

Exercice 1

Sur les fonctions polynômes du second degré

A l'aide de l'allure de la parabole représentant la fonction carrée, résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 < 4$.

$S =]-2; 2[$

2. $x^2 \geq 9$.

$S =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$

3. $x^2 > 5$.

$S =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$

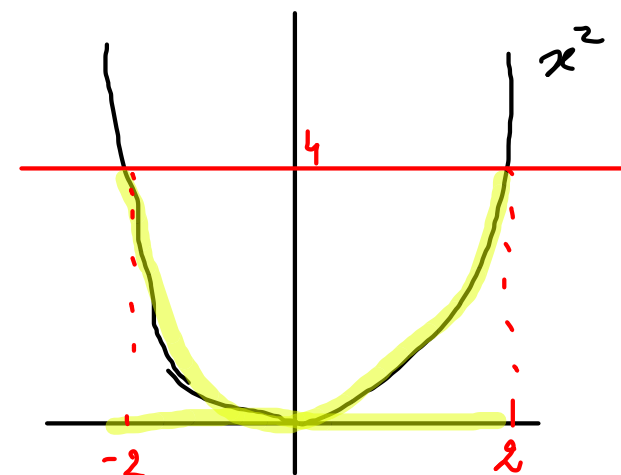
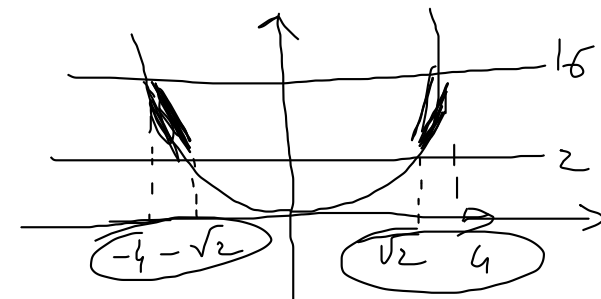
4. $2 < x^2 \leq 16$.

1) $x^2 < 4 \Leftrightarrow S =]-2; 2[$

2) $x^2 \geq 9 \Leftrightarrow S =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$

3) $x^2 > 5 \Leftrightarrow S =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$

4) $2 < x^2 \leq 16 \Leftrightarrow S =]-\sqrt{2}; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; \sqrt{2}]$



Exercice 2

A l'aide de tableaux de signes, résoudre les inéquations suivante :

1. $x^2 < 7$.

2. $x^2 \geq 8$.

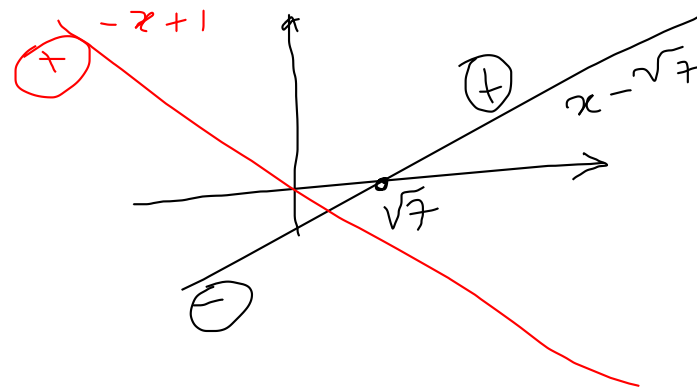
3. $4 < x^2 \leq 25$.

1) $x^2 - 7 < 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{7})^2 < 0$
 $\Leftrightarrow (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) < 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$x - \sqrt{7}$	-	-	0	+
$x + \sqrt{7}$	-	0	+	+
$x^2 - 7$	+	0	-	+

Donc $S =]-\sqrt{7}; \sqrt{7}[$

$x - \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$
 $\bullet \left(x - \sqrt{7} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{7} \right)$



Exercice 2

A l'aide de tableaux de signes, résoudre les inéquations suivante :

1. $x^2 < 7$.

2. $x^2 \geq 8$.

3. $4 < x^2 \leq 25$.

2) $x^2 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{8})^2 \geq 0$
 $(\Rightarrow (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) \geq 0$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{8}$	$\sqrt{8}$	$+\infty$
$x - \sqrt{8}$	-	-	0	+
$x + \sqrt{8}$	-	0	+	+
$x^2 - 8$	+	0	-	+

Donc $S =]-\infty; -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}; +\infty[$ ou

$S =]-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty[$

Exercice 2

A l'aide de tableaux de signes, résoudre les inéquations suivante :

1. $x^2 < 7$.

2. $x^2 \geq 8$.

3. $4 < x^2 \leq 25$.

3) $4 < x^2 \leq 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x^2 \\ x^2 \leq 25 \end{cases}$

• $x^2 > 4 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0$

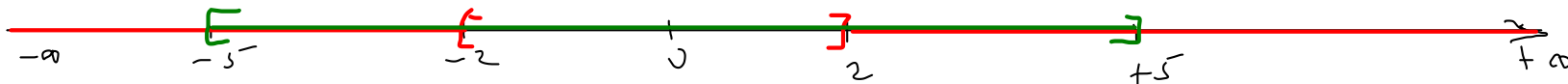
x	$-\infty$	-2	$+2$	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
x^2-4	+	0	-	+

$x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

• $x^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) \leq 0$

x	$-\infty$	-5	5	$+\infty$
$x-5$	-	-	0	+
$x+5$	-	0	+	+
x^2-25	+	0	-	+

$x \in [-5; 5]$



$S = [-5; -2[\cup]2; 5]$

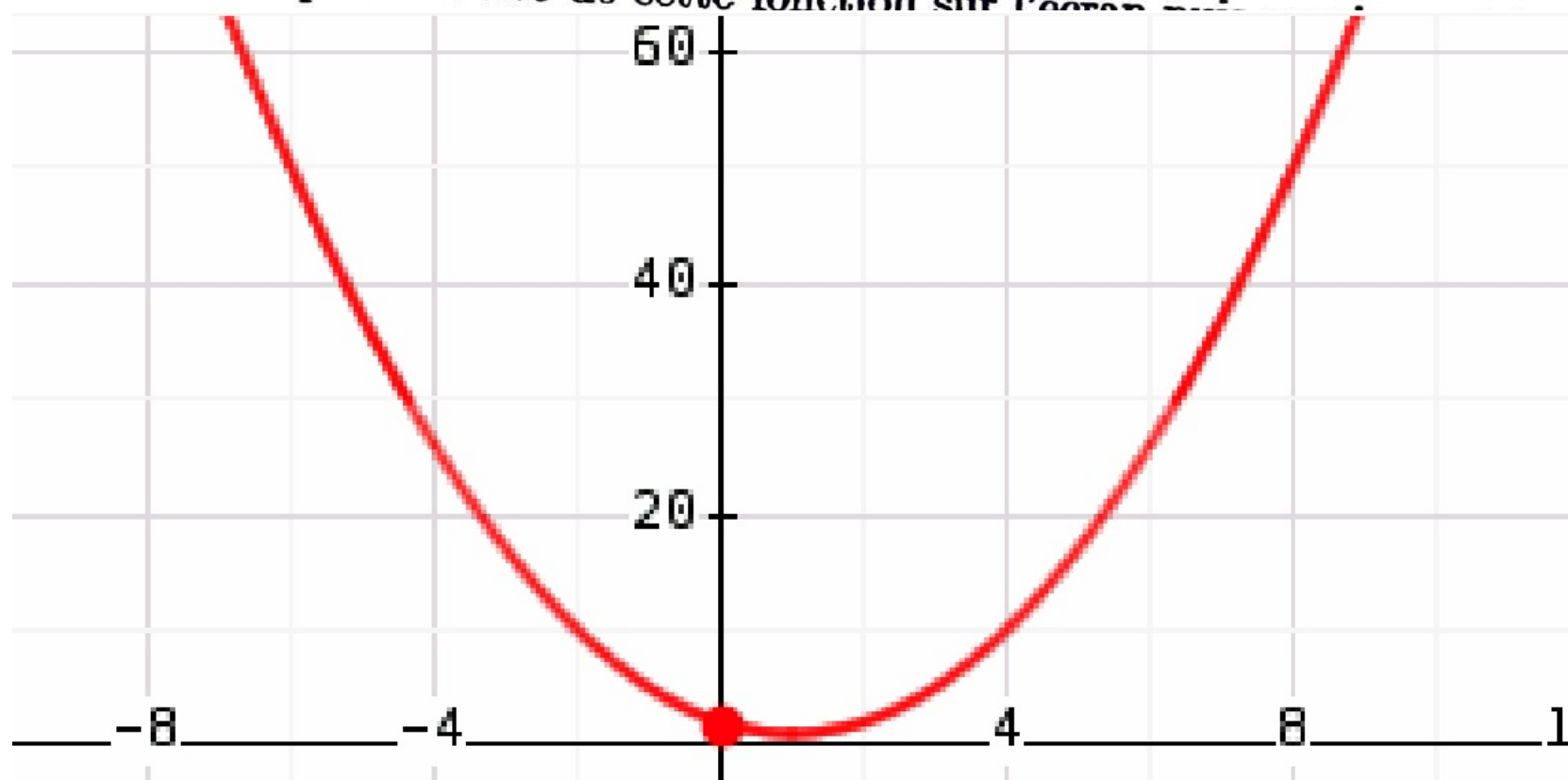
Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1	2	3	4
$f(x)$	24,25 21,25	17	13,25	10	7,25	5	3,25	2	1,25	2	5	10

2. Visualiser la courbe représentative de cette fonction sur l'écran.



3. Il semble que la courbe soit « entièrement » située au dessus de l'axe des abscisses.
Comment cela se traduit-il pour $f(x)$?

4. En remarquant que $2=1+1$, démontrer alors par le calcul la conjecture émise à la question précédente.

1

3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0.$ $\rightarrow$ " $\forall$ " : "pour tout", "quel que soit", "for all".

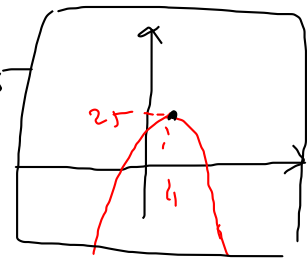
$$\begin{aligned} 4) \quad f(x) &= x^2 - 2x + 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &\quad a^2 - 2ab + b^2 \\ f(x) &= (x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \geq 0$ donc $(x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0.$

~~Donc~~, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0.$

Exercice 4

f est la fonction définie par $f(x) = -(x-4)^2 + 25$ = $a(x-\alpha)^2 + \beta$, $a = -1$, $\alpha = 4$, $\beta = 25$



1. Montrer que :

(a) $f(x) = -x^2 + 8x + 9$

(b) $f(x) = (9-x)(1+x)$

2. Choisir la forme le plus adéquate pour répondre aux questions suivantes :

(a) Résoudre $f(x) = 0$.

(b) Résoudre $f(x) = 9$.

(c) Montrer que f admet un maximum ^{x} en 4 valant 25.

(d) Etudier les variations de f sur $] -\infty; 4]$ puis sur $[4; +\infty[$.

A faire la prochaine fois.

1] (a) $f(x) = -(x-4)^2 + 25$
 $= -(x^2 - 8x + 16) + 25$
 $= -x^2 + 8x + 9$

(b) $f(x) = 25 - (x-4)^2$
 $= 5^2 - (x-4)^2$
 $= [5 - (x-4)][5 + (x-4)]$
 $= (9-x)(1+x)$

2] (a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (9-x)(1+x) = 0$
 $\Leftrightarrow \underline{x = 9} \text{ ou } \underline{x = -1}$

(b) $f(x) = 9 \Leftrightarrow -x^2 + 8x + 9 = 9$
 $\Leftrightarrow x(-x+8) = 0$
 $\Leftrightarrow \underline{x = 0} \text{ ou } \underline{x = 8}$

$$(c) \quad f(x) = -(x-4)^2 + 25$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{-(x-4)^2}_{+25} \leq 0 \quad \text{donc} \quad \underbrace{-(x-4)^2}_{+25} + 25 \leq 25$$

soit

$$f(x) \leq 25$$

$$\begin{aligned} f(x) = 25 & \quad (\Rightarrow) \quad -(x-4)^2 + 25 = 25 \\ & \quad (\Rightarrow) \quad -(x-4)^2 = 0 \\ & \quad (\Rightarrow) \quad x-4 = 0 \\ & \quad (\Rightarrow) \quad \underline{x = 4} \end{aligned}$$

Donc $f(x)$ atteint son maximum 25 pour $x = 4$.