Exercice 4

f est la fonction définie par $f(x) = -(x-4)^2 + 25$

$x \xrightarrow{-4} x-4 \xrightarrow{2} (x-4)^2 \xrightarrow{\times(-1)} -(x-4)^2 \xrightarrow{+25} -(x-4)^2+25$

1. Montrer que :
   (a) $f(x) = -x^2 + 8x + 9$
   (b) $f(x) = (9-x)(1+x)$
2. Choisir la forme le plus adéquate pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) = 9$.
   (c) Montrer que f admet un maximum en 4 valant 25.
   (d) Etudier les variations de f sur $]-\infty; 4]$ puis sur $[4; +\infty[$. → À faire la prochaine fois.

(d) Soient $\boxed{a < b < 4}$

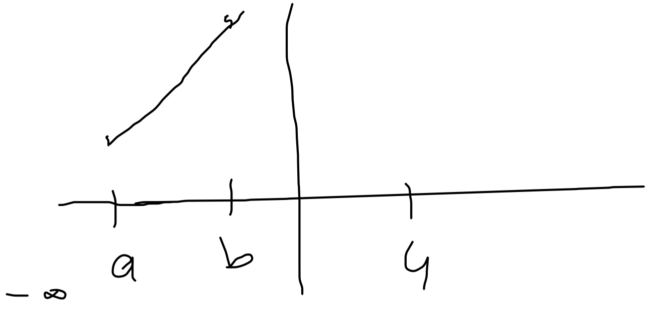
$\Rightarrow \quad a-4 < b-4 < 0$

$\Rightarrow \quad (a-4)^2 > (b-4)^2 > 0$ $\quad \times(-1)$

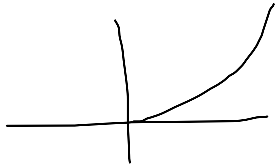
$\Rightarrow \quad -(a-4)^2 < -(b-4)^2 < 0$ $\quad +25$

$\Rightarrow \quad \underbrace{-(a-4)^2+25} < -(b-4)^2+25 < 25$

$\Rightarrow \quad f(a) < f(b)$



Soient $4 < a < b \Longrightarrow 0 < a-4 < b-4$

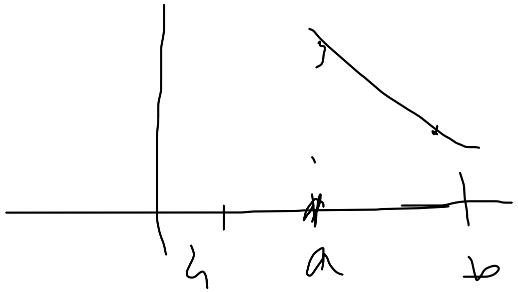


$\Longrightarrow 0 < (a-4)^2 < (b-4)^2$ $\quad \times(-1)$

$\Longrightarrow 0 > -(a-4)^2 > -(b-4)^2$ $\quad +25$

$\Longrightarrow 25 > \underbrace{-(a-4)^2+25} > \underbrace{-(b-4)^2+25}$

$\Longrightarrow \boxed{f(a) > f(b)}$



donc f est décroissante sur $]4;+\infty[$.

$f(x) = 2(x+3)^2 - 16$

1) Montrer que $f(x) \geq -16$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad 2(x+3)^2 \geq 0$ donc $2(x+3)^2 - 16 \geq 0 - 16$

soit $f(x) \geq -16$.

2) Montrer que $f(x) = 2x^2 + 12x + 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 + 6x + 9) - 16 \\ &= 2x^2 + 12x + 18 - 16 \\ &= 2x^2 + 12x + 2. \end{aligned}$$

3) Montrer que $f(x) = 2(x - 2\sqrt{2} + 3)(x + 2\sqrt{2} + 3)$.

$$\begin{aligned} 2(x-2\sqrt{2}+3)(x+2\sqrt{2}+3) &= 2\Big(x^2 + \cancel{2\sqrt{2}x} + \underline{3x} - \cancel{2\sqrt{2}x} - \underbrace{2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}_{-8} \overbrace{- 2\sqrt{2}\times 3}^{\cancel{-6\sqrt{2}}} + \underline{3x} + \cancel{6\sqrt{2}} + 9\Big) \\ &= 2(x^2 + 6x + 1) \\ &= \underline{2x^2 + 12x + 2} \end{aligned}$$

$f(x) = 2(x+3)^2 - 16$ $\qquad$ $f(x) = 2x^2 + 12x + 2$ $\qquad$ $f(x) = 2(x - 2\sqrt{2} + 3)(x + 2\sqrt{2} + 3)$

4) Résoudre :

a) $f(x) = 0 \longrightarrow$ forme factorisée

$\Leftrightarrow 2(x - 2\sqrt{2} + 3)(x + 2\sqrt{2} + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{2} + 3 = 0$ ou $x + 2\sqrt{2} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{x = 2\sqrt{2} - 3}$ ou $\underline{x = -2\sqrt{2} - 3}$

b) $f(x) = -16 \longrightarrow$ forme canonique

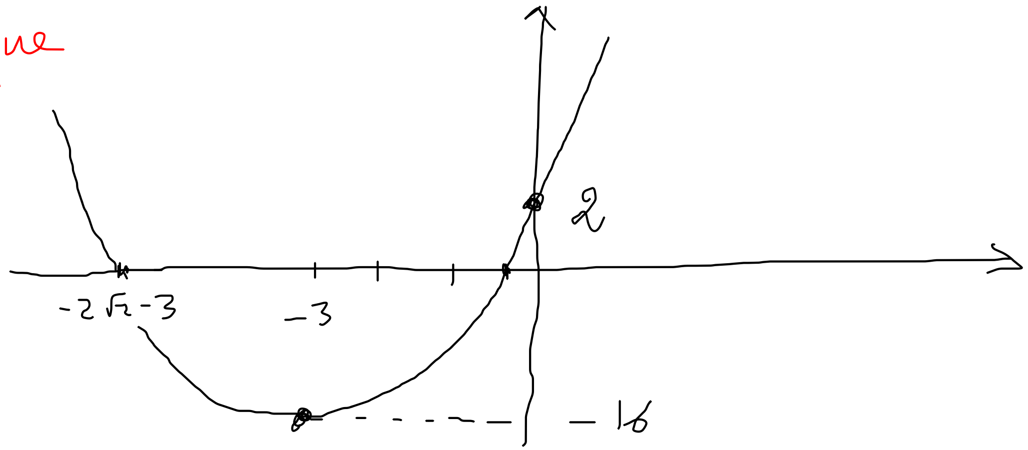
$\Leftrightarrow 2(x+3)^2 - 16 = -16$

$\Leftrightarrow 2(x+3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -3}$



c) $f(x) = 2$ $\longrightarrow$ forme développée

$\iff 2x^2 + 12x + \cancel{2} = \cancel{2}$

$\iff 2x^2 + 12x = 0$

$\iff 2x(x+6) = 0$

$\iff 2x = 0$ ou $x + 6 = 0$

$\iff \underline{x = 0}$ ou $\underline{x = -6}$

5] Etudier les variations de f sur $]-\infty;-3]$.

$f(x) = 2(x+3)^2 - 16$

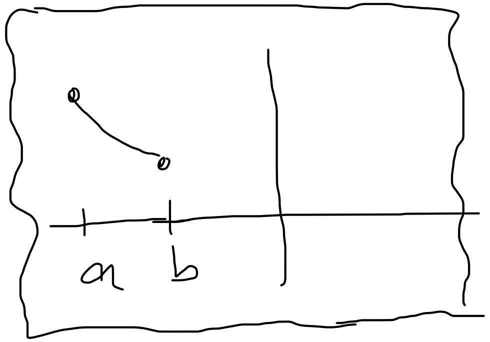
Soient $a < b < -3 \Rightarrow a+3 < b+3 < 0$

$\Rightarrow (a+3)^2 > (b+3)^2 > 0$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

$\Rightarrow 2(a+3)^2 > 2(b+3)^2 > 0$

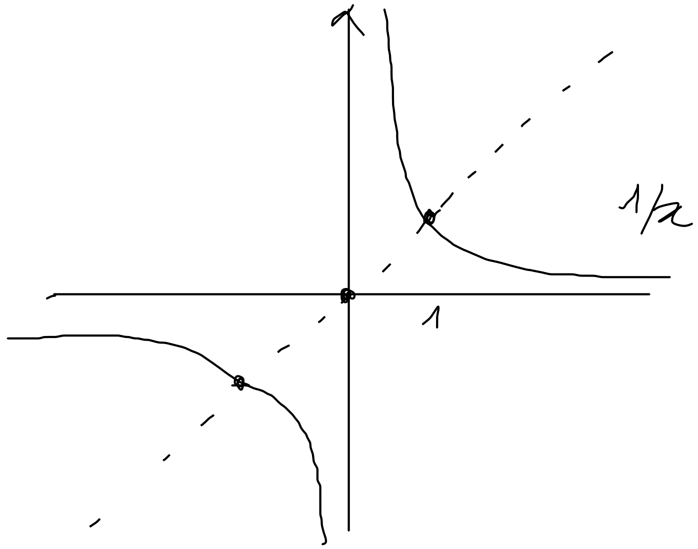
$\Rightarrow \underbrace{2(a+3)^2 - 16}_{} > \underbrace{2(b+3)^2 - 16}_{} > 0 - 16$

$\Rightarrow f(a) > f(b)$



Donc sur $]-\infty;-3]$, f est décroissante.

De même, sur $]-3;+\infty[$, f est croissante.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$