INTERROS des LYCÉES
Collection dirigée par Éric MAURETTE

maths

1RE

Stéphane PASQUET

Nathan

Remerciements

L'auteur et l'équipe de Prepamath Édition tiennent à remercier Jean-Côme Charpentier, Cyriaque Cholet et Sébastien Mengin pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Patrick Doan
Coordination éditoriale : François Déliac
Conception couverture : Marc & Yvette

Avant-propos

Cet ouvrage est conforme au programme de Mathématiques en vigueur en classe de Terminale ES à la rentrée 2010.

La présente édition, revue et corrigée, bénéficie d'une nouvelle maquette permettant une lecture encore plus aisée et efficace.

Dans chaque chapitre, on trouvera :

- Un rappel de cours, qui s'appuie sur la résolution pratique d'un exercice type, et qui donne de manière concise tout ce que l'on doit retenir du chapitre étudié.
- Des QCM ou des exercices de type vrai-faux permettant de tester de manière rapide la connaissance du cours et sa réelle assimilation et de préparer au mieux les épreuves similaires figurant dans les sujets de baccalauréat et dans les concours post-bac.
- Des exercices qui correspondent aux différents types d'exercices que l'on pourra rencontrer en classe de Terminale ES, et qui ont tous été réellement posés en lycée.
  Certains sont des applications immédiates du cours, d'autres nécessitent une réflexion plus approfondie et constituent un bon entraînement pour les études supérieures.
- Enfin les solutions des QCM et des exercices. Certaines sont parfois beaucoup plus détaillées que ce qui est normalement demandé à un élève de Terminale ES pour un devoir en classe. Ceci est intentionnel, dans le but d'aider l'élève à garder les idées claires sur les notions fondamentales utilisées. Les corrigés comportent de nombreux points-méthode qui mettent clairement en évidence des démarchent qu'il convient de maîtriser.

Rappelons notre recommandation traditionnelle : cet ouvrage n'est pas un manuel de cours. L'auteur souhaite que la lecture de ce livre ne se substitue pas au travail de classe, mais qu'elle soit plutôt l'occasion d'un dialogue avec le professeur de mathématiques.

Table des matières

Méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous conseillons le livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et É. Maurette, aux Éditions Prepamath.

Faire des « feed-back »

Le « feed-back » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral. Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé. Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- Idem pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

Pour acquérir de la rapidité, 3 voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.

- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoirs surveillés. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.

Pendant une épreuve de type bac

- Il est important de lire au préalable le sujet dans son entier.
- Le nombre de points attribués à l'exercice donne des indications sur sa longueur, et par voie de conséquence sur le temps maximum qu'il faudra lui consacrer.
- Ne pas s'obstiner sur une question qui « résiste » ! Au contraire, passer à la question suivante pour essayer de traiter le maximum dans un exercice.
- Concernant les QCM, vous devez savoir que les réponses fausses sont assez fortement pénalisées. *Il est donc conseillé de ne répondre qu'à coup sûr, et en tout cas d'éviter absolument de répondre au hasard !*
- Organisez votre rédaction de façon logique (chaque exercice sur une copie séparée) et non pas chronologique. Cela permet de laisser de la place sur une copie pour éventuellement revenir à une question laissée en suspens dans un exercice. La correction de votre épreuve en sera d'autant plus facilitée…

Première partie

ENJEUX PLANÉTAIRES CONTEMPORAINS : ÉNERGIE, SOL

Chapitre 1

Forces évolutives et modification de la biodiversité des populations

Plan du chapitre

Thèmes : Calcul littéral, Fonction

1 Dérive génétique et modification aléatoire de la diversité d'une population

Définition 1

La fonction racine carré est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
La fonction valeur absolue est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

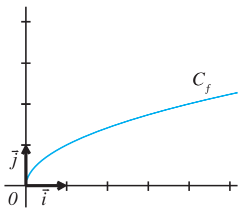
$$g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

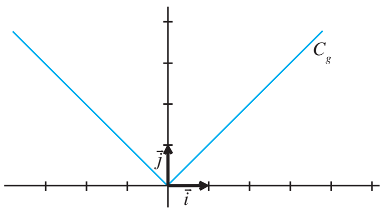
Voici les tableaux de variations de ces deux fonctions de référence.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Voici les représentations graphiques de ces deux fonctions de référence.





COURS

2 Opérations sur les fonctions

Exercice type

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-10$$

Voir corrigé page 5

2.1 Quelques définitions

Soient f et g deux fonctions respectivement définies sur D_f et D_g et λ un nombre réel, alors on définit :

$f+\lambda$	par	$(f+\lambda)(x)=f(x)+\lambda$	pour	$x\in D_f$
λf	par	$(\lambda f)(x)=\lambda\times f(x)$	pour	$x\in D_f$
$f+g$	par	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	pour	$x\in D_f\cap D_g$
fg	par	$(fg)(x)=f(x)\times g(x)$	pour	$x\in D_f\cap D_g$
$\dfrac{1}{f}$	par	$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)=\dfrac{1}{f(x)}$	pour	$x\in D_f$ et $f(x)\neq 0$
$\dfrac{f}{g}$	par	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	pour	$x\in D_f\cap D_g$ et $g(x)\neq 0$
$\sqrt{f}$	par	$\left(\sqrt{f}\right)(x)=\sqrt{f(x)}$	pour	$x\in D_f$ et $f(x)\geqslant 0$

2.2 Sens de variation et opérations

La fonction $f+\lambda$, où λ est un nombre réel, a même sens de variation que f.

La somme de deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes) sur un intervalle I est une fonction croissante (respectivement décroissante) sur I.

La fonction λf (où λ est un réel non nul) a même sens de variation que f si λ est strictement positif et un sens contraire si λ est strictement négatif.

La fonction $\frac{1}{f}$ a un sens de variation contraire à celui de f.

La fonction $\sqrt{f}$ a même sens de variation que f.

Remarque : Il n'y a pas de résultat général pour la différence, le produit et le quotient de deux fonctions.

Solution de l'exercice type

On voit que pour $x \in]0, +\infty[$,

$$f(x) = g(x) + \lambda \text{ avec } g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ et } \lambda = -10$$

Or $g = \frac{1}{u}$, avec $u(x) = x^2$ qui est une fonction croissante sur $]0; +\infty[$, et donc la fonction g est décroissante sur $]0; +\infty[$.
Finalement, la fonction $f = g + \lambda$ est aussi décroissante sur $]0; +\infty[$.

ATTENTION

Ceci est le texte d'un environnement problematique. Il s'agit juste d'un test pour voir si on peut écrire plusieurs lignes et des mathématiques hors-texte.

$$e = mc^2 \neq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x\,dx.$$

Qu'est-ce qu'il ne faut pas raconter comme bêtise quand même !

Voir énoncé page 4

ATTENTION

Ceci est le texte d'un environnement attention. Il s'agit juste d'un test pour voir si on peut écrire plusieurs lignes et des mathématiques hors-texte.

$$e = mc^2 \neq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x\,dx.$$

Qu'est-ce qu'il ne faut pas raconter comme bêtise quand même !

ANECDOTE : avec un sous-titre

Ceci est le texte d'un environnement anecdote. Il s'agit juste d'un test pour voir si on peut écrire plusieurs lignes.
Qu'est-ce qu'il ne faut pas raconter comme bêtise quand même !

À RETENIR

Ceci est le texte d'un environnement aretenir. Il s'agit juste d'un test pour voir si on peut écrire plusieurs lignes et des mathématiques hors -texte.

$$e = mc^2 \neq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x\,dx.$$

Qu'est-ce qu'il ne faut pas raconter comme bêtise quand même !

COURS

4*5	
	20

POUR ALLER PLUS LOIN

Ceci est le texte d'un environnement plusloin. Il s'agit juste d'un test pour voir si on peut écrire plusieurs lignes et des mathématiques hors-texte.

$$e = mc^2 \neq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x\,dx.$$

Qu'est-ce qu'il ne faut pas raconter comme bêtise quand même !

1 V/F Fonctions

5 min Corrigé p. 9

1 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$ est décroissante sur :

a $I = \mathbb{R}$ **b** $J = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

c $K = [-10; 0[$

2 La fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ est croissante sur :

a $I = [0; +\infty[$ **b** $J = [2; 4[$

c $K = [1; 4[$

3 La fonction $f : x \mapsto -5x^2$ est :

a décroissante sur $\mathbb{R}$ **b** constante sur $[-1; 1[$

c croissante sur $]-\infty; 0]$

2 QCM Opérations et variations de $f(x)$

10 min Corrigé p. 9

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier avec précision.

1 Si f est une fonction croissante sur un intervalle I, alors la fonction $g = f - \frac{5}{3}$ est croissante sur I.

a Vrai **b** Faux

2 Le produit de deux fonctions décroissantes sur I est une fonction décroissante sur I.

a Vrai **b** Faux

3 Si f est croissante sur un intervalle I, alors, pour tout réel k, la fonction kf est croissante sur I.

a Vrai **b** Faux

4 Si f est une fonction croissante sur un intervalle I, alors $g = \sqrt{f}$ est croissante sur I.

a Vrai **b** Faux

3 Produit de deux fonctions

★ 10 min Corrigé p. 10

On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x + |x| \quad \text{et} \quad g(x) = x - |x|.$$

Déterminer la fonction produit fg.

COURS INTERROS CORRIGÉS

INTERROS

4 Encadrement d'une fonction ★ 25 min

Corrigé p. 10

On considère la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x + 1}{1 + x^2}.$$

1 Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x, on ait

$$f(x) = ax + \frac{b}{1 + x^2}.$$

2 Prouver que, pour tout réel x positif,

$$2x < f(x) \leqslant 2x + 1.$$

5 Sens de variation d'une racine carrée ★★ 15 min

Corrigé p. 11

Lycée Odilon Redon, Pauillac

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x - 2}$.

1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2 **(a)** Montrer que, pour tous nombres réels x et y de D_f,

$$f(x) - f(y) = 3\frac{x - y}{\sqrt{3x - 2} + \sqrt{3y - 2}}$$

(b) En déduire le sens de variation de f.

3 Retrouver le résultat de la question 2.b en considérant f comme la racine carrée d'une fonction affine.

6 Fonctions composées ★★★ 15 min

Corrigé p. 12

Lycée Jean Moulin, Lyon

Soit :

$$h_1 : x \mapsto \sqrt{x - 1}$$
$$h_2 : x \mapsto x^2 + 1$$

1 Donner les ensembles de définition de h_1 et h_2.

2 Pour chacune des fonctions suivantes, donner son expression et son ensemble de définition :

$$h_2 \circ h_1, \quad h_1 \circ h_2, \quad h_1 \circ h_1, \quad h_2 \circ h_2.$$

1 V/F Fonctions

Énoncé p. 7

1 Réponse b : f est définie lorsque $2x+1 \neq 0$, soit $x \neq -\frac{1}{2}$. f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

De plus, pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, où u est la fonction affine $u : x \mapsto 2x+1$. u est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, et donc, f est décroissante sur chacun des intervalles de $\mathcal{D}_f$.

En particulier f est décroissante sur $J = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

2 Réponse b : Pour tout réel x, $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

La fonction f a le même sens de variation sur $\mathbb{R}$ que la fonction :

$$x \mapsto (x-2)^2 .$$

Elle est donc décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$, donc en particulier sur l'intervalle $[2; 4]$.

3 Réponse c : La fonction f a un sens de variation contraire de celui de la fonction carré. Elle est donc croissante sur $]-\infty; 0]$.

Remarque : Le fait que $f(1) = f(-1) = -5$ ne permet pas de conclure que f est constante sur $[-1; 1]$!

2 QCM Opérations et variations de $f(x)$

Énoncé p. 7

1 Vrai. Il s'agit d'une propriété du cours. $g = f + \lambda$, avec $\lambda = -\frac{5}{3}$ a le même sens de variation que f.

f et g sont donc toutes les deux croissantes sur I.

2 Faux. Les fonctions

$$f : x \mapsto -x+1$$
$$g : x \mapsto -x-1$$

sont toutes les deux décroissantes sur $[0; +\infty[$ car ce sont deux fonctions affines dont le coefficient directeur est strictement négatif.

Leur produit est la fonction $fg : x \mapsto x^2 - 1$. Cette fonction a même sens de variation que la fonction carré sur $[0; +\infty[$ donc elle y est croissante.

3 Faux. La fonction $f : x \mapsto x+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour $k = -2$, la fonction $-2f : x \mapsto -2x-2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 Faux. Si f est définie sur l'intervalle I, rien ne permet d'affirmer que $g = \sqrt{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction f peut prendre des valeurs négatives sur I.

Par exemple, soit la fonction

$$f : x \mapsto x-3$$

CORRIGÉS

définie sur $I = [0; 10]$. Alors la fonction $g = \sqrt{f}$ définie par

$$g : x \mapsto \sqrt{f(x)} = \sqrt{x-3}$$

n'est pas définie sur I, car pour $x \in [0; 3[$, $f(x) = x - 3 < 0$.

MÉTHODE

Pour montrer qu'une proposition est fausse, on fournit un contre-exemple.

3 Produit de deux fonctions

Énoncé p. 7

La fonction produit fg est définie pour tout réel x par $(fg)(x) = f(x)g(x)$, soit

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= \Big(x + |x|\Big)\Big(x - |x|\Big) \\ &= x^2 - (|x|)^2\end{aligned}$$

Si $x < 0$, $|x| = -x$, et on a donc, $(|x|)^2 = (-x)^2 = x^2$. Dans le cas contraire, si $x \geqslant 0$, on a $(|x|)^2 = (x)^2 = x^2$.
Dans tous les cas, $(|x|)^2 = x^2$, et on en déduit donc que pour tout réel x

$$(fg)(x) = 0$$

Remarque : Cet exemple montre que, au contraire du produit de nombres réels, on peut avoir $fg = 0$ sans que ni f ni g ne soit nulle.

4 Encadrement d'une fonction

Énoncé p. 8

1 Pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$, donc $f(x)$ et le terme de droite de l'égalité sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
En réduisant au même dénominateur, on a l'égalité

$$\frac{2x^3 + 2x + 1}{1 + x^2} = ax + \frac{b}{1 + x^2} = \frac{ax + ax^3 + b}{1 + x^2}.$$

Par identification terme à terme, on obtient

$$a = 2 \qquad \text{et} \qquad b = 1\,,$$

donc on a

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x + 1}{1 + x^2} = 2x + \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \text{pour tout réel } x\,.$$

2 Pour tout réel x positif, on a

$$\frac{1}{1 + x^2} > 0\,.$$

On a de plus $1 + x^2 \geqslant 1$, d'où

$$\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1},$$

soit

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

On a enfin, en additionnant $2x$ aux trois membres de la double inégalité

$$2x < \frac{1}{1+x^2} + 2x \leqslant 2x + 1\,,$$

soit, en réduisant au même dénominateur

$$2x < \frac{2x^3 + 2x + 1}{1+x^2} \leqslant 2x + 1\,.$$

c'est-à-dire l'encadrement de f souhaité :

$$2x < f(x) \leqslant 2x + 1$$

5 Sens de variation d'une racine carrée

Énoncé p. 8

Lycée Odilon Redon, Pauillac

1 La fonction f est définie pour des valeurs de x telle que

$$3x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{2}{3}\,.$$

Ainsi, $D_f = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

2 **(a)** Pour tous nombres réels x et y de D_f,

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \sqrt{3x-2} - \sqrt{3y-2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{3x-2} - \sqrt{3y-2}\right)\left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{3y-2}\right)}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{3y-2}} \\ &= \frac{(3x-2) - (3y-2)}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{3y-2}} \\ &= 3\frac{x-y}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{3y-2}} \end{aligned}$$

(b) Soit x et y deux nombres réels quelconques de D_f tels que

$$x < y \iff x - y < 0\,,$$

alors, comme $\sqrt{3x-2} + \sqrt{3y-2} > 0$, on en déduit d'après le calcul précédent que $f(x) - f(y) < 0$.

Ainsi, la fonction f est croissante sur D_f.

CORRIGÉS

3 On peut écrire la fonction f sous la forme $f = \sqrt{u}$, où u est la fonction affine $u : x \mapsto 3x - 2$.

Les fonctions f et u ont le même sens de variation, et donc, comme la fonction affine u est croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction f est croissante sur $\mathcal{D}_f$.

6 Fonctions composées

Énoncé p. 8

Lycée Jean Moulin, Lyon

1 On a :

$$h_1 : x \mapsto \sqrt{x-1} \quad \text{et} \quad h_2 : x \mapsto x^2 + 1$$

On a donc directement :

$$D_{h_1} = [1, +\infty[\quad \text{et} \quad D_{h_2} = \mathbb{R}$$

2 On a sans difficulté :

$$\begin{aligned}
D &= [1, +\infty[, & (h_2 \circ h_1)(x) &= \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1 \\
& & &= x \\
D &= \mathbb{R}, & (h_1 \circ h_2)(x) &= \sqrt{(x^2+1) - 1} \\
& & &= \sqrt{x^2} \\
& & &= |x| \\
D &= [2, +\infty[, & (h_1 \circ h_1)(x) &= \sqrt{\sqrt{x-1} - 1} \\
D &= \mathbb{R}, & (h_2 \circ h_2)(x) &= x^4 + 2x^2 + 2
\end{aligned}$$

PROBLÉMATIQUE

Ceci est le texte d'un environnement problematique. Il s'agit juste d'un test pour voir si on peut écrire plusieurs lignes et des mathématiques hors -texte.

$$e = mc^2 \neq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x dx.$$

Qu'est-ce qu'il ne faut pas raconter comme bêtise quand même !

Chapitre 2

Baccalauréat 2008, académie de Toulouse

1 Exercice 1 – 4 points

★ 30 min Corrigé p. 16

Pour tous les candidats

À chaque question trois affirmations sont proposées. Pour chacune d'entre elles, dire si elle est vraie ou fausse. Répondre sans donner aucune justification.

1 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - 3x + 5$.
Soit Γ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

(a) La courbe Γ admet comme asymptote l'axe des ordonnées.
(b) La courbe Γ admet comme asymptote l'axe des abscisses.
(c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2 Soit g une fonction strictement croissante sur $[5\,,7]$ dont le tableau de variation est :

x	5		7
$g(x)$	-3	$\nearrow$	1

(a) La fonction $\ln(g)$ n'est pas définie sur $[5; 7]$.
(b) La fonction $x \mapsto \ln(g(x) + 3)$ est strictement croissante sur $]5; 7]$.
(c) La fonction $x \mapsto (g(x))^2$ est strictement croissante sur $[5; 7]$.

3 L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln(0{,}3) - 1 \leqslant 0$ est :

(a) $\left]-\infty ; \dfrac{1}{\ln(0{,}3)}\right]$ (b) $\left]\dfrac{1}{\ln(0{,}3)} ; +\infty\right]$ (c) $\left]0 ; \dfrac{1}{\ln(0{,}3)}\right]$

4 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3}.$$

Une primitive H de h sur $\mathbb{R}$ est définie par :

(a) $H(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$.
(b) $H(x) = 2\ln(x^2 + 2x + 3)$.
(c) $H(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + 4$.

SUJET

2 Exercice 2 – 4 points

★★★ 45 min Corrigé p. 17

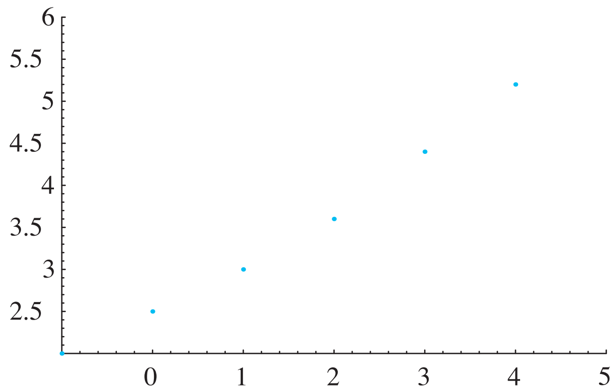
L'évolution de la population d'une région entre 1950 et 1990 a permis de construire le tableau suivant :

Année X_i	1950	1960	1970	1980	1990
Rang x_i	0	1	2	3	4
Population en millions y_i	2,5	3	3,6	4,4	5,2

Si X_i désigne le numéro d'une année, x_i représente le nombre de décennies écoulées de 1950 à X_i, c'est-à-dire

$$x_i = \frac{X_i - 1950}{10}.$$

Le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) est représenté ci-dessous.



Partie A

En première approximation, on peut envisager de représenter la population y comme une fonction affine du rang x.

1 Expliquer pourquoi les *accroissements absolus* devraient être constants tous les 10 ans.

2 Déterminer l'équation de la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).

3 Quelle prévision ferait-on avec cet ajustement pour la population de la région en l'an 2000 (donner un résultat arrondi au dixième de millions) ?

Partie B

En 2000, la population de la région a été en réalité de 6,2 millions. Les démographes intéressés par l'évolution de cette population ont alors modifié l'ajustement du nuage en tenant compte du fait que l'*accroissement relatif* de cette population est presque constant d'une décennie à l'autre.

1 Vérifier que pour les valeurs données cet accroissement est voisin de 20%.

2 Expliquer pourquoi la fonction $f : x \mapsto 2{,}5 \times 1{,}2^x$ peut être utilisée pour modéliser plus précisément l'évolution de la population étudiée.

3 En utilisant cette modélisation, quelle prévision peut-on faire pour la population en 2005 ? Quelle aurait été la prévision faite à l'aide du premier ajustement ? (Donner les résultats arrondis au dixième de millions).

CORRIGÉ

1 Exercice 1 – 4 points

Énoncé p. 13

Pour tous les candidats

Nous justifierons ici toutes les réponses bien que cela ne soit pas demandé dans le cadre de l'épreuve.

1 **(a)** Vrai car $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

(b) Faux car $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$.

(c) Vrai car :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \underbrace{\left(2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} - 3 + \underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to -3} = -\infty.$$

2 Soit g une fonction strictement croissante sur $[5\,,7]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	5		7
			1
$g(x)$		$\nearrow$	
	-3		

(a) Vrai car la fonction g peut prendre des valeurs strictement négatives sur $[5; 7]$. Par exemple, $g(5) = -3$ et $\ln(-3)$ n'est pas défini.

(b) Vrai car $x \mapsto g(x)+3$ est une fonction strictement positive et strictement croissante sur $]5; 7]$. Donc par composition avec la fonction logarithme qui est strictement croissante sur $]0\,, +\infty[$, $x \mapsto g(x)+3$ est strictement croissante sur $]5; 7]$.

(c) Faux car la fonction g est négative sur l'intervalle $[5; \alpha]$ où α est le zéro de g $(g(\alpha) = 0)$. Or la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, donc par composition $x \mapsto g(x)^2$ est décroissante sur $[5; \alpha]$.

3 Sachant que $\ln(0{,}3) < 0$ (car $0 < 0{,}3 < 1$) et que diviser les membres d'une inégalité par un nombre négatif change le sens de l'inégalité :

$$x\ln(0{,}3) - 1 \leqslant 0 \iff x\ln(0{,}3) \leqslant 1 \iff x \geqslant \frac{1}{\ln(0{,}3)}$$

L'affirmation (b) est vraie et les deux autres sont fausses.

4 On reconnaît que $h(x)$ est de la forme :

$$\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x^2 + 2x + 3 \quad \text{et} \quad u'(x) = 2x + 2.$$

Par ailleurs $u(x)$ est strictement positif pour tout $x > 0$ (déterminant négatif). On en déduit que $x \mapsto \ln(u(x))$ est une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$. Donc une primitive de h est :

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(u(x)) \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3).$$

Et toute primitive H de h est définie par :

$$H(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + c.$$

(a) Faux d'après ce qui précède. Également car :

$$H'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3} = 2h(x).$$

(b) Faux, car alors $H'(x) = 4h(x)$.

(c) Vrai d'après la forme des primitives de h avec $c = 4$.

2 Exercice 2 – 4 points

Énoncé p. 14

Partie A

1 En effectuant un ajustement affine du nuage on considère que $y = ax+b$. Soit deux décennies consécutives quelconques x_i et x_{i+1}, l'accroissement absolu de la population est $y_{i+1} - y_i$. Le calcul ci-dessous prouve qu'il est constant et égal à a :

$$x_{i+1} - x_i = 1 \text{ et } y_{i+1} - y_i = ax_{i+1} + b - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = a$$

2 Le point moyen G du nuage a pour coordonnées (2; 3,74).

Soit $y = ax + b$ l'équation réduite de la droite D d'ajustement par moindres carrés. D'après la calculatrice : $a \approx 0{,}68$.

Sachant que D passe par G on a : $b = 3{,}74 - 0{,}68 \times 2$ donc $b \approx 2{,}38$.

L'équation de la droite d'ajustement est donc : $y = 0{,}68x + 2{,}38$.

3 L'an 2000 se situe 5 décennies après 1950, donc correspond au rang $x = 5$. La prévision de la population en 2000 est obtenue par :

$$y = 0{,}68 \times 5 + 2{,}38 \approx 5{,}8 \text{ millions (arrondi au dixième)}$$

Partie B

1 Les accroissements relatifs de la population d'une décennie à l'autre se calculent par les rapports

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}.$$

Ils sont effectivement tous proches de 0,2, soit 20% :

Rang x_i	0	1	2	3	4
Population y_i	2,5	3	3,6	4,4	5,2
Accroissements relatifs	-	0,2	0,2	0,22	0,18

2 Supposer que les accroissements relatifs sont constants et égaux à 20 %, c'est supposer que la population augmente de 20 % tous les dix ans :

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}2y_i = 1{,}2y_i \text{ pour tout entier naturel } i$$

CORRIGÉ

Dans ce cas, la suite (y_i) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme $y_0 = 2{,}5$. On a alors $y_i = 2{,}5 \times 1{,}2^i$ pour tout entier i.

Autrement dit, la population y s'exprime en fonction de x par :

$$y = 2{,}5 \times 1{,}2^x.$$

Ce modèle est meilleur puisqu'il donne comme valeur de la population en 2000 sensiblement la même qu'en réalité :

$$y = 2{,}5 \times 1{,}2^x = 6{,}22.$$

3 L'an 2005 se situe 5 décennies et demi après 1950, soit $x = 5{,}5$. Le modèle exponentiel précédent donne comme prévision de population :

$$y = 2{,}5 \times 1{,}2^{5{,}5} \approx 6{,}8 \text{ millions (arrondi au dixième)}$$

Avec l'ajustement affine de la partie A, on obtiendrait une population bien moindre :

$$y' = 0{,}68 \times 5{,}5 + 2{,}38 \approx 6{,}1 \text{ millions (arrondi au dixième)}$$

À la calculatrice :

2 . 5 x 1 . 2 xⁿ 5 . 5 =

pour le premier résultat et

. 6 8 x 5 . 5 + 2 . 3 8 EXE

pour obtenir le deuxième.

```
.68×5.5+2.38
                6.12
```

ATTENTION

Ceci est le texte d'un environnement problematique. Il s'agit juste d'un test pour voir si on peut écrire plusieurs lignes et des mathématiques hors -texte.

$$e = mc^2 \neq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x \, dx.$$

Qu'est-ce qu'il ne faut pas raconter comme bêtise quand même !

Annexe

Formulaire

Plan de l'annexe

1 Dérivée

Fonction	Dérivée
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f-g)' = f' - g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

2 Primitives

Fonction	Primitives
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$

3 Coniques

COURS

- Ellipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$
- Hyperbole
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$
- Parabole
$$y^2 - 2px = 0$$

4 Trigonométrie

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$
- $\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

5 Complexes

- $z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$
- module : $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- argument : $\arg z = \theta = \arctan \dfrac{y}{x}$ (détermination à préciser)
- conjugué : $\bar{z} = x - \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
- addition : $z + z' = x + x' + \mathrm{i}(y + y')$
- multiplication : $zz' = xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + x'y) = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}}(\theta + \theta')$
- division : $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\bar{z}'}{|z'|^2} = \dfrac{xx' + yy' + \mathrm{i}(-xy' + x'y)}{x'^2 + y'^2} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta - \theta')}$

- $\arg(z - z') = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{mm'})$
- $|z' - z| = mm'$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

6 Dénombrement

Nombre de permutations d'un ensemble de n éléments : $n!$

Combinaison : nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Formule du binôme :

$$(a+b)^n = a^n + \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} a^{n-1} b + \ldots \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} a^{n-p} b^p + \cdots + b^n$$

Triangle de Pascal :

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

COURS

Algorithme de seuil

```
Entrée
    Saisir n
Traitement
    Affecter la valeur de P(X=0) pour X suivant la loi
      binomiale B(n ; p) à c
    tant que c < 0,025
        i=i+1
        c prend la valeur c + P(X = i)
    Fin de Tant que
Sortie
Entrée
    Saisir n
Traitement
    Affecter la valeur de P(X=0) pour X suivant la loi
      binomiale B(n ; p) à c
    tant que c < 0,025
        i=i+1
        c prend la valeur c + P(X = i)
    Fin de Tant que
```

Algorithme de seuil (suite)

```
Sortie
Entrée
    Saisir n
Traitement
    Affecter la valeur de P(X=0) pour X suivant la loi
      binomiale B(n ; p) à c
    tant que c < 0,025
        i=i+1
        c prend la valeur c + P(X = i)
    Fin de Tant que
Sortie
Entrée
    Saisir n
Traitement
    Affecter la valeur de P(X=0) pour X suivant la loi
      binomiale B(n ; p) à c
    tant que c < 0,025
        i=i+1
        c prend la valeur c + P(X = i)
    Fin de Tant que
Sortie
```

$\binom{p}{n} = \binom{p-1}{n-1} + \binom{p}{n-1}$

1 Environnement algorithme (sans titre) dans un enumerate

2

COURS

```
Entrée
    Saisir n
Traitement
    Affecter la valeur de P(X=0) pour X suivant la loi
      binomiale B(n ; p) à c
    tant que c < 0,025
        i=i+1
        c prend la valeur c + P(X = i)
    Fin de Tant que
Sortie
Entrée
    Saisir n
Traitement
    Affecter la valeur de P(X=0) pour X suivant la loi
      binomiale B(n ; p) à c
    tant que c < 0,025
        i=i+1
        c prend la valeur c + P(X = i)
    Fin de Tant que
Sortie
```

```
Entrée
    Saisir n
Traitement
    Affecter la valeur de P(X=0) pour X suivant la loi
      binomiale B(n ; p) à c
    tant que c < 0,025
        i=i+1
        c prend la valeur c + P(X = i)
    Fin de Tant que
Sortie
Entrée
    Saisir n
Traitement
    Affecter la valeur de P(X=0) pour X suivant la loi
      binomiale B(n ; p) à c
    tant que c < 0,025
        i=i+1
        c prend la valeur c + P(X = i)
    Fin de Tant que
Sortie
```

Fichier binom.py

Voici le code Python correspondant :

```python
def binom(n,p):
    return n*p
```

1 QCM Dérivées

5 min

Corrigé p. ??

1 La dérivée de la fonction $f : x \mapsto -4x + 5$ est :

a $f'(x) = -4x^2 + 5x$ b $f'(x) = -4x$ c $f'(x) = -4$

2 La dérivée de la fonction $f(x) = x^5$ est :

a $f'(x) = x^4$ b $f'(x) = 5x^4$ c $f'(x) = 5x^5$ d $f'(x) = x^5$

2 QCM Primitives

10 min

Corrigé p. ??

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier avec précision.

1 Les primitives de $f(x) = x^2$ sont $F(x) = x^3 + C$:

a Vrai b Faux

2 $F(x) = x^2 + x + \pi$ est une primitive de $f(x) = 2x + 1$:

a Vrai b Faux

3 Dérivée d'un produit

★★ 15 min

Corrigé p. ??

Lycée Gauss, Berlin

1 On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^2 + 3x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x.$$

Déterminer la dérivée du produit fg.

2 On considère 3 fonctions quelconques u, v et w. Donner la formule générale de la dérivée de uvw.

4 Coniques

★ 10 min

Corrigé p. ??

Externat Euler, Bâle

On considère la courbe d'équation $4x^2 + y^2 = 4$.

1 Quel est le type de cette courbe ?

2 Tracer cette courbe dans un repère orthonormal dont on choisira les unités.

5 Triangle de Pascal

★★★ 10 min

Corrigé p. ??

Établissement Abel, Oslo

- Démontrer la formule du cours $\binom{p}{n} = \binom{p-1}{n-1} + \binom{p}{n-1}$.
- Montrer que $\sum_{p=0}^{n} \binom{p}{n} = 2^n$.

- Montrer que $\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p}\binom{p}{n}=0$.

CORRIGÉS

1 QCM Dérivées

Énoncé p. ??

1 $\boxed{c}$. On se sert de la formule $(ax+b)' = a$ où $a = -4$ et $b = 5$.

2 $\boxed{b}$. On se sert de la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ avec $n = 5$.

Remarque : La dérivée d'une fonction polynôme de degré n est une fonction polynôme de degré $n-1$.

2 QCM Primitives

Énoncé p. ??

1 Faux. Les primitives de $f(x) = x^2$ sont $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.

2 Vrai.

MÉTHODE

Si F est un primitive de f alors $F' = f$.

3 Dérivée d'un produit

Énoncé p. ??

Lycée Gauss, Berlin

1 On a $(fg)' = f'g + fg'$. On calcule séparément les dérivées de f et g :

- $f'(x) = 2x + 3$.
- $g'(x) = \cos x$

On a donc : $(fg)'(x) = (2x+3)\cos x + (x^2 + 3x - 2)\sin x$

Remarque : Il faut bien faire attention à ce que la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

2 On peut considérer le produit uvw comme le produit de la fonction uv avec la fonction w. On a alors :

$$(uvw)' = (uv)'w + (uv)w'.$$

Comme $(uv)' = u'v + uv'$, on aboutit alors à :

$$(uvw)' = (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Remarque : On pourrait démontrer de la même façon que

$$(u_1u_2u_3u_4)' = u_1'u_2u_3u_4 + u_1u_2'u_3u_4 + u_1u_2u_3'u_4 + u_1u_2u_3u_4'.$$

4 Coniques

Énoncé p. ??

Externat Euler, Bâle

1 De $4x^2+y^2=4$, on tire successivement $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ puis $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}-1=0$.

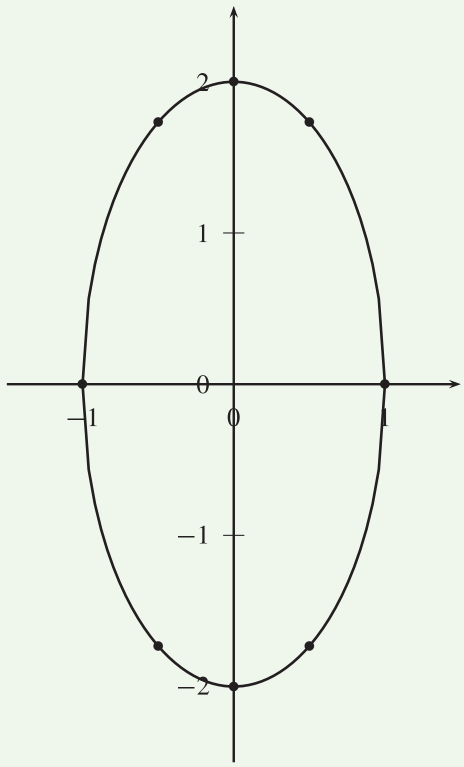
On a donc une ellipse avec $a=1$ et $b=2$, c'est-à-dire une ellipse de centre O, de demi-axe horizontal égal à 1 et de demi-axe vertical égal à 2.

2 Pour tracer cette ellipse, on commence par tracer les demi-axes. On pourra placer des points particuliers en remarquant que :

$$\begin{aligned} 4x^2+y^2=4 &\iff y^2=4-4x^2 \\ &\iff y=\pm\sqrt{4-4x^2} \end{aligned}$$

x	0	± 1	$\pm\dfrac{1}{2}$
y	± 2	0	$\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}732$

On a alors le résultat :



5 Triangle de Pascal

Énoncé p. ??

Établissement Abel, Oslo

CORRIGÉS

- On a :

$$\begin{aligned}\binom{p-1}{n-1}+\binom{p}{n-1} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!}+\frac{(n-1)!}{p!\big((n-1)-p\big)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}\\ &= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)(n-p-1)!}\\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{p(n-1)!+(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{(p+n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{p}{n}\end{aligned}$$

- Il suffit d'appliquer la formule du binôme pour $a = b = 1$.
- Il suffit d'appliquer la formule du binôme pour $a = 1$ et $b = -1$.

Annexe

Tableau périodique des éléments

1	numéro atomique
H	symbole
1,008	masse molaire

Légende : métaux alcalins · métaux alcalino-terreux · métaux de transition · halogènes · gaz inertes

1 H 1,008																	2 He 4,003
3 Li 6,941	4 Be 9,012											5 B 10,81	6 C 12,01	7 N 14,01	8 O 16,00	9 F 19,00	10 Ne 20,18
11 Na 23,00	12 Mg 24,30											13 Al 26,98	14 Si 28,08	15 P 30,97	16 S 32,07	17 Cl 35,45	18 Ar 39,95
19 K 39,10	20 Ca 40,08	21 Sc 44,95	22 Ti 47,87	23 V 50,94	24 Cr 52,00	25 Mn 54,94	26 Fe 55,85	27 Co 58,93	28 Ni 58,69	29 Cu 63,55	30 Zn 65,39	31 Ga 69,72	32 Ge 72,61	33 As 74,92	34 Se 78,96	35 Br 79,90	36 Kr 83,80
37 Rb 85,47	38 Sr 87,62	39 Y 88,90	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,94	43 Tc (98)	44 Ru 101,1	45 Rh 102,9	46 Pd 106,4	47 Ag 107,9	48 Cd 112,4	49 In 114,8	50 Sn 118,7	51 Sb 121,8	52 Te 127,6	53 I 126,9	54 Xe 131,3
55 Cs 132,9	56 Ba 137,3	57 La 138,9	72 Hf 178,5	73 Ta 180,9	74 W 183,8	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,1	79 Au 197	80 Hg 200,6	81 Tl 204,4	82 Pb 207,2	83 Bi 209	84 Bo (209)	85 At (210)	86 Rn (222)
87 Fr (223)	88 Ra (226)	89 Ac (227)	104 Unq (261)	105 Unp (262)	106 Unh (263)	107 Uns (262)	108 Uno (265)	109 Une (266)	110 Unn (269)								

Lanthanides	58 Ce 140,1	59 Pr 140,9	60 Nd 144,2	61 Pm 150,4	62 Sm 150,4	63 Eu 152	64 Gd 157,2	65 Tb 158,9	66 Dy 162,5	67 Ho 164,9	68 Er 167,3	69 Tm 168,9	70 Yb 173	71 Lu 175
Actinides	90 Th 232	91 Pa 231	92 U 238	93 Np (237)	94 Pu (244)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (247)	98 Cf (251)	99 Es (252)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (259)	103 Lr (262)