

SOMMAIRE

Les différentes moyennes

Plan du chapitre

I	Moyenne arithmétique	2
II	Moyenne pondérée	2
III	Moyenne géométrique	3
IV	Moyenne harmonique	4
V	Moyenne quadratique	4
VI	À quoi servent ces moyennes?	5
	Enoncés	6
	Corrigés des exercices	8

I - Moyenne arithmétique

Définition 1

La moyenne arithmétique de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ est la valeur $\bar{a}$ telle que, si l'on ajoute n fois $\bar{a}$, on obtient la somme des n valeurs :

$$n \times \bar{a} = \sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Propriété 1

La moyenne arithmétique de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ est :

$$\bar{a} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Exemple 1

Pendant l'année 2022, Louis a eu de l'argent de poche :

Initiales (mois)	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Montants (en €)	15	20	7	13	25	10	30	50	15	20	15	50

L'argent de poche mensuel moyen est :

$$\bar{a} = \frac{15 + 20 + 7 + 13 + 25 + 10 + 30 + 50 + 15 + 20 + 15 + 50}{12} = 22,5.$$

Cela signifie que s'il avait eu 22,50 € tous les mois, il aurait eu la même somme d'argent à la fin de l'année.

Propriété 2

La moyenne arithmétique de n valeurs est l'isobarycentre du système formé par ces n valeurs.

II - Moyenne pondérée

Définition 2

La moyenne pondérée de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, affectées des coefficients $k_1, k_2, \dots, k_n$, est le barycentre du système pondéré formé par ces valeurs.

Propriété 3

La moyenne pondérée de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, affectées des coefficients $k_1, k_2, \dots, k_n$, est la valeur $\bar{x}$ telle que :

$$\bar{x} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}.$$

Remarque 1

La moyenne pondérée est une généralisation de la moyenne arithmétique.

En effet, si la valeur x_1 est comptée k_1 fois, c'est comme si on l'ajoutait k_1 fois; plutôt que d'écrire « $\underbrace{x_1 + x_1 + \dots + x_1}_{k_1 \text{ fois}}$ », on écrit « $k_1 x_1$ ».

Exemple 2

Lucie a eu trois notes au premier trimestre de son années scolaire :

- 18/20, coefficient 3;
- 15/20, coefficient 1;
- 16/20, coefficient 2.

Sa moyenne trimestrielle est donc :

$$\bar{x} = \frac{3 \times 18 + 1 \times 15 + 2 \times 16}{3 + 1 + 2} \approx 16,8.$$

III - Moyenne géométrique

Définition 3

La moyenne géométrique de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ est le nombre $\bar{g}$ tel que :

$$(\bar{g})^n = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n.$$

On a aussi :

$$\bar{g} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n}.$$

Exemple 3

La moyenne géométrique des nombres 5, 6 et 7 est :

$$\bar{g} = \sqrt[3]{5 \times 6 \times 7} \approx 5,94.$$

IV - Moyenne harmonique

Définition 4

La moyenne harmonique de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ est le nombre $\bar{h}$ tel que :

$$\frac{n}{\bar{h}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}.$$

Remarque 2

Si on note $\bar{H} = \frac{1}{\bar{h}}$ et $X_i = \frac{1}{x_i}$, pour $1 \leq i \leq n$, alors :

$$n\bar{H} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

On voit alors que $\bar{H}$ est la moyenne arithmétique des X_i .

Exemple 4

La moyenne harmonique des nombres 6, 7 et 8 est telle que :

$$\frac{3}{\bar{h}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{73}{168}$$

donc :

$$\bar{h} = 3 \times \frac{168}{73} = \frac{504}{73} \approx 6,904.$$

V - Moyenne quadratique

Définition 5

Le carré de la moyenne quadratique $\bar{q}$ de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ est la moyenne arithmétique des x_i^2 .

$$\bar{q}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}.$$

Propriété 4

La moyenne quadratique $\bar{q}$ de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ est :

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Exemple 5

La moyenne quadratique des nombres 6, 7 et 8 est :

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{6^2 + 7^2 + 8^2}{3}} \approx 7,724.$$

VI - À quoi servent ces moyennes ?

- Les moyennes arithmétique et pondérée servent à connaître la moyenne de nombres comme les notes d'un contrôle, des montants, des mesures de longueurs, d'aires ou de volumes.
- La moyenne géométrique peut servir à trouver le coefficient multiplicateur moyen sur plusieurs évolutions successives.
- La moyenne harmonique peut servir à trouver une moyenne de vitesses (à ne pas confondre avec une *vitesse moyenne* sur un parcours) ou plus généralement, une moyenne de grandeurs-quotients (comme les vitesses ou les débits).
- La moyenne quadratique peut servir à trouver l'écart-type d'une plage de données (en statistique).

Moyenne harmonique

Exercice 1.1

Un robinet a un débit qui a différé au cours des quatre derniers jours :

- le premier jour, le débit était de 15 litres/min ;
- le deuxième jour, il était de 18 litres/min ;
- le troisième jour, il était de 20 litres/min ;
- le quatrième jour, il était de 16 litres/min.

On appelle t_i le temps nécessaire à ce robinet pour remplir un même récipient le jour i , pour $1 \leq i \leq 4$. On note :

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4.$$

Le débit moyen du robinet sur ces quatre jours est le nombre D tel que, si le robinet avait eu un même débit D durant ces quatre jours, le temps total de remplissage du récipient aurait été égal à D .

- 1 Calculer le temps nécessaire à ce robinet pour remplir un récipient de 100 litres au cours de ces quatre jours.
- 2 En déduire le temps total T .
- 3 Calculer la moyenne harmonique $\bar{h}$ des quatre débits.
- 4 Si le robinet avait eu un débit égal à $\bar{h}$ litre/minute durant ces quatre jours, quel aurait été le temps total de remplissage du récipient de 100 litres?
Quelle conclusion peut-on alors faire?

Solution page 12

Exercice 1.2

Pierre décide de s'entraîner à vélo. Il effectue tous les jours le même trajet de 50 kilomètres.

- Le premier jour, sa vitesse est de 20 km/h ;
- le deuxième jour, sa vitesse est de 25 km/h ;
- le troisième jour, sa vitesse est de 27 km/h ;
- le quatrième jour, sa vitesse est de 28 km/h ;
- le cinquième jour, sa vitesse est de 30 km/h.

Quelle a été sa vitesse moyenne sur ces cinq jours ?

Solution page 12

Exercice 1.3

Une entreprise décide d'augmenter ces tarifs :

- de 3 % la première année,
- de 4 % la deuxième année,
- de 5 % la troisième année,
- de 7 % la quatrième année.

Quel est le pourcentage moyen d'augmentation au cours de ces quatre années?

Solution page 12

Exercice 1.4

En 1990, la France comptait 58,24 millions d'habitants.

En 2000, la France comptait 60,91 millions d'habitants.

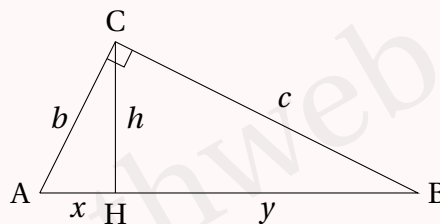
En 2020, elle en comptait 67,39 millions (source : INSEE).

Quel a été le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la population française entre 1990 et 2000? 2000 et 2020?

Solution page 12

Moyenne géométrique

Exercice 1.5 (hauteur dans un triangle rectangle)



Montrer que h est la moyenne géométrique de x et y .

Solution page 13

Corrigé de l'exercice 1.1 page 9

- 1 • Le premier jour, le débit était de 15 litres/min, donc le temps nécessaire pour remplir un récipient de 100 litres était :

$$\frac{100}{15} = \frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6 \text{ min } 40\text{s.}$$

- Le deuxième jour, le temps était :

$$\frac{100}{18} = \frac{50}{9} \text{ min.}$$

- Le troisième jour, le temps était :

$$\frac{100}{20} = 5 \text{ min.}$$

- Le quatrième jour, le temps était :

$$\frac{100}{16} = \frac{25}{4}.$$

- 2 Le temps total est donc :

$$T = 100 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{16} \right) = \frac{845}{36} \text{ min.}$$

- 3 La moyenne harmonique des débits est telle que :

$$\frac{4}{\bar{h}} = \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{16}$$

soit :

$$\frac{4}{\bar{h}} = \frac{169}{720}.$$

Donc :

$$\bar{h} = 4 \times \frac{720}{169} = \frac{2880}{169} \text{ litres/min.}$$

- 4 Si le robinet avait eu un débit constant de $\frac{2880}{169}$ litres/min. tous les jours, le temps total de remplissage aurait été :

$$T' = 4 \text{ jours} \times \frac{100}{\frac{2880}{169}} = \frac{845}{6} = T.$$

On peut alors conclure que le débit moyen est bien la moyenne harmonique des débits.

Corrigé de l'exercice 1.2 page 9

Attention 2



On est peut-être tenté d'utiliser la moyenne arithmétique mais il ne faut pas car les vitesses sont des grandeurs-quotients. On va donc utiliser la moyenne harmonique.

La vitesse moyenne $\bar{v}$ sur ces cinq jours est telle que :

$$\frac{5}{\bar{v}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \frac{1}{30}$$

soit :

$$\frac{5}{\bar{v}} = \frac{1853}{9450}$$

Donc :

$$\bar{v} = 5 \times \frac{9450}{1853} = \frac{47250}{1853} \approx 25,5 \text{ km/h.}$$

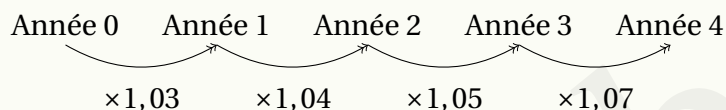
Remarque 5

La vitesse moyenne est la vitesse telle que, si Louis avait adopté cette vitesse tous les jours, le temps cumulé de ses entraînements aurait été le même que celui réellement obtenu.

On peut donc calculer le temps de chaque entraînement, puis ajouter tous les résultats et vérifier que l'on obtient le même temps que si la vitesse avait été constamment égale à 25,5 km/h.

Corrigé de l'exercice 1.3 page 9

Faisons un graphique :



Le coefficient multiplicateur global sur les quatre années est donc :

$$\text{CMG} = 1,03 \times 1,04 \times 1,05 \times 1,07 = 1,2034932.$$

Le coefficient multiplicateur moyen est la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs, soit :

$$\sqrt[4]{1,2034932} \approx 1,04739599805 \approx 1 + \frac{4,74}{100}.$$

Le pourcentage annuel moyen d'augmentation est donc environ 4,74 %.

Remarque 6

On peut aussi résoudre l'équation suivante pour trouver ce pourcentage :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^4 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)\left(1 + \frac{4}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right)\left(1 + \frac{7}{100}\right).$$

Corrigé de l'exercice 1.4 page 9

- Le coefficient multiplicateur entre 58,24 et 60,91 est $\frac{60,91}{58,24} \approx 1,04584478022$.
Il y a eu 10 années entre 1990 et 2000.

$$\sqrt[10]{1,04584478022} \approx 1,00449255751 \approx 1 + \frac{0,46}{100}.$$

Ainsi, le taux annuel moyen d'accroissement de la population française entre 1990 et 2000 a été d'environ 0,46 %.

- Le coefficient multiplicateur entre 60,91 et 67,39 est $\frac{67,39}{60,91} \approx 1,10638647184$.
Il y a eu 20 années entre 2000 et 2020.

$$\sqrt[20]{1,10638647184} \approx 1,00506776159 \approx 1 + \frac{0,5}{100}.$$

Ainsi, le taux annuel moyen d'accroissement de la population française entre 2000 et 2020 a été d'environ 0,5 %.

Corrigé de l'exercice 1.5 page 10

Dans le triangle ACH rectangle en H :

$$b^2 = h^2 + x^2.$$

Dans le triangle BCH rectangle en H :

$$c^2 = h^2 + y^2.$$

Dans le triangle ABC rectangle en C :

$$\begin{aligned}(x + y)^2 = b^2 + c^2 &\iff x^2 + y^2 + 2xy = h^2 + x^2 + h^2 + y^2 \\ &\iff xy = h^2 \\ &\iff h = \sqrt{xy}.\end{aligned}$$

h est donc bien la moyenne géométrique de x et y .