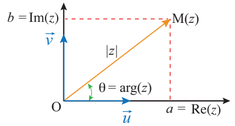
Mathématiques expertes

Nombres complexes

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = a + \mathrm{i}b$	$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$	$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$



Module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Arguments : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$

Distance	Angle
$\mathrm{AB} = \lvert z_B - z_A \rvert$	$(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$
Formules d'Euler	
$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$	$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$
Formule de Moivre ($n \in \mathbb{N}$)	**Racines n-ièmes de l'unité ($n \in \mathbb{N}^*$)**
$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$	$U_n = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$

Arithmétique

$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$.

Division euclidienne	Congruence
$a = bq + r, 0 \leqslant r < b$	$a \equiv r\ (b) \Leftrightarrow b$ divise $a - r \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z},\ a = r + qb$
Théorème de Bézout	
$\mathrm{pgcd}(a; b) = 1 \iff \exists\,(u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1$	
Petit théorème de Fermat	
p premier, $a \not\equiv 0\ (p) \implies a^{p-1} \equiv 1\ (p)$	

Matrices & graphes

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: matrice *carrée* d'ordre 2.

Déterminant	Inverse
$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$	$\det(A) \neq 0 \implies A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Matrice d'adjacence	**Graphe**
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	De A à A : 0 arête De A à B : 1 arête De A à C : 1 arête De B à A : 0 arête etc.

INTERROS des LYCÉES

LES VRAIS EXOS DONNÉS DANS LES LYCÉES

- Des **centaines d'exercices** recueillis dans les lycées de France.
- Des **énoncés variés**, de difficulté progressive, réellement posés par des professeurs dans les classes.
- Tous les **corrigés détaillés**.

LYCÉES DE FRANCE

POUR UN ENTRAÎNEMENT EFFICACE EN MATHS

- Des **rappels de cours** synthétiques.
- Des **QCM** de vérification des connaissances.
- Un **minutage** pour chaque exercice.
- Des **conseils** méthodologiques.

DES VIDÉOS ET DES COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES

- **Dans les vidéos**, les auteurs vous expliquent le **cours** et vous aident à **résoudre les exos**.
- Des **liens** vers des sites Internet et des **ressources numériques** très utiles.
- Une utilisation très simple grâce aux **QR codes** !

Toute une gamme Nathan pour réviser utile

Mes fiches Pour réviser vite et bien

Excellence La mention en plus

Annales Pour s'entraîner comme à l'examen

14,90 €

376892

ISBN 978-209-506540-9

9 782095 065409

imprimé en France

Ce livre est imprimé sur du papier issu de forêts gérées durablement.

Nathan

30

INTERROS des LYCÉES

Term

Maths & Maths expertes

Nathan

INTERROS des LYCÉES

les VRAIS EXOS

donnés dans les lycées

Term

Nouvelle édition

maths spécialité & maths expertes

- Exos minutés et QCM
- Cours et méthodes
- Corrigés détaillés
- Vidéos d'exos en accès direct avec

Mémento sur les rabats

Nathan

Suites

Pour $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ (avec $q \neq 1$), on a :

Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$	$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Principe de récurrence

$(\mathcal{P}_n)$ est une propriété dépendant d'un entier n et n_0 un entier quelconque.
Si $(\mathcal{P}_{n_0})$ est vraie et si $(\mathcal{P}_k) \Rightarrow (\mathcal{P}_{k+1})$ pour tout $k \geqslant n_0$,
alors $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Théorèmes de comparaison

Si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
Si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème des gendarmes

Si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, où ℓ est un réel.

Limites de q^n

$q \leqslant -1$	$\lvert q \rvert < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Théorème de convergence

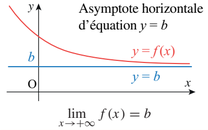
Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.
Toute suite monotone et bornée converge.

Limites de fonctions

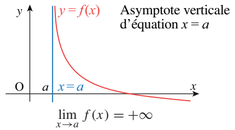
Formes indéterminées

« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »	« $\infty - \infty$ »	« $0 \times \infty$ »	« $\dfrac{0}{0}$ »

Asymptotes



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Géométrie dans l'espace

Combinaison linéaire de vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
$\vec{w}$ est une *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\boxed{\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}$$

Représentation paramétrique d'un plan

$\mathcal{P}$ est un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ non colinéaires et non nuls.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} = k\vec{u}+t\vec{v} \iff \begin{cases} x = x_A + ka + ta' \\ y = y_A + kb + tb' \\ z = z_A + kc + tc' \end{cases}, \ k \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

Représentation paramétrique d'une droite

$\mathcal{D}$ est une droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ non nul.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Produit scalaire de deux vecteurs

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'} \quad \text{avec } \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Vecteurs orthogonaux

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \textit{ orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Distance entre deux points (norme d'un vecteur)

$A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points de l'espace.

$$\boxed{AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Vecteur normal à un plan

$$\boxed{\vec{n} \text{ est } \textit{normal} \text{ au plan } \mathcal{P} \iff \text{pour tout vecteur } \vec{u} \text{ de } \mathcal{P},\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0}$$

Équation cartésienne d'un plan

$\mathcal{P}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

$$\boxed{\text{Équation de } \mathcal{P} \quad : \quad ax + by + cz + d = 0}$$

Primitives et intégration

Primitives usuelles

f est une fonction, F sa primitive, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$	a	x^n	$\frac{1}{x}$	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$F(x)$	ax	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$

Primitives composées

u est une fonction, u' est sa dérivée, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Fonction	$\frac{u'}{u}, u \neq 0$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u^2}$	$u'u^n$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}, u > 0$
Primitive	$\ln\lvert u\rvert$	e^u	$-\frac{1}{u}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$2\sqrt{u}$

Lien avec les primitives

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Valeur moyenne d'une fonction sur [a ;b]

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Intégration par parties

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Propriétés

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

Linéarité	$\int_a^b \lambda f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
Conservation de l'ordre	sur $[a;b]$, $f(x) \geqslant g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
Relation de Chasles	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Dérivées

Dérivées usuelles

a est un réel et n un entier naturel non nul.

$f(x)$	a	x^n	$\sqrt{x}$	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$

Opérations et dérivées

Opération	uv	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	e^u	$\ln(u)$
Dérivée	$u'v + v'u$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$nu'u^{n-1}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ et si k est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe *au moins* une valeur de x dans $[a\,;b]$ telle que $f(x) = k$.

Théorème de la bijection (corollaire du TVI)

Si f est une fonction continue *et strictement monotone* sur $[a\,;b]$
et si k est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$,
alors il existe *une unique* valeur c dans $[a\,;b]$ telle que $f(c) = k$.

Équations différentielles

Équations différentielles élémentaires

Équation différentielle	Solutions
$y' = ay$	$y(x) = Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
$y' = ay + b$	$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a},\ C \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
$y' = ay + f$	$y(x) = Ce^{ax} + u(x)$, u solution particulière

Logarithme népérien

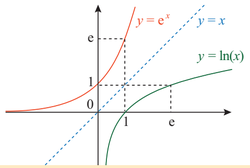
Propriétés et limites

La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$.

Propriétés algébriques
$\ln(1) = 0$
$\ln(e) = 1$
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
$\ln\left(x^p\right) = p\ln(x)$

Limites
$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Comparaison avec l'exponentielle



La courbe représentative du logarithme népérien est *symétrique* à celle de l'exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Combinatoire et dénombrement

	Ordre	Modèle	Exemples
Permutation	Oui	Tirage sans remise	Anagramme *
p-liste	Oui	Tirage avec remise	Digicode
Arrangement A_n^p	Oui	Tirage sans remise	Podium d'une course
Combinaison $\binom{n}{p}$	Non	Tirage sans remise	Main dans un jeu de cartes

* Permutation des lettres d'un mot formant un mot de sens différent.

Probabilités

Épreuve de Bernoulli

Expérience aléatoire à deux issues : « succès » (S) et « échec » ($\overline{S}$).

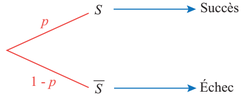


Schéma de Bernoulli

Succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
X (nombre de succès à l'issue de cette succession) suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\boxed{E(X) = np} \qquad \boxed{V(X) = np(1-p)} \qquad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$$

Somme de variables aléatoires indépendantes

$$\boxed{E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)} \qquad \boxed{V(aX + Y) = a^2V(X) + V(Y)}$$

Concentration et loi des grands nombres

a et δ sont deux réels strictement positifs.
X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes d'espérance μ et d'écart-type σ.

Inégalité de Markov	$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}, \quad X \geqslant 0$
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	$P\left(\lvert X - E(X)\rvert \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$
Inégalité de concentration	$P\left(\left\lvert\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right\rvert \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$
Loi faible des grands nombres	$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left\lvert\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right\rvert \geqslant \delta\right) = 0$