Systèmes linéaires

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 6 mai 2021

(https://courspasquet.fr) (https://mathweb.fr)

Définition

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Résoudre un tel système signifie trouver les nombres x et y qui satisfont les deux équations.

Exemple : le système $\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ x - y = 2 \end{cases}$ admet pour solutions $x = 1$ et $y = -1$ car :

- d'une part $3 \times 1 + 5 \times (-1) = 3 - 5 = -2$;
- d'autre part $1 - (-1) = 1 + 1 = 2$.

x et y sont donc bien solutions des deux équations.

Méthodes de résolution

Méthode par substitution

Cette méthode consiste à exprimer une inconnue (par exemple x)) en fonction d'une autre (par exemple y) dans une équation, et de la remplacer dans l'autre équation.

Exemple : on doit résoudre le système $\begin{cases} 3x + 5y = -2 & (E_1) \\ x - y = 2 & (E_2) \end{cases}$

- On peut en premier exprimer x en fonction de y dans (E_2) : $x - y = 2 \iff x = 2 + y$.
- On peut ensuite remplacer x par $2 + y$ dans (E_1) :

$$3x + 5y = -2 \iff 3(2 + y) + 5y = -2 \iff 6 + 3y + 5y = -2 \iff 8y = -8 \iff y = -1.$$

- On peut maintenant calculer x :

$$x = 2 + y = 2 + (-1) = 1.$$

On présente cette résolution ainsi :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3x + 5y & = -2 \\ x - y & = 2 \end{cases} & \iff \begin{cases} 3x + 5y & = -2 \\ x & = 2 + y \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} 3(2 + y) + 5y & = -2 \\ x & = 2 + y \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} 8y & = -8 \\ x & = 2 + y \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} y & = -1 \\ x & = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Méthode par addition

Cette méthode consiste à multiplier une ou deux équations du système pour faire apparaître les mêmes coefficients devant les mêmes inconnues.

On souhaite résoudre le système $\begin{cases} 3x + 5y = 7 & (E_1) \\ 2x - 3y = -2 & (E_2) \end{cases}$

- On va d'abord multiplier (E_1) par 3 et (E_2) par 5 pour faire apparaître « $15y$ » dans les deux équations :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 & (E_1) \\ 2x - 3y = -2 & (E_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 9x + 15y = 21 & (E_1) \leftarrow 3(E_1) \\ 10x - 15y = -10 & (E_2) \leftarrow 5(E_2) \end{cases}$$

- Ensuite, on ajoute les deux équations pour éliminer les « y », en gardant l'une des deux équations du système initial :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 5y = 7 & (E_1) \\ 2x - 3y = -2 & (E_2) \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x + 5y = 7 & (E_1) \\ 19x \quad = 11 & (E_2) \leftarrow (E_1) + (E_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x + 5y = 7 & (E_1) \\ x \quad = \frac{11}{19} & (E_2) \end{cases} \end{aligned}$$

- On peut ensuite refaire la même chose à partir du système initial pour éliminer les « x » :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 5y = 7 & (E_1) \\ 2x - 3y = -2 & (E_2) \end{cases} &\iff \begin{cases} 6x + 10y = 14 & (E_1) \leftarrow 2(E_1) \\ 6x - 9y = -6 & (E_2) \leftarrow 3(E_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x + 5y = 7 & (E_1) \\ \quad 19y = 20 & (E_2) \leftarrow (E_1) - (E_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ \quad y = \frac{20}{19} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $x = \dfrac{11}{19}$ et $y = \dfrac{20}{19}$.

Déterminant d'un système

$$(S)\ :\ \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \longrightarrow \det(S) = ab' - ba'.$$

Un système (S) admet une unique solution si $\det(S) \neq 0$.

Exemple : pour le système du paragraphe précédent, on trouve :

$$(S)\ :\ \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases} \longrightarrow \det(S) = 3 \times (-3) - 5 \times 2 = -19 \neq 0.$$

Le déterminant n'est pas égal à 0 donc on peut le résoudre.

Remarque : il faut calculer le déterminant avant de tenter de résoudre le système.

$$\begin{cases} \det(S) \neq 0 & \iff \text{le système admet une unique solution en } x \text{ et } y \\ \det(S) = 0 & \iff \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} & \iff \text{les équations sont équivalentes, elles représentent la même droite} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'} & \iff \text{aucune solution, les équations représentent des droites parallèles} \end{cases} \end{cases}$$