II/Soit un triangle A,B,C

Soient les points M et N tels que $4\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et $9\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Prouver que (MN)// (BC)

- $\boxed{4\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}} \iff 4\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

$\iff 4(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) + 5\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

$\iff 4\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

$\iff \boxed{9\overrightarrow{BM} = -4\overrightarrow{AB}}$ (1)

$\overrightarrow{BM} = -\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

- $\underline{\overrightarrow{MN}} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$

$= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CA}$

$= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} - \frac{9}{9}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CA}$

$= -\frac{5}{9}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CA}$

$= -\frac{5}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = \boxed{-\frac{5}{9}\overrightarrow{CB}}$

- $\boxed{9\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC} = \vec{0}} \iff 9\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\iff 9\overrightarrow{BN} + 4(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + 5(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

$\iff \underbrace{9\overrightarrow{BN} + 9\overrightarrow{MB}} + 4\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{CM} = \vec{0}$

$\iff 9\overrightarrow{MN} + 4\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$

$\iff \underbrace{9\overrightarrow{MN} + 9\overrightarrow{AM}} + 5\overrightarrow{CA} = \vec{0}$

$\iff 9\overrightarrow{AN} + 5\overrightarrow{CA} = \vec{0}$

$\iff \boxed{9\overrightarrow{AN} = -5\overrightarrow{CA}}$ (2)

- $3\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

$\iff 3\overrightarrow{AM} - 4(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$

$\iff 3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

$\iff \boxed{7\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}}$

A A

- $7\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$

$\iff \cancel{7\overrightarrow{BA}} + 7\overrightarrow{AN} \cancel{+ 3\overrightarrow{AB}} \cancel{- 4\overrightarrow{BA}} - 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

$\iff \boxed{7\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}}$

- $7\overrightarrow{MN} = 7\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{AN}$

$= 4\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}$

$= \underline{4\overrightarrow{BC}}$

Donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Ainsi, $(MN) \parallel (BC)$.

B

• $8\vec{AM} - 9\vec{MB} = \vec{0}$

$\iff 8\vec{AB} + 8\vec{BM} + 9\vec{BM} = \vec{0}$

$\iff \boxed{17\vec{BM} = -8\vec{AB}}$

A A

• $17\vec{BN} + 8\vec{AB} - 9\vec{BC} = \vec{0}$

$\iff \cancel{17\vec{BA}} + 17\vec{AN} + \cancel{8\vec{AB}} - \cancel{9\vec{BA}} - 9\vec{AC} = \vec{0}$

$\iff \boxed{17\vec{AN} = 9\vec{AC}}$

$\boxed{(MN) \parallel (BC)\ ?}$

• $17\vec{MN} = 17(\vec{MB} + \vec{BA} + \vec{AN})$

$= 8\vec{AB} + 17\vec{BA} + 9\vec{AC}$

$= 8\vec{AB} - 17\vec{AB} + 9\vec{AC}$

$= -9\vec{AB} + 9\vec{AC}$

$= 9(\vec{AC} + \vec{BA})$

$= \boxed{9\vec{BC}}$