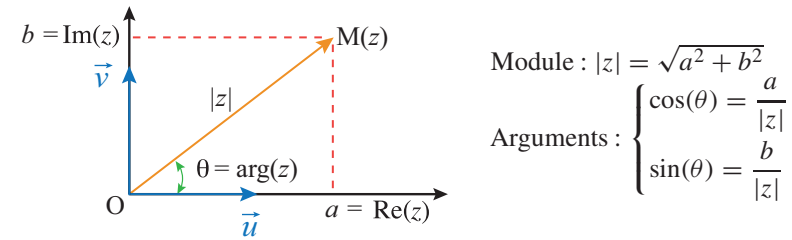


Mathématiques expertes

• Nombres complexes

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = a + ib$	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$	$z = re^{i\theta}$



Distance	Angle
$AB = z_B - z_A $	$(\widehat{AB, AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$
Formules d'Euler	
$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Formule de Moivre ($n \in \mathbb{N}$)	Racines n -ièmes de l'unité ($n \in \mathbb{N}^*$)
$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$	$U_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$

• Arithmétique

$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$.

Division euclidienne	Congruence
$a = bq + r, 0 \leq r < b$	$a \equiv r \pmod{b} \Leftrightarrow b \text{ divise } a - r \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}, a = r + qb$
Théorème de Bézout	
$\text{pgcd}(a; b) = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$	
Petit théorème de Fermat	
p premier, $a \neq 0 \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$	

• Matrices & graphes

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: matrice carrée d'ordre 2.

Déterminant	Inverse
$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$	$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Matrice d'adjacence	Graphe
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>De A à A : 0 arête De A à B : 1 arête De A à C : 1 arête De B à A : 0 arête etc.</p>

Suites

Pour $r \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$ (avec $q \neq 1$), on a :

Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$	$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

• Principe de récurrence

(P_n) est une propriété dépendant d'un entier n et n_0 un entier quelconque. Si (P_{n_0}) est vraie et si $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$ pour tout $k \geq n_0$, alors (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

• Théorèmes de comparaison

Si, pour tout entier $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
Si, pour tout entier $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

• Théorème des gendarmes

Si, pour tout entier $n \geq n_0, v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, où ℓ est un réel.

• Limites de q^n

$q \leq -1$	$ q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

• Théorème de convergence

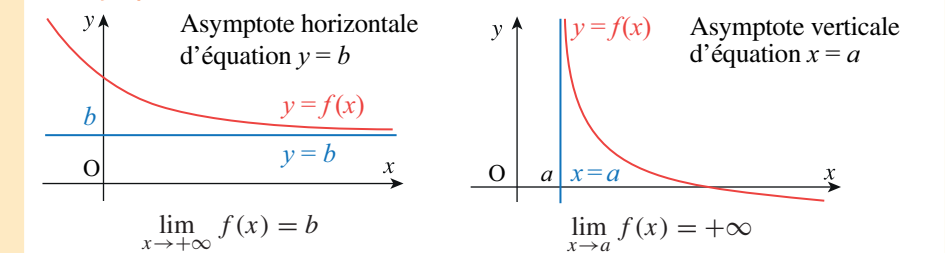
Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.
Toute suite monotone et bornée converge.

Limites de fonctions

• Formes indéterminées

« $\frac{\infty}{\infty}$ »	« $\infty - \infty$ »	« $0 \times \infty$ »	« $\frac{0}{0}$ »
-----------------------------	-----------------------	-----------------------	-------------------

• Asymptotes



Géométrie dans l'espace

● Combinaison linéaire de vecteurs

\vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non colinéaires.
 \vec{w} est une *combinaison linéaire* de \vec{u} et \vec{v} s'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

● Représentation paramétrique d'un plan

\mathcal{P} est un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ non colinéaires et non nuls.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \vec{AM} = k\vec{u} + t\vec{v} \iff \begin{cases} x = x_A + ka + ta' \\ y = y_A + kb + tb' \\ z = z_A + kc + tc' \end{cases}, k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

● Représentation paramétrique d'une droite

\mathcal{D} est une droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ non nul.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \vec{AM} = t\vec{u} \iff \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

● Produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{avec } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

● Vecteurs orthogonaux

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

● Distance entre deux points (norme d'un vecteur)

$A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points de l'espace.

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

● Vecteur normal à un plan

$$\vec{n} \text{ est normal au plan } \mathcal{P} \iff \text{pour tout vecteur } \vec{u} \text{ de } \mathcal{P}, \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

● Équation cartésienne d'un plan

\mathcal{P} est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

$$\text{Équation de } \mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$$

Primitives et intégration

● Primitives usuelles

f est une fonction, F sa primitive, $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$	a	x^n	$\frac{1}{x}$	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$F(x)$	ax	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x $	e^x	$-\cos x$	$\sin x$

● Primitives composées

u est une fonction, u' est sa dérivée, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Fonction	$\frac{u'}{u}, u \neq 0$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u^2}$	$u'u^n$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}, u > 0$
Primitive	$\ln u $	e^u	$-\frac{1}{u}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$2\sqrt{u}$

● Lien avec les primitives

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

● Valeur moyenne d'une fonction sur $[a; b]$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

● Intégration par parties

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

● Propriétés

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

Linéarité	$\int_a^b \lambda f(x) + g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
Conservation de l'ordre	sur $[a; b], f(x) \geq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$
Relation de Chasles	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Dérivées

● Dérivées usuelles

a est un réel et n un entier naturel non nul.

$f(x)$	a	x^n	\sqrt{x}	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$

● Opérations et dérivées

Opération	uv	$\frac{u}{v}$	\sqrt{u}	u^n	e^u	$\ln(u)$
Dérivée	$u'v + v'u$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$nu'u^{n-1}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

Continuité

● Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et si k est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe *au moins* une valeur de x dans $[a; b]$ telle que $f(x) = k$.

● Théorème de la bijection (corollaire du TVI)

Si f est une fonction continue *et strictement monotone* sur $[a; b]$ et si k est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe *une unique* valeur c dans $[a; b]$ telle que $f(c) = k$.

Équations différentielles

● Équations différentielles élémentaires

Équation différentielle	Solutions
$y' = ay$	$y(x) = Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$y' = ay + b$	$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, C \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$y' = ay + f$	$y(x) = Ce^{ax} + u(x), u$ solution particulière

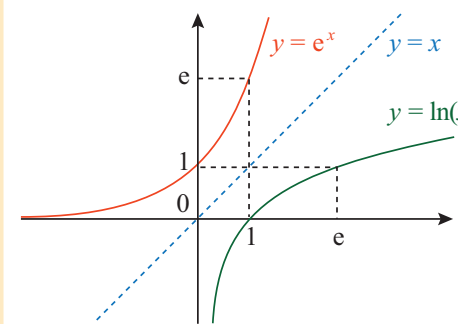
Logarithme népérien

● Propriétés et limites

La fonction \ln est définie sur $]0; +\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}$.

Propriétés algébriques	Limites
$\ln(1) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
$\ln(e) = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0$
$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
$\ln(x^p) = p \ln(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

● Comparaison avec l'exponentielle



La courbe représentative du logarithme népérien est *symétrique* à celle de l'exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Combinatoire et dénombrement

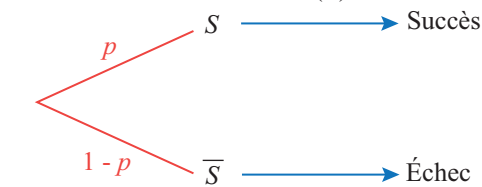
	Ordre	Modèle	Exemples
Permutation	Oui	Tirage sans remise	Anagramme *
p -liste	Oui	Tirage avec remise	Digicode
Arrangement A_n^p	Oui	Tirage sans remise	Podium d'une course
Combinaison $\binom{n}{p}$	Non	Tirage sans remise	Main dans un jeu de cartes

* Permutation des lettres d'un mot formant un mot de sens différent.

Probabilités

● Épreuve de Bernoulli

Expérience aléatoire à deux issues : « succès » (S) et « échec » (\bar{S}).



● Schéma de Bernoulli

Succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

X (nombre de succès à l'issue de cette succession) suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

● Somme de variables aléatoires indépendantes

$$E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$$

$$V(aX + Y) = a^2V(X) + V(Y)$$

● Concentration et loi des grands nombres

a et δ sont deux réels strictement positifs.

X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes d'espérance μ et d'écart-type σ .

Inégalité de Markov	$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}, X \geq 0$
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	$P(X - E(X) \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$
Inégalité de concentration	$P\left(\left \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right \geq \delta\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$
Loi faible des grands nombres	$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right \geq \delta\right) = 0$