

II/ Dans le dessin ci-dessous placer les points A, D et C tels que

$$A\left(\frac{1}{3}; 5\right) \quad C\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad D\left(\frac{19}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Soient les points

1. Trouver les coordonnées du point E pour que ACDE soit un parallélogramme

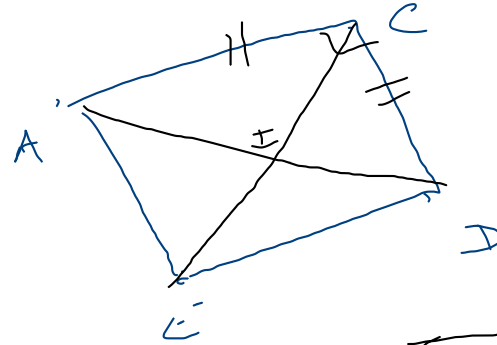
$$ACDE \text{ est un para.} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{ED}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} - x_E \\ \frac{5}{3} - y_E \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} - x_E \\ \frac{5}{3} - y_E \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} + \frac{19}{3} = x_E \\ \frac{14}{3} + \frac{5}{3} = y_E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 5 \\ y_E = \frac{19}{3} \end{cases}$$



$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

$$\|\vec{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\text{donc } E\left(5; \frac{19}{3}\right)$$

2. Trouver les coordonnées de son centre I

$$I \text{ milieu de } [AD] \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{\frac{20}{3}}{2} = \boxed{\frac{10}{3}} \\ y_I = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{\frac{20}{3}}{2} = \boxed{\frac{10}{3}} \end{cases}$$

3. Prouver que le triangle ACD est un triangle rectangle isocèle

$$\begin{aligned} \rightarrow \bullet AC^2 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} + \frac{196}{9} = \boxed{\frac{212}{9}} \\ \bullet AD^2 &= 6^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 = 36 + \frac{100}{9} = \frac{324 + 100}{9} = \boxed{\frac{424}{9}} \\ \rightarrow \bullet CD^2 &= \left(\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{212}{9}} \end{aligned}$$

Donc $AC = CD$ et $AD^2 = AC^2 + CD^2$ donc le triangle ACD est rech. iso. en C.

4. Prouver que ACDE est un carré

ACDE est un para.

de plus, $(AC) \perp (CD)$ donc ACDE est un rectangle.

de plus, $AC = CD$ donc ACDE est un carré.

5. Prouver que ACD ne sont pas alignés

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 4/3 \\ -14/3 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} 6 \\ -10/3 \end{pmatrix}$$

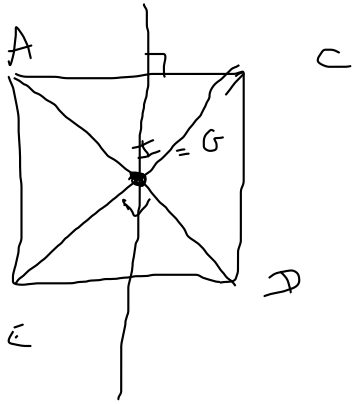
$$\det(\vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 6 \\ -\frac{14}{3} & -\frac{10}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{10}{3}\right) - \left(-\frac{14}{3}\right) \times 6 \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad 4 \times \left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{40}{3} \\ \bullet \quad 6 \times \left(-\frac{14}{3}\right) = -\frac{84}{3} \end{array} \right.$$

$-\frac{40}{3} \neq -\frac{84}{3}$ donc $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ ne sont colinéaires.

6. Prouver que $G\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$ est sur la médiatrice de $[AC]$

$L \supset I$



$ACDE$ est un carré donc $AD = EC$.

I milieu de $[AD]$ et $[EC]$ donc $IA = IC$.

Ainsi I est sur la médiatrice de $[AC]$.

I/ Simplifier

$$A = (3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})^2 \quad B = \frac{\sqrt{32} - 5\sqrt{50}}{3\sqrt{98} - \sqrt{8}}$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$
$$C = (3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 7\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{98} &= 3 \times \sqrt{2 \times 49} \\ &= 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{49} \\ &= 3 \times 7 \times \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 &\rightarrow 4 \\ 3^2 &\rightarrow 9 \\ 4^2 &\rightarrow 16 \\ 5^2 &\rightarrow 25 \\ 6^2 &\rightarrow 36 \\ 7^2 &= 49 \\ 8^2 &= 64 \\ 9^2 &= 81 \\ 10^2 &= 100 \\ 11^2 &= 121 \\ 12^2 &= 144 \\ 13^2 &= 169 \\ 14^2 &= 196 \\ 15^2 &= 225 \end{aligned}$$

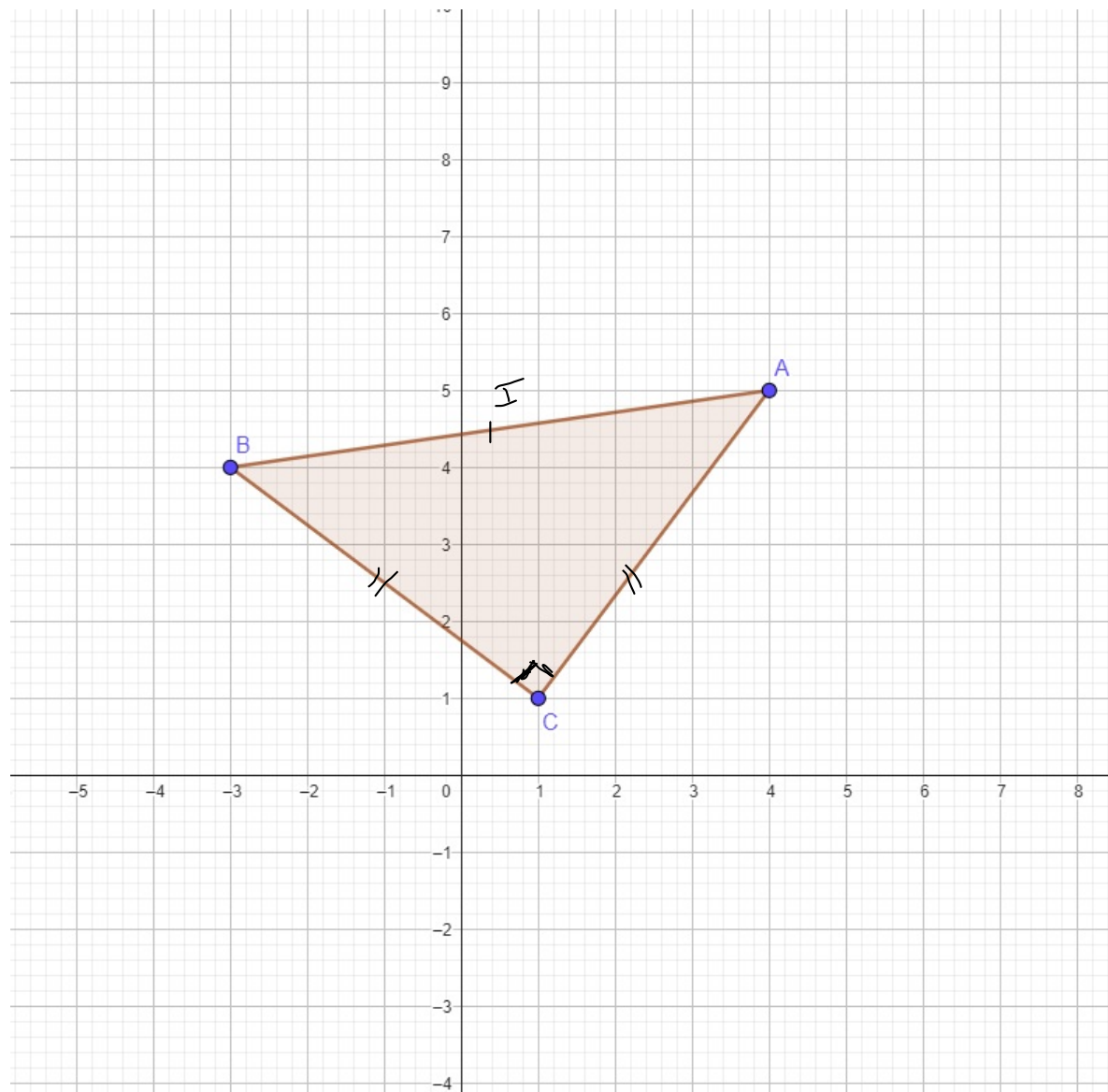
$$\begin{aligned} \bullet A &= (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 3\sqrt{5} \times 7\sqrt{2} + (7\sqrt{2})^2 \\ &= 45 - 42\sqrt{10} + 98 \end{aligned}$$

$$\underline{A = 143 - 42\sqrt{10}}$$

$$\bullet B = \frac{4\sqrt{2} - 25\sqrt{2}}{21\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{-21\cancel{\sqrt{2}}}{19\cancel{\sqrt{2}}} = \boxed{-\frac{21}{19}}$$

$$\begin{aligned} \bullet C &= (3\sqrt{5})^2 - (7\sqrt{2})^2 \\ &= 45 - 98 \end{aligned}$$

$$\underline{C = -53}$$



$$\begin{aligned}
 IA^2 &= \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi $IA = IP$ donc $P \in (\mathcal{C})$.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

1) Nature de ABC?

- $\vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $AC^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = \underline{25}$
- $\vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $BC^2 = 4^2 + (-3)^2 = \underline{25}$
- $\vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $AB^2 = (-7)^2 + (-1)^2 = \underline{50}$

Donc ABC est rech. iso en C.

2) I milieu de $[AB] \Rightarrow I \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2} \right)$

3) Soit $P(3; 7)$. Appartient-il à $(\mathcal{C})$?

$$\vec{IP} \begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{2} \\ 7 - \frac{9}{2} \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{IP} \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } IP^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$