réel effort de présentation le jour du bac, plus encore que pendant l'année scolaire : faites systématiquement une introduction qui énonce clairement la problématique à résoudre, utilisez des termes de transition entre les informations tirées des documents et vos connaissances. Enfin, rédigez une conclusion répondant à la problématique.
- Enfin, relisez-vous. Réservez-vous pour cela le temps nécessaire. Cette relecture doit être très attentive (ce n'est pas toujours facile à l'issue de plus de trois heures d'épreuve). Enfin, souvenez-vous, si vous manquez de temps pour tout relire, qu'il vaut mieux une relecture partielle très attentive qu'une relecture « express » en diagonale, totalement inefficace pour détecter les erreurs résiduelles.

Première partie

Enseignement de Spécialité



Chapitre 1

Suites numériques

Plan du chapitre

1 Raisonnement par récurrence

Exercice type 1 — Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n < 6$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - \dfrac{8}{2^n}$.

Voir corrigé page 4

Propriété 1 : principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :

- pour un entier n_0, $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie (initialisation),
- pour tout naturel $k \geqslant n_0$, le fait que $\mathcal{P}_k$ soit vraie implique que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie (hérédité),

alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarque : comme $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$, on dit que la propriété est *héréditaire*.

Définition 1

Une *démonstration par récurrence* est une démonstration dans laquelle on utilise le principe de récurrence.

À RETENIR

Une démonstration par récurrence comporte impérativement deux étapes : initialisation et hérédité.

COURS

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

1 Posons $\mathcal{P}_n$ la propriété définie par : $u_n < 6$.

- $u_0 = -2$ donc $u_0 < 6$. $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un entier naturel k fixé, $k \geqslant 0$. Alors,

$$u_k < 6 \Rightarrow \frac{1}{2}u_k < 3 \Rightarrow \frac{1}{2}u_k + 3 < 6\,,$$

donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie et pour $k \geqslant 0$, $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.
On en déduit, d'après le principe de récurrence, que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $u_n < 6$.

2 Posons $\mathcal{Q}_n$ la propriété définie par : $u_n = 6 - \dfrac{8}{2^n}$.

- $6 - \dfrac{8}{2^0} = -2 = u_0$, donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{Q}_k$ est vraie pour un entier naturel k fixé, $k \geqslant 0$. Alors,

$$u_k = 6 - \frac{8}{2^k} \Rightarrow \frac{1}{2}u_k = 3 - \frac{8}{2^{k+1}} \Rightarrow \frac{1}{2}u_k + 3 = 6 - \frac{8}{2^{k+1}}.$$

Donc $\mathcal{Q}_{k+1}$ est vraie.

Ainsi, $\mathcal{Q}_0$ est vraie et pour $k \geqslant 0$, $\mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_{n+1}$.
On en déduit, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n, $\mathcal{Q}_n$ est vraie, c'est-à-dire :

$$u_n = 6 - \frac{8}{2^n}.$$

Voir énoncé page 3

2 Limite d'une suite

Exercice type 2 — Lycée Virlogeux, Riom

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n - n^2$.

2 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n\big[3 - \sin(n)\big]$.

3 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1 + \cos(n)}{n}$.

Voir corrigé page 9

2.1 Définitions

Définition 2 : suite convergente

On dit que la suite (u_n) *converge* vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque : si (u_n) converge vers ℓ, alors on dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0, car tout intervalle ouvert contenant 0 contient $\dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang.

Définition 3 : limite infinie d'une suite

On dit que la limite de (u_n) est $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si pour tout réel A, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$ (resp. $u_n \leqslant A$) :

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A \text{ (resp. } u_n \leqslant A).$$

Exemple : en posant $u_n = n^2$, quel que soit le réel positif A, si $n \geqslant \sqrt{A}$ alors $n^2 \geqslant A$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$.

Définition 4 : suite divergente

On dit que la suite (u_n) *diverge* quand elle ne converge pas.

Exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \cos(n)$ diverge car ses valeurs varient entre -1 et 1.

2.2 Des limites de référence

Propriété 2

Soit p un entier strictement positif.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

COURS

2.3 Limite et comparaison

2.3.1 - Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 : théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soit n_0 un entier naturel.

- Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant u_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Exemples

- Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$. Alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -n^2$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 2 : théorème d'encadrement (théorème des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, soit ℓ un nombre réel et soit n_0 un entier naturel. Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Exemple : soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

2.3.2 - Comportement à l'infini de (q^n)

Propriété 3 : inégalité de Bernoulli

Pour tout réel $x \geqslant -1$ $(x \neq 0)$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Propriété 4

Soient q un nombre réel et n un entier naturel.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$, alors (q^n) n'a pas de limite en $+\infty$.

Propriété 5

Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ converge vers 0.

2.4 Suite majorée ou minorée

Définitions 5

- Une suite (u_n) est dite *majorée* s'il existe un réel M tel que :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$
- Une suite (u_n) est dite *minorée* s'il existe un réel m tel que :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n.$$
- Une suite est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemple : on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

- Pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$ donc $u_n \leqslant 1 + 1$, soit $u_n \leqslant 2$.

  La suite (u_n) est donc majorée par 2.
- De plus, $\dfrac{1}{n} > 0$ pour tout entier naturel n non nul donc $u_n > 1$.

  La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est minorée et majorée ; elle est donc bornée.

Théorème 3 : théorème de convergence des suites monotones

Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.
Toute suite monotone et bornée converge.

COURS

2.5 Opérations et limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, ℓ et ℓ' représentent des réels.

Dans les tableaux suivants, « F.I. » signifie : « Forme Indéterminée ». Ce sont des cas où l'on ne peut pas conclure immédiatement quant à la valeur de la limite. Dans de tels cas, il est nécessaire de transformer l'écriture.

2.5.1 - Somme et produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$-\infty$ $+\infty$
0	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2.5.2 - Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell > 0$	0^+(0 en restant positif) 0^-(0 en restant négatif)	$+\infty$ $-\infty$
$\ell < 0$	0^+(0 en restant positif) 0^-(0 en restant négatif)	$-\infty$ $+\infty$
0	0	F.I.
ℓ	$+\infty$ $-\infty$	0 0
$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Virlogeux, Riom

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - n^2)$ est une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Pour lever cette indétermination, on factorise par le terme de plus haut degré, donc ici par n^2 :

$$u_n = n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1$.

Ainsi, par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

2 $u_n = n\big[3 - \sin(n)\big]$. Le facteur $3 - \sin(n)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Cependant, on sait que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 &\iff -1 \leqslant -\sin(n) \leqslant 1\\
&\iff 2 \leqslant 3 - \sin(n) \leqslant 4\\
&\iff 2n \leqslant \underbrace{n\big[3 - \sin(n)\big]}_{u_n} \leqslant 4n.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $u_n \geqslant 2n$ donc d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

MÉTHODE

Dans les situations où interviennent les fonctions sinus et cosinus, pensez aux encadrements $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 &\iff 0 \leqslant 1 + \cos(n) \leqslant 2\\
&\iff 0 \leqslant \frac{1 + \cos n}{n} \leqslant \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Voir énoncé page 4

1 V/F Suites convergentes

10 min Corrigé p. 18

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Une suite monotone et bornée converge.
2. Si la suite (u_n) converge vers 0 et si la suite (v_n) est telle que, pour $n \geqslant 100$, $v_n \leqslant u_n$, alors la suite (v_n) converge aussi vers 0.
3. Pour qu'une suite converge, il suffit qu'elle soit décroissante et positive.
4. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors la suite (u_n) converge.

2 V/F Convergence et opérations

10 min Corrigé p. 18

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Si la suite $(u_n + v_n)$ converge alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent aussi.
2. Si la suite $(u_n v_n)$ converge alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent aussi.
3. Si la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0 alors l'une au moins des deux suites (u_n) ou (v_n) converge aussi vers 0.
4. Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite finie L alors il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n = v_n$.

3 V/F Vérifications des connaissances

10 min Corrigé p. 19

On considère une suite (u_n) dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, donner une démonstration, et si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2 alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente alors (v_n) est convergente de limite nulle.
5. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors, à partir d'un certain rang, toutes les valeurs de la suite (u_n) sont nécessairement supérieures à 1 000 000.
6. Si, à partir d'un certain rang, toutes les valeurs de la suite (u_n) sont supérieures à 1 000 000, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
7. Si une suite (u_n) est croissante alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
8. Si une suite est décroissante et minorée par 0 alors elle converge vers 0.

4 V/F Limites

10 min Corrigé p. 19

Répondre par *vrai* ou *faux* aux affirmations suivantes *en justifiant succinctement* :

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+3}{3^n+2} = \dfrac{3}{2}$.

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n} = 6$.

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)-2n}{n+1} = 0$.

Démonstrations par récurrence

5 Terme général d'une suite

★ 10 min Corrigé p. 20

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

2 Soit (v_n) définie par $v_0 = v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^{n+1} - 3^n$.

6 Une somme

★★ 10 min Corrigé p. 21

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

7 Suite convergente

★★ 30 min Corrigé p. 22

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

Soit $0 < k < 1$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \left(1 + k^n\right) u_n.$$

Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = 2(1+k)\left(1+k^2\right)\left(1+k^3\right)\cdots\left(1+k^{n-1}\right).$$

8 Avec une somme

★★ 15 min Corrigé p. 22

Lycée Notre-Dame de Boulogne

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On pose : $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

9 Somme des carrés des impairs

★★ 15 min Corrigé p. 23

Lycée Carnot, Paris

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1).$$

Limites de suites

10 Différence de racines carrées

★ 10 min Corrigé p. 24

Lycée Carnot, Dijon

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

11 Calculs divers de limites

★ 10 min Corrigé p. 25

Lycée Carnot, Paris

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = (2-n)(3n+1)$.
2. $v_n = \left(2 - \frac{1}{3n}\right)(-5n+3)$.
3. $w_n = \dfrac{-3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 5}$.
4. $t_n = \dfrac{n^3 + n^2\cos(n)}{n^2 - 4}$.

12 Étude d'une suite

★ 10 min Corrigé p. 26

Lycée Henri IV, Paris

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. En exprimant $u_{k+1} - u_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, montrer que pour tout n, $u_n \geqslant n + 1$.
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

13 Avec des sinus

★ 10 min Corrigé p. 26

Lycée Notre-Dame du Grandchamp, Versailles

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n^2 - 3\sin(n)}{n^2+1}$.

1. Prouver que, pour tout entier naturel n,
$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2n^2+3}{n^2+1}.$$
2. En déduire la limite de la suite u.

14 En utilisant les définitions

★ 35 min Corrigé p. 27

Lycée Hoche, Versailles

1. Voici les définitions explicites de deux suites :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2n+1}{n+2} \qquad \text{et} \qquad v_n = n^2 + 3n - 5.$$
Prouver que (u_n) tend vers 2 et que (v_n) tend vers $+\infty$.
2. On définit les quatre suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) par :
$$a_n = \sqrt{\frac{6n+1}{2n+3}}\ ; \qquad b_n = \frac{n\sqrt{n}+2}{2n}\ ;$$
$$c_n = n^3 + (-1)^n n^2\ ; \qquad d_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n}.$$
Déterminer les limites de ces suites.

15 Raisonnement par l'absurde

★★ 10 min Corrigé p. 29

Lycée Saint-Joseph de Tivoli, Bordeaux

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$. On admet que (u_n) est minorée par 0 et monotone.
Démontrer que (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

INTERROS

16 Avec un programme

★★ 20 min Corrigé p. 29

Lycée Claude Monet, Paris

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On se propose d'étudier le comportement à l'infini de cette suite.

Partie A – Approche à l'aide d'un programme

1 On souhaite écrire un programme en Python permettant de calculer u_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Compléter la fonction suivante de sorte qu'elle renvoie u_n.

```
def u(n):
    terme = 0
    for i in range(1,n+1):
        terme = terme + ...
    return ...
```

2 Exécuter ce programme et donner les valeurs approchées de u_{10}, u_{20} et u_{100}.

3 Conjecturer le comportement à l'infini de la suite u.

Partie B

1 Soit n un entier, $n \geqslant 1$. Justifier que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{i}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2 En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

3 Déterminer la limite de la suite u.

Études générales

17 Suite récurrente et racine carrée

★ 15 min Corrigé p. 30

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + (u_n)^2}$ et $u_0 = 1$.

1 Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (u_n)^2$ est arithmétique de raison 2.

2 Calculer v_0, puis v_n en fonction de n.

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

18 Récurrence, variation et limite ★ 20 min

Corrigé p. 30

Lycée Carnot, Paris

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n + 2}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   Que peut-on conjecturer sur la monotonie de la suite (u_n) ?
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,
   $$0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}.$$
3. Déterminer le sens de variation de (u_n).
4. En déduire la convergence de (u_n).
5. Déterminer alors la limite de la suite.

19 Suite homographique ★ 20 min

Corrigé p. 32

Lycée Buffon, Paris

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \end{cases}$

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) Démontrer que pour tout n, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.
   (c) En déduire par récurrence qu'on a toujours $u_n > 1$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout n.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   (b) Écrire v_n puis u_n en fonction de n.

20 Suite récurrente particulière ★★ 25 min

Corrigé p. 33

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.
   (c) En déduire la limite de (u_n).

3 On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par l'égalité :

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}.$$

(a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

4 Soit la somme S_n définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

21 Suites imbriquées

★★ 30 min Corrigé p. 35

Lycée Louis Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Un biologiste étudie les mutations génétiques entre deux types de cellules, A et B, évoluant dans un même milieu. Le nombre total de cellules reste constant (ni disparition ni création) ; mais d'un jour à l'autre, 25 % des cellules de type A mutent vers des cellules de type B, et réciproquement.

On note a_n (resp. b_n) le nombre de cellules de type A (resp. de type B) au bout de n jours d'observation. Pour tout entier n, on a $a_n + b_n = 300$. Initialement, $a_0 = 100$ et $b_0 = 200$.

1 Justifier que pour tout entier naturel, on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n \end{cases}$$

2 En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 75$.

3 On pose $c_n = 150 - a_n$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que la suite (c_n) est géométrique.

(b) Exprimer c_n en fonction de n.

En déduire que $a_n = 150 - 50 \times 0{,}5^n$.

4 Étudier les variations de chacune des suites (a_n) et (b_n).

5 Déterminer la limite de chacune des suites. Interpréter les résultats vis-à-vis de la situation étudiée par le biologiste.

Objectif bac

22 Extrait de bac

★★ 45 min Corrigé p. 36

Amérique du Nord, sujet 2 de secours, 2025

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : conjecture

1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2 Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

1 Calculer w_0.

2 Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3 Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4 Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n$.

5 Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : étude de la suite (u_n)

1 Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2 En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3 On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \dfrac{1}{4}\ell$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRIGÉS

1 V/F Suites convergentes

Énoncé p. 10

1 *Vrai*. C'est le théorème de convergence.

2 *Faux*. Pour prouver cela, il suffit de trouver un contre-exemple. Considérons la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1$. Alors, pour tout entier n, $v_n \leqslant u_n$ (a fortiori pour $n \geqslant 100$).

Si la suite (u_n) converge vers 0 alors la suite (v_n) converge vers -1, et non vers 0.

3 *Vrai*. Si la suite (u_n) est positive alors, elle est minorée par 0. De plus, d'après le théorème de convergence, si (u_n) est décroissante, alors elle converge.

4 *Faux*. Pour le prouver, il suffit de trouver un contre-exemple.

Si $u_n = \sqrt{n}$ alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ et pourtant, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2 V/F Convergence et opérations

Énoncé p. 10

1 *Faux*. Il suffit de considérer les suites de terme général $u_n = n$ et $v_n = -n$. Leur somme est la suite nulle qui est convergente ; cependant, les deux suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.

2 *Faux*. Si $u_n = n + 1$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ alors $u_n v_n = 1$ donc la suite $(u_n v_n)$ converge ; cependant, la suite (u_n) ne converge pas.

3 *Faux*. En effet, si :

$$\begin{cases} u_n = 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ u_n = 1 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_n = 1 & \text{pour } n \text{ pair} \\ v_n = 0 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

alors $(u_n v_n)$ converge vers 0 (car $u_n v_n = 0$ pour tout entier n) alors que les suites (u_n) et (v_n) ne convergent pas vers 0.

4 *Faux*. Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n+1}$ admettent toutes les deux la même limite finie $L = 0$. Cependant, il n'existe aucun entier n tel que $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n+1}$.

3 V/F Vérifications des connaissances

Énoncé p. 10

1 *Faux*. Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n > 0$ alors aucun terme de cette suite n'est nul et (u_n) converge vers 0. Cependant, (v_n) tend vers $-\infty$, donc diverge.

2 *Vrai*. En effet,

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 2 &\iff 0 < \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{par passage à l'inverse} \\ &\iff 0 < \frac{2}{u_n} \leqslant 1 \quad \text{par produit par 2} \\ &\iff -1 \leqslant -\frac{2}{u_n} < 0 \text{ en prenant l'opposé des 3 termes} \\ &\iff -1 \leqslant v_n < 0. \end{aligned}$$

3 *Faux*. Reprenons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.
Alors $v_n = -2n$. (u_n) est décroissante et (v_n) aussi.

4 *Faux*. (u_n) peut être divergente sans tendre vers l'infini ; par exemple, si $u_n = (-1)^n$, (u_n) diverge car elle prend alternativement les valeurs 1 et -1, et (v_n) diverge aussi car elle prend alternativement les valeurs 2 et -2.

5 *Vrai*. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieur à n'importe quel réel positif (par exemple 1 000 000).

6 *Faux*. Si $u_n = 1\,000\,000 + \dfrac{1}{n}$ pour $n > 0$ alors $u_n > 1\,000\,000$; cependant, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\,000\,000$.

7 *Faux*. La suite de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ est croissante (il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n$ qui est clairement positif) et sa limite est 1.

8 *Faux*. La suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ est décroissante et minorée par 0. Cependant, sa limite vaut 1.

4 V/F Limites

Énoncé p. 11

1 *Faux*. En effet, pour de très grandes valeurs de n, $\dfrac{2^n+3}{3^n+2} \approx \dfrac{2^n}{3^n} \approx \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+3}{3^n+2} = 0$.

2 *Faux*. En effet, pour de très grandes valeurs de n, $n > \sqrt{n}$, et on peut alors écrire : $\dfrac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n} \approx \dfrac{-n}{n} \approx -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n} = -1$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

3 *Faux.* En effet, on peut écrire :

$$\frac{\sin(n) - 2n}{n+1} = \frac{\sin(n)}{n+1} - \frac{2n}{n+1}.$$

Or,

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n+1} = 0$ (théorème des gendarmes) ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n}{n} = -2$ (1 est négligeable par rapport à n).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n) - 2n}{n+1} = -2$.

5 Terme général d'une suite

Énoncé p. 11

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 Raisonnons par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, on a : $2^n + n + 1 = 2^0 + 0 + 1 = 2 = u_0$.
- Supposons la formule vraie pour un entier naturel k arbitrairement fixé. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - k \\ &= 2(2^k + k + 1) - k \\ &= (2^{k+1} + 2k + 2) - k \\ &= 2^{k+1} + k + 2 \\ &= 2^{k+1} + (k+1) + 1. \end{aligned}$$

C'est bien la formule au rang $(k+1)$.
On a donc prouvé par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n + 1$.

2 Nous allons démontrer par récurrence l'assertion :

$$\mathcal{P}(n) : \quad \left[(*)\ v_n = 2^{n+1} - 3^n \quad \text{et} \quad (**)\ v_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1} \right]$$

- Pour $n = 0$, on a $2^{n+1} - 3^n = 2 - 1 = 1 = v_0$ d'où $(*)$.
Enfin, $2^{n+2} - 3^{n+1} = 4 - 3 = 1 = v_1$ qui est $(**)$: on a vérifié $\mathcal{P}(0)$.
- Supposons l'assertion $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain entier naturel k.
On sait déjà : $v_{k+1} = 2^{k+2} - 3^{k+1}$ (d'après l'hypothèse de récurrence), qui est la partie $(*)$ de l'assertion $\mathcal{P}(k+1)$.

On calcule :

$$\begin{aligned} v_{k+2} = 5v_{k+1} - 6v_k &= 5(2^{k+2} - 3^{k+1}) - 6(2^{k+1} - 3^k) \\ &= 5 \times 2^{k+2} - 5 \times 3^{k+1} - 6 \times 2^{k+1} + 6 \times 3^k \\ &= 5 \times 2^{k+2} - 5 \times 3^{k+1} - 3 \times 2^{k+2} + 2 \times 3^{k+1} \\ &= 2 \times 2^{k+2} - 3 \times 3^{k+1} \\ &= 2^{k+3} - 3^{k+2} \end{aligned}$$

qui est $(**)$ au rang $(k+1)$. On a ainsi vérifié $\mathcal{P}(k+1)$.

On en déduit, d'après le principe de récurrence, que, pour tout entier naturel n, $v_n = 2^{n+1} - 3^n$.

6 Une somme

Énoncé p. 11

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

- *Initialisation :* pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2}$ et $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. Donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{1+1}$; l'égalité est donc vraie.
- *Hérédité :* soit k un entier non nul arbitrairement fixé ; supposons l'égalité vraie au rang k :

$$\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

On veut montrer que l'égalité est vraie au rang $(k+1)$, soit :

$$\sum_{p=1}^{k+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{k+1} \frac{1}{p(p+1)} &= \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

L'égalité est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

CORRIGÉS

7 Suite convergente

Énoncé p. 11

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition :

$$u_n = (1+k)\left(1+k^2\right)\left(1+k^3\right)\cdots\left(1+k^{n-1}\right).$$

- Pour $n = 1$, le membre de gauche de l'égalité est :
$$u_1 = (1+k^0)u_0 = 2,$$
et le membre de droite est réduit à :
$$(1+k^{1-1}) = 1+1 = 2.$$
Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 1$.
- Supposons que la propriété soit vraie pour un entier p non nul arbitrairement fixé.
On sait par hypothèse que $u_{p+1} = \left(1+k^p\right)u_p$. On remplace alors u_p dans cette expression par sa valeur. Il vient :
$$u_{p+1} = \left(1+k^p\right)\left(1+k\right)\left(1+k^2\right)\left(1+k^3\right)\cdots\left(1+k^{p-1}\right).$$
Donc $\mathcal{P}_p \Rightarrow \mathcal{P}_{p+1}$.

Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

8 Avec une somme

Énoncé p. 12

Lycée Notre-Dame de Boulogne

Posons :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad S_n = 1 - \left(\frac{n}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Démontrons par récurrence que cette égalité est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

- *Initialisation* : pour $n = 2$, $S_2 = u_2 = \dfrac{2-1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{9}$.
De plus, $1 - \left(\dfrac{n}{2}+1\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\dfrac{2}{2}+1\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{1}{9}$.
Ainsi, $\mathcal{P}_2$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons que pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k$ soit vraie, c'est-à-dire que :
$$S_k = 1 - \left(\frac{k}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^k .$$
C'est notre hypothèse de récurrence (HR).
Démontrons alors que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi, c'est-à-dire que :
$$S_{k+1} = 1 - \left(\frac{k+1}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = 1 - \left(\frac{k+3}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} .$$

On a :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_{k+1} \\ &= S_k + u_{k+1} \\ &= 1 - \left(\frac{k}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^k + u_{k+1} \quad \text{d'après (HR)} \\ &= 1 - \left(\frac{k}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^k + \underbrace{\frac{k}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}_{u_{k+1}} \end{aligned}$$

Nous allons mettre maintenant $\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$ en facteur dans les deux derniers termes :

$$\begin{aligned} &= 1 - \left[\left(\frac{k}{2}+1\right)\frac{3}{2} - \frac{k}{4}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \\ &= 1 - \left(\frac{k+3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors démontrée.

Par conséquent, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

9 Somme des carrés des impairs

Énoncé p. 12

Lycée Carnot, Paris

Posons :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1).$$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour $n \geqslant 1$.

- *Initialisation* : pour $n = 1$, le membre de gauche de l'égalité est réduit à $1^2 = 1$. Celui de droite vaut :
$$\frac{1}{3} \times 1 \times (4 \times 1^2 - 1) = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$
Les deux membres sont donc égaux. L'initialisation est alors faite.

- *Hérédité* : supposons que pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Ainsi :
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{1}{3}k(4k^2-1).$$
C'est notre hypothèse de récurrence (HR).
On souhaite démontrer alors que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi, donc que :
$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k+1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)\big(4(k+1)^2-1\big) = \frac{1}{3}(4k^3+12k^2+11k+3).$$

CORRIGÉS

On a :

$$\begin{aligned}1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k+1)^2 &= 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2\\ &= \frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2 \qquad \text{d'après (HR)}\\ &= \frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)+(2k+1)^2\\ &= \left[\frac{1}{3}k(2k-1)+(2k+1)\right](2k+1)\\ &= \frac{1}{3}(2k^2+5k+3)(2k+1)\\ &= \frac{1}{3}(4k^3+12k^2+11k+3).\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

10 Différence de racines carrées

Énoncé p. 12

Lycée Carnot, Dijon

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}u_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0.$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0.$

MÉTHODE : expression conjuguée

Quand nous avons multiplié $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ par $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, nous avons multiplié par l'*expression conjuguée* de u_n.

Lorsque l'on doit calculer la limite d'une différence avec au moins une racine carrée, cette technique peut lever l'indétermination initiale.

11 Calculs divers de limites

Énoncé p. 12

Lycée Carnot, Paris

1 $u_n = (2-n)(3n+1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (2-n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+1) = +\infty$.

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = -\infty$.

2 $v_n = \left(2 - \dfrac{1}{3n}\right)(-5n+3)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{3n}\right) = 2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n+3) = -\infty$.

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = -\infty$.

3 $w_n = \dfrac{-3n^2+2n-1}{2n^2+3n+5} = \dfrac{\cancel{n^2}\left(-3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}$ pour $n \neq 0$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n) = \dfrac{-3}{2}$.

4
$$t_n = \frac{n^3+n^2\cos(n)}{n^2-4} = \frac{n^3\left(1+\frac{\cos(n)}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{n\left(1+\frac{\cos(n)}{n}\right)}{1-\frac{4}{n^2}}, \quad \text{pour } n \neq 0.$$

- Pour tout entier naturel n non nul,

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \text{ donc } -\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0.$$

- On en déduit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\frac{\cos(n)}{n}\right)}{1-\frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\,(1+0)}{1-0} = +\infty.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (t_n) = +\infty$.

CORRIGÉS

12 Étude d'une suite

Énoncé p. 13

Lycée Henri IV, Paris

1 Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$.
Donc (u_n) est strictement croissante.

2 Pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\left\{\begin{array}{rcccc} u_n - u_{n-1} & = & u_{n-1}^2 + 1 & \geqslant & 1 \\ u_{n-1} - u_{n-2} & = & u_{n-2}^2 + 1 & \geqslant & 1 \\ & \vdots & & \vdots & \\ u_2 - u_1 & = & u_1^2 + 1 & \geqslant & 1 \\ u_1 - u_0 & = & u_0^2 + 1 & \geqslant & 1 \end{array}\right.$$

En sommant membre à membre et après simplification, il vient :

$$u_n - u_0 \geqslant n, \text{ soit : } u_n \geqslant n + 1.$$

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} (n + 1) = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

13 Avec des sinus

Énoncé p. 13

Lycée Notre-Dame du Grandchamp, Versailles

1 On sait que : $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, quelle que soit la valeur de n.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$-3 \leqslant -3\sin(n) \leqslant 3$ (par produit par -3 en inversant les bornes) ,

d'où :

$2n^2 - 3 \leqslant 2n^2 - 3\sin(n) \leqslant 2n^2 + 3$ (en ajoutant $2n^2$ aux trois nombres).

On a donc, en divisant l'encadrement précédent par le réel strictement positif $n^2 + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} = \frac{2n^2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 2\frac{1 - \frac{3}{2n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc, par produit et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{3}{2n^2}\right) = 1$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

D'où, par quotient et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-3}{n^2+1} = 2$.

Par un procédé analogue, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$.

Donc, en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

14 En utilisant les définitions

Énoncé p. 13

Lycée Hoche, Versailles

1 • $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ mène à une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

MÉTHODE

Pour lever une indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », on factorise le numérateur et le dénominateur par leur terme de plus haut degré respectif.

On modifie donc l'écriture de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^2\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

2 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{6n+1}{2n+3} = \frac{6n\left(1+\frac{1}{6n}\right)}{2n\left(1+\frac{3}{2n}\right)} = 3\left(\frac{1+\frac{1}{6n}}{1+\frac{3}{2n}}\right).$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{6n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2n} = 0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6n+1}{2n+3} = 3.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}.$$

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \frac{n\sqrt{n}+2}{2n} = \frac{n\sqrt{n}}{2n} + \frac{2}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{1}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$ donc, par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty.$$

- On peut écrire que pour tout entier naturel n,

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

donc

$$n^3 - n^2 \leqslant c_n \leqslant n^3 + n^2.$$

En particulier,

$$c_n \geqslant n^2(n-1).$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(n-1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty.$$

- Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$n - 1 \leqslant n + (-1)^n \leqslant n + 1 \quad \text{et} \quad 2n - 1 \leqslant 2n + (-1)^n \leqslant 2n + 1\ ,$$

donc :

$$\frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+(-1)^n} \leqslant \frac{1}{2n-1} \text{ (par passage à l'inverse) },$$

d'où :

$$\frac{n-1}{2n+1} \leqslant d_n \leqslant \frac{n+1}{2n-1} \text{ (par produit de réels positifs).}$$

De plus, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{n-1}{2n+1} = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$\frac{n+1}{2n-1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{2n}},$$

ce qui donne, d'une façon analogue, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{2}$.

15 Raisonnement par l'absurde

Énoncé p. 13

Lycée Saint-Joseph de Tivoli, Bordeaux

Nous allons, comme le titre de l'exercice le suggère, faire un *raisonnement par l'absurde* pour démontrer que (u_n) est strictement croissante.

Supposons donc que (u_n) est décroissante.

Dans ce cas, comme elle est minorée par 0, elle converge (d'après le théorème de convergence des suites monotones). Notons alors ℓ sa limite.

Ainsi, comme $u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$, ℓ vérifie nécessairement l'équation :

$$\ell = \sqrt{12+\ell} \iff \ell^2 = 12+\ell \iff \ell^2 - \ell - 12 = 0,$$

dont les solutions sont -3 et 4. Ainsi, (u_n) converge vers -3 ou vers 4.

Or, par hypothèse, comme (u_n) est minorée par 0 et décroissante, $0 \leqslant u_n \leqslant u_0 = 3$ donc $\ell \neq -3$ et $\ell \neq 4$. Il y a alors une contradiction.

Ainsi, l'hypothèse selon laquelle (u_n) est décroissante est fausse.

On en déduit alors que (u_n) est strictement croissante.

16 Avec un programme

Énoncé p. 14

Lycée Claude Monet, Paris

Partie A – Approche à l'aide d'un programme

1 Programme complété

```python
def u(n):
    terme = 0
    for i in range(1,n+1):
        terme = terme + 1/(i**0.5)
    return terme
```

2 On obtient $u_{10} \approx 5{,}021$, $u_{20} \approx 7{,}595$, et $u_{100} \approx 18{,}590$ à 10^{-3} près.

3 À la vue de ces valeurs, on peut penser que la suite tend vers $+\infty$.

CORRIGÉS

Partie B

1 $1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{i} \leqslant \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{i}}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, d'après la question précédente,

$$u_n \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

soit :

$$u_n \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On a donc bien $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

17 Suite récurrente et racine carrée

Énoncé p. 14

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

1 Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \left(u_{n+1}\right)^2 = 2 + \left(u_n\right)^2 = 2 + v_n.$$

La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 2$.

2 $v_0 = \left(u_0\right)^2 = 1$. La suite (v_n) étant arithmétique, d'après le cours, pour tout entier naturel n, :

$$v_n = v_0 + nr = 1 + 2n.$$

$v_n = \left(u_n\right)^2$ donc $u_n = \sqrt{v_n}$ (en effet, $u_n \geqslant 0$ puisque les termes sont définis par une racine carrée dans la relation de récurrence, et $u_0 > 0$).

Par conséquent, $u_n = \sqrt{1 + 2n}$ pour tout entier naturel n.

18 Récurrence, variation et limite

Énoncé p. 15

Lycée Carnot, Paris

1
- $u_1 = 2 - \dfrac{1}{u_0 + 2} = 2 - \dfrac{1}{-1 + 2} = 1$.
- $u_2 = 2 - \dfrac{1}{u_1 + 2} = 2 - \dfrac{1}{1 + 2} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$.
- $u_3 = 2 - \dfrac{1}{u_2 + 2} = 2 - \dfrac{1}{\frac{5}{3} + 2} = \dfrac{19}{11} \approx 1{,}73$.

On peut alors conjecturer que (u_n) est croissante.

2 Montrons par récurrence que pour tout $n \neq 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$.

- *Initialisation* : $u_1 = 1$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant \sqrt{3}$.
- *Hérédité* : supposons que pour un entier k fixé, $0 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
0 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3} &\Longrightarrow 2 \leqslant u_k + 2 \leqslant \sqrt{3} + 2 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}+2} \leqslant \frac{1}{u_k+2} \leqslant \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{u_k+2} \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}+2} \\
&\Longrightarrow 2 - \frac{1}{2} \leqslant 2 - \frac{1}{u_k+2} \leqslant 2 - \frac{1}{\sqrt{3}+2} \\
&\Longrightarrow 0 < \frac{3}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$.

3 Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 2 - \frac{1}{u_n+2} - u_n \\
&= \frac{2u_n + 4 - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2} \\
&= \frac{3 - u_n^2}{u_n+2} > 0
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$ donc $\begin{cases} 3 - u_n^2 \geqslant 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases}$.

Par conséquent, (u_n) est croissante.

4 (u_n) est croissante et majorée. Donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge.

5 Notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n+2}$ donc ℓ vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}
\ell = 2 - \frac{1}{\ell+2} &\iff \ell - 2 = -\frac{1}{\ell+2} \\
&\iff (2-\ell)(\ell+2) = 1 \\
&\iff -\ell^2 = -3 \\
&\iff \ell = -\sqrt{3} \text{ ou } \ell = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$ donc $0 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \sqrt{3}$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

19 Suite homographique

Énoncé p. 15

Lycée Buffon, Paris

1 **(a)** $u_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{6}{5}$ et $u_3 = \frac{8}{7}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} &= \frac{(2u_n - 1) + (u_n - 1)}{2u_n - 1} \\ &= \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \\ &= u_{n+1}. \end{aligned}$$

(c) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété définie par : « $u_n > 1$ ».

- $u_0 = 2$ donc $u_0 > 1$. $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie au rang $k \geqslant 0$.
  Alors, $2u_k - 1 > 0$ et $u_k - 1 > 0$, d'où $\frac{u_k - 1}{2u_k - 1} > 0$, et donc :
  $u_{k+1} = 1 + \frac{u_k - 1}{2u_k - 1} > 1$.
  $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie.

Donc, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Alors, pour tout entier naturel n, $u_n > 1 > \frac{1}{2}$.

Comme, pour tout entier naturel n, $u_n > \frac{1}{2}$, il en résulte que $2u_n - 1$ est non nul et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie pour tout n.

2 **(a)** Remarquons d'abord que, d'après la question précédente, pour tout n, $u_n \neq 1$; la suite (v_n) est donc bien définie.

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - \frac{2u_n - 1}{2u_n - 1}} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2 - (2u_n - 1)}{2u_n - 1}} = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} .$$

D'où :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2 .$$

La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 2.

(b) On calcule $v_0 = \frac{1}{2 - 1} = 1$. Alors pour tout entier naturel n :

$$v_n = 1 + 2n \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{2n + 2}{2n + 1}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

ATTENTION

Avant de travailler sur une suite, il faut toujours s'assurer (même si l'énoncé ne le précise pas) qu'elle est bien définie. Dans cet exercice, il est nécessaire, pour que la suite (u_n) soit bien définie, que tous les termes de la suite soient différents de $\frac{1}{2}$. En général, une telle propriété se prouve en minorant ou en majorant les termes de la suite et se démontre par récurrence.

20 Suite récurrente particulière

Énoncé p. 15

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

1

- $u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$.
- $u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{14}{9}$.
- $u_3 = u_{2+1} = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$.

2 **(a)** Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

- *Initialisation* : $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} \geqslant 0$.
- *Hérédité* : supposons que pour un entier $k \geqslant$ fixé, $u_k \geqslant 0$.

  On souhaite alors démontrer que $u_{k+1} \geqslant 0$, soit $\frac{1}{3}u_k + k - 2 \geqslant 0$.

  $k \geqslant 4$ donc $k - 2 \geqslant 2$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_k \geqslant 0$, donc $\frac{1}{3}u_k \geqslant 0$ et $\frac{1}{3}u_k + k - 2 \geqslant 2 \geqslant 0$. Par conséquent, $u_{k+1} \geqslant 0$.

  L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

(b) On déduit de la question précédente que pour tout entier naturel $m \geqslant 4$, $u_m \geqslant 0$ donc $u_{m+1} \geqslant 0 + m - 2$.
En posant $n = m + 1$, on déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant (n-1) - 2$, soit $u_n \geqslant n - 3$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$ et $n \geqslant 4 \Rightarrow u_n \geqslant n - 3$.
Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$.

CORRIGÉS

3 **(a)** Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\ &= -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme :

$$v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}.$$

(b) De la question précédente, on peut déduire que $v_n = v_0 \times q^n$ pour tout entier naturel n, donc $v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Or, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ donc $u_n = \frac{1}{2}\left(v_n - 3n + \frac{21}{2}\right)$. En remplaçant v_n par l'expression trouvée précédemment, on obtient :

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

4

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4}\right] \\ &= \frac{25}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{21}{4} \times \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{(n+1)\text{ termes}} \\ &= \frac{25}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) \\ &= \frac{75}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}(n^2 + n) - \frac{21}{4}n - \frac{21}{4} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{33}{8} - \frac{75}{8 \times 3^{n+1}}.$$

21 Suites imbriquées

Énoncé p. 16

Lycée Louis Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1 Le nombre de cellules de type A le $(n+1)$-ième jour est : 75 % des cellules A du jour précédent (car 25 % de cellules A ont muté vers B) auquel s'ajoutent les 25 % de cellules B qui ont muté vers A. On obtient :

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n. \tag{1}$$

Le raisonnement est similaire pour les cellules B :

$$b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n. \tag{2}$$

2 Sachant que $a_n + b_n = 300$, on a $b_n = 300 - a_n$. En substituant dans l'équation 1, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}(300 - a_n) \\ &= \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4} \times 300 \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{300}{4} \\ &= 0{,}5 \times a_n + 75. \end{aligned}$$

3 **(a)** On cherche une relation de récurrence pour (c_n), sachant que $c_n = 150 - a_n$ et donc $a_n = 150 - c_n$:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 150 - a_{n+1} = 150 - (0{,}5 \times a_n + 75) \\ &= 75 - 0{,}5 \times a_n = 75 - 0{,}5(150 - c_n) \\ &= 75 - 75 + 0{,}5 \times c_n \\ &= 0{,}5 \times c_n. \end{aligned}$$

On reconnaît la relation de récurrence d'une suite géométrique de raison 0,5.

(b) On a $c_0 = 150 - a_0 = 50$, donc $c_n = c_0 \times 0{,}5^n = 50 \times 0{,}5^n$.
Comme $a_n = 150 - c_n$, on en déduit que $a_n = 150 - 50 \times 0{,}5^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

4 $0 < 0{,}5 < 1$ donc $0{,}5^n > 0{,}5^{n+1}$. Or,

$$\begin{aligned} 0{,}5^n > 0{,}5^{n+1} &\iff -50 \times 0{,}5^n < -50 \times 0{,}5^{n+1} \\ &\iff 150 - 50 \times 0{,}5^n < 150 - 50 \times 0{,}5^{n+1} \\ &\iff a_n < a_{n+1}. \end{aligned}$$

La suite (a_n) est donc croissante.
Un raisonnement analogue montre que la suite (b_n) est décroissante.

CORRIGÉS

5 On sait que $\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ (car $0 < 0{,}5 < 1$). On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} (150 - 50 \times 0{,}5^n) = 150\ ,$$

et de même :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(150 + 50 \times 0{,}5^n\right) = 150.$$

À long terme, il y aura 50 % de cellules A et 50 % de cellules B.

22 Extrait de bac

Énoncé p. 17

Amérique du Nord, sujet 2 de secours, 2025

Partie A : conjecture

1 Le tableau complété est le suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2 En dressant un tableau de valeurs de la suite (u_n), on constate qu'elle semble décroissante et que ses termes semblent se rapprocher de 0.

Partie B : étude d'une suite auxiliaire

1 $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2 Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{(définition de } w \text{ au rang } n+1\text{)}\\
&= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}\\
&= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{(relation de récurrence de } (u_n)\text{).}\\
&= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\\
&= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)\\
&= \frac{1}{2}w_n \quad \text{(définition de } w \text{ au rang } n\text{).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cela prouve que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3 La suite (w_n) est géométrique, donc d'après le cours :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n &= w_0 \times q^n \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

4 Soit n un entier naturel. D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \\ &\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n.\end{aligned}$$

5 Pour tout n entier naturel, posons :

$$P_n \quad : \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- *Initialisation :* $u_0 = 0$ et $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.
  P_0 est donc vraie.
- *Hérédité :* pour un entier naturel k donné, on suppose que la propriété P_k est vraie, c'est-à-dire : $u_k = k\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2}u_k \quad \text{(relation de récurrence de la question B. 4)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2} \times k\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times (1+k) \\ u_{k+1} &= (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

  Ainsi, l'hérédité est vérifiée.
- *Conclusion :* P_0 est vraie, et, pour un entier naturel k fixé, P_k vraie $\Rightarrow$ P_{k+1} vraie. Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

Partie C : étude de la suite (u_n)

1 Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \text{(question B. 5.)} \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \big((n+1) - 2n\big) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \big(1 - n\big). \end{aligned}$$

Or,

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement ;
- $(1-n) \leqslant 0$ car $n \geqslant 1$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. On en déduit alors que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2 L'expression de u_n permet de dire que la suite (u_n) est minorée par 0, car pour tout entier naturel n, $n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \geqslant 0$.

De plus, la suite est décroissante à partir du rang $n = 1$ d'après la question précédente.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0. Ainsi, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

3 On admet ici que la limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} \ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\ &\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\ &\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

Chapitre 2

Limites de fonctions

Plan du chapitre

1 Notion de limites et limites usuelles

Exercice type 1 — Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes.

(a) $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x^2}$

(b) $g : x \mapsto \dfrac{7-3x^2}{5+4x^2}$

(c) $h : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-1} - x$

2 Étudier le comportement lorsque x tend vers 1, des fonctions f et g suivantes :

(a) $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{(x-1)^2}$

(b) $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

Voir corrigé page 43

1.1 Notion de limites

1.1.1 - Définitions

Définition 1

Soit f une fonction et soit α un nombre réel ou un infini ($+\infty$ ou $-\infty$).
On dira que f admet une limite ℓ (finie ou infinie) en α si $f(x)$ se rapproche de ℓ quand x tend vers α.
On écrira alors : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

COURS

Exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ car plus x devient grand (plus x tend vers $+\infty$) plus $\sqrt{x}$ devient grand.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ car plus x se rapproche de $-\infty$, plus son inverse se rapproche de 0.

Remarque : dans le cas où x se rapproche d'un nombre fini, il est fréquent d'étudier la limite *à droite et à gauche* de ce nombre.

Exemples

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ car x se rapproche de 0 par valeurs positives, donc la limite sera nécessairement positive. Or, l'inverse d'un nombre très proche de 0 est un nombre qui se rapproche d'un infini (par exemple, l'inverse de 10^{-20}, qui est très proche de 0, est un nombre très grand, à savoir 10^{20}).
- De manière analogue, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

1.1.2 - Asymptotes

Définitions 2

Soit f une fonction dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}_f$, et soit a un nombre réel fini.

- On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = a$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. Cela signifie que $\mathcal{C}_f$ se rapproche de la droite d'équation $y = a$ en $-\infty$ ou en $+\infty$.
- On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \pm\infty$. Cela signifie que $\mathcal{C}_f$ se rapproche de la droite d'équation $x = a$.

Exemple : la courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

1.2 Limites usuelles

1.2.1 - Limites aux infinis

Propriétés 1 : limites en $+\infty$

Pour tout entier naturel n non nul,

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^n\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$

Exemples

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^5\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^3}\right) = 0$

Propriétés 2 : limites en $-\infty$

Pour tout entier naturel n non nul,

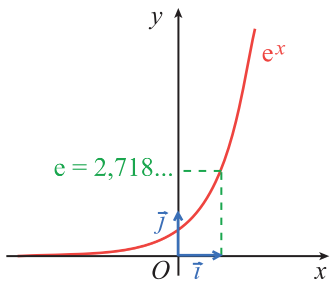
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^{2n}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^{2n+1}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$

Exemples

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^5\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^8\right) = +\infty$

Propriétés 3 : fonction exponentielle

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$



Propriété 4 : croissances comparées

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0.$

Remarque : un moyen simple de retenir ces propriétés est de se dire que la fonction exponentielle « est plus importante » que les puissances de x.

COURS

1.2.2 - Limites en un nombre fini

Propriétés 5

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x^{2n}}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x^{2n}}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right) = +\infty$

1.3 Opérations sur les limites

α désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$; ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels.
f et g sont deux fonctions.

1.3.1 - Somme et produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \left[f(x)+g(x)\right]$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \left[f(x)\times g(x)\right]$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\times\ell'$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell'>0$ $-\infty$ si $\ell'<0$ indéterminée si $\ell'=0$.
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell'>0$ $+\infty$ si $\ell'<0$ indéterminée si $\ell'=0$.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

1.3.2 - Formes indéterminées

Il y a quatre types d'indétermination dans le calcul de limites.

Types	Exemples
« $\infty - \infty$ »	$f(x)=x^2$, $g(x)=-\sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]$
« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »	$f(x)=x^2+3x+1$, $g(x)=x+1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
« $0\times\infty$ »	$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $g(x)=\sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\times g(x)\right]$
« $\dfrac{0}{0}$ »	$f(x)=\sqrt{x}-2$, $g(x)=x-4$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Lorsque nous sommes face à une indétermination, il existe plusieurs méthodes pour la « lever » (c'est-à-dire pour la supprimer) en fonction du type rencontré.

MÉTHODE

- Pour lever une indétermination du type « $\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ », on peut *factoriser* les fonctions par le terme de plus haut degré (ou le terme « le plus fort ») ou utiliser une *expression conjuguée*.
- Pour lever une indétermination du type « $\frac{0}{0}$ », on peut utiliser la définition du taux d'accroissement.

Exemples

- $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2+1}$. Le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ laisse apparaître une indétermination du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; on factorise alors le numérateur et le dénominateur par les termes de plus haut degré, puis on simplifie :
$$f(x) = \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3-\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}.$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. Le calcul de $\lim\limits_{x\to4} g(x)$ laisse apparaître une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » ; on va alors utiliser un taux d'accroissement :
$$u(x) = \sqrt{x} \text{ donc } g(x) = \frac{u(x)-u(4)}{x-4}.$$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to4} g(x) = \lim\limits_{x\to4} \dfrac{u(x)-u(4)}{x-4} = u'(4)$ (par définition).
Or, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to4} g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 **(a)** $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2} = \dfrac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\times x} = \dfrac{3+\frac{1}{x}}{x}$, pour $x \neq 0$.

Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right) = 3$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

...

COURS

Solution de l'exercice type 1 (suite) Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

(b) $g(x) = \dfrac{7-3x^2}{5+4x^2} = \dfrac{\cancel{x^2}\left(\frac{7}{x^2}-3\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{5}{x^2}+4\right)} = \dfrac{\frac{7}{x^2}-3}{\frac{5}{x^2}+4}$, pour $x \neq 0$.

Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{7}{x^2}-3\right) = -3$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{5}{x^2}+4\right) = 4$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = -\dfrac{3}{4}$.

(c) $h(x) = \sqrt{x^2+3x-1} - x$.

- Étude en $-\infty$.
  $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+3x-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x-1} = +\infty$.
  De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ donc par somme,
  $$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty.$$
- Étude en $+\infty$.
  Utilisons l'expression conjuguée :
  $$\left(\sqrt{x^2+3x-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x-1}+x\right) = (x^2+3x-1)-(x)^2 = 3x-1.$$
  Alors, pour $x > 0$:
  $$h(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x-1}+x} = \frac{\cancel{x}\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}.$$
  Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 2, de sorte que
  $$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{3}{2}.$$

2 **(a)** On a $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

D'où, par somme : $$\lim_{x\to 1}\left(x + \frac{1}{(x-1)^2}\right) = +\infty.$$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-1} = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$.

Voir énoncé page 39

2 Théorèmes sur les limites

Exercice type 2 — Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 Calculer la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

2 Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\cos x}{(x^2+1)}$.

Voir corrigé page 46

Théorème 1 : théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions. Pour x proche de α, on suppose que $f(x) \geqslant g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.

Exemple : soit f une fonction telle que, pour tout réel x positif, $f(x) \leqslant 1 - x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$, donc d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Théorème 2 : théorème des gendarmes (théorème d'encadrement)

Soient f, g, et h trois fonctions et ℓ un réel.

- Si, pour x au voisinage de α, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et :
$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\alpha} h(x) = \ell\ ,$$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.
- Si, pour x au voisinage de α, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

Exemple : soit f une fonction telle que, pour tout réel x non nul :

$$3 + \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 3 + \frac{5}{x}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 + \dfrac{5}{x}\right) = 3$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Solution de l'exercice type 2 Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 Pour tout réel $x \neq 1$, on a :

$$-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad -(x-1)^2 \leqslant f(x) \leqslant (x-1)^2.$$

Or, $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0.$$

2 Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1.$$

De plus, pour tout réel x,

$$x^2 + 1 > 0.$$

Ainsi, par produit,

$$-\frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{\cos x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2+1}.$$

Or,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

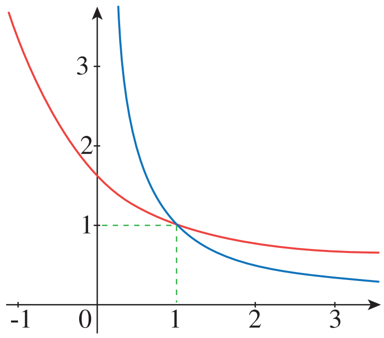
Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Voir énoncé page 45

1 QCM Lecture graphique

10 min Corrigé p. 53



Le graphique ci-contre représente les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g, f étant définie sur $]0\,;+\infty[$ et g sur $]-3\,;+\infty[$. On sait que :

- l'axe des abscisses est asymptote aux deux courbes
- l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathcal{C}_f$

Pour chaque question, donner la bonne réponse parmi les trois proposées.

1 La limite de f quand x tend vers 0 est :

a 0 b $+\infty$ c on ne peut pas conclure.

2 La limite quand x tend vers $+\infty$ de $g(x)$ est :

a 0 b $+\infty$ c on ne peut pas conclure.

3 On a :

a $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ b $\lim\limits_{x\to 1} f(x) > \lim\limits_{x\to 1} g(x)$

c $\lim\limits_{x\to 1} f(x) < \lim\limits_{x\to 1} g(x)$

4 Soit h une fonction telle que, pour tout $x > 5$, $f(x) < h(x) < g(x)$. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $h(x)$ est :

a 0 b $+\infty$ c on ne peut pas conclure.

2 V/F Étude de formes indéterminées

10 min Corrigé p. 53

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1 Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est indéterminée.

2 Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ est indéterminée.

3 Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)$ est indéterminée.

4 Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f^n(x) = -\infty$.

INTERROS

3 V/F Limites diverses

10 min Corrigé p. 53

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3} = +\infty$.

2 $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = 0$.

3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{x + 1} = -1$.

4 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = +\infty$.

4 V/F Asymptotes

10 min Corrigé p. 54

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 La courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.

2 La courbe représentative de la fonction $g(x) = \dfrac{\sqrt{e^{2x} + x}}{3 - e^x}$ admet une asymptote horizontale.

5 QCM Exponentielle

15 min Corrigé p. 55

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$.

1 La limite de f en $+\infty$ est :

- a $+\infty$
- b 1
- c 0
- d on ne peut pas savoir

2 La limite de f en $-\infty$ est :

- a $+\infty$
- b 1
- c 0
- d on ne peut pas savoir

3 La limite de f en 0 est :

- a $+\infty$ à droite et $-\infty$ à gauche
- b 0
- c 1
- d 2

4 La limite de f en 1 est :

- a 0
- b $e + 1$
- c $e^2 - 1$
- d $e - 1$

Limites aux infinis

6 Avec des exponentielles

★ 5 min Corrigé p. 55

Lycée Jean Renoir, Bondy

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}$ (courbe représentative de f).

7 Limites de quotients

★ 10 min Corrigé p. 56

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2-2x+3}}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-3x+2}{x+1}$

8 Limites de fonctions irrationnelles

★ 10 min Corrigé p. 56

Lycée Marie Curie, Sceaux

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}$

9 Avec une racine carrée

★ 10 min Corrigé p. 57

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right).$$

10 Avec des polynômes

★ 15 min Corrigé p. 58

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-Bois

Pour chaque fonction, déterminer les limites indiquées :

1. $f(x) = -x^3 + x - 2$, en $+\infty$ et $-\infty$.
2. $f(x) = (7-x^2)(x-3)^3$, en $+\infty$ et $-\infty$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+1} + x^2 - 2$, en $+\infty$.

11 Lever une indétermination

★ 15 min Corrigé p. 59

Lycée Corot, Savigny-sur-Orge

1 Soit h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$.
Étudier la limite de h en $+\infty$.

2 Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;-1]$ par $g(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+x}$.
Étudier la limite de g en $-\infty$.

12 Limites d'exponentielles en $+\infty$

★★ 10 min Corrigé p. 59

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Calculer les limites suivantes.

1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}\right)$

2 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3-\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x}+2}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

4 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x}$

13 Une asymptote oblique

★★ 30 min Corrigé p. 60

Lycée La Bruyère, Versailles

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 14}{x - 4}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1 Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathcal{D}_f$ on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-4}.$$

2 Étudier les limites de la fonction f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

3 Quelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ peut-on déduire de ces limites ?
En donner une équation.

4 Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction g telle que $g(x) = f(x) - (x-3)$.

5 Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 3$.

14 Diverses limites

★★★ 15 min Corrigé p. 62

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2} + x}{e^{-x} + 1}$

2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{e^x + 2} - 2x}{x e^x - \sqrt{x}}$

Limites en un nombre fini

15 Avec une exponentielle

★ 5 min Corrigé p. 63

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{x}$.

16 Limites à droite et à gauche

★ 10 min Corrigé p. 63

Lycée Carnot, Paris

Étudier les limites à droite et à gauche de 1 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 + 3x - 4}.$$

17 Fractions rationnelle et irrationnelle

★ 10 min Corrigé p. 64

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{2x - 4}$

2 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$

18 Limites en un nombre réel

★ 20 min Corrigé p. 65

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Étudier les limites suivantes. Lorsqu'une limite prouve l'existence d'une asymptote à la courbe représentative, donner son équation.

1 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 1}{x - 2}$

2 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

3 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

4 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - 2x}{x^2 + 2x - 3}$

INTERROS

19 Diverses limites

★★ 15 min Corrigé p. 66

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Déterminer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{x-2}$

2 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-3}-e^{-2}}{\sqrt{x}-1}$

Comparaison et encadrement

20 Comparaison ou encadrement ?

★ 5 min Corrigé p. 67

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1}$.

21 Comparaison ou encadrement ?

★ 5 min Corrigé p. 67

Lycée Jean Monnet, Blanquefort

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{3+2\sin(x)}$.

22 Une fonction trigonométrique

★★ 15 min Corrigé p. 68

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

Soit f la fonction est définie par : $f(x) = \dfrac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+5}$.

1 Quel est l'ensemble de définition de f ?

2 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Objectif bac

23 Limites de fonctions diverses

★★ 15 min Corrigé p. 68

Extraits de divers sujets, 2025

1 Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}\right)$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2 On pose $v(t) = 12e^{-0,6t} + \dfrac{1}{0,6} \times \dfrac{0,6t}{e^{0,6t}}$. Calculer la limite de v en $+\infty$.

3 On pose $f(x) = (6x^2+2x-2)e^{-5x+1}$. Calculer la limite de f en $-\infty$.

1 QCM Lecture graphique

Énoncé p. 47

1 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, l'énoncé dit que l'axe des ordonnées est asymptote à C_f ; par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Mais d'après le graphique, le cas « $-\infty$ » n'est pas envisageable car la $\mathcal{C}_f$ est dirigée vers le haut (et non vers le bas).

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. D'après l'énoncé, l'axe des abscisses est asymptote aux deux courbes donc $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$.

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En fait, d'après le graphique, $f(1)$ et $g(1)$ sont définis et $f(1) = g(1) = 1$, soit $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$.

4 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, si $f(x) < h(x) < g(x)$ pour $x > 5$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x\to +\infty} h(x) < \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
Or, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 0$.

2 V/F Étude de formes indéterminées

Énoncé p. 47

1 *Faux*. D'après le théorème sur les limites de quotients, cette limite vaut 0.

2 *Faux*. D'après le théorème sur les limites de produits, cette limite vaut $-\infty$.

3 *Vrai*. Il s'agit d'une des quatre formes indéterminées à retenir. Par exemple, avec $f(x) = x$ et $g(x) = -\mathrm{e}^x$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - \mathrm{e}^x\right)$ est indéterminée. Pour calculer cette limite, on peut factoriser par e^x.

4 *Faux*. Tout dépend de la parité de l'entier naturel n. Par exemple, si $f(x) = -x$ alors $f^2(x) = (-x)^2 = x^2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f^2(x) = +\infty$.

3 V/F Limites diverses

Énoncé p. 48

1 *Vrai*. En effet,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x^2 - x - 2) = 3^2 - 3 - 2 = 4 > 0 \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x - 3) = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = +\infty.$$

2 *Faux*. En effet,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x^2 - 2x + 4) = 2^2 - 4 + 4 = 4 > 0 \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x - 2) = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = +\infty.$$

3 *Vrai*. En effet, on peut écrire pour tout $x \neq -1$:

$$\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Au voisinage de $-\infty$, $x < 0$ donc $|x| = -x$ et on peut alors écrire que pour $x < 0$:

$$\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+1} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right) = 1$ d'où :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+1} = -1.$$

4 *Faux*. Le numérateur et le dénominateur tendent simultanément vers 0 quand x tend vers 1. On est donc en présence d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ». Pour lever l'indétermination, on peut remarquer que, pour x positif :

$$x-1 = \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right),$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1,$$

d'où : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x}+1\right) = 2.$

4 V/F Asymptotes

Énoncé p. 48

1 *Faux*. À première vue, on pourrait penser que l'affirmation est vraie car $x = 1$ est une valeur interdite. Mais « 1 » est une racine évidente de $2x^2-5x+3$, donc ce polynôme se factorise par $(x-1)$:

$$2x^2-5x+3 = (x-1)(2x-3).$$

Ainsi, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2x-3$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -1$. Par conséquent, la courbe représentative de f n'admet pas d'asymptote verticale en $x = 1$ (car sa limite n'est pas infinie).

2 *Vrai*. En effet, on peut écrire :

$$g(x) = \frac{\sqrt{e^{2x}+x}}{3-e^x} = \frac{\sqrt{e^{2x}\left(1+xe^{-2x}\right)}}{e^x\left(3e^{-x}-1\right)} = \frac{\cancel{e^x}\sqrt{1+xe^{-2x}}}{\cancel{e^x}\left(3e^{-x}-1\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)=0$ (croissance comparée) donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{e}^{-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{-x}\right)=0.$$

Alors,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x\mathrm{e}^{-2x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\mathrm{e}^{-x}-1\right)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}g(x)=-1\text{ (par quotient).}$$

La droite d'équation $y=-1$ est donc une asymptote à la courbe de g.

5 QCM Exponentielle

Énoncé p. 48

1 Réponse $\boxed{\mathrm{a}}$. On peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\mathrm{e}^{x}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}\frac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x}=+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}=0\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty.$$

2 Réponse $\boxed{\mathrm{b}}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0\end{array}\right\}\quad\text{donc}\quad\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=0\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=1.$$

3 Réponse $\boxed{\mathrm{d}}$. Pour tout x non nul, $f(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{x}+1)}{\mathrm{e}^{x}-1}=\mathrm{e}^{x}+1$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

4 Réponse $\boxed{\mathrm{b}}$. La fonction f est définie en 1, sa limite est donc $f(1)=\mathrm{e}+1$.

6 Avec des exponentielles

Énoncé p. 49

Lycée Jean Renoir, Bondy

1 D'après les limites du cours, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$. Il en résulte que :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

2 On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\mathrm{e}^{x}}\times1}{\cancel{\mathrm{e}^{x}}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$$

$$=1.$$

CORRIGÉS

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $-\infty$.

7 Limites de quotients

Énoncé p. 49

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

1 Pour tout x au voisinage de $+\infty$,

$$2x^2 - 2x + 3 = x^2\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right).$$

Comme $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et donc :

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 3} = x\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}.$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \sqrt{2}.$$

2 D'après la propriété sur les limites aux infinis de fonctions rationnelles,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

8 Limites de fonctions irrationnelles

Énoncé p. 49

Lycée Marie Curie, Sceaux

On utilise dans cet exercice la méthode dite de *l'expression conjuguée*.

1 Quel que soit x, tel que $x + 1 > 0$ et $x - 1 > 0$, c'est-à-dire pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} &= \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}.\end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

2 Pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}} = \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{(x^2+x)-(x^2-x)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{2x}$$

$$= \frac{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{2x}.$$

Or, quand $x > 0$, $\dfrac{|x|}{x} = 1$ donc, pour $x > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{2}.$$

Enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1\ ,$$

d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}\right) = 1.$$

9 Avec une racine carrée

Énoncé p. 49

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Utilisons l'expression conjuguée pour lever l'indétermination rencontrée, du type « $\infty - \infty$ » :

$$\sqrt{4x^2+2x+1}-2x = \frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}$$

$$= \frac{4x^2+2x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}$$

$$= \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}.$$

CORRIGÉS

À ce stade, nous avons encore une indétermination, du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », mais pas de panique ! Nous allons la lever en factorisant au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x} &= \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)}+2x}\\ &= \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{2x\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}}+2x}\\ &= \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{2\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}}+1\right]}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}}+1\right]=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)=\frac{1}{2}.$$

10 Avec des polynômes

Énoncé p. 49

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-sous-Bois

1 $f(x) = -x^3 + x - 2 = x^3\left(-1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$.

2 Le terme de plus haut degré du polynôme est $-x^2 \times x^3 = -x^5$ donc :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^5) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^5) = +\infty$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 2) = +\infty$ donc, par somme, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

11 Lever une indétermination

Énoncé p. 50

Lycée Corot, Savigny-sur-Orge

1 Pour tout réel x strictement positif,

$$h(x) = x^2\left(2 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = x^2\left(2 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

2 Pour tout $x \leqslant -1$,

$$g(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+x}} = \frac{x\left(\dfrac{2}{x}-1\right)}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}.$$

D'où :

$$g(x) = \frac{1-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}.$$

ATTENTION

Comme x est négatif, on a $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1}\sqrt{X} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}} = 1$.

On en conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \frac{1}{2}$.

12 Limites d'exponentielles en $+\infty$

Énoncé p. 50

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(e^x-1\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc, par produit, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^x\right) = +\infty.$$

CORRIGÉS

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-e^{2x}}{e^x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}\left(3e^{-2x}-1\right)}{e^x\left(1+2e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(3e^{-2x}-1\right)}{1+2e^{-x}}.$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ donc, d'une part :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3e^{-2x}-1\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(3e^{-2x}-1\right)=-\infty,$$

d'autre part :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+2e^{-x}\right)=1.$$

On en déduit alors, par quotient, que :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-e^{2x}}{e^x+2}=-\infty.$$

3 En posant $X=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, on peut écrire :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to 0}Xe^X=0.$$

4 En posant $X=\sqrt{x}$ $(x>0)$, on peut écrire :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^2}=+\infty \text{ (d'après le cours).}$$

13 Une asymptote oblique

Énoncé p. 50

Lycée La Bruyère, Versailles

1 $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-4}=\dfrac{(ax+b)(x-4)+c}{x-4}$

$$=\frac{ax^2+(b-4a)x-4b+c}{x-4}.$$

Par identification avec l'expression de $f(x)$, on voit qu'il suffit que a, b et c vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{r}a=1\\ b-4a=-7\\ -4b+c=14\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=-3\\ c=2\end{array}\right.$$

Par conséquent, on peut écrire : $f(x)=x-3+\dfrac{2}{x-4}$.

2 $\mathcal{D}_f=]-\infty\,;\,4[\cup]4\,;\,+\infty[$. Il faut étudier les limites en l'infini et en 4 par valeurs supérieures et inférieures.

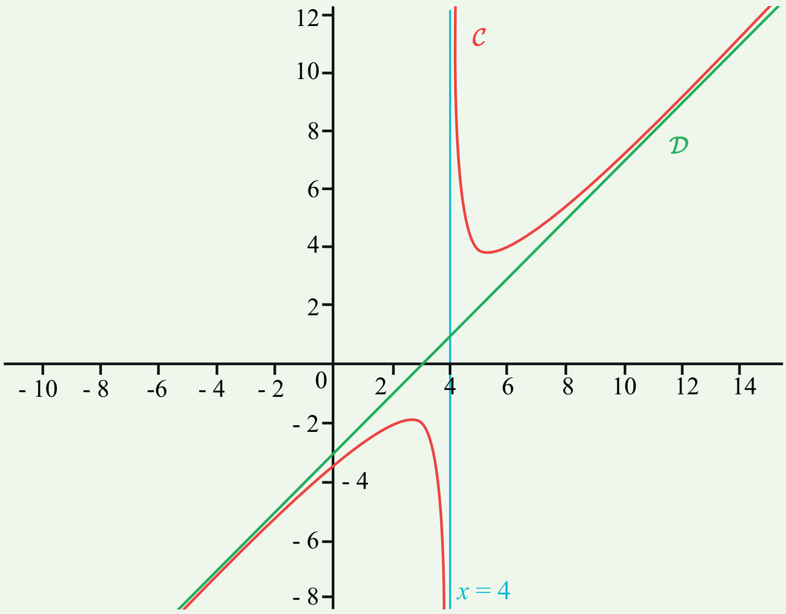
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x-4}=0$ donc, par somme, on obtient :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

- $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 4} (x-3) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} (x-4) = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} f(x) = +\infty.$$

  De même, $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 4} (x-3) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} (x-4) = 0^-\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = -\infty.$$

3 La limite infinie en 4 permet de conclure que la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 4$. En revanche, comme les limites en l'infini sont infinies, il n'y a pas d'asymptote horizontale.



4 En utilisant l'écriture établie dans la question 1, on trouve :

$$g(x) = f(x) - (x-3) = \frac{2}{x-4}.$$

D'après les calculs de limites de la question 2, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

Remarque : cette limite montre que la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ se rapprochent l'une de l'autre lorsque x tend vers l'infini (on peut le visualiser sur le graphique précédent). On dit que la droite $\mathcal{D}$ est une *asymptote oblique* à la courbe $\mathcal{C}$.

5 Pour étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$, il faut étudier le signe de l'expression $f(x) - (x-3)$, c'est-à-dire le signe de $g(x)$.

CORRIGÉS

- Pour $x > 4$, la différence est positive, donc la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.
- Pour $x < 4$, la différence est négative, donc la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite $\mathcal{D}$.

14 Diverses limites

Énoncé p. 51

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

1 $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^{x^2}+x}{e^{-x}+1} = \dfrac{\cancel{e^{-x}}\left(e^{x^2+x}+xe^x\right)}{\cancel{e^{-x}}\left(1+e^x\right)} = \dfrac{e^{x^2+x}+xe^x}{1+e^x}$.

- $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x^2+x}\right) = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (d'après le cours).
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+e^x\right) = 1$.

Par somme et quotient, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x^2}+x}{e^{-x}+1} = +\infty.$$

2 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^x+2}-2x}{xe^x-\sqrt{x}}$ mène à plusieurs indéterminations : au numérateur ainsi qu'au dénominateur, une indétermination du type « $\infty - \infty$ » apparaissent.

MÉTHODE

L'idée que nous choisissons ici est de factoriser au numérateur et au dénominateur par un même facteur dans le but de simplifier le quotient.

- $$\begin{aligned} \sqrt{e^x+2}-2x &= \sqrt{e^x\left(1+2e^{-x}\right)}-2x \\ &= e^{x/2}\sqrt{1+2e^{-x}}-2x \\ &= e^{x/2}\left[\sqrt{1+2e^{-x}}-2xe^{-x/2}\right] \\ &= e^{x/2}\left[\sqrt{1+2e^{-x}}-4\times\frac{x}{2}e^{-x/2}\right]. \end{aligned}$$

- $$xe^x - \sqrt{x} = e^{x/2}\left[xe^{x/2} - \frac{\sqrt{x}}{e^{x/2}}\right]$$

$$= e^{x/2}\left[xe^{x/2} - \sqrt{\frac{x}{e^x}}\right] \text{ car } e^{x/2} = \left(e^x\right)^{1/2} = \sqrt{e^x}.$$

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{e^x+2}-2x}{xe^x-\sqrt{x}} = \frac{\cancel{e^{x/2}}\left[\sqrt{1+2e^{-x}} - 4\times\frac{x}{2}e^{-x/2}\right]}{\cancel{e^{x/2}}\left[xe^{x/2} - \sqrt{\frac{x}{e^x}}\right]}$$

Or,

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}e^{-x/2}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0\,;$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+2e^{-x}} = \sqrt{1} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\,;$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x/2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\times\frac{x}{2}e^{x/2} = \lim\limits_{X\to+\infty} 2Xe^X = +\infty\,;$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{e^x}} = 0.$

Ainsi, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur tend vers $+\infty$ et donc,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{e^x+2}-2x}{xe^x-\sqrt{x}} = 0.$$

15 Avec une exponentielle

Énoncé p. 51

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Nous avons ici une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » donc il nous faut la lever en utilisant par exemple un taux d'accroissement.

Posons $f(x) = e^{5x}$. On a $f(0) = 1$ et $f'(x) = 5e^{5x}$, donc $f'(0) = 5$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 5.$$

16 Limites à droite et à gauche

Énoncé p. 51

Lycée Carnot, Paris

$f(x) = \frac{2x-5}{x^2+3x-4}$. Regardons les limites à droite et à gauche de 1 de cette fonction.

- $\lim\limits_{x\to 1}(2x-5) = 2-5 = -3.$

CORRIGÉS

- Le polynôme x^2+3x-4 admet pour racine évidente $x_1=1$. Le produit des racines de ax^2+bx+c étant égal à $\frac{c}{a}$, on a ici : $x_1x_2=\frac{-4}{1}$, donc la deuxième racine est $x_2=-4$.
  On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

  On a alors :
  $$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}(x^2+3x-4)=0^- \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}(x^2+3x-4)=0^+.$$
  On en déduit alors, par quotient (n'oublions pas que le numérateur tend vers -3) :
  $$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty.$$

17 Fractions rationnelle et irrationnelle

Énoncé p. 51

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{2x-4}$.

Remarquons avant tout que 2 est une racine de $2x^2-3x-2$ donc ce dernier peut se factoriser par $(x-2)$:
$$2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{2x-4}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+1)}{2(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{2x+1}{2}\\&=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

2 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Remarquons que cette limite donne une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

- Méthode 1 : nous allons utiliser un taux d'accroissement.
  Posons $f(x)=\sqrt{x^2+5}$.
  Alors, $f(2)=3$ et $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$, donc $f'(2)=\dfrac{2}{3}$.
  $$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{2}{3}.$$

- Méthode 2 : nous allons utiliser une expression conjuguée. Pour $x \neq 2$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} &= \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \times \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\\ &= \frac{x^2+5-9}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}\\ &= \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}\\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

18 Limites en un nombre réel

Énoncé p. 51

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1 On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-2) = 0^-\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x-1}{x-2} = -\infty.$$

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$.

On a donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

2 On a une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». L'expression n'est pas définie en 1, mais on remarque que pour tout x différent de 1 :
$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2$.

3 L'expression est définie en -1, il suffit de remplacer x par -1 et on obtient $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x-1} = 0$.

4 Quand x tend vers 1, le dénominateur tend vers 0. Il nous faut savoir si c'est par valeurs positives ou par valeurs négatives.
Les racines de x^2+2x-3 sont 1 et -3, et le trinôme est positif à l'extérieur des racines puisque le coefficient de x^2 est positif. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} 1-2x = -1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2+2x-3) = 0^- \\ \text{(entre les racines)}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1-2x}{x^2+2x-3} = +\infty \text{ (règle des signes).}$$

CORRIGÉS

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1-2x}{x^2+2x-3} = -\infty$. On a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

19 Diverses limites

Énoncé p. 52

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

1 Posons $f(x) = \mathrm{e}^{x-2}$. Alors, $f(2) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'(x) = \mathrm{e}^{x-2}$. Ainsi :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{e}^{x-2}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 1.$$

2 On constate que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x-3}-\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{x}-1}$ est une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

MÉTHODE

Dans le cas d'une indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ » qui ne peut pas être levée facilement, on peut poser $f(x)$ et $g(x)$ respectivement le numérateur et le dénominateur de l'expression, puis écrire cette dernière sous la forme $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \dfrac{x-a}{g(x)-g(a)}$.

Posons alors :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-3} - \mathrm{e}^{-2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x} - 1.$$

$f(1) = 0$ et $g(1) = 0$. On a bien pour tout réel $x \neq 1$:

$$\frac{\mathrm{e}^{x-3}-\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{x}-1} = \frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{x-1}{g(x)-g(1)}.$$

Or, si $f'(1)$ et $g'(1)$ existent,

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{ et } \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{g(x)-g(1)} = \frac{1}{g'(x)}.$$

On calcule donc :

- $f'(x) = \mathrm{e}^{x-3}$ donc $f'(1) = \mathrm{e}^{-2}$;
- $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $g'(1) = \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{1}{g'(1)} = 2$.

Ainsi, par produit des limites, on obtient :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x-3}-\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{x}-1} = f'(1) \times \frac{1}{g'(1)} = 2\mathrm{e}^{-2}.$$

20 Comparaison ou encadrement ?

Énoncé p. 52

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Pour tout réel $x > 0$,

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$$

donc, en multipliant par $\dfrac{x}{x^2+1}$, qui est strictement positif, on a :

$$-\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{x\cos(x)}{x^2+1} \leqslant \frac{x}{x^2+1}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\times 1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

De même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$.

Ainsi, $\dfrac{x\cos(x)}{x^2+1}$ est encadré par deux fonctions qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(x)}{x^2+1} = 0.$$

MÉTHODE

Quand une fonction est encadrée par deux autres fonctions ayant une même limite *finie*, on utilise le théorème des gendarmes.
Quand une fonction est encadrée par deux autres fonctions ayant une même limite *infinie*, on utilise le théorème de comparaison.

21 Comparaison ou encadrement ?

Énoncé p. 52

Lycée Jean Monnet, Blanquefort

MÉTHODE

Dès lors que nous devons étudier la limite d'une fonction comportant un sinus ou un cosinus, il sera très souvent utile de partir de l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \qquad \text{ou} \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 &\iff -2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2 \\ &\iff 1 \leqslant 3 + 2\sin(x) \leqslant 5 \\ &\iff \frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{3+2\sin(x)} \leqslant 1 \\ &\iff \frac{x^2}{5} \leqslant \frac{x^2}{3+2\sin(x)} \leqslant x^2. \end{aligned}$$

Les deux bornes de l'encadrement tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ donc on ne prend que la partie gauche de l'encadrement :

$$\frac{x^2}{5} \leqslant \frac{x^2}{3+2\sin(x)}$$

qui nous assure, par comparaison, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3+2\sin(x)} = +\infty$.

22 Une fonction trigonométrique

Énoncé p. 52

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

1 Pour tout réel x, $x^2 + 5 > 0$. La fonction f est alors définie pour tout réel x tel que $\sin \dfrac{1}{x}$ existe. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.

2 Pour tout réel $x \neq 0$,

$$-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1 \iff -|x| \leqslant |x|\sin\frac{1}{x} \leqslant |x|.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to0}\left(|x|\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+5\right) = 5$ donc :

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{|x|\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+5} = \lim_{x\to0} \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+5} = 0.$$

23 Limites de fonctions diverses

Énoncé p. 52

Extraits de divers sujets, 2025

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-0,2x}\right) = \lim\limits_{X\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{X}\right) = 0$ donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\mathrm{e}^{-0,2x}\right) = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}\right) = 1$.

Cette limite étant finie, cela signifie que la courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$ admet une asymptote (horizontale) d'équation $y = 1$.

2 $v(t) = 12\mathrm{e}^{-0,6t} + \dfrac{1}{0,6} \times \dfrac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}}$.

On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-0,6t}\right) = \lim\limits_{T\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{T}\right) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}}\right) = \lim\limits_{T\to+\infty} \left(\dfrac{T}{\mathrm{e}^{T}}\right) = 0$ (par croissance comparée, en posant $T = 0,6t$).

Finalement, par somme et produit,

$$\lim_{t\to+\infty} \left(12\mathrm{e}^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}}\right) = 0 + \frac{1}{0,6} \times 0 = 0.$$

3 $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)\mathrm{e}^{-5x+1}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (6x^2 + 2x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[x^2\left(6 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)\right] = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ pour tout entier naturel n non nul.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-5x+1}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{X}\right) = +\infty$ (en posant $X = -5x + 1$).

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Chapitre
3

Dérivation et convexité

Plan du chapitre

1 Dérivation des fonctions composées

Exercice type 1 — Lycée François Mauriac, Bordeaux

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$:

1 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 3}$ **2** $g(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$

Voir corrigé page 72

Définition 1

Soient u et v deux fonctions telles que :

- u est définie sur un ensemble U et prend ses valeurs dans un ensemble V,
- v est définie pour tout x de V.

On considère alors la fonction f définie sur U par :

$$f(x) = v\big[u(x)\big].$$

f est appelée une *fonction composée*, et on note :

$$f = v \circ u.$$

Exemple : soient u et v les fonctions définies par :

- $v \;:\; \begin{array}{l} [0;+\infty[\to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$
- $u \;:\; \begin{array}{l} [-1;+\infty[\to [0;+\infty[\\ x \mapsto x+1 \end{array}$

Alors,

$$f(x) = (v \circ u)(x) = v\big[u(x)\big] = \sqrt{x+1}.$$

Théorème 1 : théorème de dérivation des fonctions composées

Soit $f(x) = (v \circ u)(x)$, définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors, pour $x \in I$:

$$f'(x) = u'(x) \times v'\big[u(x)\big].$$

COURS

On en déduit alors les propriétés suivantes :

Propriétés 1

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée	Condition
e^u	$u'e^u$	
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	

Exemple : soit $f(x) = e^{x^2}$.
On peut écrire $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$.
Ainsi, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$.

Solution de l'exercice type 1

Lycée François Mauriac, Bordeaux

1 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 3}$.

f est de la forme $\sqrt{u}$ donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec :

$$u(x) = x^2 + 3x + 3 \quad ; \quad u'(x) = 2x + 3.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

2 $g(x) = (2x + 1)e^{-x}$.
g est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = e^{-x}$.
v est une fonction composée de la forme e^w donc sa dérivée est :

$$v'(x) = w'(x) \times e^{w(x)} = -1 \times e^{-x}.$$

De plus, $u'(x) = 2$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2 \times e^{-x} + (2x+1) \times \left(-1e^{-x}\right) \\ &= \left[2 + (2x+1) \times (-1)\right]e^{-x} \\ &= (2 - 2x - 1)e^{-x} \\ &= (1 - 2x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Voir énoncé page 71

2 Convexité d'une fonction

Exercice type 2 — Lycée Victor Duruy, Paris

1 Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 4x + 1.$$

2 Donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

Voir corrigé page 75

2.1 Dérivée seconde

Définition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée f'. Si f' est également dérivable sur I, la dérivée de f' sur I, notée f'', est appelée *dérivée seconde* de f.

Exemple : soit $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = \left(3x^2\right)' = 6x$.

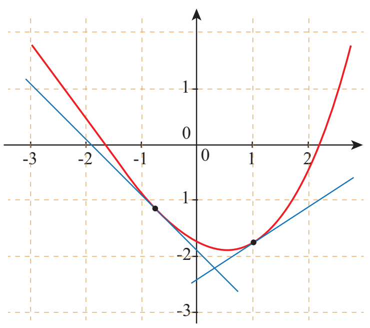
2.2 Fonction concave, fonction convexe

Définitions 3

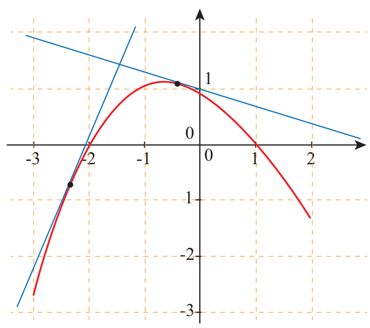
- On dit que f est *concave* sur un intervalle I si $f''(x) \leqslant$ sur I.
- On dit que f est *convexe* sur un intervalle I si $f''(x) \geqslant$ sur I.

Interprétation graphique :

- la courbe représentative d'une fonction *convexe* sur un intervalle I sera toujours *au-dessus* de ses tangentes ;
- la courbe représentative d'une fonction *concave* sur un intervalle I sera toujours *en dessous* de ses tangentes.



Fonction *convexe* sur $[-3\ ;\ 2]$



Fonction *concave* sur $[-3\ ;\ 2]$

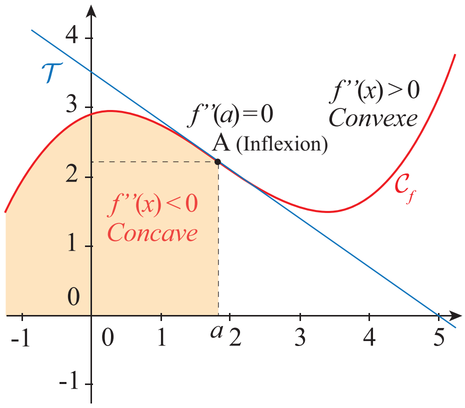
COURS

2.3 Point d'inflexion

Définition 4

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et soit $a \in I$.
On dit que le point de coordonnées $\big(a\ ;\ f(a)\big)$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

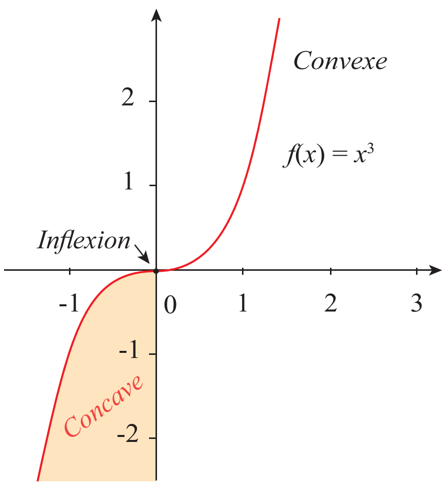
Graphiquement, cela se traduit par un changement de convexité en a.



Exemple : soit $f(x) = x^3$. Alors, $f''(x) = 6x$ et :

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$;
- $f''(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- $f''(0) = 0$.

Donc le point de coordonnées $(0\ ;\ f(0))$, c'est-à-dire l'origine du repère, est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.



Solution de l'exercice type 2

Lycée Victor Duruy, Paris

1 Pour tout réel x,

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

et

$$f''(x) = 6x.$$

On a alors :

$$f''(x) < 0 \iff x < 0,$$

donc :

- f est concave sur $\mathbb{R}_-^*$,
- f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Le point $A(0\,;\,1)$ est le seul point d'inflexion, car 0 est la seule valeur de x pour laquelle $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

Voir énoncé page 73

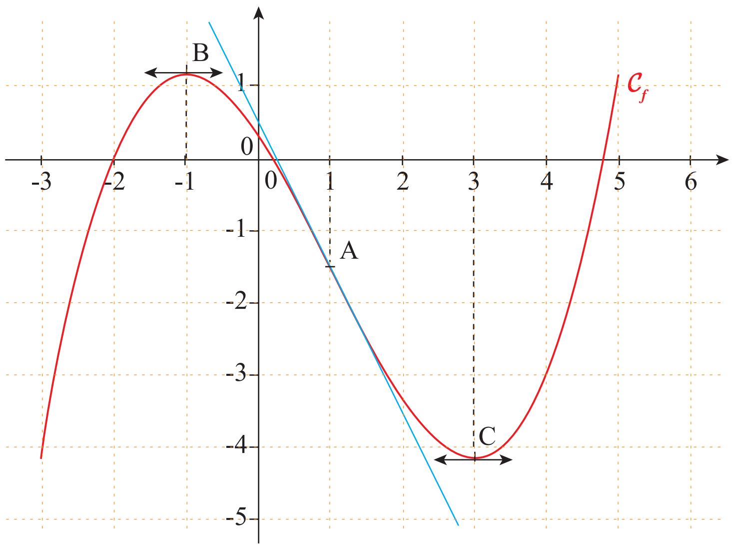
INTERROS

1 QCM Lectures graphiques

5 min

Corrigé p. 83

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[-3\,;5]$, dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



La droite bleue est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. De plus $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en B et en C. Par lecture graphique, pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

1 La fonction f est convexe sur l'intervalle :

a $[-3\,;1]$ **b** $[-1\,;5]$ **c** $[2\,;4]$

2 La courbe $\mathcal{C}_f$ admet :

a un point d'inflexion **b** trois points d'inflexion
c aucun point d'inflexion

3 La fonction dérivée f' est :

a positive ou nulle sur $[-3\,;-1]$ et $[3\,;5]$

b croissante sur $[-3\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;5]$

c admet un minimum en 3

4 La fonction dérivée seconde f'' :

a est négative lorsque $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'axe des abscisses

b est négative ou nulle pour $x \in [-1\,;3]$

c est négative sur $[-3\,;\ 0]$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

2 QCM Convexité et variations

5 min Corrigé p. 83

Pour chacune des questions suivantes, désigner la bonne réponse.

f est une fonction définie et dérivable deux fois sur un intervalle I.

1 Si la fonction f est convexe sur I, alors :

- **a** f est croissante sur I
- **b** f' est croissante sur I
- **c** f'' est croissante sur I
- **d** f est décroissante puis croissante sur I

2 Si la fonction f est concave sur I, alors :

- **a** f admet un maximum sur I
- **b** f est décroissante sur I
- **c** f' est croissante sur I
- **d** f'' est négative sur I

3 Si la courbe représentative de f admet un point d'inflexion A au point d'abscisse a de I, alors :

- **a** f admet un extremum en a
- **b** f' admet un maximum en a
- **c** f' change de signe en a
- **d** f' admet un extremum en a

3 V/F Dérivabilité

10 min Corrigé p. 83

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 La fonction racine carrée est définie donc dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

2 Si $f'(a)=0$ alors la fonction f admet un extremum en a.

3 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x-2|$ est dérivable en 2.

4 Si la fonction f est dérivable en a et la fonction g n'est pas dérivable en a alors la fonction fg n'est pas dérivable en a.

4 V/F Fonction définie par morceaux

10 min Corrigé p. 84

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=-x^2 & \text{si } x<0 \\ f(0)=1 & \\ f(x)=x^2+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1 La fonction f n'admet pas de limite en 0.

2 La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

3 La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4 Pour tout réel a, l'équation $f(x)=a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

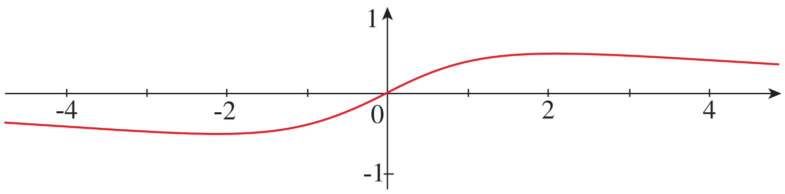
Dérivation

5 Lecture graphique

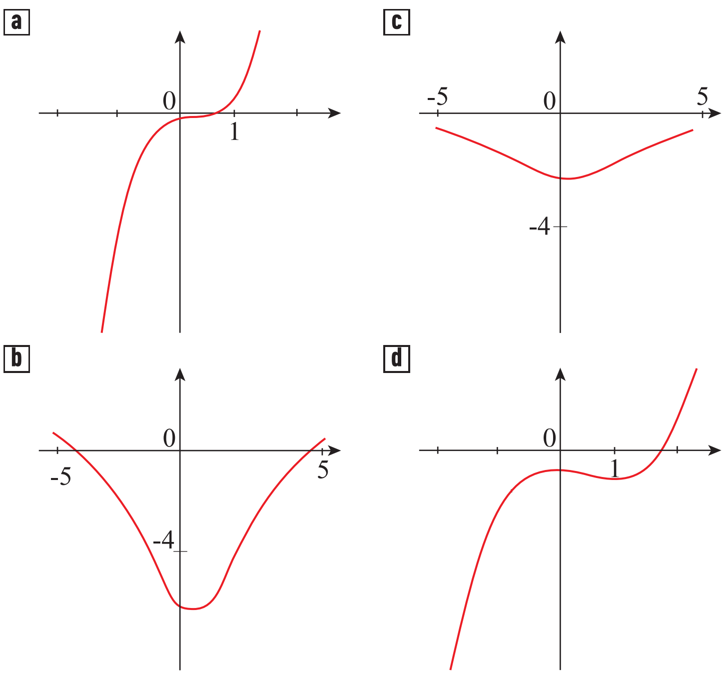
★ 10 min Corrigé p. 84

Lycée Virlogeux, Riom

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de sa dérivée f'.



1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variations de la fonction f.
2. Prouver que f admet un minimum local et donner une valeur de x pour laquelle il est atteint.
3. Parmi les courbes suivantes, quelle est (ou quelles sont) celle(s) qui pourrai(en)t représenter la fonction f ? Justifier.



6 Application des formules du cours

★★ 15 min Corrigé p. 85

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{x^2+3x+1}$, sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = (2x+3)e^{x^2+3x+1}$, sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$, sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

7 Calcul de dérivées

★★ 30 min Corrigé p. 85

Lycée Jules Ferry, Caen

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ puis calculer leur dérivée.

- $f(x) = \dfrac{3x^3-6x+5}{x^2+1}$
- $h(x) = \left(\dfrac{2x^2-5x+1}{x^2+1}\right)^4$
- $g(x) = (5x^4-2x^2+x)^3$
- $\ell(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}}$

Convexité

8 Convexité et inégalité

★ 15 min Corrigé p. 87

Cité scolaire internationale, Grenoble

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
3. **(a)** Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) En déduire que $f(0{,}0001) > 0{,}0001$.

9 Établir une inégalité

★ 15 min Corrigé p. 87

Lycée Polyvalent Adam de Craponne, Salon-de-Provence

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

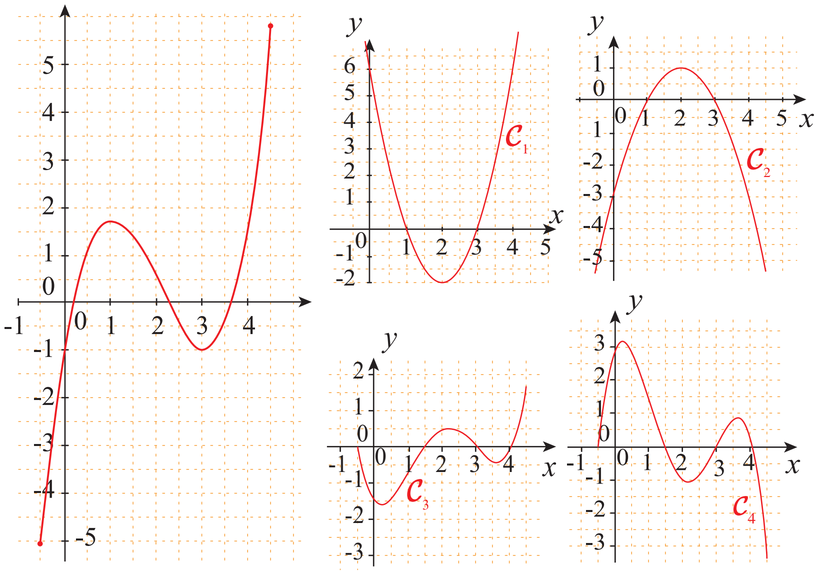
1. Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
3. Montrer alors que pour tout réel x, $e^{x^2-1} \geqslant 2x-1$.

10 Avec des représentations graphiques ★★

20 min — Corrigé p. 88

Lycée Virlogeux, Riom

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}'$ représentant la fonction dérivée d'une fonction f deux fois dérivable sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right]$, à gauche, et quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, à droite.



1 **(a)** Résoudre l'équation $f'(x) = 0$, avec la précision permise par le graphique.

(b) Indiquer le signe de $f'(x)$.

2 **(a)** Dresser le tableau de variations de f'.

(b) On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f. $\mathcal{C}$ admet-elle un (ou des) point(s) d'inflexion ? Justifier soigneusement.

3 Parmi les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, préciser (en justifiant) celle qui peut représenter la fonction f et celle qui peut représenter la fonction f''.

Études de fonctions

11 Position relative d'une tangente ★★

20 min — Corrigé p. 89

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Soit f la fonction définie sur $[0; 2[$ par $f(x) = (x-1)\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1 On considère la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + 3x - 1.$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$. On notera α la solution qui appartient à l'intervalle $[0; 2[$.

Donner alors le signe de $g(x)$ sur $[0; 2[$.

2 Calculer la limite de f en 2. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}$?

3 Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; 2[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}.$$

Étudier le sens de variation de f.

4 Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

5 Montrer que $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de sa tangente (T) sur $[0; 1[$ et sur $]1; 2[$.

12 Fonction exponentielle

★★ 60 min Corrigé p. 91

Lycée Jean Renoir, Bondy

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1 **(a)** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

(b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(c) En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}$ (courbe représentative de f).

2 Étudier les variations de f.

3 **(a)** Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point $K\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

(b) Justifier que, pour étudier la position de la tangente $\mathcal{T}$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}$, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$ où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.

(c) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

(d) Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x.

(e) En déduire la position de la tangente $\mathcal{T}$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.

4 Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

INTERROS

Objectif bac

13 Concentration de médicament

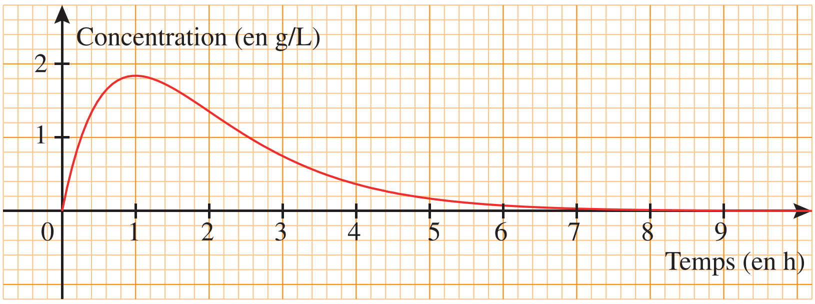
★★ 60 min

Corrigé p. 93

Extrait du baccalauréat Amérique du Sud, novembre 2025

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament. On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f. Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geqslant 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l' intervalle $[0\,;\,8]$.

Partie B : étude de la fonction

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.

1 QCM Lectures graphiques

Énoncé p. 76

1. Réponse $\boxed{\text{c}}$. En effet, sur $[2\ ;\ 4]$, $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de ses tangentes.
2. Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, un point d'inflexion est un point où la courbe traverse la tangente en ce point. Sur ce graphique, cela se réalise au point A uniquement.
3. Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, $f'(x) > 0$ sur tout intervalle où f est croissante, donc uniquement sur $[-3\ ;\ -1]$ et sur $[3\ ;\ 5]$.
4. Réponse $\boxed{\text{c}}$. En effet, sur $[-3\ ;\ 0]$, la fonction est concave car $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de ses tangentes, donc $f''(x)$ y est négative.

2 QCM Convexité et variations

Énoncé p. 77

1. Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, sur I, si f est convexe alors $f''(x) > 0$ sur I, ce qui signifie que f' est croissante.
2. Réponse $\boxed{\text{d}}$. En effet, d'après la définition d'une fonction concave, si f est concave sur I alors $f''(x) < 0$ sur I.
3. Réponse $\boxed{\text{d}}$. En effet, si A est un point d'inflexion d'abscisse a alors $f''(x)$ change de signe en s'annulant en $x = a$; cette dernière condition signifie que f' atteint un extremum en ce point.

3 V/F Dérivabilité

Énoncé p. 77

1. *Faux*. La fonction racine carrée est bien définie sur $[0\ ;+\infty[$ mais elle n'est pas dérivable en 0.
2. *Faux*. La fonction f n'admet un extremum en a que si sa dérivée s'annule en changeant de signe en a. Ainsi la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ a sa dérivée qui s'annule en 0 puisque, pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2$. Cependant, elle n'admet pas d'extremum en 0.
3. *Faux*. Pour $x \neq 2$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

   Pour $x > 2$,
   $$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$$
   et pour $x < 2$,
   $$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1.$$
   Les deux limites n'étant pas égales, la fonction $x \mapsto |x-2|$ n'est pas dérivable en 2.

CORRIGÉS

4 *Faux*. Pour s'en convaincre, on peut prendre $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = x$. La fonction g n'est pas dérivable en 0 alors que la fonction f l'est. La fonction fg définie pour tout réel x positif par $(fg)(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 et $(fg)'(0) = 0$.

4 V/F Fonction définie par morceaux

Énoncé p. 77

1 *Vrai*. On a :

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$.

Les deux limites n'étant pas égales, f n'admet pas de limite en 0.

2 *Faux*. D'après la question précédente, f n'est pas continue en 0 donc elle n'est pas dérivable en 0 (voir chapitre suivant).

3 *Vrai*. En effet,

- si $x < 0$, $f'(x) = -2x$ donc f' est strictement positive sur $]-\infty\,;0[$;
- si $x > 0$, $f'(x) = 2x$ donc f' est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$.

De plus, pour tout x non nul, $-x^2 < 1 < x^2 + 1$, donc si $x < 0$, on a $f(x) < f(0)$ et si $x > 0$, on a aussi $f(0) < f(x)$. Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4 *Faux*. L'équation $f(x) = a$ n'admet aucune solution pour a appartenant à l'intervalle $[0\,;1[$.

5 Lecture graphique

Énoncé p. 78

Lycée Virlogeux, Riom

1 La dérivée est négative sur $\mathbb{R}_-$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$;
la dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2 D'après la question précédente, la fonction admet un minimum en 0.

3 La dérivée est négative sur $\mathbb{R}_-$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$;
la dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Ceci élimine les courbes $\boxed{\text{a}}$ et $\boxed{\text{d}}$.

On voit que $f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, donc que la pente de la tangente à la courbe va diminuer quand x augmente, elle doit déjà être faible pour $x = 4$ (environ 0,5).

C'est donc la courbe $\boxed{\text{c}}$ qui convient.

6 Application des formules du cours

Énoncé p. 79

Lycée François Mauriac, Bordeaux

1 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+1}$. f est une fonction de la forme e^u, avec :

$$u(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Ainsi,

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$$
$$f'(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x+1}.$$

2 $g(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x+1} = (2x+3)f(x)$, où f est la fonction de la question précédente.

g est un produit de la forme $u \times f$, avec $u(x) = 2x+3$, donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)f(x) + u(x)f'(x) \\ &= 2\mathrm{e}^{x^2+3x+1} + (2x+3) \times (2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x+1} \\ &= \left[2 + (2x+3)^2\right]\mathrm{e}^{x^2+3x+1} \\ &= (4x^2+12x+11)\mathrm{e}^{x^2+3x+1}. \end{aligned}$$

3 $h(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$. h est une fonction de la forme $\sqrt{u}$ avec :

$$u(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

et

$$u'(x) = \frac{2(x+3) - 1(2x-1)}{(x+3)^2}$$
$$u'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}.$$

donc : $$h'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{7}{(x+3)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}}$$
$$= \frac{7\sqrt{x+3}}{2(x+3)\left(\sqrt{x+3}\right)^2\sqrt{2x-1}}$$
$$= \frac{7}{2(x+3)\sqrt{(x+3)(2x-1)}}.$$

7 Calcul de dérivées

Énoncé p. 79

Lycée Jules Ferry, Caen

1 La fonction f est une fonction rationnelle, donc est dérivable sur son ensemble de définition. Or, pour tout réel x, on a $x^2 + 1 > 0$, de sorte que $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

Pour calculer la dérivée de f, on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec :

$$u(x) = 3x^3 - 6x + 5 \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 + 1.$$

D'où :

$$u'(x) = 9x^2 - 6 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x.$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(9x^2 - 6)(x^2 + 1) - 2x(3x^3 - 6x + 5)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 15x^2 - 10x - 6}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

2 La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme et d'une fonction puissance. On a :

$$g'(x) = 3(20x^3 - 4x + 1)(5x^4 - 2x^2 + x)^2.$$

3 La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction rationnelle et d'une fonction puissance.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4\left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1}\right)^3 \left(\frac{(4x - 5)(x^2 + 1) - (2x^2 - 5x + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}\right) \\ &= 4\left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1}\right)^3 \left(\frac{5x^2 + 2x - 5}{(x^2 + 1)^2}\right) \\ &= \frac{4(2x^2 - 5x + 1)^3(5x^2 + 2x - 5)}{(x^2 + 1)^5}. \end{aligned}$$

Remarque : sous cette forme, on pourra trouver le signe de $h'(x)$, ce qui est le but quand on calcule une dérivée.

4 La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $[1\,;+\infty[$, donc dans $\mathbb{R}_+^*$. Or, $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, cette dernière fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2 + 1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.

Posons $G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Alors :

$$G'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Or, $\ell = \sqrt{G}$, donc $\ell'(x) = \dfrac{G'(x)}{2\sqrt{G(x)}}$.

Soit :

$$\ell'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{\sqrt{x^2+1}}}.$$

8 Convexité et inégalité

Énoncé p. 79

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 Pour tout réel x : $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

$$f"(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x.$$

2 $f"(x) > 0 \iff x > -2$.

Par conséquent, f est concave sur $]-\infty\,;-2[$ et convexe sur $]-2\,;+\infty[$.

3 **(a)** L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :
$y = f'(0)x + f(0)$, donc $y = x$.

(b) f est convexe sur $]-2\,;+\infty[$. 0,0001 fait partie de cet intervalle, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, dont l'équation est $y = x$.

On a donc $f(0{,}0001) > 0{,}0001$ car à gauche se trouve l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0,0001 et à droite l'ordonnée du point de la tangente en O d'abscisse 0,0001 également.

9 Établir une inégalité

Énoncé p. 79

Lycée Polyvalent Adam de Craponne, Salon-de-Provence

1 $f(x) = e^{x^2-1}$ est de la forme e^u avec :

$$u(x) = x^2 - 1 \qquad ; \qquad u'(x) = 2x.$$

Ainsi,

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = 2xe^{x^2-1}.$$

f' est de la forme $u \times v$ avec :

$u(x) = 2x$ $\qquad$ $v(x) = e^{x^2-1}$
$u'(x) = 2$ $\qquad$ $v'(x) = 2xe^{x^2-1}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= 2e^{x^2-1} + 2x \times 2xe^{x^2-1} \\ &= (2+4x^2)e^{x^2-1}. \end{aligned}$$

Or, $2 + 4x^2 > 0$ et $e^{x^2-1} > 0$ sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

2 L'équation de la tangente (T_1) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est donnée par la formule du cours vue en Première :

$(T_1)\ :\ y = f'(1)(x-1)+f(1)$, avec $f(1) = \mathrm{e}^{1^2-1} = 1$ et $f'(1) = 2$.

On obtient alors :

$$(T_1)\ :\ y = 2(x-1)+1$$

soit :

$$(T_1)\ :\ y = 2x-1.$$

3 f est convexe sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de ses tangentes, y compris (T_1). Cela se traduit par l'inégalité :

$$f(x) \geqslant 2x-1$$

et donc :

$$\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 2x-1.$$

10 Avec des représentations graphiques

Énoncé p. 80

Lycée Virlogeux, Riom

1 **(a)** L'équation $f'(x) = 0$ a trois solutions a, b et c.
$a \approx 0{,}2$; $b \approx 2{,}2$ et $c \approx 3{,}6$.

(b) $f'(x) > 0$ si x appartient à $]a\,;b[\cup \left]c\,;\dfrac{9}{2}\right]$, et $f'(x) < 0$ si x appartient à $\left[-\dfrac{1}{2}\,;a\right[\cup]b\,;c[$.

2 **(a)** Dans le tableau de variations de f' suivant, on a rajouté le signe de $f''(x)$, f'' étant la fonction dérivée de la fonction f'.

x	$-\frac{1}{2}$		1		3		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) D'après le tableau de signes de f'', f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 1$ et $x = 3$. Il y a donc deux points d'inflexion d'abscisses 1 et 3.

3 D'après la question 1.b., f' est négative, puis positive, puis négative, puis positive.

Donc f doit être décroissante jusqu'à a, croissante entre a et b, décroissante entre b et c puis finalement croissante.

C'est la courbe $\mathcal{C}_3$ qui convient.

Quant à f'', elle doit être positive jusqu'à 1, négative entre 1 et 3, puis à nouveau positive.

C'est la courbe $\mathcal{C}_1$ qui convient.

11 Position relative d'une tangente

Énoncé p. 80

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

1 $g(x) = -x^2 + 3x - 1$ est un polynôme de degré 2, dont le discriminant est :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 5 > 0$$

donc il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin [0;2[\qquad \text{et} \qquad x_2 = \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in [0;2[.$$

On en déduit alors le tableau de signes suivant :

x	0		α		2
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2 $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (2-x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \sqrt{\dfrac{x}{2-x}} = +\infty$.
De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (x-1) = 1 > 0$ donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = +\infty$.
On peut alors en déduire que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}$.

3 $f(x) = a(x) \times b(x)$, avec $a(x) = (x-1)$ et $b(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

- $a'(x) = 1$.
- $b(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = \dfrac{x}{2-x}$ et :

$$u'(x) = \frac{1(2-x) - x \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} b'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{2}{(2-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\ &= \frac{1}{(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

- On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a'(x)b(x) + a(x)b'(x) \\
&= 1 \times \sqrt{\frac{x}{2-x}} + (x-1) \times \frac{1}{(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\
&= \frac{(2-x)^2 \times \frac{x}{2-x} + x - 1}{(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\
&= \frac{(2-x)x + x - 1}{(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\
&= \frac{-x^2 + 3x - 1}{(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\
&= \frac{g(x)}{(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$, d'où le tableau suivant :

x	0		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖
f		$\searrow$		$\nearrow$	‖

4 L'équation réduite de (T) est :

$$\begin{aligned}
& y = f'(1)(x-1) + f(1) \\
\iff\ & y = 1(x-1) + 0 \\
\iff\ & y = x - 1.
\end{aligned}$$

5 **MÉTHODE**

On peut aborder cette question de deux manières :

- Si on démontre que f est convexe sur $[0; 2[$, alors cela signifie que toutes les tangentes à $\mathcal{C}$ sont en dessous de $\mathcal{C}$ sur cet intervalle, y compris (T).
- Si on démontre que, sur $[0; 1[\cup]1; 2[$, $f(x) - (x-1) > 0$ alors cela signifie que $\mathcal{C}$ est au-dessus de (T) sur cette union d'intervalles.

Nous allons ici opter pour la seconde méthode car étudier la convexité de f s'avère bien plus compliqué que d'étudier le signe de $f(x) - (x-1)$.

En effet, pour tout réel $x \in]0; 1[\cup]1; 2[$,

$$\begin{aligned}
f(x) - (x-1) &= (x-1)\sqrt{\frac{x}{2-x}} - (x-1) \\
&= (x-1)\left[\sqrt{\frac{x}{2-x}} - 1\right] \\
&= (x-1)\frac{\left[\sqrt{\frac{x}{2-x}} - 1\right]\left[\sqrt{\frac{x}{2-x}} + 1\right]}{\sqrt{\frac{x}{2-x}} + 1} \\
&= (x-1)\frac{\frac{x}{2-x} - 1}{\sqrt{\frac{x}{2-x}} + 1} \\
&= \frac{\frac{2(x-1)^2}{2-x}}{\sqrt{\frac{x}{2-x}} + 1}.
\end{aligned}$$

Pour tout réel $x \in]0; 1[\cup]1; 2[$, $\dfrac{2(x-1)^2}{2-x} > 0$ et le dénominateur de la fraction aussi ; le quotient obtenu est alors bien strictement positif sur $]0; 1[\cup]1; 2[$. Donc sur cette union d'intervalles, $\mathcal{C}$ est au-dessus de (T).

12 Fonction exponentielle

Énoncé p. 81

Lycée Jean Renoir, Bondy

1 **(a)** D'après les limites du cours, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Il en résulte que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

(b) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1} = 1.$$

> **MÉTHODE**
>
> Pour lever une indétermination du type « infini sur infini », on factorise le terme dominant au numérateur et au dénominateur puis on simplifie.
> On a donc factorisé les deux termes du quotient par e^x puis on a simplifié par e^x.

(c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, on en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

CORRIGÉS

De même, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $-\infty$.

2 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

soit, après avoir effectué les produits et simplifié,

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

On en déduit que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$, et, par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 **(a)** La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point K a pour équation :

$$y = f'(0)x + f(0)\ ,$$

soit $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

(b) La position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par le signe de la différence $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$ soit le signe de :

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^x}{1+e^x} - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right).$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2e^x - x - xe^x - 2}{4(1+e^x)}.$$

Le dénominateur de $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$ étant strictement positif sur $\mathbb{R}$, $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$ est du signe de son numérateur soit $g(x)$.

(c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les opérations sur les fonctions dérivables et, pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = 2e^x - e^x - xe^x - 1 = e^x - xe^x - 1.$$

La fonction g' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les opérations sur les fonctions dérivables et, pour tout réel x, on a :

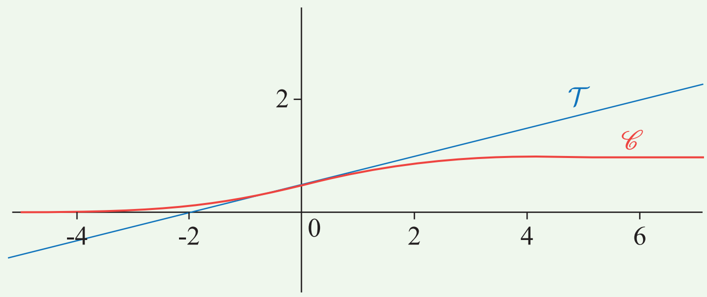
$$g''(x) = -xe^x.$$

(d) La quantité $g''(x)$ est du signe contraire de x donc elle est positive sur $]-\infty\ ; 0]$ et négative sur $[0\ ; +\infty[$
On en déduit que la fonction g' est croissante sur $]-\infty\ ; 0]$ et décroissante sur $[0\ ; +\infty[$

Or, $g'(0) = 0$. Donc la fonction g admet un maximum en 0 et ce maximum vaut 0. On peut donc en déduire que g' est négative sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0.
Il en résulte que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Or, $g(0) = 0$. On peut donc en déduire que g est positive sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et négative sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(e) D'après les résultats des trois questions précédentes, on peut conclure : La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente $\mathcal{T}$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et en dessous sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4 La courbe $\mathcal{C}$ et la tangente $\mathcal{T}$ sont représentées sur le graphique ci-dessous.



13 Concentration de médicament

Énoncé p. 82

Extrait du baccalauréat Amérique du Sud, novembre 2025

Partie A

1 Il s'est passée une heure entre l'instant de l'ingestion du médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle. En effet, le maximum de la fonction est atteint pour $t = 1$.

2 $f(t) \geqslant 1 \iff t \in [0{,}25;\ 2{,}5]$.

3 La convexité de la fonction f sur l' intervalle $[0\,;\,8]$:

- f semble *concave* sur $[0;\ 2]$;
- f semble *convexe* sur $[2;\ 8]$.

Partie B

1 On peut écrire $f(t)$ sous la forme : $f(t) = 5 \times \dfrac{t}{e^t}$. Or, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que la concentration de médicament dans le sang tend à disparaître au fil du temps.

2 Pour étudier les variations de f, nous pouvons déterminer le signe de sa dérivée. $f = u \times v$ avec :

$$\begin{aligned} u(t) &= 5t & \qquad u'(t) &= 5 \\ v(t) &= \mathrm{e}^{-t} & \qquad v'(t) &= -\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(t) &= (u'v + uv')(t) \\ &= 5\mathrm{e}^{-t} - 5t\mathrm{e}^{-t} \\ &= 5(1-t)\mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

$f'(t)$ est du signe de $(1-t)$ car $5 > 0$ et $\mathrm{e}^{-t} > 0$.

$$\begin{aligned} f'(t) \geqslant 0 &\iff 1 - t \geqslant 0 \\ &\iff t \leqslant 1. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$			$5\mathrm{e}^{-1}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

$f(1) = 5 \times 1 \times \mathrm{e}^{-1}$

Chapitre 4

Continuité

Plan du chapitre

1 Notion de continuité

Exercice type 1 — Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{3}{4} & \text{pour } x = 1 \end{cases}$$

f est-elle continue en 1 ?

Voir corrigé page 98

1.1 Continuité en un point a

Définitions 1

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que f est *continue* en a si :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I.

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative d'une fonction continue sur I peut se tracer sans lever le crayon sur cet intervalle.

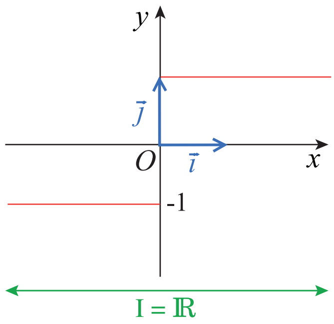
Exemple et contre-exemple : la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

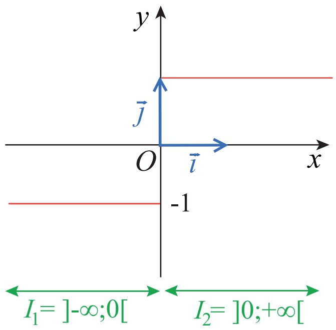
n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Voir illustrations page suivante.

COURS



Il y a un « trou » au niveau de $x = 0$ donc la fonction n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $\mathbb{R}$.



Il n'y a pas de trou sur chaque intervalle I_1 et I_2 donc la fonction est continue sur I_1 et sur I_2.

Définition 2

On appelle *point de discontinuité* tout point en lequel une fonction n'est pas continue.

Exemple : le point d'abscisse $x = 0$ est un point de discontinuité de la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1.2 Fonctions continues de référence

Propriétés 1

- Les fonctions *polynômes* ainsi que les fonctions *sinus* et *cosinus* sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions *rationnelles* sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur $[0\,;+\infty[$.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions obtenues par somme, produit ou quotient de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Exemples

- La fonction $x \mapsto (x^2+1)\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$ est continue sur $]-\infty\,;\ 1[$ et sur $]1\,;\ +\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur ces deux intervalles.

1.3 Continuité d'une fonction composée

Propriété 2

Soit $f = v \circ u$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si u est continue sur I et si v est continue sur $u(I)$ alors f est continue sur I.

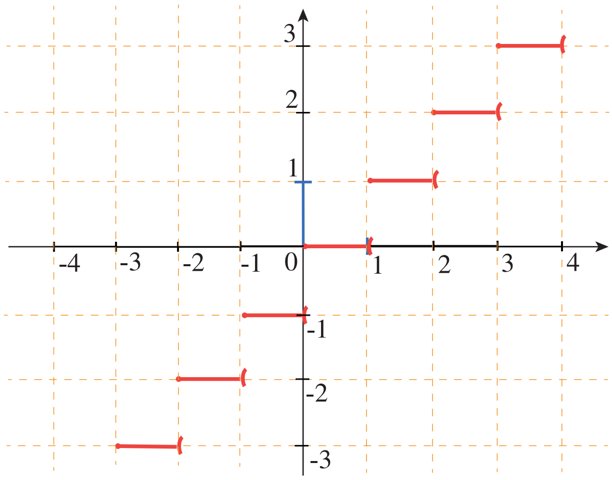
Exemple : soient $u : x \mapsto x - 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
Notons $f(x) = (v \circ u)(x) = \sqrt{x-1}$.
u est continue sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ car $x - 1 < 0$ pour $x < 1$.
Ainsi, f est définie sur $I = [1\,;\,+\infty[$, et elle est continue sur I car u est continue sur I et v est continue sur $u(I) = [0\,;\,+\infty[$.

1.4 Fonction définie et fonction continue

Une fonction peut être définie sur un intervalle I sans nécessairement être continue sur I.

Exemple : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E(x) = \lfloor x \rfloor.$$



Cette fonction est appelée *fonction partie entière* : pour tout entier relatif n,

$$\forall\, x \in [n\,;\,n+1[, \quad f(x) = n.$$

Cette fonction est définie en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

1.5 Dérivabilité et continuité

Théorème 1

Si f est une fonction définie et dérivable en a alors elle est continue en a.

COURS

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0 car :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +1.$$

Solution de l'exercice type 1

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

Pour savoir si la fonction f est continue en 1, on détermine sa limite quand x tend vers 1 et on compare le résultat à $f(1)$.
Avec l'expression donnée initialement, le calcul de la limite mène à une indétermination du type « $\frac{0}{0}$ ».

MÉTHODE

Pour un réel a fini, quand on calcule $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, où il y a une racine carrée dans $f(x)$, et que cela donne une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ », une méthode consiste à multiplier et diviser par une *expression conjuguée*.

Il y a une racine carrée au numérateur, donc on va multiplier et diviser par l'expression conjuguée de ce dernier (expression identique sauf que l'on change de signe au milieu).

$$\begin{aligned}\forall x \neq 1,\ f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+x+2}+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} \\ &= \frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}.\end{aligned}$$

En factorisant x^2+x-2 en $(x-1)(x+2)$ puis en simplifiant par $x-1$, on obtient finalement :

$$\forall x \neq 1,\ f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2}.$$

Donc,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1+2}{\sqrt{1^2+1+2}+2} = \frac{3}{4}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, il en résulte que la fonction f est continue en 1.

Voir énoncé page 95

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice type 2 — **Lycée François Mauriac, Bordeaux**

Montrer que l'équation :

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = 0$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée au dixième.

Voir corrigé page 100

Théorème 2 : théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

À RETENIR

Ce théorème assure, sous certaines hypothèses, l'existence d'*au moins un* antécédent à k, mais il n'assure pas son unicité et ne permet pas de le calculer.

Théorème 3 : corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a\ ;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a\ ;b]$.

Remarque : cette propriété peut aussi s'appliquer lorsque a ou b sont infinis à condition que k ne prenne pas la valeur d'une limite.

Exemple : soit $f(x) = \cos x - x$. Alors, $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
De plus,

- $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$
- $f(\pi) = \cos \pi - \pi = -1 - \pi < 0$

donc $0 \in]f(\pi)\ ;\ f(0)[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ \pi]$.

COURS

Solution de l'exercice type 2

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Posons $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$.

On a alors :

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 1.$$

Le discriminant de $f'(x)$ est :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 6 \times 1 = -20 < 0$$

donc $f'(x)$ n'admet aucune racine et $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi,

- f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et 0 est une valeur intermédiaire entre $-\infty$ et $+\infty$.

D'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), il existe une unique valeur réelle α telle que $f(\alpha) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

À l'aide du tableur de la calculatrice, par exemple, on trouve :

$$f(-0{,}9) = -0{,}168 \qquad \text{et} \qquad f(-0{,}8) = 0{,}536.$$

Par conséquent,

$$-0{,}9 < \alpha < -0{,}8.$$

Voir énoncé page 99

1 V/F Continuité en un point

5 min Corrigé p. 107

Les affirmations suivantes sont-elles *vraies* ou *fausses* ? Justifier.

1 La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 3 & \text{sur }]-\infty\,;1[\\ -4x+7 & \text{sur } [1\,;+\infty[\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

2 La fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{sur }]-\infty\,;0[\\ \mathrm{e}^{-x} & \text{sur } [0\,;+\infty[\end{cases}$$

est continue en 0.

3 La fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

2 V/F Continuité et monotonie

15 min Corrigé p. 107

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour chaque affirmation, dire, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

1 Si f change de signe sur I alors f s'annule sur I.

2 Si :

- $I = [a\,;b]$,
- $f(a) \times f(b) > 0$,
- f est continue sur I,

alors f ne s'annule pas sur I.

3 Si f s'annule une seule fois sur I et si f est strictement monotone alors f est continue sur I.

4 Si f s'annule une seule fois sur I et f est continue sur I alors f est strictement monotone sur I.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

INTERROS

Continuité en un point

3 Fonction définie par trois morceaux ★ 10 min Corrigé p. 108

Lycée Saint-Joseph de Tivoli, Bordeaux

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{pour } x \leqslant 0 \\ \sqrt{5x+1} & \text{pour } 0 < x \leqslant 3 \\ x + 1 & \text{pour } x > 3 \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4 Trouver un paramètre ★★ 10 min Corrigé p. 108

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} \text{ pour } x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il donner à m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire

5 Localisation de racines ★ 10 min Corrigé p. 109

Lycée Chaptal, Paris

Démontrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet une solution α unique sur $[0\,;\,1]$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut.

6 Étude d'une équation ★ 15 min Corrigé p. 110

Lycée Vieljeux, La Rochelle

On considère la fonction f définie sur $\left[-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2x-1} - \sqrt{x+1}.$$

Étudier les variations de f et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α, puis prouver que $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$.

7 Existence ou unicité

★★ 20 min Corrigé p. 110

Lycée La Bruyère, Versailles

1 *Question de cours.*

On suppose connu le théorème des valeurs intermédiaires.

Démontrer que si une fonction f continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ vérifie $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[a\ ;\ b]$.

2 *Application.*

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 2$ et $f(6) = -1$.

Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire de l'existence et du nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 6]$? Justifier les réponses.

(a) f est continue sur $[0\ ;\ 6]$.
(b) f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 6]$.
(c) f est continue et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 6]$.

8 Point d'inflexion et tangente

★★ 20 min Corrigé p. 111

Cité scolaire internationale, Grenoble

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Soit $f(x) = (x+2)e^{-x}$ définie sur $I = [-2\ ;\ 4]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On nomme A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives -1 et 0.

1 Donner les coordonnées exactes de A et B.

2 Étudier les variations de f sur I.

3 Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions a et b dans I. Donner les valeurs arrondies à 10^{-2} de a et b.

4 Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f. On indiquera les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

5 Donner l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$ au point B.

6 Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur I.

7 Résoudre l'inéquation $f(x) < -x + 2$.

9 Avec un programme

★★★ 25 min Corrigé p. 112

Lycée François Couperin, Fontainebleau

On considère la fonction définie sur $I = [-10\ ;\ 10]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3.$$

1 Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur I.

2 **(a)** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-10\,;\,10]$ notée a.

(b) Encadrer a par deux entiers relatifs consécutifs.

3 On considère le programme Python suivant :

```python
def f(x):
    return x**3 - 3*x**2 + x + 3

def dicho(a,b,d):
    if a > b: a,b = b,a

    while b-a > d:
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 0: b = m
        else: a = m

    return a,b
```

(a) Exécuter pas à pas le programme lorsque $a = -1$, $b = 0$ et $d = 0{,}1$ en remplissant le tableau suivant.

On arrondira les résultats au centième à chaque étape.

Quelles seront alors les valeurs de a et b en sortie ?

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5
a	-1				
b	0				
m					
$f(m)$					
Signe de $f(m)$					

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

(c) Expliquer, par exemple à l'aide d'un graphique, le rôle du « Si » dans cet algorithme.

4 Donner une valeur approchée de a à 10^{-3} près en utilisant la calculatrice.

5 En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Objectif bac

10 Point d'inflexion et vitesse

★★ 30 min Corrigé p. 114

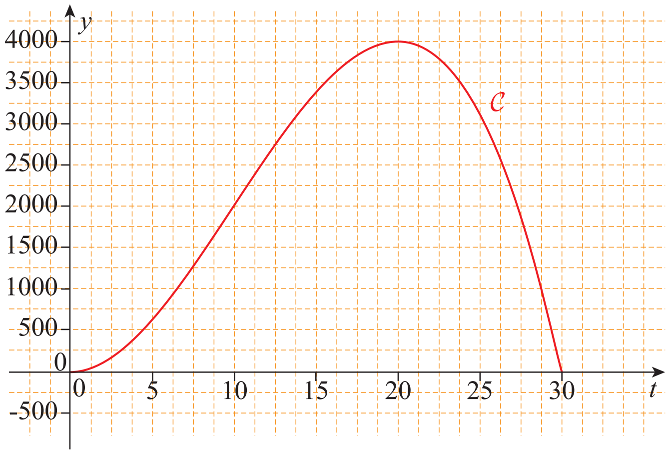
Lycée Virlogeux, Riom

Une épidémie a frappé les habitants d'une ville.

Partie A : lectures graphiques

La courbe $\mathcal{C}$ suivante représente le nombre de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en jours, depuis le début de la maladie.

La vitesse de propagation de la maladie au jour t est assimilée au nombre dérivé de la fonction au jour t.



On expliquera les réponses.

1 Donner les jours où il y a 2 000 malades.

2 Donner le jour où le nombre de malades est maximal. Quel est alors le nombre de malades ?

3 Estimer le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus grande.

Partie B : étude théorique

Le nombre de personnes malades en fonction du temps t, en jours, peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\,;30]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 30t^2.$$

1 Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations sur I.

2 **(a)** Déterminer le nombre de solutions sur I de l'équation $f(t) = 2\,000$.

(b) Déterminer un encadrement à l'entier près de la solution non entière.

3 (a) Calculer $f''(t)$.

(b) Étudier le sens de variations de la fonction dérivée f'.
En déduire la convexité de la fonction f.

(c) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet sur I un unique point d'inflexion.

(d) En donner une signification concrète.

(e) Calculer la vitesse de propagation le 10e jour.

1 V/F Continuité en un point

Énoncé p. 101

1 L'affirmation est *vraie*.

En effet, sur $]-\infty\ ;\ 1[$ et sur $]1\ ;\ +\infty[$, f est définie par deux fonctions affines, donc continues sur leurs intervalles respectifs.

De plus,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1} (6x-3) = 6\times 1 - 3 = 3$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to 1} (-4x+7) = -4\times 1 + 7 = 3.$$

Les deux limites étant égales, f est continue en 1.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 L'affirmation est *vraie*. En effet, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = \lim_{x\to 0} (x-1)^2 = 1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Les deux limites étant égales, g est continue en 0.

3 L'affirmation est *fausse*. En effet, pour tout réel $x \neq 1$,

$$h(x) = \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(2x-3)} = \frac{x-2}{2x-3}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \frac{1-2}{2\times 1-3} = \frac{-1}{-1} = 1 \neq h(1).$$

La fonction h n'est donc pas continue en 1.

2 V/F Continuité et monotonie

Énoncé p. 101

1 *Faux*. Contre-exemple : $f(x) = 2$ pour $x < 0$ et $f(x) = -5$ pour $x \geqslant 0$.

2 *Faux*. Prenons par exemple $I = [-2\ ;\ 2]$ et $f(x) = x^2 - 1$. Alors, $f(2)f(-2) = 9$, f est continue car c'est une fonction polynôme, mais $f(1) = 0$.

3 *Faux*. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pour $x < 1$ et $f(x) = x+1$ pour $x \geqslant 1$. Cette fonction est strictement monotone mais n'est pas continue en 1.

4 *Faux*. $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = (x-2)^2$. Cette fonction ne s'annule que pour $x = 2$, elle est continue sur I, mais elle est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$, donc non monotone.

CORRIGÉS

3 Fonction définie par trois morceaux

Énoncé p. 102

Lycée Saint-Joseph de Tivoli, Bordeaux

Notons avant tout que :

- $x \mapsto x^2 + x + 1$ est continue sur $]-\infty; 0]$ comme fonction polynôme ;
- $x \mapsto \sqrt{5x+1}$ est continue sur $]0; 3[$ comme composée de deux fonctions définies et continues sur cet intervalle ;
- $x \mapsto x + 1$ est continue sur $]3; +\infty[$.

Nous devons donc nous pencher sur la continuité de f en $x = 0$ et $x = 3$.

- En 0 :
$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{5x+1} = \sqrt{5\times 0+1} = 1 \end{cases}$$
Donc f est continue en 0.

- En 3 :
$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = f(3) = \sqrt{5\times 3+1} = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x+1) = 3 + 1 = 4 \end{cases}$$
Donc f est continue en 3.

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$.

4 Trouver un paramètre

Énoncé p. 102

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Notons avant tout que la fonction :
$$x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$
est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme la composée des fonctions :
$$u : x \mapsto \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto 1 + x^2$$
où u est continue sur $\mathbb{R}_+$ et v est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives.

Ainsi, la fonction :
$$x \mapsto 1 - \sqrt{1+x^2}$$
est continue sur $\mathbb{R}$, et f est alors continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (comme quotient par 0 d'une fonction continue).

Il ne reste plus qu'à vérifier la continuité de f en 0. Pour cela, on calcule la limite de $\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$ en 0.

Cette limite donne lieu à une indétermination du type « $\frac{0}{0}$ » que nous allons lever à l'aide d'une expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\\ &= \frac{1-(1+x^2)}{x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\\ &= \frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

Par conséquent, f est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$, pour $m = 0$.

5 Localisation de racines

Énoncé p. 102

Lycée Chaptal, Paris

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 - 5x + 1.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et :

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2+1)(x^2-1) = 5(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

Nous en retiendrons que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[0\,;1[$.

Ainsi, la fonction f est dérivable, donc continue, et est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Enfin :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(1) = -3, \quad \text{donc} \quad 0 \in [f(1)\,;f(0)].$$

On sait alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;1]$.

De plus, $f(0{,}2) = 0{,}000\,32 > 0$ et $f(0{,}3) = -0{,}497\,57 < 0$, donc α est compris entre $0{,}2$ et $0{,}3$.

Finalement, $\alpha \approx 0{,}2$ à 10^{-1} près par défaut.

CORRIGÉS

6 Étude d'une équation

Énoncé p. 102

Lycée Vieljeux, La Rochelle

La fonction f est dérivable sur $\left]-1\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ et :

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

On a donc $f'(x) < 0$ pour tout x dans $\left]-1\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $\left]-1\,;\,\frac{1}{2}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

On a de plus $f(-1) = -\frac{1}{3}$, donc f ne prend que des valeurs strictement négatives sur $\left]-1\,;\,\frac{1}{2}\right[$: donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution dans cet intervalle.

Par ailleurs, f est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

De plus,

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,,$$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

On remarque enfin que $f(1) = 1 - \sqrt{2} < 0$, donc $\alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;\,1\right[$.

7 Existence ou unicité

Énoncé p. 103

Lycée La Bruyère, Versailles

1 La fonction f est continue sur $[a\,;\,b]$. Comme $f(a)f(b) < 0$, cela signifie que l'une des valeurs est positive et l'autre négative, donc que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve donc qu'il existe au moins un réel c entre a et b tel que $f(c) = 0$. Comme f est strictement décroissante, pour tout autre réel d, si $d < c$ alors $f(d) > f(c)$ ou si $d > c$, $f(d) < f(c)$, donc $f(d)$ ne peut être nul. Cela montre qu'il existe un réel c unique dans $[a\,;\,b]$ tel que $f(c) = 0$.

2 Application : on constate que $0 \in [f(6)\,;\,f(0)]$.

(a) Si f est continue sur $[0\,;\,6]$, alors le théorème des valeurs intermédiaires prouve qu'il existe au moins une solution dans $[0\,;\,6]$ à l'équation $f(x) = 0$.

(b) Si f est strictement décroissante, il n'est pas certain qu'il y ait des solutions car f n'est pas supposée continue, par contre il y en a au plus une.

(c) Si f est continue et strictement décroissante sur $[0\,;6]$, alors d'après la question de cours, l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans $[0\,;6]$.

8 Point d'inflexion et tangente

Énoncé p. 103

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 $f(-1) = \mathrm{e}$, donc $A(-1\,;\mathrm{e})$; $f(0) = 2$, donc $B(0\,;2)$.

2 f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables et $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}(x+2) = \mathrm{e}^{-x}(-x-1)$.

$f'(x) > 0 \iff x < -1$ car e^{-x} est positif pour tout x.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	-2		-1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$6\mathrm{e}^{-4}$

3 f est continue sur I.

Sur $[-2\,;-1]$, f est strictement croissante, et 1 appartient à $\left[f(-2)\,;f(-1)\right]$. Donc, d'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[-2\,;-1]$.

Sur $[-1\,;4]$, f est strictement décroissante, et 1 appartient à $\left[f(4)\,;f(-1)\right]$. Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[-1\,;4]$.

Donc sur I, l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions.

À la calculatrice, on obtient $a \approx -1{,}84$ et $b \approx 1{,}14$.

4 $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-x-1) - \mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$.

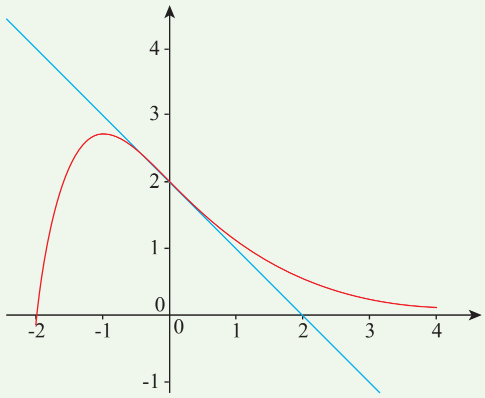
Par conséquent, f est convexe si $x > 0$ et f est concave si $x < 0$.

Le point d'inflexion est donc le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0, c'est B.

5 L'équation de la tangente en B à $\mathcal{C}$ est $y = f'(0)x + f(0)$, donc $y = -x + 2$.

CORRIGÉS

6



7 Résoudre cette inéquation revient à savoir quand $\mathcal{C}$ est sous $\mathcal{D}$. Or, d'après l'étude de convexité, $\mathcal{C}$ est sous chacune de ses tangentes pour $x < 0$. Donc pour $x \in [-2\,;0]$, $\mathcal{C}$ est sous toutes ses tangentes, donc entre autre sous la tangente en $(0\,;2)$, d'équation $y = -x + 2$.

Par contre, pour $x \in [2\,;4]$, f est convexe, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes, donc entre autre de la tangente en $(0\,;2)$.

Donc $S = [-2\,;0[$.

9 Avec un programme

Énoncé p. 103

Lycée François Couperin, Fontainebleau

1 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 = 24$. L'équation $f'(x) = 0$ a donc deux solutions :
$x_1 = \dfrac{6-\sqrt{24}}{6} = 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Dans I, le trinôme est positif à l'extérieur des racines, et négatif entre les racines.

Donc f est croissante sur $[-10\,;x_1]$ et sur $[x_2\,;10]$, et décroissante sur $[x_1\,;x_2]$.

$f(-10) = -1\,307$; $f(10) = 713$; $f(x_1) \approx 3{,}1$; $f(x_2) \approx 0{,}9$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	-10		x_1		x_2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1\,307$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	713

2 f est une fonction polynôme, elle est donc continue sur I.

Sur $[-10\,;x_1]$, f est strictement croissante et 0 appartient à $[f(-10)\,;f(x_1)]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[-10\,;x_1]$.

Sur $[x_1\,;\,10]$, $f(x)$ est positif puisque le minimum est atteint en x_2 et est environ égal à 0,9. Donc sur cet intervalle, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Il y a donc bien une solution unique sur I.

De plus $f(-1) = -2$ et $f(0) = 3$, donc en reprenant le même raisonnement, $-1 < a < 0$.

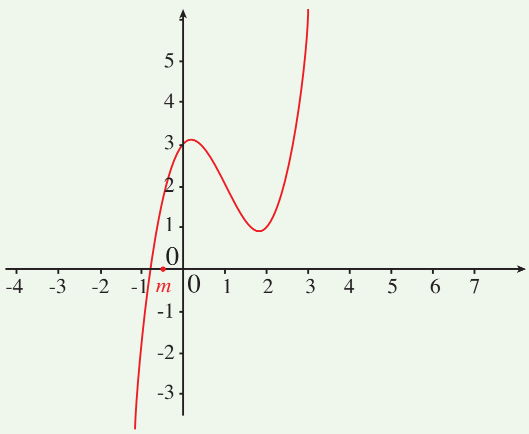
3 **(a)** Nous avons le tableau suivant :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5
a	-1	-1	-1	$-0{,}87$	$-0{,}81$
b	0	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}75$	$-0{,}75$
m	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}87$	$-0{,}81$	
$f(m)$	1,63	0,14	$-0{,}84$	$-0{,}33$	
Signe de $f(m)$	$+$	$+$	$-$	$-$	

À l'étape 5, le test $b - a > d$ est faux puisque $b - a \approx 0{,}06$.

La sortie sera donc $a = -0{,}81$ et $b = -0{,}75$.

(b) On obtient un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$ d'amplitude inférieure ou égale à 0,1.



(c) On a représenté à la question 3.b la fonction f.

Initialement, $a = -1$ et $b = 0$, donc $m = -0{,}5$.

Or, $f(-0{,}5)$ est positif, donc la nouvelle valeur de b sera $-0{,}5$: la solution de l'équation est maintenant encadrée par -1 et $-0{,}5$.

À chaque étape, l'amplitude de l'encadrement est divisé par 2.

4 Par balayage à la calculatrice, on trouve $-0{,}77 < a < -0{,}769$. Donc une valeur approchée de a à 10^{-3} près est $-0{,}770$.

5 D'après le tableau de variations de f, puisque $f(a) = 0$, $f(x)$ est négatif pour x appartenant à $[-10\,;\,a[$ et positif ensuite.

CORRIGÉS

10 Point d'inflexion et vitesse

Énoncé p. 105

Lycée Virlogeux, Riom

Partie A

1 On trace sur le graphique donné la droite d'équation $y = 2\,000$.

Il y a 2 000 malades au dixième jour, et environ au vingt-septième jour.

2 Le nombre de malades est maximal le vingtième jour, et il atteint 4 000.

3 La vitesse de propagation est la plus grande quand la pente de la tangente à la courbe est la plus élevée, puisque la vitesse de propagation est assimilée au nombre dérivé. On cherche en fait le point d'inflexion.

Il semble que ce soit aux alentours de $t = 10$, en tout cas entre 7 et 12.

Partie B

1 Pour tout $t \in I$, $f'(t) = -3t^2 + 60t = -3t(t - 20)$.

$f'(t)$ est un trinôme du second degré qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 20$, et il est négatif à l'extérieur des racines car le coefficient de t^2 est négatif. On obtient donc, sur $[0\,;30]$:

x	0		20		30
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	4 000	$\searrow$	0

2 **(a)** f est une fonction polynôme donc continue.

Sur $[0\,;20]$, f est strictement croissante et 2 000 appartient à $\big[f(0)\,;f(20)\big]$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2\,000$ admet une unique solution sur $[0\,;20]$.

Sur $[20\,;30]$, f est strictement décroissante et 2 000 appartient à $\big[f(30)\,;f(20)\big]$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2\,000$ admet une unique solution sur $[20\,;30]$.

Finalement, sur $[0\,;30]$, l'équation $f(x) = 2\,000$ admet exactement deux solutions.

(b) Vérifions que $f(10) = 2\,000$:

$f(10) = -1\,000 + 3\,000 = 2\,000$, donc la plus petite solution de l'équation $f(x) = 2\,000$ est 10, et elle est entière.

$f(27) = 2\,187$ et $f(28) = 1\,568$, par conséquent, d'après le théorème utilisé précédemment, la solution non entière est comprise entre 27 et 28, ce qui confirme notre lecture graphique.

3 **(a)** $f''(t) = -6t + 60 = -6(t - 10)$.

(b) $f''(t) > 0 \iff t < 10$, donc f' est croissante sur $[0\,;10]$ et décroissante sur $[10\,;30]$.

f est donc convexe sur $[0\,;10]$ et concave sur $[10;30]$.

(c) D'après ce qui précède, le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 10 est point d'inflexion.

(d) Avant $x = 10$, la dérivée est croissante, ce qui signifie que la vitesse de propagation de la maladie augmente, alors qu'après, cette vitesse diminue (même si le nombre de malades continue à augmenter jusqu'à $t = 20$). Donc 10 jours après le début de la maladie est le moment où l'épidémie commence à ralentir.

(e) $f'(10) = 300$.

On peut traduire cela par le fait qu'à ce moment là, il y a 300 malades supplémentaires chaque jour.

Chapitre 5

Logarithme népérien

Plan du chapitre

Exercice type — **Lycée Guynemer, Compiègne**

1 Simplifier les écritures suivantes :

$$A = \ln\left(e^3\sqrt{e^5}\right) \quad ; \quad B = e^{3\ln 8 + 4\ln 32}.$$

2 Résoudre l'équation suivante :

$$\ln(x-4) + \ln(x-2) = \ln 3.$$

3 Calculer la dérivée de la fonction suivante en indiquant l'ensemble de dérivabilité :

$$f(x) = x^2 \ln(1+x).$$

Voir corrigé page 121

1 Introduction

1.1 Définition et résolution d'équations

Définition 1

On définit la fonction *logarithme népérien*, notée ln, comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, c'est-à-dire l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\ln(x) = y \iff x = e^y.$$

Propriété 1

Soient $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

Exemple : $e^x = 7 \iff x = \ln 7$.

COURS

1.2 Variation de la fonction ln

Propriété 2 : dérivée de la fonction ln

La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

De la dérivée du logarithme népérien, on peut en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1

La fonction ln est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

À RETENIR

$$\ln 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \ln \mathrm{e} = 1.$$

Propriété 3

La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.3 Conservation de l'ordre

Propriétés 4

Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln x = \ln y \iff x = y \qquad \text{et} \qquad \ln x < \ln y \iff x < y.$$

Exemples

- $\ln(x^2+7) = \ln(2x^2+3) \iff x^2+7 = 2x^2+3$
  $\iff x^2 = 4$
  $\iff x = 2 \text{ ou } x = -2.$
- $\ln(x^2+10) > \ln(2x^2+1) \iff x^2+10 > 2x^2+1$
  $\iff x^2 < 9$
  $\iff x \in [-3\ ;\ 3].$

Remarque : dans la résolution d'équations ou d'inéquations avec des logarithmes, il faut toujours s'assurer que les opérandes soient strictement positives. Dans notre premier exemple, $x^2+7 > 0$ et $2x^2+3 > 0$ pour tout réel x ; on peut ainsi résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour l'inéquation.

1.4 Relations fonctionnelles

Propriétés 5

Pour tous réels x et y strictement positifs, pour tout entier relatif n :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln(x^n) = n \ln x$.

ATTENTION

Faire preuve de rigueur lors de l'utilisation de la relation fonctionnelle : ne pas scinder $\ln(xy)$ en somme de deux logarithmes sans avoir vérifié et mentionné la stricte positivité de x et y.

2 Limites

2.1 Limites du logarithme népérien

Propriété 6

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de la fonction logarithme.

2.2 Croissances comparées

Propriétés 7

Pour tout entier naturel n,

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0.$

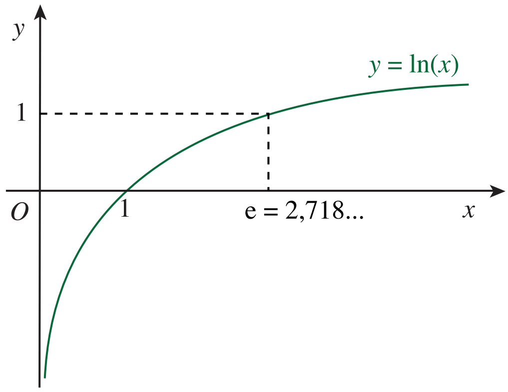
Remarque : on dit qu'en cas d'indétermination, les puissances de x « l'emportent » sur $\ln x$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

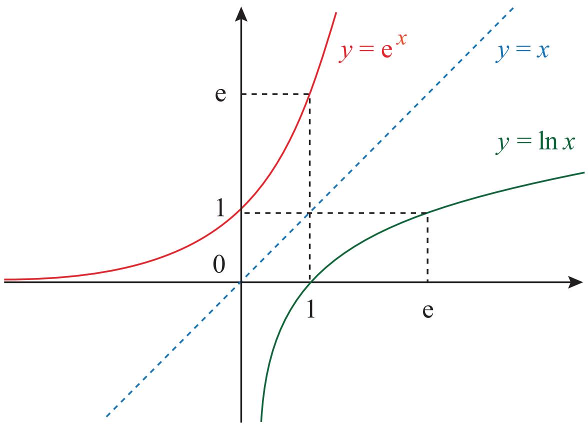
COURS

3 Représentation graphique

De la stricte croissance de la fonction ln, de sa concavité, de ses limites et des valeurs remarquables du logarithme népérien, on déduit sa représentation graphique dans un repère orthonormé :



Du fait que les fonctions exp et ln sont réciproques, on déduit que, dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).



4 Dérivée de ln(u)

Propriété 8

Soit u une fonction définie et dérivable à valeurs strictement positives sur un intervalle I. Alors,

$$\big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}.$$

Solution de l'exercice type

Lycée Guynemer, Compiègne

1

$$\begin{aligned} A &= \ln\left(e^3\right) + \ln\sqrt{e^5} \\ &= 3\ln e + \frac{1}{2}\ln\left(e^5\right) \\ &= 3\ln e + \frac{5}{2}\ln e \\ &= 3 + \frac{5}{2} \\ &= \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= e^{3\ln 8} \times e^{4\ln 32} \\ &= e^{\ln(8^3)} \times e^{\ln(32^4)} \\ &= 8^3 \times 32^4 \\ &= 2^{29}. \end{aligned}$$

2 Il faut commencer par déterminer l'ensemble de validité de l'équation :

$$x - 4 > 0 \qquad \text{pour} \qquad x > 4$$

et

$$x - 2 > 0 \qquad \text{pour} \qquad x > 2.$$

Donc l'ensemble de validité de l'équation est $]4\,;+\infty[$.
Dans cet ensemble de validité, l'équation équivaut à :

$$\ln\left[(x-4)(x-2)\right] = \ln 3\ ,$$

c'est-à-dire :

$$(x-4)(x-2) = 3.$$

Donc,

$$x^2 - 6x + 8 = 3\ ,$$

soit encore :

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Cette équation admet deux solutions : 1 et 5.
Seule 5 est solution de l'équation initiale, car 1 n'appartient pas à l'ensemble de validité de l'équation :

$$S = \{5\}.$$

3 La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ car la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\ln u$ est dérivable pour $u(x) > 0$.

$$f'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}.$$

Voir énoncé page 117

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

INTERROS

1 QCM Propriétés du logarithme

5 min Corrigé p. 134

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la réponse exacte.

1 Soit a un réel strictement positif, $\ln\left(\dfrac{a^2}{25}\right)$ est égal à :

a $2\,(\ln a - \ln 5)$ **b** $(\ln a)^2 - (\ln 5)^2$ **c** $\left(\ln \dfrac{a}{5}\right)^2$

2 $\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1)$ est égal à :

a 0 **b** $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$ **c** $\ln 2$

3 Pour tout réel x strictement supérieur à 2, $\ln(x^2-4) - \ln(x-2)$ est égal à :

a $\ln(x+2)$ **b** $\ln(x^2-x-2)$ **c** $\ln(x-2)$

4 $\ln\left[\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right] - \left(\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$ est égal à :

a 0 **b** -3 **c** $\mathrm{e}^2 - 1$

2 QCM Équations et inéquations

15 min Corrigé p. 134

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

1 L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2\right) = 0$ est :

a 0 **b** 1 **c** $\{-1\,;\,1\}$

2 L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2 - x\right) = 0$ est :

a $\{0\,;\,1\}$ **b** $\{1\,;\,\mathrm{e}\}$ **c** $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

3 L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - x\ln(0{,}5) \geqslant 0$ est :

a $\left]-\infty\,;\,\ln(0{,}5)\right]$ **b** $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{\ln(0{,}5)}\right]$ **c** $\left[\dfrac{1}{\ln(0{,}5)}\,;\,+\infty\right[$

4 Le nombre t tel que $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^6 = 2$ est, arrondi au centième :

a $10{,}5$ **b** $12{,}24$ **c** $12{,}25$

3 V/F Fonctions logarithme et exponentielle

10 min Corrigé p. 136

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1 $\mathrm{e}^{\ln 5} + \mathrm{e}^{-\ln 3} = 2$.

2 Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x + 1) = x + \ln(\mathrm{e}^{-x} + 1)$.

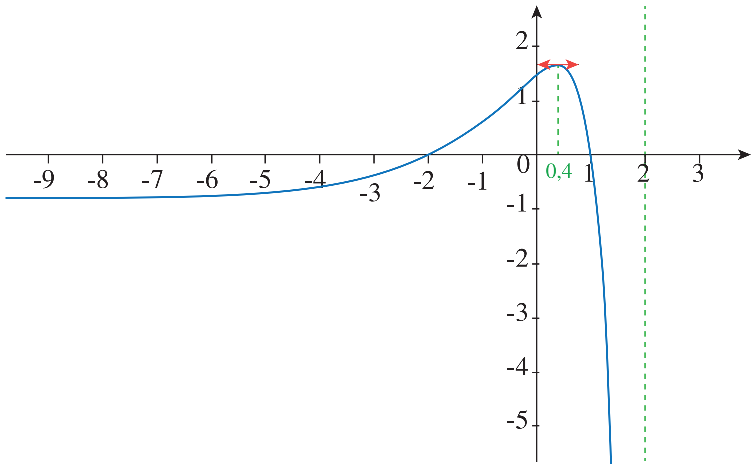
3 Pour tout réel x différent de -1, $\ln(x^3+1)^2 = 2\ln(x^3+1)$.

4 Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^{3x}+1)^2 = 2\ln(\mathrm{e}^{3x}+1)$.

4 V/F Lecture graphique

10 min Corrigé p. 136

La courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;2[$ est donnée ci-dessous :



La droite d'équation $x = 2$ et l'axe des abscisses sont asymptotes à la courbe. On appelle g la fonction définie par $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$.

En utilisant la représentation graphique, dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. La fonction g a le même ensemble de définition que f.
2. La fonction g est dérivable en 0,4 et $g'(0{,}4) = 0$.
3. L'équation $g(x) = -1$ possède exactement deux solutions.
4. La fonction $\ln|f(x)|$ est définie pour tout x de $]-\infty\,;2[$.

Propriétés de la fonction logarithme népérien

5 Propriétés algébriques

★ 10 min Corrigé p. 136

Lycée Berlioz, Vincennes

Exprimer à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$:

- $\ln 4$
- $\ln 36$
- $\ln \dfrac{2}{27}$
- $\ln \sqrt{6}$
- $\ln \dfrac{9}{8}$
- $\ln\left(3e^5\right)$

6 Propriétés algébriques

★ 5 min Corrigé p. 137

Lycée Delacroix, Maisons - Alfort

Exprimer en fonction de ln 2 et ln 3 :

$$A = 2\ln 4 + \ln 27 - 4\ln 18 + 4\ln\sqrt{6} - \ln\frac{9}{16}.$$

Équations

7 Équations

★ 10 min Corrigé p. 137

Lycée Bonaparte, Toulon

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(2x) = -3$
2. $\frac{1}{2}\ln(3x+1) = 1$
3. $3\ln(3x^2+1) = 6$

8 Équations

★ 10 min Corrigé p. 138

Lycée Hoche, Versailles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln\left(x^2-4\right) = \ln(2x+11)$
2. $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(2x+11)$

9 Fonction exponentielle et équations

★ 10 min Corrigé p. 139

Lycée La Pérouse, San Francisco

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{e^x}{e^x-1} = 2$
2. $\dfrac{-e^{-3x}}{e^{2x}-2e^x+3} = 1$

10 Équations logarithmiques

★★ 30 min Corrigé p. 139

Lycée Henri IV, Paris

1. **(a)** Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout réel X :

$$-X^3 + 2X^2 + X - 2 = (X^2-1)(aX+b).$$

(b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels les équations suivantes :

(i) $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$

(ii) $-(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$

2. **(a)** On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30.$$

(i) Vérifier que :

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + x - 15).$$

(ii) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $P(x) = 0$.

(b) Utiliser la question précédente pour résoudre l'équation :

$$2\ln x + \ln(2x-3) = \ln(17x-30).$$

Inéquations

11 Dans une suite

★ 5 min Corrigé p. 141

Lycée Turgot, Paris

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 75\,000$ et par la relation $u_{n+1} = 1{,}014 u_n + 7$.

On admet que $u_n = 75\,500 \times 1{,}014^n - 500$.

Trouver alors le plus petit entier n tel que $u_n > 2u_0$.

12 Inéquations de base

★ 15 min Corrigé p. 141

Lycée Galilée, Gennevilliers

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $\ln(-3x+4) \leqslant 3$

2 $\ln(x^2 - 4) < \ln\big(2x(x+2)\big)$

13 Changement de variable

★ 10 min Corrigé p. 143

Lycée Champollion, Grenoble

Résoudre l'inéquation suivante après en avoir précisé les conditions de définition :

$$(\ln x)^2 - 4\ln x + 3 < 0.$$

14 Un quotient en opérande

★★ 15 min Corrigé p. 144

Lycée Michelet, Marseille

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 1.$$

Études de fonctions

15 Retrouver la fonction

★ 15 min Corrigé p. 145

Lycée Jules Ferry, Paris

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(ax^2 + bx + c\right) ,$$

où a, b et c sont trois réels.

Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$ $\nearrow$	$\ln\frac{5}{8}$	$\nearrow$

En utilisant les données du tableau, déterminer a, b et c.

16 Construction d'une tangente

★ 20 min Corrigé p. 146

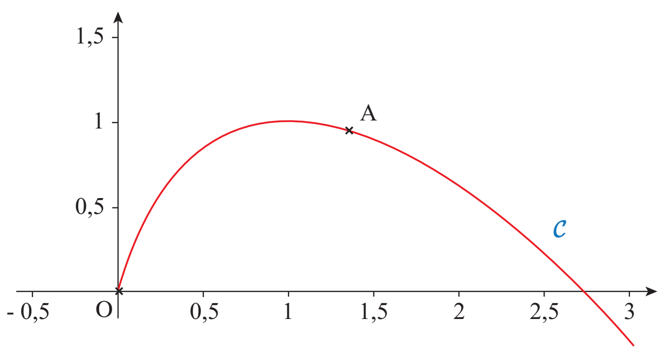
Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre x.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente $\mathcal{T}_a$ au point A de la courbe d'abscisse a.



(a) Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A', point d'intersection de la droite $\mathcal{T}_a$ et de l'axe des ordonnées.

(b) Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente $\mathcal{T}_a$.
Construire la tangente $\mathcal{T}_a$ au point A placé sur la figure.

17 Étude d'une fonction logarithmique ★★ 45 min

Corrigé p. 147

Lycée Maximilien Sorre, Cachan

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - x - \ln x.$$

1. Étudier les variations de f. Compléter le tableau de variation par les limites de f aux bornes de $]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $[2\,;3]$.
3. Donner une valeur approchée au millième de α.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$.

1. Calculer $g'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ et montrer que : $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
2. En déduire les variations de g et compléter le tableau de variation par les limites de g aux bornes de $]0\,;+\infty[$.
3. En utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, montrer que $g(\alpha) = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
4. En déduire un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 0,02.
5. Étudier le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

18 Fonction et distance minimale ★★★ 45 min

Corrigé p. 149

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. **(a)** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0 ; 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0 ; +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   (a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0 ; +\infty[$.
   (b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   (c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

Suites et logarithmes

19 Suite et racine carrée

★ 20 min Corrigé p. 150

Lycée Saint-Joseph de Tivoli, Bordeaux

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \mathrm{e}^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \ln(u_n) - 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
   Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \mathrm{e}^{2+\frac{1}{2^n}}$.
4. Calculer la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang u_n est une valeur approchée de e^2 au millième ?

20 Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

★★ 25 min Corrigé p. 151

Lycée Bachelard, Chelles

Soit f la fonction définie pour tout $x > \dfrac{1}{2}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

1. Démontrer que pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$.

On peut donc définir la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que pour tout entier n :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n).$$

   (a) Vérifier que v_n et w_n existent pour tout entier n.
   (b) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.
   (c) Exprimer w_n puis v_n en fonction de n.
   En déduire que :

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

   Quelle est la limite de la suite u ?

INTERROS

Objectif bac

21 Valeur approchée de ln(5)

★★★ 45 min Corrigé p. 153

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

1 Donner une valeur approchée de $\ln 5$ à 10^{-7} près.

2 Voici un programme écrit en langage Python :

```python
def algo(N):
    # n est un entier naturel non nul
    S = 0
    for k in range(N,5*N+1):
        S = S + 1/k

    return S
```

(a) Que renvoie `algo(1)` et `algo(2)` ?

(b) Exprimer S en fonction de N.

(c) On a testé le programme pour différentes valeurs de N.

On obtient les résultats ci-dessous :

N	1 000	5 000	10 000	15 000	20 000
S	1,610 038	1,609 557 9	1,609 497 9	1,609 477 9	1,609 467 9

De quelle valeur semble se rapprocher S ?

3 f et g sont des fonctions définies sur $[0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = x + \ln(1-x).$$

(a) Étudier les variations de f et g sur $[0\,;\,1[$.

(b) En déduire que pour tout x de $[0\,;\,1[$, $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$.

4 S est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{5n}.$$

(a) Montrer que pour tout nombre entier naturel k tel que $n \leqslant k \leqslant 5n$ avec $n \geqslant 2$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

(b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\ln\left(5+\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant -\ln\left(\frac{n-1}{5n}\right).$$

(c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

22 Logarithme et distance

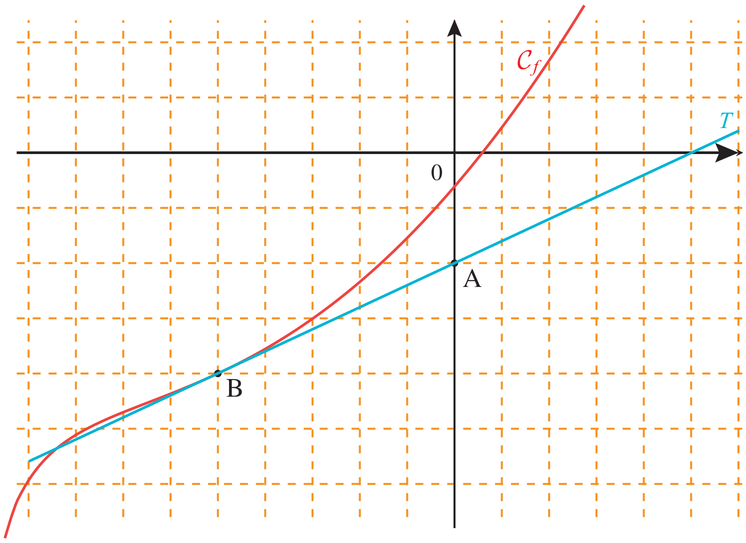
★★★ 60 min Corrigé p. 154

Baccalauréat Métropole 2024, sujet 2

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.

On précise que la droite T passe par le point $A(0\ ;\ -1)$.



Partie A : exploitation du graphique

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.

   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2 Montrer que pour tout $x > -2$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

3 Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5 En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

6 Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

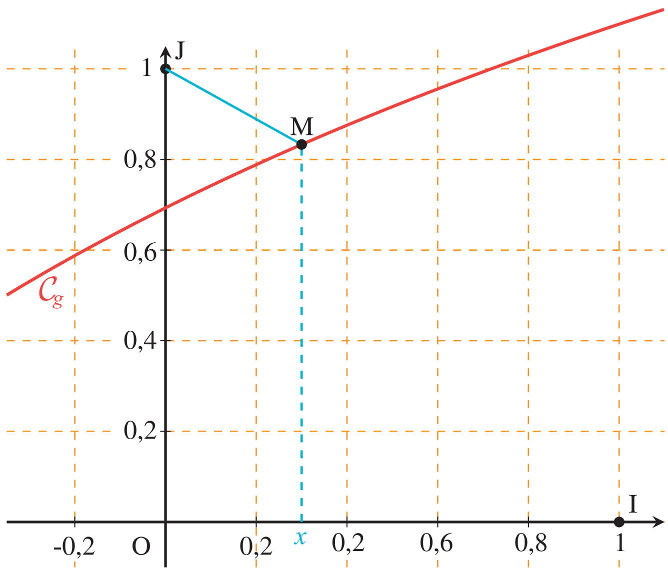
Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad g(x) = \ln(x+2)$.

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0 ; I , J), représentée ci-après.

Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad h(x) = \mathrm{J}M^2$.



1 Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $\quad h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2 On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en partie B.

(a) Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\ +\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

(b) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3 On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α.

(a) Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

(b) En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

CORRIGÉS

1 QCM Propriétés du logarithme

Énoncé p. 122

1 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $\ln\left(\dfrac{a^2}{25}\right) = \ln(a^2) - \ln 25 = \ln(a^2) - \ln 5^2$ or $a > 0$ donc $\ln(a^2) = 2\ln a$ d'où :

$$\ln\left(\frac{a^2}{25}\right) = 2\ln a - 2\ln 5 = 2(\ln a - \ln 5)$$

ATTENTION

Ne confondez pas $\ln\left(a^2\right) = \ln(a \times a)$ et $(\ln a)^2 = (\ln a) \times (\ln a)$.
Si $a < 0$, alors $\ln(a^2) = 2\ln(-a)$.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet,

$$\begin{aligned}\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) &= \ln\big((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\big)\\ &= \ln\big((\sqrt{2})^2 - 1\big) = \ln 1 = 0.\end{aligned}$$

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. $\ln(x^2-4) - \ln(x-2) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right) = \ln(x+2)$.

4 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, $\ln\left[\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right] - \left(\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = 2\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) - \left(\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$.

Or, $\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}} = -\ln\mathrm{e} = -1$ donc :

$$\ln\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right] - \left(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = -2 - 1 = -3.$$

2 QCM Équations et inéquations

Énoncé p. 122

1 Réponse $\boxed{\text{c}}$.
L'équation est valide pour $x^2 > 0$ soit sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
Pour tout x de $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}\ln\left(x^2\right) = 0 &\iff \ln\left(x^2\right) = \ln 1\\ &\iff x^2 = 1\\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = 1.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2\right) = 0$ est donc $\{-1\,;1\}$.

2 Réponse $\boxed{\text{c}}$. L'équation est valide si $x^2 - x > 0$ soit si $x(x-1) > 0$.
L'ensemble de validité de l'équation est donc $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

Pour tout x de $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}\ln(x^2-x)=0 &\iff \ln(x^2-x)=\ln 1\\ &\iff x^2-x=1\\ &\iff x^2-x-1=0.\end{aligned}$$

L'équation $x^2-x-1=0$ admet pour discriminant $\Delta=5$ et pour solutions $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Ces deux solutions appartiennent à l'ensemble $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2-x\right)=0$ est :

$$\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

3 Réponse $\boxed{\text{C}}$. L'inéquation est valide sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel,

$$1-x\ln(0{,}5)\geqslant 0 \iff -x\ln(0{,}5)\geqslant -1 \iff x\ln(0{,}5)\leqslant 1.$$

Or, $0{,}5<1$; donc $\ln(0{,}5)<0$, soit :

$$x\ln(0{,}5)\leqslant 1 \iff x\geqslant \frac{1}{\ln(0{,}5)}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $1-x\ln(0{,}5)\geqslant 0$ est donc :

$$\left[\frac{1}{\ln(0{,}5)}\,;+\infty\right[.$$

Remarque : comme $\ln(0{,}5)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2$, l'ensemble des solutions peut s'écrire aussi :

$$\left[-\frac{1}{\ln 2}\,;+\infty\right[.$$

4 Réponse $\boxed{\text{C}}$. $\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^6=2 \iff \ln\left[\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^6\right]=\ln 2$

$$\begin{aligned}&\iff 6\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)=\ln 2\\ &\iff \ln\left(1+\frac{t}{100}\right)=\frac{\ln 2}{6}\\ &\iff 1+\frac{t}{100}=\exp\left(\frac{\ln 2}{6}\right)\end{aligned}$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

$$\Longleftrightarrow \frac{t}{100} = \exp\left(\frac{\ln 2}{6}\right) - 1$$
$$\Longleftrightarrow t = 100\exp\left(\frac{\ln 2}{6}\right) - 100$$
$$\Longleftrightarrow t \approx 12{,}25.$$

3 V/F Fonctions logarithme et exponentielle

Énoncé p. 122

1 *Faux*. Comme $-\ln 3 = \ln \frac{1}{3}$, ce nombre est égal à $5 + \frac{1}{3}$.

2 *Vrai*. Pour tout réel x, $\ln(e^x + 1) = \ln\left[e^x(1 + e^{-x})\right]$. Comme e^x et $1 + e^{-x}$ sont tous les deux strictement positifs,
$$\ln(e^x + 1) = \ln e^x + \ln(1 + e^{-x}).$$
Or, $\ln e^x = x$. Donc, $\ln(e^x + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1)$.

3 *Faux*. Le nombre $x^3 + 1$ peut être négatif, par exemple dans le cas où $x = -2$. Or, la formule $\ln a^n = n \ln a$ n'est valable que lorsque a est un réel strictement positif.

4 *Vrai*. Le nombre $e^{3x} + 1$ est toujours strictement positif donc on peut appliquer la formule $\ln a^n = n \ln a$.

4 V/F Lecture graphique

Énoncé p. 123

1 *Faux*. La fonction g est définie si f est strictement positive, donc sur l'intervalle $]-2\,;1[$.

2 *Vrai*. On a $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Donc, en 0,4, $g'(x) = 0$.

3 *Vrai*. On a $g(x) = -1 \Leftrightarrow \ln\left[f(x)\right] = -1 \Leftrightarrow f(x) = e^{-1}$.
Or, $e^{-1} \approx 0{,}37$.

4 *Faux*. Le nombre $|f(x)|$ est positif ou nul. Cependant, d'après la représentation graphique, $f(x)$ s'annule pour $x = -2$ et $x = 1$, donc la fonction $\ln|f(x)|$ n'est pas définie pour ces deux valeurs.

5 Propriétés algébriques

Énoncé p. 123

Lycée Berlioz, Vincennes

- $\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$.
- $\ln 36 = \ln(4 \times 9) = \ln\left(2^2 \times 3^2\right) = 2\ln 2 + 2\ln 3$.
- $\ln \dfrac{2}{27} = \ln\left(2 \times 3^{-3}\right) = \ln 2 - 3\ln 3$.

- $\ln\sqrt{6} = \ln\left((2 \times 3)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2 \times 3) = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)$.
- $\ln\frac{9}{8} = \ln 3^2 - \ln(2^3) = 2\ln 3 - 3\ln 2$.
- $\ln\left(3e^5\right) = \ln 3 + 5\underbrace{\ln e}_{1} = \ln 3 + 5$.

6 Propriétés algébriques

Énoncé p. 124

Lycée Delacroix, Maisons - Alfort

$$\begin{aligned}
A &= 2\ln 4 + \ln 27 - 4\ln 18 + 4\ln\sqrt{6} - \ln\frac{9}{16}\\
&= 2\ln 2^2 + \ln 3^3 - 4\ln(2 \times 3^2) + 4\ln\left((2 \times 3)^{\frac{1}{2}}\right) - (\ln 3^2 - \ln 2^4)\\
&= 4\ln 2 + 3\ln 3 - 4(\ln 2 + 2\ln 3) + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) - 2\ln 3 + 4\ln 2\\
&= 4\ln 2 + 3\ln 3 - 4\ln 2 - 8\ln 3 + 2\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 3 + 4\ln 2\\
&= 6\ln 2 - 5\ln 3.
\end{aligned}$$

7 Équations

Énoncé p. 124

Lycée Bonaparte, Toulon

1 La condition de validité pour $\ln(2x) = -3$ est que $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\ln(2x) = -3 &\iff \ln(2x) = \ln\left(e^{-3}\right)\\
&\iff 2x = e^{-3} \text{ (par stricte monotonie).}
\end{aligned}$$

Donc la solution est $\frac{1}{2}e^{-3}$ (car $\frac{1}{2}e^{-3} > 0$).

2 L'équation $\frac{1}{2}\ln(3x+1) = 1$ n'est valide que si $3x + 1 > 0$ c'est-à-dire $x > -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(3x+1) = 1 &\iff \ln(3x+1) = 2 \iff \ln(3x+1) = \ln(e^2)\\
&\iff 3x + 1 = e^2 \quad \text{(par stricte monotonie)}\\
&\iff x = \frac{1}{3}(e^2 - 1).
\end{aligned}$$

Ceci vérifie la condition de validité, donc $\frac{1}{3}(e^2 - 1)$ est solution.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

3 L'équation $3\ln(3x^2+1) = 6$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque le trinôme $3x^2+1$ est toujours strictement positif.

$$\begin{aligned} 3\ln(3x^2+1) = 6 &\iff \ln(3x^2+1) = 2 \iff \ln(3x^2+1) = \ln \mathrm{e}^2 \\ &\iff 3x^2+1 = \mathrm{e}^2 \iff x^2 = \underbrace{\frac{\mathrm{e}^2-1}{3}}_{>0} \\ &\iff x = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^2-1}{3}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{\mathrm{e}^2-1}{3}}. \end{aligned}$$

L'équation a pour ensemble de solutions $\left\{-\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{3}}\,;\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{3}}\right\}$.

8 Équations

Énoncé p. 124

Lycée Hoche, Versailles

1 D'abord, on s'occupe des conditions d'existence des logarithmes :

$$\begin{cases} x^2-4>0 & \iff x \in]-\infty, -2[\cup]2\,;+\infty[\\ 2x+11>0 & \iff x > -\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Finalement, la condition de validité est :

$$x \in \mathscr{D} \text{ avec } \mathscr{D} = \left]-\frac{11}{2}\,;-2\right[\cup]2\,;+\infty[.$$

Si $x \in \mathscr{D}$, on transforme l'équation sachant que la fonction ln est strictement croissante :

$$\begin{aligned} \ln\left(x^2-4\right) = \ln(2x+11) &\iff x^2-4 = 2x+11 \\ &\iff x^2-2x-15 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme vaut : $\Delta = 4 + 4 \times 15 = 64 = 8^2$.

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{2-8}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Ces racines sont bien des solutions valides car elles sont dans $\mathscr{D}$.

L'équation a donc pour ensemble de solutions : $\{-3\,;5\}$.

2 Cette fois, on doit avoir :

$$\begin{cases} x-2>0 & \iff x>2, \\ x+2>0 & \iff x>-2, \\ 2x+11>0 & \iff x > -\dfrac{11}{2}. \end{cases}$$

Donc on résout dans $\mathscr{D} =]2\,;+\infty[$:

$$\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln[(x-2)(x+2)] = \ln\left(x^2-4\right).$$

D'où :

$\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(2x+11) \iff \ln\left(x^2-4\right)=\ln(2x+11)$.

On est ramené à l'équation de la question 1. Attention, cela ne veut pas dire que l'on va trouver les mêmes solutions, car on ne résout pas dans le même ensemble. En réduisant l'équation, on obtient les mêmes racines : $x_1=-3$ et $x_2=5$. Mais cette fois-ci, on voit que $x_1 \notin \mathscr{D}$. Seule x_2 est donc solution.

L'équation admet donc une seule solution : 5.

9 Fonction exponentielle et équations

Énoncé p. 124

Lycée La Pérouse, San Francisco

1 L'expression $\dfrac{e^x}{e^x-1}=2$ n'a de sens que pour $e^x \neq 1$, c'est-à-dire pour $x \neq 0$.

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{e^x-1}=2 &\iff e^x=2e^x-2\\ &\iff e^x=2.\end{aligned}$$

L'équation $\dfrac{e^x}{e^x-1}=2$ possède donc une unique solution $x=\ln 2$.

2 Posons $X=e^x$. On a alors : $e^{2x}-2e^x+3=X^2-2X+3$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta=-8$, donc pour tout réel t :

$$t^2-2t+3>0.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x}-2e^x+3>0$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-3x}>0$ donc :

$$\frac{-e^{-3x}}{e^{2x}-2e^x+3}<0\,,$$

et l'équation $\dfrac{-e^{-3x}}{e^{2x}-2e^x+3}=1$ ne possède donc pas de solution réelle.

10 Équations logarithmiques

Énoncé p. 124

Lycée Henri IV, Paris

1 **(a)** On pose la factorisation du polynôme par X^2-1 et on raisonne par identification :

$$\begin{cases}(X^2-1)(aX+b) &= aX^3+bX^2-aX-b\\ &= -X^3+2X^2+X-2\end{cases} \iff \begin{cases}a=-1\\ b=2.\end{cases}$$

Donc : $-X^3+2X^2+X-2=(X^2-1)(-X+2)$.

CORRIGÉS

(b) **(i)** On utilise la forme factorisée, pour résoudre l'équation polynomiale (en x) :

$$\begin{aligned} -x^3+2x^2+x-2=0 &\iff (x^2-1)(-x+2)=0 \\ &\iff x^2-1=0 \text{ ou } -x+2=0 \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=2. \end{aligned}$$

(ii) Soit à résoudre (E) : $-(\ln x)^3+2(\ln x)^2+\ln x-2=0$.

Cette équation est valide pour $x>0$.

Pour se ramener à l'équation précédente, on pose $X=\ln x$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff \begin{cases} -X^3+2X^2+X-2=0 \\ X=\ln x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ln x=-1 \\ \text{ou} \\ \ln x=1 \\ \text{ou} \\ \ln x=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\mathrm{e}^{-1} \\ \text{ou} \\ x=\mathrm{e} \\ \text{ou} \\ x=\mathrm{e}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

2 **(a)** **(i)**

$$\begin{aligned} (x-2)(2x^2+x-15) &= 2x^3+x^2-15x-4x^2-2x+30 \\ &= 2x^3-3x^2-17x+30 \\ &= P(x). \end{aligned}$$

(ii) $P(x)=0 \iff x-2=0 \text{ ou } 2x^2+x-15=0.$

Le polynôme $2x^2+x-15$ a deux racines réelles (car $\Delta=1+120=121=11^2>0$) :

$$x_1=\frac{-1-11}{4}=-3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1+11}{4}=\frac{5}{2}.$$

$P(x)=0 \iff x=2 \text{ ou } x=-3 \text{ ou } x=\dfrac{5}{2}.$

(b) $2\ln x+\ln(2x-3)=\ln(17x-30)$.

On commence par poser les conditions de validité :

$$\begin{cases} x>0 \\ 2x-3>0 \\ 17x-30>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ x>\dfrac{3}{2} \\ x>\dfrac{30}{17}. \end{cases} \iff x>\frac{30}{17}$$

On résout ensuite l'équation :

$$\begin{aligned} 2\ln x+\ln(2x-3) &= \ln x^2+\ln(2x-3) \\ &= \ln\left(x^2(2x-3)\right) \\ &= \ln\left(2x^3-3x^2\right). \end{aligned}$$

D'où, pour $x > \frac{30}{17}$: $\ln\left(2x^3 - 3x^2\right) = \ln(17x - 30)$
$$\iff 2x^3 - 3x^2 = 17x - 30 \iff P(x) = 0.$$
D'après la question précédente, $P(x) = 0$ équivaut à $x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = \frac{5}{2}$.

Parmi ces solutions, -3 ne satisfait pas la condition de validité car : $-3 < \frac{30}{17}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{2\,;\,\frac{5}{2}\right\}$.

11 Dans une suite

Énoncé p. 125

Lycée Turgot, Paris

$$\begin{aligned}
u_n > 2u_0 &\iff 75\,500 \times 1{,}014^n - 500 > 150\,000\\
&\iff 75\,500 \times 1{,}014^n > 150\,500\\
&\iff 1{,}014^n > \frac{1\,505}{755}\\
&\iff \ln\left(1{,}014^n\right) > \ln\left(\frac{1\,505}{755}\right)\\
&\iff n\ln(1{,}014) > \ln\left(\frac{1\,505}{755}\right)\\
&\iff n > \frac{\ln\left(\frac{1\,505}{755}\right)}{\ln(1{,}014)} \quad \text{car } \ln(1{,}014) > 0.
\end{aligned}$$

On obtient donc, en arrondissant à l'entier supérieur, $n = 50$.

12 Inéquations de base

Énoncé p. 125

Lycée Galilée, Gennevilliers

1 On doit résoudre $\ln(-3x + 4) \leqslant 3$. La condition de validité est :

$$-3x + 4 > 0 \iff x < \frac{4}{3}.$$

On se ramène à une situation de référence où l'on pourra utiliser la propriété : $\ln(x) \leqslant \ln(y) \iff x \leqslant y$ pour x et y réels strictement positifs. Il faut « équilibrer » l'inéquation en faisant apparaître un logarithme à droite.

CORRIGÉS

On écrit 3 sous forme d'un logarithme : $3 = 3 \times \ln \mathrm{e} = \ln \mathrm{e}^3$.

$$\begin{aligned}
\ln(-3x+4) \leqslant 3 &\iff \ln(-3x+4) \leqslant \ln \mathrm{e}^3\\
&\iff -3x+4 \leqslant \mathrm{e}^3 \quad \text{(stricte monotonie de ln)}\\
&\iff x \geqslant \frac{\mathrm{e}^3-4}{-3}\\
&\qquad \text{(l'inégalité change de sens en divisant par } -3)\\
&\iff x \geqslant \frac{4-\mathrm{e}^3}{3}.
\end{aligned}$$

On obtient finalement deux conditions :

$$x \in \left]-\infty\,;\frac{4}{3}\right[\quad \text{et} \quad x \geqslant \frac{4-\mathrm{e}^3}{3}.$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\left[\frac{4-\mathrm{e}^3}{3}\,;\frac{4}{3}\right[$.

2 On commence par poser les conditions de validité, garantissant l'existence de chaque logarithme.

$$\begin{cases} x^2-4>0\\ 2x(x+2)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-2 \text{ ou } x>2\\ x<-2 \text{ ou } x>0 \end{cases} \quad \text{(trinôme positif à l'extérieur des racines)}$$

$$\iff \begin{cases} x \in\,]-\infty\,;-2[\, \cup\,]2\,;+\infty[\,,\\ x \in\,]-\infty\,;-2[\, \cup\,]0\,;+\infty[\,. \end{cases}$$

Donc : $x \in\,]-\infty\,;-2[\, \cup\,]2\ +\infty[$. (1)

Noter que l'on a pris la conjonction des deux conditions, c'est-à-dire l'intersection des ensembles solutions de ces conditions. La condition (1) signifie que l'on doit résoudre dans $]-\infty\,;-2[\, \cup\,]2\,;+\infty[$.

Par stricte monotonie, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(x^2-4\right) < \ln\left(2x(x+2)\right) &\iff x^2-4 < 2x(x+2)\\
&\iff x^2-4-2x(x+2) < 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } x^2-4-2x(x+2) &= (x-2)(x+2)-2x(x+2)\\
&= (x+2)(x-2-2x)\\
&= (x+2)(-x-2)\\
&= -(x+2)(x+2)\\
&= -(x+2)^2.
\end{aligned}$$

Donc, l'inégalité équivaut à : $(x+2)^2 > 0$. (2)

Le carré $(x+2)^2$ étant positif ou nul pour tout $x \in \mathbb{R}$, la condition (2) équivaut à $x \neq -2$. En résumé, les solutions de l'inéquation doivent vérifier :

$$x \in\,]-\infty\,;-2[\, \cup\,]2\,;+\infty[\ \text{ et } x \neq -2.$$

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[\,.$$

13 Changement de variable

Énoncé p. 125

Lycée Champollion, Grenoble

On a :

$$(\ln x)^2 - 4\ln x + 3 < 0.$$

On résout cette inéquation par un changement de variable : $X = \ln x$, avec $x > 0$.

$$(\ln x)^2 - 4\ln x + 3 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X^2 - 4X + 3 < 0 \\ X = \ln x. \end{cases}$$

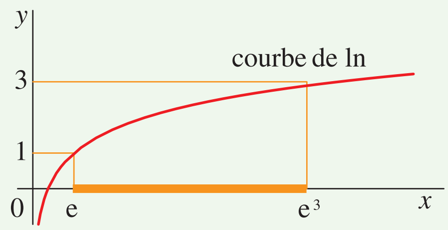
Résoudre $X^2 - 4X + 3 < 0$ est un problème classique de signe d'un trinôme du second degré.

- Le discriminant vaut : $\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4 = 2^2$.
- Il y a donc deux racines qui sont :

$$X_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

- Par la règle du signe d'un trinôme, on déduit que X^2-4X+3 est négatif (du signe opposé du coefficient de X^2, qui est 1) entre les racines. On obtient donc :

$$X^2 - 4X + 3 < 0 \iff X \in]1\,;\,3[$$



Il faut maintenant revenir à la variable initiale x :

$$\left.\begin{matrix} X \in]1\,;\,3[\\ X = \ln x \end{matrix}\right\} \iff 1 < \ln x < 3 \iff \ln \mathrm{e} < \ln x < \ln \mathrm{e}^3.$$

Comme ln est strictement croissante de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$\ln \mathrm{e} < \ln x < \ln \mathrm{e}^3 \iff \mathrm{e} < x < \mathrm{e}^3.$$

Les solutions vérifient donc : $x > 0$ et $x \in \left]\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^3\right[$.
L'ensemble des solutions est l'intervalle : $\left]\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e}^3\right[$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

14 Un quotient en opérande

Énoncé p. 125

Lycée Michelet, Marseille

Pour résoudre l'inéquation demandée, il faut d'abord déterminer la condition d'existence du logarithme. On étudie donc le signe du quotient qui se trouve sous le logarithme.

Le signe du quotient $\dfrac{x+2}{x-2}$ est égal au signe du produit $(x+2) \times (x-2)$.
$(x+2)(x-2) > 0$ est équivalent à $x < -2$ ou $x > 2$.
L'inéquation à résoudre est donc définie sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 1 &\iff \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > \ln \mathrm{e}\\ &\iff \frac{x+2}{x-2} > \mathrm{e} \text{ (d'après la propriété du cours page 118).}\end{aligned}$$

ATTENTION

Pour résoudre cette inéquation, il ne faut surtout pas multiplier les deux membres par $(x-2)$ car le signe de cette expression est variable.

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-2} > \mathrm{e} &\iff \frac{x+2}{x-2} - \mathrm{e} > 0\\ &\iff \frac{x+2-\mathrm{e}(x-2)}{x-2} > 0\\ &\iff \frac{(1-\mathrm{e})x+2(1+\mathrm{e})}{x-2} > 0.\end{aligned}$$

Le numérateur est une fonction affine de coefficient directeur $(1-\mathrm{e})$ qui s'annule en $\alpha = \dfrac{2(\mathrm{e}+1)}{\mathrm{e}-1}$.
Comme $1-\mathrm{e} < 0$, le tableau de signe correspondant est le suivant :

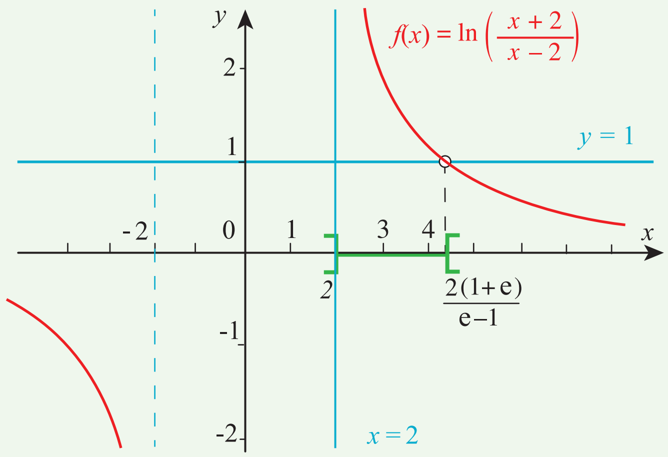
x	$-\infty$		2		α		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-\mathrm{e})x+2(1+\mathrm{e})$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\dfrac{(1-\mathrm{e})x+2(1+\mathrm{e})}{x-2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Finalement, l'inéquation a pour solutions les nombres x satisfaisant en même temps les conditions suivantes :

$$x \in]-\infty\,; -2[\cup]2\,; +\infty[\quad \text{et} \quad x \in \left]2\,; \frac{2(1+\mathrm{e})}{\mathrm{e}-1}\right[.$$

L'ensemble des solutions est donc l'intervalle : $\left]2\,;\,\dfrac{2(1+\mathrm{e})}{\mathrm{e}-1}\right[$.

On peut visualiser graphiquement à l'aide de la calculatrice ce résultat en traçant la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$:



L'ensemble des solutions correspond aux points de la courbe situés au-dessus de la droite d'équation $y = 1$, dont les abscisses sont dans $\left]2\,;\,\dfrac{2(1+\mathrm{e})}{\mathrm{e}-1}\right[$.

15 Retrouver la fonction

Énoncé p. 126

Lycée Jules Ferry, Paris

Si $ax^2+bx+c > 0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$.

D'après les données du tableau de variations :

- $f'(0) = 0$ donc $b = 0$;
- $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc $\ln\left(\dfrac{a}{4}+c\right) = 0$, soit $\dfrac{a}{4}+c = 1$;
- $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \ln\dfrac{5}{8}$ donc $\ln\left(\dfrac{a}{16}+c\right) = \ln\dfrac{5}{8}$, soit $\dfrac{a}{16}+c = \dfrac{5}{8}$.

De ces deux équations, on déduit $c = \dfrac{1}{2}$, $a = 2$ et nous avions déjà $b = 0$.

L'expression $2x^2 + \dfrac{1}{2}$ est bien strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉS

16 Construction d'une tangente

Énoncé p. 126

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

1 $1 - \ln x > 0$ pour $x < \mathrm{e}$ et $x > 0$. Par conséquent, $f(x) > 0$ pour $0 < x < \mathrm{e}$, $f(\mathrm{e}) = 0$ et $f(x) < 0$ pour $x > \mathrm{e}$.

2
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (croissance comparée) donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x - x\ln x) = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(1 - \ln x) = -\infty$ donc :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[x(1-\ln x)\right] = -\infty.$$

3 $f'(x) = 1 \times (1 - \ln x) + x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x.$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4 **(a)** Une équation de $\mathcal{T}_a$ est :

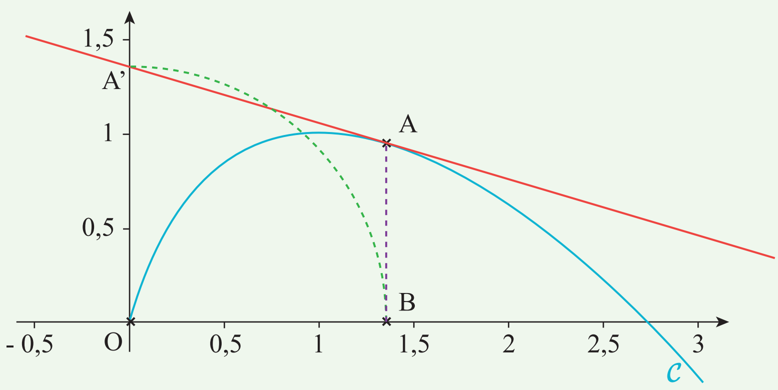
$$y = f'(a)(x-a) + f(a),$$

ce qui donne :

$$y = -x\ln a + a.$$

En remplaçant x par 0 dans cette équation, on trouve que les coordonnées du point A' sont $(0\,;a)$.

(b) Pour tracer cette tangente, il suffit de reporter l'abscisse du point A sur l'axe des ordonnées pour obtenir le point A', puis la tangente est la droite (AA').



17 Étude d'une fonction logarithmique

Énoncé p. 127

Lycée Maximilien Sorre, Cachan

Partie A

1 La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ d'après les opérations sur les fonctions dérivables.
Pour tout réel x tel que $x > 0$, on a :

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x}.$$

Pour tout réel x strictement positif on a $f'(x) < 0$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

D'après les limites usuelles,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

On dresse alors le tableau de variation de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2 La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[2\,;3]$; $f(2) = 1 - \ln 2$ et $f(3) = -\ln 3$ donc $f(2) > 0$ et $f(3) < 0$. Il en résulte, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;3]$.

3 À l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de α :
$\alpha \approx 2{,}208$.

4 La fonction f s'annule en α et elle est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. On en déduit que f est strictement positive sur $]0\,;\alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

1 La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}(2 - \ln x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right),$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

soit :

$$g'(x) = \frac{3 - x - \ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}.$$

2 Comme x^2 est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$, $g'(x)$ a même signe que $f(x)$. On en déduit que $g'(x)$ est strictement positif sur $]0\,;\alpha[$ et strictement négatif sur $]\alpha\,;+\infty[$. Il en résulte que la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$. Elle admet un maximum en α.
D'après les limites usuelles,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

On dresse alors le tableau de variations de la fonction g.

x	0		α		∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3 On a :

$$g(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(2 - \ln\alpha).$$

Or, $f(\alpha) = 0$ donc $3 - \alpha - \ln\alpha = 0$.
On en déduit que $\ln\alpha = 3 - \alpha$.
En remplaçant cette valeur dans l'expression de $g(\alpha)$, on obtient :

$$g(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(-1 + \alpha)\ ,$$

soit, après transformation,

$$g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}.$$

4 À la question 2 de la partie A, on a établi l'encadrement :

$$2{,}20 < \alpha < 2{,}21.$$

On ne peut pas encadrer $g(\alpha)$ par $g(2{,}20)$ et $g(2{,}21)$ car g n'est pas monotone sur $[2{,}20\,;2{,}21]$.
On peut par contre utiliser le résultat de la question précédente $g(\alpha) = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ pour donner un encadrement de $g(\alpha)$.
La fonction carré étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$(1{,}2)^2 < (\alpha - 1)^2 < (1{,}21)^2.$$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$\frac{1}{2{,}21} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2{,}20}.$$

On en déduit alors que :
$$\frac{1,2^2}{2,21} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{1,21^2}{2,20}.$$
À l'aide de la calculatrice, on peut alors donner un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 0,02 :
$$0,65 < g(\alpha) < 0,67.$$

5 En remarquant que $g(1) = g(e^2) = 0$ et en exploitant le tableau de variation de la fonction g obtenu à la question 2 de la partie B, on déduit le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
$g(x) < 0$ sur $]0\,;1[$ et sur $]e^2\,;+\infty[$ et $g(x) > 0$ sur $]1\,;e^2[$.

18 Fonction et distance minimale

Énoncé p. 127

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

Partie A

1 On calcule $u'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, $u'(x) > 0$.
$\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ d'après les limites connues de la fonction ln.

2 **(a)** La fonction u est continue comme somme de fonctions définies et continues sur son ensemble de définition.
La fonction u est strictement croissante.
Le nombre $0 \in]-\infty\,;+\infty[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$.

(b) D'après la calculatrice, $1,31 < \alpha < 1,32$.

3 On a : $u(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $u(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

4 On a : $u(\alpha) = 0$, donc $\alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0$, d'où $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

1 On calcule :
$$f'(x) = 2x + 2(2-\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 - 4 + 2\ln x}{x} = \frac{2u(x)}{x}.$$

2 Comme $x > 0$, les variations de f sont données par le signe de u : f est décroissante pour $x < \alpha$ et croissante pour $x > \alpha$.

Partie C

1 On calcule :
$AM = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{f(x)}$.

CORRIGÉS

2 **(a)** La fonction g est la composée de la fonction f et de la fonction racine carrée. La fonction racine carrée étant croissante sur $]0\ ;+\infty[$, g a les mêmes variations que f.

(b) On a montré précédemment que f admet un minimum pour $x=\alpha$. Les coordonnées du point P sont alors $(\alpha\ ;\ \ln\alpha)$ ou encore $(\alpha\ ;\ 2-\alpha^2)$.

(c) On a :

$$\begin{aligned}AP &= \sqrt{\alpha^2+(2-\alpha^2-2)^2}\\ &= \sqrt{\alpha^2+\alpha^4}\\ &= \sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}\\ &= \alpha\sqrt{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

car $\alpha > 0$.

3 Un vecteur directeur de la droite (AP) est $\overrightarrow{AP}(\alpha\ ;\ -\alpha^2)$.

Par ailleurs $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$, donc le coefficient directeur de la tangente à Γ en P est $\dfrac{1}{\alpha}$. Donc un vecteur directeur de cette tangente est $\vec{d}\left(1; \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

On a :

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{d} = \alpha+(-\alpha^2)\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0.$$

Donc (AP) est bien perpendiculaire à la tangente Γ en P.

19 Suite et racine carrée

Énoncé p. 129

Lycée Saint-Joseph de Tivoli, Bordeaux

1 Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}a_n=\ln(u_n)-2 &\iff a_n+2=\ln(u_n)\\ &\iff u_n=\mathrm{e}^{a_n+2}.\end{aligned}$$

2 Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}a_n=\ln(u_n)-2 &\iff a_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2\\ &\iff a_{n+1}=\ln\left(\mathrm{e}\sqrt{u_n}\right)-2\\ &\iff a_{n+1}=\ln\mathrm{e}+\ln\sqrt{u_n}-2\\ &\iff a_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(u_n)-1\\ &\iff a_{n+1}=\frac{1}{2}\big(\ln(u_n)-2\big)\\ &\iff a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n.\end{aligned}$$

On en déduit alors que (a_n) est une suite géométrique de premier terme :

$$a_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln\left(e^3\right) - 2 = 3 - 2 = 1 \text{ et de raison } \frac{1}{2}.$$

3 De la nature de (a_n), on déduit que pour tout entier naturel n,

$$a_n = a_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

et de la question 1, on déduit que :

$$u_n = e^{a_n+2} = e^{2+\frac{1}{2^n}}.$$

4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc de l'expression précédente, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = e^2.$$

5 On peut montrer que (u_n) est décroissante et donc que $u_n \geqslant e^2$ pour tout entier naturel n. On cherche donc ici le premier entier n pour lequel :

$$\begin{aligned}
u_n - e^2 \leqslant 10^{-3} &\iff e^2\left(e^{1/2^n} - 1\right) \leqslant 10^{-3}\\
&\iff e^{1/2^n} \leqslant 10^{-3} \times e^{-2} + 1\\
&\iff \ln\left(e^{1/2^n}\right) \leqslant \ln\left(10^{-3} \times e^{-2} + 1\right)\\
&\iff \frac{1}{2^n} \leqslant \ln\left(10^{-3} \times e^{-2} + 1\right)\\
&\iff 2^n \geqslant \frac{1}{\ln\left(10^{-3} \times e^{-2} + 1\right)}\\
&\iff n \geqslant \ln\left[\frac{1}{\ln\left(10^{-3} \times e^{-2} + 1\right)}\right] \times \frac{1}{\ln 2}\\
&\iff n \geqslant 13.
\end{aligned}$$

20 Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Énoncé p. 129

Lycée Bachelard, Chelles

1 Pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) - 1 &= \frac{x^2}{2x - 1} - 1\\
&= \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1}\\
&= \frac{(x-1)^2}{2x - 1}.
\end{aligned}$$

CORRIGÉS

Or, $(x-1)^2 > 0$ et $2x-1>0$ donc, pour tout $x>1$, $f(x)-1>0$, soit $f(x)>1$.

2 **(a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = f(u_n) > 1$ d'après la question 1, donc $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ existe ($u_n \neq 0$) et $v_n > 0$.

Par conséquent $w_n = \ln(v_n)$ existe.

Les suites (v_n) et (w_n) sont bien définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}.$$

Ainsi, $v_{n+1} = \dfrac{\frac{u_n^2}{2u_n-1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}$

$$= \frac{\frac{u_n^2-(2u_n-1)}{2u_n-1}}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}$$

$$= \frac{(u_n-1)^2}{u_n^2}$$

$$= v_n^2.$$

On en déduit alors que $w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = 2\ln(v_n) = 2w_n$.

(w_n) est donc géométrique de raison 2.

De plus, $w_0 = \ln(v_0)$ et $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0} = \dfrac{1}{2}$, donc $w_0 = -\ln 2$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = -\ln 2 \times 2^n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times 2^n$$

et

$$v_n = \mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{2^n \times \ln\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

De plus,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \iff u_n = \frac{1}{1 - v_n},$$

d'où :

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

21 Valeur approchée de ln(5)

Énoncé p. 130

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

1 La calculatrice donne $\ln 5 \approx 1{,}609\,437\,9$.

2 **(a)** Pour $N = 1$, k et S prennent les valeurs successives suivantes :

k	1	2	3	4	5
S	$0+1=1$	$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$	$\frac{11}{6}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$	$\frac{25}{12}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$

On obtient donc $S = \dfrac{137}{60}$, soit $S \approx 2{,}28$.

Pour $N = 2$, k varie de 2 à 10. Alors, $S = 0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{10}$, ce qui donne $S \approx 1{,}93$.

(b) $S = \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N+1} + \cdots + \dfrac{1}{5N}$.

(c) S semble se rapprocher de $\ln 5$.

3 **(a)** Les fonctions f et g sont définies et dérivables sur $[0\,;1[$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Donc $f'(x)$ est positive sur $[0\,;1[$ et f est croissante sur cet intervalle.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x}.$$

Alors $g'(x)$ est négative sur $[0\,;1[$ et g est décroissante sur cet intervalle.

(b) La fonction f est croissante sur $[0\,;1[$ et $f(0) = 0$, donc pour tout x de $[0\,;1[$, $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geqslant 0$, ou encore $x \geqslant \ln(1+x)$.

De même, g est décroissante sur $[0\,;1[$ et $g(0) = 0$ donc $g(x) \leqslant 0$, ce qui donne $x \leqslant -\ln(1-x)$.

Ces deux inégalités donnent l'encadrement demandé pour tout x de $[0\,;1[$:

$$\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x).$$

4 **(a)** Si k est un entier compris entre n et $5n$ avec $n \geqslant 2$, alors $\dfrac{1}{k}$ appartient à $[0\,;1[$ et vérifie la double inégalité précédente :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

(b) En faisant la somme membre à membre des inégalités précédentes pour k allant de n à $5n$, on constate que le terme central est S_n.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Le terme de gauche est :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{5n}\right)\\
&=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{5n+1}{5n}\right)\\
&=\ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\times\frac{5n+1}{5n}\right)\\
&=\ln\left(\frac{5n+1}{n}\right)\\
&=\ln\left(5+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Dans le terme de droite, la somme obtenue est :

$$-\ln\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}\times\cdots\times\frac{5n-1}{5n}\right)=-\ln\left(\frac{n-1}{5n}\right).$$

Cela donne bien, pour tout $n\geqslant 2$, l'encadrement :

$$\ln\left(5+\frac{1}{n}\right)\leqslant S_n\leqslant -\ln\left(\frac{n-1}{5n}\right).$$

(c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-1}{5n}=\dfrac{1}{5}$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-\ln\left(\frac{n-1}{5n}\right)\right]=-\ln\frac{1}{5}=\ln 5.$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la limite de la suite (S_n) est égale à $\ln 5$.

22 Logarithme et distance

Énoncé p. 131

Baccalauréat Métropole 2024, sujet 2

Partie A : exploitation du graphique

1 B a pour coordonnées $(-1;-2)$ et appartient à $\mathcal{C}_f$, donc :

$$f(-1)=f(x_{\mathrm{B}})=y_{\mathrm{B}}=-2.$$

La tangente T à $\mathcal{C}_f$ en B a pour coefficient directeur 1, donc $f'(-1)=1$.

2 La fonction f n'est pas convexe sur son ensemble de définition car la courbe $\mathcal{C}_f$ passe en dessous de sa tangente T pour les valeurs x inférieures à $-1{,}7$ (à peu près). Si la fonction était convexe sur tout son ensemble de définition, elle serait au-dessus de n'importe quelle tangente, sur tout son ensemble de définition.

Ici, on a l'impression que la fonction est d'abord concave, puis convexe, avec un point d'inflexion dont l'abscisse est aux alentours de $-1{,}4$.

3 De ce que l'on peut voir de $\mathcal{C}_f$, elle ne coupe l'axe des abscisses qu'une fois, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, qui est environ 0,1 (à 10^{-1} près).

Partie B : étude de la fonction f

1 $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 2x - 1) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1 = -1$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -2} (x + 2) = 0$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -2} \ln(x + 2) = \lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$.

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = -2$.

2 f est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction polynôme et une fonction composée).

$$\begin{aligned}\forall x \in]-2\,;\,+\infty[, \quad f'(x) &= 2x + 2 + 0 + \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}.\end{aligned}$$

3 Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $x + 2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur $2x^2 + 6x + 5$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4 < 0.$$

Le trinôme est donc du signe de 2, donc strictement positif.

On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
f	$\nearrow$	||	$\nearrow$

4 Sur $]-2; +\infty[$,

- f est continue et strictement croissante ;
- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et $0 \in]-\infty; +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-2; +\infty[$, que l'on notera α.

CORRIGÉS

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0,12$.

5 Des variations de f trouvées précédemment et de la question précédente, on déduit le tableau suivant :

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

6 Pour étudier la présence d'un point d'inflexion, on va étudier le signe de la dérivée seconde de f, notée f''.

f est deux fois dérivable sur $]-2; +\infty[$, car sa dérivée première est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et donc f' est dérivable.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x+6)\times(x+2)-(2x^2+6x+5)\times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Sur $]-2; +\infty[$, $(x+2)^2 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de son numérateur $2x^2+8x+7$, de discriminant :

$$\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 7 = 8\times 8 - 8\times 7 = 8 > 0.$$

Le trinôme a donc exactement deux racines réelles distinctes, et donc s'annule en changeant de signe deux fois en :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{-8-2\sqrt{2}}{4} = -2-\frac{\sqrt{2}}{2} < -2$$

et

$$x_2 = \frac{-8+\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{-8+2\sqrt{2}}{4} = -2+\frac{\sqrt{2}}{2} > -2.$$

Sur $\left]-2; -2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $f''(x) < 0$ donc f est *concave*.

Sur $\left]-2+\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right[$, $f''(x) > 0$ donc f est *convexe*.

L'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ est donc le point d'abscisse $-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Partie C : une distance minimale

1 Le point J a pour coordonnées $(0\,;\ 1)$ et M a pour coordonnées $\big(x\,;\ g(x)\big)$.
Comme on est dans un repère orthonormé,

$$\begin{aligned} \mathrm{J}M^2 = h(x) &= (x_M - x_\mathrm{J})^2 + (y_M - y_\mathrm{J})^2 \\ &= (x-0)^2 + \big(g(x)-1\big)^2 \\ &= x^2 + \big[\ln(x+2) - 1\big]^2. \end{aligned}$$

2 **(a)** $h'(x) = \dfrac{2f(x)}{x+2}$ donc, d'après le tableau de signes de $f(x)$ trouvé à la question 5 de la partie B, on a :

x	-2		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

(b) La distance JM est minimale lorsque JM^2 est minimale, donc quand $h(x)$ est minimale.

D'après les variations de h trouvées précédemment, JM est minimale pour $x = \alpha$.

3 **(a)** On sait que α est la solution de l'équation $f(x) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0 \\ &\iff \ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2. \end{aligned}$$

(b) La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α a pour coefficient directeur :

$$g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}.$$

La droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ a pour coefficient directeur :

$$\begin{aligned} \frac{y_{M_\alpha} - y_\mathrm{J}}{x_{M_\alpha} - x_\mathrm{J}} &= \frac{g(\alpha)-1}{\alpha - 0} \\ &= \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha} = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha(-2-\alpha)}{\alpha} \\ &= -2 - \alpha. \end{aligned}$$

Le produit de ces deux coefficients directeurs est donc :

$$\frac{1}{\alpha+2} \times (-2-\alpha) \ = \ -1.$$

On en déduit donc que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.

Chapitre 6

Primitives et équations différentielles

Plan du chapitre

1 Primitives

Exercice type 1 — Lycée Alain, le Vésinet

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}.$$

1 Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+1}.$$

2 En déduire la primitive de f qui s'annule pour $x = 0$.

Voir corrigé page 162

1.1 Introduction

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitives* de f toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$ sur I.

Exemples

- Les primitives de $f(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F \ : \ x \mapsto \mathrm{e}^x + k$, $k \in \mathbb{R}$. En effet, si on dérive $F(x)$, on obtient : $F'(x) = \mathrm{e}^x = f(x)$.
- Les primitives de $g(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $G \ : \ \sin x + k$, $k \in \mathbb{R}$ car $G'(x) = g(x)$.

COURS

Remarque : il y a une infinité de primitives ; on dit qu'elles sont définies *à une constante près* (que nous avons notée k dans les exemples précédents). Mais dès que l'on impose une condition sur une de leurs valeurs, il n'en existe plus qu'une. Cette condition est parfois appelée *condition initiale*.
Par exemple, la primitive G de la fonction g définie par $g(x) = \cos x$ telle que $G(\pi) = 0$ est $G(x) = \sin x$.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

1.2 Primitives usuelles

Un tableau de dérivées usuelles donne, par lecture inverse, un tableau de primitives à connaître.

La fonction usuelle	Ses primitives
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$	$x \mapsto \ln x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

1.3 Primitives et fonctions composées

Il est souvent possible de mettre en évidence la dérivée d'une fonction composée. Le tableau suivant regroupe les cas les plus courants (u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I).

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I.
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u \neq 0$ sur I.
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$x \mapsto f(ax+b) \quad a \neq 0$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)$	F primitive de u sur I.

Exemples

Dans les exemples suivants, nous prenons $u(x) = x^2 + x + 1$, en remarquant que pour tout réel x, $u(x) > 0$.

- Une primitive de $f(x) = (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5$ est : $F(x) = \dfrac{1}{6}\left(x^2+x+1\right)^6$.
- Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ se trouve en mettant $f(x)$ sous la forme $f(x) = (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{-2}$.
  On trouve alors : $F(x) = \dfrac{1}{-2+1}\left(x^2+x+1\right)^{-2+1}$, soit $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
- Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ est : $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$.
- Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est : $F(x) = \ln\left(x^2+x+1\right)$.
- Une primitive de $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}$ est : $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+x+1}$.

De plus, une primitive de $f(x) = \sin(4x-5)$ est : $F(x) = -\dfrac{1}{4}\cos(4x-5)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

COURS

Solution de l'exercice type 1

Lycée Alain, le Vésinet

1 Commençons avant tout par réduire au même dénominateur la forme donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned} a+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x+1} &= \frac{a(x-3)(x+1)+b(x+1)+c(x-3)}{(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{ax^2-2ax-3a+bx+b+cx-3c}{x^2-2x-3} \\ &= \frac{ax^2+(-2a+b+c)x-3a+b-3c}{x^2-2x-3}. \end{aligned}$$

Nous venons ainsi d'obtenir une expression de la même forme que celle de $f(x)$.

Ainsi, si cette dernière expression doit être égale à $f(x)$ pour tout réel x de son domaine de définition, alors :

$$\frac{ax^2+(-2a+b+c)x-3a+b-3c}{x^2-2x-3} = \frac{2x^2-3x+1}{x^2-2x-3}$$

ce qui signifie que les coefficients doivent être égaux deux à deux ; autrement dit :

$$\begin{cases} a &= 2 \\ -2a+b+c &= -3 \\ -3a+b-3c &= 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a &= 2 \\ b+c &= 1 \\ b-3c &= 7 \end{cases}.$$

En soustrayant la 3ᵉ équation à la 2ᵉ, on obtient :

$$(b+c)-(b-3c) = 1-7 \quad \text{soit} \quad 4c=-6 \quad \text{et donc} \quad c=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

En remplaçant c par cette valeur dans la 2ᵉ équation, on obtient :

$$b-\frac{3}{2}=1 \qquad \text{soit} \qquad b=\frac{5}{2}.$$

Finalement,

$$f(x) = 2+\frac{5}{2}\times\frac{1}{x-3}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{x+1}.$$

2 f est la somme des fonctions :

$$u : x \mapsto 2, \qquad v : x \mapsto \frac{5}{2}\times\frac{1}{x-3}, \qquad w : x \mapsto -\frac{3}{2}\times\frac{1}{x+1}.$$

Une primitive de u est la fonction :

$$U : x \mapsto 2x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Une primitive de v est la fonction :

$$V : x \mapsto \frac{5}{2}\ln|x-3| + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Une primitive de w est la fonction :

$$W : x \mapsto -\frac{3}{2}\ln|x+1| + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

...

Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée Alain, le Vésinet

Ainsi, une primitive de f est la fonction $F = U + V + W$, soit :

$$F(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On souhaite trouver la primitive s'annulant pour $x = 0$.

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\iff 2\times 0 + \frac{5}{2}\ln|0-3| - \frac{3}{2}\ln|0+1| + C = 0 \\ &\iff 0 + \frac{5}{2}\ln 3 - 0 = -C \\ &\iff C = -\frac{5}{2}\ln 3. \end{aligned}$$

La primitive demandée est donc :

$$F(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x+1| - \frac{5}{2}\ln 3.$$

Voir énoncé page 159

2 Équations différentielles

Exercice type 2 — Nouveau programme

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' = 3y - 9$.
2. On pose (E) : $y' = 2y - x^3$.
   (a) Montrez que $y_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$ est une solution particulière de (E).
   (b) En déduire toutes les solutions de (E).

Voir corrigé page 166

2.1 y' = ay

Définition 2

Soit a un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle $y' = ay$ d'inconnue y signifie trouver toutes les fonctions y dérivables sur un intervalle I telles que pour tout réel x dans I, $y'(x) = ay(x)$.

ANECDOTE

Une *différentielle* est, dans le vocabulaire scientifique, une dérivée. C'est la raison pour laquelle une équation où l'inconnue est une fonction qui est dérivée au moins une fois est qualifiée d'équation différentielle.

COURS — INTERROS — CORRIGÉS

COURS

Exemples

- $y' + y = 0$ est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -1$ car $y' + y = 0 \iff y' = -y$.
- $y' = \frac{1}{2}y$ est aussi une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{2}$.

Propriété 1

L'équation :

$$y' = ay$$

admet pour solutions les fonctions y de la forme :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque : il existe donc une infinité de solutions, définies à une constante C près.

Exemples

- L'équation différentielle $y' = -y$ admet pour solutions :
$$y(x) = C\mathrm{e}^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
On peut facilement vérifier en calculant sa dérivée :
$$y'(x) = -C\mathrm{e}^{-x} = -y(x).$$
- L'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ admet pour solutions :
$$y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
On peut vérifier en calculant :
$$y'(x) = \frac{1}{2}C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}y(x).$$

2.2 $y' = ay + b$

Propriété 2

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$. L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions y telles que :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple : l'équation différentielle $y' = 3y + 7$ admet pour solutions :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{3x} - \frac{7}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier en calculant sa dérivée :

$$y'(x) = 3C\mathrm{e}^{3x}$$

puis en calculant :

$$y'(x) - 3y(x) = 3C\mathrm{e}^{3x} - 3\left(C\mathrm{e}^{3x} - \frac{7}{3}\right)$$

$$y'(x) - 3y(x) = 3C\mathrm{e}^{3x} - 3C\mathrm{e}^{3x} + 3 \times \frac{7}{3}$$

$$y'(x) - 3y(x) = 7.$$

On a bien : $y' - 3y = 7$, soit $y' = 3y + 7$.

2.3 y' = ay + f

Définition 3

Soit f une fonction. On appelle *équation homogène associée* à l'équation $y' = ay + f$ l'équation différentielle $y' = ay$.

Remarque : si on note (E) l'équation $y' = ay + f$, on note (E_0) son équation homogène associée.

MÉTHODE

Pour résoudre l'équation $y' = ay + f$, on utilise la méthode suivante :

1. On résout d'abord (E_0).
   On trouve les solutions de l'équation homogène associée à (E) :
   $$y_0(x) = C\mathrm{e}^{ax}.$$
2. On trouve une solution particulière de (E).
   On la note par exemple u ; dans ce cas, on a :
   $$u'(x) - au(x) = f(x).$$
3. On ajoute les solutions.
   Les solutions de (E) sont alors :
   $$y(x) = y_0(x) + u(x).$$

En Terminale, une solution particulière vous sera proposée la plupart du temps. Dans le cas contraire, il faut s'inspirer de la forme de $f(x)$ pour en trouver une. Par exemple, si $f(x)$ est un polynôme de degré 2 alors une solution particulière est aussi un polynôme de degré 2, comme l'illustre l'exemple page suivante.

COURS

Exemple : on considère l'équation différentielle :

$$y' = -2y + x^2. \qquad \text{(E)}$$

1 On résout l'équation homogène associée à (E).

$$y' = -2y \qquad (\mathrm{E}_0)$$

admet pour solutions :

$$y_0(x) = C\mathrm{e}^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2 Solution particulière de (E).

On pose $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. On souhaite montrer que y_1 est une solution particulière de (E). On calcule pour cela sa dérivée :

$$y_1'(x) = x - \frac{1}{2}.$$

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned}
-2y_1(x) + x^2 &= -2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + x^2 \\
&= -x^2 + x - \frac{1}{2} + x^2 \\
&= x - \frac{1}{2} \\
&= y_1'(x).
\end{aligned}$$

y_1 est donc bien solution de (E).

3 On conclut en ajoutant les deux résultats.
Les solutions de (E) sont donc :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice type 2

Nouveau programme

1 L'équation $y' = 3y - 9$ est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ donc d'après le cours, les solutions de cette équation sont les fonctions :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{3x} - \frac{-9}{3}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

soit, après simplification :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{3x} + 3, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

On vérifie en calculant :

$$\begin{aligned}
y'(x) - 3y(x) &= 3C\mathrm{e}^{3x} - 3\left(C\mathrm{e}^{3x} + 3\right) \\
&= 3C\mathrm{e}^{3x} - 3C\mathrm{e}^{3x} - 9 \\
&= -9.
\end{aligned}$$

On a bien $y' - 3y = -9$, soit $y' = 3y - 9$.

Solution de l'exercice type 2 (suite)

Nouveau programme

2 On pose (E) : $y' = 2y - x^3$.

(a) $y_1(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{8}$ donc :

$$y_1'(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y_1'(x) - 2y_1(x) &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} - 2\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right) \\ &= -x^3. \end{aligned}$$

Ainsi, $y_1'(x) = 2y_1(x) - x^3$. La fonction y_1 est donc une solution de (E).

(b) De la solution particulière $y_1(x)$, on déduit que l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x) = y_1(x) + y_0(x)$$

où $y_0(x)$ sont les solutions de l'équation homogène associée à (E), donc de la forme :

$$y_0(x) = C\mathrm{e}^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} + C\mathrm{e}^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Voir énoncé page 163

INTERROS

1 QCM Connaissances sur les primitives

10 min Corrigé p. 176

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la réponse exacte.

1 Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$ est :

[a] $x \mapsto \ln(x+1)$ [b] $x \mapsto \ln|x+1|$

[c] $x \mapsto 2\ln(x+1)$ [d] $x \mapsto 2\ln|x+1|$

2 Une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est :

[a] $x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+8$ [b] $x \mapsto \dfrac{1}{2}x\sqrt{x}$

[c] $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ [d] $x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$

3 Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 e^{x^3}$ est :

[a] $x \mapsto e^{x^3}+1$ [b] $x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{x^3}+\pi$

[c] $x \mapsto e^{x^2}$ [d] $x \mapsto 3e^{x^3}+5$

4 Une primitive de la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est :

[a] $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2\ln(x)-\dfrac{1}{4}x^2$ [b] $x \mapsto \ln(x)+1$

[c] $x \mapsto x\ln(x)$ [d] $x \mapsto x\ln(x)-x$

5 Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+1}}$ est :

[a] $x \mapsto 2\sqrt{x^2-3x+1}$ [b] $x \mapsto \sqrt{x^2-3x+1}$

[c] $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-3x+1}$ [d] $x \mapsto 4\sqrt{x^2-3x+1}$

2 V/F Équations différentielles

10 min Corrigé p. 176

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1 L'équation différentielle $y'+3y=0$ admet pour solutions les fonctions $f(x)=Ce^{3x}$, $C\in\mathbb{R}$.

2 La fonction $f(x)=x^2-x+2$ est une solution de l'équation différentielle $y'+2y=2x^2+3$.

3 L'équation homogène associée à l'équation différentielle $y'-5y=x$ est l'équation différentielle $y'=5y$.

4 L'équation différentielle $y'=4y-1$ admet pour solutions les fonctions $f(x)=Ce^{4x}-\dfrac{1}{4}$, $C\in\mathbb{R}$.

Primitives

3 Dérivée et primitives

★ 15 min Corrigé p. 177

Lycée Alain, Le Vésinet

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $I = \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{5x^2 - 7x + 9}{3x - 1}$$

et

$$g(x) = \frac{5x^2 - 16x + 12}{3x - 1}.$$

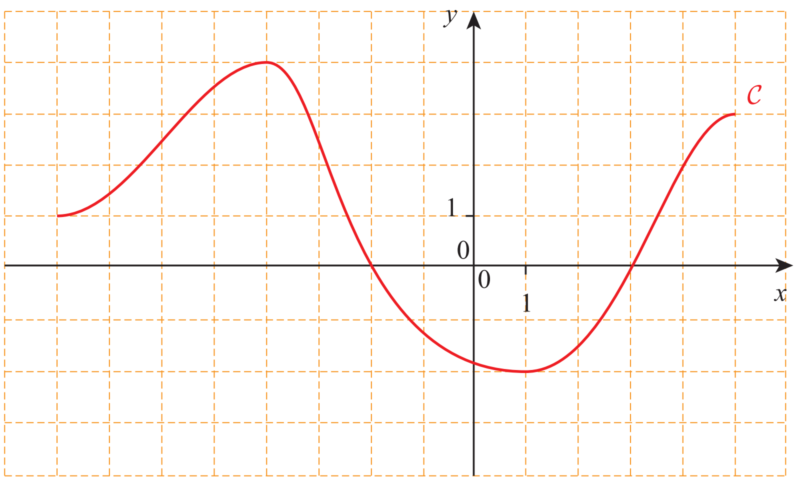
f et g sont-elles deux primitives de la même fonction sur I ?

4 Lecture graphique

★ 10 min Corrigé p. 177

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

La courbe tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur $[-8\,;5]$.



On appelle G une primitive de g sur l'intervalle $[-8\,;5]$.

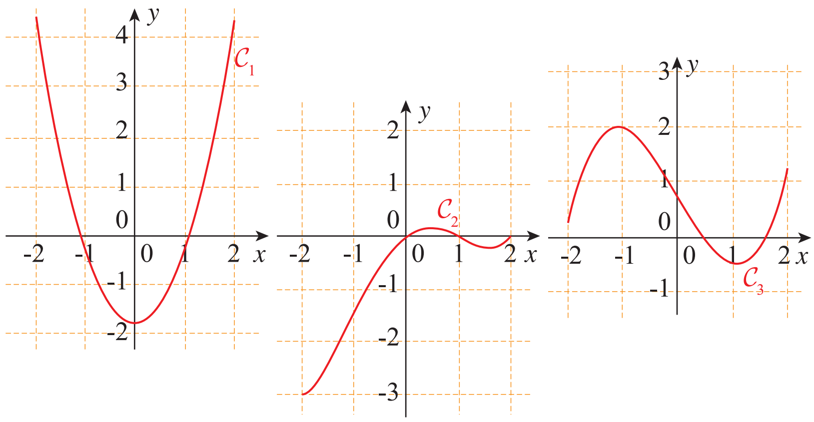
Établir le tableau de variations de G sur $[-8\,;5]$ en précisant en quelles valeurs de x elle atteint ses extrema locaux sur $]-8\,;5[$.

5 Dérivée et primitive ★★ 15 min

Corrigé p. 178

Lycée Victor Duruy, Paris

Voici les représentations graphiques d'une fonction f, de sa dérivée f' et d'une de ses primitives F. Attribuer le graphique qui convient à chaque fonction.



6 Recherches de primitives ★★ 15 min

Corrigé p. 178

Lycée Lavoisier, Paris

Soit f la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\sqrt{x+2}.$$

Déterminer des réels a, b, c et d pour que la fonction F définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)\sqrt{x+2}$$

soit une primitive de f.

7 Primitives d'une fonction rationnelle ★★ 20 min

Corrigé p. 179

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{\left(x^2 - 1\right)^2}$.

1 Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2 Déterminer des réels a, b tels que sur $\mathscr{D}_f$,

$$f(x) = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{a}{(x-1)^2}.$$

3 En déduire deux primitives F et G de f sur $]1\,;+\infty[$.

8 Primitives d'une fonction rationnelle ★★ 20 min Corrigé p. 180

Lycée Richelieu, Rueil-Malmaison

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-8}{(2x+1)^2}.$$

Déterminer les nombres réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur l'intervalle donné sachant que :

$$F(x)=\frac{ax^2+bx+c}{2x+1}\quad\text{et}\quad F(-1)=-6.$$

9 Primitive d'une fonction irrationnelle ★★★ 30 min Corrigé p. 180

Lycée Carnot, Dijon

On cherche une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$.

1. Pourquoi la fonction f admet-elle une primitive sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer qu'une fonction du type $x\mapsto\sqrt{P(x)}$, où P est un polynôme de degré 2, ne peut pas être une primitive de f.
3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Dériver $x\mapsto g(x)\sqrt{2x^2+1}$.
4. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

10 Primitives « à vue » ★★★ 20 min Corrigé p. 182

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Calculer une primitive de $u(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$ et $v(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Équations différentielles

11 Sans second membre ★ 10 min Corrigé p. 183

Lycée Claude Bernard, Paris

Soit λ un réel non nul et soit y la solution de l'équation différentielle $y'+\lambda y=0$ telle que $y(1)=1$.

Exprimer $y\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ en fonction de λ.

12 Second membre exponentiel

★ 10 min Corrigé p. 183

Lycée Buffon, Paris

1. Dériver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$.
2. En déduire une solution de l'équation différentielle $10y' + 5y = 14e^{3x}$.

13 Thermodynamique

★ 15 min Corrigé p. 183

Lycée Vaugelas, Chambéry

Un bloc de céramique est initialement (pour $t = 0$) à la température de 40°C. On le dépose dans un four à 1 000°C et on note $\Theta(t)$ la température du bloc au bout de t heures. La fonction Θ est solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$\Theta' = 0{,}2(1\,000 - \Theta).$$

1. Déterminer l'expression de $\Theta(t)$.
2. Au bout de combien de temps, la température du bloc de céramique est-elle de 500°C ?

14 Dilution d'un médicament

★ 15 min Corrigé p. 184

Lycée François 1er, Fontainebleau

On note $Q(t)$ la quantité d'une substance médicamenteuse encore présente dans le sang t heures après l'injection intraveineuse de 1,8 unités du produit.

1. À cause d'un processus d'élimination, $Q(t)$ diminue au cours du temps en suivant une loi d'évolution :

$$Q'(t) = -\lambda Q(t).$$

Déterminer λ sachant qu'au bout d'une heure la quantité de produit présente dans le sang a diminué de 30 %. Donner valeur exacte, et valeur approchée à 10^{-4}.

2. Par injection intramusculaire, la quantité présente dans le sang au bout d'un temps t (en heures) aurait été : $S(t) = 6{,}6\,t\,e^{-t}$. Déterminer une équation différentielle entre les fonctions S et S'.

15 Second membre polynomial

★ 30 min Corrigé p. 185

Lycée Balzac, Caen

On se propose de déterminer les fonctions dérivables solutions de l'équation différentielle :

$$2y' + y = x^2 + 2x - 2 \qquad (\mathcal{E})$$

1. Montrer qu'il existe une fonction polynôme g de degré 2 solution de $(\mathcal{E})$.

2 Démontrer qu'une fonction ϕ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \qquad (\mathcal{E}')$$

3 **(a)** Résoudre $(\mathcal{E}')$.
(b) En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{E})$.
(c) Déterminer celle de ces solutions dont la représentation graphique dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ passe par l'origine O.

16 Avec second membre

★★ 15 min Corrigé p. 186

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ ci-dessous :

$$y' + 3y = x + 1.$$

1 Déterminer toutes les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_0)$: $y' + 3y = 0$.

2 Expliciter la solution y de $(\mathcal{E}_0)$ telle que $y(0) = k$ pour k réel fixé.

3 En déduire que l'équation $(\mathcal{E})$ admet une et une seule solution telle que $y(0) = 1$. Déterminer cette solution.

17 Avec second membre

★★ 20 min Corrigé p. 186

Lycée François Mauriac, Bordeaux

On considère (E) l'équation différentielle $y + y' = (2x + 3)\mathrm{e}^{-x}$, où y est une fonction de la variable réelle x.

1 Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2 Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.

3 Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4 Soit g une fonction solution de (E) telle que $g(0) = 1$.
Déterminer l'expression de la fonction g.

18 Avec second membre exponentiel

★★ 15 min Corrigé p. 187

Lycée Vaugelas, Chambéry

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$.

1 Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de (E).

2 Résoudre l'équation différentielle (F) : $y' - 2y = 0$.

3 Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (F).

4 En déduire toutes les solutions de (E).

19 Second membre polynomial ★★ 30 min

Corrigé p. 188

Lycée Carnot, Dijon

On cherche les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $4y' + y = x + 6$.

1 Déterminer une fonction g affine qui soit solution de $(\mathcal{E})$.

2 Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$: $4y' + y = 0$.

(a) Montrer que si f est solution de $(\mathcal{E})$ alors $h = f - g$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

(b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de $(\mathcal{E}_1)$ alors la fonction $f = g + h$ est solution de $(\mathcal{E})$.

3 Résoudre $(\mathcal{E}_1)$, en déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

4 Déterminer, dans chacun des cas suivants, la fonction f solution de $(\mathcal{E})$, qui vérifie la condition proposée :

(a) $f(0) = 4$. **(b)** $f'(0) = 1$.

20 Fraction avec une exponentielle ★★ 25 min

Corrigé p. 189

Lycée Marie Curie, Sceaux

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = \frac{-2}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}. \tag{E}$$

1 Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-2x}$.

(a) Calculer $g(0)$ puis exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f(x)$.

(b) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

(c) En déduire l'expression de $g(x)$ puis celle de $f(x)$ de sorte que f soit solution de (E).

Objectif bac

21 Évolution d'organismes vivants ★★ 20 min Corrigé p. 190

Lycée des Arènes, Toulouse

L'étude du comportement d'organismes vivants conduit à l'équation différentielle (E) :

$$N'(t) = 2N(t) - 0{,}0045\big(N(t)\big)^2$$

où t représente le temps exprimé en heures ($t \geqslant 0$).

$N(t)$ représente l'effectif de la population à l'instant t et $N(0) = 1\,000$ est sa valeur initiale.

1 On suppose que $N(t)$ ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et on pose, pour tout $t \geqslant 0$,

$$y(t) = \frac{1}{N(t)}.$$

On pose :

$$(E') : \quad y'(t) = -2y(t) + 0{,}0045.$$

(a) Exprimer la dérivée de la fonction y en fonction de N et N'.

(b) Montrer l'équivalence suivante :

$$N \text{ est solution de } (E) \iff y \text{ est solution de } (E').$$

2 **(a)** Vérifier que la fonction z définie par :

$$z(t) = y(t) - 0{,}00225$$

vérifie l'égalité :

$$z'(t) = -2z(t).$$

(b) Résoudre cette dernière, en déduire $y(t)$ et finalement $N(t)$.

CORRIGÉS

1 QCM Connaissances sur les primitives

Énoncé p. 168

1 Réponse $\boxed{\text{d}}$. En effet, la fonction est de la forme $\frac{ku'}{u}$, dont une primitive est $k\ln|u|$, ce qui donne ici la fonction $x \mapsto 2\ln|x+1|$ (sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$).

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Dans le cours, il n'y a pas de formule donnant une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ donc il est ici nécessaire de dériver les propositions et de voir pour laquelle on obtient $\sqrt{x}$. Par chance, en dérivant la première, à savoir $x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}+8$, on obtient bien $\sqrt{x}$. Cela signifie donc que cette fonction est bien une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ (sur $\mathbb{R}_+$ bien entendu).

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, la fonction comporte une exponentielle : e^{x^3}, et la dérivée de $u : x \mapsto x^3$ est $u' : x \mapsto 3x^2$. On constate donc que $x^2\mathrm{e}^{x^3} = \frac{1}{3}u'\mathrm{e}^u$, dont une primitive est $\frac{1}{3}\mathrm{e}^u + k$, soit $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + k$. En prenant $k = \pi$, on obtient bien la proposition $\boxed{\text{b}}$.

4 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Comme dans la question 2, il est ici nécessaire de dériver les propositions afin de voir laquelle donne la fonction initiale. Il est conseillé de commencer par les propositions les plus simples à dériver, donc les propositions $\boxed{\text{b}}$, qui donne $\frac{1}{x}$, puis $\boxed{\text{c}}$, qui donne $1+\ln(x)$, puis $\boxed{\text{d}}$, qui donne $\ln(x)$. Ne donnant pas la fonction souhaitée, il ne reste que la première proposition.

5 Réponse $\boxed{\text{d}}$. En effet, $x \mapsto \frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+1}}$ est de la forme $\frac{2u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(x) = x^2-3x+1$ et $u'(x) = 2x-3$. Or, une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. Ainsi, une primitive de $\frac{2u'}{\sqrt{u}}$ est $2\times 2\sqrt{u} = 4\sqrt{u}$, soit ici $4\sqrt{x^2-3x+1}$.

2 V/F Équations différentielles

Énoncé p. 168

1 *Faux*. En effet, $y'+3y=0 \iff y'=-3y$ et on sait que les équations différentielles de la forme $y'=ay$ admettent pour solutions les fonctions de la forme $C\mathrm{e}^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

Ainsi, l'équation différentielle $y'+3y=0$ admet pour solutions les fonctions de la forme $C\mathrm{e}^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

2 *Vrai*. En effet, si $f(x) = x^2-x+2$ alors $f'(x) = 2x-1$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x)+2f(x) &= (2x-1)+2(x^2-x+2) \\ &= 2x-1+2x^2-2x+4 \\ &= 2x^2+3. \end{aligned}$$

f est donc bien solution de l'équation différentielle $y'+2y=2x^2+3$.

3 *Vrai*. Par définition, l'équation homogène associée à l'équation différentielle $y' = ay + f$ est l'équation $y' = ay$.
Or, $y' - 5y = x \iff y' = 5y + x$ donc son équation homogène associée est bien $y' = 5y$.

4 *Faux*. En effet, les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ admettent pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
Ici, $a = 4$ et $b = -1$, ce qui donne les fonctions $f(x) = Ce^{4x} - \frac{-1}{4}$, soit $f(x) = Ce^{4x} + \frac{1}{4}$, $C \in \mathbb{R}$.

3 Dérivée et primitives

Énoncé p. 169

Lycée Alain, Le Vésinet

Une solution est de dériver séparément les deux fonctions et comparer les dérivées. Si elles sont égales, les fonctions f et g sont bien primitives d'une même fonction.

Une variante est de calculer la différence des deux fonctions. Si c'est une fonction constante, alors cela prouve que ce sont deux primitives d'une même fonction (la dérivée d'une fonction constante est nulle).

Cette méthode est un peu plus rapide car on n'a pas besoin de dériver.

Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{5x^2 - 7x + 9}{3x - 1} - \frac{5x^2 - 16x + 12}{3x - 1} \\ &= \frac{5x^2 - 7x + 9 - 5x^2 + 16x - 12}{3x - 1} = \frac{9x - 3}{3x - 1} = 3. \end{aligned}$$

Comme $f - g$ est une fonction constante sur I, $(f - g)' = 0$ et donc $f' = g'$.

4 Lecture graphique

Énoncé p. 169

Lycée Jean-Pierre Vernant, Sèvres

La fonction g est la fonction dérivée de G. Le signe de g donne donc les variations de G. De plus, lorsque g s'annule en changeant de signe, G admet un extrémum local.

x	-8		-2		3		5
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de G		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Donc G atteint ses extremums locaux en -2 et 3.

CORRIGÉS

5 Dérivée et primitive

Énoncé p. 170

Lycée Victor Duruy, Paris

Pour reconnaître les différentes fonctions, on utilise le fait que le signe de la dérivée donne les variations de la fonction.

Sur l'intervalle [1 ; 2], la fonction 3 est négative puis positive. Si c'est la dérivée d'une fonction, cela signifie que cette fonction est décroissante puis croissante sur cet intervalle. Ce serait la fonction 2. Par contre, la fonction 2 est négative sur [1 ; 2], elle ne peut pas être la dérivée de la fonction 1 qui est croissante sur l'intervalle [1 ; 2], ni de la fonction 3 qui est croissante sur une partie de l'intervalle.

D'après cette étude, il semble donc que F est la fonction 2, la fonction f, dérivée de F, est la fonction 3 et f' est la fonction 1.

Vérifions que les variations des fonctions correspondent aux signes des dérivées ainsi désignées :

x	-2		$-1{,}1$		$0{,}6$		$1{,}1$		$1{,}6$		2
signe de f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
variations fonction f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
signe de f		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
variations de F		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

6 Recherches de primitives

Énoncé p. 170

Lycée Lavoisier, Paris

Pour que la fonction F soit une primitive de f, il faut et il suffit que la fonction F soit dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et que $F' = f$.

On détermine donc $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(3ax^2 + 2bx + c\right)\sqrt{x+2} + \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{\left(3ax^2 + 2bx + c\right)(2x+4) + ax^3 + bx^2 + cx + d}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{7ax^3 + (12a+5b)x^2 + (8b+3c)x + (4c+d)}{2\sqrt{x+2}}. \end{aligned}$$

Or $F' = f$ si et seulement si, pour tout $x > -2$,

$$\begin{aligned} 7ax^3 + (12a+5b)x^2 + (8b+3c)x + (4c+d) &= 2x^2\sqrt{x+2}\sqrt{x+2} \\ &= 2x^3 + 4x^2. \end{aligned}$$

On en déduit, après identification des coefficients et résolution du système ainsi obtenu : $a = \dfrac{2}{7}$, $b = \dfrac{4}{35}$, $c = \dfrac{-32}{105}$ et $d = \dfrac{128}{105}$.

Ainsi, $F(x) = \left(\dfrac{2}{7}x^3 + \dfrac{4}{35}x^2 - \dfrac{32}{105}x + \dfrac{128}{105}\right)\sqrt{x+2}$.

7 Primitives d'une fonction rationnelle

Énoncé p. 170

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

1 Une fraction rationnelle est définie pour tout réel x qui n'annule pas son dénominateur.

Or, $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$.

2 Cherchons a et b tels que, pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-2x+3}{(x^2-1)^2} &= \frac{b(x-1)^2+a(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}\\ &= \frac{(a+b)x^2+2(a-b)x+(a+b)}{(x^2-1)^2}.\end{aligned}$$

On en déduit, par identification des coefficients, que :

$$\begin{cases} a+b & = 3 \\ 2(a-b) & = -2 \end{cases}$$

On trouve alors : $a = 1$ et $b = 2$.

On a donc, pour tout réel x appartenant à $\mathscr{D}_f$,

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

3 Remarquons que la fonction f est continue sur son ensemble de définition donc elle y admet des primitives.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $]1\ ;+\infty[$ et a pour dérivée sur cet intervalle : $x \mapsto -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Une primitive de $\dfrac{2}{(x+1)^2}$ sur $]1\ ;+\infty[$ est donc $x \mapsto \dfrac{-2}{x+1}$.

De même, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est dérivable sur $]1\ ;+\infty[$ et a pour dérivée sur cet intervalle : $x \mapsto -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Une primitive de $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1\ ;+\infty[$ est donc $x \mapsto \dfrac{-1}{x-1}$.

Une primitive de f sur $]1\ ;+\infty[$ est donc :

$$x \mapsto \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{(x+1)} = \frac{1-3x}{x^2-1}.$$

En ajoutant une constante à cette fonction on obtient une autre primitive de f, donc $x \mapsto \dfrac{1-3x}{(x^2-1)} + 1$ est une primitive de f sur $]1\ ;+\infty[$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

8 Primitives d'une fonction rationnelle

Énoncé p. 171

Lycée Richelieu, Rueil-Malmaison

En remplaçant x par -1 dans l'expression de F :

$$F(-1) = -6 \quad \text{soit} \quad \frac{a-b+c}{-1} = -6 \iff a-b+c = 6.$$

Calculons par ailleurs $F'(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(2ax+b)(2x+1) - 2(ax^2+bx+c)}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{x^2(4a-2a) + x(2a+2b-2b) + (b-2c)}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2ax^2+2ax+b-2c}{(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme F est une primitive de f, on a pour tout $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &\iff \frac{2ax^2+2ax+b-2c}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-8}{(2x+1)^2} \\ &\iff 2ax^2+2ax+b-2c = 2x^2+2x-8 \\ &\qquad \left(\text{car } (2x+1)^2 \neq 0\right) \end{aligned}$$

Les deux polynômes sont donc égaux ; on identifie les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2c = -8 \\ a - b + c = 6 \text{ car } F(-1) = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b - 2c = -8 \\ -b + c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

Donc :

$$F(x) = \frac{x^2-2x+3}{2x+1}.$$

Certain(e)s pourraient se demander pourquoi on a trouvé *la* primitive et non pas *une* primitive à une constante près. C'est bien sûr à cause de la condition $F(-1) = -6$ qui impose une valeur bien particulière à la constante.

9 Primitive d'une fonction irrationnelle

Énoncé p. 171

Lycée Carnot, Dijon

1 La fonction $x \mapsto 2x^2 + 1$ est définie, et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

Donc $x \mapsto 2x^2 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$;

- La fonction $x \mapsto 4x^2 + 1$ est une fonction polynôme, donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2 Soit F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. D'après la définition d'une primitive, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.

Tout d'abord, le fait que la fonction F soit définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ impose que le polynôme P doit être à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On en déduit que, si l'on a $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Alors la fonction F définie par $F(x) = \sqrt{P(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée :

$$F'(x) = \frac{P'(x)}{2\sqrt{P(x)}} = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

L'égalité $F' = f$ équivaut pour tout réel x à :

$$\frac{4x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Étudions la limite en $+\infty$ de chacune des expressions. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} F'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a + \dfrac{b}{2x}}{\sqrt{a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}}} = \sqrt{a}.$$

Alors que :

$$\lim_{x \to +\infty} x \frac{4 + \dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}} = +\infty.$$

On ne peut donc pas avoir $F' = f$.

Donc F ne peut pas être une primitive de f.

3 Si g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)\sqrt{2x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée :

$$x \mapsto g'(x)\sqrt{2x^2 + 1} + \frac{2xg(x)}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{g'(x)(2x^2 + 1) + 2xg(x)}{\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

4 Prenons $g(x) = x$ dans l'expression ci-dessus.

On obtient :

$$\frac{g'(x)(2x^2 + 1) + 2xg(x)}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 1 + 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = f(x).$$

La fonction $x \mapsto x\sqrt{2x^2 + 1}$ est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

10 Primitives « à vue »

Énoncé p. 171

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Fonction u.

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Soit donc I l'un des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$, la fonction u possède des primitives sur I.

En examinant l'écriture de $u(x)$, on est conduit à penser à la formule de la dérivée d'un quotient du type $\dfrac{f}{g}$ soit $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. Définissons sur I les fonctions f et g par :

$$f(x) = \sin x \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

Le quotient est défini et dérivable sur I avec :

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\\ &= -u(x).\end{aligned}$$

Alors la fonction $U\ :\ x \mapsto -\dfrac{\sin x}{x}$ est une primitive de u sur I.

Fonction v.

La fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elle possède donc des primitives sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exploitons la même idée que pour la fonction u. La difficulté provient du fait que le numérateur de $v(x)$ a été effectué et simplifié. Il faut donc le ramener à la forme $f'g - fg'$. L'observation du dénominateur conduit à poser $g(x) = 1 + x^2$. On a alors $g'(x) = 2x$. La numérateur de $v(x)$ peut alors s'écrire $(1 + x^2) - x \times 2x$, ce qui fait que :

$$\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x^2) - x \times 2x}{(1 + x^2)^2}.$$

On pose donc $f(x) = x$, $g(x) = 1 + x^2$ et :

$$v(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \left(\frac{f}{g}\right)'(x).$$

La fonction :

$$V\ :\ x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$$

est donc une primitive de v sur $\mathbb{R}$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

11 Sans second membre

Énoncé p. 171

Lycée Claude Bernard, Paris

Les solutions de l'équation différentielle $y' + \lambda y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-\lambda x}$, où K est une constante.

La condition initiale $y(1) = 1$ équivaut donc à $K\mathrm{e}^{-\lambda} = 1$, soit $K = \mathrm{e}^{\lambda}$.

Donc :

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda(1-x)} \quad \text{et} \quad y\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{e}^{\lambda-1}.$$

12 Second membre exponentiel

Énoncé p. 172

Lycée Buffon, Paris

1 La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée se calcule en appliquant la formule :

$$(\mathrm{e}^{u})' = u' \cdot \mathrm{e}^{u}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{3x}.$$

2 Montrons que h est solution de cette équation différentielle.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} h'(x) = \dfrac{6}{5}\mathrm{e}^{3x} \\ h(x) = \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{3x} \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 10h'(x) + 5h(x) &= 12\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{3x} \\ &= 14\mathrm{e}^{3x}. \end{aligned}$$

MÉTHODE

Pour montrer qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle, il ne faut pas essayer de résoudre l'équation différentielle pour retrouver la fonction donnée par l'énoncé.
On vérifie que la fonction h proposée est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis on calcule $h'(x)$ et on remplace dans le premier membre de l'équation différentielle.
On s'assure alors que l'on obtient bien le second membre de l'équation.

13 Thermodynamique

Énoncé p. 172

Lycée Vaugelas, Chambéry

1 L'équation différentielle $\Theta' = 0{,}2(1\,000 - \Theta)$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}2$ et $b = 200$.

CORRIGÉS

D'après le cours, ses solutions sont les fonctions Θ définies sur $\mathbb{R}$ par $\Theta(t) = k\mathrm{e}^{-0,2t} + 1\,000$ où k désigne une constante réelle.

Or, la température initiale est de 40°C donc $\Theta(0) = 40$.

On peut alors calculer la valeur de la constante k :

$k + 1\,000 = 40$ donc $k = -960$

On a donc, pour tout réel t positif :

$$\Theta(t) = -960\mathrm{e}^{-0,2t} + 1\,000.$$

2 On cherche à calculer t tel que $\Theta(t) = 500$. Pour cela, on résout l'équation :

$$-960\mathrm{e}^{-0,2t} + 1\,000 = 500.$$

Cette équation équivaut à :

$$\mathrm{e}^{-0,2t} = \frac{50}{96}$$

soit

$$-0,2t = \ln\frac{50}{96}, \qquad \text{soit : } t = -5\ln\frac{50}{96}$$

Il faudra environ trois heures pour que la température du bloc de céramique soit de 500°C

14 Dilution d'un médicament

Énoncé p. 172

Lycée François 1er, Fontainebleau

1 L'équation différentielle proposée est de la forme $y' = ay$. D'après le cours, ses solutions sont les fonctions Q définies sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = k\mathrm{e}^{-\lambda t}$ où k désigne une constante réelle. L'énoncé nous donne sa valeur : $Q(0) = 1,8$ donc $k = 1,8$. D'autre part,

$$Q(1) = \left(1 - \frac{30}{100}\right)Q(0) = 0,70Q(0).$$

On en déduit que :

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 0,7.$$

La valeur exacte de λ est $-\ln 0,7$.

Une valeur approchée de λ à 10^{-4} près est $0,3567$.

2 La fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$S'(t) = 6,6\mathrm{e}^{-t} - 6,6t\mathrm{e}^{-t} = 6,6\mathrm{e}^{-t} - S(t)$$

d'où :

$$S'(t) + S(t) = 6,6\mathrm{e}^{-t}.$$

Ainsi, la fonction S est solution de l'équation différentielle *avec second membre* :

$$y' + y = 6,6\mathrm{e}^{-t}.$$

15 Second membre polynomial

Énoncé p. 172

Lycée Balzac, Caen

1 Soit g une fonction polynôme de degré 2, définie, pour tout réel x par :

$$g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 2ax + b.$$

Donc, g est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si :

$$4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2\,,$$

soit $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$.

La fonction polynôme g définie par :

$$g(x) = x^2 - 2x + 2$$

est donc l'unique solution polynomiale de degré 2 de $(\mathcal{E})$.

2 La fonction ϕ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\phi'(x) + \phi(x) = x^2 + 2x - 2.$$

Or, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2.$$

Donc ϕ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2(\phi - g)'(x) + (\phi - g)(x) = 0\,,$$

c'est-à-dire que $\phi - g$ est solution de $(\mathcal{E}')$.

3 **(a)** D'après les théorèmes du cours, les solutions de $(\mathcal{E}')$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \quad \text{où} \quad A \quad \text{est une constante.}$$

(b) Une fonction z est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $z - g$ est solution de $(\mathcal{E}')$.

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc les fonctions de la forme :

$$z(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2 \quad \text{où} \quad A \quad \text{est une constante.}$$

(c) Dire que la courbe représentative d'une fonction f passe par O signifie que :

$$f(0) = 0.$$

On cherche donc la solution f de $(\mathcal{E})$ qui vérifie $f(0) = 0$, soit $A = -2$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

16 Avec second membre

Énoncé p. 173

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

1 L'équation différentielle $y' + 3y = 0$ s'écrit aussi $y' = -3y$.

D'après le cours, ses solutions sont les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = A\mathrm{e}^{-3x}$$

où A est une constante réelle.

2 Il existe une et une seule valeur de A pour laquelle $y(0) = k$.

Or, $y(0) = A$, d'où $A = k$.

La solution valant k en $x = 0$ est $y(x) = k\mathrm{e}^{-3x}$.

3 Nous allons déterminer une *solution particulière* ϕ de $(\mathcal{E})$.

Comme le second membre de l'équation est une fonction affine, cherchons-la sous la forme $\phi(x) = \alpha x + \beta$, où α et β sont deux réels.

On calcule alors $\phi'(x) = \alpha$, donc $(\phi' + 3\phi)(x) = 3\alpha x + \alpha + 3\beta$.

On en déduit que ϕ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $3\alpha = 1$ et $\alpha + 3\beta = 1$.

Il vient facilement :

$$\phi(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}.$$

Soit alors y une solution de $(\mathcal{E})$. La fonction $G = y - \phi$ est alors une solution de $(\mathcal{E}_0)$. Puisque $y = G + \phi$ et $\phi(0) = \frac{2}{9}$, il est clair que $y(0) = 1$ est équivalent à $G(0) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$. En utilisant la question 1, il vient :

$$y(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + \frac{7}{9}\mathrm{e}^{-3x}.$$

Il existe bien une et une seule solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant $y(0) = 1$.

17 Avec second membre

Énoncé p. 173

Lycée François Mauriac, Bordeaux

1 $f_0(x) = (x^2 + 3x)\mathrm{e}^{-x}$ est de la forme $f_0 = u \times v$ avec :

$u(x) = x^2 + 3x$, $u'(x) = 2x + 3$, $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= (2x+3)\mathrm{e}^{-x} + (x^2+3x)\big(-\mathrm{e}^{-x}\big) \\ &= (2x + 3 - x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-x^2 - x + 3)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f_0(x) + f_0'(x) &= (x^2+3x)\mathrm{e}^{-x} + (-x^2 - x + 3)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (x^2+3x-x^2-x+3)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (2x+3)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que f_0 est solution de (E).

2 D'après le cours, l'équation (E_0) : $y + y' = 0$ admet pour solutions les fonctions :

$$y_0(x) = C\mathrm{e}^{-x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

3 Toujours d'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions y telles que $y = y_0 + f_0$, soit :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + (x^2+3x)\mathrm{e}^{-x} = (x^2+3x+C)\mathrm{e}^{-x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

4 g est solution de (E) avec $g(0) = 1$, donc :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2+3x+C)\mathrm{e}^{-x} \\ g(0) = 1 \end{cases} \implies (0^2+3\times 0+C)\mathrm{e}^{-0} = 1 \implies C = 1.$$

Ainsi, $g(x) = (x^2+3x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

18 Avec second membre exponentiel

Énoncé p. 173

Lycée Vaugelas, Chambéry

1 La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $u'(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{2x}$ donc,

$$u'(x) - 2u(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}.$$

On en déduit que la fonction u est solution de l'équation (E).

2 L'équation (F) est de la forme $y' = ay$.

Ses solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{2x}$$

où k désigne une constante réelle.

3 Une fonction v est solution de l'équation (E) si et seulement si, pour tout x réel,

$$v'(x) - 2v(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Or on sait que, pour tout x réel,

$$u'(x) - 2u(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Donc v est solution de l'équation (E) si et seulement si, pour tout x réel,

$$(v'(x) - 2v(x)) - (u'(x) - 2u(x)) = 0 \,,$$

soit :

$$(v-u)'(x) - 2(v-u)(x) = 0.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

Il en résulte que v est solution de l'équation (E) si et seulement si $v-u$ est solution de l'équation F.

MÉTHODE

Pour démontrer que deux propositions sont équivalentes, on peut effectuer une démonstration par double implication comme dans l'exercice 5 ou une démonstration directe comme dans cet exercice. Dans le cas d'une démonstration directe, on fera très attention au fait de bien conserver l'équivalence tout au long de la démonstration. En cas de doute, mieux vaut revenir à une démonstration en deux temps.

4 D'après la question précédente, une fonction v est solution de l'équation (E) si et seulement si $v-u$ est solution de l'équation F.

On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions v définies, pour tout x réel, par :

$$v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{2x},$$

soit :

$$v(x)=x\mathrm{e}^{2x}+k\mathrm{e}^{2x},$$

où k désigne une constante réelle.

19 Second membre polynomial

Énoncé p. 174

Lycée Carnot, Dijon

1 Soit g une fonction affine. Il existe deux réels a et b tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x)=ax+b.$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=a$.

La fonction g est donc solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$a=1 \quad \text{et} \quad 4a+b=6, \text{ soit } b=2.$$

L'unique solution affine de $(\mathcal{E})$ est donc :

$$g(x)=x+2.$$

2 **(a)** Soit f une solution de $(\mathcal{E})$.

Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$4f'(x)+f(x)=x+6.$$

Or, on a déjà pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$4g'(x)+g(x)=x+6.$$

Donc, en soustrayant ces deux égalités membre à membre, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$4(f-g)'(x)+(f-g)(x)=0,$$

soit encore :

$$4h' + h = 0.$$

Donc si f est solution de $(\mathcal{E})$, $h = f - g$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

(b) Réciproquement, supposons que h est solution de $(\mathcal{E}_1)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4h'(x) + h(x) = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$4g'(x) + g(x) = x + 6.$$

Donc, en ajoutant ces deux égalités membre à membre, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4(h+g)'(x) + (h+g)(x) = x + 6.$$

Donc si h est solution de $(\mathcal{E}_1)$, $f = h + g$ est solution de $(\mathcal{E})$.

3 On a montré que f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $h = f - g$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

Or, les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sont de la forme :

$$h(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{où} \quad A \quad \text{est une constante.}$$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc de la forme :

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + x + 2 \quad \text{où} \quad A \quad \text{est une constante.}$$

4 **(a)** La condition $f(0) = 4$ correspond donc à $A = 2$.

L'unique solution de $(\mathcal{E})$ qui vérifie cette condition initiale est :

$$f : x \mapsto 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} + x + 2.$$

(b) Soit y une solution de $(\mathcal{E})$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$y'(x) = -\frac{A}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} + 1.$$

Donc :

$$y'(0) = 1 \iff A = 0.$$

Il existe donc une et une seule solution f de $(\mathcal{E})$ qui vérifie la condition $f'(0) = 1$. C'est la fonction $f : x \mapsto x + 2$.

20 Fraction avec une exponentielle

Énoncé p. 174

Lycée Marie Curie, Sceaux

1 D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que $y(0) = 1$ donc que $C = 1$.

Ainsi, la fonction demandée est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$.

2 **(a)** On a : $g(0) = f(0)\mathrm{e}^0 = f(0) = \ln 2$.

La fonction g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$g'(x) = f'(x)e^{-2x} - 2f(x)e^{-2x} = \left[f'(x) - 2f(x)\right]e^{-2x}.$$

(b) f solution de (E) $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \left[\frac{-2}{1+e^{-2x}}\right]e^{-2x}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

(c) D'après ce qui précède, la solution f est la solution de (E) vérifiant $f(0) = \ln 2$ si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

Or, g' est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u(x) = 1+e^{-2x}$ et $u'(x) = -2e^{-2x}$.

Ainsi, $g(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right) + k$, avec $g(0) = \ln 2$, donc $k = 0$.

Donc $g(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

On en déduit alors que :

$$f(x) = e^{2x}g(x) = e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right).$$

21 Évolution d'organismes vivants

Énoncé p. 175

Lycée des Arènes, Toulouse

1 **(a)** La fonction N est dérivable et ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ donc la fonction y est aussi dérivable sur $[0, +\infty[$ et, pour tout réel t positif,

$$y'(t) = -\frac{N'(t)}{\left(N(t)\right)^2}.$$

(b) $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$ donc $N(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

De l'expression de $y'(t)$, on tire :

$$N'(t) = -\frac{y'(t)}{\left(y(t)\right)^2}.$$

« N est solution de (E) » équivaut à dire que pour tout réel t positif,

$$N'(t) = 2N(t) - 0{,}0045\left(N(t)\right)^2.$$

En remplaçant $N'(t)$ et $N(t)$ en fonction de y, on obtient :

« N est solution de (E) » équivaut à dire que pour tout réel t positif,

$$-\frac{y'(t)}{\left(y(t)\right)^2} = \frac{2}{y(t)} - \frac{0{,}0045}{\left(y(t)\right)^2},$$

soit après transformation,

$$y'(t) = -2y(t) + 0{,}0045.$$

On a donc bien démontré que « N est solution de (E) » équivaut à « y est solution de (E') », où (E') est l'équation :

$$y'(t) = -2y(t) + 0{,}0045.$$

2 **(a)** L'équation :

$$y'(t) = -2y(t) + 0{,}0045$$

s'écrit aussi :

$$y'(t) = -2\big(y(t) - 0{,}00225\big) \qquad (1).$$

Si on pose :

$$z(t) = y(t) - 0{,}00225,$$

la fonction z est dérivable sur $[0, +\infty[$et, pour tout t positif,

$$z'(t) = y'(t).$$

En remplaçant dans l'équation (1), on a :

$$y'(t) = z'(t) = -2 - 2\big(\underbrace{y(t) - 0{,}00225}_{=z(t)}\big)$$

soit :

$$z'(t) = -2z(t).$$

(b)
- D'après le cours, les solutions de l'équation :

$$z'(t) = -2z(t)$$

sont les fonctions z définies pour tout t positif par :

$$z(t) = ke^{-2t}$$

où k désigne une constante réelle.

- $y(t) = z(t) + 0{,}00225$ donc, pour tout réel t positif,

$$y(t) = ke^{-2t} + 0{,}00225.$$

- On détermine enfin $N(t)$. On sait que $N(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.
On obtient donc en remplaçant $y(t)$ par sa valeur :

$$N(t) = \frac{1}{ke^{-2t} + 0{,}00225}.$$

Or, par hypothèse, $N(0) = 1000$. On détermine alors la valeur de k en résolvant l'équation :

$$\frac{1}{k + 0{,}00225} = 1\,000.$$

On en déduit que $k = -0{,}00125$.
Finalement,

$$N(t) = \frac{1}{0{,}00225 - 0{,}00125e^{-2t}}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

Chapitre
7

Intégration

Plan du chapitre

Exercice type 1 **Lycée Henri IV, Paris**

On appelle $A(x)$ l'aire comprise entre la droite d'équation $y = 3$ et la parabole d'équation $y = x^2$.
Calculer $A(x)$.

Voir corrigé page 198

1 Intégrale et aire

1.1 Introduction

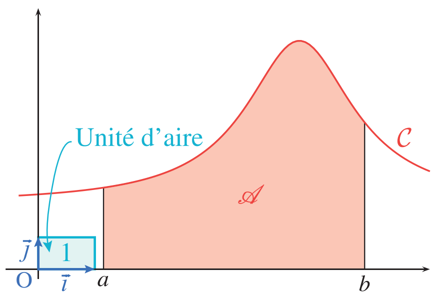
Définition 1 : unité d'aire

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle *unité d'aire* l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Définition 2 : intégrale d'une fonction positive

Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un intervalle $[a\,;b]$, et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'*intégrale* de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\,;\, b]$; elle est exprimée en unité d'aire (en abrégé : ua). On la note :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



COURS

Définition 3 : intégrale d'une fonction négative

Soit f une fonction *continue* et *négative* sur un intervalle $[a\ ;b]$, et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'opposé de l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ sur $[a\ ;\ b]$.

On étend la définition du symbole $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ au cas $a > b$ en posant alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

C'est l'*intégrale de a à b* de f (attention à ne pas évoquer l'*intervalle* $[a\ ;b]$ si $a > b$).

1.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 1 : relation de Chasles

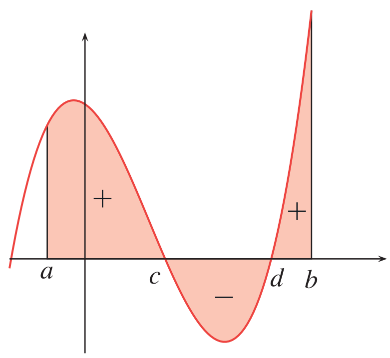
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels appartenant à I. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

ATTENTION

Il n'existe aucune condition d'ordre entre les réels a, b et c. La relation de Chasles n'impose pas d'avoir $a < b < c$.

Exemple : quand la fonction f n'est pas de signe constant sur $[a\ ;\ b]$, on utilise la relation de Chasles pour déterminer son intégrale de a à b.



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x}_{>0} + \underbrace{\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x}_{<0} + \underbrace{\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{>0}.$$

L'intégrale désigne alors une *aire algébrique*, c'est-à-dire une aire avec un signe (positif ou négatif).

Sur cet exemple, il semble que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ car la somme de l'aire des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses semble supérieure à celle du domaine situé en dessous.

Propriétés 1

Pour tout réel a,

- si f est impaire, alors :
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,;$$
- si f est paire, alors :
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$
- si f est périodique de période T, alors :
$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : la fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire et 2π-périodique donc :

$$\forall\ a \in \mathbb{R}, \quad \int_{-a}^a \sin x\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^{a+2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 2 : linéarité de l'intégrale

Quelles que soient les fonctions continues f et g, pour tous réels λ et μ :

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 \big(3x^2 - 5x + 1\big)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - 5\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x.$

Propriétés 2 : positivité de l'intégrale

- Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$
- Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

COURS

Exemple : sur $[0\ ;\ 1]$, $x^2 \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Propriété 3 : intégration des inégalités

Si pour tout nombre réel x de $[a\ ;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$, alors :

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : on sait que pour $x > 0$, $\ln x < x$ donc $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x < \int_1^2 x\,\mathrm{d}x$.

2 Calcul d'une intégrale

2.1 Lien entre intégrale et primitive

Théorème 3

Si f est une fonction continue positive sur $[a\ ;\ b]$ alors la fonction F_a définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de $f(x)$ qui s'annule en a.

Corollaire 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, et soit F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarque : $F(b) - F(a)$ est aussi noté $\left[F(x)\right]_a^b$.

Exemple : on sait qu'une primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ donc :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}.$$

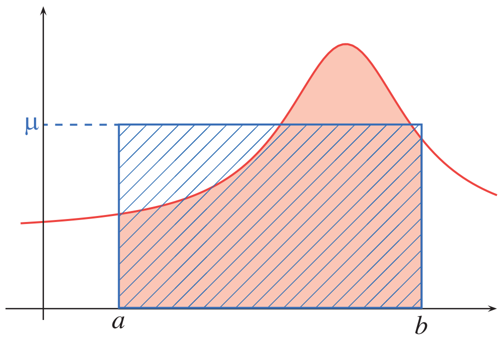
2.2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. On appelle *valeur moyenne de* f le nombre μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Graphiquement, cette valeur correspond à la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que le domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur $[a\ ;\ b]$:



L'aire du rectangle hachuré est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriété 4

Si f est une fonction continue et T-périodique alors :

$$\mu = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

POUR ALLER PLUS LOIN

En sciences physiques, la *valeur efficace* est définie comme étant la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la fonction : $e = \sqrt{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$.

COURS

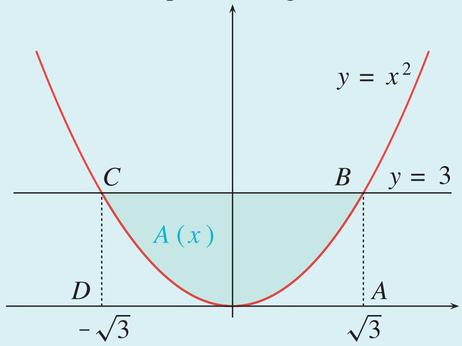
INTERROS

CORRIGÉS

COURS

Solution de l'exercice type 1 — **Lycée Henri IV, Paris**

Le cas qui nous intéresse correspond à la figure :



L'aire $A(x)$, en unité d'aire, est donc égale à l'aire du rectangle $ABCD$ moins « l'aire sous la courbe » :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \text{Aire}(ABCD) - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 6\sqrt{3} - 2\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{d}x \quad (\text{car } x \mapsto x^2 \text{ est paire}) \\
&= 6\sqrt{3} - 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 6\sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \\
&= 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Voir énoncé page 193

3 Intégration par parties

Exercice type 2 — **Lycée Français Internationale de Delhi**

Soit n un entier naturel.
Exprimer en fonction de n l'intégrale :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} x^n \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Voir corrigé page 199

Théorème 4

Soient u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a\ ;\ b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)\,\mathrm{d}x = \left[(uv)(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$ sur $[1 ; \mathrm{e}]$, on obtient $u(x) = x$ (à une constante près) et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Le théorème donne alors :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[x \times \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= [\mathrm{e} \ln \mathrm{e} - 1 \ln 1] - \int_1^{\mathrm{e}} 1 \,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - [x]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1)\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = 1$.

POUR ALLER PLUS LOIN

L'intégration par parties est un outil très puissant. Si l'on s'inspire de l'exemple précédent, on peut écrire pour $a > 0$ et $x > 0$:

$$\int_a^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = x \ln x - x - (a \ln a - a).$$

On peut en conclure qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Français Internationale de Delhi

Posons :

$u'(x) = x^n$ $\qquad$ $v(x) = \ln x$

Alors,

$u(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

et par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}I_n &= \left[u(x)v(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

...

Solution de l'exercice type 2 (suite)

$$
\begin{aligned}
I_n &= \left(\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1}\ln \mathrm{e} - \frac{1^{n+1}}{n+1}\ln 1\right) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\left(\mathrm{e}^{n+1} - 1\right) \\
&= \frac{(n+1)\mathrm{e}^{n+1} - \mathrm{e}^{n+1} + 1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n\mathrm{e}^{n+1} + 1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Voir énoncé page 198

1 QCM Calcul d'intégrales

15 min Corrigé p. 213

Pour chaque question, donner la bonne réponse parmi les propositions faites.

1 Soit $I = \int_{-1}^{1} |e^x - 1| \, dx$. La valeur de I est :

a $\left|-\left|\frac{1}{e} - 1\right|\right| - |e - 1|$ b $2(e - 1)$

c $e + \dfrac{1}{e}$ d $e + \dfrac{1}{e} - 2$

2 Soit $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 1} \, dx$. La valeur de I est :

a $2 \ln 11$ b $-\dfrac{1}{11}$ c $\ln 11$ d $\dfrac{1}{2} \ln 11$

3 Soit $I = \displaystyle\int_0^4 \big(|x - 1| + |x - 2|\big) \, dx$. La valeur de I est :

a 6 b 7 c 8 d 9

4 Soit $I = \displaystyle\int_0^1 x e^{-x} \, dx$. La valeur de I est :

a 0 b e c $1 - 2e^{-1}$ d 1

2 V/F Propriétés des intégrales

10 min Corrigé p. 214

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1 La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est e.

2 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^5 + x^3) \sin^2 x \, dx = 0$.

3 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos x} \, dx = \int_{-\pi}^{0} e^{\cos x} \, dx$.

4 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos x} \, dx = \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{\cos x} \, dx$.

3 V/F Intégrales et ordre

10 min Corrigé p. 214

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1 Si l'intégrale d'une fonction sur un intervalle est positive alors la fonction est positive.

2 L'intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle est positive.

3 Si l'intégrale d'une fonction est nulle sur un intervalle $[a ; b]$ alors la fonction est nulle sur $[a ; b]$.

4 Pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{x^2} t^2 \, dt \geqslant 0$.

INTERROS

4 V/F Fonction définie par une intégrale

15 min Corrigé p. 215

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = e^{-x^2} - 1$.
2. La fonction $F \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) - F(1) \leqslant \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.
4. Pour tout réel x, $F(x) = F(-x)$.

5 V/F Suite d'intégrales

15 min Corrigé p. 216

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t + 1}\,dt.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout naturel n non nul, I_n est positive.
2. Pour tout naturel n non nul, $I_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
3. La suite (I_n) est décroissante.
4. Pour tout entier naturel n non nul, $I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \ln(n+2)$.

Pratique du calcul intégral

6 Pratique du calcul intégral

★ 10 min Corrigé p. 216

Lycée Blaise Pascal, Brie-Comte-Robert

Calculer les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos t\,dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)dt$.

7 Intégrales de fonctions polynômes

★ 10 min Corrigé p. 217

Lycée Marie Curie, Sceaux

Calculer les intégrales :

$$I_3 = \int_0^1 \left(t^3 + 2t^2 + 4t + 1\right)dt \text{ et } I_4 = \int_{-3}^{3} \left(12t^{17} + 2t^3 - t\right)dt.$$

8 Primitive et calcul d'aire

★ 10 min Corrigé p. 218

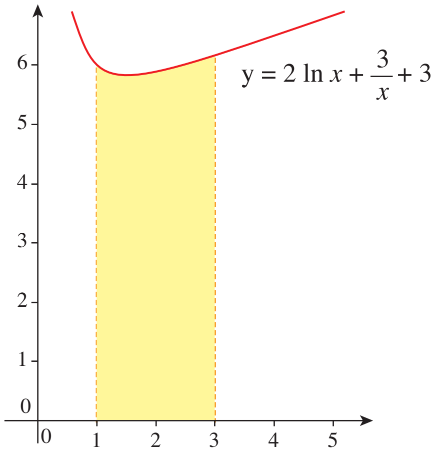
Lycée Bonaparte, Toulon

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x + \frac{3}{x} + 3.$$

1 On définit la fonction F sur $]0\,;+\infty[$ par :
$F(x) = (2x+3)\ln x + x$.
Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2 Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine colorié sur le graphique ci-contre.



9 Exponentielle et racine carrée

★ 10 min Corrigé p. 218

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Calculer les intégrales :

$$I_5 = \int_{-\ln 2}^{\ln 3} (1 - 2e^t)\,dt \quad \text{et} \quad I_6 = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

10 Bénéfice moyen

★★ 15 min Corrigé p. 219

Cité scolaire internationale, Grenoble

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec x appartenant à $[0\,;5]$.

Les bénéfices ou les pertes de l'entreprise sont modélisés par la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = xe^x - e^x - 8$.

Pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice, et si $f(x)$ est négatif, l'entreprise subit une perte.

1 **(a)** Montrer que la fonction F définie par $F(x) = xe^x - 2e^x - 8x$ sur $[0\,;5]$ est une primitive de f sur $[0\,;5]$.

(b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

2 L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice sur $[3\,;5]$. Donner l'arrondi à l'euro près.

INTERROS

11 À l'aide d'une primitive

★★ 15 min Corrigé p. 219

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Trouver les réels a, b et c tels que :

$$\frac{x^2-5x+7}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$

puis calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2-5x+7}{x^3-5x^2+8x-4}\,\mathrm{d}x$.

12 Un classique... dans le supérieur !

★★ 20 min Corrigé p. 220

Lycée Victor Hugo, Besançon

Soit :

$$I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
2. En déduire la dérivée de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.
3. Calculer la valeur de I.

13 Fonction rationnelle

★★ 25 min Corrigé p. 221

Lycée Balzac, Caen

Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x)=-\dfrac{8x^2+32x+2}{(4x^2-1)^2}$.

1. Montrer que f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)=\frac{a}{(2x+1)^2}+\frac{b}{(2x-1)^2}$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

14 Dérivées de fonctions intégrales

★★★ 15 min Corrigé p. 222

Lycée Janson de Sailly, Paris

Calculer en fonction de x la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\quad \text{et}\quad G(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

15 Valeur approchée d'une intégrale ★★★ 45 min

Corrigé p. 223

Lycée du Parc, Lyon

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\dfrac{1}{1-x}$.

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1 En étudiant les variations de f, démontrer que pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$

$$1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

2 **(a)** Vérifier que pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{1-x}$.

(b) En déduire que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

(d) Déduire de la question 1 que : $\dfrac{1}{24} \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}}$.

(e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision de 0,01.

Intégration et suites

16 Suites définies par des intégrales ★ 20 min

Corrigé p. 225

Lycée du Parc, Lyon

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x$.

1 Montrer que l'on définit ainsi une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont chaque terme est positif ou nul.

2 Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\frac{1}{1+2x+4x^2} \leqslant a.$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

INTERROS

17 Intégrale d'une fonction irrationnelle ★★

15 min Corrigé p. 227

Lycée Saint-Jean-de-Passy, Paris

On pose pour tout entier naturel n non nul : $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Par des considérations d'aires, montrer que $J_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
2. Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant J_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

   (b) Déterminer la limite de J_n.

18 Une autre suite d'intégrales ★★★

30 min Corrigé p. 228

Lycée Balzac, Caen

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les intégrales : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$.

1. **(a)** Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0.

   (b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
2. **(a)** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (b) Prouver que pour tout entier n et tout $x \in [0\,;1]$:
   $$\frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x+1} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{nx}.$$
   En déduire un encadrement de I_n.
3. À partir de cet encadrement, déterminer les limites de I_n et de $\dfrac{I_n}{\mathrm{e}^n}$.

19 Suite et algorithme ★★★

20 min Corrigé p. 230

Lycée Victor Duruy, Paris

La suite (u_n) est définie pour tout n par :
$$u_n = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

1. **(a)** Calculer u_0 et u_1.

   (b) Calculer u_n en fonction de n.
2. Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
3. Donner une interprétation géométrique de S_n.
4. Déterminer la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

   On remarquera que $\mathrm{e}^{-n} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Louen a écrit l'algorithme ci-dessous pour trouver la limite de S_n à 10^{-A} près, avec A entier positif.

```
Variables
     A et K sont entiers naturels
     S est réel
Entrée
     Donner une valeur à A
Traitement
     K ← 0
     S ← 0
     U ← 1-e^-1
     Tant que U⩾10^-A Faire :
         S ← S+U
         K ← K+1
         U ← e^-K – e^-(K+1)
     Fin de Tant que
Sortie
         Afficher S
```

Après avoir programmé sa calculatrice, il obtient 0,993 262 053 pour $A = 2$ et considère que son algorithme répond à la question posée.

Par contre, si on entre $A = 1$, il s'affiche 0,864 664 716 et pour $A = 4$, il s'affiche 0,999 876 590.

Justifier que ce ne sont pas des approximations ni à 10^{-1} ni à 10^{-4} près de la limite de S_n.

Quelle erreur a fait Louen en concevant son algorithme ?

20 Avec un algorithme ★★★ 30 min Corrigé p. 231

Lycée La Bruyère, Versailles

On considère la suite définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx.$$

1 **(a)** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geqslant 0$.

(b) Étudier la monotonie de la suite (I_n).

(c) En déduire que la suite est convergente. On note L sa limite (dans cette question on ne demande pas de la calculer).

2 **(a)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x^2}$.
Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

est une primitive de g.

(b) En déduire la valeur de I_1.

(c) Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction H_n par : $H_n(x) = x^{n+1}G(x)$.
Montrer que H_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout réel x, $H_n'(x)$. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$I_{n+2} + \frac{n+1}{2}I_n = \frac{1}{2}e.$$

(d) Calculer I_3 et I_5.

3 Compléter l'algorithme suivant de façon à obtenir en sortie le terme I_{23}.

```
Initialisation
     n ← 1
     I ← ...
Traitement
     Tant que n < ...
         I ← (1/2)e − ((n+1)/2) I
         n ← n + 2
     Fin de Tant que
Sortie
     Afficher I
```

Écrire alors un programme Python correspondant à cet algorithme.

4 Déterminer la valeur de L.

Intégration par parties

21 Logarithme népérien

★ 10 min Corrigé p. 233

Lycée Lavoisier, Paris

En intégrant par parties, calculer :

$$I = \int_1^2 (x+1)\ln x \, dx.$$

22 Produit du logarithme par un carré ★ 15 min

Corrigé p. 234

Lycée Buffon, Paris

On définit les intégrales suivantes :

$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Calculer I_0 puis I_1.

23 Logarithme d'un quotient ★ 15 min

Corrigé p. 234

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.
3. On note $\mathcal{A}$ une primitive de la fonction ln.

   (a) Exprimer en fonction de $\mathcal{A}$ l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$.

   (b) Achever le calcul.

24 Calculs par combinaisons linéaires ★ 25 min

Corrigé p. 235

Lycée Balzac, Caen

1. En intégrant deux fois par parties, calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \, \mathrm{d}x$.
2. On note :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

   (a) Calculer $I + J$.

   (b) Calculer $I - J$.

   (c) En déduire I et J.

25 Exponentielle et trigonométrie ★★ 10 min

Corrigé p. 236

Lycée Saint-Joseph, Reims

On considère F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-x} \cos x \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad G(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

INTERROS

1 En utilisant les deux possibilités d'intégration par parties sur la première de ces intégrales, montrer que :

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}\cos t - G(t)$$
$$\text{et } F(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t + G(t)$$

2 Déterminer explicitement $F(t)$ et $G(t)$.

26 Trigonométrie et logarithme

★★ 20 min Corrigé p. 237

Lycée Henri IV, Paris

Pour tout réel $x \geqslant 1$, on pose :

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant par parties, calculer $F(x)$ et $G(x)$.

27 Exponentielle et trigonométrie

★★ 25 min Corrigé p. 238

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Pour tout entier n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

1 Calculer I_0 et J_0.

2 Soit n un entier naturel non nul.

(a) En intégrant par parties, montrer que I_n et J_n vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

(b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3 Déterminer les limites des suites (I_n) et (J_n).

28 Double intégration par parties

★★★ 15 min Corrigé p. 239

Lycée Thiers, Marseille

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

1 En intégrant deux fois par parties, calculer I_n en fonction de n.

2 Calculer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Objectif bac

29 Suites de fonctions

★★★ 60 min Corrigé p. 240

Polynésie, sujet 1, 2025

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

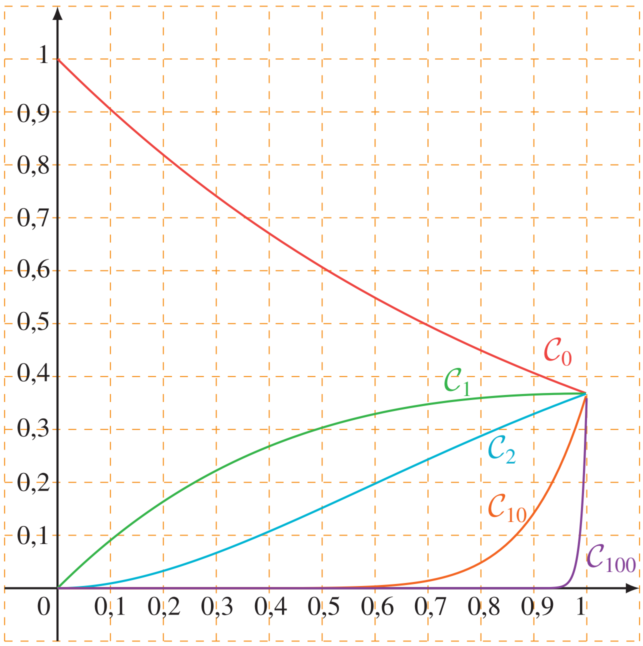
$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

On étudie les fonctions f_n sur $[0\,;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1 Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0$,$\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2$,$\mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{100}$.



(a) Donner une interprétation graphique de I_n.

(b) Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2 Calculer I_0.

3 **(a)** Soit n un entier naturel. Démontrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$:

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4 Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5 En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

6 **(a)** Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.

(b) Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

7 On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.

On a importé la constante e.

```python
def mystere(n):
    I = 1 - 1/e
    L = [I]
    for i in range(n):
        I = (i + 1)*I - 1/e
        L.append(I)
    return L
```

Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?

1 QCM Calcul d'intégrales

Énoncé p. 201

1 Réponse $\boxed{\text{d}}$. En effet,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \left|e^x - 1\right| \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} (1 - e^x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (e^x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x - e^x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x - x\right]_{0}^{1} \\ &= e + \frac{1}{e} - 2. \end{aligned}$$

MÉTHODE

On ne peut pas intégrer directement une fonction dont l'écriture comporte des valeurs absolues. Il est indispensable de commencer par donner une écriture de la fonction sans valeur absolue en distinguant différents intervalles. L'intégrale se calcule ensuite en appliquant la relation de Chasles.

2 Réponse $\boxed{\text{a}}$. L'étude de la fonction $u\ :\ x \mapsto x^3 + x^2 - 1$ montre que, sur $[1; 2]$, cette fonction est croissante et, comme $u(1) = 1$, $u(x) > 0$ sur $[1; 2]$.

De plus, $u'(x) = 3x^2 + 2x$ ce qui signifie que $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{2u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x$ et donc que :

$$I = 2\left[\ln u(x)\right]_1^2 = 2\Big(\ln\left(u(2)\right) - \ln\left(u(1)\right)\Big) = 2(\ln 11 - \ln 1) = 2\ln 11.$$

3 Réponse $\boxed{\text{d}}$. On retrouve la même situation que la première question. On doit commencer par simplifier l'écriture de la fonction de manière à ne plus avoir de valeurs absolues puis appliquer la relation de Chasles.

$$I = \int_0^1 (-2x + 3)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}x + \int_2^4 (2x - 3)\,\mathrm{d}x = 9.$$

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. On effectue une intégration par parties pour trouver la valeur de I. Pour cela, on pose :

$$u(x) = x \qquad \text{et} \qquad v'(x) = e^{-x}.$$

Ainsi,

$$u'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad v(x) = -e^{-x}.$$

COURS · INTERROS · CORRIGÉS

CORRIGÉS

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} I &= \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -1\mathrm{e}^{-1} + 0\mathrm{e}^{-0} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \left(-\mathrm{e}^{-1} + 1\right) \\ &= 1 - 2\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

2 V/F Propriétés des intégrales

Énoncé p. 201

1 *Faux.* La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1.$$

2 *Vrai.* La fonction intégrée est une fonction impaire sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ donc, d'après les propriétés du cours, son intégrale sur le segment $[-1\,;\,1]$ est nulle.

MÉTHODE

Lorsque les bornes d'intégration sont deux réels opposés, on commencera toujours par étudier rapidement la parité de la fonction intégrée. Si la fonction est impaire, l'intégrale est nulle et il n'y a pas lieu de se lancer dans des calculs.

3 *Vrai.* La fonction intégrée est une fonction paire puisque, pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$ et les intervalles d'intégration sont symétriques par rapport à 0.

4 *Vrai.* La fonction intégrée est une fonction périodique de période 2π et on intègre sur des intervalles décalés d'une période.

3 V/F Intégrales et ordre

Énoncé p. 201

1 *Faux.* La réciproque du théorème de positivité est fausse.

Soit :

$$I = \int_{-1}^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2}.$$

On remarque que l'intégrale I est positive alors que la fonction intégrée est négative entre -1 et 0.

2 *Faux*. Il manque une hypothèse pour pouvoir appliquer le théorème de positivité de l'intégrale : les bornes doivent être dans l'ordre croissant.

Ainsi $I = \displaystyle\int_3^1 2t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_3^1 = -8$.

ATTENTION

Pour appliquer un théorème, on doit impérativement s'assurer que toutes les conditions d'application sont réunies et les mentionner sur la copie. Lors de l'apprentissage du cours, on mettra bien en évidence ces conditions en liaison avec la démonstration du théorème.

3 *Faux*. Si on intègre une fonction continue et impaire sur un intervalle dont les deux bornes sont opposées, alors l'intégrale est nulle alors que la fonction n'est pas nulle.

Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^1 t^3\,\mathrm{d}t = 0$ alors que la fonction cube n'est pas nulle sur $[-1\,;\,1]$.

4 *Faux*. Si $x = \dfrac{1}{2}$ alors $x^2 = \dfrac{1}{4}$. On intègre alors une fonction continue, positive avec les bornes dans l'ordre décroissant. L'intégrale sera donc négative.

4 V/F Fonction définie par une intégrale

Énoncé p. 202

1 *Faux*. D'après le cours, comme la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et la fonction F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Par suite, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. On a donc, pour tout réel x, $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

2 *Faux*. Si x est négatif, on intègre une fonction continue et positive avec les bornes dans l'ordre décroissant donc on obtient un résultat négatif.

3 *Vrai*. En effet, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive, avec les bornes dans l'ordre croissant donc, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, $F(1) \geqslant 0$.

Par conséquent, $F(x) - F(1) \leqslant F(x)$.

4 *Faux*. Considérons la différence $F(x) - F(-x)$.

Pour tout réel x,

$$F(x) - F(-x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f est paire et strictement positive sur l'intervalle d'intégration donc l'intégrale n'est pas nulle et par suite, $F(x)$ et $F(-x)$ ne sont pas égaux.

CORRIGÉS

5 V/F Suite d'intégrales

Énoncé p. 202

1 *Vrai*. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{e^t}{e^t + 1}$. La fonction f est continue et positive sur $[\ln n\ ;\ \ln(n+1)]$. On intègre avec les bornes dans l'ordre croissant donc, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, I_n est positive.

2 *Faux*. La fonction f est continue sur l'intervalle $[\ln n\ ;\ \ln(n+1)]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle. Elle est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ donc elle admet pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \ln\left(e^t + 1\right)$. On en déduit que, pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n = \ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\frac{n+2}{n+1}.$$

3 *Vrai*. Pour étudier le sens de variation de la suite (I_n), on cherche le signe de $I_{n+1} - I_n$.

Pour tout entier naturel n non nul,

$$I_{n+1} - I_n = \ln\frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2}.$$

Or, $(n+3)(n+1) = n^2 + 4n + 3 = (n+2)^2 - 1$.

Ainsi,$(n+3)(n+1) < (n+2)^2$.

Par suite,

$$\frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2} < 1 \qquad \text{et} \qquad \ln\frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2} < 0.$$

On en déduit que $I_{n+1} - I_n$ est négatif et la suite (I_n) est décroissante.

4 *Faux*. On transforme la somme $I_1 + I_2 + \cdots + I_n$ en appliquant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + \cdots + I_n &= \int_0^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t+1}\,dt \\ &= \left[\ln(e^t+1)\right]_0^{\ln(n+1)} \\ &= \ln(n+2) - \ln 2 \\ &= \ln\frac{n+2}{2}. \end{aligned}$$

6 Pratique du calcul intégral

Énoncé p. 202

Lycée Blaise Pascal, Brie-Comte-Robert

La fonction cosinus est continue sur $[0\ ;\ \pi]$ donc elle admet des primitives sur $[0\ ;\ \pi]$ et l'intégrale I_1 existe.

De même, la fonction sinus est continue sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle et l'intégrale I_2 existe.

Calcul de I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} \cos t \, \mathrm{d}t \\ &= [\sin t]_0^{\pi} \\ &= \sin \pi - \sin 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calcul de I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

7 Intégrales de fonctions polynômes

Énoncé p. 202

Lycée Marie Curie, Sceaux

Calcul de I_3 :

La fonction : $t \mapsto t^3 + 2t^2 + 4t + 1$ est continue sur $[0 ; 1]$ donc elle admet des primitives sur $[0 ; 1]$ et l'intégrale I_3 existe.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 4t + 1) \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 + t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 2 + 1 \\ &= \frac{47}{12}. \end{aligned}$$

Calcul de I_4 :

La fonction $t \mapsto 12t^{17} + 2t^3 - t$ est continue sur $[-3 ; 3]$. On remarque de plus que cette fonction est impaire. Or, d'après le cours, si la fonction f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$. On en déduit :

$$I_4 = \int_{-3}^{3} (12t^{17} + 2t^3 - t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

ATTENTION

On pensera bien à vérifier que les trois conditions d'application du théorème sont remplies : la fonction doit être continue, les bornes de l'intervalle d'intégration doivent être deux nombres opposés et la fonction doit être impaire.

CORRIGÉS

8 Primitive et calcul d'aire

Énoncé p. 203

Lycée Bonaparte, Toulon

1 F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Calculons la dérivée de F :

$$F'(x) = 2\ln x + (2x+3)\times\frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 2 + \frac{3}{x} + 1 = f(x).$$

La fonction F est donc bien une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2 La fonction f est positive sur $[1\,;3]$. L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$ est donc égale à l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x &= \big[F(x)\big]_1^3\\ &= F(3)-F(1)\\ &= (9\ln 3+3)-(5\ln 1+1)\\ &= 9\ln 3+2.\end{aligned}$$

MÉTHODE

Il est souvent demandé de vérifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f. Dans ce cas, il suffit de dériver F et vérifier que l'on obtient effectivement f. Il est totalement inutile d'essayer de trouver par soi-même une primitive de f et cela n'est parfois même pas possible avec les outils disponibles d'après les programmes.

9 Exponentielle et racine carrée

Énoncé p. 203

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

La fonction : $t \mapsto 1-2\mathrm{e}^t$ est continue sur $[-\ln 2;\, \ln 3]$ donc elle admet des primitives sur $[-\ln 2;\, \ln 3]$ et l'intégrale I_5 existe.

De même, la fonction : $t \mapsto \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $[0,1]$ donc elle admet des primitives sur $[0,1]$ et l'intégrale I_6 existe.

On remarque que la fonction $t \mapsto \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ est de la forme $\dfrac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$ en posant $u(t)=1+t^2$. Elle admet donc une primitive de la forme $2\sqrt{u(t)}$.

Calcul de I_5.

$$\begin{aligned}I_5 &= \int_{-\ln 2}^{\ln 3} (1 - 2\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t - 2\mathrm{e}^t\right]_{-\ln 2}^{\ln 3} \\ &= \ln 3 + \ln 2 - 2\mathrm{e}^{\ln 3} + 2\mathrm{e}^{-\ln 2} \\ &= \ln 6 - 2\mathrm{e}^{\ln 3} + 2\mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2}} \\ &= \ln 6 - 6 + 2 \times \frac{1}{2} \\ &= \ln 6 - 5.\end{aligned}$$

Calcul de I_6.

$$\begin{aligned}I_6 &= \int_0^1 \left(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[2\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 \\ &= 2\sqrt{2} - 2.\end{aligned}$$

10 Bénéfice moyen

Énoncé p. 203

Cité scolaire internationale, Grenoble

1 **(a)** $$\begin{aligned}F'(x) &= \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 8 \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 8 \\ &= f(x).\end{aligned}$$

La fonction F est donc une primitive de f sur $[0\,;5]$.

(b) $$\begin{aligned}\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[F(x)\right]_3^5 \\ &= F(5) - F(3) \\ &= \left(5\mathrm{e}^5 - 2\mathrm{e}^5 - 40\right) - \left(3\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^3 - 24\right) \\ &= 3\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 - 16.\end{aligned}$$

2 La valeur moyenne du bénéfice pour une production entre 3 et 5 milliers d'objets est égale à la moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[3\,;5]$, c'est-à-dire à :

$$\frac{1}{5-3}\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(3\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 - 16\right) \approx 205 \text{ euros.}$$

11 À l'aide d'une primitive

Énoncé p. 204

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Calculons pour tout réel x différent de 1 et de 2 :

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} &= \frac{a(x-2)^2 + b(x-1)(x-2) + c(x-1)}{(x-1)(x-2)^2} \\ &= \frac{ax^2 - 4ax + 4a + bx^2 - 3bx + 2b + cx - c}{(x-1)(x-2)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-4a - 3b + c)x + 4a + 2b - c}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}.\end{aligned}$$

On souhaite que pour tout réel x différent de 1 et de 2 :

$$\frac{x^2-5x+7}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$

donc que :

$$\frac{x^2-5x+7}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{(a+b)x^2+(-4a-3b+c)x+4a+2b-c}{x^3-5x^2+8x-4}.$$

On identifie alors les coefficients de chaque puissance de x au numérateur des deux fractions :

$$\begin{cases} a+b & =1 \\ -4a-3b+c & =-5 \\ 4a+2b-c & =7 \end{cases}$$

De la première équation, on déduit que $a=1-b$. De plus, en additionnant les deux autres équations, on obtient :

$$-b=2 \iff b=-2 \iff a=3.$$

On en déduit alors la valeur de c :

$$-4a-3b+c=-5 \iff c=-5+4a+3b=1.$$

Finalement,

$$\frac{x^2-5x+7}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{x^2-5x+7}{x^3-5x^2+8x-4}\,\mathrm{d}x &= \int_3^4 \frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x-\int_3^4 \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x+\int_3^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \big[3\ln|x-1|\big]_3^4-2\big[\ln|x-2|\big]_3^4+\left[-\frac{1}{x-2}\right]_3^4 \\ &= 3\ln 3-3\ln 2-(2\ln 2-2\ln 1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{2}-5\ln 2+3\ln 3.\end{aligned}$$

12 Un classique... dans le supérieur !

Énoncé p. 204

Lycée Victor Hugo, Besançon

1 La fonction :

$$x \mapsto \sqrt{x^2+2}$$

est la composée des fonctions

$$x \mapsto x^2+2 \quad \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Or, la fonction $x \mapsto x^2+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives et la fonction racine est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc, d'après le théorème de dérivabilité des fonctions composées, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les dérivées respectives des deux fonctions sont

$$x \mapsto 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La dérivée cherchée est donc :

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

2 Ainsi la dérivée de :

$$x \mapsto x + \sqrt{x^2+2}$$

est :

$$x \mapsto 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

On pose alors $u(x) = x + \sqrt{x^2+2}$.

D'après la question précédente, la fonction u est dérivable sur $[0,1]$. De plus, la fonction u est strictement positive sur l'intervalle $[0,1]$. La fonction f étant de la forme $\ln u$, il en résulte qu'elle est dérivable sur $[0,1]$. Donc pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}}$$

soit :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

3 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle et l'intégrale I existe.

$$I = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}).$$

13 Fonction rationnelle

Énoncé p. 204

Lycée Balzac, Caen

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, remarquons que $(4x^2-1)^2 = (2x-1)^2(2x+1)^2$.

Alors,

$$f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$$

$$\iff -\frac{8x^2+32x+2}{(4x^2-1)^2} = \frac{4(a+b)x^2 + 4(b-a)x + (a+b)}{(4x^2-1)^2}.$$

CORRIGÉS

Donc, $f(x) = \dfrac{a}{(2x+1)^2} + \dfrac{b}{(2x-1)^2}$ si et seulement si $a = 3$ et $b = -5$.

La fonction f est une fonction rationnelle ; elle est donc continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition. Par conséquent, elle admet des primitives sur l'intervalle $[1,2]$ et l'intégrale $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 \frac{3}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{5}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2t+1}\right]_1^2 + \frac{5}{2}\left[\frac{1}{2t-1}\right]_1^2\\ &= -\frac{22}{15}.\end{aligned}$$

MÉTHODE

Pour déterminer une primitive d'une fonction rationnelle, on a souvent recours à une décomposition de cette fonction rationnelle en somme de fonctions rationnelles correspondant aux primitives usuelles. Au niveau terminale, cette décomposition est en général guidée par l'énoncé. Il suffit alors de réduire au même dénominateur puis de procéder à l'identification des coefficients.

14 Dérivées de fonctions intégrales

Énoncé p. 204

Lycée Janson de Sailly, Paris

- Soit F_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

D'après les théorèmes du cours, F_1 est la primitive de : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, qui s'annule en 1.

Or, par la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = F_1(2x) - F_1(x).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de dérivabilité des fonctions composées,

$$F'(x) = 2F_1'(2x) - F_1'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Remarque : puisque $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, on peut en déduire que la fonction F est constante. Alors sa valeur se calcule par exemple en 1 et on a $F(1) = \ln 2$.

- De la même façon, définissons :

$$G_1(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

G_1 est dérivable et a pour dérivée ln et :

$$G(x) = G_1(x^2) - G_1(\sqrt{x}).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2xG_1'(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}G_1'(\sqrt{x}) \\ &= 2x\ln(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sqrt{x})\ , \end{aligned}$$

soit :

$$G'(x) = 4\left(x - \frac{1}{16\sqrt{x}}\right)\ln x.$$

MÉTHODE

Les fonctions définies par une intégrale sont très délicates à étudier. On se ramènera à chaque fois au théorème :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, la fonction

$$F\ :I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est *la* primitive de f sur I qui s'annule en a.
puis on utilisera la définition de la primitive d'une fonction.
On se souviendra que pour dériver une fonction du type : $x \mapsto G\big(u(x)\big)$ il est indispensable d'utiliser le théorème de dérivabilité des fonctions composées.

15 Valeur approchée d'une intégrale

Énoncé p. 205

Lycée du Parc, Lyon

1 La fonction f est dérivable sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et,

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right],\quad f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(1-x)+\mathrm{e}^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$\text{donc}\quad \forall x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right],\quad f'(x) \geqslant 0.$$

CORRIGÉS

Ainsi, f est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, donc pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$,

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right),$$

soit :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

2 **(a)** Pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, on a :

$$1+x+\frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

(b) En utilisant l'égalité démontrée à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1+x+\frac{x^2}{1-x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(c) On a $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+2)\mathrm{e}^{-x} = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$. La fonction g est donc bien une primitive de $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

(d) D'après 1, pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Donc, pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $x^2 \leqslant x^2 f(x) \leqslant \frac{2x^2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

En intégrant entre 0 et $\frac{1}{2}$ on a, par conservation de l'ordre par intégration (les conditions d'application du théorème étant réunies),

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,\mathrm{d}x,$$

soit :

$$\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

(e) Nous avons la relation :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[g(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2 - \frac{5}{2\sqrt{\mathrm{e}}} + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

D'après 2.d, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{24} + 2 - \frac{5}{2\sqrt{\mathrm{e}}} \leqslant I \leqslant \frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}} + 2 - \frac{5}{2\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Finalement, on obtient à l'aide de la calculatrice, $I \approx 0{,}53$ à 10^{-2} près.

16 Suites définies par des intégrales

Énoncé p. 205

Lycée du Parc, Lyon

1 La fonction : $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+2x+4x^2}$ est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ en tant que fonction rationnelle.
Pour tout entier n et tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \geqslant 0.$$

Les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant donc, d'après le théorème de positivité de l'intégrale,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

En effet sur $[0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$, et pour le trinôme du dénominateur, le discriminant est négatif, donc le trinôme est toujours du signe de 4, donc strictement positif.

2 Pour tout entier n, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La fonction : $x \mapsto \dfrac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2}$ est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ en tant que fonction rationnelle.
Or, pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{x^n(x-1)}{1+2x+4x^2} \leqslant 0$.
Donc, par positivité de l'intégrale on a : $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

CORRIGÉS

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

3 Pour encadrer $1+2x+4x^2$, il faut connaître le sens de variation de la fonction : $f : x \mapsto 1+2x+4x^2$.

$f'(x) = 2+8x$ donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{4}$.

Par conséquent, sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, f est croissante, et :

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1).$$

On a donc : $1 \leqslant 1+2x+4x^2 \leqslant 7$.

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on en déduit que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\dfrac{1}{1+2x+4x^2} \leqslant 1$. Donc, en multipliant par x^n qui est positif, on obtient pour tout entier naturel n,

$$\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \leqslant x^n.$$

Les fonctions : $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+2x+4x^2}$ sont continues sur $[0\,;\,1]$, les bornes d'intégrations sont dans l'ordre croissant. Il résulte du théorème sur les intégrales et l'ordre que :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x\ ,$$

soit :

$$I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

On a donc obtenu un encadrement de I_n : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème de limite par encadrement (théorème des gendarmes), on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

MÉTHODE

Pour montrer qu'une intégrale est positive, il n'est pas nécessaire de la calculer : le théorème de positivité de l'intégrale permet d'obtenir directement le résultat à partir du signe de la fonction. On pensera à s'assurer que les trois conditions d'application du théorème sont bien réunies : fonction continue sur l'intervalle d'intégration, fonction positive et bornes d'intégration dans l'ordre croissant.

17 Intégrale d'une fonction irrationnelle

Énoncé p. 206

Lycée Saint-Jean-de-Passy, Paris

1 Comme la fonction : $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue est positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, on sait d'après le cours que :

$$J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

est l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Or, quelque soit $x \in [0\,;\,1]$,

$$x^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

On rappelle que $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon unité.

Ainsi, J_0 est égale à l'aire d'un quart de disque de rayon unité dans un repère orthonormé.

Donc :

$$J_0 = \frac{\pi}{4}.$$

2 Pour tout entier naturel n on a, par linéarité de l'intégrale :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x. = -\int_0^1 x^n(1-x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x^n(1-x)\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale (nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que les conditions d'application de ce théorème sont réunies), on a :

$$J_{n+1} - J_n \leqslant 0.$$

La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

3 **(a)** Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, pour tout entier n,

$$0 \leqslant x^n \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1.$$

Donc,

$$0 \leqslant x^n\sqrt{1-x^2} \leqslant x^n\ ,$$

soit, en appliquant le théorème sur les intégrales et l'ordre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ après s'être assuré que les conditions d'application étaient réunies,

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

(b) Comme pour tout entier naturel n,

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\ ,$$

CORRIGÉS

on obtient un encadrement de J_n :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

D'où, par le théorème de limite par encadrement (théorème des gendarmes),

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

18 Une autre suite d'intégrales

Énoncé p. 206

Lycée Balzac, Caen

1 **(a)** La fonction : $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$ est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle et l'intégrale I_1 existe. On a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

et, par linéarité de l'intégrale :

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x}\,dx = 1.$$

Donc :

$$I_0 = (I_0 + I_1) - I_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

(b) Pour tout entier naturel n, on a par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{1+e^x}\,dx \\ &= \int_0^1 e^{nx}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 \\ &= \frac{e^n - 1}{n}. \end{aligned}$$

2 **(a)** Pour tout entier naturel n et tout réel $x \geqslant 0$ on a :

$$nx \leqslant (n+1)x.$$

Or, la fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $e^{nx} \leqslant e^{(n+1)x}$. D'où :

$$\frac{e^{nx}}{e^x+1} \leqslant \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1} \qquad \text{car } e^x + 1 > 0.$$

Les fonctions : $x \mapsto \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}$ sont continues sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ; donc, d'après le théorème sur les intégrales et l'ordre, on a :

$$I_n \leqslant I_{n+1}.$$

La suite (I_n) est donc croissante.

(b) Pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ on a l'inégalité :

$$1 \leqslant e^x \leqslant e$$

donc

$$2 \leqslant 1+e^x \leqslant 1+e.$$

Tous ces termes sont strictement positifs donc, en passant à l'inverse et en multipliant par $e^{nx} > 0$:

$$\frac{e^{nx}}{1+e} \leqslant \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{nx}}{2}.$$

En appliquant de nouveau le théorème sur les intégrales et l'ordre (les conditions d'application étant réunies), il vient :

$$\frac{1}{1+e}\int_0^1 e^{nx}\,dx \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}\,dx\ ,$$

soit :

$$\frac{e^n-1}{(1+e)n} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^n-1}{2n}.$$

3 On démontre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n-1}{n(1+e)} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty.$$

D'après le théorème de limite par comparaison, on conclut que :

$$\lim_{+\infty} I_n = +\infty.$$

En repartant de l'encadrement de I_n obtenu à la question précédente et en multipliant par $\dfrac{1}{e^n}$ qui est strictement positif, on obtient :

$$\frac{1-e^{-n}}{(1+e)n} \leqslant \frac{I_n}{e^n} \leqslant \frac{1-e^{-n}}{2n}.$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n(1+e)} = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{2n} = 0\ ,$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

par le théorème de limite par encadrement (théorème des gendarmes), on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0.$$

MÉTHODE

Pour comparer deux intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$, il n'est pas nécessaire de les calculer.
Il suffit de comparer les fonctions f et g sur l'intervalle $[a\,;b]$ après s'être assuré que $a \leqslant b$ et que les fonctions f et g étaient continues sur l'intervalle $[a\,;b]$. Le théorème sur les intégrales et l'ordre permettra alors de conclure.
On pensera à mettre en évidence dans la rédaction le fait que les conditions d'application du théorème sont réunies.

19 Suite et algorithme

Énoncé p. 206

Lycée Victor Duruy, Paris

1 **(a)** $u_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - \left(-e^0\right) = 1 - \frac{1}{e}.$

$u_1 = \int_1^2 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^2 = -e^{-2} - \left(-e^{-1}\right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}.$

(b)
$$\begin{aligned} u_n &= \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx \\ &= \left[-e^{-x}\right]_n^{n+1} \\ &= -e^{-(n+1)} - \left(-e^{-n}\right) \\ &= \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}}. \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= \int_0^1 e^{-x}\,dx + \int_1^2 e^{-x}\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx \\ &= \int_0^{n+1} e^{-x}\,dx \qquad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= 1 - \frac{1}{e^{n+1}}. \end{aligned}$$

3 S_n est l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $y = e^{-x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n + 1$.

4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\right]=0$ car $0<\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=1$.

5 Comme la limite de S_n est 1, on voit que les écarts avec 1 sont strictement supérieurs à 10^{-1} ou 10^{-4}. On pourrait imaginer que c'est juste un problème d'arrondi des valeurs par la calculatrice, mais c'est en réalité une erreur de la part de Louen. En effet, il arrête la boucle dès que le terme $u_i < 10^{-A}$, mais il n'est pas certain qu'en ajoutant plusieurs termes inférieurs à 10^{-A}, il n'obtient pas une quantité plus grande que 10^{-A}. Il aurait pu écrire : « Tant que $S \geqslant 10^{-A}$ ».

20 Avec un algorithme

Énoncé p. 207

Lycée La Bruyère, Versailles

1 **(a)** Dans l'intervalle $[0\,;1]$, x^n est un nombre positif ou nul, ainsi bien sûr que e^{x^2}. La fonction à intégrer étant positive ou nulle sur $[0\,;1]$, on a bien $I_n \geqslant 0$.

(b) $$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(x^{n+1}-x^n\right)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 x^n(x-1)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Sur l'intervalle $[0\,;1]$, $x^n\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{x^2}>0$ et $x-1\leqslant 0$, donc la fonction à intégrer est négative ou nulle sur l'intervalle considéré.

Par conséquent, $I_{n+1}-I_n\leqslant 0$ pour tout n, et la suite est décroissante.

(c) La suite I est minorée par 0 (d'après la question 1.a) et décroissante. Par conséquent, elle est convergente.

La limite L est positive ou nulle.

2 **(a)** $G'(x)=\dfrac{1}{2}\times 2x\mathrm{e}^{x^2}=x\mathrm{e}^{x^2}=g(x)$. Donc G est bien une primitive de g.

(b) $$I_1=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=G(1)-G(0)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{1}{2}.$$

CORRIGÉS

(c) H_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= (n+1)x^n G(x) + x^{n+1} G'(x) \\ &= (n+1)x^n \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + x^{n+1} \times x\mathrm{e}^{x^2} \\ &= \frac{n+1}{2} x^n \mathrm{e}^{x^2} + x^{n+2}\mathrm{e}^{x^2}. \end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de l'égalité ci-dessus entre 0 et 1, et en utilisant les propriétés de linéarité des intégrales, il vient :

$$H_n(1) - H_n(0) = \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{n+2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\ ,$$

ou encore :

$$G(1) = \frac{n+1}{2} I_n + I_{n+2}.$$

On a donc bien :

$$I_{n+2} + \frac{n+1}{2} I_n = \frac{1}{2}\mathrm{e}.$$

(d) D'après ce qui précède, $I_3 + I_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}$. Donc, $I_3 = \frac{1}{2}$.

Puis, $I_5 + 2I_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e}$ donc $I_5 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 1$.

3 Voici l'algorithme complété :

```
Initialisation
   n ← 1
   I ← (1/2)e − 1/2
Traitement
   Tant que n<23
      I ← (1/2)e − ((n + 1)/2) I
      n ← n + 2
   Fin de Tant que
Sortie
   Afficher I
```

En Python

```python
from math import exp

n = 1
I = 0.5*exp(1)-0.5

while n < 23:
    I = 0.5*exp(1)-(n+1)*I/2
    n = n + 2
    print(I)
```

4 $I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} I_{n+2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n\right).$$

Intéressons-nous à la limite de $\frac{n+1}{2}I_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Raisonnons par l'absurde : si I_n tend vers une valeur non nulle, $\frac{n+1}{2}I_n$ tend vers $+\infty$ ($I_n \geqslant 0$ pour tout n).
Ceci donnerait $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = -\infty$, ce qui est impossible puisque $I_n \geqslant 0$ pour tout n.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, ce qui donnera une forme indéterminée pour la limite de $\frac{n+1}{2}I_n$.
Donc L = 0.

Remarque : si vous tentez de modifier le programme Python de la question 3 en remplaçant « 23 » par un grand nombre (par exemple 100), vous serez surpris de voir une contradiction avec la réponse de la question 4. Ceci montre la différence entre un programme, qui peut très bien être correct, et un raisonnement purement mathématique. La raison de cette différence réside la plupart du temps dans les limites du langage de programmation et de la représentation des nombres réels en informatique.

21 Logarithme népérien

Énoncé p. 208

Lycée Lavoisier, Paris

Posons, pour $x \in [1; 2]$:

$$u(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \quad \text{et} \quad v(x) = \ln x.$$

On a alors :

$$u'(x) = 1 + x \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[1,2]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur sur l'intervalle $[1,2]$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 (x+1)\ln x \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

CORRIGÉS

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{9\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{9\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x\right]_1^2 \\
&= 4\ln 2 - \frac{7}{4}.
\end{aligned}
$$

22 Produit du logarithme par un carré

Énoncé p. 209

Lycée Buffon, Paris

La fonction carré est continue sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle et l'intégrale I_0 existe. On a :

$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}.$$

Pour calculer I_1, posons

$$u(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad \text{et} \quad v(x) = \ln x.$$

On a alors :

$$u'(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1,\mathrm{e}]$ donc, d'après le théorème d'intégration par parties,

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{1}{3}I_0 = \frac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9}.$$

23 Logarithme d'un quotient

Énoncé p. 209

Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

1 On cherche à calculer $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. Alors, $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\int_1^x 1 \times \ln(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= x\ln x - [t]_1^x \\
&= x\ln x - x + 1.
\end{aligned}
$$

Une primitive étant définie à une constante près, on peut dire que $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $f(x) = \ln x$.

2 Le réel $f(t)$ existe si et seulement si $\dfrac{1+t}{1-t} > 0$. Un *tableau de signes* donne alors :

$$\mathcal{D}_f =]-1,1[.$$

3 Soit donc x un réel vérifiant : $|x| < 1$. Alors les fonctions $t \mapsto \ln(1+t)$ et $t \mapsto \ln(1-t)$ sont bien définies, continues, sur $[0,x]$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \ln(1+t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x \ln(1-t)\ \mathrm{d}t \\ &= [\mathcal{A}(1+t) - \mathcal{A}(1-t)]_0^x \\ &= \mathcal{A}(1+x) - \mathcal{A}(1-x). \end{aligned}$$

Or, on sait que l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie, donc on peut prendre la primitive classique de la fonction logarithme, obtenue par intégration par parties :

$$\mathcal{A} : u \mapsto u \ln u - u.$$

Au final, après calculs, une expression de $F(x)$ est :

$$F(x) = \ln(1-x^2) + x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

24 Calculs par combinaisons linéaires

Énoncé p. 209

Lycée Balzac, Caen

1 Posons pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad v'(x) = \cos 2x.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur ce même intervalle. Donc, par le théorème d'intégration par parties, on a

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[x^2 \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \,\mathrm{d}x.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \,\mathrm{d}x$, il est nécessaire de procéder à une seconde intégration par parties. Posons :

$$s(x) = x \quad \text{et} \quad t(x) = \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Alors :

$$s'(x) = 1 \quad \text{et} \quad t'(x) = -\sin 2x.$$

CORRIGÉS

Les fonctions s et t étant dérivables, à dérivée continue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a, par le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} K &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, \mathrm{d}x \\ &= \left[x \frac{1}{2} \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 2x \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2 **(a)** Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}.$$

On sait que pour tout x,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Donc, d'après 1, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

(b) On en déduit que :

$$I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}.$$

25 Exponentielle et trigonométrie

Énoncé p. 209

Lycée Saint-Joseph, Reims

1 Posons

$$\begin{aligned} u'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \quad \text{alors} \quad u(x) = -\mathrm{e}^{-x}. \\ v(x) &= \cos x \quad \text{alors} \quad v'(x) = -\sin x. \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont dérivables, à dérivées continues sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} F(t) &= \left[-\cos x \cdot \mathrm{e}^{-x}\right]_0^t - \int_0^t \sin x \cdot \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\cos t \cdot \mathrm{e}^{-t} + 1 - G(t) \\ &= 1 - \cos t \cdot \mathrm{e}^{-t} - G(t). \end{aligned}$$

Procédons de nouveau au calcul de $F(t)$ en utilisant, comme le demande l'énoncé, l'autre possibilité d'intégration par parties.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \cos x \quad \text{alors} \quad u(x) = \sin x. \\ v(x) &= \mathrm{e}^{-x} \quad \text{alors} \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} F(t) &= \left[\sin x \cdot \mathrm{e}^{-x}\right]_0^t + \int_0^t \sin x \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sin t \cdot \mathrm{e}^{-t} + G(t). \end{aligned}$$

2 Les deux relations établies précédemment permettent d'écrire le système :

$$\begin{cases} F(t) + G(t) = 1 - \cos t \cdot \mathrm{e}^{-t} & (1) \\ F(t) - G(t) = \sin t \cdot \mathrm{e}^{-t} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Longrightarrow F(t) = \frac{1}{2}\left[1 + (\sin t - \cos t)\mathrm{e}^{-t}\right]$$

$$(1) - (2) \Longrightarrow G(t) = \frac{1}{2}\left[1 - (\sin t + \cos t)\mathrm{e}^{-t}\right]$$

26 Trigonométrie et logarithme

Énoncé p. 210

Lycée Henri IV, Paris

Posons

$$u(t) = \cos(\ln t) \quad \text{et} \quad v(t) = t.$$

Alors :

$$u'(t) = -\frac{1}{t}\sin(\ln t) \quad \text{et} \quad v'(t) = 1.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, +\infty[$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, +\infty[$ donc, d'après le théorème d'intégration par parties, on a, pour tout $x \geqslant 1$:

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,\mathrm{d}t = \left[t\cos(\ln t)\right]_1^x + \int_1^x \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$,

$$F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x).$$

De la même façon, en posant :

$$f(t) = \sin(\ln t) \quad \text{et} \quad g(t) = t$$

on a :

$$f'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln t) \quad \text{et} \quad g'(t) = 1.$$

Donc pour tout $x \geqslant 1$:

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = \left[t\sin(\ln t)\right]_1^x - \int_1^x \cos(\ln t)\,\mathrm{d}t$$

soit pour tout $x \geqslant 1$,

$$G(x) = x\sin(\ln x) - F(x).$$

Donc pour tout $x \geqslant 1$,

$$\begin{cases} F(x) - G(x) = x\cos(\ln x) - 1 \\ F(x) + G(x) = x\sin(\ln x) \end{cases}$$

CORRIGÉS

Soit, pour tout $x \geqslant 1$,

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) - \dfrac{1}{2} \\ G(x) = \dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

27 Exponentielle et trigonométrie

Énoncé p. 210

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Remarquons tout d'abord que toutes les fonctions à intégrer sont continues sur $\mathbb{R}$ donc elles admettent toutes des primitives sur $\mathbb{R}$ et les intégrales I_n et J_n existent pour tout entier naturel n.

1 On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = 1.$$

2 **(a)** Soit n un entier naturel. Posons :

$$u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \quad \text{et} \quad v(x) = \sin(x).$$

Alors :

$$u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \quad \text{et} \quad v'(x) = \cos(x).$$

Les fonctions u et v étant dérivables, à dérivées continues sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx} \cos x \,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-nx} \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx} \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$J_n = \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n.$$

De la même façon, posons :

$$u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \quad \text{et} \quad v(x) = -\cos(x).$$

Alors :

$$u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \quad \text{et} \quad v'(x) = \sin(x).$$

Une intégration par parties donne donc :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx} \sin x \,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-nx} \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx} \cos x \,\mathrm{d}x$$

soit :

$$I_n = 1 - nJ_n.$$

D'où le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

(b) Le système précédent donne :

$$\begin{cases} J_n = \dfrac{n + \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}}{n^2+1} \\ I_n = \dfrac{1 - n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}}{n^2+1} \end{cases}$$

3 Pour tout entier naturel n non nul, nous avons :

$$I_n = \frac{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^2}}$$

$$J_n = \frac{n\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}}{n}}{n(1+\frac{1}{n^2})}.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

28 Double intégration par parties

Énoncé p. 210

Lycée Thiers, Marseille

1 Soit n un entier non nul.

Posons :

$$a(x) = x^2 \quad \text{et} \quad b(x) = -\frac{1}{n}\cos(nx).$$

Alors :

$$a'(x) = 2x \quad \text{et} \quad b'(x) = \sin(nx).$$

Les fonctions a et b étant dérivables, à dérivées continues sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}x^2\cos(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Posons :

$$c(x) = x \quad \text{et} \quad d(x) = \frac{1}{n}\sin(nx).$$

Alors :

$$c'(x) = 1 \quad \text{et} \quad d'(x) = \cos(nx).$$

CORRIGÉS

Par une seconde intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

d'où :

$$I_n = -\frac{\pi^2}{4n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n^3}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right).$$

2 La formule ci-dessus montre que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|I_n| \leqslant \frac{\pi^2}{4n} + \frac{\pi}{n^2} + \frac{4}{n^3}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi^2}{4n} + \frac{\pi}{n^2} + \frac{2}{n^2}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

MÉTHODE

Comme l'expression dont on cherche la limite comporte des termes en sinus et cosinus dont la valeur change selon les valeurs de n, on utilise le théorème de limite par encadrement.
On majore la valeur absolue de I_n en utilisant tout d'abord le fait que la valeur absolue d'une somme est inférieure à la somme des valeurs absolues ; les termes en sinus et cosinus sont ensuite eux-mêmes majorés par 1.
Il ne reste plus ensuite qu'à prouver que la limite de $\left(\frac{\pi^2}{4n} + \frac{\pi}{n^2} + \frac{2}{n^2}\right)$ est nulle pour pouvoir conclure.

29 Suites de fonctions

Énoncé p. 211

Polynésie, sujet 1, 2025

1 **(a)** La fonction f_0 est à valeurs positives sur [0; 1], donc I_0 correspond à l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par $\mathcal{C}_0$, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

De la même façon, chaque intégrale I_n est l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

(b) On conjecture que la suite (I_n) converge vers 0. En effet, plus n grandit, plus $\mathcal{C}_n$ semble se rapprocher de l'axe des abscisses, réduisant ainsi de plus en plus l'aire du domaine entre la courbe et l'axe des abscisses sur [0; 1].

2 $$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= \big(-\mathrm{e}^{-1}\big) - \big(-\mathrm{e}^{-0}\big) \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{0} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

3 **(a)** Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 &\iff 0 \times x^n \leqslant x \times x^n \leqslant 1 \times x^n, \quad \text{car } x^n \geqslant 0 \\ &\iff 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n. \end{aligned}$$

On arrive bien à l'inégalité demandée.

(b) $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ x \in [0;1] &\iff 0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n\mathrm{e}^{-x} \text{ car } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ &\iff 0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \\ &\iff \int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &\iff 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n. \end{aligned}$$

4 D'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

- $0 \leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est minorée par 0 ;
- $I_{n+1} \leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est décroissante.

La suite étant décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente, vers une limite ℓ supérieure ou égale à 0.

5 Soit n un entier naturel n.

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0;1]$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x) \times v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x) \times v(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(intégration par parties)} \\ &= \Big[x^{n+1} \times \big(-\mathrm{e}^{-x}\big)\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times \big(-\mathrm{e}^{-x}\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \big(1^{n+1} \times (-\mathrm{e}^{-1})\big) - \big(0^{n+1} \times (-\mathrm{e}^{-0})\big) + (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

6 **(a)** Supposons que la limite ℓ est supérieure à zéro.

Alors, par limite du produit,

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n = +\infty\,,$$

et, par limite de la somme :

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}} = +\infty\,,$$

soit :

$$\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = +\infty.$$

Cela signifie que la suite de terme général I_{n+1} diverge vers $+\infty$.

Or la suite de terme général I_{n+1} a la même limite que la suite de terme général I_n, qui *converge* vers un réel positif ℓ (dont on peut dire qu'il est inférieur à $I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$).

L'unicité de la limite est donc en contradiction avec ces résultats.

(b) D'après la question précédente, $\ell \leqslant 0$ (raisonnement par l'absurde).

D'après la question 4, ℓ est un réel positif, donc $\ell = 0$.

La suite (I_n) converge donc vers 0.

7 Ici, l'appel `mystère(100)` renvoie une liste (stockée dans la variable `L`) contenant les valeurs (approchées) des 101 premiers termes de la suite, de I_0 à I_{100}.

En effet, I est initialisée (ligne 2) à la valeur I_0, puis L est initialisée (ligne 3) en tant que liste contenant la valeur I_0.

Ensuite, on rentre dans un boucle à `n` $= 100$ répétitions (pour `i` allant de 0 à 99), et dans chaque exécution, la variable `I` est mise à jour (ligne 5) en utilisant la relation de récurrence de la suite (I_n), donc passe de la valeur d'un terme à la valeur du terme suivant dans la suite (I_n). Cette nouvelle valeur est ensuite ajoutée à la fin de la liste `L` (ligne 7).

En sortie de boucle, on a donc appliqué 100 fois la relation de récurrence, donc la variable `I` contient bien la valeur (approchée de) $I_{0+100} = I_{100}$, qui a été la dernière ajoutée à la liste `L`.

ATTENTION

Si on exécute le script Python donné dans l'énoncé, les résultats sont faux à partir de $n = 18$ puisque les valeurs trouvées deviennent négatives !
Ceci est dû au fait que les calculs se font avec une valeur approchée de e et que les erreurs se cumulent assez rapidement.

Chapitre
8

Fonctions sinus et cosinus

Plan du chapitre

1 Équations et inéquations trigonométriques

Exercice type 1 — Lycée Jules Ferry, Paris

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $]-\pi\,;\pi]$:

1 $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

2 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$

Voir corrigé page 245

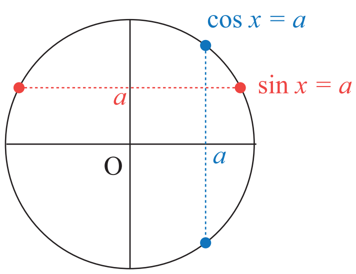
1.1 Équations

Propriétés 1

Soit $a \in [-1;\, 1]$ un réel.

1 Sur $]-\pi\,;\pi]$, l'équation $\cos(x) = a$ admet :
- deux solutions si $a \in]-1;\, 1[$;
- une solution si $a = -1$: $S = \{\pi\}$;
- une solution si $a = 1$: $S = \{0\}$.

2 Sur $]-\pi\,;\pi]$, l'équation $\sin(x) = a$ admet :
- deux solutions si $a \in]-1;\, 1[$;
- une solution si $a = -1$: $S = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$;
- une solution si $a = 1$: $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.



COURS

Exemples

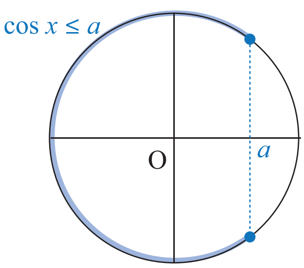
- Sur $]-\pi\,;\pi]$, l'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour ensemble des solutions :
$$S = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\ \frac{\pi}{3}\right\}.$$
- Sur $]-\pi\,;\pi]$, l'équation $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ admet pour ensemble des solutions :
$$S = \left\{\frac{\pi}{4}\,;\ \frac{3\pi}{4}\right\}$$

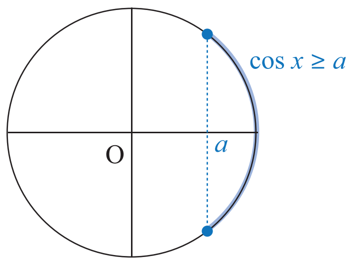
1.2 Inéquations

Propriété 2 : cosinus

Soit $a \in [-1;\,1]$ un réel. Sur $]-\pi\,;\pi]$,

- L'inéquation $\cos(x) \leqslant a$ admet pour ensemble des solutions :
$$S =]-\pi\,;\,-\theta] \cup [\theta\,;\,\pi].$$
- L'inéquation $\cos(x) \geqslant a$ admet pour ensemble des solutions :
$$S = [-\theta\,;\,\theta].$$





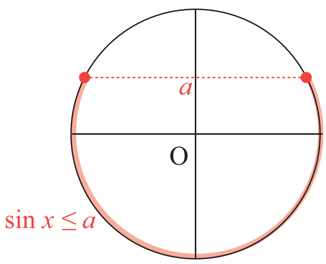
Exemples

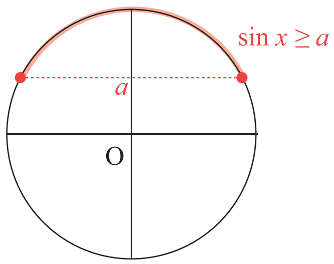
- Sur $]-\pi\,;\pi]$, l'inéquation $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour ensemble des solutions :
$$S = \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right].$$
-
- Sur $]-\pi\,;\pi]$, l'inéquation $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour ensemble des solutions :
$$S = \left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right].$$

Propriété 3 : sinus

Soit $a \in [-1;\, 1]$ un réel. Sur $]-\pi;\, \pi]$,

- L'inéquation $\sin(x) \leqslant a$ admet pour ensemble des solutions :
$$S =]-\pi;\, \theta] \cup [\pi - \theta;\, \pi].$$
- L'inéquation $\sin(x) \geqslant a$ admet pour ensemble des solutions :
$$S = [\theta;\, \pi - \theta].$$





Exemples

- Sur $]-\pi;\, \pi]$, l'inéquation $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ admet pour ensemble des solutions :
$$S = \left]-\pi;\, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\, \pi\right].$$
- Sur $]-\pi;\, \pi]$, l'inéquation $\sin(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ admet pour ensemble des solutions :
$$S = \left[\frac{\pi}{4};\, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Solution de l'exercice type 1

Lycée Jules Ferry, Paris

1 Résolvons l'équation $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ sur $]-\pi;\, \pi]$.

Dans un premier temps, on écrit : $-\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Ainsi, l'équation est équivalente à : $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

On en déduit alors :

$$\left(\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left(\begin{array}{l} x = -\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \pi \end{array}\right.$$

...

COURS

Solution de l'exercice type 1 (suite) Lycée Jules Ferry, Paris

2 Résolvons sur $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) > -\dfrac{1}{2}$.

Cette inéquation est équivalente à : $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) > \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Ainsi,

$$\left(\begin{array}{l} -\pi \leqslant x+\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6} \\ \text{ou} \\ -\dfrac{\pi}{6} < x+\dfrac{\pi}{6} \leqslant \pi \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left(\begin{array}{l} -\pi-\dfrac{\pi}{6} \leqslant x < -\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ -\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6} \leqslant x < \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right.$$

D'où :

$$-\frac{7\pi}{6} \leqslant x < -\pi \qquad \text{ou} \qquad -\frac{\pi}{3} < x \leqslant \frac{5\pi}{6}.$$

Mais attention, on souhaite résoudre l'inéquation sur $]-\pi\,;\pi]$ donc il est nécessaire de « transformer » la solution « $-\dfrac{7\pi}{6} \leqslant x < -\pi$ » en « $-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi \leqslant x < -\pi+2\pi$ », soit $\dfrac{5\pi}{6} \leqslant x < \pi$.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left]-\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};\pi\right[= \left]-\frac{\pi}{3};\pi\right[.$$

Voir énoncé page 243

2 La fonction sinus

Exercice type 2 Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

1 Étudier la parité et la périodicité de f.

2 Justifier alors que f peut être étudiée sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3 Montrer que $f'(x) = 2\left[2\cos^2(x)-1\right]$.

4 Sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5 En déduire les variations sur $[-\pi\,;\pi]$.

Voir corrigé page 250

COURS INTERROS CORRIGÉS

2.1 Dérivée

Propriété 4

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $\sin' x = \cos x$.

2.2 Étude sur $I = [0\,;\pi]$

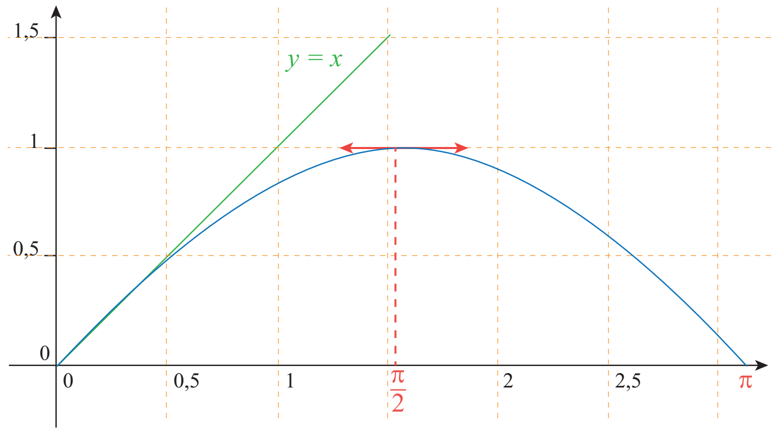
On a $\sin' x = \cos x$.

Or, sur I, $\cos x > 0$ si $x < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos x = 0$ si $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $\cos x < 0$ si $x > \dfrac{\pi}{2}$.

D'où le tableau de variation sur $[0\,;\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'$		$+$	0	$-$	
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Sa courbe représentative sur $[0\,;\pi]$, avec sa tangente à l'origine, est représentée ci-dessous.



2.3 Parité et périodicité

2.3.1 - Parité

Pour tout nombre réel x,

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

donc la fonction $x \mapsto \sin x$ est *impaire*, d'où la propriété suivante :

Propriété 5

La représentation graphique de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2.3.2 - Périodicité

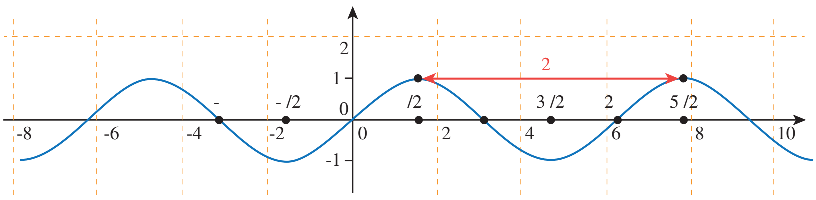
Pour tout nombre réel,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x),$$

donc la fonction $x \mapsto \sin x$ est *périodique* de période de 2π, d'où la propriété suivante :

Propriété 6

La représentation graphique de la fonction sinus dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est invariante par toute translation de vecteur $k2\pi\vec{\imath}$, k appartenant à $\mathbb{Z}$.



3 La fonction cosinus

3.1 Dérivée

Propriété 7

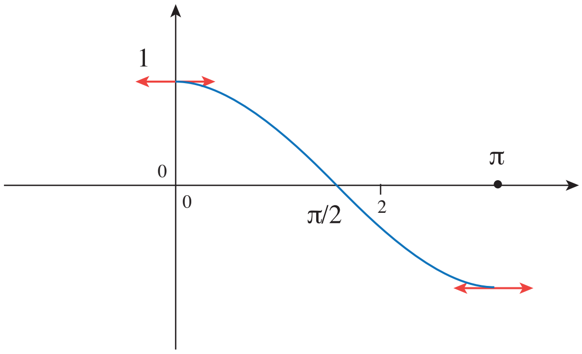
La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$$\cos' x = -\sin x.$$

3.2 Étude sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$

Pour tout nombre réel x, $\cos' x = -\sin x$. Or, $\sin x \geq 0$ sur $[0\ ;\ \pi]$, donc la fonction cosinus est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$.

x	0		π
$\cos'$	0	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow$	-1



3.3 Parité et périodicité

3.3.1 - Parité

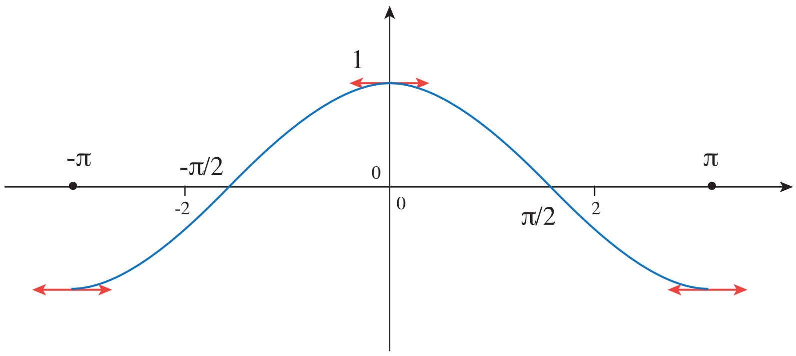
Pour tout réel x,

$$\cos(-x) = \cos x,$$

donc la fonction $x \mapsto \cos x$ est *paire*, d'où la propriété suivante :

Propriété 8

La courbe représentative de la fonction cos est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



COURS INTERROS CORRIGÉS

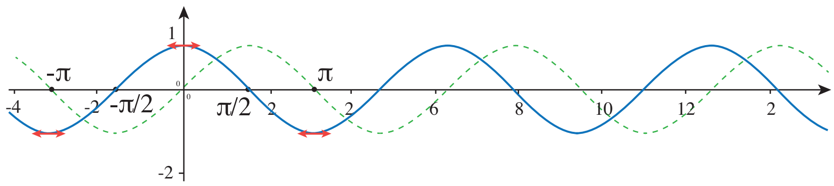
3.3.2 - Périodicité

Pour tout nombre réel x,
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x,$$
donc la fonction $x \mapsto \cos x$ est *périodique* de période 2π, d'où la propriété suivante :

Propriété 9

La représentation graphique de la fonction cosinus dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est invariante par toute translation de vecteur $k2\pi\vec{\imath}$, k appartenant à $\mathbb{Z}$.

On a représenté ci-dessous les fonctions sinus (en pointillés) et cosinus. Elles se déduisent l'une de l'autre par une translation de vecteur $\dfrac{\pi}{2}\vec{\imath}$.



4 Limites

Propriété 10

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

- Étudions la parité de la fonction f :

  $f(-x) = 2\sin(-x)\cos(-x) = 2 \times [-\sin(x)] \times \cos(x) = -f(x)$.

  De plus, f est définie sur $\mathbb{R}$, centré en 0.

  Ainsi, f est impaire.

- Étudions la périodicité de f.
  f est le produit d'une constante et de deux fonctions 2π-périodiques. Par conséquent, elle est au minimum 2π-périodique :

  $f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi)\cos(x + 2\pi) = 2\sin(x)\cos(x) = f(x)$.

...

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On peut maintenant se demander si l'on ne pourrait pas réduire la période de moitié : la fonction f est-elle π-périodique ? Pour le savoir, calculons :
$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= 2\sin(x+\pi)\cos(x+\pi) \\ &= 2\big(-\sin(x)\big)\big(-\cos(x)\big) \\ &= 2\sin(x)\cos(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$
f est donc bien π-périodique. Peut-on encore diviser la période par 2 ? Calculons :
$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\big(\cos(x)\big)\big(-\sin(x)\big) \\ &= -2\sin(x)\cos(x) \\ &\neq f(x). \end{aligned}$$
On ne peut donc pas réduire la période à $\dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, f est périodique de période π.

1 f étant π-périodique, on peut l'étudier sur un intervalle quelconque d'amplitude π.
De plus, f étant impaire, on peut prendre cet intervalle centré en 0, par exemple $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et ne prendre qu'une moitié.

On peut ainsi étudier f sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2 f est de la forme $2uv$, avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$. Donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\big[u'(x)v(x) + v'(x)u(x)\big] \\ &= 2\big[\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)\big] \\ &= 2\big[\cos^2(x) - \sin^2(x)\big] \end{aligned}$$
Or, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, d'où :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\big[\cos^2(x) - 1 + \cos^2(x)\big] \\ &= 2\big[2\cos^2(x) - 1\big]. \end{aligned}$$

3 Sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$,
$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff 2\cos^2(x) - 1 \geqslant 0 \\ &\iff \cos^2(x) \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff \cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

...

Solution de l'exercice type 2 (suite) **Lycée Camille Jullian, Bordeaux**

On a alors le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

4 Par symétrie centrale par rapport à l'origine du repère, on déduit les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ suivantes :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	
$f(x)$							1		
						$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0				0
		$\searrow$		$\nearrow$					
			-1						

Voir énoncé page 246

1 QCM Parité et périodicité

10 min Corrigé p. 260

Pour chaque question, une seule réponse est juste. Choisir la bonne réponse.

1 Une période de la fonction $f : x \mapsto \cos(3x)$ est :

a $\dfrac{2\pi}{3}$ b 3π c $\dfrac{3\pi}{2}$

2 La fonction $x \mapsto \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ est :

a paire b impaire c ni l'un ni l'autre

3 La fonction $g : x \mapsto \sin 3x$ est :

a paire b impaire c ni l'un ni l'autre

4 Une période de la fonction $h : x \mapsto \sin\left(\dfrac{x+\pi}{4}\right)$ est :

a 2π b $\dfrac{\pi}{2}$ c 8π

2 QCM Variations

15 min Corrigé p. 260

Pour chaque question, une seule réponse est juste. Choisir la bonne réponse.

1 La fonction f définie sur $[0\,;\pi]$ par $x \mapsto \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ est :

a croissante sur $[0\,;\pi]$
b croissante sur $[2\,;\pi]$
c croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$

2 La fonction g définie sur $I = [0\,;\pi]$ par $g : x \mapsto \sin(2x)$:

a a les mêmes variations que la fonction $x \mapsto \sin x$ sur I
b est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$
c est monotone sur I

3 La fonction h définie sur $[0\,;\pi]$ par $h : x \mapsto \sin x + \cos x$:

a est décroissante
b admet pour maximum $\sqrt{2}$
c admet pour maximum $\dfrac{\pi}{4}$

4 La fonction $k : x \mapsto \cos 3x$ définie sur $I = [-2\,;2]$:

a a les mêmes variations que la fonction cos
b admet un maximum local pour $x = 2$
c admet deux minimums locaux sur I

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

INTERROS

Équations et inéquations

3 Équations

★ 10 min Corrigé p. 261

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Résoudre sur $]-\pi\,;\pi]$ les équations suivantes.

1. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$
2. $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$

4 Équations et inéquations

★★ 25 min Corrigé p. 263

Lycée Buffon, Paris

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $I=[-\pi\ ;\pi]$, l'inéquation :

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $J=[-\pi\ ;3\pi]$, l'équation :

$$2\cos^2 x+3\cos x+1=0.$$

5 Inéquation associée à une équation

★★★ 20 min Corrigé p. 263

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\ ;\pi[$:

1. $2\sin^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{3}=0.$
2. $2\sin^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{3}\leqslant 0.$

Aide : $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}.$

Études de fonctions

6 Fonction dérivée

★ 15 min Corrigé p. 265

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition.

1. $f(x)=2\sin(8x)-5\cos\left(7x-\dfrac{\pi}{3}\right).$

2 $g(x) = \left[\cos(7x)\right]^4$.

3 $h(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

7 Une inégalité à démontrer

★★ 20 min Corrigé p. 265

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

L'observation de l'écran graphique d'une calculatrice laisse penser que, lorsque x est un réel, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x$.

On se propose de valider cette propriété en étudiant la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

1 Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 Étudier le sens de variation de la fonction f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction f'.

3 En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis que, pour tout réel x, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x$.

4 En admettant l'inégalité $\cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ valable pour tout réel x, déterminer, si elle existe, la limite en 0 de $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

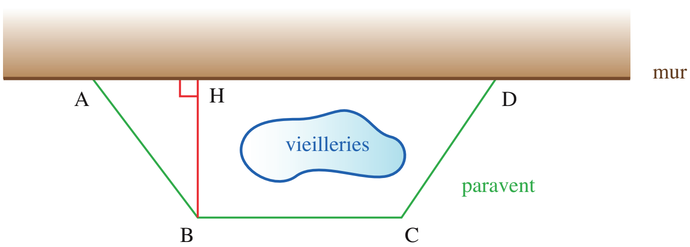
8 Aire maximale

★★ 20 min Corrigé p. 266

Lycée La Bruyère, Versailles

Les parents d'Amélie utilisent un paravent à trois panneaux pour cacher un tas de vieilleries dans leur garage.

Le paravent est déplié contre un mur de la façon suivante :



COURS
INTERROS
CORRIGÉS

INTERROS

Les trois panneaux du paravent sont de même longueur. Le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle. On pose $AB = BC = CD = 1$, et on appelle x la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAD}$ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1 Exprimer la longueur AD ainsi que la hauteur BH en fonction de x.

2 **(a)** Montrer que l'aire disponible derrière le paravent est égale en fonction de x à :

$$A(x) = (1 + \cos x) \sin x.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$A'(x) = 2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1 + \cos x).$$

(c) À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.

(d) En déduire le sens de variation de la fonction A sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

(e) Quelle est l'aire maximale de la zone que l'on peut cacher ainsi avec ce paravent, et comment faut-il l'installer ?

9 Un algorithme

★★ 30 min

Corrigé p. 267

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

$\mathcal{C}$ est sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 Démontrer que f est périodique de période 2π.

2 Démontrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

3 En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de f à $[0 ; \pi]$.

4 Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = (2\cos x - 1)\sin x$.

5 Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; \pi]$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.

6 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0 ; \pi]$.

7 On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
   Saisir les valeurs de a, b et p
Traitement
   Tant que b-a>p
     c  ←  (a+b)/2
     Si f(a) × f(c) < 0, alors
         b ← c
     Sinon
         a ← c
   Fin de Tant que
Sortie
   Afficher a et b
```

(a) Faire fonctionner l'algorithme avec $a = 1$, $b = 3$ et $p = 0{,}1$ et compléter le tableau suivant :

Étape	Test : $b - a > p$	c	Test : $f(a) \times f(c) < 0$	a	b
				1	3
1	Vrai	2	Faux	2	3
2					
⋮					

(b) Quelles sont les valeurs affichées à la sortie de l'algorithme ? Que peut-on en déduire ?

8 Résoudre l'équation (E) : $X^2 - X - 1 = 0$.

9 Montrer que α est solution de $f(x) = 0$ si et seulement si $\cos\alpha$ est solution de (E).

10 En déduire la valeur exacte de $\cos\alpha$, puis un encadrement au centième de α. Vérifier que ce résultat est en accord avec les valeurs trouvées à la question 7.b.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Objectif bac

10 Intégrales et suites

★★ 60 min Corrigé p. 269

Amérique du Nord, mai 2024

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 Calculer I_0.

2 (a) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.
(b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
(c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3 (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

(c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4 (a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J.$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.$$

5 On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne (pointillés) du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
from math import *
def seuil():
    n = 0
    I = 2
    ...
        n = n+1
        I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```

11 Équation différentielle

★★ 60 min Corrigé p. 272

Centres étrangers, juin 2024

On considère l'équation différentielle :

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1 Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.

2 Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3 La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».

5 En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6 Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7 Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

1 QCM Parité et périodicité

Énoncé p. 253

1 Réponse $\boxed{a}$. En effet, pour tout x réel,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left[3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\cos(3x+2\pi)=\cos 3x.$$

2 Réponse $\boxed{c}$. En effet, la fonction cos est paire, mais cette fonction est obtenue par translation de la fonction cos le long de l'axe des abscisses de $\frac{\pi}{4}$, elle n'est donc ni paire ni impaire.

3 Réponse $\boxed{b}$. En effet, pour tout réel x,

$$g(-x)=\sin(3(-x))=\sin(-3x)=-\sin 3x=-g(x).$$

Donc g est impaire.

4 Réponse $\boxed{c}$. En effet, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}h(x+8\pi)&=\sin\left(\frac{x+8\pi+\pi}{4}\right)\\&=\sin\left(\frac{x+\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}\right)\\&=\sin\left(\frac{x+\pi}{4}+2\pi\right)\\&=\sin\left(\frac{x+\pi}{4}\right)\\&=h(x).\end{aligned}$$

Remarque : pour les questions 1 et 3, on a trouvé une période, mais on n'a pas montré que c'était la plus petite.

2 QCM Variations

Énoncé p. 253

1 Réponse $\boxed{c}$. En effet, la fonction cosinus est croissante sur $[\pi\ ;2\pi]$, donc f est croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4}\ ;\pi\right]$.

2 Réponse $\boxed{b}$. En effet, $g'(x)=2\cos 2x$ donc, à 2π près :

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow 2x\in\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\frac{\pi}{4}\right].$$

3 Réponse $\boxed{b}$. Cette fonction est périodique de période 2π, donc on peut l'étudier sur $[-\pi\ ;\pi]$.

$$h'(x)=\cos x-\sin x$$

$$h'(x)>0\Leftrightarrow \cos x>\sin x\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3\pi}{4}\ ;\frac{\pi}{4}\right].$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	-1

4 Réponse $\boxed{\text{C}}$. Étudions la fonction sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ dans un premier temps.

$$\begin{aligned}
k'(x) &= -3\sin 3x \\
k'(x) > 0 &\Leftrightarrow \sin(3x) < 0 \\
&\Leftrightarrow 3x \in]-\pi\ ; 0[\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{3}\ ; 0\right[\ [\frac{2\pi}{3}] \\
&\Leftrightarrow x \in \left]-\pi\ ; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}\ ; 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}\ ; \frac{2\pi}{3}\right[.
\end{aligned}$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$	-2		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		2	$\frac{2\pi}{3}$		π
$k'(x)$	0	$+$	0	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	0	$-$	0
$k(x)$	-1	↗	1	‖	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	‖	1	↘	-1

Il y a deux minimums locaux sur $[-2\ ;\ 2]$: -1 et 1.

ATTENTION

Ne pas se laisser piéger : $\frac{2\pi}{3}$ est très proche de 2, et si on se fie à la calculatrice, on peut croire que le maximum est atteint en 2.

3 Équations

Énoncé p. 254

Lycée François Mauriac, Bordeaux

MÉTHODE

Nous allons utiliser ici les équivalences suivantes, où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi.$$
$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

CORRIGÉS

1 $$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \iff \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\iff \begin{cases} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{cases} x=0+2k\pi \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\pi]$ est donc :

$$\mathscr{S}=\left\{0;-\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

2 $$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \iff \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\iff \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4} &=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4} &=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{cases} 2x &=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ 2x &=\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{cases} 2x &=\frac{\pi}{12}+2k\pi \\ 2x &=\frac{17\pi}{12}+2k\pi \end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{cases} x &=\frac{\pi}{24}+k\pi \\ x &=\frac{17\pi}{24}+k\pi \end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sur $]-\pi\,;\pi]$ sont obtenues en prenant $k=0$ et $k=-1$; on obtient alors l'ensemble des solutions suivant :

$$\mathscr{S}=\left\{-\frac{23\pi}{24}\,;-\frac{7\pi}{24}\,;\frac{\pi}{24}\,;\frac{17\pi}{24}\right\}.$$

4 Équations et inéquations

Énoncé p. 254

Lycée Buffon, Paris

1 D'après le cercle trigonométrique,

$$\sin X \geqslant \frac{1}{2} \text{ pour } \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant X \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cela signifie que :

$$\begin{aligned} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 3x - \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

Si l'on ne veut que les solutions dans $[-\pi \,;\, \pi]$, les valeurs extrêmes que l'on peut prendre pour k vérifient : $-\pi \leqslant \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, c'est-à-dire $-\frac{5}{3} \leqslant k$, et comme k est entier, $-1 \leqslant k$, et : $\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant \pi$, soit $k \leqslant 1$.
k peut donc prendre les valeurs -1, 0 et 1.

L'ensemble solution est donc :

$$S = \left[-\frac{5\pi}{9} \,;\, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{9} \,;\, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{9} \,;\, \pi\right].$$

2 On pose $X = \cos x$. L'équation devient alors : $2X^2 + 3X + 1 = 0$.
Le discriminant est égal à 1 ; l'équation admet donc deux solutions : $X = -1$ et $X = -\frac{1}{2}$.

Alors, l'équation $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ équivaut à :

$$\cos x = -1 \qquad \text{ou} \qquad \cos x = -\frac{1}{2}\,,$$

c'est-à-dire :

$$x = -\pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$$

$$\text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k''\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z},\ k' \in \mathbb{Z},\ k'' \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation dans l'intervalle $[-\pi \,;\, 3\pi]$ est donc :

$$S = \left\{-\pi \,;\, -\frac{2\pi}{3} \,;\, \frac{2\pi}{3} \,;\, \pi \,;\, \frac{4\pi}{3} \,;\, \frac{8\pi}{3} \,;\, 3\pi\right\}.$$

5 Inéquation associée à une équation

Énoncé p. 254

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

On pose $X = \sin x$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

1 Le polynôme $2X^2+\left(2-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{3}$ a pour discriminant $7+4\sqrt{3}$, que l'on factorise sous la forme $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ (en utilisant l'aide de l'énoncé).

L'équation $2X^2+\left(2-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{3}=0$ admet donc deux solutions : $X=-1$ et $X=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

L'équation $2\sin^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{3}=0$ équivaut donc à :

$$\sin x=-1 \qquad \text{ou} \qquad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi[$, $\sin x=-1$ pour $x=-\dfrac{\pi}{2}$, et $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x=\dfrac{\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

L'équation admet donc trois solutions dans $]-\pi\,;\pi[$: $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

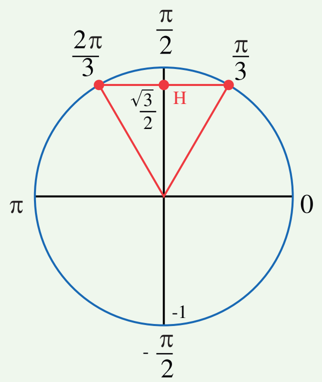
2 Grâce aux calculs de la question 1, on connaît les racines de l'expression $2X^2+\left(2-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{3}$.

Comme le coefficient de X^2 est positif, on sait que cette expression est inférieure ou égale à 0 lorsque X est compris entre les racines, c'est-à-dire : $-1\leqslant X\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En revenant à la variable x, cela donne : $-1\leqslant \sin x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le cercle trigonométrique montre que les solutions dans $]-\pi\,;\pi[$ de cette double inéquation sont tous les réels x tels que :

$$x\in\left]-\pi\,;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right[.$$



6 Fonction dérivée

Énoncé p. 254

Lycée Jean-Pierre Vernant, Pins-Justaret

1 La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 16\cos(8x) + 35\sin\left(7x - \frac{\pi}{3}\right).$$

2 g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme puissance entière d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 4\big[-7\sin(7x)\big] \times \big[\cos(7x)\big]^3 = -28\sin(7x)\cos^3(7x).$$

3 La fonction h est définie et dérivable pour tout x tel que $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas :

$$h'(x) = \frac{\cos x \times \cos x + \sin x \times \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Remarque : h est appelée « fonction *tangente* ».

7 Une inégalité à démontrer

Énoncé p. 255

Lycée François Mauriac, Bordeaux

1 La fonction cos est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction : $x \longmapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme donc la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 Pour tout réel x,

$$f'(x) = -\sin x + x\,,$$
$$f''(x) = 1 - \cos x.$$

Comme pour tout réel x, $\cos x \leqslant 1$, on en déduit que $f''(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $f'(0) = 0$ et f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on peut en déduire que f' est strictement négative sur $]-\infty\,;0[$ et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

3 D'après l'étude du signe de f' obtenu à la question précédente, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction f admet un minimum en 0 et ce minimum vaut $f(0) = 0$. Il en résulte que, pour tout réel x, on a $f(x) \geqslant f(0)$ soit $f(x) \geqslant 0$.

Par conséquent, pour tout réel x, $\cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) \geqslant 0$, d'où finalement :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

4 En admettant l'inégalité donnée par le texte et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient l'encadrement, valable pour tout réel x :

$$1-\frac{x^2}{2}\leqslant \cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

On encadre alors $g(x)$:

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}\leqslant g(x)\leqslant \frac{1}{2}.$$

Or,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}\right)=\frac{1}{2}.$$

On en déduit d'après le théorème de limite par encadrement que :

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{2}.$$

8 Aire maximale

Énoncé p. 255

Lycée La Bruyère, Versailles

1 Comme le trapèze est isocèle, $AD = 2AH + BC$.

De plus, $AH = AB\cos x$ et $BH = AB\sin x$ donc $AD = 1+2\cos x$ et $BH = \sin x$.

2 **(a)**
$$\begin{aligned} A(x) &= AH\times BH + BH\times BC\\ &= 1\times\cos x\times\sin x + 1\times\sin x\times 1\\ &= (\cos x+1)\sin x\ . \end{aligned}$$

(b) La fonction A est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A'(x) &= \cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)\\ &= \cos x(1+\cos x)-(1-\cos^2 x)\\ &= 2\cos^2 x+\cos x-1\ . \end{aligned}$$

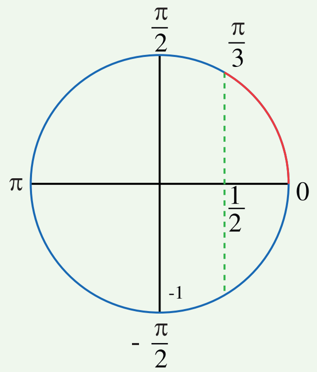
Or,

$$\begin{aligned} 2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)(1+\cos x) &= 2\left(\cos x+\cos^2 x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x\right)\\ &= 2\cos^2 x+\cos x-1. \end{aligned}$$

Cela prouve que l'on a bien $A'(x)=2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)(1+\cos x)$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

(c)



Sur le cercle trigonométrique, on lit que dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ pour $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

(d) On calcule :

$$A(0)=0 \quad ; \quad A\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \quad ; \quad A\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Grâce à la question 2.c, on connaît le signe de $A'(x)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et on peut établir le tableau de variation de A suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

(e) L'aire maximale est obtenue lorsque l'angle $\widehat{BAD}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians, et elle vaut alors $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

9 Un algorithme

Énoncé p. 256

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

1 Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)=\sin^2 x+\cos x=f(x).$$

La fonction f est donc périodique et 2π en est une période.

CORRIGÉS

2 Pour tout réel x, comme la fonction sin est impaire et la fonction cos paire, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin^2(-x) + \cos(-x) \\ &= (-\sin x)^2 + \cos x \\ &= \sin^2 x + \cos x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc paire, ce qui signifie que l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe dans un repère orthonormé.

3 Comme f est de période 2π, on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[-\pi\ ;\pi]$ d'amplitude 2π.

Comme f est paire, et comme l'intervalle $[-\pi\ ;\pi]$ est symétrique par rapport à 0, il suffit d'étudier f sur le demi-intervalle : $[0\ ;\pi]$.

4 La fonction f est bien dérivable car les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2\cos x \sin x - \sin x = (2\cos x - 1)\sin x.$$

5 Sur $]0\ ;\pi[$, $\sin x > 0$ et $2\cos x - 1 > 0$ pour $\cos x > \dfrac{1}{2}$, donc pour $x \in \left]0\ ;\dfrac{\pi}{3}\right[$.

On obtient le tableau de signes de f' puis le tableau de variation de f sur $[0\ ;\pi]$ suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	$+$		$+$	0
$2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1

6 Sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\pi\right]$, la fonction est continue et strictement décroissante. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) > 0$ et $f(\pi) < 0$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α unique dans $\left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\pi\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

D'autre part, d'après le tableau de variation, la fonction f ne s'annule pas entre 0 et $\dfrac{\pi}{3}$ car son minimum sur cet intervalle est 1.

Par conséquent, α est l'unique réel de $[0\ ;\pi]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

7 **(a)** On a le tableau suivant :

Étape	Test : $b-a>p$	c	Test : $f(a)\times f(c)<0$	a	b
				1	3
1	Vrai	2	Faux	2	3
2	Vrai	2,5	Vrai	2	2,5
3	Vrai	2,25	Vrai	2	2,25
4	Vrai	2,125	Faux	2,125	2,25
5	Vrai	2,187 5	Faux	2,187 5	2,25
6	Faux				

(b) L'algorithme affiche 2,187 5 et 2,25, qui constituent un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,1.

8 Le discriminant de l'équation $X^2-X-1=0$ est égal à 5. Elle admet donc deux solutions qui sont : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9
$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\iff \sin^2\alpha+\cos\alpha=0\\ &\iff 1-\cos^2\alpha+\cos\alpha=0\\ &\iff \cos^2\alpha-\cos\alpha-1=0 \end{aligned}$$
ce qui signifie que $\cos\alpha$ est une solution de (E).

10 La seule solution de l'équation (E) qui convienne est $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ car $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ et ne peut donc pas être égale à un cosinus.

Par conséquent, $\cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

À la calculatrice, à l'aide de la touche COS−1 , on trouve $2{,}23<\alpha<2{,}24$, ce qui est bien compatible avec le résultat de la question 7.b.

10 Intégrales et suites

Énoncé p. 257

Amérique du Nord, mai 2024

1 Par définition,

$$\begin{aligned} I_0=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^0x\sin(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}\sin(x)\mathrm{d}x\\ &=\big[-\cos(x)\big]_0^{\pi}\\ &=-\cos(\pi)+\cos(0)\\ &=-(-1)+1=2. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

2 **(a)** Sur $[0;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ pour tout entier naturel n, et $\sin(x) \geqslant 0$.
Ainsi, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$. Par conséquent, par propriété de l'intégrale sur la conservation des signes, $I_n \geqslant 0$.

(b)
$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \big(\mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\big)\mathrm{d}x \\ &\text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\big(\mathrm{e}^{-x} - 1\big)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Sur $[0;\pi]$,

- $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$;
- $0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \iff -1 < \mathrm{e}^{-x} - 1 \leqslant 0$.

Ainsi, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\big(\mathrm{e}^{-x} - 1\big) \leqslant 0$.
Donc, par propriété de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

(c) Nous venons de montrer que la suite (I_n) est minorée (par 0) et décroissante.
Ainsi, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (I_n) converge.

3 **(a)** Pour tout réel x dans $[0;\pi]$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 &\iff \mathrm{e}^{-nx} \times 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \times 1 \\ &\iff 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \\ &\iff \int_0^{\pi} 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \\ &\iff 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} - \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\times 0}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-n\pi}}{n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}. \end{aligned}$$

(c) Des questions **(a)** et **(b)** précédentes, on conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-n\pi}\right)=1-0=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}=0.$
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty}(I_n)=0.$$

4 **(a)** • Effectuons une première intégration par parties sur $I_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x$ en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x)=\mathrm{e}^{-nx} & u'(x)=-n\mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x)=\sin(x) & v(x)=-\cos(x) \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[uv(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}u'v(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-n\pi}\cos(\pi)+\mathrm{e}^{-n\times 0}\cos(0)-nJ_n \\ &= \mathrm{e}^{-n\pi}+1-nJ_n. \end{aligned}$$

• Effectuons maintenant une intégration par parties sur l'intégrale $I_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ en posant :

$$\begin{array}{ll} u'(x)=\mathrm{e}^{-nx} & u(x)=-\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x)=\sin(x) & v'(x)=\cos(x) \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[uv(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}u'v(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi}\sin(\pi)+\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\times 0}\sin(0)+J_n \\ &= \frac{1}{n}J_n. \end{aligned}$$

(b) Des deux égalités précédentes, on déduit que pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-n\pi}+1-nJ_n=\frac{1}{n}J_n &\iff \left(\frac{1}{n}+n\right)J_n=1+\mathrm{e}^{-n\pi} \\ &\iff J_n=\frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n+\frac{1}{n}} \\ &\iff J_n=\frac{n\left(1+\mathrm{e}^{-n\pi}\right)}{n^2+1}. \end{aligned}$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

Ainsi,

$$I_n = \frac{1}{n} J_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}.$$

5 Le programme dûment complété est le suivant :

```
from math import *
def seuil():
    n = 0
    I = 2
    while I > 0.1:
        n = n+1
        I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```

Pour information, on obtient $n = 4$, ce qui signifie que $I_3 \geqslant 0{,}1$ et $I_4 < 0{,}1$.

11 Équation différentielle

Énoncé p. 258

Centres étrangers, juin 2024

1 Soit $f(x) = k$ une fonction constante solution de (E_0). Alors,

$$f'(x) = f(x) \iff 0 = k.$$

Ainsi, la seule fonction constante à être solution de (E_0) est la fonction constante nulle.

2 D'après le cours, les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$f(x) = Ce^x \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

3 $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$. Alors,

$$h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) &= 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) \\ &= \cos(x) - 2\sin(x) \\ &= h'(x). \end{aligned}$$

Donc h est bien solution de (E).

4 **MÉTHODE**

Dans ce contexte, pour montrer une équivalence de la forme :

« f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) »,

il est préférable de partir de la condition de droite.

C'est beaucoup plus simple en général.

$$\begin{aligned} f-h \text{ est solution de } (E_0) &\iff (f-h)' = f-h \\ &\iff f'-h' = f-h \\ &\iff f'-f = h'-h \end{aligned}$$

Or, h est solution de (E) donc :

$$h' = h - \cos(x) - 3\sin(x) \qquad \text{soit} \qquad h' - h = -\cos(x) - 3\sin(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f-h \text{ est solution de } (E_0) &\iff f' = f - \cos(x) - 3\sin(x) \\ &\iff f \text{ est solution de } (E). \end{aligned}$$

5 On utilise l'équivalence démontrée à la question précédente pour trouver toutes les solutions de (E)

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff f-h \text{ est solution de } (E_0) \\ &\iff (f-h)(x) = C\mathrm{e}^x,\ C \in \mathbb{R} \text{ (d'après la question 2)} \\ &\iff f(x) = h(x) + C\mathrm{e}^x,\ C \in \mathbb{R} \\ &\iff f(x) = 2\cos(x) + \sin(x) + C\mathrm{e}^x,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6 La fonction g est solution de (E) avec $g(0) = 0$ donc :

$$g(0) = 2\cos(0) + \sin(0) + C\mathrm{e}^0 = 0 \iff C = -2.$$

Ainsi,

$$g(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - 2\mathrm{e}^x.$$

7 Une primitive de g est :

$$G(x) = -2\mathrm{e}^x - \cos(x) + 2\sin(x)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x &= G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) \\ &= -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Big[-2\mathrm{e}^0 - \cos(0) + 2\sin(0)\Big] \\ &= 5 - 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Chapitre 9

Combinatoire et dénombrement

Plan du chapitre

1 Principes de base

Exercice type 1 — Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

On considère trois ensembles : $E = \{1; 2\}$, $F = \{1; 2; 3; 4\}$ et $G = \{a; b; c\}$.
Quel est le nombre d'éléments de $(E \cup F) \times G$?

Voir corrigé page 276

1.1 Cardinal d'un ensemble

Définition 1

Le *cardinal* d'un ensemble A est le nombre d'éléments contenus dans A.
On le note $\operatorname{card} A$.

Exemple : si A désigne l'ensemble des cartes qui constituent un jeu de 32 cartes, alors $\operatorname{card} A = 32$.

Définition 2

On dit qu'un ensemble A est *fini* si $\operatorname{card} A$ est un entier naturel.

1.2 Principe additif

Propriété 1

Soient A et B deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire n'ayant aucun élément commun, tels que $\operatorname{card} A = n$ et $\operatorname{card} B = m$, où n et m sont deux entiers naturels. Alors, le nombre de façons de prendre un élément dans A <u>ou</u> un élément dans B est égal à $n + m$.
Cela se traduit ainsi :

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B.$$

Exemple : dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.
Je peux donc y choisir un livre de $20 + 10 = 30$ façons différentes.

1.3 Principe multiplicatif

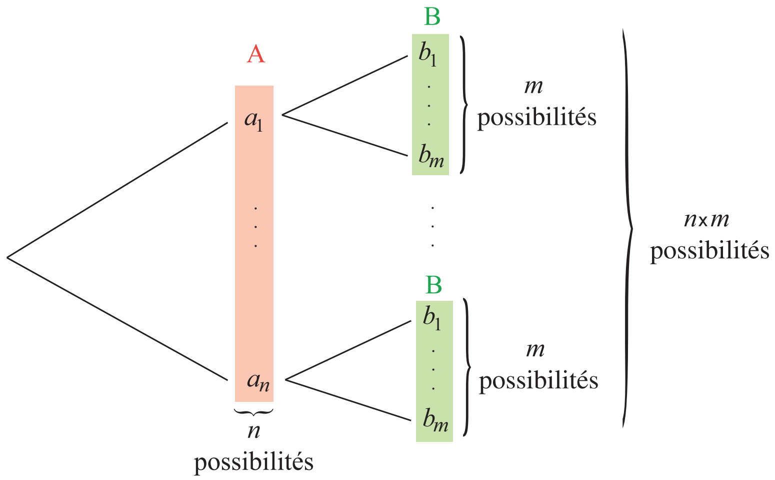
Propriété 2

Soient A et B deux ensembles finis tels que $\text{card}\, A = n$ et $\text{card}\, B = m$, où n et m sont deux entiers naturels.
Le nombre de façons de prendre un élément dans A et un élément dans B est égal à $n \times m$. Cela se traduit ainsi :

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}\, A \times \text{card}\, B.$$

Exemple : dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.
Je souhaite prendre un livre de chaque sorte. Il y a donc $20 \times 10 = 200$ possibilités.

Le principe multiplicatif peut se représenter sous la forme d'un *arbre des possibilités* :



On peut aussi considérer un tableau à n colonnes et m lignes : il comporte $n \times m$ cellules.

Solution de l'exercice type 1

Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

L'ensemble $E \cup F$ désigne les éléments qui sont dans E *ou* dans F : cet union comprend donc tous les éléments des deux ensembles. Or, E est inclus dans F donc $E \cup F = F$.
Ainsi, $(E \cup F) \times G$ représente donc le produit cartésien de F et de G et donc, d'après le principe multiplicatif :

$$\text{card}(F \times G) = \text{card}(F) \times \text{card}(G) = 4 \times 3 = 12.$$

Voir énoncé page 275

2 Dénombrement

Exercice type 2 — Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

On considère l'ensemble :

$$E = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}.$$

1. Calculer le nombre de 5-uplets d'éléments de E.
2. Combien de sous-ensembles de E à 5 éléments existe-t-il ?
3. Combien y a-t-il de triplets d'éléments distincts de E ?

Voir corrigé page 280

2.1 Factorielle

Définition 3

La factorielle d'un nombre entier n est le nombre :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Remarque : par convention, $0! = 1$.

Exemple : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

2.2 p-liste (ou p-uplet)

Définition 4

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, et soit E un ensemble à n éléments.
Une *p-liste* (ou *p-uplet*) de E est une liste ordonnée de p éléments pris parmi les n éléments de E.

Exemple : un digicode à 4 chiffres est une 4-liste de l'ensemble $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. La 4-liste $(1\,;1\,;1\,;0)$ est différente de la 4-liste $(0\,;1\,;1\,;1)$.

Propriété 3

Le nombre de p-listes prises dans un ensemble à n éléments est égal à n^p.

Exemple : il y a $10^4 = 10\,000$ possibilités pour un digicode composé de 4 chiffres.

COURS

2.3 Permutation

Définition 5

Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.
Une *permutation* de E est un n-uplet composé des n éléments de E.

Exemple : si $E = \{1; 2; 3\}$ alors $F = (2; 3; 1)$ est une permutation de E.

Propriété 4

Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

2.4 Arrangement

Définition 6

Soit n un entier naturel non nul, et soit E un ensemble à n éléments.
Un *arrangement* de p éléments de E est une p-liste d'éléments distincts.

Exemple : le podium d'une course à 20 participants est un arrangement constitué du premier arrivé, puis du deuxième et enfin du troisième.

Propriété 5

Le nombre d'arrangements de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

Exemple : $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.

Il y a donc 6 840 podiums possibles pour une course à 20 participants.

2.5 Combinaison

Définition 7

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$, et soit E un ensemble à n éléments.
Une *combinaison* de p éléments de E est un ensemble (donc non ordonné) à p éléments pris parmi les n éléments de E.

Exemple : sur un jeu de 32 cartes, une main de 5 cartes est une combinaison.

Propriété 6

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.$$

Exemple : $\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times \cdots \times (32-5+1)}{5!} = 201\,376$ donc il y a 201 376 mains de 5 cartes possibles sur un jeu de 32 cartes.

Propriété 7

Pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Propriété 8 : relation de Pascal

Pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ et $n \neq 0$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

De la propriété 8, on déduit un tableau regroupant les différentes valeurs de $\binom{n}{p}$ suivant les valeurs de n et p : c'est le *triangle de Pascal*.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3 $\xrightarrow{+}$	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

COURS

À RETENIR

	Ordre	Modèle	Exemples
Permutation	Oui	Tirage sans remise	Anagramme *
p-liste	Oui	Tirage avec remise	Digicode
Arrangement A_n^p	Oui	Tirage sans remise	Podium d'une course
Combinaison $\binom{n}{p}$	Non	Tirage sans remise	Main dans un jeu de cartes

* Permutation des lettres d'un mot formant un mot de sens différent.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

1 *Calculer le nombre de 5-uplets d'éléments de E.*

Le nombre de 5-uplets d'éléments de E est égal à $10^5 = 100\,000$ car E contient 10 éléments.

2 *Combien de sous-ensembles de E à 5 éléments existe-t-il ?*

On nous demande ici le nombre de combinaisons à cinq éléments qu'il est possible de faire avec les éléments de E. En effet, l'ordre des éléments importe peu (contrairement aux arrangements) car l'ensemble $\{2; 3; 4; 5; 6\}$ est identique à l'ensemble $\{2; 6; 4; 5; 3\}$ (quand on parle d'ensemble, l'ordre ne compte pas).

$$\binom{10}{5} = 252.$$

Il y a donc 252 sous-ensembles de E à cinq éléments.

3 *Combien y a-t-il de triplets d'éléments distincts de E ?*

Un triplet, contrairement à un ensemble, est une liste *ordonnée*. On cherche donc ici le nombre d'arrangements à trois éléments distincts de E.

$$A_{10}^3 = 720.$$

Il y a donc 720 triplets d'éléments distincts de E.

Voir énoncé page 277

1 QCM Vérification de compréhension du cours

10 min Corrigé p. 289

Dans chacune des questions suivantes, quatre propositions de réponses sont faites, dont une seule est exacte. Laquelle ?

1 Ludwig a pris quarante-cinq photos de son voyage en Allemagne et veut en imprimer cinq pour les envoyer à un ami. Le nombre de possibilités de cadres pouvant être obtenu est :

- a 5^{45}
- b 45^5
- c $\binom{45}{5}$
- d A_{45}^5

2 D'une urne contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50, on en extrait dix sans les remettre. On note les numéros ainsi obtenus sur un papier de sorte à avoir une suite. Le nombre de suites possibles est :

- a 10^{50}
- b 50^{10}
- c $\binom{50}{10}$
- d A_{50}^{10}

3 Dans le jeu télévisé « Des chiffres et des lettres », on demande dix fois aux candidats de choisir au hasard s'il veulent une voyelle ou une consonne. Le nombre de « mots » possibles à l'issue de ces dix choix est :

- a $26!$
- b 26^{10}
- c $\binom{26}{10}$
- d A_{26}^{10}

4 Le nombre d'anagrammes du mot « STYLO » est :

- a $5!$
- b 5^5
- c $\binom{26}{5}$
- d A_{26}^5

2 V/F Applications du cours

10 min Corrigé p. 289

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1 On considère les trois ensembles $E = \{2; 3; 4\}$, $F = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ et $G = \{a; b; c; d\}$.

Le nombre d'éléments de $(E \cup F) \times G$ est égal à 28.

2 On considère l'ensemble $E = \{R; B; V\}$.

Le nombre de parties de E est égal à 9.

3 Lors d'un tiercé, il y a vingt chevaux au départ de la course.

Il y a 8 000 possibilités pour ce tiercé.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

Principes additif et multiplicatif

3 L'imprimeur

★ 5 min Corrigé p. 290

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Un imprimeur doit imprimer des calendriers pour une même société tous les ans. Afin de réduire ses coûts, il décide de créer tous les modèles possibles la même année (un mois ne commence pas chaque année par le même jour).

1. Combien de pages différentes doit-il confectionner pour le mois de janvier ?
2. Combien de pages différentes doit-il confectionner pour le mois de février ?

4 Au restaurant

★ 5 min Corrigé p. 290

Lycée Henri IV, Paris

Un restaurant propose à sa carte un menu où il faut choisir une entrée, un plat et un dessert.

Sont proposés trois entrées, six plats et deux desserts.

Combien de repas différents peut-on constituer ?

5 Dans la bibliothèque

★ 5 min Corrigé p. 290

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Dans la bibliothèque de Gaspard, il y a 20 polars, 7 livres sur l'art et 5 livres sur les routards.

Il souhaite ne prendre que deux livres de catégories différentes.

Combien de possibilités a-t-il ?

6 Coordonnées aléatoires

★ 5 min Corrigé p. 290

Lycée Daguin, Mérignac

Voici un programme Python qui permet de choisir au hasard les coordonnées d'un point dans le plan muni d'un repère :

```python
from random import *

x = choice(range(-10,10))
y = choice(range(-10,10))
```

Combien de coordonnées peut-on obtenir ?

Arrangements, permutations, combinaisons et p-listes

7 Nombres de nombres binaires

★ 5 min Corrigé p. 291

Lycée Victor Duruy, Paris

Un *octet* est une suite de huit chiffres (appelés *bits*), chacun pris dans l'ensemble $\{0;1\}$, comme par exemple : 01101001.

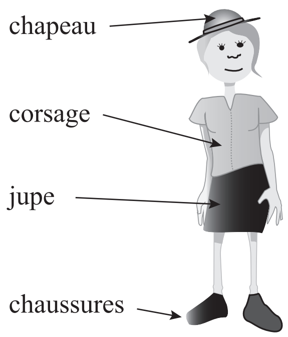
Combien y a-t-il d'octets différents ?

8 Choix de couleurs

★ 5 min Corrigé p. 291

Lycée Ampère, Lyon

On dispose de trois crayons de couleurs (bleu, rose et vert) et on veut colorier les quatre éléments du modèle : le chapeau, le corsage, la jupe et les chaussures.



De combien de façons peut-on colorier cette figure ?

9 Les femmes et les enfants d'abord

★ 10 min Corrigé p. 291

Lycée Magendie, Bordeaux

Sur un bateau qui coule, il y a 10 hommes, 8 femmes et 12 enfants. Afin d'assurer les bonnes conditions du sauvetage, les individus doivent se mettre en file indienne avant de monter dans les canots de sauvetage.

1. De combien de manières différentes peut-on placer toutes ces personnes ?
2. Combien de files indiennes peut-on former de sorte que les hommes soient en dernier ?
3. Combien de files indiennes peut-on former de sorte que les enfants se suivent et que les hommes soient en dernier ?

10 Dans la bibliothèque de Pierre

★ 10 min Corrigé p. 291

Lycée Élie Faure, Lormont

Pierre dispose de :

- 5 ouvrages sur l'histoire des mathématiques,
- 7 ouvrages de vulgarisation mathématique,
- 2 ouvrages d'analyse combinatoire,
- 6 ouvrages d'algèbre.

Il souhaite les ranger sur une étagère de sa bibliothèque de sorte à les regrouper par thème.

De combien de façons différentes peut-il les disposer ?

11 Mains d'un jeu de cartes

★ 15 min Corrigé p. 292

Lycée Stanislas, Paris

Un joueur dispose de cinq cartes prises parmi 52. On dit que c'est une *main* de cinq cartes.

1. Combien de mains existe-t-il ?
2. Combien de mains ayant exactement un Roi existe-t-il ?
3. Combien de mains ayant exactement 2 Piques existe-t-il ?
4. Combien de mains ayant exactement 2 Piques et 1 Cœur existe-t-il ?

12 S'assoir sur les chaises

★ 15 min Corrigé p. 292

Lycée François Couperin, Fontainebleau

Quatre garçons et trois filles doivent s'assoir en ligne sur des chaises.

1. De combien de façons peuvent-ils s'assoir ?
2. Même question si les garçons et les filles doivent rester groupés.
3. Même question si les garçons et les filles doivent être disposés de façon alternée.

13 Circuits touristiques

★ 15 min Corrigé p. 293

Lycée Sacré-Cœur, Amiens

Une agence de voyages veut organiser des circuits touristiques.

1. Les circuits touristiques doivent comprendre obligatoirement la visite de 6 villes grecques : Athènes, Delphes, Olympie, Corinthe, Sparte et Nauplie.
   (a) Combien y a-t-il de circuits possibles ?
   (b) Même question si la première ville visitée est Athènes.

2. Combien de circuits comprenant la visite de 2 villes sont possibles (on considèrera les circuits Athènes puis Delphes et Delphes puis Athènes comme des circuits différents) ?
3. Combien existe-t-il de circuits comprenant la visite de 3 villes sur les 6, sachant que cette fois-ci l'ordre de la visite n'est pas important ?

14 Le congrès des gens polis

★★ 5 min Corrigé p. 293

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Chaque année, l'association des gens polis de Paris organise un congrès et comme chaque année, tous les participants doivent se serrer la main.

Cette année, il y a 50 participants.

Combien de poignées de mains vont être données ?

15 Mots de passe

★★ 10 min Corrigé p. 294

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Sur une plateforme numérique interne d'une société, on impose aux salariés la composition de leur mot de passe ; il faut que ce dernier comporte dans cet ordre :

- une lettre non accentuée prise dans l'alphabet latin (comportant 26 lettres), en majuscule ou minuscule ;
- un symbole parmi : « $ », « # », « & », « ? » et « ! » ;
- un chiffre compris entre 0 et 9 (inclus).

Le mot de passe est donc composé de trois caractères (comme : « Z#0 »).

Combien de mots de passe peuvent ainsi être créés ?

16 Chemises et tiroirs

★★ 15 min Corrigé p. 294

Lycée Henri IV, Paris

De combien de façons peut-on ranger 7 chemises toutes différentes dans une commode à trois tiroirs, sachant qu'un tiroir peut contenir au plus 3 chemises ?

17 Le clavier à neuf touches

★★ 15 min Corrigé p. 295

Lycée Sophie Germain, Paris

Un clavier comporte neuf touches : 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B et C.

Un *code* obtenu à l'aide de ce clavier est une suite d'une lettre et de trois chiffres.

INTERROS

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre « 1 » ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre « 1 » ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

18 Nombre de mots

★★ 15 min Corrigé p. 295

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

Un programme permet de générer un mot de une à dix lettres en choisissant aléatoirement chacune des lettres dans un alphabet en comportant 26.

Déterminer un ordre de grandeur du nombre de mots possibles.

19 Manipulation des combinaisons

★★ 15 min Corrigé p. 296

Lycée François 1er, Le Havre

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, avec $p \leqslant n$.

1. Après avoir simplifié :

$$\frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}}$$

résoudre l'inéquation :

$$\frac{\binom{n+1}{10}}{\binom{n}{10}} < 220.$$

2. Résoudre l'équation :

$$\binom{n}{3} = 220.$$

20 Boules dans une urne

★★ 15 min Corrigé p. 297

Lycée Carnot, Dijon

Une urne contient 7 boules (5 noires et 2 rouges) indiscernables au toucher et numérotées. On extrait les 7 boules l'une après l'autre. On appelle *tirage* la suite des 7 extractions de boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2 Déterminer le nombre de tirages pour lesquels la première boule est rouge.
3 Déterminer le nombre de tirages pour lesquels la première boule est noire et la deuxième boule est rouge.
4 Déterminer le nombre de tirages pour lesquels la première boule noire arrive en troisième position.

21 Anagrammes

★★ 20 min Corrigé p. 297

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

1 Combien d'anagrammes y a-t-il au mot « ABYME » ?
2 Combien d'anagrammes différents y a-t-il au mot « NAPPE » ?
3 Combien d'anagrammes différents y a-t-il au mot « KAYAK » ?
4 Combien d'anagrammes différents y a-t-il au mot « UBUESQUE » ?

22 Groupes d'une classe

★★ 20 min Corrigé p. 298

Lycée La Bruyère, Versailles

Les 35 élèves d'une classe sont répartis en quatre catégories selon leur taille.

- La catégorie 1 contient 7 élèves ;
- La catégorie 2 contient 5 élèves ;
- La catégorie 3 contient 9 élèves.

1 Combien peut-on former de groupes de 7 élèves avec tous les élèves de la classe ?
2 Combien y a-t-il de groupes de 7 élèves formés par des élèves de catégorie 1 ? De catégorie 3 ?
3 Combien y a-t-il de groupes de 7 élèves contenant exactement 3 élèves de catégorie 1 et 2 élèves de catégorie 2 ?

23 Constitution d'un jury

★★ 20 min Corrigé p. 299

Lycée Condorcet, Paris

Un jury de 10 membres est tiré au sort parmi un groupe constitué de 8 hommes et 9 femmes.

1 Combien de jurys différents peut-on former ?
2 Combien de jurys comportant autant d'hommes que de femmes peut-on constituer ?

3 Combien de jurys comportant plus d'hommes que de femmes peut-on former ?

4 Reprendre la question 2 sachant que Monsieur X ne veut pas siéger avec Madame Y.

24 Sur un échiquier ★★★ 15 min

Corrigé p. 300

Lycée Henri IV, Paris

Une pièce se déplace sur un échiquier de n cases sur n en avançant soit vers le haut, soit vers la droite.

Montrer qu'il y a $\binom{2n-2}{n-1}$ chemins possibles pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit.

Objectif bac

25 Codage informatique ★★ 15 min

Corrigé p. 301

Extrait du sujet 2 Centres étrangers, 2025

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

On s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64.

Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences «m5C2 » et « 5C2m» ne sont pas identiques.

1 Déterminer le nombre de séquences possibles.

2 Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.

3 **(a)** Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule.

(b) En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.

(c) Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.

(d) Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

1 QCM Vérification de compréhension du cours

Énoncé p. 281

1 Réponse $\boxed{\text{c}}$. En effet, on choisit 5 éléments d'un ensemble de 45 éléments et l'ordre ne compte pas. Le nombre de sous-groupes de 5 éléments possibles est donc $\binom{45}{5}$.

2 Réponse $\boxed{\text{d}}$. En effet, on choisit 10 éléments d'un ensemble de 50 éléments et l'ordre compte. Il s'agit donc d'un arrangement. Le nombre de sous-groupes de 10 éléments possibles est donc A_{50}^{10}.

3 Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, il y a 26 possibilités pour la première lettre, puis 26 pour la deuxième, etc. jusqu'à 26 possibilités pour la dixième. Il y a donc 26^{10} possibilités d'issues. Les issues sont des 10-listes.

4 Réponse $\boxed{\text{a}}$. Il s'agit de compter le nombre d'anagrammes d'un mot où chaque lettre n'apparaît qu'une seule fois, donc il y en a $n!$, où n est le nombre de lettres (donc ici : 5!).

2 V/F Applications du cours

Énoncé p. 281

1 *Vrai*. En effet,

$$E \cup F = \{2; 3; 4\} \cup \{4; 5; 6; 7; 8\} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

donc :

$$\text{card}(E \cup F) = 7.$$

De plus, $G = \{a; b; c; d\}$, donc :

$$\text{card}(G) = 4.$$

D'après le principe multiplicatif,

$$\text{card}\left((E \cup F) \times G\right) = \text{card}(E \cup F) \times \text{card}(G) = 7 \times 4 = 28.$$

2 *Faux*. En effet, le nombre de parties d'un ensemble est le nombre de sous-ensembles que l'on peut former avec ses éléments, donc le nombre de combinaisons de cet ensemble.

card$(E) = 3$ donc le nombre total de combinaisons possibles que l'on peut former avec les éléments de E est :

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} = 2^3 \text{ (d'après le cours)} = 8.$$

Il y a donc 8 parties de E (ensemble vide compris).

3 *Faux*. Le tiercé consiste à regarder le nombre de triplets (donc ensemble *ordonné*) que l'on peut former dans l'ensemble constitué des vingt chevaux. On doit donc calculer :

$$A_{20}^{3} = 3! \times \binom{20}{3} = 6\,840.$$

Il y a donc 6 840 tiercés possibles.

CORRIGÉS

3 L'imprimeur

Énoncé p. 282

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

1 Le mois de janvier peut commencer par « Lundi », « Mardi », ... ou « Dimanche », soit 7 possibilités.

L'imprimeur doit donc imprimer 7 pages différentes pour le mois de janvier.

2 Le mois de février comporte 28 ou 29 jours ; il y a donc deux types de pages à créer :

- pour les mois à 28 jours, il doit créer 7 pages différentes (car le mois peut commencer par 7 jours différents) ;
- pour les mois à 29 jours, il doit aussi créer 7 pages différentes.

Finalement, il doit créer $7 + 7 = 14$ pages différentes.

4 Au restaurant

Énoncé p. 282

Lycée Henri IV, Paris

Il y a 3 entrées possibles, 6 plats possibles et 2 desserts possibles, donc il y a $3 \times 6 \times 2 = 36$ repas différents.

5 Dans la bibliothèque

Énoncé p. 282

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On utilise le principe multiplicatif pour chaque couple possible (où l'ordre ne compte pas).

- il y a $20 \times 7 = 140$ possibilités pour les couples polars/art ;
- il y a $20 \times 5 = 100$ possibilités pour les couples polars/routards ;
- il y a $7 \times 5 = 35$ possibilités pour les couples art/routards.

Ensuite, on applique le principe additif : on a le choix entre les couples polars/art *ou* polars/routards *ou* art/routards, ce qui fait :

$$140 + 100 + 35 = 275 \text{ possibilités.}$$

6 Coordonnées aléatoires

Énoncé p. 282

Lycée Daguin, Mérignac

Avant tout, il faut savoir (ou rechercher sur Internet par exemple) ce que fait l'instruction « `choice(range(-10,10))` ». On trouve alors qu'elle choisit au hasard un nombre entier entre -10 (inclus) et 10 (exclus). Il y a donc 20 possibilités pour x et pour y.

Le nombre total de possibilités est donc $20 \times 20 = 400$.

7 Nombres de nombres binaires

Énoncé p. 283

Lycée Victor Duruy, Paris

Un octet est composé de huit bits et il y a deux possibilités pour un bit : 0 ou 1. Il y a donc $2^8 = 256$ octets possibles.

8 Choix de couleurs

Énoncé p. 283

Lycée Ampère, Lyon

Pour chaque élément de l'habillement, il y a 3 possibilités de couleurs.

Les quatre éléments sont indépendants (la couleur du chapeau n'influe pas sur le choix des couleurs des autres éléments par exemple). Le nombre total de possibilités est donc égal au produit du nombre de possibilités pour chaque élément. Il y a ainsi $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ possibilités.

9 Les femmes et les enfants d'abord

Énoncé p. 283

Lycée Magendie, Bordeaux

1. Il y a en tout $10 + 8 + 12 = 30$ personnes. On cherche ici le nombre de permutations de ces 30 personnes : il y en a 30!.
2. Construire une telle file revient à faire une permutation de l'ensemble constitué des femmes et des enfants ($8 + 12 = 20$ personnes) et une permutation de l'ensemble des hommes (10 personnes).

   Il y a donc $20! \times 10!$ possibilités, soit environ 10^{25} possibilités.
3. Ici, il faut voir le groupe des enfants comme une entité à placer dans un groupe constitué de cette entité et de 8 femmes : il y a 9! façons de les permuter. Mais au sein du groupe des enfants, il y a 12! façons de les permuter. Il faut ensuite permuter les hommes : 10! possibilités.

   Au final, il y a donc $12! \times 9! \times 10!$ façons d'obtenir une file indienne où tous les hommes sont en dernier et où tous les enfants sont regroupés, c'est-à-dire environ 6×10^{20}.

10 Dans la bibliothèque de Pierre

Énoncé p. 284

Lycée Élie Faure, Lormont

Nous devons permuter les quatre thèmes : il y a 4! façons de le faire.

Dans le premier groupe (histoire des mathématiques), il y a 5 éléments donc il y a 5! façons de les permuter.

Dans le deuxième (vulgarisation mathématique), il y en a 7!.

Dans le troisième (analyse combinatoire), il y en a 2!.

Enfin, dans le dernier (algèbre), il y en a 6!.

Au total, il y a donc $5! \times 7! \times 2! \times 6! \times 4!$ manières de disposer ces ouvrages, soit 20 901 888 000 façons.

CORRIGÉS

11 Mains d'un jeu de cartes

Énoncé p. 284

Lycée Stanislas, Paris

1 On choisit 5 cartes parmi 52 et l'ordre ne compte pas. Il s'agit donc ici d'une combinaison.

Il y a donc $\binom{52}{5} = \dfrac{52!}{5!(52-5)!} = 2\,598\,960$ mains possibles.

2 On impose dans cette question le fait qu'il y ait un Roi. Comme l'ordre ne compte pas, on peut considérer que la première est un Roi (il y a 4 choix possibles car il y a 4 Rois dans un jeu de cartes). Nous voulons exactement un Roi ; par conséquent, il ne faut pas qu'il y en ait parmi les autres cartes : on choisit donc 4 cartes parmi les $52 - 4 = 48$ cartes qui ne sont pas des Rois.

Ainsi, il y a $4 \times \binom{48}{4} = 778\,320$ mains comportant exactement un Roi.

3 Nous souhaitons ici exactement deux Piques. Comme l'ordre ne compte pas, on peut considérer que ce sont les deux premières cartes. Il y a $52 \div 4 = 13$ Piques donc il y a $\binom{13}{2}$ possibilités pour ces deux cartes.

Pour les 3 autres cartes, il faut les choisir parmi les $52 - 13 = 39$ cartes restantes qui ne sont pas des Piques.

Ainsi, il y a $\binom{13}{2} \times \binom{39}{3} = 712\,842$ mains possibles contenant exactement 2 Piques.

4 Nous souhaitons ici 2 Piques et 1 Cœur. Selon le même principe que celui utilisé dans la question précédente, on peut dire que le nombre de mains comportant exactement 2 Piques et 1 Cœur est égal à :

$$\underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{2 Piques}} \times \underbrace{\binom{13}{1}}_{\text{1 Cœur}} \times \underbrace{\binom{26}{2}}_{\text{2 autres}} = 329\,550.$$

12 S'assoir sur les chaises

Énoncé p. 284

Lycée François Couperin, Fontainebleau

1 Il y a 7 personnes à permuter donc il y a $7! = 5\,040$ façons de s'assoir.

2 Il y a deux groupes (filles et garçons), donc 2 façons de les disposer. Dans le groupe des filles, il y a 3! façons de les disposer et dans le groupe des garçons, il y en a 4!.

Il y a donc $2 \times 3! \times 4! = 288$ façons de s'assoir.

3 Dans cette question, deux garçons ne peuvent pas être à côté, et deux filles non plus.

Imaginons que les chaises soient numérotées de 1 à 7. Supposons que les garçons s'assoient sur les chaises avec un numéro impair : il y a 4! façons de les disposer.

De même, il y a $3!$ façons de disposer les filles sur les chaises dont le numéro est pair.

Au final, il y a $4! \times 3! = 144$ façons de les assoir.

13 Circuits touristiques

Énoncé p. 284

Lycée Sacré-Cœur, Amiens

1 **(a)** On cherche ici le nombre de permutations à 6 éléments : pour la première ville, il y a 6 choix possibles, 5 pour la deuxième,..., 1 possibilité pour la dernière.

Il y a donc en tout $6! = 720$ possibilités de circuits.

(b) Si Athènes est la première ville visitée, alors le raisonnement de la question précédente est modifié : il y a 1 choix (Athènes) possible pour la première ville, puis 5 choix pour la deuxième, ..., enfin 1 possibilité pour la dernière ville (la seule qu'il reste à visiter).

Il y a donc $1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ circuits possibles.

2 S'il faut choisir deux villes parmi les 6, on peut dire que pour la première ville, il y a 6 choix possibles et qu'il en reste 5 pour la deuxième ville, soit 30 circuits possibles.

Remarque : on peut aussi raisonner avec les combinaisons.

En effet, il y a $\binom{6}{2} = 15$ possibilités de choisir 2 villes parmi les 6. Pour chaque couple de villes, il y a 2 possibilités, suivant l'ordre des visites. On retrouve bien les 30 possibilités.

3 Cette fois, l'ordre n'est pas important ; il suffit alors de choisir un groupe de 3 villes parmi 6, ce qui correspond à $\binom{6}{3} = 20$ possibilités.

14 Le congrès des gens polis

Énoncé p. 285

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Le nombre de poignées de mains est égal au nombre de sous-ensembles à deux éléments que l'on peut former dans un ensemble à 50 éléments, à savoir $\binom{50}{2} = 1\,225$.

Il y a donc 1 225 poignées de mains.

CORRIGÉS

15 Mots de passe

Énoncé p. 285

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Il y a $2 \times 26 = 52$ lettres possibles (si on compte les majuscules et les minuscules).

Ensuite, il y a 5 possibilités pour le symbole et enfin, 10 possibilités pour le chiffre pris parmi les dix disponibles.

Il y a donc $52 \times 5 \times 10 = 2\,600$ possibilités pour un « mot » de trois caractères.

Ainsi, il y a 2 600 mots de passe possibles.

16 Chemises et tiroirs

Énoncé p. 285

Lycée Henri IV, Paris

Avant tout, on remarque que l'on peut avoir :

- 3 chemises dans 2 tiroirs et 1 chemise dans le 3ᵉ ;
- 2 chemises dans 2 tiroirs et 3 chemises dans le 3ᵉ.

Ce sont les seules possibilités.

- *Première possibilité : 3 chemises dans 2 tiroirs et 1 chemise dans le 3ᵉ.*
  Il y a $\binom{7}{3}$ façons de choisir 3 chemises pour le 1ᵉʳ tiroir, qui ne peut contenir que 3 chemises.

  Suite à ce choix, il reste $7 - 3 = 4$ chemises, et il y a donc $\binom{4}{3}$ façons de choisir trois chemises pour le 2ᵉ tiroir.
  Il ne reste ensuite plus qu'une seule possibilité pour la dernière chemise.
  De plus, l'unique chemise peut être soit dans le 1ᵉʳ tiroir, soit dans le 2ᵉ, soit dans le 3ᵉ.

  Il y a donc :
$$3 \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{3} \times 1 = 3 \times 35 \times 4 = 420$$
  possibilités de ranger ainsi les chemises.
- *Seconde possibilité : 2 chemises dans 2 tiroirs et 3 chemises dans le 3ᵉ.*
  Le raisonnement est analogue au précédent. Il y a donc :
$$3 \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times 1 = 630$$
  possibilités de ranger les chemises de cette façon.

Finalement, en ajoutant ces résultats, on trouve qu'il y a $420 + 630 = 1\,050$ façons de disposer les chemises dans les tiroirs.

17 Le clavier à neuf touches

Énoncé p. 285

Lycée Sophie Germain, Paris

1 Il y a 3 lettres possibles pour la première entrée (le premier caractère du code) et on a le choix entre 6 chiffres pour chacun des 3 chiffres suivants.

Il y a donc $3 \times 6^3 = 648$ codes possibles.

2 Il y a toujours 3 lettres possibles pour la première entrée, puis 5 choix possibles pour chacun des 3 autres entrées.

Il y a donc $3 \times 5^3 = 375$ codes sans « 1 ».

3 Il y a encore 3 lettres possibles pour la première entrée. Ensuite, nous avons vu aux questions précédentes qu'il existe 375 codes sans le chiffre « 1 » et qu'il y a 648 codes possibles.

Il y a donc $648 - 375 = 273$ codes ayant au moins un chiffre « 1 ».

4 Il y a 3 lettres possibles pour la première entrée, et il faut compter le nombre d'arrangements de 3 éléments pris parmi 6 pour avoir un code où tous les chiffres sont distincts (l'ordre compte et on peut assimiler ceci à un tirage sans remise, ce qui justifie que c'est bien un arrangement).

Il y a donc $3 \times A_6^3 = 3 \times \dfrac{6!}{3!} = 360$ codes possibles où tous les chiffres sont distincts.

5 Le contraire de l'événement « le code comporte au moins deux chiffres identiques » est l'événement : « le code comporte des chiffres distincts ».

Il y a donc $648 - 360 = 288$ codes comportant au moins deux chiffres identiques.

18 Nombre de mots

Énoncé p. 286

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

- Si le mot généré ne contient qu'une lettre alors il y a 26 possibilités.
- Si le mot contient deux lettres alors il y a 26^2 possibilités.
- Si le mot contient trois lettres alors il y a 26^3 possibilités.
- $\vdots$
- Si le mot contient dix lettres alors il y a 26^{10} possibilités.

Ainsi, le nombre total de mots possibles est :

$$26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{10}.$$

Pour rappel, si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

La somme que nous souhaitons calculer est la somme des premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 26$ et de raison $q = 26$.

CORRIGÉS

Ainsi,

$$\begin{aligned}26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{10} &= 26 \times \frac{26^{10} - 1}{26 - 1}\\ &\approx 1{,}5 \times 10^{14}.\end{aligned}$$

19 Manipulation des combinaisons

Énoncé p. 286

Lycée François 1er, Le Havre

1 Commençons par simplifier la fraction donnée :

$$\frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}} = \binom{n+1}{p} \times \frac{1}{\binom{n}{p}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}} &= \frac{(n+1)!}{\cancel{p!} \times (n+1-p)!} \times \frac{\cancel{p!} \times (n-p)!}{n!}\\ &= \frac{\cancel{n!} \times (n+1) \times \cancel{(n-p)!}}{\cancel{(n-p)!} \times (n-p+1) \times \cancel{n!}}\\ &= \frac{n+1}{n-p+1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n+1}{10}}{\binom{n}{10}} < 220 &\iff \frac{n+1}{n-10+1} < 220\\ &\iff n+1 < 220(n-9) \quad (\text{car } n \geqslant 10)\\ &\iff 219n > 1 + 9 \times 220\\ &\iff n > \frac{1\,981}{219}\\ &\iff n \geqslant 10.\end{aligned}$$

2 $$\begin{aligned}\binom{n}{3} = 220 &\iff \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = 220\\ &\iff \frac{(n-3)! \times (n-2)(n-1)n}{3! \times (n-3)!} = 220\end{aligned}$$

$$\binom{n}{3} = 220 \iff \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 220$$

$$\iff n(n-1)(n-2) = 1\ 320.$$

$n(n-1)(n-2)$ désigne le produit de 3 entiers consécutifs. Ce produit doit être égal à un nombre dont l'ordre de grandeur est $1\ 000 = 10^3$, ce qui nous pousse alors à effectuer $10 \times 11 \times 12$.

On trouve justement 1 320.

Ainsi, $n = 12$. Cette solution est unique car $n \mapsto n(n-1)(n-2)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

20 Boules dans une urne

Énoncé p. 286

Lycée Carnot, Dijon

1 Il y a 7 façons de choisir la première boule, puis 6 pour la deuxième, etc.

Il y a donc en tout $7! = 5\ 040$ tirages possibles.

2 On choisit 1 boule rouge parmi les deux qu'il y a pour la première boule tirée, puis il reste 6 possibilités pour la deuxième boule, puis 5 pour la troisième, etc.

Il y a donc :

$$\binom{2}{1} \times 6! = 1\ 440 \text{ possibilités.}$$

3 Sur le même principe qu'à la question précédente, on peut dire que le nombre de tirages où la première boule est noire et la deuxième rouge est :

$$\binom{5}{1} \times \binom{2}{1} \times 5! = 1\ 200.$$

4 Il faut une boule rouge en position 1 et 2, puis une boule noire en position 3. Le nombre de tirages possibles est donc :

$$\binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times 5! = 240.$$

21 Anagrammes

Énoncé p. 287

Lycée Montesquieu, Bordeaux

1 Le mot « ABYME » contient cinq lettres distinctes. Le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de permutations de ces cinq lettres.

Il y a donc $5! = 120$ anagrammes au mot « ABYME ».

2 Le mot « NAPPE » contient cinq lettres, mais elles ne sont pas toutes distinctes : il y a quatre lettres distinctes. Ainsi, parmi les 120 permutations, il y en a qui sont identiques.

CORRIGÉS

Comme il y a deux lettres identiques, il y aura deux fois les mêmes permutations (par exemple « P_1P_2NAE » et « P_2P_1NAE » donnent l'anagramme « PPNAE »). Il faut donc diviser par 2 le nombre de permutations.

Il y a donc $\dfrac{5!}{2} = 60$ anagrammes différents au mot « NAPPE ».

3 Le mot « KAYAK » comporte cinq lettres dont trois sont distinctes. Selon le même principe expliqué à la question précédente, il faut diviser les 120 permutations par 2 (car il y a deux « K ») et encore par 2 (car il y a deux « A »).

Il y a donc $\dfrac{5!}{2 \times 2} = 30$ anagrammes différents au mot « KAYAK ».

4 Le mot « UBUESQUE » comporte huit lettres dont deux sont répétées : le « U » est présent trois fois et le « E » l'est deux fois. S'il faut diviser le nombre de permutations par 2 (car il y a deux « E »), il ne suffit pas de diviser encore par 3 car il y a trois « U ». En effet, il faut diviser par $3! = 6$ car il y a 3! façons de disposer les lettres $U_1U_2U_3$.

Ainsi, il y a $\dfrac{8!}{2 \times 3!} = 3\ 360$ anagrammes différents au mot « UBUESQUE ».

Remarque : on peut raisonner différemment en disant que trouver une anagramme du mot revient à :

- placer 3 lettres « U » parmi les 8 positions possibles : il y a $\binom{8}{3}$ possibilités ;
- placer 2 lettres « E » parmi les $8 - 3 = 5$ positions restantes : il y a $\binom{5}{2}$ possibilités ;
- trouver le nombre d'anagrammes sur les $5 - 2 = 3$ lettre restantes : il y a 3! possibilités.

On arrive alors à $\dbinom{8}{3} \times \dbinom{5}{2} \times 3! = 3\ 360$ anagrammes différents.

22 Groupes d'une classe

Énoncé p. 287

Lycée La Bruyère, Versailles

1 C'est une question classique où l'on doit trouver le nombre de sous-ensembles à 7 éléments pris dans un ensemble à 35 éléments. Le nombre total de combinaisons est donc :

$$\binom{35}{7} = 6\ 724\ 520.$$

2 Dans la mesure où il n'y a que 7 élèves dans la catégorie 1, il n'y a qu'une possibilité de former un groupe de 7 élèves avec les élèves de cette catégorie.

Il y a 9 élèves dans la catégorie 3, donc le nombre de groupes de 7 élèves que l'on peut former avec ces 9 élèves est :

$$\binom{9}{7} = 36.$$

3 Constituer un tel groupe revient à choisir 3 élèves parmi les 7 de la catégorie 1, 2 élèves parmi les 5 de la catégorie 2, et les deux autres élèves parmi les 23 élèves des autres catégories. Le nombre total de groupes que l'on peut former est alors :

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} \times \binom{23}{2} = 88\ 550.$$

23 Constitution d'un jury

Énoncé p. 287

Lycée Condorcet, Paris

1 Il y a en tout 17 personnes et on cherche le nombre de groupes de 10 personnes que l'on peut former à partir de ces 17 personnes. Il y en a :

$$\binom{17}{10} = 19\ 448.$$

2 On souhaite qu'il y ait autant d'hommes que de femmes, donc qu'il y ait 5 hommes et 5 femmes. Le nombre de jurys possibles est donc :

$$\binom{8}{5} \times \binom{9}{5} = 7\ 056.$$

3 Ici, il n'y a pas de moyen direct d'arriver au résultat : il faut faire une *disjonction de cas*, c'est-à-dire énumérer tous les cas où il y a plus d'hommes que de femmes :

- s'il y a 8 hommes (nombre maximal d'hommes) alors il y aura 2 femmes ; le nombre de jurys possibles est alors :

$$\binom{8}{8} \times \binom{9}{2} = 36;$$

- s'il y a 7 hommes alors il y aura 3 femmes ; le nombre de jurys possibles est alors :

$$\binom{8}{7} \times \binom{9}{3} = 672;$$

- s'il y a 6 hommes alors il y aura 4 femmes ; le nombre de jurys possibles est alors :

$$\binom{8}{6} \times \binom{9}{4} = 3\ 528.$$

Ce sont les seuls cas possibles. Il y a donc en tout :

$$3\ 528 + 672 + 36 = 4\ 236$$

jurys possibles composés de plus d'hommes que de femmes.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

4 Nous avons vu dans la question 2 qu'il y avait 7 056 jurys composés d'autant d'hommes que de femmes.

Dans cette question, il faut soustraire à ce nombre le nombre de jurys où Monsieur X et Madame Y se retrouvent ensemble. Ces jurys sont de la forme :

M. X + Mme Y + 4 autres hommes que M. X + 4 autres femmes que Mme Y.

Leurs nombres s'élèvent donc à :

$$1 \times 1 \times \binom{7}{4} \times \binom{8}{4} = 2\,450.$$

Ainsi, le nombre de jurys comportant autant d'hommes que de femmes dans lesquels M. X et Mme Y ne sont pas ensemble est égal à :

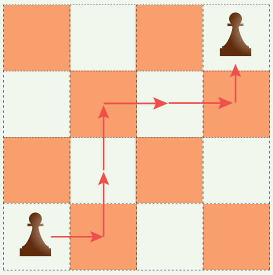
$$7\,056 - 2\,450 = 4\,606.$$

24 Sur un échiquier

Énoncé p. 288

Lycée Henri IV, Paris

Voici un exemple de déplacement :



La pièce ne peut se diriger que vers la droite ou vers le haut, et que d'une case à chaque fois. Il ne reste que $n-1$ cases vers la droite et $n-1$ cases vers le haut pour atteindre la case supérieure droite ; ainsi, il y a :

$$(n-1) + (n-1) = 2n - 2 \text{ déplacements.}$$

Parmi ces déplacements, $n-1$ sont à faire vers la droite (ou vers le haut, peu importe) ; on choisit donc sans ordre et sans remise les « numéros » des déplacements vers la droite, le reste se faisant à gauche : il y a donc $\binom{2n-2}{n-1}$ chemins possibles.

25 Codage informatique

Énoncé p. 288

Extrait du sujet 2 Centres étrangers, 2025

1 Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquence de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités.

2 Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 :

$$\frac{64\,!}{(64-4)\,!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024 \text{ possibilités.}$$

3 **(a)** On reprend la question 1 avec seulement 63 caractères.

Cela donne donc $63^4 = 15\,752\,961$ possibilités.

(b) « Au moins une lettre A majuscule » est le contraire de « Aucune lettre A majuscule ».

Ainsi, le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule est :

$$64^4 - 63^4 = 1\,024\,255.$$

(c) La lettre A peut se situer en première position, ou en deuxième, troisième ou quatrième dans le code, les trois autres lettres étant différentes.

Il y aura donc $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$ possibilités.

(d) Il y a $\binom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A.

Il y aura donc $\binom{4}{2} \times 63^2 = 23\,814$ possibilités.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Chapitre 10

Succession d'épreuves indépendantes

Plan du chapitre

1 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

Exercice type 1 — Lycée La Bruyère, Versailles

On dispose d'un dé cubique équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Représenter cette expérience par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu les deux faces obtenues soient de même couleur.
4. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

Voir corrigé page 304

Définition 1

On dit qu'il y a *répétition d'expériences identiques et indépendantes* lorsque la même expérience est effectuée plusieurs fois, dans les mêmes conditions, et que le résultat d'une réalisation n'a pas d'influence sur le résultat de la suivante.
Les issues de la répétition d'expériences sont des listes d'issues de l'expérience répétée.

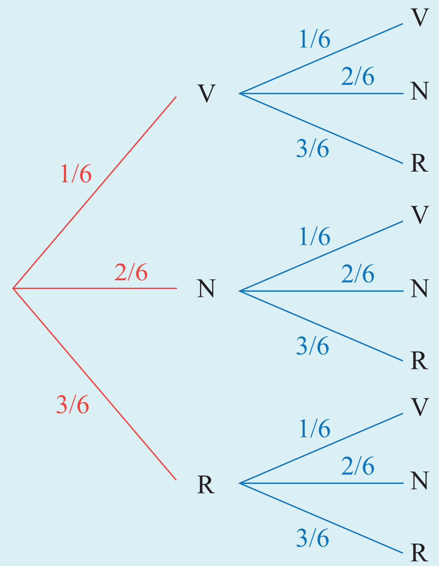
Propriété 1

La probabilité d'une liste de résultats d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes est égale au produit des probabilités de chaque issue qui constitue cette liste.

Solution de l'exercice type 1

Lycée La Bruyère, Versailles

1 On note V (respectivement N, R) l'événement « obtenir une face verte (respectivement noire, rouge) ».



2 L'expérience est la répétition, de façon indépendante, de deux expériences identiques. Les issues sont donc des listes de résultats de l'expérience répétée, et la probabilité d'une liste est le produit des probabilités des résultats qui la composent.

Puisque le dé est équilibré, la probabilité d'obtenir V à un lancer est $\frac{1}{6}$, celle d'obtenir N est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et celle d'obtenir R est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Alors $P(N,N) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

3 Les deux faces obtenues sont de la même couleur si elles sont toutes les deux vertes, noires, ou rouges. La probabilité de cet événement est donc (voir page suivante) :

...

Solution de l'exercice type 1 (suite) — Lycée La Bruyère, Versailles

$$P(V,V)+P(N,N)+P(R,R)=\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}.$$

4 L'événement « Les deux faces obtenues ne sont pas de la même couleur » est l'événement contraire de « Les deux faces sont de la même couleur ». La probabilité d'avoir deux faces de couleurs différentes est donc $1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$.

Voir énoncé page 303

2 Schéma de Bernoulli

Exercice type 2 — Lycée Hector Berlioz, Vincennes

Cinq amis se sont inscrits sur internet à un tirage au sort pour recevoir gratuitement un magazine. La probabilité p d'être choisi est 0,32. Pour chaque réponse, on donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

1 Quelle est la probabilité P_1 que les cinq amis reçoivent le magazine ?

2 Quelle est la probabilité P_2 qu'au moins un des cinq ne reçoive pas le magazine ?

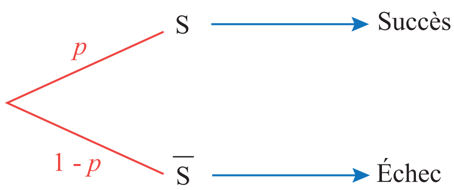
3 Quelle est la probabilité P_3 qu'au moins un des cinq reçoive le magazine ?

4 Quelle est la probabilité P_4 qu'exactement trois des amis reçoivent le magazine ?

Voir corrigé page 307

Définition 2 : épreuve de Bernoulli

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire où seules 2 issues sont possibles : le *succès* (S) et l'*échec* ($\bar{S}$).



COURS
INTERROS
CORRIGÉS

COURS

Exemples

- Sur une chaîne de production de smartphones, on en choisit un au hasard. L'épreuve consistant à regarder s'il est défectueux est une épreuve de Bernoulli : il est soit défectueux (S) soit non défectueux ($\bar{S}$).
- Dans une trousse, on choisit au hasard un stylo. L'épreuve consistant à regarder s'il est rouge est une épreuve de Bernoulli : soit il l'est (S), soit il ne l'est pas ($\bar{S}$).

Définition 3 : loi de Bernoulli

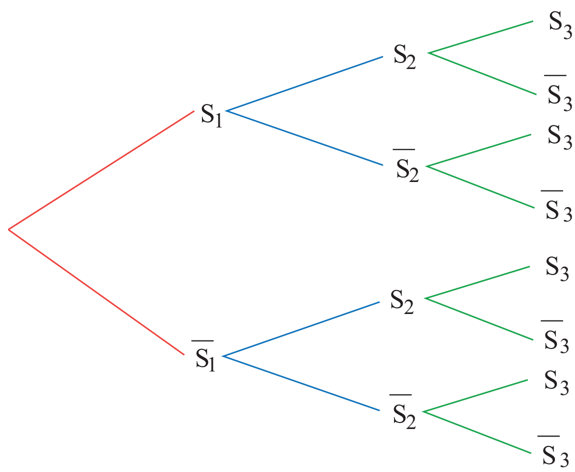
On considère une épreuve de Bernoulli dont le succès est de probabilité p.
La loi de Bernoulli associée à cette épreuve est la suivante :

$X = k$	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Définition 4 : schéma de Bernoulli

On répète n fois une même épreuve de Bernoulli dans les mêmes conditions (on dit : *de façon indépendante*). Cette succession d'épreuves est appelée un *schéma de Bernoulli*.

On représente un schéma de Bernoulli de la manière suivante :



Exemple d'une succession de trois épreuves de Bernoulli

Remarque : l'épreuve, la loi et le schéma de Bernoulli tirent leur nom du mathématicien Jacques Bernoulli (1654 – 1705).

2.1 Loi Binomiale

Définition 5

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p. On répète n fois de façon indépendante cette épreuve, et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de succès à l'issue de cette succession d'épreuves. On dit que la loi de probabilité de X est la *loi binomiale* de paramètres n et p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\, p)$.

À l'issue de ces n épreuves, X peut valoir 0, 1, 2, ... jusqu'à n.

Propriété 2 : nombre de chemins à k succès

Si on répète n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli alors il y a $\binom{n}{k}$ chemins comportant exactement k succès.

En effet, on regarde combien de « mots » de n lettres (prises dans l'alphabet $\{S, \bar{S}\}$) comportent exactement k lettres « S ». Cela revient à choisir sans ordre et sans remise k emplacements ($1 \leqslant k \leqslant n$) où seront placés les « S », et mettre les « $\overline{S}$ » aux emplacements restants. Il s'agit donc d'une combinaison, d'où un nombre égal à $\binom{n}{k}$.

Propriété 3

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\, p)$.
Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Solution de l'exercice type 2 — **Lycée Hector Berlioz, Vincennes**

L'expérience décrite est modélisée par un schéma de Bernoulli, composé de 5 répétitions d'une épreuve de Bernoulli dont le succès, recevoir le magazine, a pour probabilité 0,32. La variable aléatoire X qui donne le nombre d'amis qui reçoivent le magazine suit donc la loi binomiale de paramètre 5 et 0,32.

1 $P_1 = P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0{,}32^5 \times (1 - 0{,}32)^{5-5} = 0{,}32^5 \approx 0{,}0034.$

2 L'événement « Au moins un des cinq amis ne reçoit pas le magazine » est l'événement contraire de « Les cinq amis reçoivent le magazine ».
$P_2 = P(X \leqslant 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0{,}32^5 \approx 0{,}9966.$

3 De façon analogue,
$P_3 = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}68^5 \approx 0{,}8546.$

4 $P_4 = P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0{,}32^3 \times 0{,}68^2 \approx 0{,}1515.$

Voir énoncé page 305

1 V/F Loi binomiale ?

10 min Corrigé p. 323

Dire, dans chaque situation, s'il est vrai que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner le cas échéant les valeurs des paramètres de la loi binomiale associée.

1 On lance 5 fois successivement un dé à jouer non truqué, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 2 obtenus parmi ces lancers.

2 On lance 5 fois successivement un dé à jouer non truqué, et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer pour lequel on obtient le chiffre 6, en convenant que $X = 0$ si le chiffre 6 n'est jamais obtenu.

3 On lance 10 fois successivement 2 dés à jouer non pipés, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où une somme de 10 est obtenue en ajoutant les chiffres des 2 dés.

4 Une branche présente 10 fleurs blanches ou roses réparties au hasard. On compte au total 2 fleurs blanches et 8 fleurs roses.

On cueille successivement et au hasard 3 fleurs, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs blanches cueillies.

2 QCM Loi binomiale

15 min Corrigé p. 323

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1 Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,1. La probabilité $P(X \leqslant 2)$ est alors (arrondie au centième) :

a 0,99 **b** 0,01 **c** 0,5 **d** 0,617

2 Le nombre d'issues d'une répétition de n épreuves de Bernoulli est égal à :

a 2 **b** n **c** $2n$ **d** 2^n

3 X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Le nombre de valeurs prises par X est :

a n **b** 2^n **c** $n+1$ **d** p^2

3 QCM Logique et répétition d'expériences

15 min Corrigé p. 324

Dans la maison des associations de la commune, il y a deux salles de réunion, A et B. Les deux salles ont la même probabilité d'être occupées, sans préférence pour l'une ou l'autre. La probabilité que l'une au moins des salles soit occupée est 0,91. Pour chaque question, déterminer la bonne réponse.

1 La probabilité que les deux salles soient libres est

a 0,455 **b** 0,8281 **c** 0,09 **d** $1-\sqrt{0{,}91}$

2 La probabilité que la salle A soit occupée est :

[a] $\sqrt{0{,}91}$ [b] 0,03 [c] 0,3 [d] 0,7

3 La probabilité qu'exactement une salle soit occupée est :

[a] 0,49 [b] 0,42 [c] 0,5 [d] 0,7

4 La probabilité qu'au moins une salle soit libre est :

[a] 0,09 [b] 0,51 [c] 0,49 [d] 0,7

4 QCM Logique

15 min Corrigé p. 324

Pour chaque question, choisir la ou les bonnes réponses.

1 On joue à pile ou face deux fois de suite.
L'événement « obtenir au moins une fois pile » est égal à l'événement :

[a] « obtenir une fois pile » *et* « obtenir deux fois pile ».
[b] « obtenir une fois pile » *ou* « obtenir deux fois pile ».
[c] « obtenir 0 fois face ».
[d] « obtenir 0 fois face » *ou* « obtenir une fois face ».

2 On joue à pile ou face deux fois de suite.
L'événement « obtenir au plus une fois pile » est égal à l'événement :

[a] « obtenir une fois face » *et* « obtenir deux fois face ».
[b] « obtenir une fois face » *ou* « obtenir deux fois face ».
[c] « obtenir 0 fois pile ».
[d] « obtenir 0 fois pile » *ou* « obtenir une fois pile ».

3 On joue à pile ou face trois fois de suite.
L'événement contraire de « obtenir au moins une fois face » est :

[a] « Obtenir trois piles ».
[b] « Obtenir au moins une fois pile ».
[c] « Obtenir 0 fois pile ».
[d] « Obtenir 0 fois face ».

4 Soit X une variable aléatoire.
L'événement contraire de « X est au moins égal à 3 » est :

[a] $X \leqslant 3$. [b] $X < 3$. [c] $X \geqslant 3$. [d] $X > 3$.

5 QCM Répétition d'expériences

15 min Corrigé p. 325

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

1 On répète 3 fois de suite une expérience ayant 2 résultats possibles. Le nombre de chemins de l'arbre associé à cette répétition d'expériences est :

[a] 2. [b] 4. [c] 6. [d] 8.

2 On répète 2 fois de suite une expérience ayant 3 résultats possibles. Le nombre de chemins de l'arbre associé à cette répétition d'expériences est :

a 3. b 6. c 8. d 9.

3 On répète trois fois de suite une même expérience ayant trois issues équiprobables. Alors les listes de résultats :

a ont toutes pour probabilité $\frac{1}{3}$.

b ont toutes pour probabilité $\frac{1}{27}$.

c ont toutes pour probabilité $\frac{1}{6}$.

d n'ont pas toutes la même probabilité.

4 Une expérience aléatoire donne le résultat A avec une probabilité de 0,4, le résultat B avec une probabilité de 0,5 et le résultat C avec une probabilité de $0,1$. On répète 5 fois cette expérience, dans des conditions indépendantes les unes des autres. Alors la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le résultat A est obtenu :

a suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0{,}4)$.
b suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;0{,}4)$.
c suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;0{,}6)$.
d ne suit pas une loi binomiale.

6 QCM Loi binomiale

15 min Corrigé p. 325

Pour chaque question, choisir la ou les bonnes réponses.

1 On considère un schéma de Bernoulli de 8 répétitions. Le nombre de listes de résultats qui contiennent 5 succès est :

a $\binom{5}{8}$. b $\binom{8}{5}$. c $\binom{5}{3}$. d $\binom{8}{3}$.

2 On lance un dé truqué trois fois de suite ; la probabilité d'obtenir le 6 est $0,2$. Alors la probabilité d'obtenir deux fois 6 sur les trois lancers est :

a $0{,}2^2 \times 0{,}8$. b $\binom{3}{2}(0{,}2+0{,}2+0{,}8)$.

c $\binom{3}{2}(0{,}2\times 0{,}2\times 0{,}8)$. d $3\times 0{,}2^2\times 0{,}8$.

3 On considère une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6\,;0{,}7)$. Alors :

a $P(X=4)=P(X=2)$. b $P(X=4)<P(X=2)$.
c $P(X=4)>P(X=2)$. d $P(X=4)=2\times P(X=2)$.

7 QCM Tirage bicolore

15 min Corrigé p. 326

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire, avec remise, une boule au hasard, n fois de suite (avec $n > 1$).

Parmi les propositions suivantes, quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ? Justifier.

a $1 - \dfrac{1}{2^n}$ b $1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ c $1 - \dfrac{1}{2^{2n}}$

8 Lancer de dé

★ 10 min Corrigé p. 326

Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

Un joueur lance quatre fois de suite un dé parfaitement équilibré. Il marque 1 point pour chaque face numérotée 6 qu'il obtient. On s'intéresse à la variable aléatoire X qui à chaque série de quatre lancers associe le nombre de points marqués.

1. Expliquer pourquoi la variable étudiée suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité de gagner 3 points ?
3. Déterminer la loi de probabilité de X.

9 Deux tirages successifs

★ 15 min Corrigé p. 328

Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

Une urne contient de nombreux jetons, indiscernables au toucher, ayant l'une des trois couleurs : bleu, jaune ou rouge.

On tire un jeton au hasard. La probabilité de tirer un jeton bleu est 0,25 ; celle d'obtenir un jeton jaune est 0,4.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge à un tirage ?
2. On effectue l'expérience deux fois de suite avec remise du jeton dans l'urne après le premier tirage.

   À l'aide d'un arbre pondéré à construire sur la copie, répondre aux questions suivantes :

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton bleu au premier tirage, puis un jeton jaune au second ?

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes ?

10 Groupe sanguin

★ 15 min Corrigé p. 329

Lycée Notre-Dame de Sainte-Croix, Neuilly-sur-Seine

La probabilité qu'un français soit du groupe sanguin A est de 0,45, qu'il soit du groupe sanguin O est de 0,43. Dans les autres cas, la personne est du groupe sanguin B ou AB ; on décide de dire dans ce cas qu'elle est du groupe C. On étudie le groupe sanguin de trois personnes prises au hasard dans cette population. Vu la taille de la population, le choix des trois personnes peut être assimilé à une répétition de trois expériences identiques et indépendantes.

1. Combien de chemins contient l'arbre pondéré associé à cette expérience (il n'est pas demandé de dessiner l'arbre) ?

   On notera A l'événement « la personne est du groupe A », O l'événement « la personne est du groupe O » et C l'événement « la personne est du groupe C ». Donner toutes les listes de résultats.
2. Quelle est la probabilité que les trois personnes soient toutes du groupe A ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement une personne de chaque groupe ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne soit du groupe A ?

11 Lancer de deux dés

★ 20 min Corrigé p. 330

Lycée La Bruyère, Versailles

Une partie consiste à lancer simultanément deux dés équilibrés. On gagne si les deux chiffres obtenus sont identiques.

1. Calculer la probabilité de gagner.
2. On répète quatre fois l'expérience, et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées lors des quatre expériences.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité de ne jamais gagner.
   (c) Déterminer la probabilité de gagner deux fois.
3. On répète n fois l'expérience, et on définit la variable Y donnant le nombre de parties gagnées.

   Déterminer la plus petite valeur de n pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,99.

12 Loi binomiale

★ 25 min Corrigé p. 331

Lycée Jean Puy, Roanne

Lors d'un jeu radiodiffusé, on estime que le candidat, quelle que soit la question posée, a deux chances sur trois de donner la bonne réponse. Il gagne 50 euros par réponse exacte.

L'animateur du jeu lui pose successivement cinq questions.

1. Calculer la probabilité que le candidat ait cinq bonnes réponses.
2. Quelle est la probabilité que le candidat gagne 250 euros ?
3. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses exactes au bout des cinq questions. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier la réponse.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y qui compte le gain total du joueur.
5. Calculer l'espérance de gain du joueur.

13 Des formes et des couleurs ★★ 15 min

Corrigé p. 332

Lycée Virlogeux, Riom

Chaque probabilité sera exprimée sous forme d'une fraction irréductible.

Dans une boîte, on dispose de deux cubes : un rouge et un vert, et de quatre boules : une jaune, une rouge, une verte et une bleue.

Un bébé prend au hasard un objet de la boîte, le montre fièrement à son papa, puis le remet dans la boîte. Il prend à nouveau un objet dans la boîte, et le donne à son papa qui le remet aussi dans la boîte. On appelle tirage le couple des deux objets ainsi obtenus et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? On pourra s'aider d'un tableau ou d'un arbre.
2. Trouver la probabilité de chacun des événements suivants :
   - A : « Il a obtenu deux cubes ».
   - B : « Il a obtenu deux boules ».
   - C : « Il a obtenu deux objets de formes différentes ».
   - D : « Il a obtenu deux objets rouges ».
   - E : « Il a obtenu deux objets de la même couleur ».
   - F : « Il a obtenu deux objets de couleurs différentes ».
   - G : « Il a obtenu deux objets de même couleur, mais de formes différentes ».

14 Un dé tétraédrique déséquilibré ★★ 20 min

Corrigé p. 332

Lycée Odilon Redon, Pauillac

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les chiffres 1, 2, 3 et 4. On lit le résultat d'un lancer sur la face cachée du dé.

On note p_i la probabilité d'obtenir le chiffre i suite à un lancer de ce dé.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que ces probabilités sont :

$$p_1 = 0{,}1\ ;\ p_2 = 0{,}2\ ;\ p_3 = 0{,}3\ ;\ p_4 = 0{,}4\ .$$

On lance deux fois successivement ce dé. On suppose que les lancers sont indépendants entre eux.

1 Dresser un arbre pondéré décrivant l'expérience.

2 Quelle est la probabilité d'obtenir les chiffres 1 et 3 dans cet ordre ?

3 Quelle est la probabilité d'obtenir deux chiffres distincts rangés par ordre croissant ?

4 On instaure la règle suivante : si un joueur lançant deux fois successivement ce dé obtient deux chiffres distincts rangés par ordre croissant il gagne 2 euros, s'il obtient deux fois le chiffre 1 il gagne 5 euros, tandis que, dans tous les autres cas, il perd 3 euros.

On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Déterminer l'espérance et l'écart type de X.

Ce jeu est-il équitable ?

(c) On modifie la valeur des gains de la manière suivante : si on obtient deux chiffres distincts rangés par ordre croissant on gagne 5 euros, si on obtient deux fois le chiffre 1 on gagne 11 euros, et sinon, dans tous les autres cas, on perd 5 euros.

On note Y la variable aléatoire égale au gain du joueur avec cette nouvelle règle.

Déterminer l'espérance et l'écart type de Y.

15 Jouer sans se ruiner

★★ 20 min Corrigé p. 334

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

L'oncle de Tatiana est accro au jeu de grattage. Chaque semaine, il achète jusqu'à 20 euros de cartes à gratter à deux euros. Il achète une première carte et la gratte. Si elle est gagnante, il s'arrête, sinon il en achète une seconde, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait une carte gagnante ou bien qu'il ait dépensé 20 euros. La probabilité d'avoir une carte gagnante est 0,12.

1 Représenter cette expérience par un arbre pondéré.

2 Quelle est la probabilité que l'oncle achète 4 cartes ?

3 Quelle est la probabilité que l'oncle achète 10 cartes ?

4 Quelle est la probabilité que l'oncle ne gagne rien ?

5 Soit X la variable aléatoire qui à chaque série d'achats de la semaine, associe la somme dépensée.

(a) Établir la loi de probabilité de X.

(b) Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce résultat.

16 Le tapis vert

★★ 25 min Corrigé p. 336

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

Il y a plusieurs années, la Française des Jeux organisait un jeu qui s'appelait « le tapis vert ». Ce jeu consistait à choisir une carte de chaque couleur dans un jeu de 32 cartes et à cocher les quatre cases correspondantes dans une grille. Ces choix étaient ensuite comparés aux quatre cartes tirées par l'organisateur.

1 On note X la variable aléatoire qui à chaque grille associe le nombre de cartes qui coïncident avec les cartes tirées.

(a) Montrer que X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\dfrac{1}{8}$.

(b) Établir le tableau de la loi de probabilité de X. Garder les valeurs exactes sous forme fractionnaire.

2 Pour gagner, il fallait avoir au moins deux cartes exactes.

Quelle était la probabilité d'avoir une grille gagnante ?

3 Les gains étaient attribués de la façon suivante :

- pour 2 cartes exactes, on gagnait 2 fois sa mise ;
- pour 3 cartes exactes, on gagnait 30 fois sa mise ;
- pour 4 cartes exactes, on gagnait 1 000 fois sa mise.

On note G le gain algébrique du joueur pour une mise de 1 euro.

(a) Déterminer la loi de probabilité de G (garder les valeurs exactes).

(b) Quelle est l'espérance de gain du joueur à 10^{-2} près ?

(c) Ce jeu est-il favorable au joueur ?

17 Assurance

★★ 25 min Corrigé p. 337

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-Sous-Bois

Un assureur automobile compte 2 000 clients. On suppose que la probabilité qu'un des clients ait un accident est égale à $0{,}12$. Soit X la variable qui donne le nombre de conducteurs accidentés parmi les 2 000 clients.

1 Déterminer la loi suivie par X et en donner les paramètres.

2 Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins 240 clients accidentés.

3 Déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}95$.

4 On suppose que chaque accident coûte en moyenne 4000 euros à l'assurance.

On note a le prix payé par chaque client pour s'assurer.
Soit Y la variable aléatoire qui donne le bénéfice (algébrique) réalisé par l'assureur.

(a) Exprimer Y en fonction de X et de a.
(b) En déduire espérance de Y en fonction de a.
(c) Pour quelles valeurs de a l'espérance $E(Y)$ est-elle positive ou nulle ?
(d) Si $a = 500$, calculer puis interpréter $P(Y \geqslant 100\,000)$.

18 Stand de tir

★★ 30 min Corrigé p. 337

Lycée Jean Pierre Vernant, Pin-Justaret

Sandy aime bien aller au stand de tir de la fête foraine de son village. Bien que les carabines soient très mal réglées, elle sait que la probabilité, à chaque tir, qu'elle atteigne la cible est $0{,}68$.

Elle effectue 25 tirs successifs. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de tirs réussis.

1 **(a)** Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Justifier.
(b) Calculer son espérance, interpréter ce résultat.
(c) Déterminer à 10^{-5} près la probabilité que Sandy atteigne la cible à chacun de ses 25 tirs.
(d) Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'elle atteigne la cible au moins 20 fois.

2 Sandy doit payer 10 euros pour pouvoir faire les 25 tirs. Mais chaque tir réussi donne droit à un point d'une valeur de 0,5 euros. Elle pourra ensuite les utiliser sur le stand pour acheter des bonbons. À ce jeu, on appelle gain (qui peut être négatif), la différence entre la valeur gagnée avec les points et le prix de la partie. On note Y la variable aléatoire qui, à une partie de 25 tirs, associe le gain de Sandy.

(a) Exprimer Y en fonction de X.
(b) En déduire $E(Y)$. Pour qui le jeu est-il favorable ?
(c) Quel est le nombre maximum de tirs que Sandy doit réussir pour que le forain gagne de l'argent ?
(d) Quelle est la probabilité que le forain ne gagne pas d'argent lorsque Sandy joue ?

3 Dans cette question, Sandy effectue n tirs. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité que Sandy réussisse au moins un tir dépasse 99%.

19 Éviter le gaspillage

★★ 30 min Corrigé p. 338

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-Sous-Bois

Les 500 employés d'une entreprise déjeunent à l'un ou l'autre des deux services de la cantine. La probabilité qu'un employé déjeune au premier service est égale à 0,6. On suppose que les employés prennent leur décision indépendamment les uns des autres.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'employés qui mangent au premier service lors d'un déjeuner.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier et donner ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait autant de personnes au premier service qu'au second ?
3. Calculer l'espérance de X, puis $P(X \leqslant E(X))$.
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 280 personnes au premier service ?
5. Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 290 et 310 personnes au premier service ?
6. Si le gérant veut être sûr de pouvoir servir tous les employés quel que soit le service qu'ils choisissent, il doit prévoir 500 repas pour chaque service. Mais en prenant un petit risque, il peut faire des économies importantes et éviter un gros gaspillage.

   Quel est le nombre minimal de couverts à prévoir pour le premier service afin que la probabilité de servir tous les employés souhaitant manger à ce service soit supérieure ou égale à 0,99 ?

20 Commission

★★ 30 min Corrigé p. 339

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter quatre clients contactés lors d'une foire exposition, afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 500 euros.

Compte tenu de son expérience, le commercial estime qu'à chacune de ses visites, la probabilité que le client lui achète son objet est de 0,3.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « Seul le premier client achète l'objet ».
2. Calculer la probabilité de l'événement B : « Un seul client achète l'objet ».
3. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de ventes lors des quatre visites.
   - **(a)** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   - **(b)** Établir le tableau de la loi de probabilité de X.

4 Le commercial perçoit 15% sur le total de sa vente.

(a) Établir la loi de probabilité associée au gain de la journée.

(b) Quelle est l'espérance mathématique du gain ?

5 Que doit être le pourcentage (arrondi au dixième) de sa commission pour que cette espérance dépasse 100 euros ?

21 Forte probabilité ★★ 30 min Corrigé p. 340

Lycée Vaugelas, Chambéry

Adrien a constaté que le matin, lorsqu'il met dans la cage de son perroquet une assiette de graines, un morceau de pomme et de l'eau fraiche, celui-ci commence par boire avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, commence par la pomme avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et le reste du temps commence par les graines.

1 Adrien observe le comportement de son perroquet trois jours de suite. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le perroquet a commencé par aller boire.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Déterminer combien de chemins de l'arbre associé à l'expérience, correspondent à l'événement $(X = 1)$.

Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 3)$.

(c) Calculer la probabilité pour que le perroquet commence au moins une fois par aller boire.

2 On observe le perroquet n jours de suite.

Calculer le nombre minimal n de jours d'observation pour que la probabilité que le perroquet ait au moins une fois commencé par aller boire, soit supérieure à 95%.

22 Extrait d'un concours GEIPI Polytech ★★ 30 min Corrigé p. 341

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Une chocolaterie fabrique deux sortes de chocolats : des chocolats noirs et des chocolats au lait. 60% des chocolats fabriqués sont noirs. Parmi ceux-ci, 70% sont fourrés, tandis que 30% seulement des chocolats au lait sont fourrés.

Partie A

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte.

Un client fait une dégustation de chocolats et il en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

- N : « le chocolat choisi est noir ».
- F : « le chocolat choisi est fourré ».

1 Donner la probabilité P_1 que le chocolat choisi soit noir.

2 Déterminer la probabilité P_2 que le chocolat choisi soit noir et fourré. Justifier la réponse.

3 On note P_3 la probabilité que le chocolat choisi soit fourré. Justifier que $P_3 = 0{,}54$.

Partie B

Un client achète une boîte de n chocolats, où n est un entier naturel non nul.

Chaque chocolat mis dans la boîte est choisi au hasard et on suppose le nombre de chocolats suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que les choix successifs sont faits de façon identique et indépendante.

On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de chocolats fourrés contenus dans la boîte.

1 Préciser la loi suivie par X_n.

2 Dans cette question, $n = 12$ et, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

(a) Donner la probabilité P_4 que la moitié des chocolats de la boîte soient fourrés.

(b) Donner la probabilité P_5 que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.

(c) Donner la probabilité P_6 que la boîte contienne au plus trois chocolats fourrés.

3 Dans cette question, n est quelconque.

(a) Donner, en fonction de n, la probabilité q_n que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.

(b) Déterminer le nombre minimum n_0 de chocolats que doit acheter le client afin que la probabilité que la boîte contienne au moins un chocolat fourré soit strictement supérieure à 0,98.

Détailler les calculs.

23 Extrait d'un bac (Liban 2019) ★★ 30 min

Corrigé p. 343

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0{,}9$;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0{,}95$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0{,}2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1 **(a)** Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements R_1 et R_2.

(b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

(c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0{,}875$.

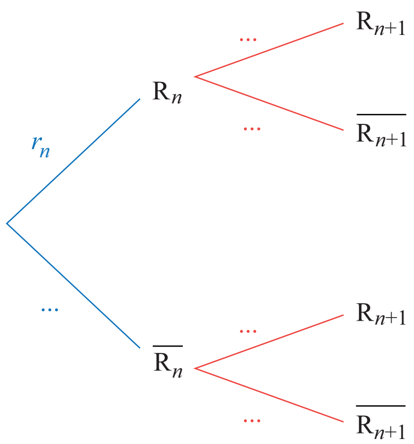
(d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?

On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2 Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine.

On a alors $r_n = p\left(R_n\right)$.

(a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



(b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}75r_n + 0{,}2$.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8.$$

(d) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3 On suppose dans cette question que la probabilité qu'un client fidèle depuis longtemps ramène sa bouteille est égale à 0,8.

On choisit au hasard et de manière indépendante parmi ces clients 20 d'entre eux. On suppose que le nombre total de ces clients est assez grand pour assimiler ces choix à un tirage avec remise.

On arrondira les probabilités au millième.

(a) Quelle est la probabilité que tous les clients ramènent leur bouteille ?

(b) Quelle est la probabilité qu'au moins 15 d'entre eux ramènent leur bouteille ?

(c) Quelle est la probabilité qu'au plus 10 d'entre eux ramènent leur bouteille ?

Objectif bac

24 Probabilités et QCM

★★ 30 min Corrigé p. 347

Asie, sujet 1, septembre 2025

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions.

Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte.

Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4.

Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1 Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X et donner les paramètres de cette loi.

2 Quelle est la probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses ?

Arrondir le résultat à 10^{-4} près.

3 Donner l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

INTERROS

4 On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.

On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

(a) Calculer $P(Y = 10)$. On donnera la valeur exacte du résultat.

(b) À partir de combien de bonnes réponses la note finale de Dominique est-elle positive ? Justifier.

(c) Calculer $P(Y \leqslant 0)$. On donnera une valeur approchée au centième.

(d) Montrer que $Y = 1{,}5X - 5$.

(e) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

1 V/F Loi binomiale ?

Énoncé p. 308

1 *Vrai*. Il s'agit de la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes entre elles.

La variable aléatoire X, qui aux 5 résultats obtenus associe le nombre de 2 obtenus, suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.

2 *Faux*. La loi binomiale s'intéresse au nombre d'occurrences du même événement lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes (il s'agit ici d'une loi géométrique *tronquée*).

3 *Vrai*. Les épreuves répétées successivement sont les lancers de 2 dés. Elles sont identiques et indépendantes.

Il y a trois façons d'obtenir 10 avec la somme des chiffres de 2 dés : $(4; 6)$, $(5; 5)$ et $(6; 4)$. Il y a au total $6^2 = 36$ lancers possibles de 2 dés. La probabilité d'obtenir la somme 10 avec 2 dés est donc de $p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

La variable aléatoire qui associe aux 10 lancers le nombre de fois que la somme 10 est obtenue suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{12}$.

4 *Faux*. Une fois une fleur cueillie, blanche ou rose, le nombre total de fleurs change pour la cueillette suivante, et les probabilités de cueillir une fleur blanche ou rose aussi.

Les expériences successives ne sont pas indépendantes les unes des autres, et on ne peut donc pas utiliser la loi binomiale.

2 QCM Loi binomiale

Énoncé p. 308

1 Réponse $\boxed{a}$. La probabilité est donnée par

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{5}{0} 0{,}1^0 \times 0{,}9^5 + \binom{5}{1} 0{,}1^1 \times 0{,}9^4 + \binom{5}{2} 0{,}1^2 \times 0{,}9^3 \\ &= 0{,}9^5 + 5 \times 0{,}1 \times 0{,}9^4 + 10 \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^3 \\ &\approx 0{,}99. \end{aligned}$$

2 Réponse $\boxed{d}$. À chaque répétition, il y a deux fois plus de branches à l'arbre. Donc pour n répétions, il y a 2^n chemins, donc 2^n issues.

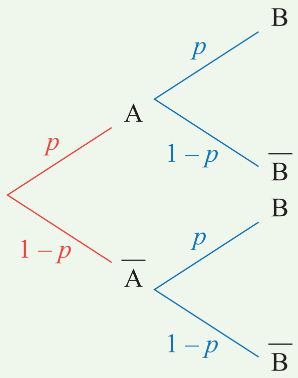
3 Réponse $\boxed{c}$. Les valeurs prises par X sont les nombres de succès lors d'une répétition de n expériences. X prend donc les valeurs entières de 0 à n, c'est-à-dire $n + 1$ valeurs.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

3 QCM Logique et répétition d'expériences

Énoncé p. 308

La désignation des salles occupées est assimilée à une répétition de deux expériences identiques et indépendantes. On peut alors utiliser l'arbre représentant cette expérience. On note p la probabilité que la salle A (ou la salle B) soit occupée. On note A (respectivement B) l'événement : « La salle A (respectivement B) est occupée ». La probabilité de l'issue correspondant à un chemin est le produit des probabilités figurant sur ce chemin.



1 Réponse $\boxed{c}$. L'événement « les deux salles sont libres » est l'événement contraire de « au moins une salle est occupée ». Donc la probabilité de cet événement est $1 - 0{,}91 = 0{,}09$.

2 Réponse $\boxed{d}$. D'après la question 1, la probabilité qu'aucune salle ne soit occupée est $(1 - p)^2 = 0{,}09$. Par conséquent $1 - p = 0{,}3$ et alors $p = 0{,}7$.

3 Réponse $\boxed{b}$. « Une seule salle est occupée » correspond aux deux issues $(A,\overline{B})$ et $(B,\overline{A})$, et a pour probabilité :

$$2 \times p \times (1 - p) = 2 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}42$$

4 Réponse $\boxed{b}$. « Au moins une salle est libre » est l'événement contraire de « Les deux salles sont occupées ». Donc la probabilité de cet événement est $1 - p^2 = 1 - 0{,}7^2 = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$.

4 QCM Logique

Énoncé p. 309

1 Réponses $\boxed{b}$ et $\boxed{d}$. On ne peut pas obtenir en même temps une fois pile *et* deux fois pile, par contre l'un ou l'autre convient.

« Obtenir 0 fois face » revient à « Obtenir 2 fois pile », donc ne convient pas.

« Obtenir 0 fois face » ou « Obtenir une fois face » revient à « Obtenir 2 fois pile » ou « Obtenir une fois pile », c'est-à-dire obtenir au moins une fois pile.

2 Réponses $\boxed{b}$ et $\boxed{d}$. « Obtenir au plus une fois pile » signifie obtenir 0 fois pile ou une fois pile, ou bien obtenir 2 fois face ou une fois face.

3 Réponses $\boxed{a}$ et $\boxed{d}$. Le contraire de « Obtenir au moins une fois face » est « n'obtenir aucune face » ou bien « n'obtenir que des piles ».

4 Réponse $\boxed{b}$. X est au moins égal à 3 peut s'écrire $X \geqslant 3$. Le contraire est donc $X < 3$.

5 QCM Répétition d'expériences

Énoncé p. 309

1 Réponse $\boxed{d}$. Chaque expérience ayant deux issues possibles, le nombre d'issues est multiplié par 2 à chaque répétition. Il y a donc $2^3 = 8$ issues au total, donc 8 chemins.

2 Réponse $\boxed{d}$. Il y a $3^2 = 9$ chemins.

3 Réponse $\boxed{b}$. L'arbre associé à l'expérience a $3^3 = 27$ chemins équiprobables. Donc chaque issue a pour probabilité $\dfrac{1}{27}$.

4 Réponse $\boxed{b}$. Bien que l'expérience ait 3 issues, on peut, pour la question posée, l'assimiler à une épreuve de Bernoulli à deux issues : obtenir A avec une probabilité de 0,4, ou ne pas obtenir A. Dans ce cas, la variable qui donne le nombre de fois où A est obtenu suit bien la loi $\mathcal{B}(5\,;0{,}4)$.

MÉTHODE

Lors d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, il peut s'agir d'une loi binomiale, même si l'expérience répétée a plus de deux issues. En effet, on s'intéresse souvent à la réalisation ou non d'une issue particulière. Il suffit alors de reformuler la description de l'expérience pour obtenir une épreuve de Bernoulli.

6 QCM Loi binomiale

Énoncé p. 310

1 Réponses $\boxed{b}$ et $\boxed{d}$. Par définition, le nombre de listes de 8 résultats qui contiennent 5 succès est « 5 parmi 8 », c'est-à-dire $\dbinom{8}{5}$. Mais une liste qui contient 5 succès est une liste qui contient 3 échecs. En inversant le rôle des deux issues, on trouve qu'il y a $\dbinom{8}{3}$ listes qui conviennent. $\dbinom{8}{3} = \dbinom{8}{5}$.

2 Réponse $\boxed{c}$ et $\boxed{d}$. Par définition de la loi binomiale, la probabilité d'obtenir deux fois 6 en 3 lancers est $\dbinom{3}{2} \times 0{,}2^2 \times 0{,}8$. Or $\dbinom{3}{2} = 3$, donc la probabilité est aussi égale à $3 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8$.

CORRIGÉS

3 Réponse $\boxed{c}$.

$P(X=4)=\binom{6}{4}\times 0{,}7^4\times 0{,}3^2$ et $P(X=2)=\binom{6}{2}\times 0{,}7^2\times 0{,}3^4$. Soit on fait le calcul, soit on utilise le fait que $\binom{6}{4}=\binom{6}{2}$ (voir explications à la question 1) et on constate que :

$$0{,}3^2P(X=4)=0{,}7^2P(X=2).$$

On trouve alors que :

$$P(X=4)>P(X=2).$$

et de plus que :

$$P(X=4)\neq 2P(X=2)\ ,$$

donc $\boxed{d}$ est faux.

7 QCM Tirage bicolore

Énoncé p. 311

Chaque tirage est un tirage de Bernoulli, la probabilité d'obtenir une boule blanche est 0,5.

Si l'on effectue n tirages avec remise, la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches obtenues suit la loi binomiale de paramètre n et 0,5.

Ne pas obtenir des boules toutes de la même couleurs, signifie ne pas obtenir n boules blanches ni n boules noires.

Or, la probabilité d'obtenir n boules blanches est $\frac{1}{2^n}$, de même la probabilité d'avoir n boules noires est $\frac{1}{2^n}$. Comme ces deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se produise est :

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=2\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

La probabilité de l'événement contraire est donc $1-\frac{1}{2^{n-1}}$.

La réponse exacte est donc la réponse $\boxed{b}$.

8 Lancer de dé

Énoncé p. 311

Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

1 L'expérience est une répétition de 4 lancers de dé, donc de 4 expériences identiques et indépendantes. Obtenir la face 6 est le succès de l'épreuve de Bernoulli, et sa probabilité p vaut $\frac{1}{6}$. La variable X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4,\frac{1}{6}\right)$.

2 La probabilité de gagner 3 points est :

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 \\ &= 4 \times \frac{5}{6^4} \\ &= \frac{5}{324}. \end{aligned}$$

3 Pour déterminer la loi de probabilité de X il reste à calculer la probabilité d'avoir 0, 1, 2 ou 4 fois la face numérotée 6.

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &= \frac{5^4}{6^4} \\ &= \frac{625}{1\,296}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= 4 \times \frac{5^3}{6^4} \\ &= \frac{125}{324}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= 6 \times \frac{5^2}{6^4} \\ &= \frac{25}{216}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0 \\ &= \frac{1}{6^4} \\ &= \frac{1}{1\,296}. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{625}{1\,296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1\,296}$

Remarque : il est toujours prudent de vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

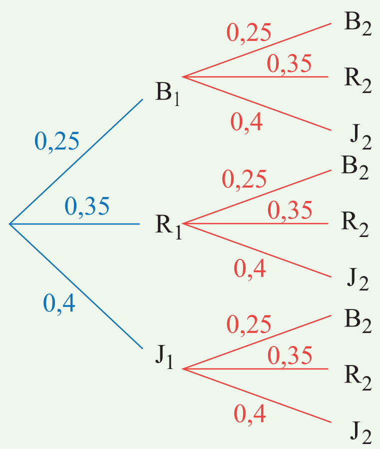
9 Deux tirages successifs

Énoncé p. 311

Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

1 Comme la somme des probabilités des issues d'une expérience vaut 1, la probabilité d'obtenir un jeton rouge est $1 - 0{,}25 - 0{,}4 = 0{,}35$.

2 On note B_i l'événement « Tirer un jeton bleu au i-ième lancer », R_i « Tirer un jeton rouge au i-ième lancer » et J_i « Tirer un jeton jaune au i-ième lancer », avec $i = 1$ ou $i = 2$. L'arbre pondéré associé à l'expérience est donc :



(a) Comme il y a remise du premier jeton tiré avant le second tirage, les deux expériences successives sont indépendantes, et la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat de la liste.

$$P(B_1, J_2) = 0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1.$$

(b) L'événement « Obtenir deux jetons de couleurs différentes » est l'événement contraire de « Obtenir deux jetons de même couleur ». La probabilité de cet événement est donc :

$$\begin{aligned} 1 - P(B_1, B_2) - P(J_1, J_2) - P(R_1, R_2) &= 1 - 0{,}25^2 - 0{,}4^2 - 0{,}35^2 \\ &= 0{,}655. \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi faire la somme des probabilités des 6 issues qui composent l'événement, mais c'est bien sûr plus long !

10 Groupe sanguin

Énoncé p. 312

Lycée Notre-Dame de Sainte-Croix, Neuilly-sur-Seine

1 L'arbre représentant l'expérience a $3 \times 3 \times 3 = 27$ chemins. Les différentes listes de résultats sont :

(A,A,A)	(A,A,O)	(A,A,C)	(A,O,A)	(A,O,O)	(A,O,C)
(A,C,A)	(A,C,O)	(A,C,C)	(O,A,A)	(O,A,O)	(O,A,C)
(O,O,A)	(O,O,O)	(O,O,C)	(O,C,A)	(O,C,O)	(O,C,C)
(C,A,A)	(C,A,O)	(C,A,C)	(C,O,A)	(C,O,O)	(C,O,C)
(C,C,A)	(C,C,O)	(C,C,C)			

Comme il y a répétition de 3 expériences identiques et indépendantes, la probabilité de chaque liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

2 L'événement, « Les trois personnes sont du groupe sanguin A » a pour probabilité :

$$P(A) = 0{,}45^3 \approx 0{,}091.$$

3 L'événement « Il y a une personne de chaque groupe » est la réunion de toutes les listes contenant les 3 résultats A, O et C, quel que soit leur ordre.

La probabilité de chaque liste contenant les trois résultats est :

$$0{,}45 \times 0{,}43 \times 0{,}12 \approx 0{,}0232.$$

On compte qu'il y a exactement 6 listes contenant ces trois résultats, donc la probabilité qu'il y ait une personne de chaque groupe sanguin est environ $6 \times 0{,}0232 \approx 0{,}139$.

4 Pour cette question, on peut procéder de deux façons.

La première consiste à identifier toutes les listes qui contiennent au moins un A et d'ajouter leurs probabilités. On trouve :

$$\begin{aligned} & 0{,}45^3 \\ & + 3 \times 0{,}45^2 \times 0{,}43 \\ & + 3 \times 0{,}45^2 \times 0{,}12 \\ & + 6 \times 0{,}45 \times 0{,}43 \times 0{,}12 \\ & + 3 \times 0{,}45 \times 0{,}43^2 \\ & + 3 \times 0{,}45 \times 0{,}12^2 \\ & \approx 0{,}834. \end{aligned}$$

Une autre méthode consiste à ne considérer plus que deux événements : « Être du groupe sanguin A » et son contraire « Ne pas être du groupe sanguin A », de probabilités respectives 0,45 et 0,55. L'événement « Au moins une personne est du groupe A » est l'événement contraire de « Aucune personne n'est du groupe A ».

CORRIGÉS

Sa probabilité est donc :

$$1 - 0{,}55^3 \approx 0{,}834.$$

11 Lancer de deux dés

Énoncé p. 312

Lycée La Bruyère, Versailles

1 Le lancer de deux dés équilibrés est une expérience à 36 issues équiprobables, parmi lesquelles 6 sont gagnantes.

La probabilité de gagner est donc $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

2 **(a)** Chaque partie est une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès est $\dfrac{1}{6}$. On répète 4 parties, le résultat d'un lancer n'a pas d'influence sur le résultat du lancer suivant, donc les expériences sont identiques et indépendantes. La variable X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4\,;\dfrac{1}{6}\right)$.

(b) $P(X = 0) = (1-p)^4 = \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 = \dfrac{625}{1296} \approx 0{,}482.$

(c) $P(X = 2) = \dbinom{4}{2} p^2(1-p)^2 = 6\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{25}{216} \approx 0{,}116.$

3 $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n.$

On cherche la plus petite valeur de n telle que $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}99$, c'est-à-dire telle que $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01$.

En calculant les puissances successives de $\dfrac{5}{6}$ à la calculatrice (il suffit d'afficher les termes successifs de la suite géométrique $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$) on trouve que la plus petite valeur de n telle que $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01$ est $n = 26$.

Nous aurions pu trouver n en résolvant l'inéquation de manière algébrique :

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01 &\iff \ln\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] \leqslant \ln(0{,}01)\\ &\iff n\ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqslant \ln(0{,}01)\end{aligned}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$$
$$\iff n \geqslant 25{,}2585$$
$$\iff n = 26 \text{ car } n \text{ est entier.}$$

12 Loi binomiale

Énoncé p. 312

Lycée Jean Puy, Roanne

1 Le jeu est une succession de 5 expériences identiques et indépendantes. « Donner cinq bonnes réponses » correspond à la liste de cinq résultats « Donner la bonne réponse », et a donc pour probabilité $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$.

2 Le candidat gagne 250 euros lorsqu'il a cinq bonnes réponses, donc la probabilité qu'il gagne 250 euros est $\frac{32}{243}$.

3 Chaque question correspond à une épreuve de Bernoulli dont le succès est « Donner la bonne réponse », et a pour probabilité $\frac{2}{3}$. Comme il y a 5 répétitions indépendantes, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5\,;\frac{2}{3}\right)$.

4 Comme chaque réponse exacte fait gagner 50 euros, si on note y_i les valeurs prises par Y, on a $y_i = 50x_i$. Connaissant la loi de X, on en déduit la loi de Y dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	0	50	100	150	200	250
$P(X = x_i)$ $P(Y = y_i)$	$\binom{5}{0}\frac{1}{3^5}$	$\binom{5}{1}\frac{2}{3^5}$	$\binom{5}{2}\frac{2^2}{3^5}$	$\binom{5}{3}\frac{2^3}{3^5}$	$\binom{5}{4}\frac{2^4}{3^5}$	$\binom{5}{5}\frac{2^5}{3^5}$
Valeurs approchées	0,004	0,041	0,165	0,329	0,329	0,132

5 Pour calculer l'espérance de Y, on peut prendre les valeurs numériques du tableau et appliquer la formule, mais il est plus rapide de constater que comme $y_i = 50x_i$, alors :

$$p_1y_1 + \cdots + p_5y_5 = 50(p_1x_1 + \cdots + p_5x_5) = 50E(X).$$

Or, on sait que si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, son espérance vaut np. Par conséquent $E(Y) = 50 \times 5 \times \frac{2}{3} = \frac{500}{3}$.

CORRIGÉS

13 Des formes et des couleurs

Énoncé p. 313

Lycée Virlogeux, Riom

1 Il y a six objets différents et deux tirages successifs identiques et indépendants car ils sont avec remise. Il y a donc $6 \times 6 = 36$ tirages. Chaque tirage a pour probabilité $\frac{1}{36}$.

On peut faire un arbre pour représenter l'expérience, mais celui-ci est très volumineux puisqu'il y a 6 branches qui se divisent en 6.

Un tableau à double entrée est plus lisible dans ce cas, et pour trouver la probabilité d'un événement, il suffira alors de compter le nombre d'issues dans cet événement et multiplier ce nombre par $\frac{1}{36}$.

	CR	CV	BJ	BR	BV	BB
CR	(CR,CR)	(CR,CV)	(CR,BJ)	(CR,BR)	(CR,BV)	(CR,BB)
CV	(CV,CR)	(CV,CV)	(CV,BJ)	(CV,BR)	(CV,BV)	(CV,BB)
BJ	(BJ,CR)	(BJ,CV)	(BJ,BJ)	(BJ,BR)	(BJ,BV)	(BJ,BB)
BR	(BR,CR)	(BR,CV)	(BR,BJ)	(BR,BR)	(BR,BV)	(BR,BB)
BV	(BV,CR)	(BV,CV)	(BV,BJ)	(BV,BR)	(BV,BV)	(BV,BB)
BB	(BB,CR)	(BB,CV)	(BB,BJ)	(BB,BR)	(BB,BV)	(BB,BB)

2 En comptant les issues favorables pour chaque événement, on obtient les probabilités suivantes :

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

$P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$P(E) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

F est l'événement contraire de E : $P(F) = 1 - P(E) = \frac{13}{18}$.

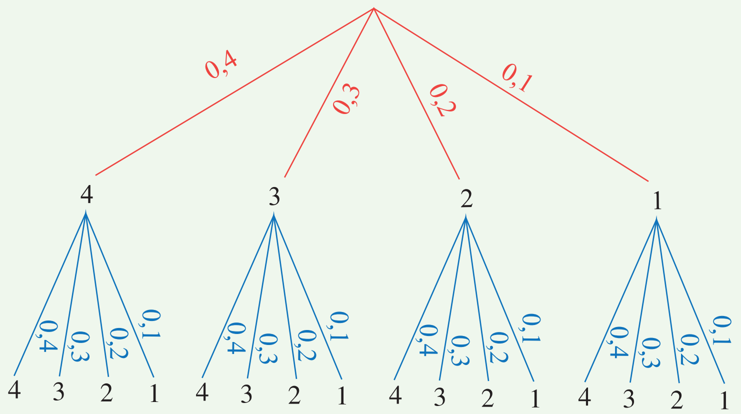
$P(G) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

14 Un dé tétraédrique déséquilibré

Énoncé p. 313

Lycée Odilon Redon, Pauillac

1 On est en présence de la répétition de deux expériences identiques et indépendantes. On peut construire l'arbre pondéré suivant, en indiquant les probabilités d'obtention de chaque chiffre pour le premier et le deuxième lancer.



MÉTHODE

La probabilité de l'issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités présentes sur le chemin.

2 Il n'y a qu'une seule façon d'obtenir les chiffres 1 et 3 dans cet ordre. La probabilité de cet événement est : $p = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03$.

3 Les différentes façons d'obtenir deux chiffres distincts rangés par ordre croissant sont les suivantes :

$$(1;\,2)\;;\;(1;\,3)\;;\;(1;\,4)\;;\;(2;\,3)\;;\;(2;\,4)\;;\;(3;\,4)$$

La probabilité de l'événement correspondant est donc :

$$\begin{aligned} p &= 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}1 \times 0{,}4 \\ &\quad + 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}35. \end{aligned}$$

4 **(a)** Avec cette règle, le gain algébrique à ce jeu peut-être de -3 euros, 2 euros ou 5 euros.

Déterminer la loi de probabilité de X, c'est donner les probabilités de chacun des événements :

$$P(X = -3)\,,P(X = 2) \text{ et } P(X = 5).$$

D'après la question précédente, on a déjà calculé $P(X = 2) = 0{,}35$.

On gagne de plus 5 euros uniquement lorsqu'on obtient deux fois le chiffre 1. Cet événement se produit avec une probabilité de :

$$P(X = 5) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01\,.$$

Dans tous les autres cas, on perd 3 euros, et ainsi :

$$\begin{aligned} P(X = -3) &= 1 - \Big(P(X = 2) + P(X = 5)\Big) \\ &= 1 - 0{,}35 - 0{,}01 = 0{,}64. \end{aligned}$$

On peut résumer ces résultats par le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

Gain x_i	-3	2	5
$P(X = x_i)$	0,64	0,35	0,01

(b) L'espérance de X est :

$$E(X) = -3 \times 0{,}64 + 2 \times 0{,}35 + 5 \times 0{,}01 = -1{,}17.$$

On en déduit que ce jeu n'est pas équitable : en moyenne, le joueur peut s'attendre à perdre 1,17 euros par partie.

La variance de X est :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-3 + 1{,}17)^2 \times 0{,}64 + (2 + 1{,}17)^2 \times 0{,}35 \\ &\quad + (5 + 1{,}17)^2 \times 0{,}01 \\ &\approx 6{,}04. \end{aligned}$$

D'où son écart type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2{,}46.$$

(c) On remarque que l'on passe de la variable aléatoire X à la variable aléatoire Y par la relation affine :

$$Y = 2X + 1.$$

La loi de probabilité de Y est alors :

Gain y_i	-5	5	11
$P(Y = y_i)$	0,64	0,35	0,01

La formule du cours sur l'espérance donne :

$$E(Y) = E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = -1{,}34.$$

Pour la variance et l'écart-type, on fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned} V(Y) &= 0{,}64(-5 + 1{,}34)^2 + 0{,}35(5 + 1{,}34)^2 + 0{,}01(11 + 1{,}34)^2 \\ &= 24{,}1644. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 4{,}92$.

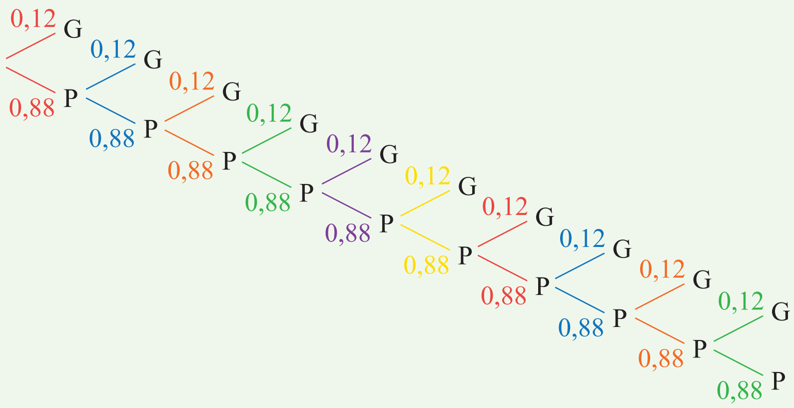
15 Jouer sans se ruiner

Énoncé p. 314

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Nous sommes en présence d'une loi géométrique tronquée.

1 L'arbre est celui d'un schéma de Bernoulli de 10 répétitions, dont on ne garde pas les branches issues d'un succès.



2 On note G, l'issue de l'épreuve de Bernoulli : « la carte achetée est gagnante » et P : « la carte est perdante ». L'oncle achète 4 cartes exactement si les 3 premières ne sont pas gagnantes, et si la dernière est gagnante. Il faut donc calculer
$P(P,P,P,G) = 0{,}88^3 \times 0{,}12 \approx 0{,}082$.

3 L'oncle achète 10 cartes si les 9 premières sont perdantes. La dernière carte n'a pas d'importance puisqu'il s'arrêtera de toute façon car il aura dépensé 20 euros.
La probabilité est donc $0{,}88^9 \approx 0{,}316$.

4 L'oncle ne gagne rien si les 10 cartes achetées sont perdantes. La probabilité de cet événement est $0{,}88^{10} \approx 0{,}279$.

5 **(a)** L'oncle dépense $2n$ euros lorsqu'il achète n cartes. Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n < 10$, il achète n cartes si les $n-1$ premières sont perdantes, donc on a $P(X = 2n) = 0{,}88^{n-1} \times 0{,}12$.
Par contre $P(X = 20) = 0{,}88^9$.
On peut résumer la loi de probabilité de X dans le tableau suivant contenant les valeurs approchées au millième :

x_i	2	4	6	8	10	12
$P(X = x_i)$	0,12	0,106	0,093	0,082	0,072	0,063

x_i	14	16	18	20
$P(X = x_i)$	0,056	0,049	0,043	0,316

(b) On calcule l'espérance de X grâce à la formule du cours et on obtient $E(X) \approx 12{,}02$.
Cela signifie que sur un grand nombre de semaines, l'oncle peut envisager dépenser en moyenne 12,02 euros par semaine.

CORRIGÉS

16 Le tapis vert

Énoncé p. 315

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

1 **(a)** Pour chaque couleur, il est choisi au hasard une carte parmi les 8 cartes de cette couleur. La probabilité d'avoir la bonne carte de cette couleur est donc $\frac{1}{8}$. Ce choix est répété de façons indépendantes pour les 4 couleurs. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètre 4 et $\frac{1}{8}$.

(b) Pour établir la loi de probabilité de X, on utilise la formule $P(X = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k\left(\frac{7}{8}\right)^{4-k}$. Les coefficients binomiaux $\binom{4}{k}$ sont égaux à 1, 4, 6, 4 et 1. On a donc le tableau de probabilité de X suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{7^4}{8^4}$	$4 \times \frac{7^3}{8^4}$	$6 \times \frac{7^2}{8^4}$	$4 \times \frac{7}{8^4}$	$\frac{1}{8^4}$

2 Il est plus rapide de chercher la probabilité de l'événement contraire « avoir 0 ou 1 carte exacte ».

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{7^4 + 4 \times 7^3}{8^4} = \frac{11 \times 7^3}{8^4}.$$

La probabilité d'avoir une grille gagnante était donc $1 - \frac{11 \times 7^3}{8^4} = \frac{323}{8^4}$, soit environ 0,0789.

3 **(a)** La mise étant de 1 €, le gain pour 2 cartes exactes est 1 €, le gain pour 3 cartes exactes est 29 €, le gain pour 4 cartes exactes est 999 €, et pour 0 ou 1 carte exacte, il est égal à -1 €.

Le tableau de la loi de probabilité de G est :

gain g_i	-1	1	29	999
$P(G = g_i)$	$\frac{11 \times 7^3}{8^4}$	$\frac{6 \times 7^2}{8^4}$	$\frac{4 \times 7}{8^4}$	$\frac{1}{8^4}$

(b) L'espérance du gain du joueur est :

$$-1 \times \frac{11 \times 7^3}{8^4} + 1 \times \frac{6 \times 7^2}{8^4} + 29 \times \frac{4 \times 7}{8^4} + 999 \times \frac{1}{8^4}$$

Ce qui donne $E(G) \approx -0{,}41$.

(c) Comme l'espérance de gain du joueur est négative, ce jeu n'est pas favorable au joueur.

17 Assurance

Énoncé p. 315

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-Sous-Bois

1 X suit une loi binomiale de paramètres 2 000 et 0,12.

2 $P(X \geqslant 240) = 1 - P(X \leqslant 239) \approx 0{,}51$.

3 Par essais successifs, on trouve :

$$P(X \leqslant 263) \approx 0{,}946 \text{ et } P(X \leqslant 264) \approx 0{,}953.$$

Le plus petit n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}95$ est donc 264.

4 **(a)** $Y = 2\,000a - 4\,000X$.

(b) $E(Y) = 2\,000a - 4\,000E(X)$. Or $E(X) = 2\,000 \times 0{,}12 = 240$, donc $E(Y) = 2\,000a - 960\,000$.

(c) $E(Y) \geqslant 0$ pour $2\,000a \geqslant 960\,000$, c'est-à-dire $a \geqslant 480$.

(d) Si $a = 500$, alors $Y = 1\,000\,000 - 4\,000X$, donc $Y \geqslant 100\,000$ pour $X \leqslant 225$. Or $P(X \leqslant 225) \approx 0{,}159$.
La probabilité que le bénéfice soit supérieur à 100 000 euros pour une cotisation de 500 euros est d'environ $0{,}159$.

18 Stand de tir

Énoncé p. 316

Lycée Jean Pierre Vernant, Pin-Justaret

1 **(a)** Chaque tir est une expérience de Bernoulli de paramètre 0,68. Les résultats des 25 tirs sont indépendants les uns des autres, la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres 25 et 0,68.

(b) D'après le cours, $E(X) = 25 \times 0{,}68 = 17$. Cela signifie que si Sandy effectue plusieurs séries de 25 tirs, elle peut espérer en réussir en moyenne 17 par série.

(c) On cherche $P(X = 25) = 0{,}68^{25} \approx 0{,}00006$.

(d) La probabilité que Sandy atteigne la cible au moins 20 fois est égale à :

$$P(X = 20) + P(X = 21) + P(X = 22) + P(X = 23) \\ + P(X = 24) + P(X = 25).$$

On utilise la calculatrice pour effectuer ce calcul et on trouve $P(X \geqslant 20) \approx 0{,}141$.

2 **(a)** $Y = 0{,}5X - 10$.

(b) On a alors :
$$\begin{aligned} E(Y) &= E(0{,}5X - 10) \\ &= 0{,}5E(X) - 10 \\ &= 0{,}5 \times 17 - 10 \\ &= -1{,}5. \end{aligned}$$

L'espérance du gain de Sandy étant négative, cela signifie que le jeu est défavorable à Sandy, mais par contre il est favorable au forain.

CORRIGÉS

(c) Le forain gagne de l'argent si Sandy gagne moins de 10 euros, donc réussit au plus 19 tirs.

(d) La probabilité que le forain ne gagne pas d'argent est donc la probabilité que Sandy réussisse au moins 20 tirs, c'est-à-dire environ $0{,}141$ (d'après la question 1).

3 L'événement « Sandy réussit au moins un des n tirs » est l'événement contraire de l'événement « Sandy ne réussit aucun des n tirs ». La probabilité de réussir au moins un tir est donc $1 - 0{,}32^n$.
On cherche le plus petit n tel que $1 - 032^n \geqslant 0{,}99$:

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}32^n \geqslant 0{,}99 &\iff -0{,}32^n \geqslant 0{,}99 - 1 \\ &\iff 0{,}32^n \leqslant 0{,}01 \\ &\iff \ln\left(0{,}32^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \\ &\iff n\ln(0{,}32) \leqslant \ln(0{,}01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}32)} \text{ (car } \ln(0{,}32) < 0) \\ &\iff n \geqslant 4{,}04. \end{aligned}$$

n étant un entier, la plus petite de ses valeurs qui correspond est $n = 5$.

Donc, si Sandy réalise au moins 5 tirs, la probabilité qu'elle en réussisse au moins un est supérieure ou égale à 0,99.

19 Éviter le gaspillage

Énoncé p. 317

Lycée Pablo Picasso, Fontenay-Sous-Bois

1 Le choix du service est une expérience de Bernoulli. Le succès est le choix du premier service et a une probabilité de 0,6. L'expérience est répétée 500 fois de façons indépendantes. X suit donc une loi binomiale de paramètres 500 et 0,6.

2 Il y a autant de personnes au premier service qu'au second service si il y a 250 personnes au premier service.

$P(X = 250) = \binom{500}{250} \times 0{,}6^{250} \times 0{,}4^{250} \approx 1{,}32 \times 10^{-6}$.

3

MÉTHODE

Les calculs de probabilité demandés dans les questions 3 à 6 ne sont pas possibles « à la main ». En revanche, les calculatrices permettent le calcul de $P(X \leqslant k)$ ou $P(X = k)$ dans le cas d'une loi binomiale.

$E(X) = 500 \times 0{,}6 = 300$.

$P(X \leqslant 300) \approx 0{,}517$.

4 $P(X \leqslant 280) \approx 0{,}038$.

5 $P(290 \leqslant X \leqslant 310) = P(X \leqslant 310) - P(X \leqslant 289) \approx 0{,}662$

6 On cherche le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}99$.
Par essais successifs, on trouve $P(X \leqslant 324) \approx 0{,}9878$ et $P(X \leqslant 325) \approx 0{,}9904$.
Il faut donc que le gérant prévoie au minimum 325 repas.

20 Commission

Énoncé p. 317

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

Les quatre visites successives peuvent se modéliser par la répétition d'expériences identiques et indépendantes.

1 La probabilité que seul le premier client achète l'objet est donc $0{,}3 \times 0{,}7^3 \approx 0{,}103$.

2 Cela peut être le premier, le deuxième, le troisième ou le quatrième client qui achète l'objet, les trois autres ne l'achetant pas. La probabilité de B est donc $4 \times P(A) = 1{,}2 \times 0{,}7^3 \approx 0{,}412$.

3 **(a)** Chaque visite est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « Le client achète l'objet », de probabilité 0,3. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(4\ ;\ 0{,}3)$.

(b) La loi de probabilité de X est donc :

x_i	$P(X = x_i)$
0	$\binom{4}{0} \times 0{,}7^4$
1	$\binom{4}{1} \times 0{,}3 \times 0{,}7^3$
2	$\binom{4}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^2$
3	$\binom{4}{3} \times 0{,}3^3 \times 0{,}7$
4	$\binom{4}{4} \times 0{,}3^4$

4 **(a)** Si il y a x_i ventes, le gain est $\dfrac{15 \times 500}{100} x_i = 75 x_i$. On déduit donc du tableau précédent la loi de probabilité de la variable aléatoire qui donne le gain de la journée.

y_i	Probabilité	Valeur approchée
0	$\binom{4}{0} \times 0{,}7^4$	0,240
75	$\binom{4}{1} \times 0{,}3 \times 0{,}7^3$	0,412
150	$\binom{4}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^2$	0,265
225	$\binom{4}{3} \times 0{,}3^3 \times 0{,}7$	0,076
300	$\binom{4}{4} \times 0{,}3^4$	0,008

(b) Avec les valeurs approchées du tableau et la définition de l'espérance, on trouve que l'espérance du gain journalier est $90,15$.
Mais on peut aussi voir d'après la définition de l'espérance, que si l'on multiplie toutes les valeurs par un même nombre, alors on multiplie l'espérance par ce nombre.

Puisque l'espérance d'une variable qui suit la loi binomiale est égale à np, si l'on multiplie ses valeurs par 75 on trouve que l'espérance du gain journalier est $4 \times 0{,}3 \times 75 = 90$. C'est la valeur que nous allons prendre pour la suite car le calcul précédent était fait avec des valeurs approchées.

5 Pour que l'espérance devienne supérieure à 100, il faut qu'elle soit multipliée par $\dfrac{100}{90}$. Étant donnée la définition de l'espérance, on voit qu'il suffit de multiplier toutes les valeurs de la variable par $\dfrac{100}{90}$.

Pour cela il suffit que le taux de commission soit multiplié par $\dfrac{100}{90}$ et devienne donc $\dfrac{100}{90} \times 0,15 \approx 0,167$, soit environ $16,7\%$.

21 Forte probabilité

Énoncé p. 318

Lycée Vaugelas, Chambéry

1 **(a)** On considère que chaque jour, le comportement du perroquet est indépendant de son comportement de la veille. Il y a chaque jour trois possibilités, mais comme on s'intéresse uniquement au fait que le perroquet commence par aller boire ou non, on peut considérer que l'expérience est la répétition de 3 épreuves de Bernoulli dont le succès est « Le perroquet commence par boire », avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$.

(b) Par définition, le nombre de chemins associés à l'événement $(X = 1)$ est $\dbinom{3}{1} = 3$.

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}.$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

(c) L'événement « Le perroquet commence par aller boire au moins une fois » est le contraire de l'événement « Le perroquet ne commence jamais par aller boire ». La probabilité cherchée est donc
$$1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{37}{64} \approx 0{,}58.$$

2 Par un raisonnement identique à celui de la question précédente, sur une période de n jours, la probabilité que le perroquet ait commencé par aller boire au moins une fois est $1 - 0{,}75^n$.

On veut $1 - 0{,}75^n > 0{,}95$, c'est-à-dire $0{,}75^n < 0{,}05$. On sait que la suite géométrique de raison $0{,}75$ est une suite décroissante car $0 < 0{,}75 < 1$. En calculant à la calculatrice les termes successifs de cette suite, on trouve que le premier entier tels que $0{,}75^n < 0{,}05$ est $n = 11$.

22 Extrait d'un concours GEIPI Polytech

Énoncé p. 318

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

Partie A

1 D'après l'énoncé, il y a 60% de chocolats noirs. Par conséquent,
$$P_1 = 0{,}6.$$

2 On nous demande de calculer ici :
$$\begin{aligned} P_2 &= P(N \cap F) \\ P_2 &= P(N) \times P_N(F) \\ P_2 &= 0{,}6 \times 0{,}7 \\ P_2 &= 0{,}42. \end{aligned}$$

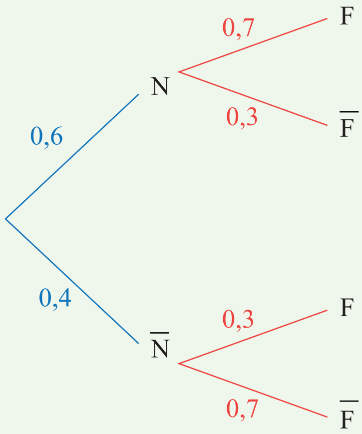
3 Nous pouvons dessiner un arbre des probabilités pour appuyer notre raisonnement (voir page suivante).

Dans cette question, on nous demande de calculer $P_3 = P(F)$.

D'après la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} P_3 &= P(N \cap F) + P(\overline{N} \cap F) \\ &= 0{,}42 + 0{,}4 \times 0{,}3 \\ &= 0{,}42 + 0{,}12 \\ &= 0{,}54. \end{aligned}$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS



Partie B

1 L'épreuve consistant à choisir au hasard un chocolat et à regarder s'il est fourré est une épreuve de Bernoulli de probabilité $p = P(F) = 0{,}54$.

L'expérience consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve est donc un schéma de Bernoulli, dont X_n représente le nombre de succès. Par conséquent, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}54$.

2 **(a)** On nous demande ici de calculer $P_4 = P(X_{12} = 6)$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$P_4 \approx 0{,}2171.$$

(b) On nous demande ici de calculer $P_5 = P(X_{12} \geqslant 1)$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$P_5 \approx 0{,}9999.$$

(c) On nous demande ici de calculer $P_6 = P(X_{12} \leqslant 3)$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$P_6 \approx 0{,}5014.$$

À RETENIR

« au moins k » signifie « k ou plus » donc se traduit par « $\geqslant k$ ».
« au plus k » signifie « k ou moins » donc se traduit par « $\leqslant k$ ».

3 **(a)** La probabilité q_n pour que la boîte contienne au moins un chocolat fourré est :

$$\begin{aligned} q_n &= P(X_n \geqslant 1) \\ &= P\left(\overline{X_n < 1}\right) \\ &= 1 - P(X_n < 1) \\ &= 1 - P(X_n = 0) \\ &= 1 - (1 - 0{,}54)^n \\ q_n &= 1 - 0{,}46^n. \end{aligned}$$

(b) On cherche le premier n tel que :

$$\begin{aligned} q_n > 0{,}98 &\iff 1 - 0{,}46^n > 0{,}98 \\ &\iff 1 - 0{,}98 > 0{,}46^n \\ &\iff 0{,}46^n < 0{,}02 \\ &\iff \ln\left(0{,}46^n\right) < \ln(0{,}02) \\ &\iff n\ln(0{,}46) < \ln(0{,}02) \\ &\iff n > \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}46)} \end{aligned}$$

(on change le sens de l'inégalité car on divise par $\ln(0{,}46) < 0$)

$$\iff n > 5{,}04.$$

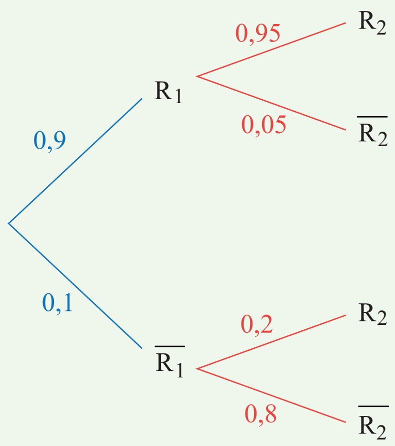
Il faut donc que le client achète au minimum $n_0 = 6$ chocolats pour que la probabilité qu'il y ait au moins un chocolat fourré soit strictement supérieure à 0,98.

23 Extrait d'un bac (Liban 2019)

Énoncé p. 319

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 **(a)** D'après les informations données dans l'énoncé, on peut construire l'arbre de probabilités suivant :



COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

(b) La probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine est :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= 0{,}9 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}855. \end{aligned}$$

(c) La probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est :

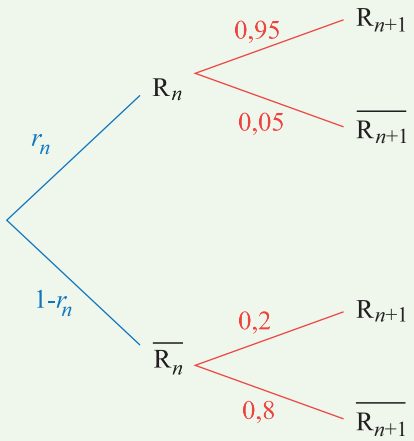
$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2) \\ &= 0{,}855 + 0{,}1 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}875. \end{aligned}$$

(d) On cherche ici :

$$\begin{aligned} P_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) &= \frac{P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)}{P(R_2)} \\ &= \frac{0{,}1 \times 0{,}2}{0{,}875} \\ &\approx 0{,}023. \end{aligned}$$

2 **(a)** L'arbre complété est représenté page ci-contre.

Les probabilités conditionnelles ne changent pas par rapport à l'arbre précédent. Il faut ici imaginer que l'on fait un « zoom » sur un événement R_n, n étant quelconque, et compléter l'arbre en supposant connu $P(R_n) = r_n$.



(b) D'après l'arbre ci-dessus et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} r_{n+1} = P(R_{n+1}) &= P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) \\ &= 0{,}95 r_n + 0{,}2(1 - r_n) \\ &= 0{,}75 r_n + 0{,}2. \end{aligned}$$

(c) On démontre par récurrence l'égalité souhaitée.

- *Initialisation :* $r_1 = P(R_1) = 0{,}9$ d'après l'énoncé.
  De plus, $0{,}1 \times 0{,}75^{1-1} + 0{,}8 = 0{,}1 + 0{,}8 = 0{,}9$.
  Ainsi, l'égalité est vraie pour $n = 1$.
- *Hérédité :* supposons que pour un entier $k \geqslant 1$ fixé,
  $$r_k = 0{,}1 \times 0{,}75^{k-1} + 0{,}8.$$
  Alors, en multipliant par 0,75, on a :
  $$\begin{aligned} 0{,}75 r_k &= 0{,}75 \times (0{,}1 \times 0{,}75^{k-1} + 0{,}8) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}75^{k-1} \times 0{,}75 + 0{,}8 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}1 \times 0{,}75^{k} + 0{,}6. \end{aligned}$$
  Enfin, en ajoutant 0,2, on obtient :
  $$0{,}75 r_k + 0{,}2 = 0{,}1 \times 0{,}75^{k} + 0{,}8$$
  soit :
  $$r_{k+1} = 0{,}1 \times 0{,}75^{k} + 0{,}8.$$
  L'hérédité est alors prouvée.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul,
$$r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8.$$

(d) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^{n-1} = 0$ car $0 < 0{,}75 < 1$. Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0{,}8$.
Cela signifie qu'à longs termes, la probabilité qu'un client ramène sa bouteille est égale à 0,8.

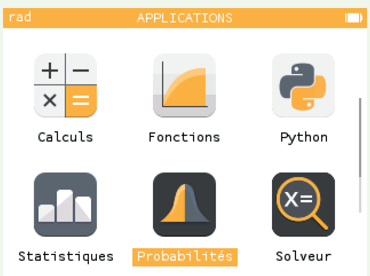
3 On note X la variable aléatoire représentant le nombre de clients ramenant leur bouteille.

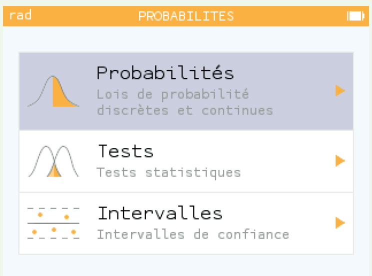
L'expérience consistant à regarder si un client ramène sa bouteille est une épreuve de Bernoulli dont le succès a pour probabilité 0,8. On répète cette épreuve 20 fois de manière indépendante.

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}8$.

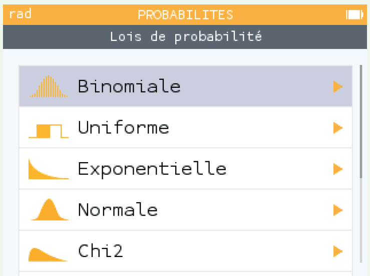
On peut alors répondre aux questions suivantes à l'aide de la calculatrice. Voici ici l'exemple avec la calculatrice *Numworks*.

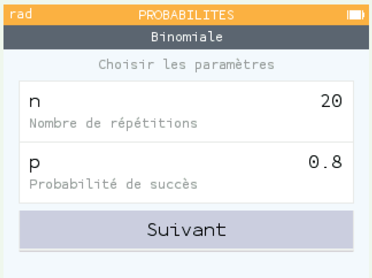
- Dans le menu principal, on choisit l'item « Probabilités » :





- Ensuite, on choisit la première ligne : « Binomiale », puis on entre les paramètres de la loi binomiale :



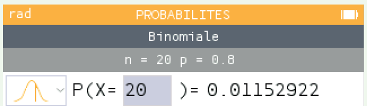


(a) On cherche ici $P(X = 20)$. On peut :

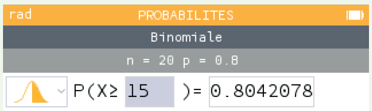
- soit calculer directement :

$$P(X = 20) = 0{,}8^{20} \approx 0{,}012.$$

- soit utiliser la calculatrice :



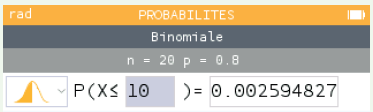
(b) La probabilité qu'au moins 15 des clients choisis ramènent leur bouteille est $P(X \geqslant 15)$.



La valeur approchée au millième est alors :

$$P(X \geqslant 15) \approx 0{,}804.$$

(c) La probabilité qu'au plus 10 d'entre eux ramènent leur bouteille est $P(X \leqslant 10)$.



On trouve :

$$P(X \leqslant 10) \approx 0{,}003.$$

24 Probabilités et QCM

Énoncé p. 321

Asie, sujet 1, septembre 2025

1 L'expérience consistant à choisir au hasard une réponse à une question du QCM est une expérience de Bernoulli (deux issues) donc la probabilité du succès est $\frac{1}{4}$.

On répète 10 fois de manière indépendante cette expérience, donc la variable aléatoire X représentant le nombre de succès à l'issue de cette succession d'épreuves indépendantes suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

2 La probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses est :

$$P(X=5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-5} \approx 0{,}058\,4.$$

3 L'espérance de X est :

$$E(X) = np = 10 \times \frac{1}{4} = 2{,}5.$$

Cela signifie que Dominique a en moyenne 2,5 bonnes réponses.

4 **(a)** Pour réaliser l'événement $(Y = 10)$, il faut que toutes les réponses soient justes donc on calcule :

$$P(Y=10) = P(X=10) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}.$$

(b) On peut calculer la valeur de Y en fonction de celle de X :

- On a vu que $(Y = 10)$ équivalait à $(X = 10)$.
- Si $X = 9$, il y a 9 bonnes réponses qui rapportent 9 points, et une mauvaise réponse qui en retire un demi ; donc $Y = 8{,}5$.
- Si $X = 8$, il y a 8 bonnes réponses qui rapportent 8 points, et deux mauvaises réponses qui retirent deux demi-points ; donc $Y = 7$.
- Etc.

On regroupe tous les résultats possibles dans un tableau.

X	0	1	2	3	4	5
Y	−5	−3,5	−2	−0,5	1	2,5

X	6	7	8	9	10
Y	4	5,5	7	8,5	10

Donc la note finale de Dominique est positive à partir de 4 bonnes réponses.

(c) D'après le tableau précédent, $P(Y \leqslant 0) = P(X \leqslant 3)$.

Donc $P(Y \leqslant 0) \approx 0{,}78$.

(d) X prend toutes les valeurs entières entre 0 et 10.

Pour X bonnes réponses qui rapportent X points, il y en a $10 - X$ mauvaises qui retirent $0{,}5\,(10 - X)$ points.

Donc :

$$Y = X - 0{,}5\,(10 - X)$$
$$Y = X - 5 + 0{,}5X$$
$$Y = 1{,}5X - 5.$$

(e) D'après la linéarité de l'espérance mathématique, on a :

$$E\,(Y) = E\,(1{,}5X - 5)$$
$$E(Y) = 1{,}5 \times E\,(X) - 5$$
$$E(Y) = 1{,}5 \times 2{,}5 - 5$$
$$E(Y) = -1{,}25.$$

Chapitre 11

Somme de variables aléatoires, loi des grands nombres

Plan du chapitre

1 Somme de variables aléatoires

Exercice type 1 — Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

On note N la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}32$.
On note T la variable aléatoire telle que $T = 3N$.

1. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.
2. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T.
3. On note X_1, X_2,..., X_{50} des variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi telle que $E(X_k) = 22$ et $V(X_k) = 65$, $1 \leqslant k \leqslant 50$.
   On pose alors $M_{50} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50}$.
   Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.

Voir corrigé page 352

1.1 Linéarité de l'espérance

Propriété 1

Soient X et Y deux variables aléatoires. L'espérance de la variable aléatoire $X + Y$ est :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

De plus, pour tout réel a, l'espérance de la variable aléatoire aX est :

$$E(aX) = aE(X).$$

COURS

Exemple : Xavier et Yvonne vont au restaurant. Xavier hésite de façon équiprobable entre les menus à 18 €, 24 € et 36 €. Yvonne hésite, quant à elle, de façon équiprobable entre les menus à 24 € et 36 €.
On note X et Y les variables aléatoires représentant le prix du menu choisi respectivement par Xavier et Yvonne.
Alors, $X = \{18; 24; 36\}$ et $Y = \{24; 36\}$ et :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3} \times 18 + \frac{1}{3} \times 24 + \frac{1}{3} \times 36 \\ &= 6 + 8 + 12 \\ &= 26 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2} \times 24 + \frac{1}{2} \times 36 \\ &= 12 + 18 \\ &= 30. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 26 + 30 = 56.$$

On peut ainsi dire que le prix moyen de la facture de ce repas est 56 €.

Si Xavier va seul au restaurant 5 fois, et s'il choisit à chaque fois au hasard un menu parmi les 3 cités précédemment, la facture moyenne totale correspondra à $E(5X)$, soit à $5E(X)$, et donc à $5 \times 26 = 130$ €.

1.2 Variance de deux variables aléatoires indépendantes

Définition 1 : variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires.
X et Y sont indépendantes si :

$$P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire. Pour tout réel a, la variance de la variable aléatoire aX est :

$$V(aX) = a^2 V(X).$$

Son écart-type est donc :

$$\sigma(aX) = |a|\sigma(X).$$

Exemple : reprenons le cas de Xavier de l'exemple précédent.

$$V(X) = \frac{1}{3}\left[(18-26)^2 + (24-26)^2 + (36-26)^2\right] = 56.$$

Ainsi,

$$V(5X) = 5^2 V(X) = 25 \times 56 = 1\,400.$$

De plus,

$$\sigma(5X) = 5\sigma(X) = 5\sqrt{V(X)} = 10\sqrt{14} \approx 37{,}42.$$

Propriété 3

Soient X et Y deux variables aléatoires *indépendantes*.
La variance de la variable aléatoire $X + Y$ est :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

1.3 Somme et moyenne de variables indépendantes

1.3.1 - Généralités

Propriété 4

Soient X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes. On pose alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Alors,

- $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ et $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$.
- $E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ et $V(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$.

1.3.2 - Application à la loi binomiale

Si, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, X_k est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli alors $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$ et la propriété 4 donne :

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} p = n \times p = np$$

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

D'où la propriété page suivante.

COURS INTERROS CORRIGÉS

COURS

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors,

$$E(X) = np \quad , \quad V(X) = np(1-p) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Exemple : dans une urne, il y a 7 boules bleues et 3 rouges. On choisit au hasard une boule de cette urne puis on la remet, et on répète cette expérience 10 fois de façon indépendante.
La probabilité de choisir une boule bleue lors d'un tirage est $p = 0{,}7$.
Si X représente le nombre de boules bleues obtenues à l'issue de ces 10 tirages au sort, alors X suit la loi $\mathcal{B}(n;\, p)$ et son espérance est :

$$E(X) = 10 \times 0{,}7 = 7.$$

Solution de l'exercice type 1

Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

1 N suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}32$ donc :

$$E(N) = n \times p = 15 \times 0{,}32 = 4{,}8$$

et

$$V(N) = n \times p \times (1-p) = 3{,}264.$$

2 $T = 3N$ donc :

$$E(T) = 3E(N) = 3 \times 4{,}8 = 14{,}4$$

et

$$V(T) = 3^2 V(N) = 9 \times 3{,}264 = 29{,}376.$$

3 L'espérance de M_{50} est :

$$\begin{aligned} E(M_{50}) &= \frac{1}{50}\big[E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{50})\big] \\ &= \frac{1}{50} \times 50 \times E(X_1) \text{ car les } X_k \text{ suivent la même loi} \\ &= E(X_1) = 22. \end{aligned}$$

La variance de M_{50} est, quant à elle :

$$\begin{aligned} V(M_{50}) &= \left(\frac{1}{50}\right)^2 \times V(X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}) \\ &= \frac{1}{50^2} \times 50 \times V(X_1) \\ &\text{car les } X_k \text{ sont indépendantes et suivent la même loi} \\ &= \frac{1}{50} \times 65 = 1{,}3. \end{aligned}$$

Voir énoncé page 349

2 Loi des grands nombres

2.1 Inégalités de concentration

Exercice type 2

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Peut-on estimer que la probabilité pour que la production de la semaine suivante dépasse 75 pièces soit supérieure à 0,75 ?
2. On sait, de plus, que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine suivante soit strictement comprise entre 40 et 60 ?

Voir corrigé page 354

Considérons deux variables aléatoires X et Y telles que $X \leqslant Y$.
Nous pouvons dans un premier temps écrire que si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.
De plus,

$$E(Y) - E(X) = E(Y - X)$$

et comme $Y - X \geqslant 0$, on en déduit :

$$E(Y - X) \geqslant 0 \qquad \text{soit :} \qquad E(X) \leqslant E(Y).$$

De ces résultats, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 : inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie, et à valeurs positives. Alors :

$$\forall\, a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

À l'aide de l'inégalité de Markov, on déduit le théorème suivant :

Théorème 2 : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(X)$.
Quel que soit le réel $\delta > 0$,

$$P\big(|X - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

COURS

De ce théorème (fondamental), on peut notamment conclure que pour une variable aléatoire quelconque X d'écart-type σ et d'espérance μ :

$$P\big(|X-\mu| \geqslant 2\sigma\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2}$$

soit :

$$P\big(|X-\mu| \geqslant 2\sigma\big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Cela signifie alors que la probabilité que les valeurs prises par X diffèrent de 2σ de sa moyenne est inférieure à 0,25.

Remarque : par simulation (manuelle ou informatique), on s'aperçoit en fait que cette probabilité est très souvent majorée par 0,05.

Solution de l'exercice type 2

1 Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces sortant de l'usine en l'espace d'une semaine.
X est positive et d'espérance finie. D'après l'inégalité de Markov,

$$P(X > 75) \leqslant \frac{50}{75} \qquad \text{soit :} \qquad P(X > 75) \leqslant 0{,}67.$$

On ne peut donc pas estimer que la probabilité pour que la production de la semaine suivante dépasse 75 pièces soit supérieure à 0,75.

2 Commençons par écrire :

$$P(40 < X < 60) = P(-10 < X - 50 < 10) = P(|X-50| < 10).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P\big(|X-50| \geqslant 10\big) \leqslant \frac{25}{10^2}$$

soit :

$$P\big(|X-50| \geqslant 10\big) \leqslant 0{,}25.$$

On en déduit alors que :

$$1 - P\big(|X-50| < 10\big) \leqslant 0{,}25$$

et donc :

$$P\big(|X-50| < 10\big) \geqslant 0{,}75.$$

La probabilité pour que la production de la semaine suivante soit comprise entre 40 et 60 est donc au moins de 75%.

Voir énoncé page 353

2.2 Loi faible des grands nombres

Exercice type 3

On dispose d'une urne dans laquelle sont mises 7 boules rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule de cette urne et on la remet dans l'urne ; si la boule choisie est noire, on gagne 1 point. Sinon, on ne gagne pas de point. On note M_n le gain moyen de points après n répétitions indépendantes de cette expérience.
Déterminer une valeur de n pour laquelle la probabilité que la différence (en valeur absolue) entre M_n et 0,3 soit supérieure ou égale à $0,1$ et inférieure ou égale à $0,5$.

Voir corrigé page 356

Propriété 6

Soient $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes ayant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. Alors,

$$\forall\,\delta > 0,\quad P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

Théorème 3 : théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres)

Soient X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ. Alors, pour tout réel $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) = 0.$$

POUR ALLER PLUS LOIN

Au premier abord, ce dernier théorème peut paraître simpliste, puisqu'il résulte de l'inégalité de concentration prise lorsque n tend vers $+\infty$. Il est au contraire très important, et permet notamment de justifier le principe des sondages. En effet, il permet d'interpréter la probabilité (valeur théorique) comme une fréquence (valeur observée) et présente l'espérance comme une moyenne. Ce théorème signifie que la *moyenne empirique* c'est-à-dire la moyenne calculée sur les valeurs observée sur un échantillon de population, converge vers l'espérance quand la taille de cet échantillon devient très grand.

COURS

Solution de l'exercice type 3

On cherche un entier n tel que :

$$P\big(|M_n - 0{,}3| \geqslant 0{,}1\big) \leqslant 0{,}5.$$

Notons X_k le nombre de points gagnés au k-ième tirage, $1 \leqslant k \leqslant n$.

X_k suit la loi de Bernoulli de probabilité $p = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$ et de variance $\sigma^2 = 0{,}3 \times (1 - 0{,}3) = 0{,}21$.

De plus, par définition, les variables X_k sont indépendantes donc on peut utiliser l'inégalité de concentration :

$$P\left(|M_n - 0{,}3| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \frac{0{,}21}{0{,}1^2 n}.$$

On souhaite que $P\left(|M_n - 0{,}3| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant 0{,}5$ donc il suffit de choisir n tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{0{,}21}{0{,}1^2 n} \leqslant 0{,}5 &\iff \frac{0{,}1^2 n}{0{,}21} \geqslant \frac{1}{0{,}5} \\
&\iff 0{,}1^2 n \geqslant \frac{1}{0{,}5} \times 0{,}21 \\
&\iff n \geqslant \frac{1}{0{,}5} \times \frac{0{,}21}{0{,}1^2} \\
&\iff n \geqslant 42.
\end{aligned}$$

Voir énoncé page 355

1 QCM Somme de variables aléatoires

5 min Corrigé p. 365

Pour chaque question, donner la bonne réponse parmi les propositions faites.

1 L'espérance mathématique de la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$ est :

[a] 0,02 [b] 0,2 [c] 2 [d] 20

2 La variance de la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}15$ est :

[a] 3 [b] 2,55 [c] 17 [d] 0,1275

3 Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(15; 0{,}1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(20; 0{,}3)$ deux variables aléatoires. Que vaut $E(X+Y) = ?$

[a] 7,5 [b] 35 [c] 0,4 [d] 3,5

4 Soit X une variable aléatoire de variance 5. Si on multiplie par 2 toutes les valeurs prises par X alors la variance devient :

[a] 10 [b] 15 [c] 20 [d] 25

2 QCM Somme de variables aléatoires

10 min Corrigé p. 365

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, quelle est la seule proposition exacte ?

Aucune justification n'est demandée.

1 Dans une région, on a recensé la fréquence du nombre de personnes par foyer :

Nombre de personnes	1	2	3	4	5
Fréquence	0,36	0,22	0,24	0,12	0,06

On choisit au hasard un foyer de cette région, et on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes dans ce foyer.

(a) Quelle est l'espérance de X ?

[a] 3,2 [b] 2,3 [c] 3 [d] 0,2

(b) Que vaut l'écart-type de X ?

[a] 1,53 [b] 2 [c] 1,24 [d] $\sqrt{1{,}53}$

2 On veut interroger 100 foyers de cette région, que l'on considère comme un échantillon de taille 100 de la loi de probabilité de X.

Soit S_{100} la variable aléatoire qui donne la somme d'un tel échantillon et M_{100} la variable aléatoire qui donne la moyenne de l'échantillon.

(a) Que vaut l'espérance de S_{100} ?

[a] 2,3 [b] 124 [c] 1534 [d] 230

(b) Que vaut la variance de S_{100} ?

a 1,24 b 153 c 124 d 1,53

(c) Que vaut l'espérance de M_{100} ?

a 2,3 b 124 c 23 d 230

(d) Que vaut l'écart-type de M_{100} ?

a $0{,}124$ b $\dfrac{\sqrt{1{,}53}}{10}$ c $0{,}0124$ d $\dfrac{\sqrt{1{,}53}}{100}$

3 V/F Vérification de connaissances

5 min — Corrigé p. 366

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les réponses.

1. Si une variable aléatoire X ne prend que des valeurs positives ou nulles, alors $E(X) \geqslant 0$.
2. Si $E(X) \geqslant 0$ alors la variable aléatoire X ne prend que des valeurs positives ou nulles.
3. X et Y sont deux variables aléatoires de variances respectives 8 et 10. Alors, $V(X+Y) = 18$.

4 V/F Inégalités de concentration

10 min — Corrigé p. 366

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = 9$ à valeurs positives. Alors, selon l'inégalité de Markov, $P(X \geqslant 10) \leqslant \dfrac{1}{10}$.
2. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = 7$ et de variance $\sigma^2 = 9$. Alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P\big(|X-7| \geqslant 18\big) < 0{,}028$.
3. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Si la carte est un roi, on gagne 1 point, sinon on ne gagne rien. On répète cette expérience 1 000 fois.

   La probabilité que, à l'issue des 1 000 expériences, la différence (en valeur absolue) entre le gain moyen de points et 125 soit plus grande que 15 est inférieure ou égale à 0,5.

Somme de variables aléatoires

5 Pile ou Face

★ 15 min Corrigé p. 367

Lycée Voltaire, Paris

Un joueur lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Chaque fois que le joueur obtient Face, il gagne 2 points, sinon il perd 1 point.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.

6 Jeu télévisé

★★ 20 min Corrigé p. 367

Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

Un jeu télévisé se déroule en deux manches :

- *Première manche* : le candidat tire au hasard et simultanément deux boules d'une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20. Si une boule portant un numéro multiple de 5 est choisie, 20 points sont gagnés ; dans le cas contraire, aucun point n'est gagné.
- *Seconde manche* : le candidat doit ouvrir une porte parmi trois portes fermées. Seule l'une d'elles peut multiplier par 2 les gains gagnés lors de la première manche. L'une des deux autres permet d'ajouter 5 points ; quant à l'autre, elle retire 5 points si les gains de la première manche sont supérieurs ou égaux à 5. Sinon, rien n'est retiré.

À l'issue de ces deux manches, chaque point vaut 100 €.

On appelle G le gain du ou de la candidat.e.

1. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de points à l'issue de la première manche.

   Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer $E(X)$.
2. On note Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique des points à l'issue de la seconde manche.

   Déterminer la loi de probabilité de Y ainsi que $E(Y)$.
3. Calculer $E(G)$.
4. À l'issue de ces deux manches, le ou la candidat.e. doit participer à la manche finale qui consiste à répondre à cinq questions de culture générale. À chaque mauvaise réponse, il ou elle perd 200 € sur les gains obtenus précédemment.

   On note Z la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses d'un.e. candidat.e. lors de cette manche finale.

   La société productrice du jeu estime que Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}2$.

   Déterminer le gain que peut espérer avoir le ou la candidat.e. à l'issue de cette finale.

INTERROS

Inégalité de concentration – Loi des grands nombres

7 Lancer de dé

★ 10 min Corrigé p. 369

Lycée François Mauriac, Bordeaux

On jette 3 600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit strictement compris entre 480 et 720 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

8 Usine de pièces

★ 10 min Corrigé p. 369

Lycée Henri IV, Paris

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que l'écart-type de la production quotidienne est 5 ?

9 Auto-école

★★ 15 min Corrigé p. 370

Lycée Michelet, Marseille

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

On admet que la probabilité qu'un candidat ait son permis dès la première fois est égale à 0,747.

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X \geqslant 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22{,}53$ et $V(Y) = 9{,}81$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

(a) Exprimer Z en fonction de X et Y. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

(b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

10 Nombre de tirages

★★ 10 min Corrigé p. 371

Lycée Jean Monod, Clamart

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement avec remise des boules de cette urne. À partir de combien de tirages est-on sûrs à 95% que la proportion de boules rouges tirées n'est pas dans l'intervalle $]0{,}35; 0{,}45[$?

11 Don de sang

★★ 15 min Corrigé p. 372

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-fossés

Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans n villes françaises choisies au hasard numérotées 1, 2, 3, ... , n, où n est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ... , X_n pour la ville n.

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

1 Que représente la variable aléatoire M_n dans le contexte de l'exercice ?

2 Calculer l'espérance $E(M_n)$.

3 On désigne par $V(M_n)$ la variance de la variable aléatoire M_n.

Montrer que $V(M_n) = \dfrac{6{,}63}{n}$.

4 Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_n < 7{,}28) \geqslant 0{,}95$.

12 Marche aléatoire

★★ 15 min Corrigé p. 373

Lycée Notre-Dame du Grandchamp, Versailles

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ définie de la façon suivante : on part de 0 et, à chaque étape,

- on a une probabilité p de faire un pas vers la droite ;
- on a une probabilité $1-p$ de faire un pas vers la gauche.

Autrement dit, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = 1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X_n = -1) = 1 - p.$$

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Que représente S_n dans le contexte de cet exercice ?
2. Exprimer, en fonction de p, $E(X_k)$.
3. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

13 Particules émises

★★ 15 min Corrigé p. 373

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps Δt. Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps Δt est de 10^3. On suppose que X suit une loi d'espérance et de variance égales à 10^2.

Donner une majoration de la probabilité que X dépasse 10^3.

14 Pièces défectueuses

★★ 15 min Corrigé p. 374

Lycée Hoche, Versailles

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur un échantillon très grand et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\dfrac{X_n}{n}$ approche p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

15 Dans le magasin ★★ 15 min

Corrigé p. 375

Lycée Carnot, Paris

Un magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles.

On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.
2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.
   Justifier que $E(S) = 9{,}9$ et que $V(S) = 8{,}2665$.
3. Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.
   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.

16 Combien de lancers de dé ? ★★★ 15 min

Corrigé p. 375

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

On lance de manière indépendante n fois un dé équilibré à six faces.

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir entre 0 et $\frac{n}{3}$ fois le nombre « 1 » est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

Calculer cette probabilité pour $n = 3$. Que peut-on conclure ?

Objectif bac

17 Fabrique de jouets ★★ 20 min

Corrigé p. 376

Baccalauréat Asie 2025, sujet 1

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

INTERROS

La probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95.

Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}95$.

1 Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.

2 Dans cette question, on pose $n = 150$.

- **(a)** Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- **(b)** Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

3 Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.

On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n.

- **(a)** Montrer que $E(F_n) = 0{,}95$ et que $V(F_n) = \dfrac{0{,}0475}{n}$.
- **(b)** On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».

  En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

1 QCM Somme de variables aléatoires

Énoncé p. 357

1 Réponse $\boxed{\text{c}}$. D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\ p)$ alors $E(X) = np$. Donc ici, $E(X) = 10 \times 0{,}2 = 2$.

2 Réponse $\boxed{\text{b}}$. D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\ p)$ alors $V(X) = np(1-p)$. Donc ici, $V(X) = 20 \times 0{,}15 \times (1 - 0{,}15) = 2{,}55$.

3 Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité de l'espérance. Or, $E(X) = 15 \times 0{,}1 = 1{,}5$ et $E(Y) = 20 \times 0{,}3 = 6$. Donc $E(X + Y) = 1{,}5 + 6 = 7{,}5$.

4 Réponse $\boxed{\text{c}}$. En effet, d'après le cours, $V(aX) = a^2V(X)$ donc $V(2X) = 2^2V(X) = 4 \times 5 = 20$.

2 QCM Somme de variables aléatoires

Énoncé p. 357

1 **(a)** Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet,

$$E(X) = 1\times 0{,}36+2\times 0{,}22+3\times 0{,}24+4\times 0{,}12+5\times 0{,}06 = 2{,}3.$$

(b) Réponse $\boxed{\text{d}}$. Dans la mesure où aucune justification n'est demandée, on peut utiliser la calculatrice pour répondre. Attention cependant au résultat ; la calculatrice affiche :

$$1{,}23693168769$$

dont une valeur *approchée* est certes 1,24, mais cette dernière n'est pas la valeur *exacte*. Par conséquent, la réponse $\boxed{\text{c}}$ n'est pas la bonne.

Par élimination, on exclut les réponses $\boxed{\text{a}}$ et $\boxed{\text{b}}$. Il nous reste donc que la dernière proposition. On vérifie tout de même qu'une valeur approchée de $\sqrt{1{,}53}$ est bien la valeur affichée par la calculatrice.

2 **(a)** Réponse $\boxed{\text{d}}$. En effet, d'après le cours,

$$E(S_{100}) = 100 \times E(X) = 100 \times 2{,}3 = 230.$$

(b) Réponse $\boxed{\text{b}}$. En effet, d'après le cours,

$$V(S_{100}) = 100 \times V(X) = 100 \times \sigma(X)^2 = 100 \times 1{,}53 = 153.$$

(c) Réponse $\boxed{\text{a}}$. En effet, d'après le cours,

$$E(M_{100}) = \frac{1}{100}E(S_{100}) = 2{,}3.$$

(d) Réponse $\boxed{\text{d}}$. En effet, d'après le cours,

$$\sigma(M_{100}) = \sqrt{\frac{1}{100} \times V(S_{100})} = \frac{\sigma(S_{100})}{100} = \frac{\sqrt{1{,}53}}{10}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

3 V/F Vérification de connaissances

Énoncé p. 358

1 *Vrai*. D'après la formule du calcul de l'espérance, si X ne prend que des valeurs positives, l'espérance est obtenue par produit puis somme de quantités positives. Donc $E(X) \geqslant 0$.

2 *Faux*. Contre-exemple : la variable aléatoire X qui prend la valeur -1 avec une probabilité de $0{,}1$ et la valeur 1 avec une probabilité de 0,9 a pour espérance $E(X) = 0{,}1 \times (-1) + 0{,}9 \times 1 = 0{,}8$. Donc $E(X) > 0$, mais X prend une valeur négative.

3 *Faux*. Pour ajouter deux variances, il est nécessaire que les deux variables soient indépendantes, ce qui n'est pas précisé ici.

4 V/F Inégalités de concentration

Énoncé p. 358

1 *Faux*. Selon l'inégalité de Markov, $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$, ce qui donne dans notre cas :

$$P(X \geqslant 10) \leqslant \frac{9}{10}.$$

2 *Vrai*. En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$$

ce qui donne dans notre cas :

$$P\big(|X - 7| \geqslant 18\big) \leqslant \frac{9}{18^2}$$

soit :

$$P\big(|X - 7| \geqslant 18\big) \leqslant \frac{1}{36} < 0{,}028.$$

3 *Vrai*. Notons X_k le nombre de points lors du k-ième tirage ($X_k = 0$ ou $X_k = 1$).

C'est une variable de Bernoulli d'espérance $\mu = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8} = \dfrac{125}{1\ 000}$ et de variance $\sigma^2 = \dfrac{1}{8}\left(1 - \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{7}{64}$. D'après l'inégalité de concentration (les X_k étant implicitement indépendantes),

$$\begin{aligned}
&P\left(|X_1 + \cdots + X_{1\ 000} - 125| \geqslant 15\right)\\
&= P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_{1\ 000}}{1\ 000} - \frac{125}{1\ 000}\right| \geqslant \frac{15}{1\ 000}\right)\\
&\leqslant \frac{\frac{7}{64}}{1\ 000 \times \left(\frac{15}{1\ 000}\right)^2}\\
&< 0{,}49\\
&< 0{,}5.
\end{aligned}$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

5 Pile ou Face

Énoncé p. 359

Lycée Voltaire, Paris

Le lancer d'une pièce équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,5 dont le succès est « Obtenir Face ». Si on répète le lancer trois fois, de façons indépendantes, la variable Y qui donne le nombre de fois y_i où Face est obtenu suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0{,}5)$.
En notant x_i les valeurs de la variable aléatoire X, on peut dresser le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\binom{3}{0}0{,}5^3$	$\binom{3}{1}0{,}5^3$	$\binom{3}{2}0{,}5^3$	$\binom{3}{3}0{,}5^3$
x_i	-3	0	3	6
$P(X=x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = -3 \times 0{,}125 + 3 \times 0{,}375 + 6 \times 0{,}125 = 1{,}5.$$

6 Jeu télévisé

Énoncé p. 359

Lycée Édouard Branly, Nogent-sur-Marne

1 X est la variable aléatoire représentant le nombre de points à l'issue de la première manche.

Il y a 4 boules portant un numéro multiple de 5 : 5, 10, 15 et 20.

Notons A l'événement : « la boule porte le numéro 5, 10, 15 ou 20 ».

Pour la première boule, il y a 4 chances sur 20 de choisir une boule dont le numéro est un multiple de 5, donc $P(A) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$.

En revanche, pour la seconde boule, il ne reste plus que 19 boules. Donc si l'événement A est réalisé pour la première boule, il reste 3 boules adéquates pour la seconde, d'où une probabilité de $\dfrac{3}{19}$. Un raisonnement analogue nous donne les autres probabilités.

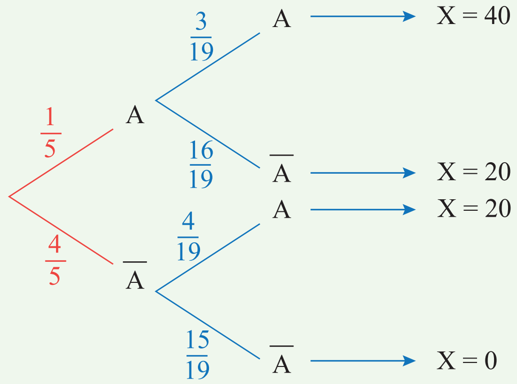
On peut alors représenter la situation avec l'arbre page suivante.

On peut alors donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau :

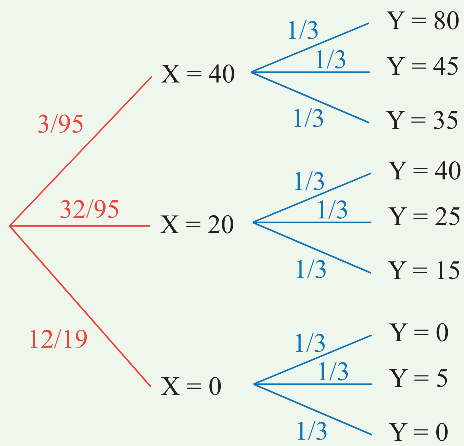
$X=k$	0	20	40
$P(X=k)$	$\dfrac{4}{5}\times\dfrac{15}{19}=\dfrac{12}{19}$	$1-\dfrac{12}{19}-\dfrac{3}{95}=\dfrac{32}{95}$	$\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{19}=\dfrac{3}{95}$

Ainsi,

$$E(X) = 20 \times \frac{32}{95} + 40 \times \frac{3}{95} = 8.$$



2 On peut illustrer la situation à l'aide d'un arbre :



À l'aide du principe multiplicatif, on obtient alors la loi de probabilité de Y suivante :

$Y = k$	0	5	15	25	35	40	45	80
$P(Y = k)$	$\frac{8}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{32}{285}$	$\frac{32}{285}$	$\frac{1}{95}$	$\frac{32}{285}$	$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{95}$

On a ainsi :

$$E(Y) = 5 \times \frac{4}{19} + \cdots + 80 \times \frac{1}{95} = \frac{668}{57}.$$

3 Par définition,

$$G = 100Y$$

donc :

$$\begin{aligned} E(G) &= E(100Y) \\ &= 100E(Y) \\ &= \frac{66\,800}{57} \\ &\approx 1\,172. \end{aligned}$$

L'organisateur ou l'organisatrice de ce jeu peut donc espérer perdre en moyenne 1 172 €... s'il programme un grand nombre de fois le jeu.

4 $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0{,}2)$ donc $E(Z) = 5 \times 0{,}2 = 1$, ce qui signifie qu'en moyenne, le ou la candidat.e. répond correctement à une seule question, et donc qu'il ou elle perd en moyenne 800 €.

Ainsi, le gain moyen final est :

$$E(G) - 800 \approx 1\,172 - 800 \approx 372\text{ €}.$$

7 Lancer de dé

Énoncé p. 360

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit une loi binomiale de paramètres 3 600 et $\frac{1}{6}$. On sait donc que :

$$E(S) = \frac{1}{6} \times 3\,600 = 600 \qquad \text{et} \qquad V(S) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times 3\,600 = 500.$$

De plus,

$$480 < S < 720 \iff -120 < S - 600 < 120 \iff |S - 600| < 120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$P(|S - 600| \geqslant 120) \leqslant \frac{500}{120^2} \leqslant 0{,}035.$$

On en déduit que $P(480 < S < 720) \geqslant 1 - 0{,}035$, soit :

$$P(480 < S < 720) \geqslant 0{,}965.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse strictement entre 480 et 720 fois au cours de ces 3 600 lancers est supérieure à 0,96.

8 Usine de pièces

Énoncé p. 360

Lycée Henri IV, Paris

1 Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces.

En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient :

$$P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{E(X)}{75}$$

soit :

$$P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{2}{3}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

2 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|X - 50| \geqslant 25) \leqslant \frac{V(X)}{25^2}$$

soit :

$$P(|X - 50| \geqslant 25) \leqslant \frac{5^2}{25^2}$$

et donc :

$$P(|X - 50| \geqslant 25) \leqslant 0{,}04.$$

Ainsi, $P(X \geqslant 75) \leqslant 0{,}04$.

9 Auto-école

Énoncé p. 360

Lycée Michelet, Marseille

1 En considérant l'épreuve consistant à regarder si un candidat a son permis dès la première tentative, épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est $p = 0{,}747$, on répète de *manière indépendante* 10 fois cette épreuve. Donc, d'après le cours, le nombre de succès à l'issue de cette succession d'épreuves suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ (nombre de fois que l'on répète l'épreuve de Bernoulli) et $p = 0{,}747$.

2 À la calculatrice, on trouve :

$$P(X \geqslant 6) \approx 0{,}918.$$

Cela signifie que la probabilité qu'au moins 6 candidats sur 10 ait leur permis dès la première fois est environ égale à 0,918.

3 D'après le cours,

$$E(X) = n \times p = 7{,}47 \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p) \approx 1{,}890.$$

4 D'après l'énoncé,

$$Z = X + Y.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 7{,}47 + 22{,}53 = 30.$$

De plus, X et Y étant deux variables aléatoires indépendantes,

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 1{,}89 + 9{,}81 = 11{,}7.$$

5 La probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative s'exprime de la manière suivante :

$$P\big[(Z < 20) \cup (Z > 40)\big] = 1 - P(20 \leqslant Z \leqslant 40).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\forall\, \delta > 0,\ P(|Z - E(Z)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(Z)}{\delta^2}.$$

Les bornes de l'encadrement « $20 < Z < 40$ » dont distantes de 10 de $E(Z)$, ce qui nous encourage à prendre $\delta = 10$:

$$\begin{aligned} & P(|Z-30| \geqslant 10) \leqslant \frac{11{,}7}{10^2} \\ \iff & P(|Z-30| \geqslant 10) \leqslant 0{,}117 \\ \iff & -P(|Z-30| \geqslant 10) \geqslant -0{,}117 \\ \iff & 1-P(|Z-30| \geqslant 10) \geqslant 1-0{,}117 \\ \iff & P(|Z-30| \geqslant 10) \leqslant 0{,}117. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est bien inférieure à 0,12.

10 Nombre de tirages

Énoncé p. 361

Lycée Jean Monod, Clamart

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, considérons l'événement : « une boule rouge est tirée lors du k-ième tirage ».

Notons alors X_k la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges obtenues lors du k-ième tirage. X_k suit la loi de Bernoulli de probabilité $\frac{2}{5}$, a pour espérance $\mu = \frac{2}{5} = 0{,}4$ et pour variance $\sigma^2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 0{,}24$.

La proportion de boules rouges obtenues après n tirages est :

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

On cherche donc la première valeur de n à partir de laquelle :

$$P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}05) \leqslant 0{,}95.$$

L'inégalité de concentration nous dit que, pour $\delta = 0{,}05$:

$$P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{0{,}24}{0{,}0025n}.$$

Une valeur de n satisfaisante est donc la plus petite valeur de n telle que :

$$\begin{aligned} \frac{0{,}24}{0{,}0025n} \leqslant 0{,}05 & \iff \frac{0{,}0025n}{0{,}24} \geqslant \frac{1}{0{,}05} \\ & \iff 0{,}0025n \geqslant \frac{0{,}24}{0{,}05} \\ & \iff n \geqslant \frac{0{,}24}{0{,}05 \times 0{,}0025} \\ & \iff n \geqslant 1\,920. \end{aligned}$$

Ce dernier résultat nous assure à 95% que la proportion de boules rouges tirées se trouve dans l'intervalle $]0{,}35; 0{,}45[$.

CORRIGÉS

Remarque : si l'on effectue des simulations de cette expérience, on peut se rendre compte que l'on obtient une proportion dans l'intervalle pour des valeurs de n plus petites. Il est donc important de se souvenir que l'inégalité de concentration nous assure une valeur de n adéquate mais qu'elle n'est pas toujours minimale.

11 Don de sang

Énoncé p. 361

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-fossés

1 La variable aléatoire M_n représente ici le nombre *moyen* de donneurs universels sur les n collectes.

2 D'après la linéarité de l'espérance,

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times n \times E(X_1) = E(X_1) = 7{,}14.$$

3 Les variables X_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sont indépendantes donc :

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times V(X_1) = \frac{6{,}63}{n}.$$

4 D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall\, \delta > 0,\ P(|M_n - E(M_n)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(M_n)}{\delta^2}.$$

Entre 7 (la borne inférieure de l'encadrement « $7 < M_n < 7{,}28$ ») et $E(M_n) = 7{,}14$, il y a un écart de 0,14. On prend alors $\delta = 0{,}14$:

$$\begin{aligned}
&P(|M_n - 7{,}14| \geqslant 0{,}14) \leqslant \frac{6{,}63}{0{,}14^2 n}\\
\iff\ & 1 - P(|M_n - 7{,}14| < 0{,}14) \leqslant \frac{6{,}63}{0{,}0196n}\\
\iff\ & 1 - P(-0{,}14 < M_n - 7{,}14 < 0{,}14) \leqslant \frac{6{,}63}{0{,}0196n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff\ & 1 - P(-0{,}14 + 7{,}14 < M_n < 0{,}14 + 7{,}14) \leqslant \frac{6{,}63}{0{,}0196n}\\
\iff\ & 1 - P(7 < M_n < 7{,}28) \leqslant \frac{6{,}63}{0{,}0196n}\\
\iff\ & P(7 < M_n < 7{,}28) \geqslant 1 - \frac{6{,}63}{0{,}0196n}.
\end{aligned}$$

On souhaite : que $P(7 < M_n < 7{,}28) \geqslant 0{,}95$ donc en prenant n tel que :

$$1 - \frac{6{,}63}{0{,}0196n} \geqslant 0{,}95,$$

on aura répondu à la question.

$$\begin{aligned}1-\frac{6{,}63}{0{,}0196n}\geqslant 0{,}95 &\iff 0{,}0196n-6{,}63\geqslant 0{,}95\times 0{,}0196n\\ &\iff 0{,}0196\times 0{,}05n\geqslant 6{,}63\\ &\iff n\geqslant \frac{6{,}63}{0{,}0196\times 0{,}05}\geqslant 6765{,}3.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geqslant 6\,766$, nous sommes assurés que :

$$P(7 < M_N < 7{,}28) > 0{,}95.$$

12 Marche aléatoire

Énoncé p. 362

Lycée Notre-Dame du Grandchamp, Versailles

1 Regardons les premières valeurs de S_n :

- $S_1 \in \{-1;\ 1\}$ car X_1 ne peut prendre pour valeurs que -1 ou 1 ;
- $S_2 \in \{-1-1;\ -1+1;\ 1-1;\ 1+1\}$ soit $S_2 \in \{-2;\ 0;\ 2\}$;
- $S_3 \in \{-3;\ -1;\ 1;\ 3\}$.

On s'aperçoit que S_n est la position à laquelle nous nous trouvons dans $\mathbb{Z}$ à la fin de l'étape n.

2 $$\begin{aligned}\mu = E(X_k) &= 1\times P(X_k=1)+(-1)\times P(X_k=-1)\\ &= 1\times p+(-1)\times(1-p)\\ &= 2p-1.\end{aligned}$$

3 $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ et d'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres),

$$\forall\,\delta>0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geqslant\delta\right)=0$$

Cela signifie donc que :

$$\forall\,\delta>0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-(2p-1)\right|>\delta\right)=0.$$

13 Particules émises

Énoncé p. 362

Lycée Teilhard de Chardin, Saint-Maur-des-Fossés

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X-10^2|\geqslant 10^3-10^2)\leqslant \frac{V(X)}{(10^3-10^2)^2}$$

pour trouver finalement :

$$P(|X-10^2|\geqslant 10^3-10^2)\leqslant 0{,}000\,123\,456\,790\,123.$$

CORRIGÉS

Ainsi, $P(X \geqslant 10^3) = P(X - 10^2 \geqslant 10^7 - 10^2)$

$$P(|X - 10^2| \geqslant 10^3 - 10^2) \leqslant 0{,}000\,124.$$

14 Pièces défectueuses

Énoncé p. 362

Lycée Hoche, Versailles

1 X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Ainsi, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;\, p)$. On en déduit alors que :

$$E(X_n) = np \qquad \text{et} \qquad V(X_n) = np(1-p).$$

2 D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall\, \delta > 0, \quad P\big(|X_n - np| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{np(1-p)}{\delta^2}.$$

Or,

$$|X_n - np| \geqslant \delta \iff \left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \frac{\delta}{n}$$

En posant $\varepsilon = \dfrac{\delta}{n}$, on obtient alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2}$$

que l'on peut aussi écrire, en simplifiant par n le dernier membre, sous la forme :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2} p(1-p).$$

De plus, la fonction $p \mapsto p(1-p)$ définie sur $[0;\, 1]$ est une fonction de degré 2 admettant un maximum pour $p = \dfrac{1}{2}$ qui vaut $\dfrac{1}{4}$, donc :

$$p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}.$$

L'inégalité devient alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3 On cherche ici un entier n tel que :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geqslant 0{,}95$$

que l'on peut aussi écrire, en considérant l'événement contraire :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant 0{,}05.$$

D'après l'inégalité obtenue à la question précédente, il suffit donc de trouver un entier n tel que :

$$\frac{1}{4n\left(10^{-2}\right)^2} \leqslant 0{,}05.$$

ce qui revient à prendre n tel que $n \geqslant \dfrac{1}{4 \times 0{,}05 \times (10^{-2})^2}$, soit $n \geqslant 500$.

15 Dans le magasin

Énoncé p. 363

Lycée Carnot, Paris

1 X_1 soit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0{,}165)$ donc, d'après le cours,

$E(X_1) = 20 \times 0{,}165 = 3{,}3$ et $V(X_1) = E(X_1) \times (1 - 0{,}165) = 2{,}7555$.

2 Par linéarité de l'espérance,

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3{,}3 = 9{,}9.$$

Les variables X_1, X_2 et X_3 étant indépendantes, d'après le cours, on a :

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2{,}7555 = 8{,}2665.$$

3 La probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est :

$$\begin{aligned} P(6 < S < 14) &= P(6 - 10 < S - 10 < 14 - 10) \\ &= P(-4 < S - E(S) < 4) \\ &= P(|S - E(S)| < 4) \\ &= 1 - P(|S - E(S)| \geqslant 4). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|S - E(S)| \geqslant 4) \leqslant \frac{V(S)}{4^2} \leqslant \frac{8{,}2665}{16} \leqslant 0{,}51665625.$$

D'où :

$$1 - P(|S - E(S)| \geqslant 4) \geqslant 1 - 0{,}51665625 \geqslant 0{,}48334375.$$

Ainsi, $P(6 < S < 14) > 0{,}48$.

16 Combien de lancers de dé ?

Énoncé p. 363

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de « 1 » obtenus.

CORRIGÉS

X suit alors la loi $\mathcal{B}\left(n;\frac{1}{6}\right)$ et a donc une espérance égale à $\dfrac{n}{6}$ et une variance égale à $np(1-p)=\dfrac{5n}{36}$. On nous demande ici de trouver un entier n tel que :

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\begin{aligned}
&\forall\,\delta>0,\ P\left(\left|X-\frac{n}{6}\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{5n}{36\delta^2}\\
&\iff P\left[\left(X-\frac{n}{6} \leqslant -\delta\right) \cup \left(X-\frac{n}{6} \geqslant \delta\right)\right] \leqslant \frac{5n}{36\delta^2}\\
&\iff 1-P\left(-\delta \leqslant X-\frac{n}{6} \leqslant \delta\right) \leqslant \frac{5n}{36\delta^2}\\
&\iff P\left(-\delta \leqslant X-\frac{n}{6} \leqslant \delta\right) \geqslant 1-\frac{5n}{36\delta^2}.
\end{aligned}$$

On aimerait arriver à une inégalité avec $P\left(0 \leqslant X \leqslant \dfrac{n}{3}\right)$; cela nous pousse à prendre $\delta=\dfrac{n}{6}$ pour obtenir :

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant 1-\frac{5}{n}.$$

Ainsi, il suffit de choisir un n tel que :

$$1-\frac{5}{n} \geqslant \frac{1}{2} \iff n \geqslant 10.$$

Nous sommes donc assurés que pour $n \geqslant 10$, notre probabilité est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

Pour $n=3$, on trouve que $P(X \leqslant 1)=\displaystyle\sum_{i=0}^{1}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \approx 0.926$, et on constate que la probabilité est supérieure à $\dfrac{1}{2}$. Cela pourrait nous faire croire que le résultat précédent est faux, mais il n'en est rien. En effet, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous permet uniquement d'affirmer que la probabilité est bien supérieure à $\dfrac{1}{2}$ pour $n \geqslant 10$ sans nous assurer que $n=10$ est la valeur minimale...

17 Fabrique de jouets

Énoncé p. 363

Baccalauréat Asie 2025, sujet 1

1 S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}95$ donc son espérance est :

$$E(S_n)=n\times p=0{,}95n.$$

Sa variance est :

$$V(S_n) = 0{,}95 \times (1 - 0{,}95) \times n = 0{,}0475n.$$

2 On prend $n = 150$ dans cette question.

(a) À la calculatrice, on trouve :

$$P(S_{150} = 145) \approx 0{,}109.$$

Cela signifie que la probabilité qu'il y ait 145 jouets ayant réussi le test de fabrication est d'environ 10,9%.

(b) 94% de 150 vaut 141. On cherche donc (à la calculatrice) :

$$P(S_{150} \geqslant 141) \approx 0{,}781.$$

3
- Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \times E(S_n) = \frac{1}{n} \times n \times p = p = 0{,}95.$$

- Par propriété de la variance, on a :

$$V(F_n) = \frac{1}{n^2} \times V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times p \times (1-p) = \frac{0{,}95 \times 0{,}05}{n} = \frac{0{,}0475}{n}.$$

4 Le théorème de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\forall \delta > 0,\ P(|F_n - E(F_n)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(F_n)}{\delta^2}$$

soit ici, en prenant $\delta = 0{,}02$:

$$P(|F_n - 0{,}95| \geqslant 0{,}02) \leqslant \frac{0{,}0475}{0{,}0004n}$$

$$\iff 1 - P(|F_n - 0{,}95| < 0{,}02) \leqslant \frac{0{,}0475}{0{,}0004n}$$

$$\iff 1 - P(-0{,}02 < F_n - 0{,}95 < 0{,}02) \leqslant \frac{0{,}0475}{0{,}0004n}$$

$$\iff 1 - P(0{,}93 < F_n < 0{,}97) \leqslant \frac{0{,}0475}{0{,}0004n}$$

$$\iff P(0{,}93 < F_n < 0{,}97) \geqslant 1 - \frac{0{,}0475}{0{,}0004n}.$$

Une condition suffisante pour que $P(0{,}93 < F_n < 0{,}97) \geqslant 0{,}96$ est que la borne donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vérifie elle-même cette inégalité, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{0{,}0475}{0{,}0004n} \geqslant 0{,}96 &\iff \frac{0{,}0004n - 0{,}0475}{0{,}0004n} \geqslant 0{,}96\\
&\iff 0{,}0004n - 0{,}0475 \geqslant 0{,}96 \times 0{,}0004n\\
&\iff 0{,}0004n - 0{,}96 \times 0{,}0004n \geqslant 0{,}0475\\
&\iff 0{,}00016n \geqslant 0{,}0475\\
&\iff n \geqslant 2\,968{,}75.
\end{aligned}$$

Ainsi, dès que $n \geqslant 2\,969$, on a $P(0{,}93 < F_n < 0{,}97) \geqslant 0{,}96$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Chapitre
12

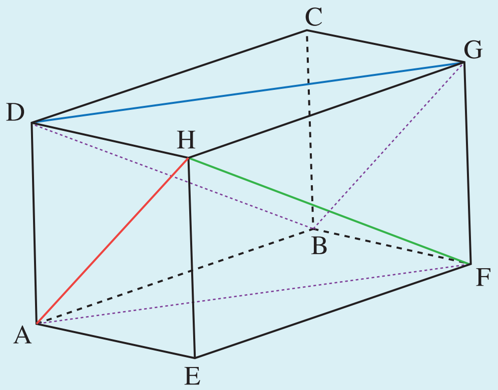
Géométrie vectorielle dans l'espace

Plan du chapitre

1 Droite dans l'espace

Exercice type 1 — Lycée Lafayette, Clermont-Ferrand

Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.



Démontrer que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.

Voir corrigé page 382

1.1 Caractérisation

Propriété 1

Toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace est définie par un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$.
On dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite.
$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

COURS

1.2 Droites parallèles

Définition 1 : vecteurs colinéaires

Deux vecteurs de l'espace sont dits *colinéaires* s'ils ont la même direction.

Définition 2 : droites parallèles

Deux droites de l'espace sont dites *parallèles* si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

ATTENTION

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas nécessairement parallèles.

2 Plan dans l'espace

2.1 Combinaison linéaire de deux vecteurs

Définition 3 : combinaison linéaire de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{w}$ est une *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

2.2 Caractérisation d'un plan dans l'espace

Propriété 2

Tout plan de l'espace est défini par un point A et un couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}, \vec{v})$.
On dit que le plan est dirigé par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque : ainsi, pour tout point M du plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 4 : base et repère d'un plan

Soit un plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.
$(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé une *base* du plan.
$(A; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé un *repère* du plan.

3 Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

3.1 Vecteurs coplanaires

Définition 5

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non deux à deux colinéaires sont dits *coplanaires* si l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

Remarque : si deux des trois vecteurs sont colinéaires alors les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires.

3.2 Plans parallèles

Propriété 3

Soient deux plans de l'espace $\mathcal{P}_1$, dirigé par $(\vec{u_1}, \vec{v_1})$, et $\mathcal{P}_2$, dirigé par $(\vec{u_2}, \vec{v_2})$. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont *parallèles* si $\vec{u_1}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{u_2}$ d'une part, $\vec{u_1}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ d'autre part, sont coplanaires.

3.3 Repère de l'espace

Propriété 4

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un triplet unique de réels $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Définition 6 : repère de l'espace

Un repère de l'espace est défini par un point A et un triplet de 3 vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Propriété 5

Dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Définition 7 : coordonnées d'un point et d'un vecteur de l'espace

Dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ alors $(x;\ y;\ z)$ constitue les coordonnées du point M, mais aussi du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans ce repère.

Les calculs sur les coordonnées dans l'espace se font comme les calculs sur les coordonnées dans le plan.

COURS

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Lafayette, Clermont-Ferrand

Montrons que les deux plans sont dirigés par le même couple de vecteurs :
D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}.$$

$ABCDEFGH$ est un pavé droit donc :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$$

et finalement :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}.$$

On montre de même que $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$.

Par leur position sur le pavé, les points A, H et F ne sont pas alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (AFH). De même, les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$ dirigent le plan (BDG). Les deux plans étant dirigés par le même couple de vecteurs, ces plans sont parallèles.

Voir énoncé page 379

4 Représentations paramétriques

Exercice type 2 — Lycée René Descartes, Cournon

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point A de coordonnées $(2\,;-1\,;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(2\,;2\,;1)$.
$\mathcal{P}$ est le plan parallèle à $\mathcal{D}$, passant par les points $B(0\,;1\,;2)$ et $C(-2\,;3\,;2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
2. Déterminer un repère du plan $\mathcal{P}$ et en déduire une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.
3. Le plan $\mathcal{P}'$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2m + n + 5 \\ y = 2m + 1 \\ z = m + n - 2 \end{cases} \quad \text{avec } m \text{ et } n \text{ dans } \mathbb{R}$$

est-il parallèle au plan $\mathcal{P}$?

Voir corrigé page 383

4.1 Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(a\,;b\,;c)$.

Théorème 1

$$M(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

⚠ ATTENTION

Cette représentation paramétrique n'est pas unique et dépend du vecteur directeur et du point choisi sur la droite !

Exemple : la droite caractérisée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 7t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

passe par le point $A(-1; 2; 5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3; -1; 7)$.

4.2 Représentation paramétrique d'un plan

Théorème 2

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ de repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$. Le point A a pour coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(a ; b ; c)$ et $(a' ; b' ; c')$.
Alors le système :

$$\begin{cases} x = ka + ta' + x_A \\ y = kb + tb' + y_A \\ z = kc + tc' + z_A \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

est appelé une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

➜ Solution de l'exercice type 2 — **Lycée René Descartes, Cournon**

1 Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x = 2k + 2 \\ y = 2k - 1 \\ z = k + 1 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

...

COURS

Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée René Descartes, Cournon

2 Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-2-0\,;\,3-1\,;\,2-2)$, c'est-à-dire $(-2\,;\,2\,;\,0)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Le plan $\mathcal{P}$ admet donc comme repère $(B\,;\,\vec{u}, \overrightarrow{BC})$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donc :

$$\begin{cases} x = 2t - 2t' \\ y = 2t + 2t' + 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}.$$

3 Le plan $\mathcal{P}'$ est dirigé par le couple de vecteurs de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,1)$ et $(1\,;\,0\,;\,1)$. Le premier vecteur est le vecteur $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(1\,;\,0\,;\,1)$ est-il coplanaire à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$? En d'autres termes, existe-t-il deux réels a et b tels que $\vec{v} = a\vec{u} + b\overrightarrow{BC}$? Cette équation vectorielle donne un système de 3 équations dans $\mathbb{R}$, à deux inconnues a et b :

$$\begin{cases} 1 = 2a - 2b \\ 0 = 2a + 2b \\ 1 = a \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution.

Le vecteur $\vec{v}$ ne peut pas s'exprimer en fonction de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$, donc le plan $\mathcal{P}'$ ne peut pas être dirigé par ces deux vecteurs. Il n'est donc pas parallèle à $\mathcal{P}$.

Voir énoncé page 382

1 V/F Points alignés ou coplanaires

10 min Corrigé p. 390

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Les points $A(1 ; 2 ; 1)$, $B(0 ; 2 ; 2)$ et $C(0 ; 0 ; 5)$ sont alignés.
2. Les points $A(5 ; 4 ; 2)$, $B(1 ; 2 ; 2)$, $C(3 ; 5 ; 2)$ et $D(-5 ; -2 ; 2)$ sont coplanaires.
3. On considère les quatre points $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(-1 ; 2 ; 5)$, $C(2 ; 4 ; 6)$ et $D(5 ; 1 ; 0)$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
4. Les quatre points de la question précédente sont alignés.

2 V/F Vecteurs colinéaires et coplanaires

10 min Corrigé p. 390

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ et $\vec{w} + \vec{v}$ ne sont pas coplanaires.
2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
3. Les vecteurs $\vec{w} - \vec{u}$, $\vec{w} + \vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ ne sont pas coplanaires.
4. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{w} + \vec{v}$ et $\vec{w} - \vec{v}$ ne sont pas coplanaires.

3 V/F Représentation paramétrique d'une droite

10 min Corrigé p. 391

L'espace est rapporté au repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan $\mathcal{P}$ de repère $(O ; \vec{i}, \vec{j} + \vec{k})$, ainsi que la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Le point M de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
2. Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
3. Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
4. La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

INTERROS

4 Recherche de points ★ 10 min

Corrigé p. 391

Lycée Marie Curie, Sceaux

Existe-t-il cinq points non coplanaires A, B, C, D et E tels que :

$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD} \quad ?$$

5 Plan et représentation paramétrique ★ 15 min

Corrigé p. 391

Lycée Guynemer, Compiègne

Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(-2\,;\ 2\,;-1)$, $B(2\,;0\,;3)$, $C(-2\,;0\,;0)$, $D(0\,;-4\,;1)$ et $E(-2\,;-1\,;-2)$.

1. Vérifier que les points A, B et C déterminent bien un plan.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est colinéaire au vecteur $-\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
   Que peut-on en déduire pour la droite (DE) ?
3. Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).
   Le point D appartient-il à ce plan ?
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

6 Repère de l'espace ★ 20 min

Corrigé p. 392

Lycée La Bruyère, Versailles

L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2\,;4\,;-1)$, $B(3\,;1\,;2)$, $C(1\,;0\,;1)$, $D(3\,;2\,;1)$ et $E(1\,;2\,;0)$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
   Où se situe le point M ?
3. Déterminer les réels a, b et c tels que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}$.
   Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$?

7 Positions relatives de deux droites ★ 20 min

Corrigé p. 394

Lycée La Bruyère, Versailles

On considère la droite (d) de représentation paramétrique :

$$(d)\ :\ \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner les coordonnées d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d).

2 Donner une représentation paramétrique de la droite (d') passant par le point $B(3\ ;\ -3\ ;\ -6)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

3 Les droites (d) et (d') sont-elles coplanaires ?

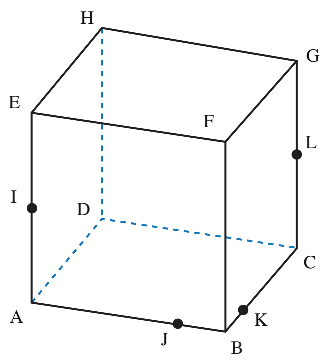
4 Démontrer qu'il existe un point C de (d) et un point D de (d') tels que le milieu du segment $[CD]$ soit le point I de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$.

8 Dans un cube

★★ 25 min Corrigé p. 395

Lycée La Bruyère, Versailles

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AE] et L est le milieu de [CG].
J et K sont les points tels que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.



Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IJ), (KL) et (BF) sont concourantes.

1 **(a)** Montrer que le quadrilatère AILC est un parallélogramme.

(b) Démontrer que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IL}$.

(c) Justifier que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point qu'on appellera R.

2 **(a)** Quelle est l'intersection des plans (AEB) et (BCG) ?

(b) Démontrer que R appartient à la droite (BF) et conclure.

9 Alignement de points

★★ 30 min Corrigé p. 396

Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

ABCDEFGH est un cube dans lequel :

- O est le milieu de $[AB]$;
- M et N sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$;
- I est le milieu du segment $[MN]$.

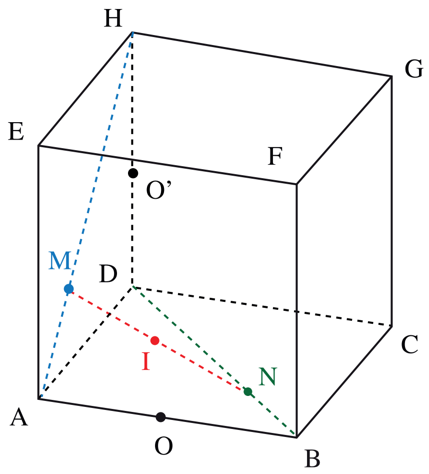
1 Construire le point K tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$.

2 Étudier les positions relatives des droites suivantes en justifiant :

(a) (AM) et (BK).

(b) (EO) et (FG).

(c) (EM) et (AD).



3 Démontrer que : $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

En déduire que la droite (MN) est parallèle à un plan à préciser.

4 Démontrer que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$.

5 On admet que $\overrightarrow{O'I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DN}$.

En déduire que les points O, I et O' sont alignés.

Objectif bac

10 Coplanarité

★★ 20 min Corrigé p. 399

Baccalauréat Amérique du sud 2025, sujet 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1 On considère la droite Δ_1 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ainsi que la droite Δ_2 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

b Les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

c Les droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes.

2 On considère les points A(3; 2; 1), B(7; 3 ; 1), C(−1 ; 4 ; 5) et D(−3 ; 3 ; 5).

a Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b Les points A, B et C sont alignés.

c $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3 On considère les points E(−1; 0; 5) et F(3; 2; −1).

Une représentation paramétrique de la droite (EF) est :

a $\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2 - k \\ z = -1 + 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$

b $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 + 2k \\ z = -3 + k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$

c $\begin{cases} x = -2 - k \\ y = -1 \\ z = 3 + 5k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$

1 V/F Points alignés ou coplanaires

Énoncé p. 385

1 *Faux*. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-1\ ;0\ ;1)$ et celles du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1\ ;-2\ ;4)$. Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

2 *Vrai*. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-4\ ;-2\ ;0)$, celles du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-2\ ;1\ ;0)$ et celles du vecteur $\overrightarrow{AD}$ sont $(-10\ ;-6\ ;0)$. Les trois vecteurs peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Ils sont donc coplanaires et les quatre points appartiennent au plan passant par A et dirigé par le couple $(\vec{i},\vec{j})$.

3 *Vrai*. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2\ ;2\ ;4)$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(3\ ;-3\ ;-6)$. Donc $CD = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AB}$. Les droites (AB) et (CD) sont dirigées par des vecteurs colinéaires, donc elles sont parallèles.

4 *Faux*. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1\ ;4\ ;5)$ et n'est donc pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés, il en est par conséquent de même pour les quatre points A, B, C et D.

2 V/F Vecteurs colinéaires et coplanaires

Énoncé p. 385

Soit A un point de l'espace. $(A\ ;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme un repère de l'espace.

1 *Vrai*. Les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car si $\vec{u}+\vec{w} = k(\vec{u}+\vec{v})$, alors on aurait $(k-1)\vec{u}+k\vec{v}-\vec{w} = \vec{0}$. L'unicité de la décomposition d'un vecteur selon les trois vecteurs de la base donnerait $k=1$ et $k=0$, ce qui est impossible.
On cherche ensuite à montrer que $\vec{w}+\vec{v} = a(\vec{u}+\vec{v})+b(\vec{u}+\vec{w})$ est impossible. En effet, dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, cela donnerait le système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

qui n'a pas de solution.

2 *Vrai*. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a\vec{u}+b\vec{v}$.

3 *Faux*. La relation $\vec{u}+\vec{v} = (\vec{w}+\vec{v})-(\vec{w}-\vec{u})$ montre que les vecteurs sont coplanaires.

4 *Vrai*. Si c'était le cas, il existerait deux réels a et b tels que :

$$\vec{u} = a\big(\vec{w}+\vec{v}\big)+b\big(\vec{w}-\vec{u}\big) = (a+b)\vec{w}+(a-b)\vec{v},$$

ce qui est impossible car $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires deux à deux.

3 V/F Représentation paramétrique d'une droite

Énoncé p. 385

1 *Vrai*. Ce point correspond à $t = 1$.

2 *Vrai*. D'après la représentation paramétrique donnée, le vecteur de coordonnées $(2\ ;-1\ ;-1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ donc son opposé, le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(-2\ ;1\ ;1)$, est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

3 *Faux*. Les coordonnées de $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles à celles du vecteur directeur de $\mathcal{D}$ donc ce n'est pas un vecteur directeur.

4 *Vrai*. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est égal à $\vec{u} = (\vec{j} + \vec{k}) - 2\vec{i}$. Il est donc coplanaire à un couple de vecteurs qui dirige $\mathcal{P}$. La droite $\mathcal{D}$ est donc parallèle à $\mathcal{P}$.

4 Recherche de points

Énoncé p. 386

Lycée Marie Curie, Sceaux

La relation $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$ implique que les points B, C et E sont sur la droite (BE) ou confondus si $B = E$.
La relation $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD}$ implique que les points A, D et E sont sur la droite (AE) ou confondus si $A = E$.
Donc si $B = E$ ou $A = E$, on a respectivement $B = C$ ou $A = D$; il y a au maximum trois points distincts qui sont donc coplanaires. Sinon, les points sont situés dans le plan (ABE) puisqu'ils sont sur des droites de ce plan. On ne peut donc pas trouver de points non coplanaires qui vérifient la relation.

5 Plan et représentation paramétrique

Énoncé p. 386

Lycée Guynemer, Compiègne

1 $\overrightarrow{AB}(4\ ;-2\ ;4)$ et $\overrightarrow{AC}(0\ ;-2\ ;1)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc $(A\ ;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ définit bien un plan.

2 $\overrightarrow{DE}(-2\ ;3\ ;-3)$ et $-\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}(-4\ ;6\ ;-6)$ donc :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right).$$

Ces vecteurs sont donc colinéaires, ce qui prouve que la droite (DE) est parallèle au plan (ABC) puisque $(A\ ;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ constitue un repère de ce plan.

Remarque : à ce stade, on ne sait pas si la droite est strictement parallèle au plan (ABC) ou incluse dans ce plan.

3 On connaît deux vecteurs formant une base du plan (ABC). De plus, le point A, par exemple, appartient au plan (ABC) donc une représentation

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

paramétrique du plan (ABC) est :

$$\begin{cases} x &= -2+4t \\ y &= 2-2t-2t' \\ z &= -1+4t+t' \end{cases}, \quad t \text{ et } t' \text{ étant deux réels.}$$

Remarque : on aurait pu aussi utiliser le point B, ou le point C : un plan n'a pas une représentation paramétrique unique.

Pour savoir si D appartient au plan, il faut chercher s'il existe des valeurs de t et t' permettant d'obtenir les coordonnées de D.
On obtient le système :

$$\begin{cases} 0 &= -2+4t \\ -4 &= 2-2t-2t' \\ 1 &= -1+4t+t' \end{cases}, \quad t \text{ et } t' \text{ étant deux réels.}$$

De la première équation, on déduit $t = \dfrac{1}{2}$.

En reportant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient $t' = \dfrac{5}{2}$.

Le deuxième membre de la troisième équation est alors :

$$-1+4\times\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}.$$

Cette troisième égalité n'est pas vérifiée avec les valeurs trouvées pour t et t', donc D n'appartient pas au plan (ABC).

4 La droite (AB) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et passe par le point A, ce qui donne comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -2+4t \\ y &= 2-2t \\ z &= -1+4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Remarque : là encore, on aurait pu utiliser le point B pour obtenir une autre équation paramétrique de la droite (AB) équivalente à celle donnée ici.

6 Repère de l'espace

Énoncé p. 386

Lycée La Bruyère, Versailles

1 On a : $\overrightarrow{AB}(1\,;-3\,;3)$, $\overrightarrow{AC}(-1\,;-4\,;2)$ et $\overrightarrow{AD}(1\,;-2\,;2)$.
Les vecteurs sont coplanaires si et seulement si on peut exprimer l'un d'entre eux, par exemple $\overrightarrow{AD}$, en fonction des deux autres.

On va donc chercher à savoir si on peut trouver deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$.
Si ces réels existent, ils sont solutions du système :

$$\begin{cases} 1 & = k - k' \\ -2 & = -3k - 4k' \\ 2 & = 3k + 2k' \end{cases}$$

obtenu en écrivant que les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ et de $k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$ sont égales.
La première équation donne $k = 1 + k'$, et en reportant dans la deuxième on obtient :

$$-2 = -3 - 3k' - 4k' \Leftrightarrow k' = -\frac{1}{7}.$$

En reprenant la première équation, on obtient donc $k = \dfrac{6}{7}$.
Le second membre de la troisième égalité vaut donc, avec les valeurs de k et k' obtenues, $2 \neq \dfrac{16}{7}$.
Ainsi, on ne peut pas trouver de réels k et k' tels que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$, donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

2 Posons $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$. Alors, $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 & = 3 \\ y-4 & = -2 \\ z+1 & = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 5 \\ y & = 2 \\ z & = 3 \end{cases}$$

Donc $M(5\ ;2\ ;3)$.
Le point M se situe dans le plan (ABC), puisque le vecteur $\overrightarrow{AM}$ s'exprime en fonction des deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

3 $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 & = a - b + c \\ -2 & = -3a - 4b - 2c \\ 1 & = 3a + 2b + 2c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = b - c - 1 \\ -2 & = -3b + 3c + 3 - 4b - 2c \\ 1 & = 3b - 3c - 3 + 2b + 2c \end{cases}$$

CORRIGÉS

$$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = b - c - 1 \\ -7b + c & = -5 \\ 5b - c & = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = b - c - 1 \\ 5b - c & = 4 \\ -2b & = -1 \end{cases}$$

La dernière équation est obtenue en ajoutant la deuxième et la troisième de l'étape précédente.

On obtient donc successivement : $b = \dfrac{1}{2}$, $c = -\dfrac{3}{2}$ et $a = 1$.

D'après le calcul précédent, les coordonnées de E dans le repère $\left(A\ ;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ sont $\left(1\ ;\dfrac{1}{2}\ ;-\dfrac{3}{2}\right)$.

7 Positions relatives de deux droites

Énoncé p. 386

Lycée La Bruyère, Versailles

1 D'après la représentation paramétrique de (d), on sait que le point $A(6\ ;1\ ;1)$ appartient à (d) et que le vecteur $\vec{u}(1\ ;2\ ;-1)$ est un vecteur directeur de (d).

2 Une représentation paramétrique de (d') est :

$$\begin{cases} x = 3 - t' \\ y = -3 + t' \\ z = -6 + 2t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

3 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Nous allons donc vérifier si elles sont sécantes, c'est-à-dire chercher si on peut trouver t et t' tels que :

$$\begin{cases} 6 + t & = 3 - t' \\ 1 + 2t & = -3 + t' \\ 1 - t & = -6 + 2t' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t & = -3 - t' \\ 1 - 6 - 2t' & = -3 + t' \\ 1 + 3 + t' & = -6 + 2t' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = -3 - t' \\ t' = -\frac{2}{3} \\ t' = 10 \end{cases}$$

Comme on ne trouve pas la même valeur de t' dans la deuxième et la troisième équation, on ne peut pas trouver t et t' tels que le système soit vérifié, donc les droites (d) et (d') ne sont pas sécantes.

Par conséquent, elles ne sont pas coplanaires.

4 Les coordonnées du milieu d'un segment sont les demi-sommes des coordonnées des deux extrémités, donc on obtient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{6+t+3-t'}{2} & = 1 \\ \dfrac{1+2t-3+t'}{2} & = -2 \\ \dfrac{1-t-6+2t'}{2} & = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = -7+t' \\ 1-14+2t'-3+t' & = -4 \\ 1+7-t'-6+2t' & = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -7+t' \\ t' = 4 \\ t' = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t' = 4 \end{cases}$$

On a trouvé des valeurs de t et t'.

$t = -3$, donc $C(3\,;-5\,;4)$, et $t' = 4$, donc $D(-1\,;1\,;2)$, en utilisant les représentations paramétriques des deux droites.

MÉTHODE

Il est ici prudent de vérifier que I est bien le milieu du segment $[CD]$, ce qui est le cas.

8 Dans un cube

Énoncé p. 387

Lycée La Bruyère, Versailles

1 **(a)** D'après les propriétés du cube, on a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$. Or, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CG}$, donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CL}$, ce qui prouve que le quadrilatère AILC est un parallélogramme.

(b) $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BK}$ d'après la relation de Chasles (vue en seconde). Donc,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JK} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Or, comme AILC est un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IL}$. On a donc

CORRIGÉS

bien $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IL}$.

(c) D'après la question 1.b, les points I, J, K et L sont coplanaires. De plus, les droites (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles. En effet, $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IL}$ donc $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IK} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KL}\right)$ et donc $\overrightarrow{JI} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{IK} + \frac{1}{4}\overrightarrow{KL}$. Les droites (IK) et (KL) étant sécantes en K, le vecteur ne peut s'exprimer en fonction du vecteur $\overrightarrow{KL}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{JI}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{KL}$.

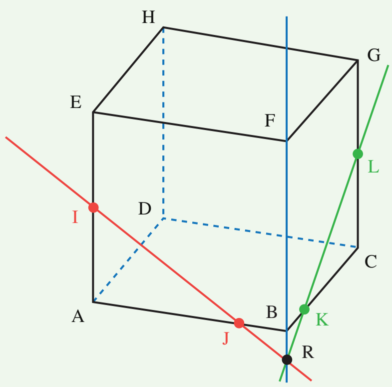
Elles se coupent donc en un point R.

2 **(a)** Les plans (AEB) et (BCG) se coupent suivant la droite (BF).

(b) On connaît trois points appartenant à la fois aux plans (AEB) et (BCG) : le point B et le point F d'après la question 2.a, et le point R d'après la question 1, puisque R est l'intersection d'une droite incluse dans le plan (AEB) et d'une droite incluse dans le plan (BCG).

Comme l'intersection de deux plans non parallèles et non confondus est une droite, les points B, F et R sont alignés, ce qui prouve que R appartient à (BF).

Donc les droites (IJ), (KL) et (BF) sont bien sécantes en R.



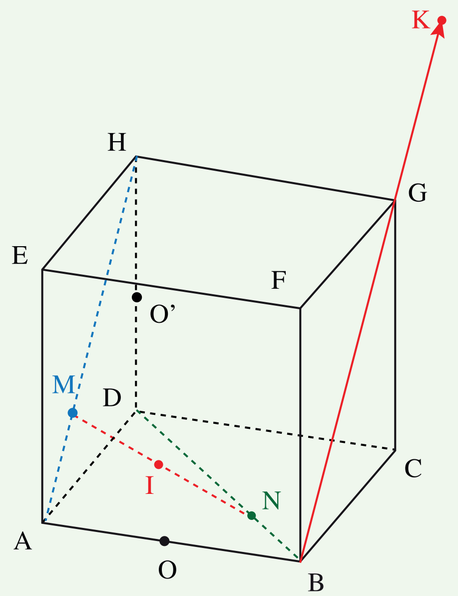
9 Alignement de points

Énoncé p. 387

Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

1 Pour construire le point K tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$, il faut construire la somme $\overrightarrow{BG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$, en rouge sur la figure page ci-contre.

L'extrémité obtenue est alors le point K.



2 **(a)** *Position relative de (AM) et (BK).*

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BG}$ et, par construction, $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires, et donc (AM) et (BK) sont parallèles.

(b) *Position relative de (EO) et (FG).*

$(EO) \subset (EAB)$ et $(FG) \perp (EAB)$.

Donc (EO) et (FG) sont orthogonales.

(c) *Position relative de (EM) et (AD).*

E, M, A et D sont coplanaires. De plus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EM} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM}\\ &= -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AH}\\ &= -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH})\\ &= -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})\\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{EM}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AD}$.

Ainsi, (EM) et (AD) sont sécantes.

CORRIGÉS

3 Utilisons la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}\\ &= -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})\\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{MN}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, c'est-à-dire que (MN) est parallèle au plan engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, soit au plan (AEB).

4 Nous allons ici exprimer $\overrightarrow{OI}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

- $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BN} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN})\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right) + \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\right]\\ &= -\frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)\\ &= -\frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

On en conclut alors que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$.

5 On a d'une part :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'I} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{HM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DN}\\ &= \frac{1}{2} \times (-3)\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2} \times (-3)\overrightarrow{BN}\\ &= -3\overrightarrow{OI}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{O'I}$ sont colinéaires.
Les points O, O' et I sont donc alignés.

10 Coplanarité

Énoncé p. 388

Baccalauréat Amérique du sud 2025, sujet 2

1 • Δ_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ et Δ_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Les premières coordonnées ne sont pas égales alors que les autres le sont, donc les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.
Les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont donc pas parallèles.

• $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -3\times 1+2\times 2+1\times 1 = 2 \neq 0$, donc les vecteurs directeurs ne sont pas orthogonaux, et les droites ne sont pas orthogonales.

• Si les droites sont sécantes, les coordonnées de leur point commun vérifient le système :

$$\begin{cases} 1-3t &= -4+s \\ 4+2t &= 2+2s \\ t &= -1+s \end{cases}$$

En remplaçant t par $-1+s$ dans les deux premières équations on obtient :

$$\begin{cases} 1+3-3s &= -4+s \\ 4-2+2s &= 2+2s \\ t &= -1+s \end{cases} \iff \begin{cases} 1+3-3s &= -4+s \\ 4+-2+2s &= 2+2s \\ t &= -1+s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 8 &= 4s \\ 2+2s &= 2+2s \\ t &= -1+s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 &= s \\ 2+2s &= 2+2s \\ t &= -1+s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 &= s \\ 2+2s &= 2+2s \\ t &= 1 \end{cases}$$

Les droites sont alors sécantes.

Conclusion : la réponse correcte est la réponse **C**.

2 On considère les points A(3 ; 2 ; 1), B(7 ; 3 ; 1), C(−1 ; 4 ; 5) et D(−3 ; 3 ; 5).

• $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

• $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

CORRIGÉS

- A, B, C et D sont coplanaires, c'est-à-dire si par exemple D appartient au plan (ABC) et dans ce cas si $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas des vecteurs colinéaires.

  Avec $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-6\\1\\4\end{pmatrix}$, l'égalité vectorielle précédente se traduit par le système :

$$\begin{cases}-6 &= 4x-4y\\ 1 &= x+2y\\ 4 &= 4y\end{cases} \iff \begin{cases}-6 &= 4x-4\\ 1 &= x+2\\ 1 &= y\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}-2 &= 4x\\ -1 &= x\\ 1 &= y\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}-\frac{1}{2} &= x\\ -1 &= x\\ 1 &= y\end{cases}$$

  Ce système n'a pas de solution. Donc le point D n'appartient pas au plan défini par les points A, B et C ou encore A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Conclusion : la réponse correcte est la réponse $\boxed{\text{a}}$.

3 On calcule :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-0\\-1-5\end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix},$$

La représentation paramétrique donnée dans la proposition $\boxed{\text{a}}$ indique que la droite représentée :

- passe (pour le paramètre $t = 0$) par le point de coordonnées $(3\,;\ 2\,;\ -1)$, autrement dit par F ;
- qu'elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{u}$, donc la droite dont on a la représentation paramétrique en choix $\boxed{\text{a}}$ est dirigée par un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{EF}$.

Conclusion : la réponse correcte est la réponse $\boxed{\text{a}}$.

Chapitre 13

Orthogonalité et distance dans l'espace

Plan du chapitre

1 Produit scalaire et orthogonalité

Exercice type 1 — **Lycée Hoche, Versailles**

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1\ ;-1\ ;0)$, $B(3\ ;0\ ;1)$, $C(1\ ;1\ ;0)$ et $D(3\ ;1\ ;-2)$. On nomme I le milieu de $[AD]$.

1. Démontrer que les droites (AC) et (DC) sont perpendiculaires.
2. Démontrer, par un calcul vectoriel, que pour tout point M de l'espace,
$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2.$$
3. En déduire une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$, et le caractériser.
4. Les points B et C appartiennent-ils à cet ensemble $\mathcal{E}$?

Voir corrigé page 403

1.1 Produit scalaire dans l'espace

Définition 1

Le produit scalaire dans l'espace de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans tout plan contenant ces vecteurs.

Il en découle que le produit scalaire dans l'espace a les mêmes propriétés que le produit scalaire dans le plan. Il faudra seulement penser à introduire la troisième coordonnée lorsque l'on fait du calcul analytique.

COURS

Propriété 1 : expression analytique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé de l'espace, pour tous vecteurs $\vec{u}(x\ ;y\ ;z)$ et $\vec{v}(x'\ ;y'\ ;z')$,
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Propriété 2 : linéarité et symétrie du produit scalaire

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, a et b deux réels. Alors,
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \text{(symétrie)}$$
$$(a\vec{u} + b\vec{v})\cdot\vec{w} = a\,(\vec{u}\cdot\vec{w}) + b\,(\vec{v}\cdot\vec{w}) \qquad \text{(linéarité).}$$

1.2 Norme et distance de deux points

Propriété 3 : norme d'un vecteur

Pour tout vecteur $\vec{u}(x;\ y;\ z)$ de l'espace,
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Propriété 4 : distance entre deux points

Pour tous points A et B de l'espace,
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 \qquad \text{(carré scalaire).}$$

Une sphère étant un ensemble de points équidistants d'un point fixe, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1 : équation cartésienne d'une sphère

Soit $A(x_0\ ;y_0\ ;z_0)$ un point de l'espace et R un réel positif.
La sphère de centre A et de rayon R admet pour équation cartésienne :
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

1.3 Orthogonalité de deux droites

Définition 2 : vecteurs orthogonaux

On dit que deux vecteurs sont *orthogonaux* lorsque leur produit scalaire est nul.

Propriété 5 : caractérisation des droites orthogonales

Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.

1.4 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété 6

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, et $\mathcal{P}$ un plan dirigé par le couple de vecteurs $(\vec{v}, \vec{v'})$. La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v'} = 0$.

Propriété 7

$\mathcal{D}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Alors pour tous points M et N de $\mathcal{P}$ on a :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$

Solution de l'exercice type 1

Lycée Hoche, Versailles

1 $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(0\ ;2\ ;0)$ et $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(-2\ ;0\ ;2)$. On constate donc que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, ce qui signifie que les vecteurs directeurs des droites (AC) et (DC) sont orthogonaux. Les deux droites sont donc orthogonales. Elles sont même perpendiculaires car elles sont sécantes en C.

2 Comme I est le milieu de $[AD]$, on a $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AI}$.
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\\ &= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA}\right) + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IA}\\ &= MI^2 - IA^2\end{aligned}$$

3 Les coordonnées de I étant $(2\ ;0\ ;-1)$, on a :

$$AI = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

En notant $(x\ ;y\ ;z)$ les coordonnées du point M, la condition $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ qui équivaut à $MI^2 - IA^2 = 0$ devient :

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3.$$

C'est l'équation d'une sphère de centre $I(2\ ;0\ ;-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

4 Pour savoir si les points B et C appartiennent à cette sphère, on teste si les coordonnées de ces points vérifient l'équation.

- Pour B : $(3-2)^2 + 0^2 + (1+1)^2 = 5$, donc B n'appartient pas à la sphère.
- Pour C : $(1-2)^2 + 1^2 + (0+1)^2 = 3$, donc le point C appartient à la sphère.

Voir énoncé page 401

COURS

2 Équation cartésienne d'un plan

Exercice type 2 — Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(3\ ;0\ ;0)$, $B(0\ ;6\ ;0)$, $C(0\ ;0\ ;4)$ et $D(-5\ ;0\ ;1)$.

1 **(a)** Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

(b) Déterminer une équation du plan (ABC).

2 **(a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

(b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

(c) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

Voir corrigé page 406

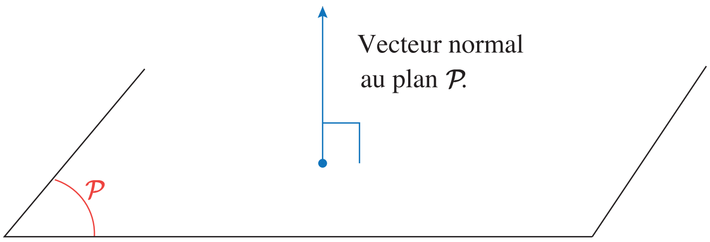
2.1 Vecteur normal à un plan

Définition 3

Soit $\mathcal{P}$ un plan dans l'espace. Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit *vecteur normal* de $\mathcal{P}$ si pour tous points M et N de $\mathcal{P}$ on a :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0.$$

On peut dire aussi que $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\vec{n}$.



2.2 Équation cartésienne d'un plan

Dans cette partie, a, b, c, a', b', c', d et d' sont des réels.

Théorème 2

Soient $A(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ un point de l'espace et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à $\vec{n}$. On a :

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0.$$

Propriété 8

Soit $\mathcal{P}$ un plan. On a l'équivalence suivante :

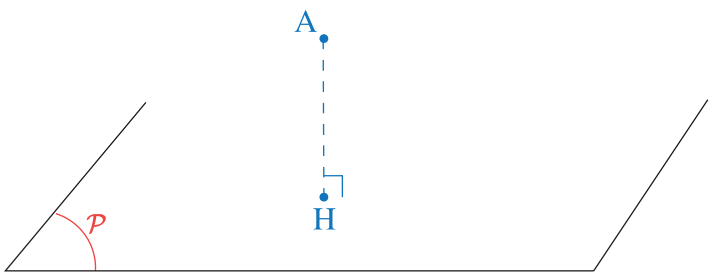
$$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{P} \iff \mathcal{P}\ :\ ax+by+cz=d.$$

Exemple : soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $3x-5y+z-2=0$.
Alors, un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$.

2.3 Projeté orthogonal sur un plan

Définition 4

Soient $\mathcal{P}$ un plan et A un point de l'espace extérieur à $\mathcal{P}$.
Le *projeté orthogonal* de A sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection du plan et de la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A.



COURS

Théorème 3 : distance d'un point à un plan

Soient $\mathcal{P} \ : \ ax + by + cz + d = 0$ un plan, $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point extérieur à $\mathcal{P}$ et H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Alors, H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A, et :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Cette longueur est la distance entre A et $\mathcal{P}$.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

1 **(a)** $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de ces vecteurs n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Cela montre que les points A, B et C définissent bien un plan et il suffit de montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs pour montrer qu'il est normal au plan (ABC).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times (-3) + 2 \times 6 + 3 \times 0 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times (-3) + 2 \times 0 + 3 \times 4 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc bien un vecteur normal au plan (ABC).

(b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :

$$4x + 2y + 3z = d$$

de sorte que les coordonnées de A vérifient cette équation :

$$4x_A + 2y_A + 3z_A = d \iff 12 = d.$$

Ainsi, une équation du plan (ABC) est :

$$4x + 2y + 3z = 12.$$

2 **(a)** La droite Δ orthogonale au plan (ABC) a pour vecteur directeur $\vec{n}$ et passe par le point D, donc une représentation paramétrique de cette droite peut être :

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

...

Solution de l'exercice type 2 (suite) Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

(b) Le point H appartient à Δ et à (ABC) si et seulement s'il existe une valeur du paramètre t tel que :

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \\ 4x + 2y + 3z = 12 \end{cases}$$

En remplaçant x, y et z en fonction de t dans la dernière équation on trouve la condition :

$$4(-5 + 4t) + 2 \times 2t + 3(1 + 3t) = 12\ ,$$

d'où $t = 1$.

Les coordonnées du point H sont donc :

$$H(-1\ ;2\ ;4).$$

(c) La distance de D au plan (ABC) est égale à DH puisque H est le projeté orthogonal de D sur (ABC). On trouve :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{(-1+5)^2 + (2-0)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{29}\ . \end{aligned}$$

Remarque : en utilisant la formule du cours donnant la distance d'un point à un plan, on a :

$$\begin{aligned} d\big(D; (ABC)\big) &= \frac{|4 \times (-5) + 2 \times 0 + 3 \times 1 - 12|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2}} \\ &= \frac{29}{\sqrt{29}} \\ &= \sqrt{29}\ . \end{aligned}$$

On peut ainsi trouver la distance de D au plan (ABC) sans nécessairement chercher les coordonnées de H.

Voir énoncé page 404

INTERROS

1 V/F Généralités

10 min Corrigé p. 415

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Si A et B sont deux points distincts de l'espace et k un réel non nul, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ est la droite (AB).
2. Si A, B, C sont trois points distincts de l'espace et H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
3. Si A, B, C, D sont quatre points distincts de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
4. Le plan d'équation $x - 2y + 2z - 7 = 0$ est tangent à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 4 = 0$ au point A de coordonnées $(1 ; 1 ; 4)$.

2 V/F Produit scalaire dans l'espace

10 min Corrigé p. 415

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(0 ; 1 ; 2)$.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Il existe un unique vecteur $\vec{v}$ de l'espace tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{\imath} = 0$.
2. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$ est un plan.
3. L'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{\imath} = -1$ et $\vec{v} \cdot \vec{\jmath} = 0$ est vide.
4. L'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, $\vec{v} \cdot \vec{\imath} = 1$ et $\vec{v} \cdot \vec{\jmath} = 1$ est vide.

3 V/F Positions relatives de plans de l'espace

10 min Corrigé p. 415

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ trois plans tels que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \varnothing$, alors le système formé par les équations cartésiennes de ces trois plans n'admet aucune solution.
2. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ trois plans tels que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \varnothing$, alors le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan $\mathcal{Q}$ et le plan $\mathcal{Q}$ est parallèle au plan $\mathcal{R}$.
3. Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \varnothing$ et $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \neq \varnothing$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} \neq \varnothing$.
4. Soit m un réel, l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(m ; m ; 0)$ est le plan d'équation cartésienne $x - y = 0$.

4 V/F Droites et plans de l'espace

10 min Corrigé p. 416

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère quatre points $A(2\,;4\,;1)$, $B(0\,;4\,;-3)$, $C(3\,;1\,;-3)$ et $D(1\,;0\,;-2)$.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 2y - z = 11$.
2. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
3. Une représentation paramétrique de la droite (CD) est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Le point I de coordonnées $\left(\frac{3}{5}\,;4\,;-\frac{9}{5}\right)$ appartient à la droite (AB).

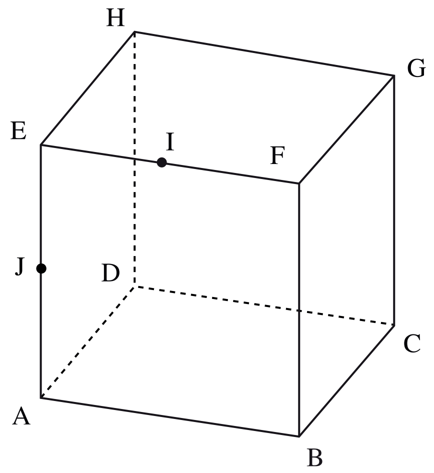
5 Position relative de droites

★ 10 min Corrigé p. 416

Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

Soit a un réel strictement positif.

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête a ci-dessous sur lequel les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$ et $[AE]$.



1. Montrer que les points I, J, D et G sont coplanaires.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{JG}$.
   Que peut-on déduire quant aux droites (DI) et (JG) ?

6 Avec un cube

★ 15 min Corrigé p. 417

Lycée Carnot, Dijon

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube d'arête a, où (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont parallèles.

Calculer les produits scalaires suivants en fonction de a.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'} \quad , \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'} \quad , \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC'} \quad , \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD'} \quad ,$$
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC'} \quad , \quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB'} \quad , \quad \overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DB'} \quad , \quad \overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{A'C'}.$$

7 Étude d'un quadrilatère

★ 15 min Corrigé p. 417

Lycée Pasteur, Dole

Soit l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les 4 points $A(13\,;-11\,;10)$, $B(13\,;9\,;25)$, $C(-7\,;18\,;13)$ et $D(-7\,;-2\,;-2)$.

Quelle est la nature de la figure $ABCD$?

8 Arêtes orthogonales d'un tétraèdre

★ 15 min Corrigé p. 417

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

1. Montrer que pour tous points A, B, C et D de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

2. En déduire que, si dans un tétraèdre deux couples d'arêtes opposées sont formés d'arêtes orthogonales, il en est de même du troisième.

9 Base orthonormée

★ 15 min Corrigé p. 418

Lycée Condorcet, Paris

On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Soient :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\,;\frac{1}{9}\,;\frac{8}{9}\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\,;\frac{8}{9}\,;\frac{1}{9}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}\frac{7}{9}\,;-\frac{4}{9}\,;\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Démontrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée.

10 Équation cartésienne d'un plan

★ 15 min Corrigé p. 419

Lycée Victor Hugo, Besançon

Soit l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les 2 points $A(-1\,;0\,;1)$ et $B(0\,;3\,;1)$.

1. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(0\,;1\,;1)$.

2 Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan d'équation $x + y - 2z = 4$ et passant par B.

3 Donner une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

11 Droites et plans de l'espace

★ 25 min Corrigé p. 420

Lycée Jean Renoir, Bondy

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\,;0\,;2) \quad , \quad (3\,;2\,;-4) \quad , \quad (1\,;-4\,;2) \quad \text{et} \quad (5\,;-2\,;4)\,.$$

On considère les points I, J, K définis par : I milieu du segment $[AB]$, K milieu du segment $[CD]$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1 Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2 **(a)** Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.

(b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :

$$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et démontrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.

(d) Montrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

12 Aires et volumes

★ 45 min Corrigé p. 421

Lycée Jean Renoir, Bondy

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(3\,;0\,;1)$, $B(0\,;-1\,;2)$, $C(1\,;-1\,;0)$ et $D(1\,;1\,;-2)$.

1 **(a)** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

(b) En déduire la nature du triangle ABC.

(c) Calculer l'aire de ce triangle.

2 **(a)** Vérifier que $\vec{u}(2\,;-5\,;1)$ est un vecteur normal du plan (ABC).

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

(c) Déterminer la distance de D au plan (ABC).

3 En utilisant les questions 1 et 2, déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

4 **(a)** Déterminer un vecteur $\vec{n}$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

5 Exprimer le volume du tétraèdre $ABCD$ en fonction de l'aire du triangle BCD.

6 Déterminer l'aire du triangle BCD.

13 Recherche

★★ 15 min

Corrigé p. 424

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

$ABCDEFGH$ est un cube de diagonale $[AG]$.

1 Trouver les points M de (AG) tels que (MB) et (MD) soient orthogonales.

On notera M_1 et M_2 ces points de sorte que M_2 soit le point le plus proche de G.

2 Calculer le volume de la pyramide $ABDM_2$.

14 Position relative de plans et de droites

★★ 20 min

Corrigé p. 425

Lycée Claude Bernard, Paris

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé, t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan $\mathcal{P}$ admet comme équation cartésienne :

$$\mathcal{P} \ : \ x - 2y + 3z + 5 = 0.$$

Le plan $\mathcal{S}$ admet comme représentation paramétrique :

$$\mathcal{S} \ : \ \begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$$

La droite $\mathcal{D}$ admet comme représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} \ : \ \begin{cases} x & = -2 + t \\ y & = -t \\ z & = -1 - t \end{cases}$$

1 Démontrer qu'une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ est :

$$\begin{cases} x & = t + 2t' \\ y & = 1 - t + t' \\ z & = -1 - t \end{cases}$$

2 Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est une droite du plan $\mathcal{P}$.

3 Étudier la position relative des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$. Le cas échéant, donner une représentation paramétrique de leur intersection.

15 Dans un parallélépipède

★★ 45 min Corrigé p. 426

Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
L'unité de longueur est le centimètre.
On considère les points :

- $A(1;\,-1;\,0)$,
- $B(-2;\,0;\,0)$,
- $C(1;\,2;\,-1)$,
- $E(3;\,-2;\,2)$.

1 Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

2 Justifier que le point E n'appartient pas au plan (ABC).

On construit alors le parallélépipède $ABCDEFGH$ de sorte que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$.

Rappel : toutes les faces d'un parallélépipède sont des parallélogrammes.

3 Déterminer les coordonnées des sommets D, F, G et H.

4 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

5 En déduire une mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{BAE}$.

6 On considère le point $K\left(-\dfrac{1}{2};\,1;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.

(a) Montrer que le point K appartient à la droite (BC).
(b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BK}$.
(c) En déduire que la distance du point A à la droite (BC) est égale à $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ cm.
(d) Montrer alors que l'aire du parallélogramme $ABCD$ vaut $\sqrt{91}$ cm^2.

7 Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC).

8 En déduire la distance du point E au plan (ABC).

9 Calculer alors le volume du parallélépipède $ABCDEFGH$.

COURS · INTERROS · CORRIGÉS

INTERROS

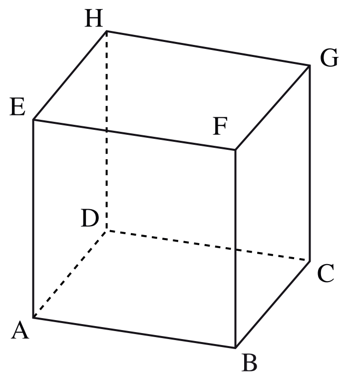
Objectif bac

16 Dans un cube

★★ 45 min Corrigé p. 430

Polynésie, septembre 2020

Soit $ABCDEFGH$ un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Pour tout réel t, on considère le point M de coordonnées $(1 - t\ ;\ t\ ;\ t)$.

1 Montrer que pour tout réel t, le point M appartient à la droite (BH).

On admet que les droites (BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

2 Montrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.

3 Pour tout réel t', on considère le point $M'(1; t'; 1 - t')$.

(a) Montrer que pour tous réels t et t',

$$MM'^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}.$$

(b) Pour quelles valeurs de t et de t' la distance MM' est-elle minimale ? Justifier.

(c) On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ et Q celui de coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Justifier que la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

(d) Quelle est la distance entre (BH) et (FC) ?

1 V/F Généralités

Énoncé p. 408

1. *Faux*. Si k est non nul, le point M ne pourra jamais être confondu avec A. L'ensemble obtenu sera donc la droite (AB) privée de A.
2. *Vrai*. Si le point C appartient à la droite (AB) alors $C = H$ et l'égalité est vraie. Sinon, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$. Or, les droites (AB) et (HC) sont orthogonales donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.
Par suite, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
3. *Faux*. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et différents et non nuls, donc non colinéaires.
4. *Vrai*. On commence par transformer l'équation de la sphère en $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$. La sphère est de centre $I(0\,;3\,;2)$ et de rayon 3.
On s'assure que le point A appartient bien à cette sphère puisque ses coordonnées vérifient l'équation trouvée. Le plan tangent à la sphère au point A est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$. En calculant ce produit scalaire, on obtient ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 7 = 0$.

2 V/F Produit scalaire dans l'espace

Énoncé p. 408

1. *Faux*. Les vecteurs de coordonnées $(0\,;2\,;-1)$ et $(0\,;6\,;-3)$ vérifient tous les deux les conditions demandées.
2. *Vrai*. L'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$ forme le plan d'équation : $y + 2z = 0$.
3. *Faux*. Le vecteur de coordonnées $(-1\,;0\,;0)$ convient.
4. *Faux*. Le vecteur de coordonnées $(1\,;1\,;0)$ convient.

3 V/F Positions relatives de plans de l'espace

Énoncé p. 408

1. *Vrai*. Un triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système formé par les équations cartésiennes de ces trois plans si et seulement si il vérifie ces trois équations, ce qui équivaut à dire que le point de coordonnées $(a\,;b\,;c)$ appartient simultanément aux trois plans. Or, par hypothèse, l'intersection des trois plans est vide.
2. *Faux*. Considérons les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ d'équations cartésiennes respectives $x + y = 2$, $y + z = 3$ et $x + 2y + z = 0$. L'intersection de ces trois plans est clairement vide cependant ces plans ne sont pas parallèles.
3. *Faux*. Considérons les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ d'équations cartésiennes respectives $x = 0$, $x + y = 2$ et $x = 3$. On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \varnothing$ puisque, par exemple

CORRIGÉS

le point de coordonnées $(0\ ;2\ ;0)$ appartient à la fois à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$. De même, on a $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \neq \varnothing$ puisque le point de coordonnées $(3\ ;-1\ ;0)$ appartient simultanément aux plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.

Cependant $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \varnothing$ puisqu'on ne peut avoir simultanément $x = 0$ et $x = 3$.

4 *Faux*. Le point de coordonnées $(1\ ;1\ ;1)$ appartient au plan d'équation cartésienne $x - y = 0$ mais ses coordonnées ne sont pas de la forme $(m\ ;m\ ;0)$.

4 V/F Droites et plans de l'espace

Énoncé p. 409

1 *Vrai*. On commence par vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-2\ ;0\ ;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(1\ ;-3\ ;-4)$ ne sont pas colinéaires. Par suite, il existe un unique plan contenant les points A, B et C. Il ne reste plus qu'à s'assurer que les coordonnées des trois points vérifient l'équation proposée, ce qui est le cas.

2 *Vrai*. D'après la question précédente, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-2\ ;0\ ;-4)$.

On calcule de même celles du vecteur $\overrightarrow{CD}$ soit $(-2\ ;-1\ ;1)$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul donc ils sont orthogonaux et les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

3 *Faux*. Le point D n'appartient pas à la droite proposée. En effet, les équations $t - 1 = 0$ et $1 - t = -2$ sont incompatibles.

4 *Vrai*. On connaît les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On calcule celles du vecteur $\overrightarrow{AI}$ soit $\left(-\dfrac{7}{5}\ ;0\ ;-\dfrac{14}{5}\right)$. On a donc $\overrightarrow{AI} = \dfrac{7}{10}\overrightarrow{AB}$. Par suite, ces deux vecteurs sont colinéaires et les points A, I et B sont alignés.

5 Position relative de droites

Énoncé p. 409

Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

1 I et J sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[AE]$ donc :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}.$$

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{GD}$ sont colinéaires.

On en déduit alors que (IJ) et (GD) sont parallèles.

Or, deux droites parallèles définissent un plan.

Donc I, J, D et G sont coplanaires.

2 Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$,

$$\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{JG}\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times\frac{1}{2} = 0.$$

On en déduit alors que les droites (DI) et (JG) sont orthogonales.

6 Avec un cube

Énoncé p. 410

Lycée Carnot, Dijon

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'} = 0$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'} = 0$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = a^2$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -a^2$
- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = a^2$
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB'} = 0$
- $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DB'} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'})\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{BB'} = a^2$
- $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{A'C'} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'})\cdot\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{A'C'} = 2a^2$

7 Étude d'un quadrilatère

Énoncé p. 410

Lycée Pasteur, Dole

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}(0\,;20\,;15) \quad ; \quad \overrightarrow{DC}(0\,;20\,;15) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC}(-20\,;9\,;-12).$$

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $ABCD$ est un parallélogramme. Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0\times(-20) + 20\times 9 + 15\times(-12) = 0.$$

Comme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc $ABCD$ est un rectangle.

Enfin, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = 25$, donc $ABCD$ est un carré.

8 Arêtes orthogonales d'un tétraèdre

Énoncé p. 410

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

1 On décompose les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ à l'aide de la relation de Chasles en introduisant le point A.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DA}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\\ &\quad+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{0}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= 0.\end{aligned}$$

2 Les trois couples d'arêtes opposées sont $([DA],[BC])$, $([DB],[AC])$ et $([DC],[AB])$.

On applique alors l'égalité ci-dessus en supposant deux des trois produits scalaires nuls : le troisième est alors nul.

9 Base orthonormée

Énoncé p. 410

Lycée Condorcet, Paris

Vérifions d'abord que les vecteurs sont unitaires :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2 &= \left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{16+1+64}{81}=1\,,\\ \|\vec{v}\|^2 &= \left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{16+64+1}{81}=1\,,\\ \|\vec{w}\|^2 &= \left(\frac{7}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{49+16+16}{81}=1.\end{aligned}$$

Ensuite, calculons les produits scalaires suivants pour montrer que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{(-4)\times 4+1\times 8+8\times 1}{9\times 9}=0\,,\\ \vec{u}\cdot\vec{w} &= \frac{(-4)\times 7+1\times(-4)+8\times 4}{9\times 9}=0\,,\\ \vec{v}\cdot\vec{w} &= \frac{4\times 7+8\times(-4)+1\times 4}{9\times 9}=0.\end{aligned}$$

Alors la famille de vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée.

MÉTHODE

Pour prouver qu'une famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de trois vecteurs est une base orthonormée de l'espace, on montre que les normes des trois vecteurs sont égales à 1 (on dit alors que les vecteurs sont normés ou unitaires) puis que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

10 Équation cartésienne d'un plan

Énoncé p. 410

Lycée Victor Hugo, Besançon

1 Comme $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan cherché, une équation cartésienne de celui-ci est :

$$y + z = d,\ d \in \mathbb{R}$$

où d est déterminé par le fait que A appartient au plan cherché, soit :

$$0 + 1 = d.$$

Le plan cherché admet donc pour équation cartésienne :

$$y + z = 1.$$

2 Un plan parallèle au plan d'équation :

$$x + y - 2z = 4$$

admet pour équation :

$$x + y - 2z = a\ ,$$

où a est déterminé par le fait que B appartient au plan, soit :

$$3 - 2 = a.$$

Le plan cherché admet donc pour équation cartésienne :

$$x + y - 2z = 1.$$

3 Le plan médiateur du segment $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal.
Calculons les coordonnées du milieu de $[AB]$ ainsi que celles du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\text{Milieu de } [AB] : \left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ 1\right)\ ; \quad \text{le vecteur } \overrightarrow{AB} : (1\ ;\ 3\ ;\ 0).$$

Le plan médiateur du segment $[AB]$ a donc pour équation :

$$x + 3y = c\ ,$$

avec :

$$-\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = c \quad , \quad \text{donc } c = 4.$$

Cette équation cartésienne est donc $x + 3y = 4$.

MÉTHODE

La première et la troisième question peuvent aussi être résolues avec les méthodes suivantes :

- Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Si le point M a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on calcule alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ puis on effectue le produit scalaire.
- Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et de B. Si le point M a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on calcule alors les distances MA et MB et on écrit l'égalité $MA^2 = MB^2$ qui après simplification fournira l'équation cherchée.

11 Droites et plans de l'espace

Énoncé p. 411

Lycée Jean Renoir, Bondy

1 Les coordonnées respectives des points I et K sont :

$$I(1\ ;\ 1\ ;\ -1) \qquad \text{et} \qquad K(3\ ;\ -3\ ;\ 3).$$

Le point J est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Soient $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées du point J. Alors, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BJ}$ sont $(x-3\ ;\ y-2\ ;\ z+4)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $(-2\ ;\ -6\ ;\ 6)$.

Les coordonnées du point J s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} x - 3 = -\dfrac{1}{2} \\ y - 2 = -\dfrac{3}{2} \\ z + 4 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Le point J a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{5}{2}\right)$.

2 **(a)** Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont pour coordonnées respectives $(2\ ;\ -4\ ;\ 4)$ et $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right)$. Comme il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IK}$, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires donc les points I, J et K ne sont pas alignés.

(b) Considérons le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

Il contient le point I puisque $8 \times 1 + 9 \times 1 + 5 \times (-1) - 12 = 0$. On montre de même que le plan $\mathcal{P}$ contient aussi les points J et K. Or, d'après la question précédente, les points I, J, K ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan. Ce plan n'est donc autre que le plan $\mathcal{P}$. Par conséquent, une équation cartésienne du plan (IJK) est $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.

MÉTHODE

Pour résoudre cette question, on aurait pu aussi procéder de la manière suivante :
On commence par déterminer un vecteur $\vec{n}$ à la fois orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$. Un tel vecteur est donc un vecteur normal au plan (IJK). Le plan (IJK) est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$.

(c) Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(6\,;-2\,;2)$.
Un point M de coordonnées $(x\,;y;z)$ appartient à la droite (AD) si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AD) est donc :

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un point M de la droite (AD) appartient au plan (IJK) si et seulement si il existe un réel t tel que $8(6t-1) - 18t + 5(2t+2) - 12 = 0$.
En résolvant cette équation, on obtient $t = \frac{1}{4}$.

Le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$.

(d) Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(6\,;-2\,;2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AL}$ a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, ce qui établit la relation demandée.

12 Aires et volumes

Énoncé p. 411

Lycée Jean Renoir, Bondy

1 **(a)** Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont pour coordonnées respectives $(-2\,;-1\,;-1)$ et $(1\,;0\,;-2)$. On calcule leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2) + (-1) \times 0 + (-1) \times (-2) = 0.$$

CORRIGÉS

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

(b) On déduit de la première question que le triangle ABC est rectangle en C.

(c) L'aire du triangle ABC est :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}AC \times BC\ ,$$

soit :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \times \sqrt{5}.$$

L'aire du triangle ABC est donc $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

2 **(a)** On a vu que les poins A, B, C ne sont pas alignés. Pour prouver que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC), il suffit de prouver que ce vecteur est orthogonal à la fois aux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. En effet, on sait d'après le cours que tout vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

On vérifie que $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 0$ ce qui achève la preuve.

(b) Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est

$$2x - 5y + z = 7.$$

(c) En utilisant la formule :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ ,$$

on déduit que la distance du point D au plan (ABC) est $\dfrac{|-12|}{\sqrt{30}}$ soit $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

3 On considère comme base du tétraèdre $ABCD$ le triangle BCA. Son volume est alors :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times \frac{2\sqrt{30}}{5}\ ,$$

soit $\mathscr{V} = 2$.

4 **(a)** Soit $\vec{n}$ un vecteur de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

En calculant ces produits scalaires, on montre que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ 2b - 2c = 0. \end{cases}$$

On peut donc choisir par exemple $\vec{n}(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

ATTENTION

Il existe une infinité de vecteurs $\vec{n}$ répondant à la question !

(b) Remarquons que les points B, C, D ne sont pas alignés (les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires) donc ils déterminent un plan.

Le plan (BCD) est l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$. Une équation cartésienne du plan (BCD) est $2x + y + z = 1$.

5 On considère comme base du tétraèdre $ABCD$ le triangle BCD. Son volume est alors donné par la formule :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A}' \times d\ ,$$

où $\mathscr{A}'$ représente l'aire du triangle BCD et d la distance du point A au plan (BCD).

On calcule cette distance en utilisant la même formule qu'à la question 2.c.

$$d = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

On a donc :

$$\mathscr{V} = \frac{\sqrt{6}}{3}\mathscr{A}'.$$

6 Le volume du tétraèdre ayant été calculé antérieurement, on peut ainsi déterminer l'aire du triangle BCD.

On a :

$$2 = \mathscr{A}' \times \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

On en déduit :

$$\mathscr{A}' = \sqrt{6}.$$

MÉTHODE

On retiendra la méthode utilisée dans cet exercice (un grand classique des sujets de baccalauréat antérieurs).
On considère un tétraèdre et, en calculant son volume de deux manières différentes, on déduit, selon les problèmes, soit l'aire d'une des faces triangulaires du tétraèdre soit la distance d'un des sommets au plan contenant la face opposée à ce sommet.

CORRIGÉS

13 Recherche

Énoncé p. 412

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Dans cet exercice, plaçons-nous dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1 Dans ce repère, $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $A(0;\ 0;\ 0)$ donc une représentation paramétrique de (AG) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

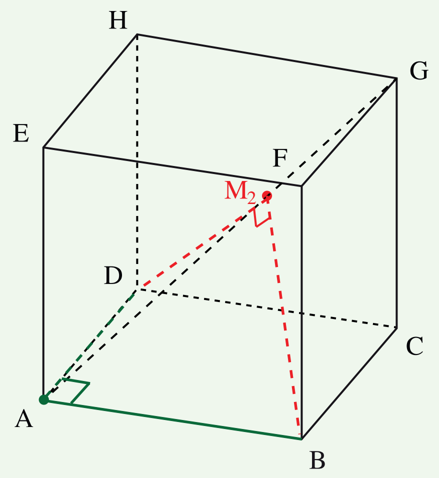
Ainsi,

$$M \in (AG) \iff M(t;\ t;\ t),\ t \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que (MD) et (MB) soient orthogonales.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0 &\iff \begin{pmatrix}1-t\\-t\\-t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-t\\1-t\\-t\end{pmatrix} = 0 \\
&\iff -t(1-t) - t(1-t) - t \times (-t) = 0 \\
&\iff -t(1-t+1-t-t) = 0 \\
&\iff -t(2-3t) = 0 \\
&\iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Il existe donc deux points $M_1(0;\ 0;\ 0) = A$ et $M_2\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$ correspondant à notre recherche.



2 Rappelons que le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$$

où $\mathcal{A}$ représente l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide relative à cette base.

Prenons ABD pour base. Alors,

$$\mathcal{A} = \frac{AD \times AB}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

et

$$h = \frac{2}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

14 Position relative de plans et de droites

Énoncé p. 412

Lycée Claude Bernard, Paris

1 La représentation paramétrique proposée est une représentation du plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les coordonnées exprimées en fonction de t et t' vérifient l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ pour toutes valeurs de t et t'.

Donc on remplace :

$$t + 2t' - 2(1 - t + t') + 3(-1 - t) + 5 = 0t + 0t' - 5 + 5 = 0.$$

L'équation est vérifiée quelles que soient les valeurs de t et t', donc on a bien une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

2 Là encore, on remplace dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$: si, pour tout t, les coordonnées des points de $\mathcal{D}$ vérifient l'équation de $\mathcal{P}$, cela signifiera que $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

Remarque : les deux autres cas de figure sont :

- les coordonnées des points de $\mathcal{D}$ ne vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ pour aucune valeur de t : alors la droite est parallèle au plan $\mathcal{P}$;
- il existe une unique valeur de t qui convient : alors la droite $\mathcal{D}$ est sécante au plan $\mathcal{P}$.

En remplaçant, il vient :

$$-2 + t - 2(-t) + 3(-1 - t) + 5 = 0t - 5 + 5 = 0.$$

Donc ici aussi, toute valeur de t convient, donc la droite $\mathcal{D}$ est une droite du plan $\mathcal{P}$.

3 Cherchons à quelle condition un point de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{P}$, en remplaçant x, y et z dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ par leur expression dans la représentation paramétrique de $\mathcal{S}$.

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}
&-2+t+2t'-2(-t-2t')+3(-1-t+3t')+5=0\\
\iff{}& 0t+15t'=0\\
\iff{}& t'=0.
\end{aligned}$$

On obtient alors l'équation de l'intersection en remplaçant t' par 0 dans la représentation paramétrique de $\mathcal{S}$.

La droite intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=-1-t \end{cases}$$

C'est en fait la droite $\mathcal{D}$.

15 Dans un parallélépipède

Énoncé p. 413

Lycée Saint-Joseph Loquidy, Nantes

1 A, B et C définissent un plan si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple) ne sont pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

De plus,

$$\frac{0}{-3}\neq\frac{3}{1}$$

donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles. Par conséquent, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2 $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Si E appartenait au plan (ABC), $\overrightarrow{AE}$ serait une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il existerait deux réels λ et μ tels que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC} \iff{}& \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}\\
\iff{}& \begin{cases} 2=-3\lambda \\ -1=\lambda+3\mu \\ 2=-\mu \end{cases}\\
\iff{}& \lambda=-\frac{2}{3},\ \mu=-2 \text{ et } -1=-\frac{2}{3}+3\times(-2)
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant fausse, les réels λ et μ n'existent pas, donc E n'appartient pas au plan (ABC).

3 • $ABCD$ doit être un parallélogramme donc :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_D \\ 2 - y_D \\ -1 - z_D \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x_D = 1 + 3 = 4 \\ y_D = 2 - 1 = 1 \\ z_D = -1 \end{cases}$$

Donc $D(4; 1; -1)$.

• De plus,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_F + 2 \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = -1 \\ z_F = 2 \end{cases}$$

Donc $F(0; -1; 2)$.

• Ensuite,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G + 1 \\ z_G - 2 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x_G = 3 \\ y_G = 1 \\ z_G = 1 \end{cases}$$

Donc $G(3; 1; 1)$.

• Enfin,

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H - 3 \\ y_H + 2 \\ z_H - 2 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x_H = 6 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 \end{cases}$$

Donc $H(6; 0; 1)$.

4 $$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2 \times (-3) + (-1) \times 1 + 2 \times 0$$
$$= -7.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

5 On sait que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AE \times AB \times \cos \widehat{BAE}$. De plus,

$$AE = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

et

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AE \times AB \times \cos \widehat{BAE} &\iff \cos \widehat{BAE} = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}}{AE \times AB}\\ &\iff \cos \widehat{BAE} = \frac{-7}{3\sqrt{10}}\\ &\iff \widehat{BAE} \approx 138°.\end{aligned}$$

6 **(a)** $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK}.$$

Les vecteurs sont donc colinéaires, ce qui montre que K appartient à la droite (BC).

(b) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{9}{4} + 2 + \frac{1}{4} = 0.$

(c) De la question précédente, on déduit que (BC) est orthogonale à la droite (AK). Or, K appartient à (BC) donc AK représente bien la distance entre le point A et la droite (BC).

$$\begin{aligned}AK &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4} + \frac{1}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{26}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{26}}{2}.\end{aligned}$$

L'unité graphique étant le centimètre, on déduit que la distance entre A et la droite (BC) est égale à $\frac{\sqrt{26}}{2}$ cm.

(d) L'aire d'un parallélogramme est donnée par la formule :

$$\text{base} \times \text{hauteur}.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

Ainsi, l'aire de $ABCD$, exprimée en cm^2, est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ABCD} = AK \times BC &= \frac{\sqrt{26}}{2} \times \sqrt{3^2+2^2+(-1)^2} \\
&= \frac{\sqrt{26}}{2} \times \sqrt{14} \\
&= \frac{\sqrt{26 \times 14}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2 \times 13 \times 2 \times 7}}{2} \\
&= \frac{2\sqrt{13 \times 7}}{2} \\
&= \sqrt{91}.
\end{aligned}$$

7 Un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal au plan (ABC) est tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3a + b = 0 \\ 3b - c = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = 3a \\ c = 3b = 9a \end{cases}$$

En prenant $a = 1$ par exemple, on trouve $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

8 Trouvons une équation cartésienne du plan (ABC).
On sait qu'elle est de la forme :

$$x + 3y + 9z + d = 0$$

car $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ est normal à ce plan.
De plus,

$$B \in (ABC) \iff x_B + 3y_B + 9z_B + d = 0 \iff d = 2.$$

On trouve finalement :

$$(ABC) \quad : \quad x + 3y + 9z + 2 = 0.$$

CORRIGÉS

La distance du point E au plan (ABC) est alors :

$$\begin{aligned} d\big(E;(ABC)\big) &= \frac{|x_E+3y_E+9z_E+2|}{\sqrt{1^1+3^2+9^2}} \\ &= \frac{|3+3\times(-2)+9\times 2+2|}{\sqrt{91}} \\ &= \frac{17}{\sqrt{91}}. \end{aligned}$$

9 Le volume du parallélépipède est donné par la formule :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \text{aire d'une base} \times \text{hauteur relative à cette base} \\ &= \mathcal{A}_{ABCD} \times d\big(E;(ABC)\big) \\ &= \sqrt{91} \times \frac{17}{\sqrt{91}} \\ &= 17\ \text{cm}^3. \end{aligned}$$

16 Dans un cube

Énoncé p. 414

Polynésie, septembre 2020

1 $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BH}$. Par conséquent, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, et donc les points B, M et H sont alignés.

On en conclut que pour tout réel t, M est sur la droite (BH).

2 D'après leurs représentations paramétriques,

- (BH) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;
- (FC) a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1\times 0 + 1\times 1 + 1\times(-1) = 0.$$

Par conséquent, (BH) et (FC) sont orthogonales.

De plus, (FC) est incluse dans le plan (BCF), ce qui n'est pas le cas de (BH) car $H \notin (BCF)$.

Les droites (BH) et (FC) ne sont donc pas coplanaires.

3 **(a)** $M(1-t;t;t)$ et $M'(1;t';1-t')$. Donc :

$$\begin{aligned} MM'^2 &= (x_{M'}-x_M)^2+(y_{M'}-y_M)^2+(z_{M'}-z_M)^2\\ &= (1-1+t)^2+(t'-t)^2+(1-t'-t)^2\\ &= t^2+(t')^2-2tt'+t^2+(1-t')^2-2t(1-t')+t^2\\ &= 3t^2+(t')^2-2tt'+1-2t'+(t')^2-2t+2tt'\\ &= 3t^2+2(t')^2-2t+1-2t'. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} &3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\\ &= 3\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}\right)+2\left((t')^2-t'+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}\\ &= 3t^2-2t+\frac{1}{3}+2(t')^2-2t'+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\\ &= 3t^2-2t+2(t')^2-2t'+1\\ &= MM'^2. \end{aligned}$$

(b) Pour que MM' soit minimale, il faut que MM'^2 le soit aussi.

$$3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}>0$$

comme la somme de deux termes positifs ou nuls et de $\frac{1}{6}$.

MM'^2 est minimale quand

$$\left(t-\frac{1}{3}\right)^2=0 \qquad \text{et} \qquad \left(t'-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

donc pour :

$$t=\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad t'=\frac{1}{2}.$$

(c) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BH}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0\,;$
- $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{FC}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0.$

Ainsi, (PQ) est orthogonale à (BH) et (FC).

Remarquons maintenant qu'en prenant $t = \dfrac{1}{3}$ dans la représentation paramétrique de (BH), on obtient les coordonnées de P ; donc $P \in (BH)$.

De même, en prenant $t' = \dfrac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de (FC), on obtient les coordonnées de Q ; donc $Q \in (FC)$.

Ainsi, en plus d'être orthogonales, les droites (BH) et (FC) sont perpendiculaires à (PQ).

(d) D'après ce qui précède, la distance entre (BH) et (FC) est égale à PQ, distance minimale de MM', donc égale à $\sqrt{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Chapitre 14

Baccalauréat blanc

La durée de l'épreuve est de 4 heures. Elle est composée de quatre exercices.

1 Exercice 1 – 5 points

★★ 60 min Corrigé p. 438

Amérique du Nord, sujet 2, mai 2025

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

L'entraineur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entrainement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de $0,32$.

Lors d'un entrainement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués après cette série de lancers.

   (a) Exprimer T en fonction de N.

   (b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.

   (c) Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 18)$.

SUJET

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.

On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1er, 2e, …, n-ième matchs. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.

On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

1 Dans cette question, on prend $n = 50$.

(a) Que représente la variable aléatoire M_{50} ?

(b) Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.

(c) Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{13}{90}$.

(d) En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.

2 Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < 0{,}01$ ».

2 Exercice 2 – 4 points

★★ 45 min Corrigé p. 441

Centres étrangers, sujet 1, juin 2025

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) : \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

1 On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).

2 Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$.

3 En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.

On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p).$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1 Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$.

2 On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).

Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3 En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.

4 Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

5 Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

3 Exercice 3 – 6 points

★★★ 75 min Corrigé p. 444

Énoncé original

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln(1 + x)}{1 + x}.$$

SUJET

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A

1 Déterminer la limite de $f(x)$ en -1 et en $+\infty$.

2 On note f' la fonction dérivée de f.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

3 Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\ +\infty[$, on pose :

$$N(x) = x^2 + 2x + 2 - \ln(1+x).$$

On admet que $N'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 1}{x+1}$.

(a) Donner le sens de variations de N sur $]-1\,;\ +\infty[$.

(b) Calculer la valeur du minimum de $N(x)$ sur $]-1\,;\ +\infty[$, puis en déduire les variations de f sur $]-1\,;\ +\infty[$.

4 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; 1[$.

On notera cette solution α.

5 Montrer que $\ln(1+\alpha) = 1 - \alpha^2$.

Partie B

Soit la fonction φ définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

On considère alors la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \varphi(\varphi(u_n)) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1 **(a)** On suppose que φ est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$.

Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $0 \leqslant \varphi(\varphi(x)) \leqslant 1$.

(b) Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

(c) En déduire que (u_n) converge.

2 **(a)** Montrer que $\varphi(\varphi(\alpha)) = \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ introduite dans la partie A.

On suppose que α est l'unique solution à l'équation $\varphi(\varphi(x)) = x$ sur $[0; 1]$.

(b) En déduire la limite de (u_n).

4 Exercice 4 – 5 points

★★ 60 min Corrigé p. 448

Sujets divers, session 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1 Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.

On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

Affirmation 1 : il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

2 Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x).$$

Affirmation 2 : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

3 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1; 1; 2)$, $B(5; -1; 8)$ et $C(2; 1; 3)$.

Affirmation 3 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 30°.

4 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites (d) et (d') de représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d') : \begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

5 Soit x donné dans $[0; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x-1)\mathrm{e}^n + \cos(n).$$

Affirmation 5 : la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

CORRIGÉ

1 Exercice 1 – 5 points

Énoncé p. 433

Amérique du Nord, sujet 2, mai 2025

Partie A

MÉTHODE

Au baccalauréat, il est très fréquent d'avoir un exercice de probabilités en au moins deux parties.
Il est conseillé de prendre connaissance du sujet de chaque partie afin de se faire une idée de ce qui nous est demandé.

Ici, la partie A traite de la loi binomiale ; on peut ainsi écrire au brouillon les formules vues dans le cours (espérance, variance et écart-type) et se remémorer rapidement les propriétés importantes et méthodes (linéarité de l'espérance, traduction mathématique des termes « au plus » et « au moins », etc.). Ceci permet éventuellement de raisonner plus vite et mieux au fil des questions.

1 Chaque lancer constitue une expérience de Bernoulli, dont le succès est « le panier est marqué », de probabilité $p = 0{,}32$ (d'après l'énoncé).

La série de 15 lancers *indépendants* constitue donc un schéma de Bernoulli.

Ainsi, le nombre N de succès obtenus à l'issue de ce schéma est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}32$.

2 La probabilité que Victor réussisse *exactement* 4 paniers est $P(N = 4)$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$P(N = 4) \approx 0{,}206.$$

3 La probabilité que Victor réussisse *au plus* 6 paniers lors de cette série est $P(N \leqslant 6)$.

À RETENIR

« Au plus 6 » signifie « moins de 6, ou 6 au maximum ».
« Au moins 6 » signifie « 6 ou plus de 6 ».

À la calculatrice, on trouve :

$$P(N \leqslant 6) \approx 0{,}828.$$

4 L'espérance de la variable N est, d'après le cours :

$$E(N) = n \times p = 15 \times 0{,}32 = 4{,}8.$$

5 **(a)** Un panier rapporte 3 points. Ainsi, si Victor marque N paniers à 3 points, le nombre total de points est :

$$T = 3N.$$

Nous avons bien exprimé T en fonction de N.

(b) D'après la linéarité de l'espérance,

$$E(T) = E(3N) = 3 \times E(N) = 3 \times 4{,}8 = 14{,}4.$$

Cela signifie que, sur un grand nombre de séries de 15 lancers, Victor rapporte en moyenne 14,4 points par série.

(c) On cherche à déterminer $P(12 \leqslant T \leqslant 18)$.

Pour cela, nous allons nous ramener à la variable aléatoire N, qui suit une loi binomiale (et donc sera plus facile à manipuler).

$$\begin{aligned} P(12 \leqslant T \leqslant 18) &= P(12 \leqslant 3N \leqslant 18) \\ &= P(4 \leqslant N \leqslant 6) \\ &\approx 0{,}586 \text{ (à la calculatrice).} \end{aligned}$$

Partie B

MÉTHODE

Dans cette partie, nous voyons d'un coup d'œil que le thème abordé est *la somme de variables aléatoires indépendantes et loi des grands nombres*. On peut alors, avant de se pencher sérieusement sur les questions, se remémorer les quelques formules du cours sur la moyenne de variables aléatoires indépendantes, ainsi que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres (qui vont sans doute nous servir).

1 Ici, on prend $n = 50$.

(a) M_{50} représente la moyenne de toutes les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_{50}, donc le nombre moyen de points marqués par matchs par Victor sur ces 50 matchs.

(b)
- D'après la linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_{50}) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{50})}{50} = E(X) = 22$$

car les X_k suivent toutes la même loi de probabilité que X.

- Les variables aléatoires X_k sont indépendantes donc, d'après le cours,

$$V(M_{50}) = \frac{1}{50^2} \times 50 \times V(X) = \frac{65}{50} = 1{,}3.$$

(c) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que :

$$\forall\, \delta > 0, \quad P(|M_{50} - E(M_{50})| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(M_{50})}{\delta^2}$$

CORRIGÉ

Nous souhaitons démontrer que :

$$P\left(|M_{50} - 22| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{13}{90}$$

ce qui nous pousse à prendre $\delta = 3$ dans l'inégalité précédente :

$$P(|M_{50} - E(M_{50})| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(M_{50})}{3^2}$$

soit :

$$P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{1{,}3}{9}$$

ce qui donne bien :

$$P\left(|M_{50} - 22| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{13}{90}$$

(d) On souhaite ici se pencher que $P(19 < M_{50} < 25)$.

Reprenons l'inégalité obtenue à la question précédente, et passons par l'événement contraire :

$$\begin{aligned}
P\left(|M_{50} - 22| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{13}{90} &\iff 1 - P\left(\overline{|M_{50} - 22| \geqslant 3}\right) \leqslant \frac{13}{90} \\
&\iff 1 - P(|M_{50} - 22| < 3) \leqslant \frac{13}{90} \\
&\iff 1 - P(|M_{50} - 22| \leqslant 2) \leqslant \frac{13}{90} \\
&\iff 1 - P(-2 \leqslant M_{50} - 22 \leqslant 2) \leqslant \frac{13}{90} \\
&\iff 1 - P(20 \leqslant M_{50} \leqslant 24) \leqslant \frac{13}{90} \\
&\iff 1 - P(19 < M_{50} < 25) \leqslant \frac{13}{90} \\
&\iff 1 - \frac{13}{90} \leqslant P(19 < M_{50} < 25) \\
&\iff P(19 < M_{50} < 25) \geqslant \frac{77}{90}.
\end{aligned}$$

Or, $\frac{77}{90} \approx 0{,}856$ donc :

$$P(19 < M_{50} < 25) > 0{,}85.$$

2 Dans cette question, n n'est plus égal à 50 ; il est quelconque.

L'inégalité de concentration donne, en prenant :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(M_n)}{\delta^2 n}.$$

Avec $\delta = 3$, $E(M_n) = E(X) = 22$ et $V(M_n) = V(X) = 65$, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}.$$

S'il existe un entier n tel que $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < 0{,}01$ alors :

$$\begin{aligned}\frac{65}{9n} < 0{,}01 &\iff \frac{9n}{65} > 100\\ &\iff n > 100 \times \frac{65}{9}\\ &\iff n \geqslant 723.\end{aligned}$$

L'affirmation :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < 0{,}01$ »
est donc *fausse*.

2 Exercice 2 – 4 points

Énoncé p. 434

Centres étrangers, sujet 1, juin 2025

Partie A

MÉTHODE

D'un coup d'œil, on peut voir que cette partie concerne la résolution d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$. Il est donc utile d'écrire dès le départ sur le brouillon, avant même de se pencher sérieusement sur les questions, la formule vue en cours qui donne les solutions à une telle équation.

1 Pour montrer que h est solution de (E_1), il faut montrer que :

$$h' + 0{,}48h = \frac{1}{250}.$$

Calculons alors :

$$h' + 0{,}48h = 0 + 0{,}48 \times \frac{1}{120} = \frac{48}{12\,000} = \frac{1}{250}.$$

h est donc bien solution de (E_1).

2 D'après le cours, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont :

$$y_0(t) = C\mathrm{e}^{-at} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, celles de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$ sont :

$$y_0(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}48t} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

ATTENTION

Il est clairement dit dans l'énoncé : « où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ » donc la variable n'est pas x, mais t.

CORRIGÉ

3 D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont :

$$y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}.$$

Alors, les solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = \frac{1}{250}$ sont :

$$y(t) = Ce^{-0{,}48t} - \frac{\frac{1}{250}}{-0{,}48} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

soit :

$$y(t) = Ce^{-0{,}48t} + \frac{1}{120} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

Partie B

MÉTHODE

En lisant en diagonale l'énoncé de cette partie, on s'aperçoit qu'elle traite d'une application aux équations différentielles. Il y a donc du contexte (auquel il faut faire attention) ; il est important de ne pas lire trop vite un tel énoncé, quitte à mettre plus de temps que prévu initialement à la résolution de l'exercice.

Par exemple, bien prendre conscience des unités (ici, $p(t)$ est exprimé en *millier d'individus*, et t est exprimé en *heures*).

1 D'après l'énoncé, $p = \frac{1}{y}$ donc $p' = -\frac{y'}{y^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
p \text{ est solution de } (E_2) &\Longrightarrow p' = \frac{1}{250}p(120 - p)\\
&\Longrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y}\left(120 - \frac{1}{y}\right)\\
&\Longrightarrow -y' = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y}\left(120 - \frac{1}{y}\right) \times y^2\\
&\Longrightarrow -y' = \frac{y}{250}\left(120 - \frac{1}{y}\right)\\
&\Longrightarrow -y' = \frac{12}{25}y - \frac{1}{250}\\
&\Longrightarrow y' = -0{,}48y + \frac{1}{250}\\
&\Longrightarrow y' + 0{,}48y = \frac{1}{250}\\
&\Longrightarrow y \text{ est solution de } (E_1).
\end{aligned}$$

2 On admet dans cette question la réciproque de ce qui a été démontré dans la question précédente, à savoir que :

$$y \text{ est solution de } (E_1) \Longrightarrow p \text{ est solution de } (E_2).$$

Dans la partie A, nous avons montré que :

$$y \text{ est solution de } (E_1) \iff y(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& p(t) = \frac{1}{y(t)} \text{ est solution de } (E_1) \\
\iff & p(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \text{ est solution de } (E_1),\ C \in \mathbb{R} \\
\iff & p(t) = \frac{120}{120C\mathrm{e}^{-0,48t} + 1} \text{ est solution de } (E_1),\ C \in \mathbb{R} \\
\iff & p(t) = \frac{120}{K\mathrm{e}^{-0,48t} + 1} \text{ est solution de } (E_1), \text{ avec } K = 120C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3 On sait que $p(0) = 30$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{120}{K\mathrm{e}^{-0,48\times 0} + 1} = 30 & \iff 120 = 30K\mathrm{e}^0 + 30 \\
& \iff 30K\mathrm{e}^0 = 90 \\
& \iff K = 3.
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$p(t) = \frac{120}{3\mathrm{e}^{-0,48t} + 1}.$$

4 $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,48t} = \lim\limits_{T \to -\infty} \mathrm{e}^{T} = 0.$

Ainsi, $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = \dfrac{120}{3 \times 0 + 1} = 120.$

Cela signifie, dans le contexte de l'exercice, qu'à très long terme, la population bactérienne se rapprochera de 120 000 bactéries.

CORRIGÉ

5 Dans cette question, on cherche la plus petite valeur de t pour laquelle :

$$\begin{aligned}
p(t) > 60 &\iff \frac{120}{3\mathrm{e}^{-0,48t}+1} > 60\\
&\iff \frac{3\mathrm{e}^{-0,48t}+1}{120} < \frac{1}{60}\\
&\iff 3\mathrm{e}^{-0,48t}+1 < 2\\
&\iff 3\mathrm{e}^{-0,48t} < 1\\
&\iff \mathrm{e}^{-0,48t} < \frac{1}{3}\\
&\iff \ln\left(\mathrm{e}^{-0,48t}\right) < \ln\left(\frac{1}{3}\right)\\
&\iff -0,48t < -\ln(3)\\
&\iff t > \frac{\ln(3)}{0,48}\\
&\iff t > 2,2887756.
\end{aligned}$$

Ainsi, la population dépassera 60 000 bactéries après 2,289 heures, soit 2 h $0,289 \times 60$ min $=$ 2 h 17 min.

3 Exercice 3 – 6 points

Énoncé p. 435

Énoncé original

Partie A

MÉTHODE

Il s'agit ici d'une partie où l'objectif principal est clairement d'établir le sens de variation d'une fonction. Dans ce genre de partie, les questions se ressemblent souvent d'un sujet à l'autre :

- calcul d'une ou deux limites,
- calcul d'une dérivée pour trouver le sens de variation de la fonction,
- preuve de l'existence d'une solution à une équation (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

1 • Calcul de $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2$.
De plus, en posant $X = x+1$, on a $\lim\limits_{x\to -1}(x+1) = 0$, d'où :

$$\lim_{x\to -1}\frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to 0}\frac{\ln(X)}{X} = -\infty \text{ (croissance comparée).}$$

Finalement,

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty.$$

- Calcul de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

  $\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$.
  De plus, en posant $X = x+1$, on a $\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$, d'où :

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \text{ (croissance comparée).}$$

  Finalement,

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

2 Posons $a(x) = x - 1$ et $b(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

$$f'(x) = a'(x) + b'(x) = 1 + b'(x).$$

$b(x) = \dfrac{u(x)}{v(v)}$, avec :

$$u(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad v(x) = x+1$$
$$u'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad v'(x) = 1.$$

Ainsi,

$$b'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}(x)$$
$$b'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - 1 \times \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$b'(x) = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

Finalement,

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

3 **(a)** $N'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 1}{x+1}$ et sur $]-1\,;\,+\infty[$, $x + 1 > 0$ donc $N(x)$ est du signe de $2x^2 + 4x + 1$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 1 = 16 - 8 = 8.$$

Le polynôme $2x^2 + 4x + 1$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{4} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < -1 \text{ donc n'est pas prise en compte}$$

CORRIGÉ

et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{8}}{4} = -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > -1$ donc est prise en compte.

On en déduit le tableau suivant :

x	-1		x_2		$+\infty$
$N'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
N	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

(b) Une valeur approchée du minimum de $N(x)$ est (à la calculatrice) :

$$N(x_2) \approx 1{,}85 > 0.$$

Ainsi, sur $]-1\,;\ +\infty[$, $N(x) > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

On en déduit alors que f est strictement croissante sur $]-1\,;\ +\infty[$.

4 f est continue est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

De plus, nous avons vu précédemment que $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$.

0 est donc une valeur de l'ensemble image de $]-1; +\infty[$ par f.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α telle que $f(\alpha) = 0$ sur $]-1; +\infty[$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc bien une unique solution (qui est α) sur $]-1; +\infty[$.

5 Par définition de α,

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff (\alpha - 1) + \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha} = 0 \\ &\iff \frac{(\alpha-1)(\alpha+1) + \ln(1+\alpha)}{1+\alpha} = 0 \\ &\iff (\alpha-1)(\alpha+1) + \ln(1+\alpha) = 0 \\ &\iff \alpha^2 - 1 + \ln(1+\alpha) = 0 \\ &\iff \ln(1+\alpha) = 1 - \alpha^2. \end{aligned}$$

Partie B

MÉTHODE

Dans cette partie, nous allons a priori étudier une suite. Dans de nombreux sujets de bac, les questions traitent des thèmes suivants :

- démonstration par récurrence d'un encadrement,
- théorème de convergence des suites monotones,
- continuité d'une fonction et passage à la limite d'une suite.

Il faut donc que nos connaissances soient solides sur ces thèmes.

1 **(a)** Soit $x \in [0;\, 1]$. Puisque φ est strictement décroissante sur $[0;\, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 &\iff \varphi(1) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(0) \\ &\iff 1 - \frac{\ln 2}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \\ &\iff 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1. \end{aligned}$$

En posant $X = \varphi(x)$, on a $X \in [0;\, 1]$ donc $0 \leqslant \varphi(X) \leqslant 1$, soit :

$$0 \leqslant \varphi\big(\varphi(x)\big) \leqslant 1.$$

(b) Notons :

$$(\mathcal{P}_n) \ : \ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

- *Initialisation.*

  On a :

  $$u_1 = \varphi(\varphi(1)) = \varphi\left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right) \approx 0{,}696.$$

  Ainsi,

  $$0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1.$$

  $(\mathcal{P}_0)$ est donc vraie.

- *Hérédité.*

  Supposons que pour un entier k fixé, $(\mathcal{P}_k)$ est vraie, c'est-à-dire :

  $$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1. \qquad (HR)$$

  Montrons alors que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie, c'est-à-dire que :

  $$0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1.$$

  Partons de l'hypothèse de récurrence (HR) :

  $$(HR) \Longrightarrow \varphi(1) \leqslant \varphi(u_k) \leqslant \varphi(u_{k+1}) \leqslant \varphi(0)$$

  (car la fonction φ est strictement décroissante)

  $$\Longrightarrow \underbrace{\varphi(\varphi(0))}_{\approx 0{,}65} \leqslant \varphi(\varphi(u_{k+1})) \leqslant \varphi(\varphi(u_k)) \leqslant \underbrace{\varphi(\varphi(1))}_{\approx 0{,}70}$$

  (on retourne encore l'encadrement car φ est décroissante)

  $$\Longrightarrow 0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1.$$

  Ainsi, $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.

- *Conclusion.*

  $(\mathcal{P}_0)$ est vraie et, pour un entier k fixé, $(\mathcal{P}_k) \Longrightarrow (\mathcal{P}_{k+1})$ donc, d'après le principe de récurrence, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

(c) Nous venons de démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0).

Donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

2 **(a)** On a vu dans la partie A que $\ln(1+\alpha) = 1 - \alpha^2$, d'où :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= 1 - \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha} \\ &= 1 - \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha} \\ &= 1 - \frac{(1+\alpha)(1-\alpha)}{1+\alpha} \\ &= 1-(1-\alpha) \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\varphi(\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha) = \alpha.$$

(b) φ est une fonction continue et (u_n) converge vers un réel ℓ, avec $u_{n+1} = \varphi(\varphi(u_n))$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \varphi(\varphi(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n))$.

Donc ℓ est solution de l'équation $x = \varphi(\varphi(x))$.

Or, α est la seule solution à cette équation sur $[0; 1]$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = \alpha.$$

ATTENTION

Cette seconde partie peut paraître plus difficile que ce que vous avez pu voir dans les annales du baccalauréat, et c'est normal : les directives récentes laissent suggérer que le niveau de l'épreuve tend à être révisé à la hausse. Nous avons donc voulu proposer un sujet qui vous permet de voir votre facilité à vous adapter à un contexte légèrement différent que celui auquel vous avez l'habitude d'être confrontés.

4 Exercice 4 – 5 points

Énoncé p. 437

Sujets divers, session 2025

1 Le fait de faire une équipe de 3 filles et 3 garçons consiste à former un ensemble où l'ordre ne compte pas. Parmi les méthodes de dénombrements en notre possession, seules les *combinaisons* permettent de dénombrer de tels ensembles *non ordonnés*.

On choisit *3 filles parmi les 18* de la classe et *3 garçons parmi les 14* de la classe. Il y a donc :

$$\binom{18}{3} \times \binom{14}{3} = 297\ 024 \text{ possibilités.}$$

L'affirmation 1 est donc exacte.

2 Pour calculer $\int_1^{e} x\ln(x)\mathrm{d}x$, nous allons utiliser une *intégration par parties* en posant :

$$u(x)=\ln(x) \qquad u'(x)=\frac{1}{x}$$
$$v'(x)=x \qquad v(x)=\frac{1}{2}x^2$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_1^{e} x\ln(x)\mathrm{d}x &= \int_1^{e}(uv')(x)\mathrm{d}x\\
&= \left[(uv)(x)\right]_1^{e} - \int_1^{e}(u'v)(x)\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^{e} - \int_1^{e}\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}e^2\ln(e) - \frac{1}{2}\times 1^2\times\ln(1) - \frac{1}{2}\int_1^{e} x\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}e^2 - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{e}\\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1)\\
&= \frac{2e^2-e^2+1}{4}\\
&= \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

L'affirmation 2 est donc exacte.

3 • $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-1\\-1-1\\8-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\3-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 10$.

• On sait de plus, que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}\\
10 &= \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2}\times\sqrt{1^2+0^2+1^2}\times\cos\widehat{BAC}\\
10 &= \sqrt{56}\times\sqrt{2}\times\cos\widehat{BAC}
\end{aligned}$$

$$\iff \cos\widehat{BAC} = \frac{10}{\sqrt{56\times 2}} = \frac{10}{\sqrt{112}} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $\widehat{ABC}\neq 30°$.

CORRIGÉ

L'affirmation 3 est donc fausse.

4

- Regardons si (d) et (d') sont parallèles.

  Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (d') est $\vec{v'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$.

  $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{4}{-1}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, les droites ne sont pas parallèles.

- Regardons si les droites sont sécantes.

  Pour cela, on résout le système :

$$\begin{cases} 15+k &= 1+4s \\ 8-k &= 2+4s \\ -6+2k &= 1-6s \end{cases} \iff \begin{cases} k-4s &= -14 \quad (L_1) \\ k+4s &= 6 \quad (L_2) \\ 2k+6s &= 7 \quad (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2k &= -8 \quad (L_1)+(L_2) \\ k+4s &= 6 \\ 2k+6s &= 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k &= -4 \\ 4s &= 6+4 = 10 \\ 6s &= 7-2\times(-4) = 15 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k &= -4 \\ s &= \dfrac{5}{2} \\ s &= \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

  Le système admet donc un unique couple solution $\left(k=-4;\, s=\dfrac{5}{2}\right)$ donc les droites sont sécantes, et donc coplanaires

  L'affirmation 4 est alors fausse.

- $x \in [0;\,1[$ donc $(x-1) < 0$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathrm{e}^n\left((x-1) + \frac{\cos(n)}{\mathrm{e}^n}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad & -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \\ \Longleftrightarrow \ & \frac{-1}{\mathrm{e}^n} \leqslant \frac{\cos(n)}{\mathrm{e}^n} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n} \\ \Longleftrightarrow \ & \mathrm{e}^n\left((x-1)-\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right) \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^n\left((x-1)+\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right) \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right)=0$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\left((x-1)+\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right)=x-1.$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^n=+\infty.$$

Ainsi, par produit des limites,

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\mathrm{e}^n\left((x-1)+\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right)\right]=-\infty.$$

Nous avons montré précédemment que :

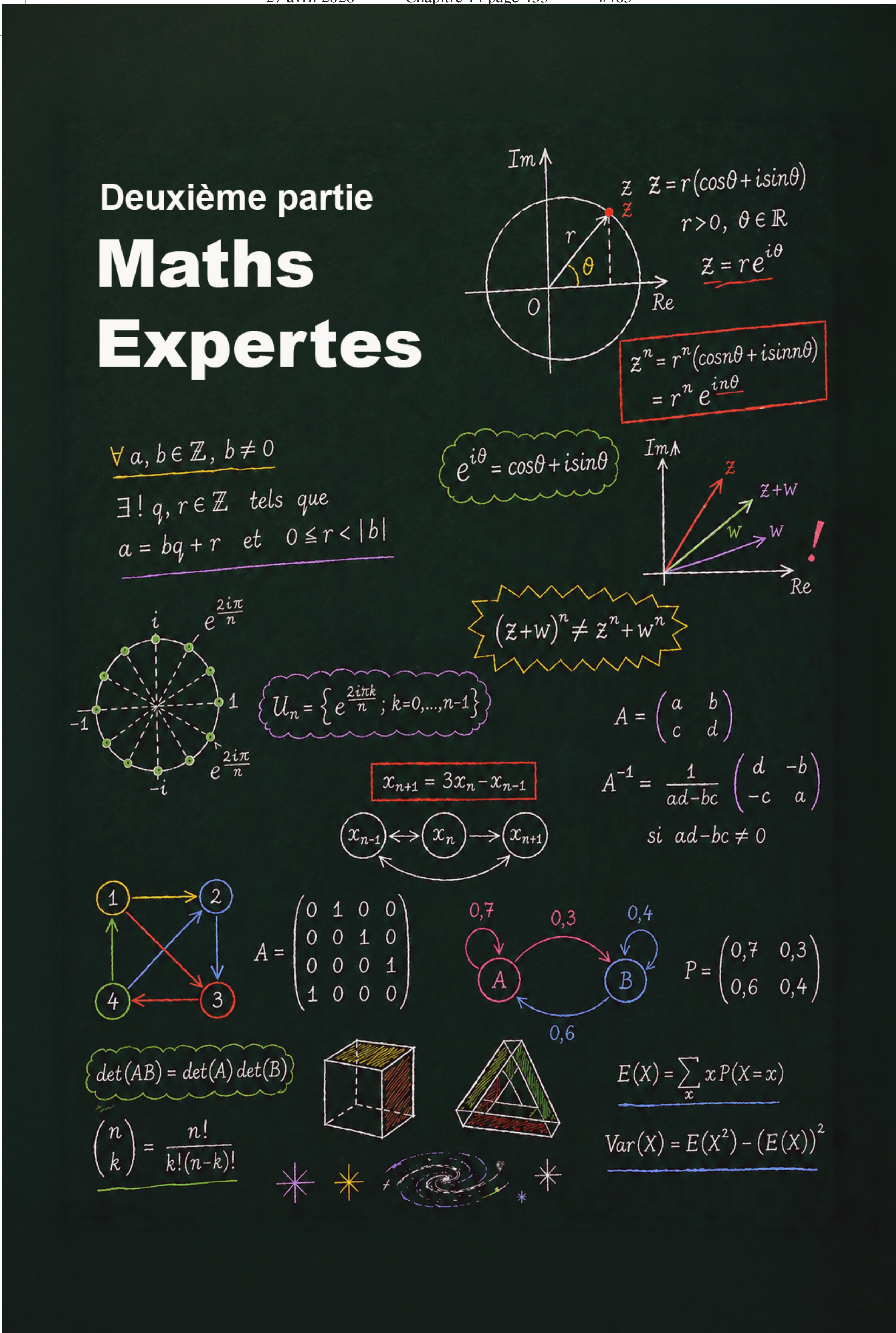
$$u_n \leqslant \mathrm{e}^n\left((x-1)+\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right).$$

D'après le théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty.$$

L'affirmation 5 est donc exacte.

Deuxième partie
Maths Expertes



Chapitre 15

Arithmétique

Plan du chapitre

1 Divisibilité

Exercice type 1 — Lycée Courbet, Belfort

1 Calculer le reste de la division euclidienne de 1 000 par 37.

2 En déduire que si n s'écrit $1\ 000 \times u + v$ alors :

$$n \text{ est divisible par } 37 \iff u + v \text{ est divisible par } 37.$$

Voir corrigé page 456

Définition 1 : diviseurs et multiples

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et p un entier supérieur ou égal à 2.
On dit que p *divise* n, et on écrit $p \mid n$, si et seulement si il existe un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = a \times p$.

On rencontre aussi les expressions : n est *multiple de* p, n est *divisible par* p.

Théorème 1 : division euclidienne

Soit $n \in \mathbb{Z}$, et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$n = pq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < q.$$

Définition 2 : congruence

Soient n, $m \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
On dit que n est *congru à m modulo p*, et on note : $n \equiv m\,[p]$ si et seulement si $n - m$ est divisible par p.

COURS

Propriétés 1

Soient $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, et p un entier supérieur ou égal à 2. Alors :

$$\begin{cases} a \equiv b\,[p] \\ b \equiv e\,[p] \\ c \equiv d\,[p] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \equiv e & [p] \\ a + c \equiv b + d & [p] \\ ac \equiv bd & [p] \end{cases}$$

Solution de l'exercice type 1

Lycée Courbet, Belfort

1. On peut écrire : $1\ 000 = 27 \times 37 + 1$ donc le quotient de la division euclidienne de 1 000 par 37 vaut 27 et le reste vaut 1.
2. Par la compatibilité des opérations avec la relation de congruence, nous avons :

$$1\ 000 \times 1 \times u + v \equiv u + v\,[37]$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} n \text{ divisible par } 37 &\iff n \equiv 0\,[37] \\ &\iff 1\ 000u + v \equiv 0\,[37] \\ &\iff u + v \equiv 0\,[37] \\ &\iff u + v \text{ divisible par } 37. \end{aligned}$$

Voir énoncé page 455

2 PGCD

2.1 Algorithme d'Euclide

Exercice type 2

Lycée Thiers, Marseille

Calculer le PGCD de 231 868 et de 8 190.

Voir corrigé page 457

Théorème 2 : algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers strictement positifs.
On pose $A_0 = a$ et $B_0 = b$, et on définit par récurrence deux suites d'entiers A_n et B_n comme suit :

$$A_{n+1} = B_n, \text{ et } B_{n+1} \text{ est le reste de la division de } A_n \text{ par } B_n.$$

Soit n_0 le plus petit entier tel que B_{n_0} soit nul.
Alors, B_{n_0-1} est le pgcd de a et de b.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Thiers, Marseille

Mettons en place l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 231\,868 &= 28 \times 8\,190 + 2\,548 \\ 8\,190 &= 3 \times 2\,548 + 546 \\ 2\,548 &= 4 \times 546 + 364 \\ 546 &= 1 \times 364 + 182 \\ 364 &= 2 \times 182 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{pgcd}(8\,190; 231\,868) = 182.$$

Voir énoncé page 456

2.2 Nombres premiers entre eux

Exercice type 3

Lycée Sainte-Croix, Neuilly

On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E).

Voir corrigé page 458

Définition 3 : entiers premiers entre eux

Deux entiers strictement positifs m et n sont dits *premiers entre eux* si et seulement si $\operatorname{pgcd}(m; n) = 1$.

Théorème 3 : théorème de Bézout

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On a l'équivalence suivante :

$$\operatorname{pgcd}(a; b) = 1 \iff \exists\,(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ au + bv = 1.$$

Propriété 2

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} d|a \text{ et } d|b \\ \exists\,(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ au + bv = d \end{cases} \iff \operatorname{pgcd}(a; b) = d.$$

Propriété 3 : équations diophantiennes

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
L'équation diophantienne $ax + by = c$, d'inconnues entières x et y, admet des solutions si et seulement si $\operatorname{pgcd}(a; b)$ divise c.

Exemple : pgcd(17; 19) $= 1$ donc l'équation diophantienne $17x+19y = 1$ admet des solutions entières.

Théorème 4 : théorème de Gauss

Si un entier n divise le produit ab et si n et a sont premiers entre eux, alors n divise b.

Solution de l'exercice type 3

Lycée Sainte-Croix, Neuilly

On a :
$$12\times4-5\times9=3$$
$$12\times x-5\times y=3$$
Donc, par soustraction, on a :
$$12(x-4) = 5(y-9).$$
12 divise $12(x-4)$ donc 12 divise $5(y-9)$.
Or, 12 est premier avec 5 donc, d'après le théorème de Gauss, 12 divise $(y-9)$.
Il existe donc un entier relatif k tel que $y - 9 = 12k$ soit $y = 12k + 9$.
En remplaçant y par $12k + 9$ dans l'équation initiale, on en déduit alors que $x = 5k + 4$.

Réciproquement, tout couple $(5k+4\,;\,12k+9)$, où k désigne un entier relatif est solution de l'équation $12x - 5y = 3$ puisque :
$$12(5k+4) - 5(12k+9) = 3.$$
Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(5k + 4\,;\,12k + 9)$, où k désigne un entier relatif.

Voir énoncé page 457

3 Nombres premiers

Exercice type 4

Lycée Chaptal, Paris

Soit n un entier positif, on définit :
$$M_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$
Démontrer que si M_n est premier, alors n est premier.

Voir corrigé page 459

Définition 4

Un entier naturel n est un *nombre premier* s'il possède deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

ATTENTION

1 n'est pas un nombre premier.

Théorème 5

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 non premier.
Alors, n admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Exemple : 943 admet un diviseur premier inférieur ou égal à 30 car $\sqrt{943} \approx 30{,}7$.

Théorème 6

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 7 : décomposition en facteurs premiers

Pour tout entier n strictement plus grand que 1, il existe un unique k-uplet de nombres premiers $(p_1\ ;\ \ldots\ ;\ p_k)$, avec $p_1 < \cdots < p_k$, et un unique k-uplet d'entiers strictement positifs $(a_1\ ;\ \ldots\ ;\ a_k)$ tel que :

$$n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}.$$

Théorème 8 : petit théorème de Fermat

Soit a un entier naturel.
Si p est un nombre premier ne divisant pas a alors $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

Exemple : $p = 7$ ne divise pas $a = 13$ donc, d'après le petit théorème de Fermat,

$$13^{7-1} \equiv 1\,[7] \qquad \text{soit} \qquad 13^6 \equiv 1\,[7]$$

Solution de l'exercice type 4 — **Lycée Chaptal, Paris**

Supposons que n n'est pas premier. Il existe alors deux entiers p et q strictement supérieurs à 1 tels que M_n puisse s'écrire :

$$M_n = \left(\frac{3^{pq} - 1}{3^q - 1}\right)\left(\frac{3^q - 1}{3 - 1}\right).$$

Les deux facteurs du produit sont des entiers : le premier est la somme des p premiers termes de la suite géométrique de raison 3^q et de premier terme 1 ; le second est la somme des q premiers termes de la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1. Ce sont donc dans les deux cas des sommes d'entiers non nuls.
Comme M_n est premier, l'un de ces facteurs est égal à 1. Ceci implique que $p = 1$ ou $q = 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc n est premier.

Voir énoncé page 458

INTERROS

1 V/F Divisibilité dans $\mathbb{N}$

10 min Corrigé p. 465

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Le nombre 8 775 possède 12 diviseurs.
2. Pour tout entier naturel n, l'entier $N = n^5 - n$ est divisible par 30.
3. L'équation $65x - 20y = 1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
4. L'entier $80 \times 5^{469} - 1$ est multiple de 7.

2 V/F PGCD

10 min Corrigé p. 465

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Si deux entiers naturels sont divisibles respectivement par 6 et 10, alors leur PGCD est 2.
2. Soit a et b deux entiers naturels non nuls, s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$, alors le PGCD de a et de b est 2.
3. Si $n \equiv 1\ [7]$ alors $\operatorname{pgcd}(3n + 4; 4n + 3) = 7$.
4. Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur de $a + b$ qui ne soit pas égal à $a + b$.

3 V/F Nombres premiers

10 min Corrigé p. 466

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Si p est premier, alors $p^3 + 2$ aussi.
2. Si les entiers a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et $a - b$ le sont aussi.
3. Si b est premier, alors pour tout entier naturel a non nul, $\operatorname{pgcd}(a; b) = 1$.
4. Si p est premier, alors l'entier $N = 3^p - p$ est divisible par p.

Divisibilité et congruences

4 Divisibilité par 9

★ 15 min Corrigé p. 466

Lycée Marie Curie, Sceaux

1. Montrer que pour tout n entier positif, on a : $10^n \equiv 1\ [9]$.
2. En déduire que si n s'écrit $10 \times u + v$, alors n est divisible par 9 si et seulement si $u + v$ est divisible par 9.
3. En déduire un critère de divisibilité par 9.

5 Critère de divisibilité par 4

★ 10 min Corrigé p. 467

Lycée Arago, Perpignan

Montrer qu'un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre constitué de ses deux derniers chiffres en base 10 est divisible par 4.

6 Inverse modulo 19

★ 10 min Corrigé p. 467

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1. Justifier que 8 est un inverse de 12 modulo 19.
2. En déduire l'ensemble des solutions entières de l'équation $8x \equiv 7\,[19]$.

7 Divisibilité de polynômes

★★ 10 min Corrigé p. 467

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n - 2$ divise $n - 4$

8 Divisibilité par 24

★★ 20 min Corrigé p. 468

Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

1. Quels sont les restes possibles de la division d'un nombre premier p par 4 ?
2. Quels sont les restes possibles de la division d'un nombre premier p par 6 ?
3. En déduire que pour tout nombre premier $p \geqslant 5$, l'entier $p^2 - 1$ est divisible par 24.

9 Critère de divisibilité par 7

★★ 20 min Corrigé p. 469

Lycée Buffon, Paris

Soit $a < 10\,000$. On peut l'écrire en base 10 :

$$a = a_3a_2a_1a_0 \qquad \text{avec} \qquad a_i \in [\![0\,;9]\!].$$

Posons $u = 2a_3 + a_1$ et $v = 2a_2 + a_0$.

Montrer que a est divisible par 7 si et seulement si $3u + v$ est divisible par 7.

10 Chiffres des unités d'une puissance

★★ 15 min Corrigé p. 470

Lycée Montesquieu, Herblay

1. Déterminer le plus petit entier naturel p non nul tel que $7^p \equiv 1\,[10]$.
2. Trouver le chiffre des unités dans l'écriture décimale de :

$$A = 1\,997^{1\,999^{2\,001}}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

INTERROS

PGCD

11 Calcul de PGCD

★ 10 min Corrigé p. 470

Lycée Charlemagne, Paris

En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD des nombres suivants.

1. 2 070 et 432
2. 1 065 et 235
3. 363 et 792
4. 858 et 910

12 Équation diophantienne

★ 10 min Corrigé p. 470

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Justifier que l'équation $322u + 238v = 266$ admet des couples d'entiers relatifs solutions.

13 Entiers premiers entre eux

★ 15 min Corrigé p. 471

Lycée Masséna, Nice

Soit n un entier positif, montrer que $2n+3$ et n^2+3n+2 sont premiers entre eux.

14 Équations diophantiennes

★ 20 min Corrigé p. 472

Lycée Jacques Monod, Clamart

Il s'agit de résoudre le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10\,[23] \\ x \equiv 4\,[7] \end{cases}$

1. Déterminer un couple d'entiers $(\alpha\ ;\ \beta)$ solution de : $23\alpha + 7\beta = 1$.
2. En déduire un couple $(u_0\ ;\ v_0)$ solution de l'équation ci-dessous, puis résoudre complètement cette équation :
$$23u - 7v = -6.$$
3. Démontrer que x est solution de (S) si et seulement s'il existe $(u\ ;\ v)$ couple d'entiers vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$.
En déduire l'ensemble des solutions de (S).
4. Déterminer la plus petite solution entier naturel x_0 divisible par 16.

15 Équation diophantienne ★★ 15 min Corrigé p. 473

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x - 17y = 3$.

16 Équations diophantiennes ★★ 15 min Corrigé p. 474

Lycée Hoche, Versailles

On considère l'équation :

$$(E) \quad : \quad 7x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que $(15\ ;\ 4)$ est une solution de (E), puis résoudre l'équation (E).
2. En déduire l'unique entier a tel que :

$$0 \leqslant a \leqslant 25 \qquad \text{et} \qquad 7a \equiv 1\ [26].$$

17 Système et PGCD ★★ 15 min Corrigé p. 475

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

x et y désignent deux nombres entiers naturels non nuls tels que :

$$(S)\ :\ \begin{cases} x + y & = 117 \\ \text{pgcd}(x;\, y) & = 13 \end{cases}.$$

1. Justifier que résoudre le système (S) revient à résoudre le système :

$$(S')\ :\ \begin{cases} x' + y' & = 9 \\ \text{pgcd}(x';\, y') & = 1 \end{cases}.$$

2. Résoudre le système (S') puis déterminer l'ensemble des couples $(x;\, y)$ solutions de (S).

Nombres premiers

18 Justification ★ 5 min Corrigé p. 475

Lycée Jacques Monod, Clamart

Justifier que 353 est un nombre premier.

INTERROS

19 PPCM et PGCD

★ 5 min Corrigé p. 475

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

On donne les décompositions en produit de facteurs premiers suivantes :

$$a = 2 \times 5^3 \times 41 \times 43^3 \qquad \text{et} \qquad b = 2^4 \times 3 \times 5^5 \times 29^3.$$

Déterminer pgcd$(a; b)$ et ppcm$(a; b)$.

20 Décomposition en facteurs premiers

★ 10 min Corrigé p. 476

Lycée Jules Haag, Besançon

Soit u et v deux entiers premiers entre eux, avec $uv = n^2$.
Montrer que u et v sont eux-mêmes des carrés.

21 Montrer une divisibilité

★★ 10 min Corrigé p. 476

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Démontrer que pour tout entier naturel k, 7 divise $10^{6k+4} + 3$.

22 Somme et congruence

★★ 15 min Corrigé p. 477

Lycée Jacques-Monod, Clamart

Soit n un nombre premier. Montrer que :

$$1 + 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} \equiv 0\,[n].$$

23 Nombres premiers

★★ 20 min Corrigé p. 477

Lycée Masséna, Nice

Soit $M_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.
Montrer que si M_n est premier, n est premier.

24 Équation du second degré dans $\mathbb{Z}$

★★ 15 min Corrigé p. 478

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Soit p un nombre premier.
Trouver les couples $(x\,;\,y)$ tels que $x^2 - y^2 = p$.

1 V/F Divisibilité dans $\mathbb{N}$

Énoncé p. 460

1 *Faux*. L'entier 8 775 possède 24 diviseurs. Pour calculer le nombre de diviseurs de 8 775, on le décompose en produit de facteurs premiers : $8\,775 = 3^3 \times 5^2 \times 13^1$. Le nombre de diviseurs de 8 775 est donc $N = (3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

2 *Vrai*. Si $n = 0$ ou $n = 1$, alors $N = 0$ donc N est bien divisible par 5. Si $n > 1$, on écrit N sous forme factorisée : $N = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. On remarque que le nombre $n(n-1)(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs donc il est toujours pair et multiple de 3 donc divisible par 6. Il ne reste plus qu'à prouver que N est toujours multiple de 5 pour pouvoir conclure.

- Si $n = 5k$, n est évidemment divisible par 5 ;
- Si $n = 5k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n-1$ est multiple de 5 donc N aussi ;
- Si $n = 5k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors n^2+1 est multiple de 5 donc N aussi ;
- Si $n = 5k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors n^2+1 est multiple de 5 donc N aussi ;
- Si $n = 5k+4$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n+1$ est multiple de 5 donc N aussi.

On peut donc conclure que, pour tout entier naturel n, N est à la fois divisible par 6 et par 5. Comme 5 et 6 sont premiers entre eux, il en résulte que N est divisible par leur produit 30.

3 *Vrai*. En effet, 5 divise 65 et 20 donc il divise $65x - 20y$. Or 5 ne divise par 1 donc il n'existe pas d'entiers relatifs x et y tels que $65x - 20y = 1$.

4 *Vrai*. On a $5^6 = 15\,625$, donc $5^6 \equiv 1\,[7]$. Or, $469 = 6 \times 78 + 1$. Donc $5^{469} = \left(5^6\right)^{78} \times 5$. Par conséquent,$5^{469} \times 5 \equiv 5\,[7]$.

Or, $80 \equiv 3\,[7]$ donc $80 \times 5^{469} \equiv 1\,[7]$.

L'entier $80 \times 5^{469} - 1$ est donc un multiple de 7.

2 V/F PGCD

Énoncé p. 460

1 *Faux*. 12 est divisible par 6 et 20 est divisible par 10, mais le PGCD de 12 et 20 est 4.

2 *Faux*. On considère les entiers $a = 3$ et $b = 4$. On prend $u = 6$ et $v = -4$. On a alors $au + bv = 2$, alors que le PGCD de a et de b est 1.

3 *Vrai*. Comme $n \equiv 1\,[7]$ alors il existe un entier k tel que $n = 7k+1$. On a alors $3n+4 = 21k+7 = 7(3k+1)$ et $4n+3 = 28k+7 = 7(4k+1)$ donc les entiers $3n+4$ et $4n+3$ sont tous les deux divisibles par 7. Il reste à prouver que $3k+1$ et $4k+1$ n'ont aucun diviseur commun.

On remarque que $4(3k+1) - 3(4k+1) = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, les entiers $3k+1$ et $4k+1$ sont premiers entre eux. Par suite, on a bien $\text{PGCD}(3n+4, 4n+3) = 7$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

CORRIGÉS

4 *Faux*. Le PGCD de a et b est bien un diviseur de $a+b$, mais ce n'est pas toujours le plus grand diviseur. Pour $a = 6$ et $b = 4$, le PGCD de a et b est 2, mais la somme $a + b = 10$ est divisible par 5.

3 V/F Nombres premiers

Énoncé p. 460

1 *Faux*. Il suffit de choisir $p = 2$. On a alors $p^3 + 2 = 10$. L'entier p est bien premier mais $p^3 + 2$ ne l'est pas.

2 *Faux*. Choisissons $a = 17$ et $b = 15$, les entiers a et b sont premiers entre eux. Cependant, comme $a+b = 32$ et $a-b = 2$, les entiers $a+b$ et $a-b$ ne sont pas premiers entre eux.

3 *Faux*. Si a est multiple de b, par exemple $a = 3b$, alors : $\text{pgcd}(a; b) = b$.

4 *Faux*. Contre-exemple pour $p = 2$: le nombre $N = 7$, n'est pas divisible par 2.

4 Divisibilité par 9

Énoncé p. 460

Lycée Marie Curie, Sceaux

1 D'après la compatibilité de la multiplication avec la congruence et comme $10 \equiv 1\,[9]$, on a :

$$10^n \equiv 10 \times 10 \times \cdots \times 10 \equiv 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \equiv 1\,[9].$$

2 Il suffit de voir que l'on a :

$$10u + v \equiv u + v\,[9].$$

Donc l'un des membres est congru à 0 modulo 9 si et seulement si l'autre membre est congru à 0 modulo 9.

3 Comme la relation de congruence est compatible avec la multiplication, nous avons, pour tout entier n positif, la relation suivante :

$$10^n \equiv 1\,[9].$$

Écrivons $n = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^n$ en base 10, comme la relation de congruence est compatible avec l'addition, nous obtenons

$$n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,[9].$$

Ainsi 9 divise n si et seulement si 9 divise la somme des chiffres qui composent n en base 10.

5 Critère de divisibilité par 4

Énoncé p. 461

Lycée Arago, Perpignan

Écrivons un entier $n = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$ en base 10. Posons en base 10, $m = a_1 a_0$ et $p = a_n a_{n-1} \dots a_2$. Nous avons l'égalité $n = 100p + m$. Comme $100 \equiv 0\,[4]$, nous pouvons affirmer que $n \equiv m\,[4]$.

Ainsi 4 divise n si et seulement si 4 divise m.

6 Inverse modulo 19

Énoncé p. 461

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 Petit rappel : a est un inverse de b modulo p signifie que $ab \equiv 1\,[p]$.
On a : $8 \times 12 = 96 = 5 \times 19 + 1$ donc $8 \times 12 \equiv 1\,[19]$.
Ainsi, 8 est bien un inverse de 12 modulo 19.

2 $$\begin{aligned} 8x \equiv 7\,[19] &\iff 12 \times 8x \equiv 12 \times 7\,[19] \\ &\iff 96x \equiv 84\,[19] \\ &\iff x \equiv 8\,[19]. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $8x \equiv 7\,[19]$ est donc :
$$\mathcal{S} = \{8 + 19k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

7 Divisibilité de polynômes

Énoncé p. 461

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

MÉTHODE

Pour trouver toutes les valeurs de n telles que $an + b$ divise $n + p$, on « fabrique » à partir de $n + p$ une expression qui ressemble à $an + b$.

Supposons que $3n - 2$ divise $n - 4$.

Alors, $3n - 2$ divise tout multiple de $n - 4$, en particulier $3(n - 4) = 3n - 12$.

$3n - 2 | 3n - 2$ et $3n - 2 | 3n - 12$ donc $3n - 2$ divise $(3n - 2) - (3n - 12)$, soit 10.

Or, les diviseurs de 10 sont $-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5$ et 10. Faisons alors une disjonction de cas :

- $3n - 2 = -10 \iff n = -\dfrac{8}{3} \notin \mathbb{Z} \to$ ne convient pas.
- $3n - 2 = -5 \iff n = -1 \in \mathbb{Z} \to$ convient.
- $3n - 2 = -2 \iff n = 0 \in \mathbb{Z} \to$ convient.
- $3n - 2 = -1 \iff n = \dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \to$ ne convient pas.
- $3n - 2 = 1 \iff n = 1 \in \mathbb{Z} \to$ convient.

- $3n-2=2 \iff n=\dfrac{4}{3} \notin \mathbb{Z} \to$ ne convient pas.
- $3n-2=5 \iff n=\dfrac{7}{3} \notin \mathbb{Z} \to$ ne convient pas.
- $3n-2=10 \iff n=4 \in \mathbb{Z} \to$ convient.

Nous trouvons donc que les seules valeurs de n qui conviennent sont :

$$n \in \{-1;\ 0;\ 1;\ 4\}.$$

8 Divisibilité par 24

Énoncé p. 461

Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

1 Le reste ne peut être 0, p serait divisible par 4 (ce qui n'est pas possible puisque p est premier), le reste peut être 1.

Si le reste est 2, $p=4k+2=2(2k+1)$. Ce nombre n'est premier que si $2k+1=1$, soit $k=0$; alors $p=2$.

Enfin le reste peut être 3.

2 Le reste ne peut être 0, car alors p serait divisible par 6, il peut être 1. Si le reste est 2, $p=6k+2=2(3k+1)$. Ce nombre n'est premier que si $3k+1=1$, soit si $k=0$, et alors $p=2$.

Si le reste est 3, $p=6k+3=3(2k+1)$; ce nombre n'est premier que si $2k+1=1$, soit si $k=0$, et alors $p=3$. Le reste 4 n'est pas possible : en effet si $p=6k+4$, $p=2(3k+2)$; ce nombre ne peut être premier car il n'existe pas de valeur de k telle que $3k+2=1$. 5 est un reste possible.

3 Soit p un nombre premier tel que $p \geqslant 5$.

Les restes possibles dans la division de p par 4 sont sont 1 ou 3 (question 1) et ceux de la division de p par 6 sont 1 ou 5 (question 2).

On doit donc étudier quatre cas.

- Cas 1.

$$p \equiv 1\,[4] \quad \text{et} \quad p \equiv 1\,[6].$$

Il existe alors deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que :

$$p=4n_1+1 \quad \text{et} \quad p=6n_2+1.$$

On a donc :

$$4n_1+1=6n_2+1\ ,$$

d'où :

$$2n_1=3n_2.$$

Comme 2 divise $3n_2$ et est premier avec 3, il résulte du théorème de Gauss que n_2 est pair.
Il existe donc un entier naturel k tel que $n_2=2k$.

On a alors :

$$p = 12k + 1 \quad \text{et} \quad p^2 - 1 = 24(6k^2 + k) ,$$

ce qui montre que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

- Cas 2.

$$p \equiv 3\,[4] \quad \text{et} \quad p \equiv 5\,[6].$$

Il existe alors deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que :

$$p = 4n_1 + 3 \quad \text{et} \quad p = 6n_2 + 5.$$

On a donc :

$$4n_1 + 3 = 6n_2 + 5 ,$$

d'où :

$$2n_1 = 3n_2 + 1.$$

Par conséquent, $3n_2 + 1$ est pair, donc $3n_2$ est impair.
L'entier n_2 étant alors impair, il existe un entier k tel que $n_2 = 2k + 1$.
On en déduit que :

$$p^2 - 1 = (12k + 11)^2 - 1 = 24(k + 1)(6k + 5) ,$$

ce qui montre que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

- On étudierait de même le cas 3 :

$$p \equiv 1\,[4] \quad \text{et} \quad p \equiv 5\,[6]$$

et le cas 4 :

$$p \equiv 3\,[4] \quad \text{et} \quad p \equiv 1\,[6].$$

9 Critère de divisibilité par 7

Énoncé p. 461

Lycée Buffon, Paris

Remarquons que :

$$10 \equiv 3\,[7], \quad 100 \equiv 2\,[7] \quad \text{et} \quad 1000 \equiv 6\,[7].$$

Donc $a_3a_2a_1a_0 \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3\,[7]$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} a = a_3a_2a_1a_0 \equiv 0\,[7] &\iff a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 \equiv 0\,[7] \\ &\iff 3(2a_3 + a_1) + (2a_2 + a_0) \equiv 0\,[7] \\ &\iff 3u + v \equiv 0\,[7]. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

10 Chiffres des unités d'une puissance

Énoncé p. 461

Lycée Montesquieu, Herblay

1 On a successivement :

$$7 \equiv 7\,[10] \qquad 7^2 \equiv 49 \equiv 9\,[10]$$
$$7^3 \equiv 7 \times 9 \equiv 3\,[10] \qquad 7^4 \equiv 7 \times 3 \equiv 1\,[10]$$

donc $p = 4$.

2 Bien sûr :

$$A \equiv 7^{1\,999^{2\,001}}\,[10].$$

Notons r le reste de la division euclidienne de $1\,999^{2\,001}$ par 4, on a :

$$A \equiv 7^r\,[10].$$

Or, $1\,999 \equiv 3\,[4]$ donc il faut simplifier $3^{2\,001}\,[4]$.
Comme $3^2 = 9 \equiv 1\,[4]$, il vient $3^{2\,001} \equiv 3^1\,[4]$. Alors :

$$A \equiv 7^3\,[10] \qquad \text{donc} \qquad A \equiv 3\,[10].$$

Le chiffre des unités dans l'écriture décimale de A est 3.

11 Calcul de PGCD

Énoncé p. 462

Lycée Charlemagne, Paris

1
$$\begin{aligned} 2\,070 &= 4 \times 432 + 342 \\ 432 &= 1 \times 342 + 90 \\ 342 &= 3 \times 90 + 72 \\ 90 &= 1 \times 72 + 18 \\ 72 &= 4 \times 18 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{pgcd}(2\,070 ; 432) = 18$.

2
$$\begin{aligned} 1\,065 &= 4 \times 235 + 125 \\ 235 &= 1 \times 125 + 110 \\ 125 &= 1 \times 110 + 15 \\ 110 &= 7 \times 15 + 5 \\ 15 &= 3 \times 5 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{pgcd}(1\,065 ; 235) = 5$.

3
$$\begin{aligned} 792 &= 2 \times 363 + 66 \\ 363 &= 5 \times 66 + 33 \\ 66 &= 2 \times 33 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{pgcd}(792 ; 363) = 33$.

4
$$\begin{aligned} 910 &= 1 \times 858 + 52 \\ 858 &= 16 \times 52 + 26 \\ 52 &= 2 \times 26 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{pgcd}(910 ; 858) = 26$.

12 Équation diophantienne

Énoncé p. 462

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Calculons donc dans un premier temps $\mathrm{pgcd}(322 ; 238)$.

$$\begin{aligned} 322 &= 1 \times 238 + 84 \\ 238 &= 2 \times 84 + 70 \\ 84 &= 1 \times 70 + 14 \\ 70 &= 4 \times 14 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{pgcd}(322; 238) = 14$.

Or, 14 divise 266 donc, d'après une propriété du cours sur les équations diophantiennes, l'équation $322u + 238v = 266$ admet des solutions entières car $\text{pgcd}(322; 238)$ divise 266.

13 Entiers premiers entre eux

Énoncé p. 462

Lycée Masséna, Nice

Remarquons tout d'abord que :

$$n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$$

et

$$2n + 3 = (n+1) + (n+2).$$

Or, si un entier d divise deux entiers a et b alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ces deux entiers.

Posons $a = 2n + 3$ et $b = n^2 + 3n + 2$.

Soit d un diviseur commun à a et b.

Alors d divise $2b - (n+1)a$ soit d divise $n + 1$.

Mais alors d divise aussi $(2n+3) - 2(n+1)$ soit d divise 1. On en déduit que $d = 1$. On peut alors conclure que le seul diviseur commun à $n^2 + 3n + 2$ et $2n + 3$ est 1, ce qui prouve que ces deux nombres sont premiers entre eux.

MÉTHODE

Pour montrer que deux entiers sont premiers entre eux, on dispose de quatre méthodes :

- On utilise le théorème de Bézout : deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
- On désigne par d un diviseur commun aux deux entiers, puis, en utilisant des combinaisons linéaires judicieusement choisies de ces deux entiers, on montre que $d = 1$.
- On montre, en le calculant (par exemple par l'algorithme d'Euclide), que le PGCD de ces deux entiers est égal à 1.
- On utilise un raisonnement par l'absurde (on suppose que les deux entiers ne sont pas premiers entre eux et on montre que ceci conduit à une contradiction).

CORRIGÉS

14 Équations diophantiennes

Énoncé p. 462

Lycée Jacques Monod, Clamart

1 Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 23 &= 7 \times 3 + 2 \\ 7 &= 2 \times 3 + 1. \end{aligned}$$

Alors, $2 \times 3 = 7 - 1$. Multiplions par 3 la première égalité :

$$\begin{aligned} 23 \times 3 &= 7 \times 9 + 2 \times 3 \\ &= 7 \times 9 + 7 - 1 \\ &= 7 \times 10 - 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$23 \times 3 - 7 \times 10 = -1\,,$$

d'où :

$$23 \times (-3) + 7 \times 10 = 1.$$

MÉTHODE

Comme 23 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout assure l'existence d'un couple d'entiers (α, β) tels que $23\alpha + 7\beta = 1$. L'algorithme d'Euclide permet ensuite de trouver un couple d'entiers répondant à la question.

2 Alors en multipliant par (-6) : $23 \times 18 - 7 \times 60 = -6$. Soit un couple d'entiers $(u\,;\,v)$ vérifiant $23u - 7v = -6$:

$$\begin{aligned} 23u - 7v = -6 &\iff 23(u-18) - 7(v-60) = 0 \\ &\iff 23(u-18) = 7(v-60). \end{aligned}$$

Or, 23 et 7 sont premiers entre eux, d'où :

$$\begin{aligned} 23u - 7v = -6 &\iff 23 \mid (v-60) \quad \text{et} \quad 7 \mid (u-18) \\ &\ \text{et} \quad \frac{v-60}{23} = \frac{u-18}{7} \\ &\iff v = 60 + 23m \quad \text{et} \quad u = 18 + 7m \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc un couple vérifiant l'égalité est, par exemple, celui obtenu pour $m = 0$, soit $(18\,;\,60)$.

3 Soit un entier x :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (S) &\iff \begin{cases} x = 10 + 23u \quad (u \in \mathbb{Z}) \\ 10 + 23u \equiv 4\,[7] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 10 + 23u \quad (u \in \mathbb{Z}) \\ 23u \equiv -6\,[7] \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x \text{ solution de } (S) &\iff \begin{cases} x = 10 + 23u & (u \in \mathbb{Z}) \\ 23u = -6 + 7v & (v \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 10 + 23u & (u \in \mathbb{Z}) \\ u = 18 + 7m & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\
&\iff x = 10 + 23(18 + 7m) = 424 + 161m \\
&\quad\ \text{pour un certain } m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

4

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$x = 424 + 161m$	585	746	907	1068	1229	1390	1551	1712 $= 16 \times 107$

La plus petite solution x_0 divisible par 16 est 1 712.

15 Équation diophantienne

Énoncé p. 463

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

On nous demande ici de résoudre une équation diophantienne classique :

$$5x - 17y = 3.$$

- Étape 1 : calcul de pgcd(5; 17).

  pgcd(5; 17) = 1 car 5 et 17 sont premiers entre eux.
  La propriété sur les équations diophantiennes nous assure donc l'existence de solutions à cette équation car pgcd(17; 5) divise 3.

- Étape 2 : exploitation de l'algorithme d'Euclide.

$$
\begin{aligned}
17 &= 3 \times 5 + 2 \\
5 &= 2 \times 2 + 1
\end{aligned}
$$

On en déduit, en remontant l'algorithme :

$$
\begin{aligned}
1 &= 5 - 2 \times 2 \\
&= 5 - (17 - 3 \times 5) \times 2 \\
&= 7 \times 5 - 2 \times 17.
\end{aligned}
$$

D'où :

$$3 = 21 \times 5 - 6 \times 17.$$

Ainsi, le couple $(x = 21;\ y = 6)$ est une solution particulière de l'équation $5x - 17y = 3$.

CORRIGÉS

Remarque : on aurait aussi pu remarquer, sans faire appel à l'algorithme d'Euclide, que $5 \times 4 - 1 \times 17 = 3$ et ainsi obtenir un autre couple solution : $(4; 1)$.

- Étape 3 : utilisation de la solution particulière.

On a :

$$5x - 17y = 3$$
$$5 \times 21 - 17 \times 6 = 3$$

Par différence, on déduit :

$$5(x-21) - 17(y-6) = 0 \qquad \text{soit} \qquad 5(x-21) = 17(y-6).$$

Le fait que $\text{pgcd}(17; 5) = 1$ nous assure, d'après le théorème de Gauss, que :

$$5|(y-6) \qquad \text{et} \qquad 17|(x-21)$$

soit :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} y-6 & = 5k \\ x-21 & = 17k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 21 + 17k \\ y = 6 + 5k \end{cases}$$

L'ensemble solution de l'équation $5x - 17y = 3$ est donc :

$$\mathcal{S} = \{21 + 17k; 6 + 5k) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

16 Équations diophantiennes

Énoncé p. 463

Lycée Hoche, Versailles

1 $7 \times 15 - 26 \times 4 = 1$ donc le couple $(15 ; 4)$ est solution.

On a donc :

$$\begin{cases} 7x - 26y & = 1 \\ 7 \times 15 - 26 \times 4 & = 1 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre, on obtient :

$$7(x-15) - 26(y-4) = 0 \text{ ,}$$

ou encore :

$$7(x-15) = 26(y-4).$$

26 divise le produit $7(x-15)$, et est premier avec 7, donc 26 divise $x - 15$, et il existe k tel que $x = 26k + 15$.

En reportant dans l'équation de départ, on a :

$$7(26k + 15) - 26y = 1 \text{ ,}$$

soit :

$$26y = 182k + 104 \text{ ,}$$

et donc $y = 7k + 4$.

On vérifie que les couples $(26k + 15\,;\,7k + 4)$ sont bien solutions en remplaçant dans l'équation de départ :

$$7(26k + 15) - 26(7k + 4) = 105 - 104 = 1.$$

Par conséquent, $S = \{(26k + 15\,;\,4 + 7k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2 a est une valeur possible pour x. On veut donc trouver k tel que $0 \leqslant 26k + 15 \leqslant 25$. La seule valeur possible est $k = 0$, et alors $a = 15$.

17 Système et PGCD

Énoncé p. 463

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 On a :

$$\begin{aligned} &(x;\,y) \text{ est solution de } (S)\\ \Longleftrightarrow\ &\exists\,(x';\,y') \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \begin{cases} x = 13x' \text{ et } y = 13y' \text{ avec } \operatorname{pgcd}(x';\,y') = 1\\ 13x' + 13y' = 13 \times 9 \end{cases}\\ \Longleftrightarrow\ &\exists\,(x';\,y') \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \begin{cases} x' + y' &= 9\\ \operatorname{pgcd}(x';\,y') &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Recherchons les entiers naturels non nuls x' et y' premiers entre eux dont la somme vaut 9. On trouve :

$$(1;\,8);\ (2;\,7);\ (4;\,5);\ (5;\,4);\ (7;\,2);\ (8;\,1).$$

En multipliant chacune de ses valeurs par 13, on obtient les couples $(x;\,y)$ solutions de (S) :

$$\mathcal{S} = \{(13;\,104);\ (26;\,91);\ (52;\,65);\ (65;\,52);\ (91;\,26);\ (104;\,13)\}.$$

18 Justification

Énoncé p. 463

Lycée Jacques Monod, Clamart

$\sqrt{353} \approx 17{,}8$ et les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{353}$ (2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17) ne divisent pas 353.

Ainsi, 353 est un nombre premier.

19 PPCM et PGCD

Énoncé p. 464

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

$$a = 2 \times 5^3 \times 41 \times 43^3 \qquad \text{et} \qquad b = 2^4 \times 3 \times 5^5 \times 29^3.$$

- Pour déterminer $\operatorname{pgcd}(a;\,b)$, on prend les diviseurs communs aux deux décompositions :

$$\operatorname{pgcd}(a;\,b) = 2 \times 5^3 = 250.$$

CORRIGÉS

- Pour déterminer ppcm$(a; b)$, on prend *tous* les diviseurs des deux décompositions :

$$\text{ppcm}(a; b) = 2^4 \times 3 \times 5^5 \times 29^3 \times 41 \times 43^3.$$

20 Décomposition en facteurs premiers

Énoncé p. 464

Lycée Jules Haag, Besançon

Considérons la décomposition de n en produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$$

où $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et $a_1, \ldots, a_k$ sont des entiers naturels non nuls. On a alors :

$$n^2 = p_1^{2a_1} \times \cdots \times p_k^{2a_k} \ ,$$

soit, comme $n^2 = uv$:

$$uv = p_1^{2a_1} \times \cdots \times p_k^{2a_k}.$$

Comme $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers, la décomposition de u et v en produits de facteurs premiers est de la forme :

$$u = p_1^{c_1} \times \cdots \times p_k^{c_k} \quad \text{et} \quad v = p_1^{d_1} \times \cdots \times p_k^{d_k}$$

où $c_i = 0$ dans le cas où le facteur premier p_i ne figure pas dans la décomposition de u, ou $c_i = 2a_i$ dans le cas contraire.

En effet, comme u et v sont premiers entre eux, ils ne peuvent avoir aucun facteur premier en commun.

On a de même $d_i = 0$ ou $d_i = 2a_i$.

Dans tous les cas, pour tout entier i compris entre 1 et k, c_i et d_i sont pairs, donc u et v sont des carrés.

21 Montrer une divisibilité

Énoncé p. 464

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Dès que l'on doit démontrer une divisibilité où il y a une puissance, on peut penser aux congruences.

pgcd$(10; 7) = 1$ et 7 est un nombre premier ; on peut alors appliquer le petit théorème de Fermat :

$$10^{7-1} \equiv 1\,[7] \iff 10^6 \equiv 1\,[7]$$

On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(10^6\right)^k \equiv 1\,[7] \iff 10^{6k} \equiv 1\,[7]\ (1).$$

De plus, $10 \equiv 3\,[7]$, d'où :

$$10^4 \equiv 3^4\,[7] \qquad \text{soit} \qquad 10^4 \equiv 4\,[7]\ (2).$$

Des congruences (1) et (2), on déduit :

$$\begin{aligned} 10^{6k} \times 10^4 \equiv 1 \times 4\,[7] &\iff 10^{6k+4} \equiv 4\,[7] \\ &\iff 10^{6k+4} + 3 \equiv 4 + 3\,[7] \\ &\iff 10^{6k+4} + 3 \equiv 0\,[7]. \end{aligned}$$

Ainsi, $10^{6k+4} + 3$ est bien divisible par 7, quelle que soit la valeur de l'entier naturel k.

22 Somme et congruence

Énoncé p. 464

Lycée Jacques-Monod, Clamart

n est un nombre premier donc, d'après le petit théorème de Fermat,

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\},\ k^{n-1} \equiv 1\,[n].$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} k^{n-1} \equiv \sum_{k=1}^{n-1} [n] \\ \iff\ & 1^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} \equiv n - 1\,[n] \\ \iff\ & 1^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} + 1 \equiv n\,[n] \\ \iff\ & 1 + 1^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1} \equiv 0\,[n]. \end{aligned}$$

23 Nombres premiers

Énoncé p. 464

Lycée Masséna, Nice

Le nombre M_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de terme général :

$$V_n = 10^n, \quad M_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Supposons que n non premier. Il existe alors deux entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ tels que $n = pq$. Nous pouvons écrire la décomposition en M_n en deux facteurs :

$$M_n = \left(\frac{10^{pq} - 1}{10^q - 1}\right)\left(\frac{10^q - 1}{10 - 1}\right).$$

Ces deux termes sont des entiers (sommes des premiers termes de suites géométriques à termes entiers).

Comme M_n est premier, l'un de ces termes vaut 1, ce qui correspond à $p = 1$ ou à $q = 1$. Donc n est premier.

CORRIGÉS

24 Équation du second degré dans $\mathbb{Z}$

Énoncé p. 464

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

Si $p = 2$, $(x + y)$ et $(x - y)$ sont de même parité ; leur produit 2 ne peut s'obtenir que si l'un est pair et l'autre impair, ce qui est impossible. L'équation n'a donc pas de solutions pour $p = 2$.

Dans la suite, on suppose p impair.
Factorisons le premier membre de l'équation : $p = (x + y)(x - y)$.
Comme p est premier, les seules factorisations de p dans $\mathbb{Z}$ sont :

$$p = 1 \times p = (-1) \times (-p) = p \times 1 = (-p) \times (-1).$$

Les quatre cas à envisager sont donc :

- $x + y = 1$, et alors $x - y = p$; on a donc $x = \dfrac{1+p}{2}$ et $y = \dfrac{1-p}{2}$, p étant un nombre premier. Les solutions sont les couples $\left(\dfrac{1+p}{2} \,;\, \dfrac{1-p}{2}\right)$, p étant un nombre premier.
- $x - y = 1$ et alors $x + y = p$; les solutions sont alors les couples de la forme $\left(\dfrac{1+p}{2} \,;\, \dfrac{p-1}{2}\right)$, p étant un nombre premier.
- $x + y = -1$, et alors $x - y = -p$; les solutions sont alors les couples de la forme $\left(\dfrac{-p-1}{2} \,;\, \dfrac{p-1}{2}\right)$, p étant un nombre premier.
- $x - y = -1$, et alors $x + y = -p$ et $y = -x - p$; les solutions sont alors les couples de la forme $\left(\dfrac{-p-1}{2} \,;\, \dfrac{1-p}{2}\right)$, p étant un nombre premier.

Chapitre 16

Nombres complexes

Plan du chapitre

1 Nombres complexes : partie algébrique

Exercice type 1 — Lycée Fénelon, Paris

1 Soient z_1 et z_2 les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$ et $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

Mettre sous la forme algébrique les nombres z_1, $\dfrac{1}{z_2}$ et $z_1 z_2$.

2 Résoudre l'équation $z - 3\overline{z} = 1 + \mathrm{i}$.

Voir corrigé page 482

1.1 Généralités

Théorème 1 : ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

On admet qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, de nombres z s'écrivant sous la forme $z = a + ib$, où $\mathrm{i}^2 = -1$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Dans cet ensemble, on admet que les règles de calculs sont identiques à celles valables dans $\mathbb{R}$ (notamment addition et multiplication).

Définitions 1

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- a est appelé la *partie réelle* de z, et noté $\mathrm{Re}(z)$;
- b est appelé la *partie imaginaire* de z, et noté $\mathrm{Im}(z)$.

Théorème 2

Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. On a :

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2).$$

COURS

1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle *conjugué* de z le nombre $\overline{z} = a - ib$.

Théorème 3

Pour tous nombres complexes z et z' :

1. $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}, (z \neq 0 \text{ si } n < 0)$

Propriété 1

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors, $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.

MÉTHODE

On utilise cette dernière propriété pour trouver la forme algébrique de l'inverse d'un nombre. Si $z = 3 + 2\mathrm{i}$ alors :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \times \overline{z}} = \frac{3 - 2\mathrm{i}}{3^2 + 2^2} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}\mathrm{i}.$$

Propriété 2

Soit z un nombre complexe.

- $z = \overline{z} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$; on dit alors que z est un *réel* ;
- $z = -\overline{z} \iff \mathrm{Re}(z) = 0$; on dit alors que z est un *imaginaire pur*.

1.3 Formule du binôme de Newton

Propriété 3

Soient a et b deux nombres complexes. Alors,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1.4 Équations dans $\mathbb{C}$

Propriété 4

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$z = z' \iff a = a' \quad \text{et} \quad b = b'.$$

Exemple : on souhaite résoudre l'équation $z - 2\overline{z} = 2 + 6\mathrm{i}$. On a alors :

$$\begin{aligned} z - 2\overline{z} = 2 + 6\mathrm{i} &\iff (a + ib) - 2(a - ib) = 2 + 6\mathrm{i} \\ &\iff -a + 3b\mathrm{i} = 2 + 6\mathrm{i} \\ &\iff -a = 2 \text{ et } 3b = 6 \\ &\iff a = -2 \text{ et } b = 2. \end{aligned}$$

L'équation admet donc pour ensemble solution $\mathcal{S} = \{-2 + 2\mathrm{i}\}$.

Propriété 5 : équations polynomiales de degré 2

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$.
L'équation admet :

- deux solutions réelles si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
- une solution réelle si $\Delta = 0$;
- deux solutions complexes si $\Delta < 0$ qui sont :

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Propriété 6 : factorisation d'un polynôme

Soit $P(z)$ un polynôme.
Si $P(a) = 0$ alors $P(z)$ se factorise par $(z - a)$.

Exemple : Soit $P(z) = 3z^3 - 7z^2 + 5z - 1$.
$P(1) = 0$ donc $P(z) = (z - 1)Q(z)$, où Q est un polynôme de degré 2.

Propriété 7 : factorisation de $z^n - a^n$

Soit a un nombre complexe. Pour tout entier naturel $n \neq 0$,

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}) = (z - a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1+k}.$$

Exemple : $z^3 - a^3 = (z - a)(z^2 + az + a^2)$.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

COURS

Théorème 4

Un polynôme de degré n admet au plus n racines complexes.

Solution de l'exercice type 1 — Lycée Fénelon, Paris

1 • $z_1 = \dfrac{i(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{-3+4i}{25} = -\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i.$

• $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{1^2+1^2} = \dfrac{1-2i+i^2}{2} = \dfrac{1-2i-1}{2} = -i.$

• $z_1 z_2 = \dfrac{i(1+i)}{(4-3i)(1-i)} = \dfrac{i-1}{4-4i-3i+3i^2} = \dfrac{(i-1)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)}$

$= \dfrac{i+7i^2-1-7i}{1^2+7^2} = \dfrac{-8}{50} - \dfrac{6}{50}i = -\dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25}i.$

Voir énoncé page 479

2 Nombres complexes : partie géométrie

Exercice type 2 — Lycée Branly, Nogent

Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3}.$$

Voir corrigé page 485

2.1 Affixes

Définitions 3

- On appelle *plan complexe* le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
- À tout nombre complexe $z = x + iy$, on peut associer un point M ou un vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(x;\ y)$; z est alors l'*affixe* de M et l'*affixe* de $\vec{w}$.

Propriétés 8 : affixes de points

Soient A et B deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B.

- Le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- $z_A = \overline{z_B} \iff A$ et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

Propriétés 9 : affixes de vecteurs

Soient $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs du plan complexe, d'affixes respectives z et z'.

- $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$.
- $\forall k \in \mathbb{R}$, $k\vec{w}$ a pour affixe kz.
- $\vec{w} = \vec{w}' \iff z = z'$.

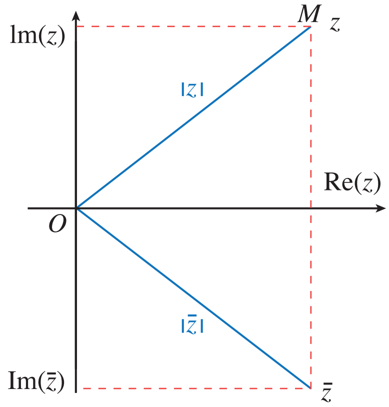
2.2 Module d'un nombre complexe

Définition 4

On appelle *module* du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, et on note $|z|$, le *nombre réel* :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Remarque : quand z désigne l'affixe d'un point M, $|z| = OM$, et quand z désigne l'affixe d'un vecteur $\vec{w}$, $|z| = \|\vec{w}\|$.



Propriétés 10

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $|z| = |\bar{z}|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$ $(n \in \mathbb{Z}, z \neq 0$ si $n < 0)$
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

2.3 Ensemble $\mathbb{U}$

Définition 5 : ensemble Unité

L'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = 1$ est noté $\mathbb{U}$.

Propriété 11 : stabilité de $\mathbb{U}$

Soient z et z' deux nombres complexes de $\mathbb{U}$. Alors,

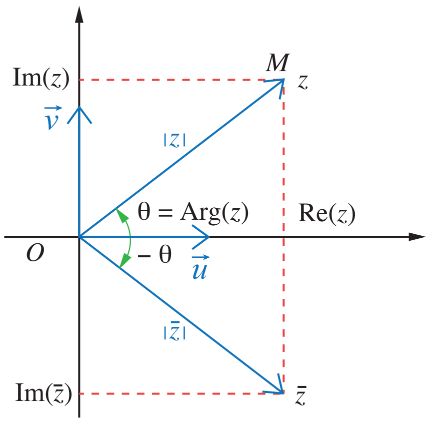
$$zz' \in \mathbb{U} \quad , \quad \frac{1}{z} \in \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z'} \in \mathbb{U}.$$

COURS

2.4 Arguments d'un nombre complexe

Définition 6

Soit z un nombre complexe non nul et M le point du plan complexe d'affixe z.
On appelle *argument* de z, et on note $\arg(z)$, l'angle $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Propriétés 12 : calcul d'un argument

Soit $z = x + \mathrm{i}y$. On pose alors $\theta = \arg(z)$. Alors,

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Remarque : un argument est toujours défini *modulo* 2π.

Exemple : si $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, alors $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, et donc :

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi, $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On écrira alors : $\theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Propriétés 13

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors, pour $n \in \mathbb{Z}$:

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(z^n\right) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

2.5 Forme trigonométrique

Définition 7

Soit z un nombre complexe. En notant $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$,

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

est la *forme trigonométrique* de z.

Exemple : $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Solution de l'exercice type 2 — Lycée Branly, Nogent

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\mathrm{i}}{3} = \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right] = \frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Voir énoncé page 482

3 Nombres complexes : partie trigonométrie

Exercice type 3 — Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

1. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe :

$$\left(2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^5.$$

Voir corrigé page 486

3.1 Formules de trigonométrie

Propriétés 14 : formules d'addition

Soient a et b deux réels. Alors,

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

COURS

Propriétés 15 : formules de duplication

Soient a et b deux réels. Alors,

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

3.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 8

Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ.
La *forme exponentielle* de z est : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

On a en particulier : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Définition 9 : racines n-ièmes de l'unité

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle *racines n-ièmes* de l'unité les nombres complexes z tels que $z^n = 1$.
On note alors $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$.

Propriété 16

Soit n un entier naturel non nul.

$$\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}},\ k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}\right\}.$$

Propriétés 17

Soient θ et θ' deux nombres réels. Soit n un entier. Alors :

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.
- $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (Formule de Moivre).
- $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ (Formules d'Euler).

Solution de l'exercice type 3

Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

1 D'après les formules d'addition, on a :

- $$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

...

Solution de l'exercice type 3 (suite) Lycée Guy de Maupassant, Fécamp

- $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

1 Dans un premier temps, on calcule :

$$\left|2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}\right| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4.$$

On calcule ensuite un argument θ de $2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ avec :

$$\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Alors,

$$\left(2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^5 = \left(4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^5 = 4^5\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}}.$$

Or, $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$. On peut donc aussi écrire :

$$\left(2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^5 = 1\ 024\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

Voir énoncé page 485

INTERROS

1 V/F Forme algébrique

10 min Corrigé p. 493

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, alors $z^4 \in \mathbb{R}$.
2. Si $z + \overline{z} = 0$ alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$ alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
4. Si $|z| = 1$ et $|z + z'| = 1$ alors $z' = 0$.

2 V/F Forme exponentielle

10 min Corrigé p. 493

On considère les deux nombres complexes $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $b = 1 - \mathrm{i}$. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Un argument de a est $\arg a = \frac{\pi}{6}$.
2. La forme trigonométrique de b est $b = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
3. Il existe un entier naturel non nul n tel que a^n soit réel.
4. Il existe un entier naturel non nul n tel que $b^n = 1$.

3 V/F Interprétation géométrique

10 min Corrigé p. 493

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

On désigne ses racines par z_1 et z_2, la partie imaginaire de z_1 étant strictement positive. Soient M_1 et M_2 les images respectives des deux racines dans le plan complexe. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Les points M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5.
2. Le triangle OM_1M_2 est équilatéral.
3. L'axe (Ox) est la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.
4. Le milieu I du segment $[M_1M_2]$ a pour affixe $2\mathrm{i}$.

Partie algébrique

4 Forme algébrique

★ 10 min Corrigé p. 494

Lycée Thiers, Marseille

Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \mathrm{i}} \quad ; \quad \left(\frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{i} + \frac{1}{\mathrm{i}}.$$

5 Conjugué et forme algébrique ★ 10 min

Corrigé p. 494

Lycée Masséna, Nice

Mettre sous la forme algébrique le conjugué du nombre complexe suivant :

$$\frac{(3-2\mathrm{i})(5+\mathrm{i})}{3\mathrm{i}(7+2\mathrm{i})}.$$

6 Opérations sur les conjugués ★ 10 min

Corrigé p. 494

Lycée Buffon, Paris

Montrer que, pour tout z complexe non nul, on a :

$$\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}-\frac{\overline{1+z}}{\overline{z}}=\overline{z}-1.$$

7 Caractérisation des nombres réels ★ 10 min

Corrigé p. 495

Lycée Chaptal, Paris

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 avec $1+z_1z_2 \neq 0$.

Démontrer que $Z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

8 Équations avec conjugué ★ 10 min

Corrigé p. 495

Lycée François Rabelais, Saint-Brieux

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(\mathrm{i}-1)\overline{z}+2z=5+9\mathrm{i}.$
2. $3z^2+12z+39=0$

9 Résolution d'équations polynomiales ★ 15 min

Corrigé p. 496

Lycée Carnot, Dijon

On considère l'équation $Z^3-12Z^2+48Z-128=0$.

1. Montrer que 8 est solution de cette équation.
2. Déterminer a et b deux réels tel que :

$$Z^3-12Z^2+48Z-128=(Z-8)(Z^2+aZ+b).$$

3. Résoudre l'équation proposée.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

10 Racines d'un polynôme

★ 25 min Corrigé p. 496

Lycée Masséna, Nice

Soit $P(z) = z^4 - 14z^3 + 74z^2 - 126z + 585$.

1. **(a)** Calculer $P(3\mathrm{i})$.
   (b) Montrer que si z est racine de P, alors $\bar{z}$ est aussi racine de P. Qu'en déduit-on ?
2. Déterminer un trinôme $Q(z)$ à coefficients réels tel que : $P(z) = (z^2 + 9)Q(z)$. En déduire toutes les racines de P.

11 Ensemble de nombres

★★ 15 min Corrigé p. 497

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Soit z un nombre complexe non nul. On pose $Z = (3 - \mathrm{i})z + (3\mathrm{i} - \bar{z})\mathrm{i}$.

1. Écrire $\overline{Z}$ en fonction de z et de $\bar{z}$.
2. En posant $z = x + y\mathrm{i}$, démontrer que $Z = 3x - 3 + (3y - 2x)\mathrm{i}$.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :
   (a) Z est un nombre réel.
   (b) Z est un nombre imaginaire pur.

Formes trigonométrique et exponentielle

12 Vrai ou Faux

★ 15 min Corrigé p. 498

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

Préciser pour chacune des égalités suivantes si elle est vraie ou fausse.

1. $\dfrac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$
2. $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \mathrm{i}$
3. $\dfrac{\sqrt{2}(1 - \mathrm{i})}{\sqrt{3} - \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}$
4. $\dfrac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} = \mathrm{i}$
5. $\dfrac{-1 + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} = \mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$

13 Forme exponentielle

★ 15 min Corrigé p. 499

Lycée En Forêt, Montargis

1. Donner la forme algébrique de $(1 + \mathrm{i})^{11}$.
2. Donner la forme algébrique de $(-1 - \mathrm{i})^{15}$. (On pourra pour cela passer par la forme exponentielle)

14 Nombres complexes et trigonométrie ★ 15 min

Corrigé p. 499

Lycée du Parc, Lyon

Posons : $u = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 sous forme algébrique.
2. Mettre u^2 sous forme trigonométrique, en déduire u sous forme trigonométrique.
3. Cela permet-il d'obtenir des égalités trigonométriques remarquables ?

15 Équation du second degré ★ 20 min

Corrigé p. 500

Lycée Lavoisier, Paris

Soit (E) l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$.

1. Montrer que (E) admet 2 solutions complexes conjuguées u et $\overline{u}$, u étant celle de partie imaginaire positive.
2. Calculer le module et un argument de u. En déduire module et argument de $\overline{u}$.
3. Donner $u - 4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
4. Calculer le module de $\dfrac{u}{u-4}$. En déduire module et argument de $\dfrac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.
5. Proposer une construction géométrique de u et $\overline{u}$.

16 Équation du troisième degré ★ 25 min

Corrigé p. 501

Lycée Jules Ferry, Paris

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})z^2 + (1 - \sqrt{3}\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

1. Montrer qu'il existe une solution z_0 de $(\mathcal{E})$ qui est imaginaire pure.
2. Écrire le membre de gauche de l'équation sous la forme $(z - z_0) \times P(z)$ où $P(z)$ est un trinôme à coefficients réels. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
3. Mettre ces solutions sous forme trigonométrique et les placer sur un graphique.

17 Puissance d'un nombre complexe ★ 30 min

Corrigé p. 502

Lycée Marie Curie, Sceaux

1. Au point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe $f(z) = \dfrac{z + \overline{z} - \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}\overline{z}}$.
   Sur quelle partie du plan f est-elle définie ?
2. Donner une forme trigonométrique de $f(\mathrm{i})$, en déduire que $\big(f(\mathrm{i})\big)^4$ est réel.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

INTERROS

18 Application du plan complexe

★★ 35 min Corrigé p. 503

Lycée Thiers, Marseille

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z distincte de $2 - \mathrm{i}$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z + 3 - 2\mathrm{i}}{z - 2 + \mathrm{i}}.$$

1. Interpréter géométriquement le module de z'.
2. En déduire l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.
3. Interpréter géométriquement l'argument de z'.
4. En déduire l'ensemble des points M tel que z' soit imaginaire pur.
5. Retrouver le résultat de la question 2 par le calcul.
6. Retrouver le résultat de la question 4 par le calcul.

19 Recherche d'un ensemble de points

★★ 15 min Corrigé p. 505

Lycée Claude Bernard, Paris

Quel est l'ensemble des points M du plan dont les affixes z vérifient :

1. $z + \overline{z} = |z|$.
2. $z - \overline{z} = \mathrm{i}|z|$.

20 Une équation paramétrée

★★ 25 min Corrigé p. 505

Lycée Marie Curie, Sceaux

1. Soit $\alpha \in]-\pi\,;\pi]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^2 - 2\sin(2\alpha)z + 2\big(1 + \cos(2\alpha)\big) = 0.$$
2. Déterminer module et argument de ces solutions.
3. Pour quelles valeurs de α les deux solutions sont-elles égales ?

21 Sommations classiques

★★★ 10 min Corrigé p. 506

Lycée Blaise Pascal, Paris

Étant donné un entier $n \geq 1$ et x un réel, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos kx = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx.$$

1 V/F Forme algébrique

Énoncé p. 488

1. *Vrai*. On commence par calculer $z^2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$. Il vient ensuite $z^4 = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.
2. *Faux*. Il suffit de choisir z imaginaire pur : si $z = 2\mathrm{i}$ alors $z + \overline{z} = 0$.
3. *Vrai*. Si $z + \frac{1}{z} = 0$ alors $\frac{z^2+1}{z} = 0$ ce qui équivaut, pour z non nul, à $z^2 = -1$. Cette équation a deux solutions : i et $-$i.
4. *Faux*. Si $z = 1$ et $z' = -2$, alors $z + z' = -1$ et on a $|z| = 1$ et $\left|z + z'\right| = 1$.

2 V/F Forme exponentielle

Énoncé p. 488

1. *Faux*. Le nombre a a pour argument $\frac{\pi}{3}$.
2. *Faux*. Le module de b est $\sqrt{2}$ et il admet $-\frac{\pi}{4}$ comme argument mais $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est la *forme exponentielle* de b, et non sa forme *trigonométrique*.
3. *Vrai*. On a $a = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ donc $a^3 = 2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -8$.
4. *Faux*. Supposons qu'il existe un entier n non nul tel que $b^n = 1$, alors on aurait $|b^n| = |b|^n = 1$ d'où on déduirait $|b| = 1$ ce qui est contradictoire avec le résultat trouvé à la question 2.

3 V/F Interprétation géométrique

Énoncé p. 488

1. *Faux*. Les deux racines de l'équation proposée sont $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - 2\mathrm{i}$. Leur module est donc égal à $\sqrt{5}$. Par suite, les points M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$.
2. *Faux*. Le triangle OM_1M_2 est isocèle non équilatéral car $OM_1 = OM_2 = |z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$ et $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = 4$.
3. *Vrai*. Les racines de l'équation sont deux nombres complexes conjugués donc leurs images sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi l'axe (Ox) est la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.
4. *Faux*. Le milieu I du segment $[M_1M_2]$ a pour affixe $\frac{z_1+z_2}{2} = 1$.

CORRIGÉS

4 Forme algébrique

Énoncé p. 488

Lycée Thiers, Marseille

Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}=\frac{(1+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i)}{3}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}+2i+i}{3}=i.$$

De même, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2=\dfrac{(1-i)^2(1-i)^2}{(1+i)^2(1-i)^2}=\dfrac{(1-i)^4}{(1^2+1^2)^2}=\dfrac{(-2i)^2}{4}=-1,$
ainsi que : $i+\dfrac{1}{i}=\dfrac{i^2+1}{i}=\dfrac{-1+1}{i}=0.$

5 Conjugué et forme algébrique

Énoncé p. 489

Lycée Masséna, Nice

D'après les propriétés du conjugué d'une somme, d'un produit et d'un quotient, le conjugué de ce nombre complexe vaut :

$$\overline{\left(\frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)}\right)}=\frac{\overline{(3-2i)}\times\overline{(5+i)}}{\overline{3i}\times\overline{(7+2i)}}=\frac{(3+2i)(5-i)}{-3i(7-2i)}.$$

Développons le numérateur et le dénominateur, nous trouvons :

$$\frac{-(3+2i)(5-i)}{3i(7-2i)}=-\frac{17+7i}{6+21i}.$$

Multiplions en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{-(3+2i)(5-i)}{3i(7-2i)}=-\frac{(17+7i)(6-21i)}{477}=-\frac{83}{159}+i\frac{35}{53}.$$

6 Opérations sur les conjugués

Énoncé p. 489

Lycée Buffon, Paris

Simplifions le nombre complexe proposé à l'aide des propriétés des conjugués :

$$\overline{z+\frac{1}{z}}-\frac{\overline{1+z}}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}^2+1-1-\overline{z}}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}^2-\overline{z}}{\overline{z}}.$$

(On a utilisé $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$ et $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.)

Simplifions par $\overline{z}$:

$$\overline{z+\frac{1}{z}}-\frac{\overline{1+z}}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}^2-\overline{z}}{\overline{z}}=\overline{z}-1.$$

7 Caractérisation des nombres réels

Énoncé p. 489

Lycée Chaptal, Paris

Il s'agit de démontrer que $Z = \overline{Z}$.

Calculons donc :

$$Z - \overline{Z} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1 z_2}}.$$

En réduisant au même dénominateur :

$$Z - \overline{Z} = \frac{z_1 + z_2 + \overline{z_1 z_2} z_1 + \overline{z_1 z_2} z_2 - \overline{z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_1} z_1 z_2 - \overline{z_2} z_2 z_1}{(1 + z_1 z_2)(1 + \overline{z_1 z_2})}.$$

Comme $|z_1|^2 = z_1 \overline{z_1} = 1$ et $|z_2|^2 = z_2 \overline{z_2} = 1$, on obtient :

$$Z - \overline{Z} = \frac{z_1 + z_2 + \overline{z_1} + \overline{z_2} - z_1 - z_2 - \overline{z_1} - \overline{z_2}}{(1 + z_1 z_2)(1 + \overline{z_1 z_2})} = 0.$$

Ainsi, Z est réel.

MÉTHODE

Pour montrer qu'un nombre complexe Z est réel, on peut

- montrer que sa partie imaginaire est nulle
- montrer qu'il est non nul et qu'il admet un argument de la forme $k\pi$ où k désigne un entier relatif
- montrer qu'il est égal à son conjugué.

8 Équations avec conjugué

Énoncé p. 489

Lycée François Rabelais, Saint-Brieux

1 $(\mathrm{i} - 1)\bar{z} + 2z = 5 + 9\mathrm{i}$.

Pour résoudre cette équation, on pose $z = x + y\mathrm{i}$. Alors, $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ et l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{i} - 1)(x - y\mathrm{i}) + 2(x + y\mathrm{i}) = 5 + 9\mathrm{i} \\
\iff & x\mathrm{i} - y\mathrm{i}^2 - x + y\mathrm{i} + 2x + 2y\mathrm{i} = 5 + 9\mathrm{i} \quad \text{avec } \mathrm{i}^2 = -1 \\
\iff & x + y + (x + 3y)\mathrm{i} = 5 + 9\mathrm{i} \\
\iff & \begin{cases} x + y = 5 & (L_1) \\ x + 3y = 9 & (L_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} (L_2) - (L_1) & \iff 2y = 4 \iff y = 2 \\ (L_1) & \iff x = 5 - 2 = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'équation admet donc pour ensemble solution : $\mathcal{S} = \{3 + 2\mathrm{i}\}$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

2 $3z^2 + 12z + 39 = 0$.

C'est une équation du second degré donc on peut calculer son discriminant, mais avant tout, remarquons que l'on peut diviser tous les coefficients par 3. Ainsi,

$$3z^2 + 12z + 39 = 0 \iff z^2 + 4z + 13 = 0.$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36 = 36\mathrm{i}^2 = (6\mathrm{i})^2$.

Ainsi, les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 6\mathrm{i}}{2} = -2 - 3\mathrm{i}$$

et $z_2 = \overline{z_1} = -2 + 3\mathrm{i}$.

À RETENIR

Si z_1 est une solution complexe non réelle d'une équation du second degré alors $z_2 = \overline{z_1}$ est la seconde.

9 Résolution d'équations polynomiales

Énoncé p. 489

Lycée Carnot, Dijon

1 Posons $P(Z) = Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128$, et calculons $P(8)$:

$$P(8) = 512 - 12 \times 64 + 48 \times 8 - 128 = 0.$$

Le réel 8 est donc bien racine de P.

2 On cherche donc a et b tel que :

$$(Z - 8)(Z^2 + aZ + b) = Z^3 + (a - 8)Z^2 + (b - 8a)Z - 8b = P(Z).$$

En identifiant terme à terme, on trouve : $a = -4$ et $b = 16$.

Ainsi on a :

$$P(Z) = (Z - 8)(Z^2 - 4Z + 16).$$

3 Si z est racine de P, ou bien $z = 8$, ou bien z est racine de $Z^2 - 4Z + 16$. Recherchons les racines de ce trinôme du second degré. On calcule d'abord

$\Delta = -48 = (4\mathrm{i}\sqrt{3})^2$. On en déduit les racines de ce trinôme, et finalement celles de P :

$$\left\{8\,;\,2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\,2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}.$$

10 Racines d'un polynôme

Énoncé p. 490

Lycée Masséna, Nice

1 **(a)** Montrons que 3i est racine de :

$$z^4 - 14z^3 + 74z^2 - 126z + 585.$$

Commençons par calculer les puissances itérées de 3i :

$$(3\mathrm{i})^1 = 3\mathrm{i}, \quad (3\mathrm{i})^2 = -9, \quad (3\mathrm{i})^3 = -27\mathrm{i}, \quad \text{et} \quad (3\mathrm{i})^4 = 81.$$

Calculons ensuite $P(3\mathrm{i})$:

$$P(3\mathrm{i}) = 81 - 14 \times (-27\mathrm{i}) + 74 \times (-9) - 126 \times (3\mathrm{i}) + 585 = 0.$$

(b) Comme P est à coefficients réels, pour tout z on a :

$$\overline{P(z)} = P\left(\overline{z}\right).$$

Ainsi si z est racine de P, $\overline{z}$ est aussi racine de P.

On en déduit que $-3\mathrm{i}$ est aussi racine de P.

2 Par une méthode de coefficients indéterminés, on trouve :

$$P(z) = (z^2 + 9)(z^2 - 14z + 65).$$

Les racines de $z^2 + 9$ sont 3i et $-3\mathrm{i}$ (déjà connues). Les autres racines de P sont les solutions z_1 et z_2 de $z^2 - 14z + 65 = 0$:

$$\Delta = -64 \qquad \text{donc} \qquad z_1 = 7 + 4\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = 7 - 4\mathrm{i}.$$

Les racines de P forment donc l'ensemble $\{-3\mathrm{i}\ ;\ 3\mathrm{i}\ ;\ 7 - 4\mathrm{i}\ ;\ 7 + 4\mathrm{i}\}$.

11 Ensemble de nombres

Énoncé p. 490

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 $Z = (3 - \mathrm{i})z + (3\mathrm{i} - \overline{z})\mathrm{i}$ donc, par propriétés du conjugué,

$$\overline{Z} = \overline{(3 - \mathrm{i})}\,\overline{z} + \overline{(3\mathrm{i} - \overline{z})\mathrm{i}} = (3 + \mathrm{i})\overline{z} + (z + 3\mathrm{i})\mathrm{i}.$$

2 En posant $z = x + y\mathrm{i}$, on a :

$$\begin{aligned} Z &= (3 - \mathrm{i})(x + y\mathrm{i}) + (3\mathrm{i} - (x - y\mathrm{i}))\mathrm{i} \\ &= 3x + 3y\mathrm{i} - x\mathrm{i} - y\mathrm{i}^2 + 3\mathrm{i}^2 - x\mathrm{i} + y\mathrm{i}^2, \quad \text{avec } \mathrm{i}^2 = -1 \\ &= 3x - 3 + (3y - 2x)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

3 **(a)**

$$\begin{aligned} Z \text{ est un réel} &\iff \mathrm{Im}(Z) = 0 \\ &\iff 3y - 2x = 0 \\ &\iff y = \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des nombres complexes z tels que Z est un réel est l'ensemble :

$$\left\{ z = x + \frac{2}{3}x\mathrm{i},\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b)

$$\begin{aligned} Z \text{ est un imaginaire pur} &\iff \mathrm{Re}(Z) = 0 \\ &\iff 3x - 3 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

CORRIGÉS

Ainsi, l'ensemble des nombres complexes z tels que Z est un imaginaire pur est l'ensemble :

$$\{z = 1 + yi,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

12 Vrai ou Faux

Énoncé p. 490

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

1 *Faux*. Comparons les modules de $\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ et de $\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$:

$$\left|\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}\right| = 1 \quad ; \quad \left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right| = 2 \quad ; \quad |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}.$$

Comme le module d'un quotient est égal au quotient des modules,

$$\left|\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right| = \sqrt{2}.$$

Les deux nombres complexes considérés ont des modules différents ; ils ne sont donc pas égaux.

2 *Vrai*. Il suffit de multiplier les deux termes du quotient par le conjugué du dénominateur et d'effectuer les produits :

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \mathrm{i}.$$

3 *Vrai*. On écrit le nombre complexe $\dfrac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ sous forme exponentielle. Pour cela, on en détermine le module et un argument.

$$\left|\sqrt{2}(1-\mathrm{i})\right| = 2 \qquad \left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right| = 2\,,$$

donc :

$$\left|\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right| = 1.$$

$$\arg\left(\sqrt{2}(1-\mathrm{i})\right) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad ; \quad \arg\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

On en déduit que :

$$\arg\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}.$$

4 *Vrai*. Il suffit de multiplier les deux termes du quotient par le conjugué du dénominateur.

5 *Faux*. On raisonne comme à la question 1 en comparant les modules des deux nombres complexes.

$\left|\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left|\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}\right| = 1$, donc ces deux nombres complexes ne sont pas égaux.

13 Forme exponentielle

Énoncé p. 490

Lycée En Forêt, Montargis

1 Écrivons $1+\mathrm{i}$ sous la forme exponentielle : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi on peut alors calculer aisément :

$$(1+\mathrm{i})^{11} = \left(\sqrt{2}\right)^{11} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{4}}.$$

Enfin notons que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. On a donc :

$$(1+\mathrm{i})^{11} = \left(\sqrt{2}\right)^{11} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = -32+32\mathrm{i}.$$

2 Notons que $(-1-\mathrm{i})^{15} = -(1+\mathrm{i})^{15}$ puisque l'exposant est impair. On peut donc comme ci-dessus obtenir, en utilisant ici $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$:

$$(-1-\mathrm{i})^{15} = -(\sqrt{2})^{15}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{4}} = -(\sqrt{2})^{15}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = -128\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$$

soit : $(-1-\mathrm{i})^{15} = -128+128\mathrm{i}$.

14 Nombres complexes et trigonométrie

Énoncé p. 491

Lycée du Parc, Lyon

1 Calculons u^2 sous forme algébrique :

$$u^2 = 2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

2 On voit immédiatement que $\arg(u^2) = \dfrac{-\pi}{4}$ et que $|u|^2 = 4$.

$2\arg(u) = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ et donc $\arg(u) = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi$, k étant un entier relatif.

Il y a donc à ce stade deux valeurs possibles pour l'argument de u modulo 2π.

On va donc regarder le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de u pour savoir dans quel quadrant du cercle trigonométrique le point image de u se situe.

La partie réelle de u est négative, et sa partie imaginaire positive, donc son point image se situe dans le deuxième quadrant.

CORRIGÉS

On a donc $\arg(u) = \dfrac{7\pi}{8}$.

On en déduit que $u = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

3 On a donc les égalités trigonométriques suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

15 Équation du second degré

Énoncé p. 491

Lycée Lavoisier, Paris

1 Calculons le discriminant de E :

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 12 = -12.$$

Les solutions sont donc complexes conjuguées et valent :

$$u = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \overline{u} = 3 - i\sqrt{3}.$$

2 On a : $|u|^2 = 9 + 3 = 12$. On obtient donc :

$$u = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

On en déduit : $|u| = 2\sqrt{3}$. Alors, modulo 2π, $\arg(u) = \dfrac{\pi}{6}$.

Comme le point d'affixe $\overline{u}$ est le symétrique du point d'affixe u par rapport à l'axe des abscisses, on a $|\overline{u}| = 2\sqrt{3}$, et modulo 2π, $\arg(\overline{u}) = -\dfrac{\pi}{6}$.

3 Tout d'abord, $u - 4 = -1 + i\sqrt{3}$, donc $|u-4| = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2$.

$\cos\big(\arg(u-4)\big) = -\dfrac{1}{2}$, et $\sin\big(\arg(u-4)\big) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\arg(u-4) = \dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$, ce qui donne la forme trigonométrique de $u-4$:

$$u - 4 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

4 Calculons le module de $\dfrac{u}{u-4}$:

$$\left|\frac{u}{u-4}\right| = \frac{|u|}{|u-4|} = \sqrt{3}.$$

Calculons alors, modulo 2π, l'argument de $\dfrac{u}{u-4}$:

$$\arg\left(\frac{u}{u-4}\right) = \arg(u) - \arg(u-4) = -\frac{\pi}{2}.$$

Comme $\dfrac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$ est le conjugué de $\dfrac{u}{u-4}$, on a :

$$\left|\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\right| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

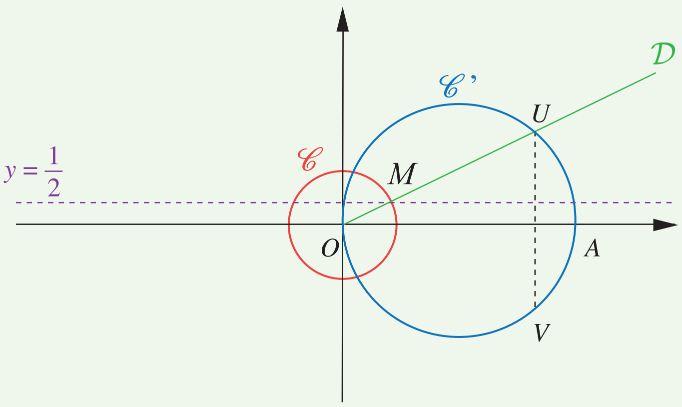
5 Appelons O l'origine, A le point d'affixe 4, U celui d'affixe u et V d'affixe $\overline{u}$, $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre $[OA]$.

La question 2 nous dit que le point U est sur la demi-droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$\arg z = \frac{\pi}{6}.$$

Or, on sait que $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, donc on trace la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ qui coupe le cercle trigonométrique en un point M tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Et la question 4 nous dit que le point U est sur $\mathscr{C}'$ car le triangle OAU est rectangle en U. On peut donc construire le point U. Le point V est le symétrique de U par rapport à l'axe des abscisses.



16 Équation du troisième degré

Énoncé p. 491

Lycée Jules Ferry, Paris

1 Posons $P(z) = z^3 + (\sqrt{3}-\mathrm{i})z^2 + (1-\sqrt{3}\mathrm{i})z - \mathrm{i}$ et calculons $P(\mathrm{i})$:

$$P(\mathrm{i}) = -\mathrm{i} + \mathrm{i} - \sqrt{3} + \mathrm{i} + \sqrt{3} - \mathrm{i} = 0.$$

Le nombre i est donc solution de $(\mathcal{E})$.

CORRIGÉS

2 Factorisons P :

$$\begin{aligned} P(z) &= z^3 - \mathrm{i}z^2 + \sqrt{3}(z^2 - \mathrm{i}z) + z - \mathrm{i} \\ &= (z-\mathrm{i})z^2 + (z-\mathrm{i}) \times \sqrt{3}z + z - \mathrm{i} \\ &= (z-\mathrm{i})(z^2 + \sqrt{3}z + 1). \end{aligned}$$

Les deux autres racines de $(\mathcal{E})$ sont donc les solutions de l'équation $(\mathcal{E}')$:

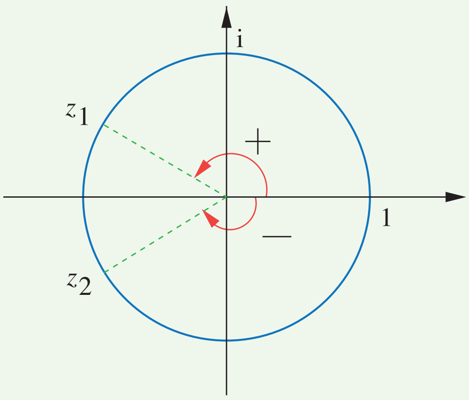
$$z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0 \qquad (\mathcal{E}')$$

Calculons le discriminant de $(\mathcal{E}')$: $\Delta = 3 - 4 \times 1 = -1$.
On obtient alors les deux solutions z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}.$$

3 On obtient immédiatement leurs formes trigonométriques :

$$\begin{aligned} \mathrm{i} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ z_1 &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ z_2 &= \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right). \end{aligned}$$



17 Puissance d'un nombre complexe

Énoncé p. 491

Lycée Marie Curie, Sceaux

1 Le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ vérifie la relation $z - \mathrm{i}\overline{z} = 0$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) &= 0 \\ (x-y) + \mathrm{i}(y-x) &= 0 \\ y &= x. \end{aligned}$$

La fonction f est définie sur le plan tout entier privé de la droite d'équation $y = x$.

2 Calculons $f(\mathrm{i})$ et écrivons-le sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{i}) &= \frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Moivre, on trouve :

$$(f(\mathrm{i}))^4 = \frac{1}{4}(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)) = -\frac{1}{4}.$$

Donc $\left(f(\mathrm{i})\right)^4$ est réel.

18 Application du plan complexe

Énoncé p. 492

Lycée Thiers, Marseille

1 Notons B le point d'affixe $-3 + 2i$ et A celui d'affixe $2 - i$, on a alors :

$$|z'| = \frac{|z - (-3 + 2\mathrm{i})|}{|z - (2 - \mathrm{i})|} = \frac{BM}{AM}.$$

2 Les points M tel que $|z'| = 1$ sont les points M tel que $AM = BM$, soit la médiatrice de $[AB]$.

3 L'affixe de $\overrightarrow{BM}$ est $z + 3 - 2\mathrm{i}$ et celui de $\overrightarrow{AM}$ est $z - 2 + \mathrm{i}$, donc :

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{z + 3 - 2\mathrm{i}}{z - 2 + \mathrm{i}}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})\ [2\pi].$$

4 Comme $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$, on en déduit que les points pour lesquels z' est imaginaire pur sont soit le point B car alors $z' = 0$, soit les points M tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Finalement cet ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A. (Revoir la caractérisation angulaire d'un cercle.)

5 Par le calcul, notons $z = x + \mathrm{i}y$ et remplaçons :

$$\begin{aligned} |z'| = 1 &\iff (x+3)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 \\ &\iff 5x - 3y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Cet ensemble de points est donc bien une droite comme l'assure le raisonnement géométrique.

Il reste à vérifier que cette droite est bien la médiatrice de $[AB]$.

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$. Il est bien sur la droite car ses coordonnées vérifient son équation.

De plus, un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite a pour coordonnées $(3\ ;\ 5)$

CORRIGÉS

et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-5\ ;\ 3)$. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times (-5) + 5 \times 3 = 0$. Donc les vecteurs sont orthogonaux. La droite est donc perpendiculaire à $[AB]$ et passe par son milieu, c'est donc bien la médiatrice de ce segment.

6 Le complexe z' est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Exprimons z' sous forme algébrique :

$$\frac{z+3-2\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}} = \frac{(x+3)+\mathrm{i}(y-2)}{(x-2)+\mathrm{i}(y+1)}.$$

Alors,

$$\frac{z+3-2\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}} = \frac{(x+3)(x-2)+(y+1)(y-2)}{(x-2)^2+(y+1)^2} + \mathrm{i}\frac{(x-2)(y-2)-(y+1)(x+3)}{(x-2)^2+(y+1)^2}.$$

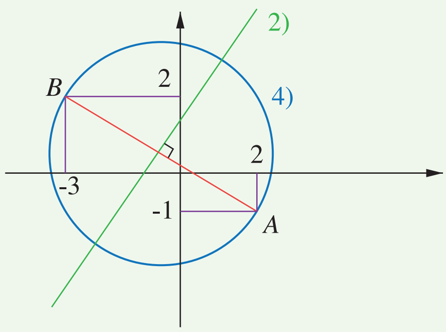
Ainsi z' est imaginaire pur si et seulement si :

$$(x+3)(x-2)+(y+1)(y-2)=0 \quad \text{et} \quad z \neq 2-\mathrm{i}.$$

On développe et factorise à nouveau pour obtenir :

$$(x+3)(x-2)+(y+1)(y-2) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{2} = 0.$$

L'ensemble des points vérifiant cette équation est bien un cercle, de centre le point I milieu de $[AB]$ de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$. C'est le cercle de diamètre de $[AB]$ car le point A de coordonnées $(2\ ;\ -1)$ est sur ce cercle. Cependant, le point A ne fait pas partie de l'ensemble des solutions (condition $z \neq 2-\mathrm{i}$).
On retrouve donc bien que l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$, privé du point A.



19 Recherche d'un ensemble de points

Énoncé p. 492

Lycée Claude Bernard, Paris

1 Notons $\mathrm{Re}(z) = x$ et $\mathrm{Im}(z) = y$ et raisonnons par équivalences successives :

$$\begin{aligned} z + \overline{z} = |z| &\iff 2x = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } x \geqslant 0 \\ &\iff 4x^2 = x^2 + y^2 \text{ et } x \geqslant 0 \quad \text{(on a élevé au carré).} \end{aligned}$$

Finalement après réduction et factorisation on trouve que :

$$z + \overline{z} = |z| \iff \left(\sqrt{3}x - y\right)\left(\sqrt{3}x + y\right) = 0 \text{ et } x \geqslant 0.$$

L'ensemble cherché est donc la réunion de deux demi-droites fermées d'équations :

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \geqslant 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

2 Un calcul analogue montre que :

$$z - \overline{z} = \mathrm{i}|z| \iff \left(\sqrt{3}y - x\right)\left(\sqrt{3}y + x\right) = 0 \text{ et } y \geqslant 0.$$

L'ensemble cherché est donc la réunion de deux demi-droites fermées d'équations :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x \\ y \geqslant 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

20 Une équation paramétrée

Énoncé p. 492

Lycée Marie Curie, Sceaux

1 Remarquons de suite que :

$$\begin{cases} (1 + \cos(2\alpha)) = 2\cos^2(\alpha) \\ \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha). \end{cases}$$

On peut alors calculer le discriminant du trinôme :

$$\begin{aligned} \Delta &= (4\sin(\alpha)\cos(\alpha))^2 - 4 \times 4\cos^2(\alpha) \\ &= 16\cos^2(\alpha)(\sin^2(\alpha) - 1) \\ &= -16\cos^4(\alpha). \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \mathrm{i} \times 2\cos^2(\alpha) \\ z_2 &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \mathrm{i} \times 2\cos^2(\alpha). \end{aligned}$$

2 Il y a trois cas possibles :

- Si $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\alpha) \geq 0$.

CORRIGÉS

Dans ce cas $|z_1| = |z_2| = 2\cos(\alpha)$ et on obtient :

$$\begin{cases} z_1 = 2\cos(\alpha)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \\ z_2 = 2\cos(\alpha)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right). \end{cases}$$

- Si $\alpha \notin \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\alpha) < 0$.
  Dans ce cas $|z_1| = |z_2| = -2\cos(\alpha)$ et on obtient :

$$\begin{cases} z_1 = -2\cos(\alpha)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \\ z_2 = -2\cos(\alpha)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right). \end{cases}$$

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$,

$$z_1 = z_2 = 0.$$

3 Les deux solutions sont égales si et seulement si $\Delta = 0$ soit si

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

21 Sommations classiques

Énoncé p. 492

Lycée Blaise Pascal, Paris

On a :

$$S = \mathrm{Re}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \cdots + \mathrm{e}^{n\mathrm{i}x}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2 + \cdots + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n\right).$$

On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et de premier terme 1.

Supposons d'abord que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1$, c'est-à-dire $x = 0\,[2\pi]$, alors pour tout entier k, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 1$ et donc $S = n + 1$.
Désormais, nous supposerons au contraire $x \neq 0\,[2\pi]$.

$$\text{On obtient :} \quad S = \mathrm{Re}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right).$$

Factorisons :

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}\right)$$
$$= -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}}{2\mathrm{i}}$$
$$= -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$$

et de même :

$$\begin{aligned} 1 - e^{ix} &= \mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-ix}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}\right) \\ &= -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Alors :

$$S = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

MÉTHODE

La méthode utilisée dans la résolution de cet exercice est à retenir. L'idée de base est d'interpréter une somme de cosinus comme étant la partie réelle d'une somme de nombres complexes.
On notera qu'il convient de distinguer deux cas selon que la raison de la suite géométrique considérée vaut 1 ou non. La formule à utiliser pour le calcul de la somme n'est pas la même dans les deux cas.

Chapitre 17

Matrices et graphes

Plan du chapitre

1 Matrices

Exercice type 1 Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 Calculer $A + B$ et $A \times B$.

2 Justifier que A est inversible, et montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Voir corrigé page 513

1.1 Généralités

Définitions 1

Une *matrice* A est un tableau à n lignes et p colonnes constitué de nombres.
Le *format* d'une telle matrice est $n \times p$ ou (n, p).
Pour tous entiers $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, le nombre $a_{i,j}$ situé sur la i-ième ligne et j-ième colonne est un *élément* de la matrice.

Une telle matrice pourra être notée et représentée ainsi :

$$A = \left(a_{i,j}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}.$$

Définitions 2

- Une matrice de format $n \times n$ est appelée *matrice carrée d'ordre n*.
- Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf sur la diagonale « $a_{1,1} - a_{n,n}$ » est appelée *matrice diagonale*.

COURS

- Une matrice diagonale dont les coefficients sont égaux à 1 est appelée *matrice identité*. On la note I_n, où n est l'ordre de la matrice.
- Une matrice de format $n \times 1$ est appelée *matrice colonne*.
- Une matrice de format $1 \times n$ est appelée *matrice ligne*.

Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.
- $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.
- $L = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
- $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

1.2 Opérations sur les matrices

Propriétés 1 : somme et produit par un réel

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de même format. Soit k un réel.

- La somme des deux matrices est :
$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$
- Le produit de k par A est :
$$kA = (ka_{i,j}).$$

Définition 3

Soient n, m et p des entiers strictement positifs.
Soient A une matrice de format (m,p) et B une matrice de format (p,n).
Le produit $A \times B$ (aussi noté AB) est la matrice de format (m,n) dont le coefficient c_{ij} est le produit terme à terme des coefficients de la i^{e} ligne de A par les coefficients de la j^{e} ligne de B :
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Exemple : le schéma page ci-contre indique comment on obtient le coefficient c_{12} de la matrice produit de $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7\times 1+2\times(-2) & 7\times 3+2\times 5 & 7\times 0+2\times 2 \\ 3\times 1+4\times(-2) & 3\times 3+4\times 5 & 3\times 0+4\times 2 \end{pmatrix}$$

1re ligne

2e colonne

Le produit $A \times B$ est alors $\begin{pmatrix} 3 & 31 & 4 \\ -5 & 29 & 8 \end{pmatrix}$.

Propriété 2

Lorsqu'on fait le produit de deux matrices carrées d'ordre n, on obtient une matrice carrée d'ordre n.
Lorsqu'on fait le produit d'une matrice carrée A d'ordre n avec une matrice colonne P de format $(n, 1)$ on obtient une matrice colonne de format $(n, 1)$.

Propriété 3

Le produit de deux matrices carrées de même ordre est une opération associative et distributive par rapport à l'addition.
Soient A, B et C trois matrices carrées de même ordre, alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$$

⚠ ATTENTION

En général, $A \times B \neq B \times A$.

Définition 4 : puissance d'une matrice

Soit A une matrice d'ordre n, et soit k un entier naturel. On définit la *puissance k-ième de A* comme la matrice :

$$A^k = A \times A \times \cdots \times A \quad (k \text{ facteurs}) \quad , \quad A^0 = I_n.$$

Propriété 4

Soit D une matrice diagonale dont les coefficients non nuls sont notés d_1, d_2,..., d_n.
Alors, pour tout entier naturel k, D^k est une matrice diagonale dont les coefficients sont égaux à d_i^k, pour tout entier i compris entre 1 et n.

Exemple : Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Alors, $D^4 = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 1^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

COURS

1.3 Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition 5

Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est *inversible* s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n,$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.
B est alors unique et est appelée *matrice inverse* de A, notée A^{-1}.

Définition 6

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On appelle *déterminant* de A le nombre :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Propriété 5

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible } \iff \det(A) \neq 0.$$

Définition 7 : écriture matricielle d'un système linéaire

Le système linéaire :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$$

s'écrit sous la forme $AX = B$, où :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

C'est son *écriture matricielle*.

Propriété 6

Le système $AX = B$, d'inconnue X, admet une unique solution si et seulement si A est inversible. Dans ce cas, la solution est $X = A^{-1}B$.

Solution de l'exercice type 1 — Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 • $A+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & -1+1\\ 0-1 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$

• $$A\times B=\begin{pmatrix}1\times 0+(-1)\times(-1) & 1\times 1+(-1)\times 1\\ 0\times 0+1\times(-1) & 0\times 1+1\times 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

2 $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\times 1-0\times(-1)=1\neq 0.$

Ainsi, A est inversible. De plus,
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2.$$

Ainsi, l'inverse de A est bien $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Voir énoncé page 509

2 Graphes

Exercice type 2 — Lycée Gaston Bachelard, Chelles

Une société de location de voitures à la semaine possède une agence à Lyon et une autre à Paris.
A l'ouverture des deux agences, le parc automobile comprenait 300 voitures à Lyon et 500 à Paris.
On a constaté qu'à la fin de chaque semaine, 70 % des voitures louées à Paris retournaient dans l'agence parisienne, les autres étant rendues à Lyon, et que 60 % des voitures louées à Lyon retournaient dans l'agence lyonnaise, les autres étant rendues à Paris.
On choisit une voiture au hasard dans le parc automobile.
On note l_n (resp. p_n) la probabilité que la voiture soit rendue à Lyon (resp. à Paris) à la fin de la n-ième semaine.

1 Traduire les données par un graphe probabiliste $\mathcal{G}$, dont vous donnerez la matrice de transition M et l'état probabiliste initial E_0.

2 Calculer l'état probabiliste du graphe $\mathcal{G}$: au bout d'une semaine, au bout de 10 semaines.

3 Déterminer la distribution invariante de $\mathcal{G}$.

4 Au bout d'un grand nombre de semaines, comment se répartira le parc automobile entre les deux agences ?

Voir corrigé page 517

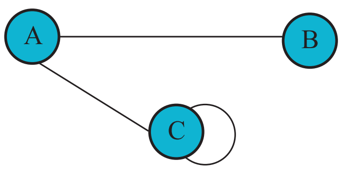
COURS

2.1 Généralités

Définitions 8

1. Un *graphe* $\mathcal{G} = (V,E)$ est la donnée :
   - d'un ensemble V d'éléments, appelés *sommets* ;
   - d'un ensemble E dont les éléments sont des parties à un ou deux éléments de V, nommés *arêtes*.
2. Deux sommets reliés par une arête sont dits *adjacents*.
3. Un graphe *complet* est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.
4. Le nombre de sommets présents dans un graphe est l'*ordre* du graphe.
5. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
6. Un *sous-graphe* d'un graphe $\mathcal{G}$ d'ordre k est constitué de k sommets de $\mathcal{G}$ et de toutes les arêtes qui relient ces sommets.
7. Une *représentation graphique* d'un graphe $\mathcal{G} = (V,E)$ est un schéma où les éléments de V sont représentés par des disques et où les éléments de E sont représentés par des traits (rectilignes ou courbés).
8. Un graphe est *simple* si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Exemple : si $V = \{A;\, B;\, C\}$ et $E = \big\{(A,B);\, (A,C);\, (C)\big\}$, alors $\mathcal{G} = (V,E)$ est le graphe de sommets A, B et C, où A et B sont reliés, A et C sont reliés et où C est connecté à lui-même.
Une représentation graphique du graphe défini dans l'exemple précédent est la suivante :



Ce graphe n'est pas complet car tous les sommets ne sont pas adjacents.
Le degré du sommet C est 3, et l'ordre de $\mathcal{G}$ est 3 car il y a 3 sommets.

Par la suite, on pourra assimiler la notion de graphe avec celle de sa représentation graphique.

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

2.2 Orientation d'un graphe

Définition 9 : graphe orienté

On appelle *graphe orienté* tout graphe où chaque arête a un sens.
Dans ce cas, les arêtes sont aussi appelées *arcs*, le sommet de départ est appelé l'*origine* de l'arc et celui d'arrivée, son *extrémité*.

Si un graphe n'est pas orienté, on dira que le graphe est *non orienté*.

Théorème 1

La somme des degrés d'un graphe *simple* est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

Définitions 10

- Dans un graphe *non orienté*, une *chaîne* est une suite de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont adjacents.
- Le nombre d'arêtes qui composent la chaîne est alors appelée la *longueur* de la chaîne.
- Si le premier et le dernier sommet d'une chaîne sont identiques, on dit que la chaîne est *fermée*.
- Un *cycle* est une chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes.
- Un graphe *connexe* est un graphe où deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.
- Une chaîne *eulérienne* est une chaîne qui contient chaque arête du graphe une seule fois. Un *cycle eulérien* est une chaîne eulérienne fermée.

Théorème 2 : théorème d'Euler sur les graphes

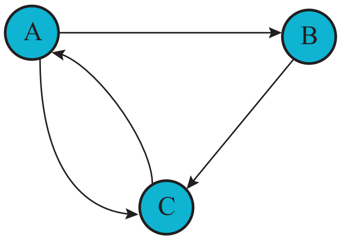
Un graphe non orienté connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.

2.3 Matrices de graphes

Définition 11 : matrice d'adjacence

Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice d'adjacence* de $\mathcal{G}$ la matrice carrée d'ordre n où le terme à la i-ième ligne et j-ième colonne est le nombre d'arêtes (ou arcs) reliant les sommets i et j.

Exemple : soit le graphe ci-dessous.



Sa matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle A & \scriptstyle B & \scriptstyle C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \scriptstyle A \\ \scriptstyle B \\ \scriptstyle C \end{array}$$

- De A à A : 0 arc
- De A à B : 1 arc
- De A à C : 1 arc

D'où la première ligne de M. Etc.

2.4 Chaîne de Markov

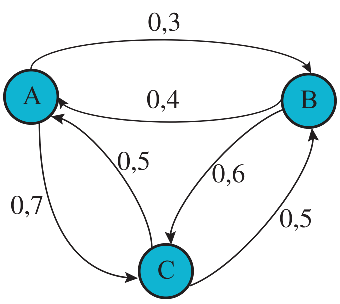
Définition 12 : graphe pondéré et probabiliste

Un graphe orienté est *pondéré* lorsque chaque arête est affectée d'un nombre réel positif, appelé *poids* de cette arête.
Un graphe *probabiliste* est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1 et tel que la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Définition 13 : matrice de transition

Soit un graphe probabiliste d'ordre n. On appelle *matrice de transition* la matrice où le terme de la i-ème ligne et j-ième colonne est égale au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j si elle existe, et à 0 sinon.

Exemple : soit le graphe probabiliste ci-dessous.



Sa matrice de transition est :

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle A & \scriptstyle B & \scriptstyle C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \scriptstyle A \\ \scriptstyle B \\ \scriptstyle C \end{array}$$

Définition 14 : chaîne de Markov

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires modélisant l'évolution, étape par étape, d'un système aléatoire à 2 ou 3 états, de distribution initiale :

$$\pi_0 = \big(p(X_0 = 1),\ \ldots,\ p(X_0 = k)\big)$$

et de matrice de transition $P_{i,j} = \big(p_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.
La distribution après n transitions est $\pi_n = \pi_0 P^n$.

Exemple : le graphe probabiliste de l'exemple précédent traduit une transition d'états (la probabilité de passer de l'état A à l'état B est égale à 0,3 par exemple).

Propriété 7

On note π_n la matrice ligne à 2 ou 3 colonnes dont le terme de la j-ième colonne est la probabilité qu'à l'étape n, la variable aléatoire X_n soit égale à j.
Alors $\pi_{n+1} = \pi_n P = \pi_0 P^n$, où P est la matrice de transition et π_0 l'état initial de la chaîne de Markov.
S'il existe un entier n tel que P^n ne contient pas de 0 alors (π_n) converge vers une matrice notée π (que l'on appelle *distribution invariante du système*) telle que $\pi = \pi P$.

Exemple : reprenons le graphe probabiliste précédent, en convenant d'avoir $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: cela signifie qu'initialement, on est à l'état A. Alors,

$$\pi_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}^n .$$

Solution de l'exercice type 2

Lycée Gaston Bachelard, Chelles

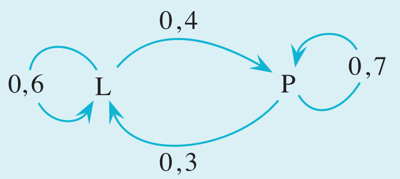
On modélise le problème par un graphe probabiliste à deux états : L (la voiture se trouve à Lyon) et P (la voiture se trouve à Paris).
En notant L_n (resp. P_n) l'événement « la voiture se trouve à Lyon (resp. Paris) à la fin de n-ième semaine », l'énoncé donne les probabilités conditionnelles suivantes :

- $P_{P_n}(P_{n+1}) = 0{,}7$: boucle sur P pondérée par 0,7 ;
- $P_{L_n}(L_{n+1}) = 0{,}6$: boucle sur L pondérée par 0,6.

On en déduit :

- $P_{P_n}(L_{n+1}) = 0{,}3$: une arête de P vers L pondérée par 0,3 ;
- et $P_{L_n}(P_{n+1}) = 0{,}4$: une arête de L vers P pondérée par 0,4.

1 Les sommets étant listés par ordre alphabétique, on obtient le graphe $\mathcal{G}$ et sa matrice de transition M suivants :



$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

La voiture étant choisie au hasard, on ne sait pas si elle se trouve à Lyon ou à Paris. Mais on connaît la loi de probabilité de son lieu initial.

$$l_0 = p(L_0) = \frac{300}{800} = \frac{3}{8} \quad ; \quad p_0 = p(P_0) = \frac{500}{800} = \frac{5}{8}.$$

COURS
INTERROS
CORRIGÉS

COURS

Solution de l'exercice type 2 (suite)

Lycée Gaston Bachelard, Chelles

L'état initial du graphe est représenté par la matrice ligne E_0 :

$$E_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

2 L'état du graphe E_1 après une transition est défini par : $E_1 = E_0 \times M$.
L'état du graphe E_{10} après dix transitions est : $E_{10} = E_0 \times M^{10}$.
On peut calculer E_1 manuellement ; on calcule E_{10} avec la calculatrice.
On obtient : $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{33}{80} & \frac{47}{80} \end{pmatrix}$ et $E_{10} = \begin{pmatrix} 0{,}429 & 0{,}571 \end{pmatrix}$.

3 Le graphe admet un état stable. Posons :

$$E_s = \begin{pmatrix} l & p \end{pmatrix} \quad \text{avec } l + p = 1,\ l \geqslant 0 \ \text{ et } p \geqslant 0.$$

Déterminer E_s (par calcul algébrique) équivaut à résoudre les équations suivantes dans $(\mathbb{R}_+)^2$: $E_s = E_s \times M$ et $l + p = 1$.
Calculons le produit matriciel $E_s \times M$ en fonction de l et p :

$$E_s \times M = \begin{pmatrix} l & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6l + 0{,}3p & 0{,}4l + 0{,}7p \end{pmatrix}.$$

On traduit l'équation (1) par un système d'équations dont les inconnues sont l et p :

$$\begin{aligned} E_s \times M = E_s &\iff \begin{pmatrix} 0{,}6l + 0{,}3p & 0{,}4l + 0{,}7p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & p \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0{,}6l + 0{,}3p = l \\ 0{,}4l + 0{,}7p = p \end{cases} \end{aligned}$$

Résoudre (1) et (2) équivaut à résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -0{,}4l + 0{,}3p = 0 \\ 0{,}4l - 0{,}3p = 0 \\ l + p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0{,}7p = 0{,}4 \\ l + p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = \frac{4}{7} \\ l = \frac{3}{7} \end{cases}$$

L'état stable E_s est : $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

4 Les états E_n convergent vers E_s, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} l_n = \frac{3}{7}.$$

En interprétant ces probabilités comme des fréquences, on déduit qu'à très long terme le parc automobile se répartira de façon stable entre les deux agences, environ 42,9 % des voitures étant à Lyon et 57,1 % des voitures à Paris (à 0,1 % près). Soit, à la voiture près, 343 voitures à Lyon et 457 à Paris.

Voir énoncé page 513

Matrices

1 V/F Sommes et produits

10 min Corrigé p. 527

Soient A, B et C des matrices.
Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Si $A \times B = A \times C$ alors $B = C$.
2. Si on peut calculer $A \times B$ et $B \times A$, alors A et B sont des matrices carrées de même ordre.
3. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
4. $(A + B)^2 = A^2 + 2A \times B + B^2$.

2 V/F Systèmes linéaires

10 min Corrigé p. 527

Soient a, b et c des réels. On considère le système d'inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x - 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. La matrice du système est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Le système admet un triplet unique solution quelles que soient les valeurs de a, b et c.
3. Si A est la matrice du système, alors la matrice des solutions est : $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times A^{-1}$.
4. Si P est solution du système $A \times X = B$ et du système $A'X = B'$, alors P est solution du système $(A + A') \times X = B + B'$.

3 V/F Opérations diverses

20 min Corrigé p. 527

Dire, pour chacune des propositions ci-dessous, si elles sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Pour toutes matrices carrées A et B de même ordre, on a :

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

INTERROS

2 Soit A une matrice carrée d'ordre p et I la matrice identité d'ordre p.
On a : $A^2 - I^2 = (A - I)(A + I)$.

3 Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors la matrice A est nécessairement la matrice nulle.

4 Soit a un nombre réel et A la matrice carrée définie par $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.
La matrice A est inversible pour tout réel a.

5 Une écriture matricielle du système $\begin{cases} x + z & = -1 \\ x - 2y & = 0 \\ y + 3z & = 1 \end{cases}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6 Soit A une matrice carrée d'ordre p inversible.
On a : $A^3 \times A^{-1} = A^2$.

Opérations sur les matrices

4 Sommes et produits

★ 15 min Corrigé p. 528

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer : $A + B$, $-3A$, $A \times C$ et $D \times C$.

5 Puissances d'une matrice

★ 15 min Corrigé p. 528

Lycée Charlemagne, Paris

Soit la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

I est la matrice identité d'ordre 3.

1 Calculer A^2 et montrer que $A^2 = A + 2I$.

2 En déduire A^3 en fonction de A et de I.

6 Systèmes d'équations linéaires

★ 15 min Corrigé p. 529

Lycée Virlogeux, Riom

Donner l'écriture matricielle de chacun des systèmes suivants, puis les résoudre en effectuant des calculs matriciels à la calculatrice.

1 S_1 : $\begin{cases} y+z &= 1 \\ x+z &= 1 \\ x+y &= 1 \end{cases}$ **2** S_2 : $\begin{cases} 2x-y+z &= 7 \\ x+y-z &= 4 \\ 4x+7y+2z &= 0 \end{cases}$

7 Matrice inverse

★ 20 min Corrigé p. 529

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 Pour chacune des matrices suivantes, justifier l'existence ou non de la matrice inverse et déterminer, si elle existe, la matrice inverse.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 4 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$.

2 On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels.

(a) Quelle relation existe-t-il entre a et b lorsque C n'est pas inversible ?

(b) Déterminer a et b tels que C est inversible et $C^{-1} = C$.

8 Puissances et déduction

★★ 10 min Corrigé p. 531

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

On donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - A$, puis en déduire que A est inversible. Déterminer alors A^{-1}.

Matrices et suites

9 États probabilistes

★★ 20 min Corrigé p. 531

Lycée Charlemagne, Paris

Deux fabricants de parfums lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils appellent Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité. L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires. Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20% des personnes interrogées préfèrent Aurore (et les autres préfèrent Boréale).

Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes interrogées préférant Aurore et 15% des personnes interrogées préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n, on désigne par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste la semaine n, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité qu'une personne choisie au hasard préfère Boréale la semaine n.

1 **(a)** Donner la matrice P_0.

(b) Cette situation peut être assimilée à une marche aléatoire sur un graphe à deux sommets.

Écrire la matrice de transition M entre les états de cette marche aléatoire.

2 **(a)** Calculer P_1 à la main, en détaillant le calcul.

(b) Exprimer, pour tout n, P_n en fonction de P_0 et n.

(c) En déduire P_4 à l'aide de la calculatrice (on donnera des valeurs approchées au centième) et interpréter ce résultat.

3 Le fabricant de parfum qui a lancé la campagne estime qu'en fait chaque semaine seuls 80% des consommateurs voient leur comportement influencé comme décrit ci-dessus par la publicité. Les 20% restants choisissent de façon équiprobable un des deux parfums. On garde les notations des autres questions (P_n et M)

(a) Établir, pour tout $n \geqslant 0$, une relation entre P_{n+1} et P_n faisant intervenir la matrice M et la matrice ligne $N = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

(b) Si les conditions initiales sont celles du début du problème, déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'état probabiliste des choix de parfums après 4 semaines de publicité (arrondir les résultats au centième).

10 Suites et matrices

★★ 25 min Corrigé p. 532

Lycée Charlemagne, Paris

On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 8 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1 Calculer u_2 et u_3.

2 Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = AC_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

3 Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer QP.

(b) On admet que $A = PDQ$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n,

$$A^n = PD^nQ.$$

4 À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, qu'on admet : pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^n & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

La suite u a-t-elle une limite ?

11 Suite de matrices

★★★ 30 min Corrigé p. 533

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

Dans un pays, deux opérateurs de téléphonie mobile AFR et BFM se partagent le marché.

En 2005, AFR en contrôlait 80%, et BFM 20%. Mais la concurrence fait rage. On a observé, dans les années suivantes, que d'une année sur l'autre :

- 60% de la clientèle de AFR lui reste fidèle, tandis que 40% passent chez BFM.
- 70% de la clientèle de BFM lui reste fidèle, tandis que 30% passe chez AFR.

Ces proportions sont stables ; il n'y a pas de fuite de clientèle vers des opérateurs étrangers, et il n'y a pas d'abandon de consommation de ces produits.

Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n et b_n les parts de marché de AFR et BFM en l'année $(2005 + n)$. Ainsi, $a_0 = 0{,}8$ et $b_0 = 0{,}2$.

1 Traduire l'énoncé pour obtenir le système d'équations donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2 On pose (U_n) la suite de matrices colonnes telle que $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

(a) Traduire le système d'équations sous forme matricielle $U_{n+1} = AU_n$. Donner A.

(b) En déduire l'expression de U_n en fonction de U_0.

(c) À l'aide de la calculatrice, donner les parts de marché de AFR et BFM en 2020.

3 **(a)** De la relation $a_n + b_n = 1$, déterminer les matrices D et E telles que : $U_{n+1} = DU_n + E$, où D est une matrice diagonale et E une matrice colonne.

(b) Déterminer la matrice colonne C telle $C = DC + E$.

(c) On pose la suite de matrices (X_n) telle que pour tout entier naturel n, $X_n = U_n - C$.

Montrer que $X_{n+1} = DX_n$.

(d) En déduire l'expression de X_n, puis de U_n, en fonction de n.

(e) Montrer alors que U converge vers C. Interpréter.

Graphes

12 V/F Sauts de puces

10 min — Corrigé p. 534

Une puce saute d'un sommet à l'autre d'un triangle. Arrivée à un sommet, elle saute sur un des deux autres choisis au hasard.

Les sommets sont numérotés 1, 2 et 3. On considère X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet atteint au n^e saut.

On note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

La puce part du sommet 1.

1 La matrice de transition du graphe associé à cette marche aléatoire est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2 $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4 Après un grand nombre de sauts, la puce a moins de chance de se retrouver au sommet de départ qu'aux autres sommets.

13 Représentation graphique ★ 5 min

Corrigé p. 535

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1. Représenter par un graphe probabiliste une chaîne de Markov à 2 états dont la matrice de transition est $\begin{pmatrix} 0,29 & 0,71 \\ 0,13 & 0,87 \end{pmatrix}$.

2. Représenter par un graphe probabiliste une chaîne de Markov à 3 états dont la matrice de transition est $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,55 & 0,3 & 0,15 \\ 0,6 & 0,28 & 0,12 \end{pmatrix}$

14 Chaîne de Markov et système linéaire ★ 15 min

Corrigé p. 535

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

On considère une chaîne de Markov à 2 états de matrice de transition :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Soit $\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ sa distribution invariante.

1. Justifier que le couple $(x\,;\, y)$ est solution du système (S) : $\begin{cases} 2x - y & = 0 \\ x + y & = 1 \end{cases}$.

2. Résoudre (S) et en déduire la valeur de π.

15 Lancer de balle ★★★ 30 min

Corrigé p. 536

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

Aline, Benjamin et Chloé s'amusent en se lançant une balle.

- Quand Aline a la balle, elle l'envoie à Benjamin avec une probabilité de 0,75 et à Chloé avec une probabilité de 0,25.
- Quand Benjamin a la balle, il l'envoie à Aline avec une probabilité de 0,75 et à Chloé sinon.
- Chloé envoie toujours la balle à Benjamin.

Au début du jeu, Aline a la balle.

On note A l'état : « Aline a la balle », B l'état : « Benjamin a la balle » et C l'état : Chloé a la balle ».

1. En considérant les états A, B et C dans cet ordre, écrire la matrice de transition T associée à la chaîne de Markov.

2. (a) Donner la distribution initiale π_0.
   (b) Calculer la probabilité qu'Aline ait la balle au bout du cinquième lancer.

COURS INTERROS CORRIGÉS

INTERROS

3 **(a)** On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & -4 & 12 \end{pmatrix}$.

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, $D = P^{-1}TP$.

(b) Exprimer T^n pour tout entier naturel n.

(c) En déduire, en fonction de n, la probabilité qu'Aline ait la balle au bout du n-ième lancer.

1 V/F Sommes et produits

Énoncé p. 519

1 *Faux*. Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $B \neq C$. Par contre cette implication est vraie si A est inversible.

2 *Faux*. Il suffit que A soit de format (m,n) et B de format (n,m) pour qu'on puisse calculer les deux produits quels que soient les entiers positifs m et n.

3 *Faux*. On applique la formule du cours pour calculer l'inverse de la matrice carrée d'ordre 2. Le déterminant de A est $2 \times 2 - 2 \times 4 = -4$. Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4 *Faux*. En appliquant la règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on obtient : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Mais comme la multiplication n'est pas commutative, $AB + BA$ n'est en général pas égal à $2AB$.

2 V/F Systèmes linéaires

Énoncé p. 519

1 *Faux*. La matrice associée est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 *Vrai*. La calculatrice montre que la matrice associée est inversible, donc que le système a une solution unique pour toutes valeurs données aux constantes a, b et c.

3 *Faux*. Dans un système linéaire, on utilise des matrices colonnes. La matrice solution est alors $A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

4 *Vrai*. Si P est solution de chacun des systèmes, alors $AP = B$ et $A'P = B'$. Or, $(A+A')P = AP + A'P = B + B'$, ce qui montre que P est solution de $(A+A')X = B + B'$.

3 V/F Opérations diverses

Énoncé p. 519

1 *Faux*. $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$.
Mais en général, $AB \neq BA$, donc l'identité proposée est fausse.

2 *Vrai*. $(A-I)(A+I) = A^2 + AI - IA - I^2 = A^2 + A - A - I^2 = A^2 - I^2$.

COURS INTERROS CORRIGÉS

CORRIGÉS

3 *Faux*. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 *Faux*. Le déterminant de A est $a^2 - 1$, et il s'annule pour $a = 1$ et $a = -1$.

5 *Faux*. La matrice carrée est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6 *Vrai*. En effet, $A^3 \times A^{-1} = A^2 \times A \times A^{-1} = A^2 \times I = A^2$.

4 Sommes et produits

Énoncé p. 520

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

- $A + B = \begin{pmatrix} -2+1 & 0-2 & 1-1 \\ 1+2 & -1+2 & 0+0 \\ 3+3 & 0+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- $-3A = \begin{pmatrix} -2\times(-3) & 0\times(-3) & 1\times(-3) \\ 1\times(-3) & -1\times(-3) & 0\times(-3) \\ 3\times(-3) & 0\times(-3) & 1\times(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
- $A \times C = \begin{pmatrix} -2\times 1+0\times 2+1\times 0 & -2\times 1+0\times 0+1\times(-1) \\ 1\times 1-1\times 2+0\times 0 & 1\times 1-1\times 0+0\times(-1) \\ 3\times 1+0\times 2+1\times 0 & 3\times 1+0\times 0+1\times(-1) \end{pmatrix}$

  donc $A \times C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- $D \times C = \begin{pmatrix} -1\times 1+0\times 2+1\times 0 & -1\times 1+0\times 0+1\times(-1) \end{pmatrix}$

  soit $D \times C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}$.

5 Puissances d'une matrice

Énoncé p. 520

Lycée Charlemagne, Paris

1 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A + 2I &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A^2. \end{aligned}$$

2 $A^3 = A \times A^2$
$= A \times (A + 2I)$
$= A^2 + 2AI$
$= A + 2I + 2A$
$= 3A + 2I.$

6 Systèmes d'équations linéaires

Énoncé p. 520

Lycée Virlogeux, Riom

1 L'écriture matricielle de S_1 est : $A \times X = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$X = A^{-1} \times B$, et la calculatrice donne :

$$S = \{(0{,}5 \,;\, 0{,}5 \,;\, 0{,}5)\}.$$

2 L'écriture matricielle de S_2 est $A \times X = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$X = A^{-1} \times B$.
À la calculatrice, on obtient :

$$S = \left\{\left(\frac{11}{3} \,;\, -\frac{14}{9} \,;\, -\frac{17}{9}\right)\right\}.$$

7 Matrice inverse

Énoncé p. 521

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 **À RETENIR**

Pour voir si une matrice carrée d'ordre 2 est inversible on vérifie que son déterminant est différent de zéro.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = 5 \times 6 - 4 \times 5 = 10 \neq 0$.
Ainsi, A est inversible.

CORRIGÉS

Posons donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} A \times A^{-1} = I_2 &\iff \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 5a+5c & 5b+5d \\ 4a+6c & 4b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 5a+5c = 1 & (E_1) \\ 5b+5d = 0 & (E_2) \\ 4a+6c = 0 & (E_3) \\ 4b+6d = 1 & (E_4) \end{cases} \end{aligned}$$

On peut déjà écrire que $b = -d$ (équation (E_2)) et $a = -\frac{3}{2}c$ (équation (E_3)). L'équation (E_4) donne alors :

$$-4d + 6d = 1 \iff d = \frac{1}{2}.$$

L'équation (E_1) donne ensuite :

$$-\frac{15}{2}c + 5c = 1 \iff -\frac{5}{2}c = 1 \iff c = -\frac{2}{5}.$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 4 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$ donc $\det(B) = 3{,}5 \times (-8) - (-7) \times 4 = -28 + 28 = 0$.
Ainsi, B n'est pas inversible.

2 **(a)** C n'est pas inversible $\iff \det(C) = 0$
$\iff 2a - b = 0$
$\iff b = 2a$.

(b) C est inversible donc nécessairement, $b \neq 2a$. De plus,

$$\begin{aligned} C = C^{-1} &\iff C \times C = C^{-1} \times C \\ &\iff C^2 = I_2 \\ &\iff \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff a = -2,\ b = 1 - 4 = -3. \end{aligned}$$

8 Puissances et déduction

Énoncé p. 521

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

On a :

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3.$$

On en déduit alors que :

$$(A^2 - I_3)A = 4I_3 \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{4}(A^2 - I_3)A = I_3.$$

En posant $B = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$, on a alors $B \times A = I_3$.

De même, $A \times B = A \times \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}A(A^2 - I_3)A = I_3$.

On a alors $AB = BA = I_3$, donc A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

9 États probabilistes

Énoncé p. 521

Lycée Charlemagne, Paris

1 **(a)** $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

(b) $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$.

2 **(a)** $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times 0{,}15 & 0{,}2 \times 0{,}1 + 0{,}8 \times 0{,}85 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

(b) $P_n = P_0 \times M^n$.

(c) $P_4 = P_0 \times M^4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}47 & 0{,}53 \end{pmatrix}$.

Au bout de 4 semaines, la probabilité qu'une personne interrogée préfère le parfum Aurore est environ 0,47, et la probabilité qu'elle préfère Boréale est environ 0,53.

3 **(a)** $P_{n+1} = 0{,}8 \times P_n \times M + 0{,}2 \times N$.

(b) On obtient successivement :

- $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix}$;
- $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}424 & 0{,}576 \end{pmatrix}$;
- $P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}474\,4 & 0{,}525\,6 \end{pmatrix}$;
- $P_4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}50 \end{pmatrix}$.

CORRIGÉS

10 Suites et matrices

Énoncé p. 522

Lycée Charlemagne, Paris

1 On obtient : $u_1 = 22$ et $u_2 = 62$.

2 $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le résultat est assez évident, mais par rigueur on peut faire une récurrence.

- La propriété est évidemment vraie au rang 0.
- Supposons la propriété vraie au rang k, c'est-à-dire $C_k = A^k C_0$.
  On a $C_{k+1} = AC_k$, donc $C_{k+1} = A \times A^k C_0 = A^{k+1} C_0$.

On a montré que la propriété est vraie au rang 0, et que, si elle est vraie à un rang k quelconque, elle est aussi vraie au rang $k+1$, elle est donc vraie pour tout n.

3 **(a)** $QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Cela signifie que Q est l'inverse de P.

(b)
- Initialisation : $A^1 = PDQ$: c'est ce qu'on admet d'après l'énoncé donc la propriété est vraie au rang 1.
- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang k supérieur ou égal à 1, c'est-à-dire : $A^k = PD^k Q$.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= PDQ \times PD^k Q \\ &= PD \times (QP) \times D^k Q \\ &= P \times D \times D^k \times Q \quad \text{car } QP = I_2 \\ &= P \times D^{k+1} \times Q \end{aligned}$$

Donc pour tout n, $A^n = PD^n Q$.

4 D'après ce qui précède on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De plus, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ (si vous n'êtes pas convaincus, cela se démontre aisément par récurrence).

On peut en déduire A^n, dont seuls deux termes nous intéressent. On en déduit donc en effectuant partiellement le produit matriciel :

$$u_n = 8(-2^n + 3^n) + 3(3 \times 2^n - 2 \times 3n) = 2^n + 2 \times 3^n.$$

2 et 3 étant supérieurs à 1, $\lim_{n\to+\infty} 2^n = \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

Par conséquent, la suite diverge vers $+\infty$.

11 Suite de matrices

Énoncé p. 523

Lycée Notre-Dame-du-Grandchamp, Versailles

1 D'après l'énoncé, on a : $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}7b_n \end{cases}$.

2 **(a)** On a : $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

(b) On a donc : $U_n = A^n U_0$.

(c) On obtient alors $U_{15} \approx \begin{pmatrix} 0{,}43 \\ 0{,}57 \end{pmatrix}$.

3 **(a)** En utilisant $a_n + b_n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}7b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}3(1 - a_n) \\ b_{n+1} = 0{,}4(1 - b_n) + 0{,}7b_n \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}3 \\ b_{n+1} = 0{,}3b_n + 0{,}4 \end{cases}$$

Donc, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$.

On a donc $D = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$.

(b) On pose $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$C = DC + E \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3a \\ 0{,}3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

On a donc : $a = 0{,}3a + 0{,}3$ et $b = 0{,}3b + 0{,}4$, donc $a = \dfrac{3}{7}$ et $b = \dfrac{4}{7}$, et donc $C = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

(c) On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= DU_n + E - C \\ &= DU_n - DC \\ &= D(U_n - C) \\ &= DX_n. \end{aligned}$$

(d) Par analogie avec les suites géométriques, on a donc :

$$X_n = D^n X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3^n & 0 \\ 0 & 0{,}3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \\ -\frac{13}{35} \end{pmatrix}$$

car :

$$X_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \\ -\frac{13}{35} \end{pmatrix}.$$

CORRIGÉS

On a ensuite :

$$\begin{aligned} U_n &= X_n + C \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}3^n & 0 \\ 0 & 0{,}3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \\ -\frac{13}{35} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{35} \times 0{,}3^n + \frac{3}{7} \\ -\frac{13}{35} \times 0{,}3^n + \frac{4}{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

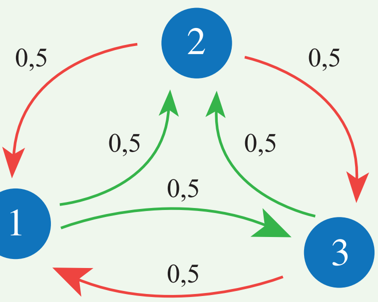
(e) 0,3 est strictement compris entre -1 et 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}3^n = 0$.

On peut donc en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = C$.

Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, le marché va se stabiliser, AFR ayant 3 parts sur 7 et BFM 4 parts sur 7.

12 V/F Sauts de puces

Énoncé p. 524



1 *Faux*. La puce n'a le choix qu'entre deux directions à partir de chaque sommet.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2 *Faux*. $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 *Vrai*. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4 *Faux*. Si $S = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ est une distribution invariante du système, alors $S = SM$ et a, b et c sont solution du système :

$$\begin{cases} 2a = b + c \\ 2b = a + c, \text{ avec } a + b + c = 1. \\ 2c = a + b \end{cases}$$

Chaque équation étant obtenue à partir d'une autre par permutation de a, b, c, on voit que s'il y a des solutions, alors $a = b = c$. Donc la distribution invariante correspond à l'équiprobabilité des 3 positions.

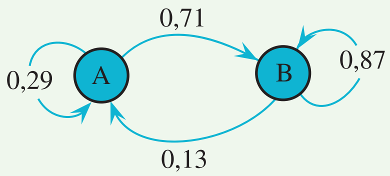
Si l'état probabiliste converge, c'est vers la distribution invariante, donc au bout d'un grand nombre de sauts, la puce n'a donc pas plus de chance d'être sur un sommet plutôt qu'un autre.

13 Représentation graphique

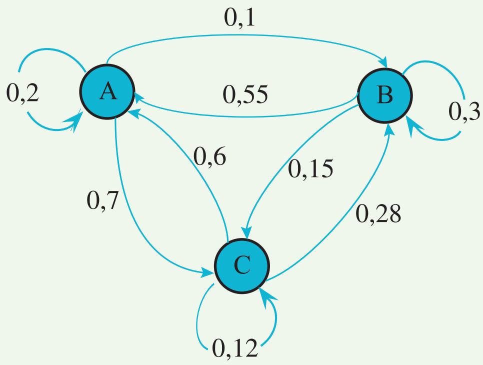
Énoncé p. 525

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 Voici un graphe probabiliste à deux états dont la matrice de transition est celle de l'énoncé :



2 Voici un graphe probabiliste à trois états dont la matrice de transition est celle de l'énoncé :



14 Chaîne de Markov et système linéaire

Énoncé p. 525

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 Par définition, $\pi = \pi T$, d'où :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y & \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y &= 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y &= 0 \end{cases}$$

CORRIGÉS

On obtient deux équations identiques (ce qui est normal). Cependant, il ne faut pas oublier que nous avons un graphe *probabiliste* et donc que $x + y = 1$ (la somme des probabilités est toujours égale à 1).

On a donc bien deux égalités sur x et y : $\begin{cases} 2x - y = 0 & (L_1) \\ x + y = 1 & (L_2) \end{cases}$

2 En faisant $(L_1) + (L_2)$, on a : $3x = 1$, soit $x = \dfrac{1}{3}$.

On en déduit alors que $y = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. Ainsi, $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

15 Lancer de balle

Énoncé p. 525

Lycée François Rabelais, Saint-Brieuc

1 La matrice de transition associée à cette chaîne de Markov est la suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 **(a)** Au début du jeu, Aline a la balle donc la distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Pour tout entier naturel n, $\pi_n = \pi_0 T^n$ donc :

$$\pi_5 = \pi_0 T^5 \approx \begin{pmatrix} 0{,}258 & 0{,}542 & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad \text{(à la calculatrice)}$$

Ainsi, la probabilité qu"Aline ait la balle au bout du cinquième lancer est d'environ 0,258.

3 **(a)** À l'aide de la calculatrice, on trouve que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}75 \end{pmatrix}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$D^n = \left(P^{-1}TP\right)^n = P^{-1}T\underbrace{PP^{-1}}_{=I_3}TP \cdots P^{-1}TP = P^{-1}T^nP.$$

On en déduit alors :

$$PD^nP^{-1} = PP^{-1}T^nPP^{-1} = T^n$$

soit :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0{,}75)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{16}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix}$$

On ne va pas chercher à aller plus loin dans ce genre de calculs car cela devient très vite fastidieux.

(c) On a :

$$\begin{aligned}\pi_n &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 1 & -9\\ 1 & -4 & 12\end{pmatrix} D^n P^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (-0{,}25)^n & 0\\ 0 & 0 & (-0{,}75)^n\end{pmatrix} P^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1 & (-0{,}25)^n & 5\times(-0{,}75)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{12}{35} & \frac{16}{35} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité qu'Aline ait la balle au n-ième lancer est :

$$\frac{12}{35}+\frac{3}{10}(-0{,}25)^n+\frac{5}{14}(-0{,}75)^n$$

(on ne développe que les calculs sur la première colonne de P^{-1}).

Remarque : on peut en déduire qu'à long terme, cette probabilité sera proche de $\frac{12}{35}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0{,}25)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}(-0{,}75)^n=0$.
Dans un cas général, la distribution invariante du système est :

$$\pi=\begin{pmatrix}\frac{12}{35} & \frac{16}{35} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

COURS INTERROS CORRIGÉS

Annexe A

Memento Maths expertes

Nombres complexes

$\mathbb{C} = \{a + ib,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1\}$.

Définitions

Parties réelles et imaginaires	Conjugué	Module	Arguments
$z = a + ib \iff \begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) \\ b = \mathrm{Im}(z) \end{cases}$	$\overline{z} = a - ib$	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\arg(z) = \theta$, où $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\lvert z\rvert} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\lvert z\rvert} \end{cases}$

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = a + ib$	$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$	$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Propriétés

Conjugué	Module	Arguments (pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$)
• $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	• $\lvert z\rvert = \lvert\overline{z}\rvert$	• $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
• $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	• $\lvert z \times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	• $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
• $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$	• $\left\lvert \dfrac{z}{z'} \right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	• $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
• $\overline{z^n} = \overline{z}^n$	• $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	• $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$

Polynômes

Équations du second degré	Factorisation de $z^n - a^n$
$\begin{cases} az^2 + bz + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a} = \overline{z_1} \end{cases}$	$z^n - a^n = (z - a)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k-1}$

Trigonométrie

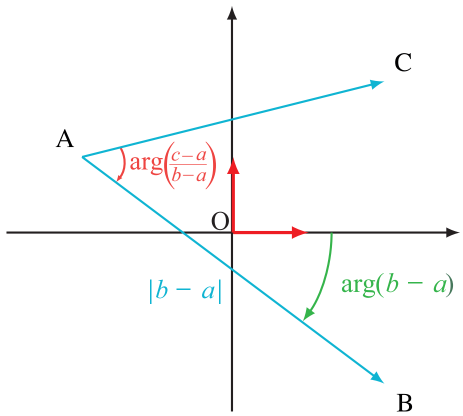
Formule de Moivre	Formules d'Euler
$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$	$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

Formules d'addition	Formules de duplication
• $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ • $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$	• $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ • $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ $= 2\cos^2(a) - 1$ $= 1 - 2\sin^2(a)$

Distances et angles

Soient A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

- $|b-a| = AB$
- $\arg(b-a) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right)$
- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{AC}{AB}$
- $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$



Racines n-ièmes de l'unité

Pour n entier naturel, on appelle *racines n-ièmes* de l'unité tous les nombres complexes z tels que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de toutes ces valeurs :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}, k \in [0 \,;\, n-1], k \in \mathbb{N}\right\}$$

Arithmétique

Dans ce qui suit, sauf indication contraire, a, b, c et n sont des entiers relatifs.

Divisibilité

$$a \text{ divise } b \iff a|b \iff \exists n \in \mathbb{Z},\ b = a \times n$$

Transitivité	Combinaison linéaire
$\begin{cases} a\|b \\ b\|c \end{cases} \implies a\|c$	$\begin{cases} a\|b \\ a\|c \end{cases} \implies \forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{Z},\ a\|(\lambda b + \mu c)$
Division euclidienne	
$\forall\,(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \exists!\,(q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b$	

Congruences

a est congru à b modulo c $\iff \exists n \in \mathbb{Z},\ a = b + nc \iff c|(a-b)$.

- $a \equiv b \mod n \iff n|(a-b)$
- $\begin{cases} a \equiv c \mod n \\ c \equiv b \mod n \end{cases} \iff a \equiv b \mod n$
- $a \equiv b \mod n \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ \begin{cases} a + k \equiv b + k \mod n \\ ka \equiv kb \mod n \\ a^k \equiv b^k \mod n \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$
- $\begin{cases} a \equiv b \mod n \\ a' \equiv b' \mod n \end{cases} \iff \begin{cases} a + a' \equiv b + b' \mod n \\ aa' \equiv bb' \mod n \end{cases}$

PGCD

Propriétés
• $a = bq + r,\ 0 \leqslant r < b,\ q \in \mathbb{Z} \iff \text{pgcd}(a;b) = \text{pgcd}(b;r)$
• Les diviseurs communs à a et b divisent $\text{pgcd}(a;b)$
• $\begin{cases} d\|a \\ d\|b \end{cases} \implies d\|\,\text{pgcd}(a;b)$
• $\exists\,(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ \begin{cases} a = a' \times \text{pgcd}(a;b) \\ b = b' \times \text{pgcd}(a;b) \end{cases}$ avec $\text{pgcd}(a';b') = 1$.
• a et b premiers entre eux $\iff \text{pgcd}(a;b) = 1$

Théorème de Bézout	Théorème de Gauss
$\text{pgcd}(a;b)=1 \iff \exists\,(u;v)\in\mathbb{Z}^2,\ au+bv=1$ Corollaire : $\text{pgcd}(a;b)=d \iff \begin{cases} d\|a \text{ et } d\|b \\ \exists\,(u;v)\in\mathbb{Z}^2,\ au+bv=d. \end{cases}$	$\begin{cases} a\|bc \\ \text{pgcd}(a;b)=1 \end{cases} \Rightarrow a\|c$

Nombres premiers

Un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs distincts 1 et lui-même.

L'ensemble des nombres premiers est souvent noté $\mathbb{P}$.

Théorèmes

- $\mathbb{P}$ est infini.
- $\forall\, n \geqslant 2$, si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ alors n est premier.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

où k est un entier naturel non nul et $p_i \in \mathbb{P}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Petit théorème de Fermat

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \in \mathbb{N},\ a \not\equiv 0 \mod p \end{cases} \Longrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

Matrices

Dimensions d'une matrice

On pourra noter une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice de dimensions $n \times m$, ou plus simplement : $A = (a_{i,j})$, avec $\dim(A) = n \times m$.

- Si $n = 1$, on dira que A est une *matrice ligne*.
- Si $m = 1$, on dira que A est une *matrice colonne*.
- Si $n = m$, on dira que A est une *matrice carrée*.

Matrices particulières

Matrice identité	Matrices diagonales
$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$
Puissances d'une matrice diagonale	
$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \iff D^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^p & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^p \end{pmatrix}$	

Matrices inverses d'ordre 2

On appelle *matrice inverse de* A, quand elle existe, l'unique matrice, notée A^{-1}, telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ ad - bc \neq 0 \end{cases} \iff A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Écritures matricielles

Systèmes linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\boxed{AX = B \iff X = A^{-1}B}$$

Suites

On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ \vdots \\ u_n^{(p)} \end{pmatrix}$ où les $u_n^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont p suites numériques et

$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0}$$

Graphes

Un *graphe* $\mathcal{G}$ est la donnée de deux ensembles : l'un est constitué de points, appelés *sommets*, l'autre est constitué de couples de points, appelés *arêtes*.

Vocabulaire

- Deux sommets sont *adjacents* s'il existe une arête entre eux.
- Un graphe est *complet* si tous les sommets sont adjacents deux à deux.

Propriété 1

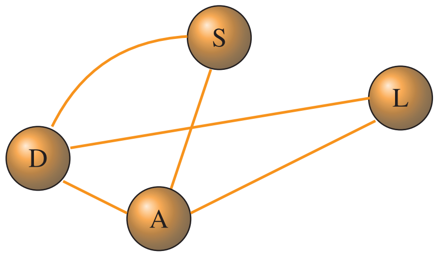
Un graphe complet à n sommets compte $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

- L'*ordre* d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Une *chaîne* d'un graphe est une liste ordonnée de sommets adjacents deux à deux.
  Le nombre d'arêtes de cette liste est appelé la *longueur* de la chaîne.
- Un graphe est *connexe* si deux sommets quelconques de ce graphe peuvent être reliés par au moins une chaîne.

Types de graphes

<table>
<tr><th>Graphes non orientés</th><th>Graphes orientés</th></tr>
<tr><td>

$\mathcal{G} = (\mathcal{S}; \mathcal{A})$ est *non orienté* si les couples de $\mathcal{A}$ peuvent être inversés.

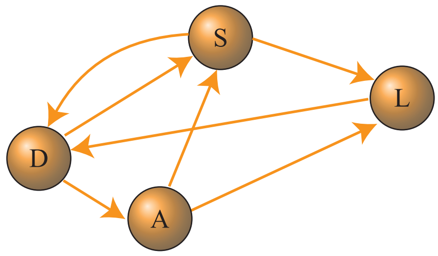


Matrice d'adjacence (D, A, S, L) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

</td><td>

$\mathcal{G} = (\mathcal{S}; \mathcal{A})$ est *orienté* si les couples de $\mathcal{A}$ ne peuvent pas être inversés.

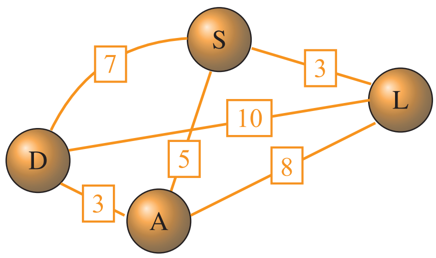


Matrice d'adjacence (D, A, S, L) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

</td></tr>
<tr><th>Graphes pondérés</th><th>Graphes probabilistes</th></tr>
<tr><td>

Un graphe est dit *pondéré* si ses arêtes sont munies de nombres positifs, appelés *étiquettes* ou *pondérations*.

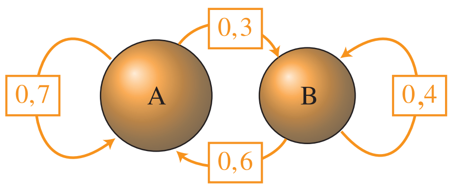


Matrice d'adjacence (D, A, S, L) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 5 & 0 & 3 \\ 10 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

</td><td>

Un graphe probabiliste est un graphe orienté où la somme des pondérations des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.



Matrice de transition (A, B) :

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

</td></tr>
</table>

Chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires (X_n) où chaque X_n ne dépend que de X_{n-1}, pour $n > 0$.

La représentation sagittale précédente du graphe probabiliste représente une chaîne de Markov à 2 états.

État stable

Soit $\mathcal{G}$ un graphe probabiliste de matrice P.

L'*état stable* du graphe est la matrice ligne $\pi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ telle que $\pi = \pi P$, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Sous des hypothèses vérifiées pour les chaînes à 2 ou 3 états usuelles (chaîne apériodique irréductible), $\pi_0 = \pi_0 P^n$ converge vers π quand n tend vers $+\infty$.

Annexe B

Memento Python

Saisies	
`a = input("Entrez une valeur")`	a est une chaîne de caractères
`n = int(input("Valeur:"))`	n est un nombre *entier*
`n = float(input("Valeur:"))`	n est un nombre *réel*
Opérations mathématiques	
`a+b , a-b`	Somme/différence de deux nombres
`a*b`	Produit de deux nombres
`a/b`	Quotient de deux nombres
`a//b`	Quotient de la division euclidienne
`a**n`	Résultat de a^n
`round(a,n)`	Arrondi de a avec n décimales
Nombres aléatoires (`from random import *`)	
`random()`	Renvoie un nombre aléatoire entre 0 (inclus) et 1 (exclus)
`randint(a,b)`	Renvoie un nombre entier compris entre a et b (inclus)
Fonctions mathématiques (`from math import *`)	
`log(x)`	Renvoie le logarithme népérien de x
`exp(x)`	Renvoie la valeur e^x
`sqrt(x)`	Renvoie la valeur de $\sqrt{x}$
`cos(x)`	Renvoie la valeur de $\cos(x)$
`sin(x)`	Renvoie la valeur de $\sin(x)$
`pi`	Nombre π
Listes	
`L = [a,b]`	Liste contenant les variables `a` et `b`
`L.append(c)`	Ajoute la variable `c` à la liste `L`

Tests

```
if <condition 1>:
    <instruction 1>
elif <condition 2>:
    <instruction 2>
else:
    <instruction 3>
```

Si <condition 1> est vraie, <instruction 1> est exécutée, sinon : si <condition 2> est vraie, <instruction 2> est exécutée, sinon <instruction 3> est exécutée.

Boucles

range(n)	Parcourt les entiers de 0 à $n-1$ (inclus)
range(a,b+1)	Parcourt les entiers de a à b (inclus)

```
for i in range(n):
    <instruction>
```

La variable i prend les valeurs de 0 à $n-1$ et pour chaque valeur de i, <instruction> est exécutée.

```
while <condition>:
    <instruction>
```

<instruction> est exécutée tant que <condition> est vraie.

Algorithme de seuil (exemple)

```
from math import*
def seuil(S):
    V = log(4)
    n = 0
    while V < S :
        n = n + 1
        V = log(2*exp(V)-1)
    return(n)
```

Cette fonction renvoie la première valeur de n pour laquelle $V \geqslant S$ (condition contraire de celle qu'il y a après « while »).
V représente ici le terme de la suite :

$$\begin{cases} V_0 = \ln(4) \\ V_{n+1} = \ln\left(2e^{V_n} - 1\right) \end{cases}$$

Calculs des premiers termes d'une suite (exemple)

```
def termes(n):
    p = 1
    L = [p]
    for k in range(1,n+1):
        p = 0.2*p+0.7
        L.append(p)
    return L
```

Cette fonction renvoie la liste des n premiers termes de la suite définie par : $\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7 \end{cases}$
La boucle permet de calculer p_1, p_2, ..., p_n et de les mettre dans la liste L.

Annexe C

Liste des vidéos