Edition 2025 - 2026

mathématiques

Seconde générale

Avec programmes Python

Stéphane Pasquet

SOMMAIRE

☞ *256 exercices entièrement corrigés*

AVANT-PROPOS

Le programme de mathématiques de Seconde offre une certaine liberté aux enseignants quant à la façon dont ils abordent les notions.
C'est la raison pour laquelle le plan de ce livre ne coïncidera pas nécessairement avec celui de votre professeur.

J'ai toutefois tenté de le structurer de la manière la plus pratique possible.

Les exercices sont classés par niveau de difficultés.

- ★ exercices d'application des notions du cours, exercices d'un niveau facile ;
- ★★ exercice d'un niveau intermédiaire, où il faut mobiliser les notions du cours et réfléchir un peu ;
- ★★★ exercices de réflexion, niveau élevé.

De plus, pour chaque exercice, vous aurez la possibilité de signaler une erreur, ou de laisser un commentaire en cliquant sur l'icône ⚠.

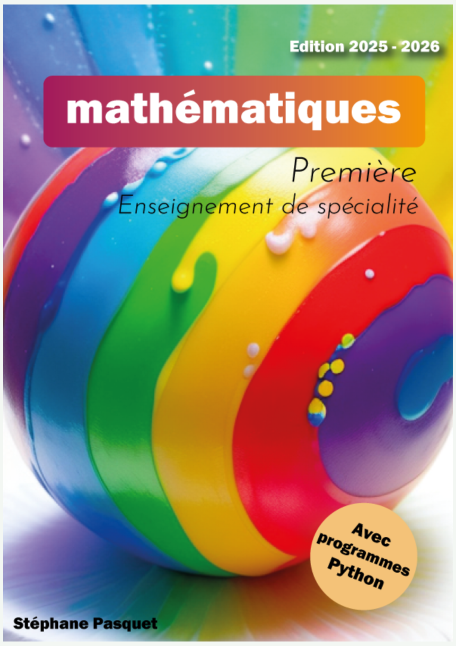
Protection du livre : ce livre est vendu uniquement sur le site `mathweb.fr`. Il ne peut en aucun cas être disponible ailleurs. Si vous avec acquis ce document ailleurs, merci de me le signaler via le formulaire de contact du site `mathweb.fr`.

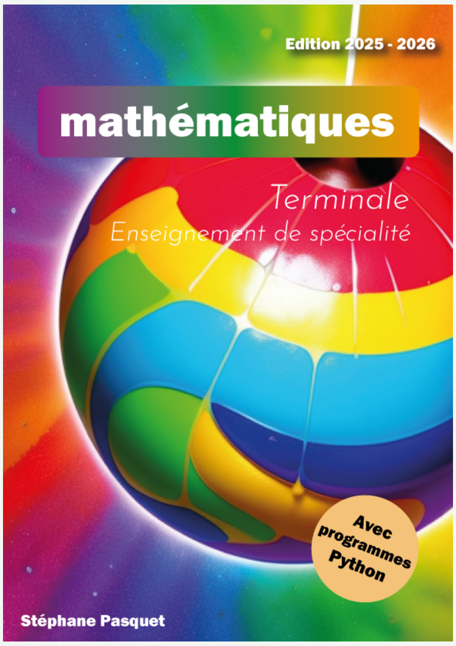
Très bon travail !

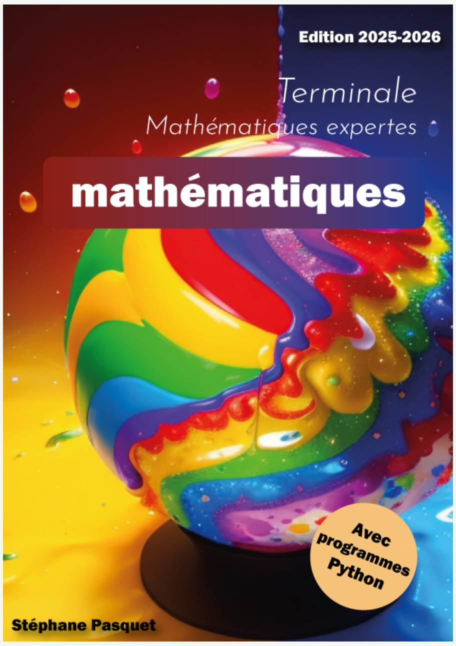
Stéphane Pasquet.

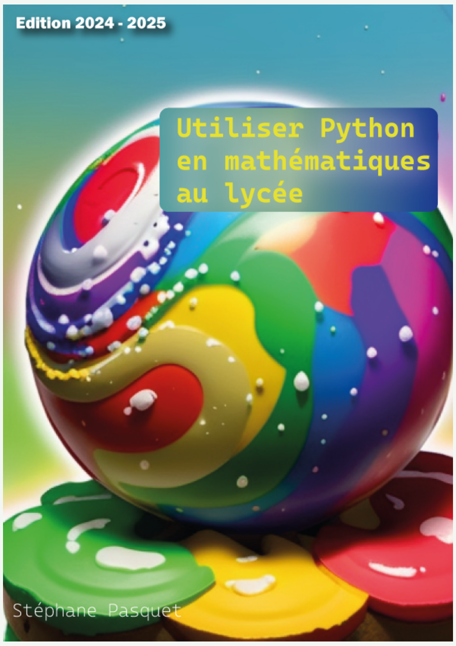
Date d'édition : 13 octobre 2025.

AUTRES OUVRAGES









Aussi disponibles sur https://mathweb.fr

SITES INTERNET

https://courspasquet.fr

Cours particuliers de mathématiques en ligne

https://mathweb.fr

Ressources mathématiques et Python

https://rezoprof.mathweb.fr

Mise en relation entre professeurs et élèves , toutes disciplines – 100 % GRATUIT !

1

Multiples, diviseurs et nombres premiers

Plan du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser principalement aux nombres entiers.

I - Multiples et diviseurs

I . 1 - Définitions

Définition 1

Soit n un nombre entier (naturel ou relatif).

- On appelle **diviseurs** de n tous les nombres entiers q tels que le quotient de n par q est entier.
- On appelle **multiples** de n tous les nombres de la forme $k \times n$, où k est entier.

Exemple 1

1. 2 est un diviseur de 12 car $\dfrac{12}{2} = 6$ et 6 est un nombre entier.
2. 45 est un multiple de 9 car $45 = 5 \times 9$.

Remarque 1

Si q est un diviseur de n alors on dit que n est *divisible* par q.

I . 2 - Critères de divisibilité

Définition 2

Un **critère de divisibilité** est une règle permettant de savoir si un entier est divisible par un autre entier.

I . 2 . a - Critère de divisibilité par 2

Propriété 1

Un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemple 2

1. 78 est divisible par 2 car son chiffre des unités est 8.
2. 106 est divisible par 2 car son chiffre des unité est 6.

Remarque 2

Quand un entier est divisible par 2, on dit qu'il est pair.
Sinon, on dit qu'il est impair.

Propriété 2

Si n est pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.
Si n est impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

I . 2 . b - Critère de divisibilité par 3

Propriété 3

Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.

Exemple 3

1. 123 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres est $1 + 2 + 3 = 6$, et 6 est divisible par 3.
2. 10 101 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres $1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3$ est divisible par 3.

I . 2 . c - Critère de divisibilité par 5

Propriété 4

Un entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Exemple 4

1. 125 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
2. 10 100 est divisible par 5 son chiffre des unités est 0.

I . 2 . d - Un propriété importante

Propriété 5

Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Un entier n est divisible par $p \times q$ si et seulement si il est divisible par p et par q.

Exemple 5

1. 312 est divisible par 2 et par 3 donc il est divisible par 6.
2. 455 est divisible par 35 donc il est divisible par 7 et par 5.

I . 3 - Somme de deux multiples

Propriété 6

Soient a un entier relatif.
Soient m et n deux entiers multiples de a.

Alors $m+n$ est un multiple de a.

Démonstration 1

m est un multiple de a donc il existe un entier k tel que $m = ka$.
De même, n est un multiple de a donc il existe un entier k' tel que $n = k'a$.
Ainsi,

$$m+n = ka + k'a = (k+k')a.$$

Or, k et k' sont entiers, donc $k+k'$ aussi. Ainsi, $(k+k')a$ est un multiple de a.
Donc $m+n$ est un multiple de a.

I . 4 - Carré d'un nombre impair

Propriété 7

Soit a un nombre impair.
Alors, a^2 est impair.

Démonstration 2

Si a est impair alors il existe un entier k tel que :

$$a = 2k+1.$$

Ainsi,

$$a^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2\times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1.$$

Donc a^2 est de la forme $2\mathrm{N}+1$, avec $\mathrm{N} = 2k^2+2k$. a est donc impair.

II - ppcm et pgcd

II . 1 - ppcm

Définition 3

Soient a et b deux entiers.
On appelle **ppcm** (plus petit commun multiple) de a et b le plus petit nombre m qui est à la fois multiple de a et de b.

On le note $\text{ppcm}(a\,;\,b)$.

Exemple 6

Si $a = 6$ et $b = 15$ alors $\text{ppcm}(6\,;\,15) = 30$ car :

- les multiples de 6 sont : 6, 12, 18, 24, 30, 36, etc.
- les multiples de 15 sont : 15, 30, 45, etc.

Le plus petit multiple commun est donc 30.

II . 2 - pgcd

Définition 4

Soient a et b deux entiers.
On appelle **pgcd** (plus grand commun diviseur) de a et b le plus grand nombre d qui divise à la fois a et b.

On le note $\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$.

Exemple 7

Si $a = 210$ et $b = 49$ alors $\text{pgcd}\,(201\,;\,49) = 7$ car :

- $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Les diviseurs de 210 sont donc :

1	5	$2 \times 5 = 10$	$7 \times 3 = 21$	$2 \times 3 \times 7 = 42$
2	$2 \times 3 = 6$	$7 \times 2 = 14$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$3 \times 5 \times 7 = 105$
3	7	$5 \times 3 = 15$	$5 \times 7 = 35$	210.

- $49 = 7 \times 7$

Ainsi, le plus grand diviseur commun est 7.

Remarque 3

Dans la pratique, on n'énumère pas les diviseurs car la liste peut être très longue. On préfèrera utiliser la propriété suivante.

Propriété 8

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$ et q entier.
Alors, $\text{pgcd}\,(a\,;\,b) = \text{pgcd}\,(b\,;\,r)$.

Pour calculer le pgcd de deux nombres, on utilisera la propriété précédente autant que nécessaire. Par exemple, pour calculer $\text{pgcd}\,(126\,;\,24)$:

- on écrit d'abord que $126 = 5 \times 24 + 6$, donc $\text{pgcd}\,(126\,;\,24) = \text{pgcd}\,(24\,;\,6)$;
- on écrit ensuite que $24 = 4 \times 6 + 0$, donc $\text{pgcd}\,(24\,;\,6) = \text{pgcd}\,(6\,;\,0) = 6$.

L'écriture $a = bq + r$ est appelée la *division euclidienne* de a par b.
Le fait d'écrire les divisions euclidiennes successives tel que nous l'avons fait constitue ce que l'on nomme l'*algorithme d'Euclide*.

Propriété 9

Soient a et b deux entiers naturels. Alors, $\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.

Exemple 8

$a = 775$ et $b = 372$.
L'algorithme d'Euclide donne :

$$775 = 2 \times 372 + \boxed{31}$$
$$372 = 12 \times 31 + 0.$$

Le dernier reste non nul est 31 donc $\text{pgcd}\,(775\,;\,372) = 31$.

Propriété 10

$$\text{pgcd}\,(a\,;\,b) = 1 \iff \frac{a}{b} \text{ est irréductible.}$$

Si $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible alors on divise a et b par $\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$ pour simplifier au maximum la fraction.

Exemple 9

$\text{pgcd}\,(775\,;\,372) = 31$ (voir exemple précédent) donc $\dfrac{775}{372} = \dfrac{775 \div 31}{372 \div 31} = \dfrac{25}{12}$.

Propriété 11

Pour tous entiers naturels a et b,

$$\text{ppcm}(a\,;\,b) \times \text{pgcd}\,(a\,;\,b) = ab.$$

III - Nombres premiers

III . 1 - Définition

Définition 5

Un entier naturel est **premier** s'il admet deux uniques diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque 4

Le nombre « 1 » n'est pas premier car il n'admet qu'un seul diviseur (et non 2).

La liste des nombres premiers commence ainsi :

$$2\,;3\,;5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;19\,;23\,;\ldots$$

Remarque 5

Cette liste ne s'arrête pas; on dit que l'ensemble des nombres premiers est infini (mais ce n'est pas au programme...).

III . 2 - Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété 12

Tout entier naturel a s'écrit de manière unique sous la forme :

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_n^{\alpha_n}$$

où p_1, p_2, ..., p_n sont des nombres premiers et où α_1, α_2, ..., α_n sont des entiers naturels.

Exemple 10

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.
Pour trouver cette décomposition, on peut diviser autant que nécessaire par 2, puis par 3, puis par 5, etc.

	360	2	$\longleftarrow$ on divise par 2 car 360 est pair
résultat de $360 \div 2 \longrightarrow$	180	2	$\longleftarrow$ on divise par 2 car 180 est pair
résultat de $180 \div 2 \longrightarrow$	90	2	$\longleftarrow$ on divise par 2 car 90 est pair
résultat de $90 \div 2 \longrightarrow$	45	3	$\longleftarrow$ on divise par 3 car 45 n'est plus divisible par 2, donc on passe au nombre premier suivant
résultat de $45 \div 3$	15	3	$\longleftarrow$ on continue à diviser par 3
résultat de $15 \div 3$	5	5	$\longleftarrow$ on passe à 5, qui vient après 3
résultat de $5 \div 5$	1	1	$\longleftarrow$ on s'arrête quand on obtient 1.

On a ainsi obtenu que $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ (on regarde les nombres de droite).

Multiples et diviseurs

Exercice 1.1 (multiples et diviseurs)

Compléter les propositions suivantes à l'aide de l'un des mots : « multiple » ou « diviseur ».

1. 45 est un … de 180.
2. 3 est un … de 18.
3. 50 est un … de 5.
4. 121 est un … de 11.
5. 2 est un … de 78.
6. 9 est un … de 3.

Solution page 15

Exercice 1.2 (nombre parfait)

Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de tous ses diviseurs, excepté lui-même.

1. Vérifier que 6 est un nombre parfait.
2. 18 est-il parfait ?

Solution page 15

Exercice 1.3 (programme Python mystère)

Qu'affiche le programme Python suivant ?

Code Python 1-1

```python
for i in range(1,501):
    if 500%i == 0:
        print(i)
```

Je rappelle que :

- `range(a,b)` désigne tous les nombres entiers de a et $b-1$;
- `a%b` désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

Solution page 15

Exercice 1.4 (fraction mystère)

Soit la fraction $A = \dfrac{45\boxed{?}}{357}$.
Déterminer toutes les valeurs que peut prendre le chiffre manquant afin que la fraction A soit irréductible.

Solution page 15

Exercice 1.5 (trouver deux multiples de 11)

Déterminer deux nombres x et y multiples de 11, avec $x < y$, tels que $x + y = 132$.

Solution page 15

Exercice 1.6 (divisibilité)

Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3.

Solution page 16

Exercice 1.7 (divisibilité)

On considère un entier naturel n s'écrivant avec 5 chiffres : $n = abcde$.

1. Vérifier que $10\,000 = 11k + 1$ et $100 = 11k' + 1$, où k et k' sont deux entiers naturels.
2. Vérifier que $1\,000 = 11q - 1$, où q est un entier naturel.
3. En déduire l'équivalence suivante :

$$n \text{ est divisible par } 1 \iff (e + c + a) - (d + b) \text{ est divisible par } 11.$$

4. 71 632 est-il divisible par 11 ?

Solution page 16

Exercice 1.8 (programme Python mystère)

Que fait la fonction `mystere` Python suivante ?

Code Python 1-2

```python
def mystere(n):
    for i in range(2,n):
        if n % i == 0:
            return False
    return True
```

Je rappelle que :

- `range(a,b)` désigne tous les nombres entiers de a et $b - 1$;
- `a%b` désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

Solution page 16

Exercice 1.9 (PGCD)

Calculer le PGCD des nombres a et b pour chacune des questions suivantes.

1. $a = 1\,756$ et $b = 1\,317$.
2. $a = 1\,025$ et $b = 719$.
3. $a = 825$ et $b = 305$.
4. $a = 742$ et $b = 72$.
5. $a = 1\,002$ et $b = 2\,001$.
6. $a = 945$ et $b = 123$.

Solution page 17

Exercice 1.10 (PGCD et simplification de fractions)

En utilisant la notion de PGCD, simplifier au maximum les fractions suivantes.

1. $\dfrac{756}{441}$
2. $\dfrac{1\,152}{1\,656}$
3. $\dfrac{3\,852}{1\,498}$
4. $\dfrac{20\,755}{9\,488}$

Solution page 18

Exercice 1.11 (PGCD et musique)

Un chef d'orchestre fait répéter 372 choristes hommes et 775 choristes femmes pour un concert. Il veut faire des groupes de répétition de sorte que :

- le nombre de choristes femmes est le même dans chaque groupe ;
- le nombre de choristes hommes est le même dans chaque groupe ;
- chaque choriste appartient à un unique groupe.

1. Quel nombre maximal de groupes pourra-t-il faire ?
2. Combien y aura-t-il alors de choristes hommes et femmes dans chaque groupe ?

Solution page 19

Exercice 1.12 (PGCD et chocolat)

Un chocolatier désire préparer un assortiment de chocolats blancs et chocolats noirs, qu'il mettra dans des boîtes.
Pour cela, il dispose en tout de 3 036 chocolats noirs et 1 056 chocolats blancs et il souhaite tous les utiliser.

1. Combien de boîtes pourra-t-il constituer ?
2. Calculer le nombre de chocolats noirs et de chocolats blancs qu'il y aura dans chacune des boîtes.

Solution page 19

Exercice 1.13 (PGCD et pâtisserie)

Un pâtissier dispose de 411 framboises et de 685 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.

1. Calculer le nombre de tartelettes.
2. Calculer le nombre de framboises et de fraises sur chaque tartelette.

Solution page 19

Exercice 1.14 (PGCD et salle de bain)

Dans une salle de bain, on veut recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible.

1. Déterminer la longueur du côté d'un carreau sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur.
2. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?

Solution page 20

Exercice 1.15 (programme Python mystère)

On considère le programme Python suivant :

Code Python 1-3

```python
def euclide(a,b):
    if a < 0 or b < 0:
        return False
    if a < b:
        a , b = b , a # on intervertit les valeurs de a et b

    while b != 0:
        a , b = b , a % b

    return a
```

1. Exécutez pas à pas la fonction `euclide(12,21)`.
2. Que représente le nombre renvoyé par `euclide(a,b)` ?

Solution page 20

Nombres premiers

Exercice 1.16 (reconnaître un nombre premier)

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

1 97 **2** 101 **3** 113 **4** 73

Solution page 21

Exercice 1.17 (décomposition en produit de facteurs premiers)

Décomposez en produit de facteurs premiers les nombres suivants :

1 75 **2** 102 **3** 17 640 **4** 11 375

Solution page 21

Exercice 1.18 (programme Python mystère)

On considère le programme Python suivant :

Code Python 1-4

```python
def is_prime(n , L):
   # n est un nombre, L est une liste
    for p in L:
        if n % p == 0:
            return False

    return True

def liste(n):
    L = [] # liste vide
    for k in range(2,n+1):
        if is_prime(k , L) == True:
            L.append(k)

    return L
```

Rappelons que l'instruction « `L.append(k)` » insère la valeur de `k` dans la liste `L`.

Qu'affiche l'instruction suivante dans une console Python ?

```
>>> liste(100)
```

Solution page 21

Exercice 1.19 (un test de primalité)

On souhaite démontrer la propriété suivante :

> Soit n un entier naturel non nul.
> Si, pour tout entier k inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, n n'est pas divisible par k alors n est un nombre premier.

Nous allons faire un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire que l'on suppose qu'aucun entier k inférieur à $\sqrt{n}$ divise n tout en ayant n non premier.
Cela suppose qu'il existe un entier q tel que $n = k \times q$, avec $k > \sqrt{n}$.

1. Montrer alors que q est nécessairement inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2. Conclure.
3. En utilisant cette propriété, montrer que 1 973 est un nombre premier.

Solution page 22

Exercice 1.20 (infinitude des nombres premiers)

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Nous souhaitons démontrer que cet ensemble est infini, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de nombres premiers. Nous allons faire un *raisonnement par l'absurde*... Laissez-vous guider par les questions.

On suppose que $\mathbb{P} = \{p_1\ ; p_2\ ; \ldots\ ; p_n\}$, donc que cet ensemble n'est pas infini. Nous allons démontrer que ce n'est pas possible.

On note $x = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1$.

1. Justifier que le reste de la division euclidienne de x par p_1 est égal à 1.
2. Que dire du reste de la division euclidienne de x par p_2, p_3, ..., p_n ?
3. Que peut-on en déduire alors sur x ? Est-ce possible ? Conclure.

Solution page 23

Exercice 1.21 (nombres de Mersenne)

On considère un nombre premier n.
On pose alors le nombre $M_n = 2^n - 1$.
M_n est-il un nombre premier ?

Solution page 23

Exercice 1.22

Soit n un nombre premier. Le nombre n^2 est-il premier ?

Solution page 24

Exercice 1.23 (démonstration par contraposée)

Démontrer l'assertion suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Longrightarrow xy - 2 \neq x + y.$$

Solution page 24

Exercice 1.24 (démonstration par contraposée)

Démontrer l'implication suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathrm{pgcd}\,(a ; b) = 1 \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, n \nmid a \text{ et } n \nmid b.$$

Solution page 24

Corrigé de l'exercice 1.1 page 8

1. 45 est un diviseur de 180.
2. 3 est un diviseur de 18.
3. 50 est un multiple de 5.
4. 121 est un multiple de 11.
5. 2 est un diviseur de 78.
6. 9 est un multiple de 3.

Corrigé de l'exercice 1.2 page 8

1. Les diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3 et 6.
   De plus, $1+2+3=6$ donc 6 est un nombre parfait.
2. Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18.
   Or, $1+2+3+6+9=21$ donc 18 n'est pas parfait.

Corrigé de l'exercice 1.3 page 8

Ce programme parcourt tous les nombres entiers de 1 à 500 et pour chacun d'eux, teste si le reste de la division euclidienne de 500 par le nombre est nul, auquel cas cela signifie que 500 est divisible par le nombre et ce dernier est affiché.
Ainsi, le programme affiche tous les diviseurs de 500.

Corrigé de l'exercice 1.4 page 8

$357 = 3\times 7\times 17$; ainsi, le numérateur ne doit pas être divisible par 3, 7 et 17.
Notons x le chiffre manquant.

- pas divisible par 3, donc la somme de ses chiffres ne doit pas être divisible par 3.

  $$4+5+x=9+x$$

  donc x ne doit pas être égal à 0, 3, 6 ou 9. Donc x peut être égal à :

  $$1,\ 2 4 5,\ 7,\ 8.$$

- 451 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=1$ est possible ;
  452 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=2$ est possible ;
  454 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=4$ est possible ;
  455 est divisible par 7 donc $x \neq 0$;
  457 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=7$ est possible ;
  458 n'est divisible ni par 7, ni par 17 donc $x=8$ est possible.

Corrigé de l'exercice 1.5 page 9

Il existe deux entiers k et k' tels que $x=11k$ et $y=11k'$ car x et y sont multiples de 11.

$$x+y=132 \iff 11(k+k')=132 \iff k+k'=\frac{132}{11}=12.$$

De plus, $x < y$ donc $k < k'$. Les différentes valeurs pour k et k' sont :

$$k = 0 \text{ et } k' = 12\,;$$
$$k = 1 \text{ et } k' = 11\,;$$
$$k = 2 \text{ et } k' = 10\,;$$
$$k = 3 \text{ et } k' = 9\,;$$
$$k = 4 \text{ et } k' = 8\,;$$
$$k = 5 \text{ et } k' = 7.$$

Corrigé de l'exercice 1.6 page 9

Notons $n-1$, n et $n+1$ trois entiers consécutifs quelconques. Leur somme est donc :

$$n-1+n+n+1 = 3n.$$

Ainsi, la somme est un multiple de 3 (car n est un entier). Elle est donc toujours divisible par 3.

Corrigé de l'exercice 1.7 page 9

1 $10\,000 = 909 \times 11 + 1$ et $100 = 9 \times 11 + 1$.

2 $1\,000 = 91 \times 11 - 1$.

3
$$\begin{aligned} n &= 10^4 a + 10^3 b + 10^2 c + 10d + e \\ &= (909 \times 11 + 1)a + (91 \times 11 - 1)b + (9 \times 11 + 1)c + (11-1)d + e \\ &= 909 \times 11a + a + 91 \times 11b - b + 9 \times 11c + c + 11d - d + e \\ &= 11(909a + 91b + 9c + d) + a - b + c - d + e \\ &= 11(909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) - (b + d) \end{aligned}$$

Ainsi, n est divisible par 11 uniquement si $(a+c+e)-(b+d)$ l'est aussi, ce qui justifie l'équivalence.

4 $2+6+7 = 15$ et $3+1 = 4$; de plus, $15-4 = 11$, résultat divisible par 11, donc <u>71 632 est divisible par 11</u>.

Corrigé de l'exercice 1.8 page 9

Expliquons pas à pas chaque ligne du programme :

- `def mystere(n):`
  Une fonction est ici définie : elle admet pour « variable » `n` (on dit que c'est un *argument* de la fonction Python).
- `for i in range(2,n):`
  « `for` » désigne une *boucle itérative* (« Pour »). Ici, la variable `i` va prendre ses valeurs dans `range(2,n)`, c'est-à-dire dans la liste `[2,3,4,...,n-1]`. Donc `i` vaudra successivement 2, 3, 4, etc. jusqu'à `n-1`.
- `if a % i == 0:`
  À chaque itération, c'est-à-dire à chaque fois que `i` prendra une nouvelle valeur, on teste si le reste de la division euclidienne de `n` par `i` vaut « 0 », c'est-à-dire si `n` est

divisible par `i`. Si c'est le cas, on exécute l'instruction suivante (à savoir : « `return False` ». La fonction renvoie donc ici « `False` » si `n` est divisible par `i`.

- `return True`

  Cette instruction est en dehors de la boucle itérative « `for i in range(2,0)` » : elle s'exécute donc si on sort de la boucle, c'est-à-dire si la fonction n'a pas renvoyé « `False` ».

À la vue de tout ceci, on peut alors dire que la fonction renvoie « `False` » s'il existe un diviseur de l'argument `n`, et renvoie « `True` » dans le cas contraire.
Ce programme teste donc si `n` est un nombre premier : elle renvoie « `True` » si c'est le cas, et « `False` » dans le cas contraire.

Corrigé de l'exercice 1.9 page 10

1 Calculons pgcd (1756 ; 1317) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$1756 = 1 \times 1317 + 439$$
$$1317 = 3 \times 439 + 0$$

On en déduit que pgcd (1756 ; 1317) = 439.

2 Calculons pgcd (1025 ; 719) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$1025 = 1 \times 719 + 306$$
$$719 = 2 \times 306 + 107$$
$$306 = 2 \times 107 + 92$$
$$107 = 1 \times 92 + 15$$
$$92 = 6 \times 15 + 2$$
$$15 = 7 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$

On en déduit que pgcd (1025 ; 719) = 1.

3 Calculons pgcd (825 ; 305) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$825 = 2 \times 305 + 215$$
$$305 = 1 \times 215 + 90$$
$$215 = 2 \times 90 + 35$$
$$90 = 2 \times 35 + 20$$
$$35 = 1 \times 20 + 15$$
$$20 = 1 \times 15 + 5$$
$$15 = 3 \times 5 + 0$$

On en déduit que pgcd (825 ; 305) = 5.

4 Calculons pgcd (742 ; 72) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$742 = 10 \times 72 + 22$$
$$72 = 3 \times 22 + 6$$
$$22 = 3 \times 6 + 4$$

$6 = 1 \times 4 + 2$

$4 = 2 \times 2 + 0$

On en déduit que pgcd $(742\,;\,72) = 2$.

5 Calculons pgcd $(1002\,;\,2001)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$2001 = 1 \times 1002 + 999$

$1002 = 1 \times 999 + 3$

$999 = 333 \times 3 + 0$

On en déduit que pgcd $(1002\,;\,2001) = 3$.

6 Calculons pgcd $(945\,;\,123)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$945 = 7 \times 123 + 84$

$123 = 1 \times 84 + 39$

$84 = 2 \times 39 + 6$

$39 = 6 \times 6 + 3$

$6 = 2 \times 3 + 0$

On en déduit que pgcd $(945\,;\,123) = 3$.

Corrigé de l'exercice 1.10 page 10

1 Calculons pgcd $(756\,;\,441)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$756 = 1 \times 441 + 315$

$441 = 1 \times 315 + 126$

$315 = 2 \times 126 + 63$

$126 = 2 \times 63 + 0$

On en déduit que pgcd $(756\,;\,441) = 63$.

Donc $\dfrac{756}{441} = \dfrac{756 \div 63}{441 \div 63} = \dfrac{12}{7}$.

2 Calculons pgcd $(1152\,;\,1656)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$1656 = 1 \times 1152 + 504$

$1152 = 2 \times 504 + 144$

$504 = 3 \times 144 + 72$

$144 = 2 \times 72 + 0$

On en déduit que pgcd $(1152\,;\,1656) = 72$.

Donc $\dfrac{1\,152}{1\,656} = \dfrac{1\,152 \div 72}{1\,656 \div 72} = \dfrac{16}{23}$.

3 Calculons pgcd $(3852\,;\,1498)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$3852 = 2 \times 1498 + 856$

$1498 = 1 \times 856 + 642$

$856 = 1 \times 642 + 214$

$642 = 3 \times 214 + 0$

On en déduit que pgcd (3852 ; 1498) = 214.

Donc $\dfrac{3\,852}{1\,498} = \dfrac{3\,852 \div 214}{1\,498 \div 214} = \dfrac{18}{7}$.

4 Calculons pgcd (20755 ; 9488) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$20755 = 2 \times 9488 + 1779$$
$$9488 = 5 \times 1779 + 593$$
$$1779 = 3 \times 593 + 0$$

On en déduit que pgcd (20755 ; 9488) = 593.

Donc $\dfrac{20\,755}{9\,488} = \dfrac{20\,755 \div 593}{9\,488 \div 593} = \dfrac{35}{16}$.

Corrigé de l'exercice 1.11 page 10

1 Le nombre de groupes créés est nécessairement un diviseur de 775 et 372 (afin de pouvoir partager les groupes des hommes et des femmes). De plus, il faut que ce nombre soit maximal ; il s'agit donc du PGCD de 372 et 775.
Calculons pgcd (775 ; 372) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$775 = 2 \times 372 + 31$$
$$372 = 12 \times 31 + 0$$

On en déduit que pgcd (775 ; 372) = 31.

Ainsi, il peut faire au maximum 31 groupes de répétition.

2 $775 \div 31 = 25$ et $372 \div 31 = 12$.
Ainsi, il y aura 25 femmes et 12 hommes dans chaque groupe.

Corrigé de l'exercice 1.12 page 10

1 Calculons pgcd (3036 ; 1056) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$3036 = 2 \times 1056 + 924$$
$$1056 = 1 \times 924 + 132$$
$$924 = 7 \times 132 + 0$$

On en déduit que pgcd (3036 ; 1056) = 132.

Le chocolatier pourra donc constituer 132 boîtes au maximum.

2 $\dfrac{3\,036}{132} = 23$ et $\dfrac{1\,056}{132} = 8$.
Ainsi, il y aura 23 chocolats noirs et 8 chocolats blancs dans chacune des boîtes.

Corrigé de l'exercice 1.13 page 11

1 Calculons pgcd (411 ; 685) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$685 = 1 \times 411 + 274$$
$$411 = 1 \times 274 + 137$$
$$274 = 2 \times 137 + 0$$

On en déduit que $\text{pgcd}(411\,;685) = 137$.

Il pourra donc faire au maximum 137 tartelettes.

2 $411 \div 1373$ et $685 \div 137 = 5$; il y aura donc 3 framboises et 5 fraises sur chaque tartelette.

Corrigé de l'exercice 1.14 page 11

1 La longueur d'un carreau doit diviser à la fois 210 cm (la hauteur du mur) et 135 cm (la largeur). De plus, il faut qu'elle soit la plus grande possible. Elle est donc égale à $\text{pgcd}(210;135)$.
Calculons $\text{pgcd}(210;135)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$210 = 1 \times 135 + 75$$
$$135 = 1 \times 75 + 60$$
$$75 = 1 \times 60 + 15$$
$$60 = 4 \times 15 + 0$$

On en déduit que $\text{pgcd}(210;135) = 15$.

Un carreau doit donc mesurer 15 cm de côté.

2 $210 \div 15 = 14$ et $135 \div 15 = 9$ donc il doit y avoir 14 carreau en hauteur et 9 carreaux en largeur, soit 14×9126 carreaux en tout.

Corrigé de l'exercice 1.15 page 11

1 Exécutons pas à pas la fonction `euclide(12,21)` : il y a avant tout un test pour savoir si a ou b est strictement négatif. Ici, ce n'est pas le cas car $a = 12$ et $b = 21$.
Ensuite, il y a un test pour savoir si $a < b$: c'est en effet le cas, on on exécute l'instruction suivante. a et b sont alors intervertis. Ainsi, $a = 21$ et $b = 12$.
S'en suit une boucle conditionnelle « `while` » : tant que b est différent de 0, on exécute les instructions suivantes. On peut présenter les résultats successifs dans un tableau :

`b != 0`	-	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
a	21	12	9	3	-
b	21	21%12=9	12%9=3	9%3=0	-

La fonction renvoie la dernière valeur de a, c'est-à-dire « 3 ».

2 Sur l'exemple précédent, on reconnaît l'algorithme d'Euclide (d'où le nom de la fonction). Cet algorithme renvoie le $\text{pgcd}(a;b)$; c'est la valeur renvoyée par la fonction `euclide(a,b)`.

Corrigé de l'exercice 1.16 page 12

1. 97 n'admet pas de diviseurs autre que 1 et 97 ; il est donc premier.
2. 101 n'admet pas de diviseurs autre que 1 et 101 ; il est donc premier.
3. 113 n'admet pas de diviseurs autre que 1 et 113 ; il est donc premier.
4. 73 n'admet pas de diviseurs autre que 1 et 73 ; il est donc premier.

Corrigé de l'exercice 1.17 page 12

1. $$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
   Donc $75 = 3 \times 5^2$.

2. $$\begin{array}{r|l} 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$
   Donc $102 = 2 \times 3 \times 17$.

3. $$\begin{array}{r|l} 17\,640 & 2 \\ 8\,820 & 2 \\ 4\,410 & 2 \\ 2\,205 & 3 \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$
   Donc $17\,640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$.

4. $$\begin{array}{r|l} 11\,375 & 5 \\ 2\,275 & 5 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$
   Donc $11\,375 = 5^3 \times 7 \times 13^2$.

Corrigé de l'exercice 1.18 page 12

Dans ce programme il y a deux fonctions :

```
def is_prime(n , L):
   # n est un nombre, L est une liste
    for p in L:
        if n % p == 0:
            return False

    return True
```

On définit ici une fonction prenant deux arguments : un nombre `n` et une liste `L`.
Dans la boucle itérative « `for p in L:` », qui parcourt toute la liste `L` élément par élément, on teste si « `n % p == 0` » c'est-à-dire si le reste de la division euclidienne de `n` par `p` est nul, donc si `n` est divisible par `p`. Cela sous-entend donc que `L` est une liste de nombres.
Si tel est le cas, c'est-à-dire si `n` est divisible par `p`, la fonction retourne « `False` ».
Une fois la liste `L` parcourue, si on sort du test « `if n % p == 0` », c'est que `n` n'est divisible par aucun nombre de la liste `L`, et la fonction renvoie « `True` ».

```python
def liste(n):
    L = [] # liste vide
    for k in range(2,n+1):
        if is_prime(k , L) == True:
            L.append(k)

    return L
```

On initialise une liste vide `L`.

Ensuite, il y a une boucle itérative `for k in range(2,n+1):` qui signifie que l'on parcourt tous les nombres entiers de 2 à `n`. Pour chacun d'eux, on fait appel à la fonction `is_prime` et on teste si elle renvoie « `True` » ; si tel est le cas, on ajoute à la liste `L` le nombre `k` courant à l'aide de l'instruction `L.append(k)`.

On construit ainsi une liste de nombres qui ne sont pas divisibles par les éléments de cette même liste : ce sont les nombres premiers inférieurs ou égaux à `n`.

Corrigé de l'exercice 1.19 page 13

1 Si n n'est pas premier et si n n'admet aucun diviseur inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, cela signifie que :

$$n = k \times q$$

avec $k \geqslant \sqrt{n}$.
En multipliant cette inégalité par q, on a :

$$\underbrace{k \times q}_{=n} \geqslant \sqrt{n} \times q$$

et donc :

$$n \geqslant \sqrt{n} \times q\,,$$

qui donne, en divisant les deux membres par $\sqrt{n}$:

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \geqslant q.$$

Or, $\dfrac{n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ et donc :

$$\sqrt{n} \geqslant q.$$

q doit donc nécessairement être inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

2 Or, par hypothèse de départ, on a supposé qu'il n'existait pas de diviseurs de n qui soient inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$. Cela signifie donc l'affirmation de départ est fausse : s'il n'existe pas de diviseurs de n inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, n est nécessairement un nombre premier (car si tel n'est pas le cas, on vient de démontrer que cela mène à une absurdité, à savoir que q est un diviseur de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$).

Remarque 7

Ce raisonnement tire son nom justement du fait que l'on arrive à une absurdité en supposant le contraire de ce que l'on veut démontrer. Si vous ne comprenez pas cette logique; ce n'est pas étonnant car c'est assez difficile à concevoir à notre niveau, en classe de Seconde).

3 En appliquant cette propriété, pour voir si 1 973 est premier, on peut d'abord calculer sa racine carrée :

$$\sqrt{1973} \approx 44,4.$$

On va donc tester tous les nombres premiers inférieurs à 44 : s'il y en a un qui divise 1 973, cela signifie que 1 973 n'est pas un nombre premier.

Mais la liste des nombres premiers inférieurs à 44 se réduit à : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.

En testant un à un, on voit qu'aucun divise 1 973. Donc 1 973 est bien un nombre premier.

Corrigé de l'exercice 1.20 page 13

1 On peut écrire $x = q \times p_1 + 1$ donc le reste de la division euclidienne de x par p_1 est égal à 1.

2 Dans un cas général, pour tout entier naturel $k \leqslant n$, on peut écrire : $x = q \times p_k + 1$ donc le reste de la division euclidienne de x par p_k est égal à 1.

3 On a supposé que tous les nombres premiers étaient p_1, ..., p_n et aucun d'eux ne divise x... Étrange ! Cela nous dit donc que x est lui-même un nombre premier (car il n'admet aucun diviseur premier autre que 1 et lui-même).

Mais $x > p_n$ par définition, ce qui contredit alors l'hypothèse que nous avons faite, à savoir que $\mathbb{P}$ était un ensemble fini.

Ainsi, cette hypothèse est fausse : donc $\mathbb{P}$ est infini.

Corrigé de l'exercice 1.21 page 13

Si on teste les valeurs de M_n pour les premières valeurs de n possibles, on a :

- $n = 2 : M_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ est premier;
- $n = 3 : M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ est premier;
- $n = 5 : M_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ est premier;
- $n = 7 : M_7 = 2^5 - 1 = 128 - 1 = 127$ est premier.

Mais ce n'est pas parce que les premiers résultats donnent un nombre premier que les autres aussi... Il suffit d'ailleurs de calculer le suivant :

- $n = 11 : M_{11} = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047 = 23 \times 89$ n'est pas premier.

Ainsi, en général, M_n n'est pas premier si n est premier.

Corrigé de l'exercice 1.22 page 14

$n^2 = n \times n$ donc les diviseurs de n^2 sont 1, n et n^2.
Ainsi, n^2 n'est pas premier.

Corrigé de l'exercice 1.23 page 14

Démontrons la contraposée de l'assertion, à savoir :

$$xy - 2 = x + y \Longrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ x = 2 \text{ ou } y = 2.$$

$$\begin{aligned} xy - 2 = x + y &\Longrightarrow xy - x - y = 2 \\ &\Longrightarrow xy - x - y {\color{red}+1} = 2 {\color{red}+1} \\ &\Longrightarrow (x-1)(y-1) = 3 \\ &\Longrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 1 = 3 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ (x = 2, y = 4) \text{ ou } (x = 4, y = 2). \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.24 page 14

Démontrons la contraposée de l'implication, à savoir :

$$\exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ n | a \text{ et } n | b \Longrightarrow \operatorname{pgcd}(a\,;\,b) \neq 1.$$

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ n | a \text{ et } n | b &\Longrightarrow \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p, q) \neq (1, 1),\ \begin{cases} a = np \\ b = nq \end{cases} \\ &\Longrightarrow \operatorname{pgcd}(a\,;\,b) \geqslant n \geqslant 2 \\ &\Longrightarrow \operatorname{pgcd}(a\,;\,b) \neq 1. \end{aligned}$$

2

Les nombres réels

Plan du chapitre

I - Nombres réels

I . 1 - Des entiers naturels aux nombres réels

Définition 6 (symbole d'appartenance)

On considère un ensemble quelconque E.
On dit que x est un *élément* de E si x appartient à l'ensemble E. On note alors :

$$x \in \mathrm{E}.$$

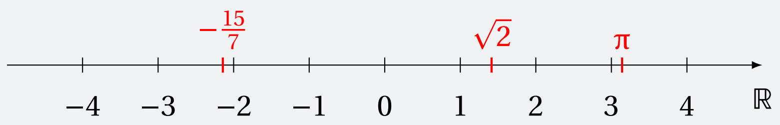
Définition 7 (ensembles de nombres)

- L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble des nombres : 0, 1, 2, ...
  On le note $\mathbb{N}$:
  $$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$$
- L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble composé des entiers naturels et de leur opposés.
  On le note $\mathbb{Z}$:
  $$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$
- L'ensemble des **nombres décimaux** est l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme $a \times 10^n$, où a et n sont deux entiers relatifs.
  On le note $\mathbb{D}$. C'est l'ensemble des nombres à virgule à écriture *finie*.
  $$\mathbb{D} = \{a \times 10^n\ , a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$$
- L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble de tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$.
  On le note $\mathbb{Q}$:
  $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$
- L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble de tous les nombres pouvant représenter une quantité réelle.
  On le note $\mathbb{R}$.

I . 2 - Représentations des ensembles

I . 2 . a - La droite des réels

L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite graduée sur laquelle on peut mettre n'importe quel nombre réel :



I . 2 . b - Diagramme de Venn

Définition 8 (symbole d'inclusion)

Soient E et F deux ensembles quelconques. Si tous les éléments de F sont aussi dans E, on dit que F est **inclus** dans E, et on note :

$$\begin{cases} \mathrm{F} \subset \mathrm{E} & \text{si E est plus grand que F} \\ \mathrm{F} \subseteq \mathrm{E} & \text{si F peut être confondu avec E} \end{cases}$$

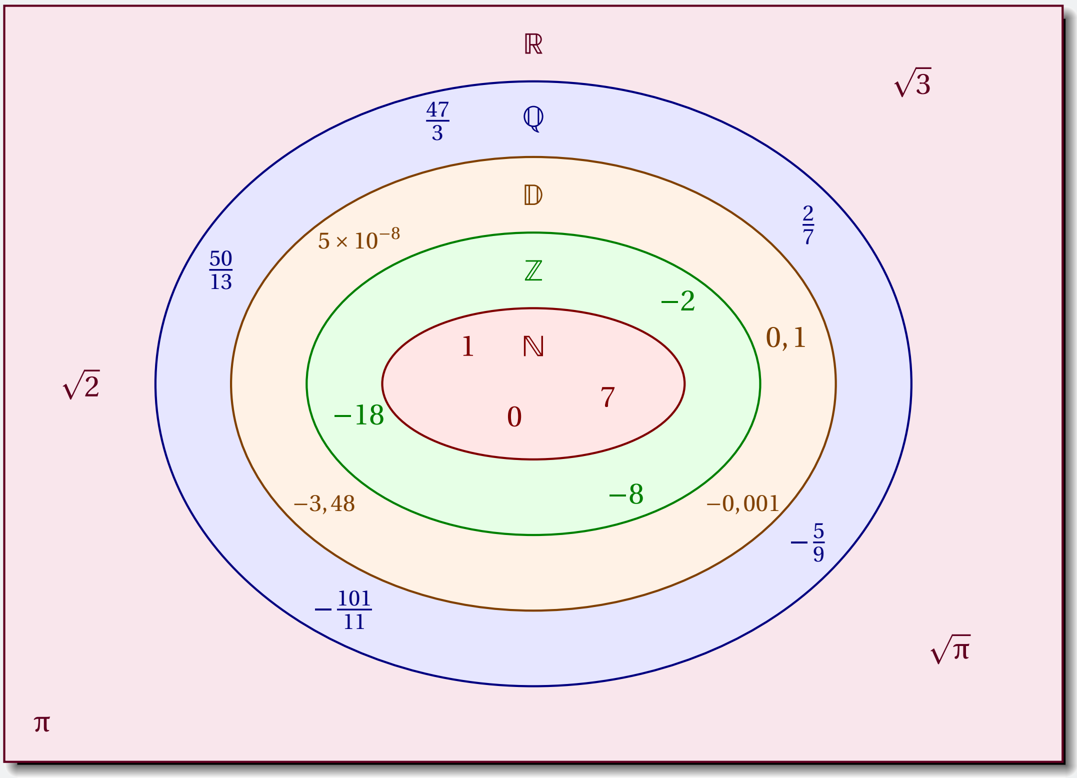
Propriété 13

- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs, donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Tous les entiers relatifs sont aussi des nombres décimaux, donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Tous les nombres décimaux sont aussi des nombres rationnels, donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- Tous les nombres rationnels sont aussi des nombres réels, donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On a donc :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Cette dernière propriété se représente par le diagramme de Venn suivant :



Définition 9

Si un nombre est réel mais n'est pas rationnel, on dit qu'il est **irrationnel**.

II - Intervalles

II . 1 - Définitions et notations

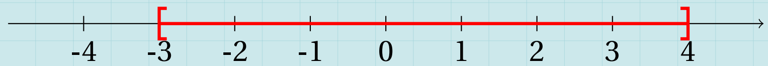
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Définition 10 (intervalle fermé)

On notera $[a;b]$ l'ensemble des nombres réels compris entre a et b. Ici, a et b sont compris dans l'intervalle car les crochets sont dirigés vers l'intérieur.
On dira que $[a;b]$ est un **intervalle fermé**.

Exemple 11

On représentera $[-3;4]$ ainsi :

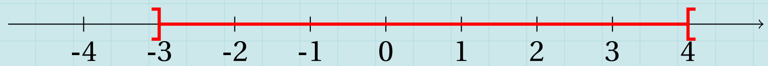


Définition 11 (intervalle ouvert)

On notera $]a;b[$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a et b qui ne sont pas compris dans l'intervalle car les crochets sont dirigés vers l'extérieur.
On dira que $[a;b]$ est un **intervalle ouvert**

Exemple 12

On représentera $]-3;4[$ ainsi :

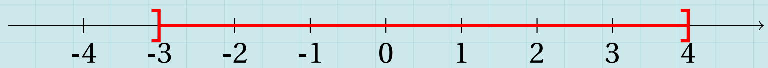


Définition 12 (intervalle semi-ouvert à gauche)

On notera $]a;b]$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a non compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'extérieur du côté de a) et b compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'intérieur du côté de b).

Exemple 13

On représentera $]-3;4]$ ainsi :

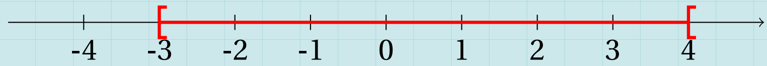


Définition 13 (intervalle semi-ouvert à droite)

On notera $[a;b[$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'intérieur du côté de a) et b non compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'extérieur du côté de b).

Exemple 14

On représentera $[-3;4[$ ainsi :



Définition 14 (intervalle infini)

- On notera $]-\infty;a[$ l'ensemble des nombres strictement plus petits que a.
- On notera $]-\infty;a]$ l'ensemble des nombres plus petits que a ou égaux à a.
- On notera $]a;+\infty[$ l'ensemble des nombres strictement plus grands que a.
- On notera $[a;+\infty[$ l'ensemble des nombres plus grands que a ou égaux à a.

Remarque 8

Le crochet est toujours *ouvert* du côté de l'infini (car on ne peut jamais atteindre l'infini).

II . 2 - Appartenance à un intervalle

Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a;b]$, on écrira :

$$x \in [a;b].$$

Cela signifie que x est compris entre a et b et on pourra donc l'écrire aussi :

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Attention 1

Les signes d'inégalité sont choisis en fonction du sens des crochets de l'intervalle :

$$x \in [a;b] \Longrightarrow a \leqslant x \leqslant b$$

$$x \in]a;b[\Longrightarrow a < x < b$$

$$x \in]a;b] \Longrightarrow a < x \leqslant b$$

$$x \in [a;b[\Longrightarrow a \leqslant x < b$$

$$x \in [a;+\infty[\Longrightarrow x \geqslant a$$

$$x \in]-\infty;a[\Longrightarrow x < a$$

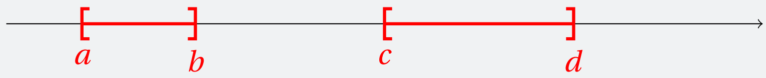
Pour écrire qu'un nombre x n'appartient pas à un intervalle $[a;b]$, on écrira : $x \notin [a;b]$.

II . 3 - Union et intersection d'intervalles

- Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a;b]$ **ou** à un intervalle $[c;d]$, on écrira :

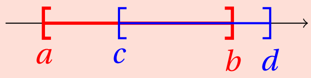
$$x \in [a;b] \cup [c;d].$$

  On représentera l'union ainsi :



Attention 2

Si les deux intervalles se chevauchent,



devient :

Dans ce cas (et uniquement dans ce cas), $[a;b] \cup [c;d] = [a;d]$.

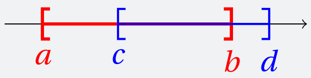
- Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a;b]$ **et** à un intervalle $[c;d]$, on écrira :

$$x \in [a;b] \cap [c;d].$$

  → Si les deux intervalles ne se chevauchent pas, l'intersection est vide (n'existe pas).
  On notera alors :

$$[a;b] \cap [c;d] = \varnothing.$$

  → Si les deux intervalles se chevauchent, l'intersection est l'ensemble en commun aux deux intervalles :



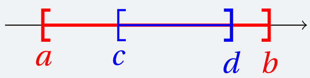
intersecion :

II . 4 - Inclusion d'intervalles

Si un intervalle $[c;d]$ est inclus dans un autre intervalle $[a;b]$, on écrira :

$$[c;d] \subset [a;b].$$

Cela se schématise de la façon suivante :



II . 5 - Notations particulières

L'ensemble des nombres réels auquel on enlève le nombre 0 est noté : $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
L'ensemble des nombres réels auquel on enlève le nombre a est noté : $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
De plus, on notera :

$$]-\infty;0] = \mathbb{R}_- \quad ; \quad]-\infty;0[= \mathbb{R}_-^* \quad ; \quad [0;+\infty[= \mathbb{R}_+ \quad ; \quad]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*.$$

Remarque 9

L'étoile est toujours en haut, tout comme les étoiles sont toujours en haut, dans le ciel... (poétique non ?)

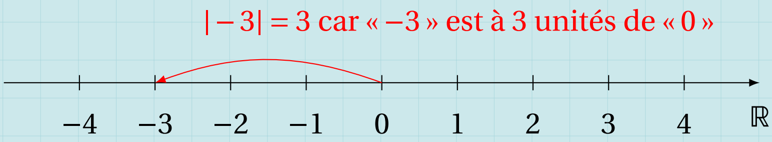
III - Valeur absolue d'un nombre réel

III . 1 - Définition

Définition 15

Soit a un nombre réel. On appelle **valeur absolue** de a la distance qui sépare a de 0 sur la droite des réels. On la note $|a|$.

Exemple 15



Remarque 10

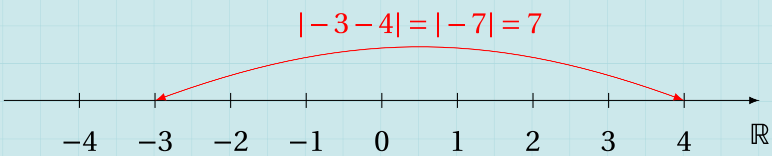
On a donc : $\begin{cases} |a| = a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$.

III . 2 - Distance entre deux nombres réels

Propriété 14

Soient a et b deux nombres réels.
La distance entre a et b est égale à $|a-b|$ (ou $|b-a|$, ce qui est la même chose).

Exemple 16



-3 et 4 sont distants de 7 unités car $|-3-4| = |-7| = 7$.

III . 3 - Résolution de l'équation $|x-a| \leqslant r$

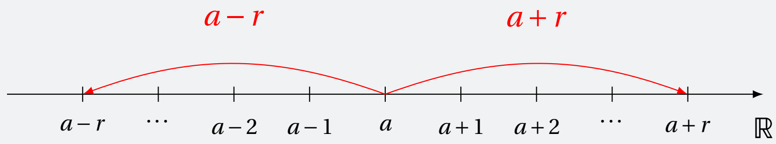
Propriété 15

Soient a et r deux nombres réels, avec $r > 0$.

$$|x-a| \leqslant r \iff x \in [a-r\,;a+r].$$

$$|x-a| < r \iff x \in]a-r\,;a+r[.$$

En effet, dire que $|x-a| \leqslant r$ signifie que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r :



Exemple 17

$$\begin{aligned}|x+5| \leqslant 3 &\iff |x-(-5)| \leqslant 3\\ &\iff x \in [-5-3\,;-5+3]\\ &\iff x \in [-8\,;-2].\end{aligned}$$

III . 4 - Encadrement décimal

Définition 16

Soient x un nombre réel et n un entier naturel.
Trouver un encadrement décimal de x à 10^{-n} près signifie trouver un intervalle $[a\,;b]$ tel que $|x-a| \leqslant 10^{-n}$ et $|x-b| \leqslant 10^{-n}$.

Exemple 18

1. Un encadrement de π à 10^{-2} près est :
$$3,14 \leqslant \pi \leqslant 3,15$$
car $|\pi - 3,14| \approx 0{,}0016 \leqslant 10^{-2}$ et $|\pi - 3,15| \approx 0{,}008 \leqslant 10^{-2}$.
2. Un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près est :
$$1,414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,415$$
car $|\sqrt{2} - 1,414| \approx 0{,}0002 \leqslant 10^{-3}$ et $|\sqrt{2} - 1,415| \approx 0{,}0008 \leqslant 10^{-3}$.

Remarque 11

Trouver un encadrement décimal à 10^{-n} près de la forme $[a\,;b]$ revient à écrire a et b sous la forme décimale avec n chiffres après la virgule.

Remarque 12

Quand on connaît une valeur approchée de x, pour obtenir un encadrement décimal à 10^{-n} près,

- a est la troncature de la partie décimale de x avec n chiffres après la virgule ;
- b est obtenu à partir de a en ajoutant « 1 » au dernier chiffre de la partie décimale.

Par exemple, pour $\pi \approx 3,14159\ldots$, pour un encadrement à 10^{-3}, on prend 3 chiffres après la virgule pour obtenir a ($a = 3,141$) et on ajoute 1 au dernier chiffre de la partie décimale de a pour obtenir b ($141 + 1 = 142$ donc $b = 3,142$). On obtient alors :
$$3,141 \leqslant \pi \leqslant 3,142.$$

IV - Racines carrées

IV . 1 - Définition

Définition 17

Soit x un nombre réel positif ou nul.
On dit que y est la **racine carrée** de x, et on écrit $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$, si $y^2 = x$ et $y \geqslant 0$.

Exemple 19

1. 3 est la racine carrée de 9 car $3^2 = 9$: $\sqrt{9} = 3$.
2. 10 est la racine carrée de 100 car $10^2 = 100$: $\sqrt{100} = 10$.

Remarque 13

$(-3)^2 = 9$ mais -3 n'est pas la racine carrée de 9 car la définition dit bien que la racine carrée d'un nombre est positive ou nulle ($y \geqslant 0$).

Propriété 16

Quel que soit le nombre réel a,

$$\sqrt{a^2} = |\,a\,|.$$

Exemple 20

1. $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.
2. $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$.
3. $\sqrt{7^2} = |7| = 7$.

IV . 2 - Règles de calculs

Propriété 17

Quels que soient les nombres réels a et b positifs ou nuls,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Démonstration 3

Nous avons d'une part :

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab\,;$$

d'autre part,

$$\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a\times b = ab.$$

Or, $\sqrt{ab}\geqslant 0$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\geqslant 0$ (*), donc :

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 \iff \sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}.$$

Remarque 14

Il fallait ici préciser les conditions (*) car dans un cas général, ce n'est pas parce que l'on a $x^2 = y^2$ que $x = y$.

Par exemple, $(-3)^2 = 3^2$. Les conditions de positivité sont donc ici nécessaires car si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors on peut dire que $x^2 = y^2$ implique que $x = y$.

Nous en dirons plus sur cela dans le chapitre qui traitera de la fonction carré.

Exemple 21

1. $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{75} = \sqrt{25\times 3} = \sqrt{25}\times\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Propriété 18

Quels que soient les nombres réels a et b positifs, avec $b \neq 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Démonstration 4

On a d'une part : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$; d'autre part, $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b}$.

Or, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \geqslant 0$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$ donc $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 22

1. $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \dfrac{5}{3}$.
2. $\sqrt{\dfrac{16}{36}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Attention 3

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer par exemple :

$$\begin{cases} \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ \sqrt{1}+\sqrt{4} = 1+2 = 3. \end{cases}$$

On voit alors que les deux résultats ne sont pas égaux.

Remarque 15

Le symbole du radical (c'est-à-dire le symbole « $\sqrt{}$ » est dû au mathématicien allemand Christoff Rudolff (1499 - 1545).
Dans l'écriture $\sqrt{a}$, « a » est appelé le *radicande*.

Simplifier un radical par décomposition en produit de facteurs premiers

Pour simplifier $\sqrt{17\,146\,080}$ (par exemple), on peut avant tout décomposer le radicande en produit de facteurs premiers :

- $17\,146\,080$ est divisible par 2 donc on commence par diviser par 2 :

$$\begin{array}{cccccccc|l}
1 & 7 & 1 & 4 & 6 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ \cline{9-9}
 & 1 & 1 & & & & & & 8\ 5\ 7\ 3\ 0\ 4\ 0 \\
 & & 1 & 4 & & & & & \\
 & & & 0 & 6 & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 8 & & \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

- Le quotient obtenu est encore divisible par 2 donc on continue :

$$\begin{array}{ccccccc|l}
8 & 5 & 7 & 3 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ \cline{8-8}
0 & 5 & & & & & & 4\ 2\ 8\ 6\ 5\ 2\ 0 \\
 & 1 & 7 & & & & & \\
 & & 1 & 3 & & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & & 0 & 4 & & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

- Le quotient est encore divisible par 2 donc on continue jusqu'à obtenir un quotient impair. On obtient alors :

$$17\,146\,080 = 2^5 \times 535\,815.$$

- 535 815 est divisible par 3 (car la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3) donc on divise par 3 :

$$\begin{array}{cccccc|cccccc}
5 & 3 & 5 & 8 & 1 & 5 & 3 \\ \cline{7-12}
2 & 3 & & & & & 1 & 7 & 8 & 6 & 0 & 5 \\
 & 2 & 5 & & & & \\
 & & 1 & 8 & & & \\
 & & & 0 & 1 & 5 & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

- Le quotient obtenu est encore divisible par 3 donc on continue jusqu'à obtenir un quotient non multiple de 3. On obtient alors :

$$535\,815 = 3^7 \times 245.$$

- On passe au nombre premier qui suit 3 : c'est 5. 245 est divisible par 5, et :

$$245 = 5 \times 49 = 5 \times 7^2.$$

- Finalement, le radicande s'écrit :

$$17\,146\,080 = 2^5 \times 3^7 \times 5 \times 7^2.$$

Comme nous souhaitons simplifier une racine carrée, seuls les exposants pairs nous intéressent; on écrit donc :

$$17\,146\,080 = 2^4 \times 2 \times 3^6 \times 3 \times 5 \times 7^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sqrt{17\,146\,080} &= \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^6} \times \sqrt{7^2} \times \sqrt{2 \times 3 \times 5} \\
&= 2^2 \times 3^3 \times 7^1 \times \sqrt{30} \\
&= \underline{756\sqrt{30}}.
\end{aligned}$$

V - Raisonnement par l'absurde

Définition 18

Un **raisonnement par l'absurde** est un raisonnement dans lequel on part d'une donnée contraire à ce que l'on veut démontrer afin d'arriver à une contradiction mathématique.

V . 1 - $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

On considère la propriété :

$$(\text{P}) \quad : \quad \text{« } \frac{1}{3} \text{ n'est pas décimal ».}$$

- **Étape 1 : on suppose que le contraire de (P) est vraie.**

  On suppose alors que $\dfrac{1}{3}$ est décimal.

- **Étape 2 : on exploite cette supposition pour arriver à une absurdité.**
  Si $\frac{1}{3}$ est décimal alors, par définition d'un nombre décimal,
  $$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}, \quad \text{où } a \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$$
  car $0 < \frac{1}{3} < 1$.
  Ainsi, les produits en croix sont égaux :
  $$1 \times 10^n = 3 \times a \qquad \text{soit} \qquad 10^n = 3a.$$
  Ce qui signifie que 10^n est un multiple de 3, ce qui n'est pas le cas car un nombre est multiple de 3 uniquement si la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3.

  Or, $10^n = 1000\ldots$ donc la somme des chiffres de $10^n = 1$, qui n'est pas un multiple de 3.
- **Étape 3 : conclusion.**
  Supposer que $\frac{1}{3}$ est un décimal implique que 10^n est un multiple de 3, ce qui est absurde.
  Par conséquent, $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

V . 2 - $\sqrt{2}$ est irrationnel

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, il existe deux nombres p et q premiers entre eux tels que :
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$
Ainsi, en élevant au carré, on a :
$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad 2 = \frac{p^2}{q^2}.$$
Donc,
$$p^2 = 2q^2.$$
p^2 est donc un nombre pair, ce qui signifie que p est aussi un nombre pair (en effet, si p était impair, en l'élevant au carré, on obtiendrait encore un nombre impair).
Donc :
$$p = 2k.$$
Alors,
$$(2k)^2 = 2q^2 \qquad \text{soit} \qquad 4k^2 = 2q^2.$$
En divisant par 2 à droite et à gauche du signe « = », on obtient :
$$2k^2 = q^2.$$
Cela signifie que q^2 est pair, et donc que q est aussi pair.

On arrive alors au fait que p et q sont tous les deux pairs, ce qui est impossible car on a supposé que p et q étaient premiers entre eux.

Ainsi, $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$; $\sqrt{2}$ n'est donc pas rationnel.

Ensembles, intervalles

Exercice 2.1 (appartenance à un ensemble)

À quel ensemble les nombres suivants appartiennent-ils? Donner le plus petit ensemble possible.

1. $\sqrt{\pi}$
2. $\dfrac{7}{4}$
3. $\sqrt{(-5)^2}$
4. $\dfrac{1}{\pi}$
5. $\dfrac{5}{3}$
6. π^2
7. $\sqrt{3^2+4^2}$
8. $-\dfrac{48}{4}$
9. $\dfrac{7}{10^8}$
10. $\dfrac{7}{6}$

Solution page 43

Exercice 2.2 (appartenance à un intervalle)

Compléter les affirmations suivantes avec l'un des symboles : $\in$ ou $\notin$.

1. $\dfrac{1}{3}\ldots\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$
2. $\dfrac{7}{5}\ldots[0;1]$
3. $\dfrac{8}{9}\ldots[0;1]$
4. $-\dfrac{9}{7}\ldots[-2;-1]$
5. $\dfrac{9}{4}\ldots[2;3]$
6. $\dfrac{8}{5}\ldots]1,6;1,7[$
7. $\dfrac{1}{\pi}\ldots[\pi;\pi+1]$
8. $\dfrac{15}{14}\ldots[1,06;1,07]$
9. $-\dfrac{20}{21}\ldots[-1;-0,9]$
10. $-\dfrac{78}{79}\ldots]-0,99;-0,98[$

Solution page 43

Exercice 2.3 (encadrement)

Donner un encadrement décimal des nombres suivants à 10^{-n}.

1. π^2, $n=4$
2. $\sqrt{3}$, $n=3$
3. $\sqrt{5}$, $n=5$
4. $\dfrac{1}{\pi}$, $n=1$
5. $\sqrt{7}+\sqrt{11}$, $n=0$
6. $\dfrac{2}{3}$, $n=2$
7. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $n=4$
8. $-\dfrac{7}{11}$, $n=5$

Solution page 44

Exercice 2.4 (0,999... = 1)

On pose $x=0,999\ldots$.

1. Justifier que $10x=9+x$.
2. En déduire que $x=1$.

Solution page 44

Exercice 2.5 (trouver l'écriture rationnelle d'un nombre décimal)

On pose $x = 0{,}718\,718\,718\ldots$.

1. Justifier que $1\,000x = 718 + x$.
2. En déduire l'écriture rationnelle de x.

Solution page 44

Valeurs absolue

Exercice 2.6 (exprimer sans valeur absolue)

Exprimer sans valeur absolue les nombres suivants :

1. $|\pi - 3|$
2. $|2\pi + 7|$
3. $|7 - 3\pi|$
4. $|\pi - 4|$

Solution page 45

Exercice 2.7 (exprimer sans valeur absolue)

Exprimer sans valeur absolue les nombres suivants :

1. $|\pi^2 - \pi|$
2. $|2\pi - \pi^2|$
3. $\left|7 - \frac{1}{7}\right|$
4. $\left|\pi - \frac{1}{4}\right|$

Solution page 45

Exercice 2.8 (exprimer sans valeur absolue)

Calculer :

1. $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right|$
2. $\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right|$
3. $\left|\frac{2}{7} - \frac{7}{2}\right|$
4. $\left|\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right|$

Solution page 45

Exercice 2.9 (exprimer sans valeur absolue)

Calculer :

1. $|\sqrt{2} - 4|$
2. $|2\sqrt{3} - \pi|$
3. $\left|\frac{2}{7} - \sqrt{7}\right|$
4. $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

Solution page 45

Exercice 2.10 (exprimer sans valeur absolue)

Exprimer sans valeur absolue les nombres suivants :

1. $|x+4|$, où $x \in [-10;-5]$.
2. $|8-x|$, où $x \in [2;7]$.
3. $|2x-3|$, où $x \in]2;5[$.
4. $|7-5x|$, où $x \in [5;7]$

Solution page 46

Exercice 2.11 (équation et inéquations)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-3| = 7$
2. $|x+4| < 5$
3. $|x-6| \geqslant 2$

Solution page 46

Exercice 2.12 (équation et inéquations)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+8| = -1$
2. $|x-1| \leqslant 1$
3. $|x+2| > 2$

Solution page 47

Exercice 2.13 (équation et inéquations)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-7| = 3$
2. $|x-4| \leqslant 8$
3. $|x+7| \geqslant 3$

Solution page 47

Exercice 2.14 (équations et inéquation)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-\pi| = 2\pi$
2. $|x-4| = \pi$
3. $|x+1| > 2\pi$

Solution page 47

Exercice 2.15 (inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|x-8| \leqslant 3$
2. $|x-7| < 7$
3. $|x+4| \leqslant 4$
4. $|2x-8| \leqslant 10$
5. $|3x+9| < 12$
6. $|7x-21| < 14$

Solution page 48

Racines carrées

Exercice 2.16 (calculs simples)

Compléter les égalités suivantes :

$\sqrt{1} = \ldots$	$\sqrt{4} = \ldots$	$\sqrt{9} = \ldots$	$\sqrt{36} = \ldots$	$\sqrt{25} = \ldots$
$\sqrt{16} = \ldots$	$\sqrt{81} = \ldots$	$\sqrt{100} = \ldots$	$\sqrt{49} = \ldots$	$\sqrt{64} = \ldots$

Solution page 48

Exercice 2.17 (simplifications)

Simplifier au maximum les racines carrées suivantes :

1. $\sqrt{175}$
2. $\sqrt{117}$
3. $\sqrt{48}$
4. $\sqrt{98}$
5. $\sqrt{44}$
6. $\sqrt{500}$

Solution page 49

Exercice 2.18 (simplifications)

Simplifier les radicaux suivants de sorte que les résultats finaux soient sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$.

1. $\sqrt{\dfrac{50}{49}}$
2. $\sqrt{\dfrac{75}{36}}$
3. $\sqrt{\dfrac{128}{25}}$
4. $\sqrt{\dfrac{48}{735}}$
5. $\sqrt{\dfrac{343}{448}}$
6. $\sqrt{\dfrac{320}{150}}$
7. $\sqrt{\dfrac{114}{78}}$
8. $\sqrt{\dfrac{1\,575}{224}}$

Solution page 49

Exercice 2.19 (développements)

Développer les expressions suivantes de sorte à obtenir une expression de la forme $a + b\sqrt{n}$, où a et b sont deux entiers relatifs, et n un entier naturel.

1. $(5+\sqrt{3})^2$
2. $(7-\sqrt{2})^2$
3. $(-1+2\sqrt{7})^2$
4. $(-3-4\sqrt{2})^2$

Solution page 50

Exercice 2.20 (expressions conjuguées)

On appelle *expression conjuguée* de $a + b\sqrt{n}$ le nombre $a - b\sqrt{n}$.
En utilisant l'expression conjuguée du dénominateur, écrire les fractions suivantes de sorte qu'il n'y ait plus de racine carrée au dénominateur.

1. $\dfrac{5}{1+\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{8}{3-\sqrt{7}}$
3. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
4. $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

Solution page 50

Exercice 2.21 (écritures plus simples)

1 **a.** Écrire $\left(7-3\sqrt{2}\right)^2$ sous la forme $a+b\sqrt{2}$, où a et b sont deux entiers.

b. Quel est le signe de $7-3\sqrt{2}$?

c. En déduire une autre écriture du nombre $\sqrt{67-42\sqrt{2}}$.

2 **a.** Écrire $\left(1-5\sqrt{3}\right)^2$ sous la forme $a+b\sqrt{2}$, où a et b sont deux entiers.

b. Quel est le signe de $1-5\sqrt{3}$?

c. En déduire une autre écriture du nombre $\sqrt{76-10\sqrt{3}}$.

Solution page 52

Exercice 2.22 (simplifications)

Décomposer en produit de facteurs premiers les radicandes des racines carrées suivantes (c'est-à-dire les nombres sous la racine carrée), puis en déduire leur écriture simplifiée.

1 $\sqrt{392}$

2 $\sqrt{4608}$

3 $\sqrt{8820}$

4 $\sqrt{111132}$

5 $\sqrt{6272}$

6 $\sqrt{13552}$

7 $\sqrt{5010005}$

8 $\sqrt{27783}$

9 $\sqrt{226800}$

Solution page 53

Union et intersections d'intervalles

Exercice 2.23

Pour chacun des intervalles I et J suivants, décrire $\mathrm{I}\cap\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}\cup\mathrm{J}$ de la manière la plus simple possible.

1 $\mathrm{I}=]-3;7]$ et $\mathrm{J}=[-1;+\infty[$

2 $\mathrm{I}=]-\infty;4[$ et $\mathrm{J}=[4;10]$

3 $\mathrm{I}=[-10;2]$ et $\mathrm{J}=[-3;7]$

4 $\mathrm{I}=]-\infty;3]$ et $\mathrm{J}=[-6;+\infty[$

5 $\mathrm{I}=[7;+\infty[$ et $\mathrm{J}=[-5;+\infty[$

6 $\mathrm{I}=]3;18]$ et $\mathrm{J}=]17;20]$

7 $\mathrm{I}=[-3;0]$ et $\mathrm{J}=[-1;+\infty[$

8 $\mathrm{I}=[-2;0[$ et $\mathrm{J}=[0;+\infty[$

9 $\mathrm{I}=]7;18[$ et $\mathrm{J}=[10;+\infty[$

10 $\mathrm{I}=]-4;2[$ et $\mathrm{J}=[2;5]$

11 $\mathrm{I}=]-4;2[$ et $\mathrm{J}=]2;5]$

12 $\mathrm{I}=[-3;+\infty[$ et $\mathrm{J}=]-5;+\infty[$

Solution page 53

Corrigé de l'exercice 2.1 page 38

1 $\sqrt{\pi} \in \mathbb{R}$ car il ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$; il n'est donc pas rationnel.

2 $\frac{7}{4} = 7 \div 4 = 1,75$; sa partie décimale est finie donc $\frac{7}{4} \in \mathbb{D}$.

3 $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$.

4 $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$ (quand on voit π dans un calcul, en général, le nombre est irrationnel, donc réel).

5 $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{5}{3} \notin \mathbb{D}$ (en effet, $5 \div 3 \approx 1,666\ldots$ donc sa partie décimale est infinie ; il n'est donc pas décimal).

6 $\pi^2 \in \mathbb{R}$.

7 $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$.

8 $-\frac{48}{4} = -48 \div 4 = -12 \in \mathbb{Z}$.

9 $\frac{7}{10^8} \in \mathbb{D}$ car il s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$.

10 $\frac{7}{6}$ n'est pas simplifiable (car 7 et 6 n'ont pas de facteurs communs) donc $\frac{7}{6} \in \mathbb{Q}$.

Corrigé de l'exercice 2.2 page 38

1 $\frac{1}{3} \in \left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$ car $\frac{1}{3} \approx 0,333\ldots$

2 $\frac{7}{5} \notin [0\,;1]$ car $\frac{7}{5} = 1,4$.

3 $\frac{8}{9} \in [0\,;1]$ car $0 < 8 < 9$.

4 $-\frac{9}{7} \in [-2\,;-1]$ car $-\frac{9}{7} \approx -1,2857\ldots$

5 $\frac{9}{4} \in [2\,;3]$ car $\frac{9}{4} = 2,25$.

6 $\frac{8}{5} \notin]1,6\,;1,7[$ car $\frac{8}{5} = 1,6$ (attention aux crochets ouverts !)

7 $\frac{1}{\pi} \notin [\pi\,;\pi+1]$ car $0 < \frac{1}{\pi} < 1$ et $\pi > 1$.

8 $\frac{15}{14} \notin [1,06\,;1,07]$ car $\frac{15}{14} \approx 1,0714\ldots$

9 $-\frac{20}{21} \in [-1\,;-0,9]$ car $-\frac{20}{21} \approx -0,95\ldots$

10 $-\frac{78}{79} \in]-0,99\,;-0,98[$ car $-\frac{78}{79} \approx -0,987\ldots$

Corrigé de l'exercice 2.3 page 38

1 $\pi^2 \approx 9,86960440109$ donc $9,8696 < \pi^2 < 9,8697$.

2 $\sqrt{3} \approx 1,73205080757$ donc $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

3 $\sqrt{5} \approx 2,2360679775$ donc $2,23606 < \sqrt{5} < 2,23607$.

4 $\dfrac{1}{\pi} \approx 0,318309886184$ donc $0,3 < \dfrac{1}{\pi} < 0,4$.

5 $\sqrt{7}+\sqrt{11} \approx 5,96237610142$ donc $5 < \sqrt{7}+\sqrt{11} < 6$.

6 $\dfrac{2}{3} \approx 0,666\ldots$ donc $0,66 < \dfrac{2}{3} < 0,67$.

7 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0,816496580928$ donc $0,8164 < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 0,8165$.

8 $-\dfrac{7}{11} \approx -0,636363636364$ donc $-0,63637 < -\dfrac{7}{11} < -0,63636$.

Corrigé de l'exercice 2.4 page 38

1 $x = 0,999\ldots$ donc :
$$\begin{aligned} 10x &= 10 \times 0,999\ldots \\ &= 9,999\ldots \\ &= 9 + 0,999\ldots \\ 10x &= 9 + x \end{aligned}$$

2 De l'égalité $10x = 9 + x$ on déduit : $10x - x = 9$, soit : $9x = 9$. En divisant par 9 de part et d'autre du signe « = » :
$$x = \frac{9}{9} = 1.$$
On déduit donc que :
$$0,999\ldots = 1.$$

Remarque 23

il n'est pas rare de voir un nombre avec différentes écritures. Par exemple, $1 = \sqrt{1}$.

Corrigé de l'exercice 2.5 page 39

1
$$\begin{aligned} & x = 0,718\,718\,718\ldots \\ \Longleftrightarrow\ & 1\,000x = 1\,000 \times 0,718\,718\,718\ldots \\ \Longleftrightarrow\ & 1\,000x = 718,718\,718\,718\ldots \\ \Longleftrightarrow\ & 1\,000x = 718 + 0,718\,718\,718\ldots \\ \Longleftrightarrow\ & 1\,000x = 718 + x \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} & 1\,000x = 718 + x \Longleftrightarrow 1\,000x - x = 718 \\ \Longleftrightarrow\ & 999x = 718 \\ \Longleftrightarrow\ & x = \frac{718}{999}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.6 page 39

1 $\pi \approx 3,14$ donc $\pi > 3$; ainsi, $\pi - 3 > 0$ et donc $\underline{|\pi - 3| = \pi - 3}$.

2 $2\pi + 7 > 0$ donc $\underline{|2\pi + 7| = 2\pi + 7}$.

3 $3\pi \approx 10$ donc $7 - 3\pi < 0$. Ainsi, $|7 - 3\pi| = -(7 - 3\pi)$, c'est-à-dire $\underline{|7 - 3\pi| = 3\pi - 7}$.

4 $\pi \approx 3,14$ donc $|\pi - 4| - 4 < 0$. Ainsi, $\underline{|\pi - 4| = 4 - \pi}$.

Corrigé de l'exercice 2.7 page 39

1 $\pi^2 > \pi$ donc $\underline{|\pi^2 - \pi| = \pi^2 - \pi}$.

2 $\pi^2 > 2\pi$ donc $|2\pi - \pi^2| = -(2\pi - \pi^2)$, c'est-à-dire $\underline{|2\pi - \pi^2| = \pi^2 - 2\pi}$.

3 $7 > \dfrac{1}{7}$ donc $7 - \dfrac{1}{7} > 0$. Ainsi, $\underline{\left|7 - \dfrac{1}{7}\right| = 7 - \dfrac{1}{7}}$. Il n'était pas demandé de *calculer*, mais nous aurions pu aussi écrire : $\left|7 - \dfrac{1}{7}\right| = 7 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{49}{7} - \dfrac{1}{7} = \boxed{\dfrac{48}{7}}$.

4 $\pi > \dfrac{1}{4}$ donc $\pi - \dfrac{1}{4} > 0$. Ainsi, $\underline{\left|\pi - \dfrac{1}{4}\right| = \pi - \dfrac{1}{4}}$.

Corrigé de l'exercice 2.8 page 39

1
$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right| = \left|\frac{1}{6}\right|$$
$$\boxed{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6}}$$

2
$$\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3}{15} - \frac{5}{15}\right| = \left|-\frac{2}{15}\right|$$
$$\boxed{\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{15}}$$

3
$$\left|\frac{2}{7} - \frac{7}{2}\right| = \left|\frac{4}{14} - \frac{49}{14}\right| = \left|-\frac{45}{14}\right|$$
$$\boxed{\left|\frac{2}{7} - \frac{7}{2}\right| = \frac{45}{14}}$$

4
$$\left|\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{10}{15} - \frac{6}{15}\right| = \left|\frac{4}{15}\right|$$
$$\boxed{\left|\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right| = \frac{4}{15}}$$

Corrigé de l'exercice 2.9 page 39

1 $\sqrt{2} < 4$ donc $\sqrt{2} - 4 < 0$. Ainsi, $\left|\sqrt{2} - 4\right| = -(\sqrt{2} - 4)$, soit $\underline{\left|\sqrt{2} - 4\right| = 4 - \sqrt{2}}$.

2 $2\sqrt{3} \approx 2 \times 1,732 \approx 3,4$ donc $2\sqrt{3} > \pi$ et donc $2\sqrt{3} - \pi > 0$. Ainsi, $\underline{\left|2\sqrt{3} - \pi\right| = 2\sqrt{3} - \pi}$.

3 $\sqrt{7} \approx 2,6$ et $\dfrac{2}{7} < 1$ donc $\dfrac{2}{7} < \sqrt{7}$, d'où $\dfrac{2}{7} - \sqrt{7} < 0$. Ainsi, $\left|\dfrac{2}{7} - \sqrt{7}\right| = -\left(\dfrac{2}{7} - \pi\right)$, c'est-à-dire $\underline{\left|\dfrac{2}{7} - \sqrt{7}\right| = \sqrt{7} - \dfrac{2}{7}}$.

4 $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ donc $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$. Ainsi, $\underline{\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

Corrigé de l'exercice 2.10 page 40

1 $x \in [-10;-5]$ donc $x < -4$, d'où $x+4<0$. Ainsi, $\underline{|x+4| = -(x+4)}$ ou encore $\underline{|x+4| = -x-4}$.

2 $x \in [2;7]$ donc $x<8$, d'où $8-x>0$. Ainsi, $\underline{|8-x| = 8-x}$.

3 $x \in [2;5]$ donc $2<x<5$. En multipliant par 2, on obtient :

$$4 < 2x < 10$$

et en soustrayant 3, on arrive a :

$$4-3 < 2x-3 < 10-3$$

c'est-à-dire :

$$1 < 2x-3 < 7.$$

Ainsi, $2x-3>0$ et donc $\underline{|2x-3| = 2x-3}$.

4
$$\begin{aligned} x \in [5;7] &\iff 5 \leqslant x \leqslant 7 \\ &\iff -5\times 7 \leqslant -5x \leqslant -5\times 5 \\ &\iff -35 \leqslant -5x \leqslant -25 \\ &\iff -35+7 \leqslant -5x+7 \leqslant -25+7 \\ &\iff -28 \leqslant 7-5x \leqslant -18 \end{aligned}$$
Ainsi, $7-5x<0$ et donc $|7-5x| = -(7-5x)$, soit $\underline{|7-5x| = 5x-7}$.

Corrigé de l'exercice 2.11 page 40

1
$$\begin{aligned} |x-3| = 7 &\iff x-3=7 \quad \text{ou} \quad x-3=-7 \\ &\iff x=10 \quad \text{ou} \quad x=-4 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{S=\{-4;10\}}$

2
$$\begin{aligned} |x+4| < 5 &\iff x+4<5 \quad \text{ou} \quad -(x+4)<5 \\ &\iff x<5-4 \quad \text{ou} \quad x+4>-5 \\ &\iff x<1 \quad \text{ou} \quad x>-9 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{S =]-9;1[}$

Remarque 24

On pourrait aussi résoudre cette inéquation en disant que $|x+4| = |x-(-4)|$ représente la distance entre x et -4. Donc $|x+4| < 5$ signifie que la distance entre x et -4 est strictement inférieure à 5, ce qui signifie que x est compris entre $-4-5$ et $-4+5$, c'est-à-dire entre -9 et 1.

3
$$\begin{aligned} |x-6| \geqslant 2 &\iff x-6 \geqslant 2 \quad \text{ou} \quad -(x-6) \geqslant 2 \\ &\iff x \geqslant 2+6 \quad \text{ou} \quad x-6 \leqslant -2 \\ &\iff x \geqslant 8 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 4 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{S =]-\infty;4] \cup [8;+\infty[}$

Remarque 25

$|x-6| \geqslant 2$ signifie que la distance entre x et 6 doit être supérieure ou égale à 2 et donc que x doit être supérieur ou égal à $6+2$ (donc à 8) ou inférieur ou égal à $6-2$ (donc à 4).

Corrigé de l'exercice 2.12 page 40

1 $|x+8| = -1$ est impossible car une valeur absolue est toujours positives ou nulle. Ainsi, $\underline{S = \varnothing}$ (ensemble vide).

2
$$\begin{aligned} |x-1| \leqslant 1 &\iff x-1 \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad -(x-1) \leqslant 1 \\ &\iff x \leqslant 1+1 \quad \text{ou} \quad x-1 \geqslant -1 \\ &\iff x \leqslant 2 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = [0\,;2]}$

3
$$\begin{aligned} |x+2| > 2 &\iff x+2 > 2 \quad \text{ou} \quad -(x+2) > 2 \\ &\iff x > 2-2 \quad \text{ou} \quad x+2 < -2 \\ &\iff x > 0 \quad \text{ou} \quad x < -4 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{S =]-\infty\,;-4[\,\cup\,]0\,;+\infty[}$

Corrigé de l'exercice 2.13 page 40

1
$$\begin{aligned} |x-7| = 3 &\iff x-7 = 3 \quad \text{ou} \quad -(x-7) = 3 \\ &\iff x = 3+7 \quad \text{ou} \quad x-7 = -3 \\ &\iff x = 10 \quad \text{ou} \quad x = 4 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{S = \{4\,;10\}}$

2
$$\begin{aligned} |x-4| \leqslant 8 &\iff x-4 \leqslant 8 \quad \text{ou} \quad -(x-4) \leqslant 8 \\ &\iff x \leqslant 8+4 \quad \text{ou} \quad x-4 \geqslant -8 \\ &\iff x \leqslant 12 \quad \text{ou} \quad x \geqslant -4 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = [-4\,;12]}$

3
$$\begin{aligned} |x+7| \geqslant 3 &\iff x+7 \geqslant 3 \quad \text{ou} \quad -(x+7) \geqslant 3 \\ &\iff x \geqslant 3-7 \quad \text{ou} \quad x+7 \leqslant -3 \\ &\iff x \geqslant -4 \quad \text{ou} \quad x \leqslant -10 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{S =]-\infty\,;-10]\cup[-4\,;+\infty[}$

Corrigé de l'exercice 2.14 page 40

1
$$\begin{aligned} |x-\pi| = 2\pi &\iff x-\pi = 2\pi \quad \text{ou} \quad -(x-\pi) = 2\pi \\ &\iff x = 2\pi+\pi \quad \text{ou} \quad x-\pi = -2\pi \\ &\iff x = 3\pi \quad \text{ou} \quad x = -\pi. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S = \{-\pi\,;3\pi\}}$

2 $|x-4| = \pi \iff x-4=\pi$ ou $-(x-4)=\pi$

$\iff x=\pi+4$ ou $x-4=-\pi$

$\iff x=\pi+4$ ou $x=-\pi+4$

Donc $\boxed{S=\{4-\pi;4+\pi\}}$

3 $|x+1| > 2\pi \iff x+1>2\pi$ ou $-(x+1)>2\pi$

$\iff x>2\pi-1$ ou $x+1<-2\pi$

$\iff x>2\pi-1$ ou $x<-2\pi-1$

Ainsi, $\boxed{S=]-\infty;-2\pi-1[\cup]2\pi-1;+\infty[}$

Corrigé de l'exercice 2.15 page 40

1 $|x-8| \leqslant 3 \iff x\in[8-3;8+3] \iff \underline{x\in[5;11]}$.

2 $|x-7| < 7 \iff x\in]7-7;7+7[\iff \underline{x\in]0;14[}$.

3 $|x+4| \leqslant 4 \iff |x-(-4)| \leqslant 4$

$\iff x\in[-4-4;-4+4]$

$\iff \underline{x\in[-8;0]}$.

4 $|2x-8| \leqslant 10 \iff |2(x-4)| \leqslant 10$

$\iff 2|x-4| \leqslant 10$

$\iff |x-4| \leqslant 5$

$\iff x\in[4-5;4+5]$

$\iff \underline{x\in[-1;9]}$.

5 $|3x+9| < 12 \iff |3(x+3)| < 12$

$\iff 3|x+3| < 12$

$\iff |x+3| < 4$

$\iff |x-(-3)| < 4$

$\iff x\in]-3-4;-3+4[$

$\iff \underline{x\in]-7;1[}$.

6 $|7x-21| < 14 \iff 7|x-3| < 14$

$\iff |x-3| < 2$

$\iff x\in]3-2;3+2[$

$\iff \underline{x\in]1;5[}$.

Corrigé de l'exercice 2.16 page 41

$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{25}=25$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{64}=8$

Remarque 26

Il est très important de connaître ces valeurs.

Corrigé de l'exercice 2.17 page 41

1 $\sqrt{175} = \sqrt{25 \times 7} = \sqrt{25} \times \sqrt{7} = \underline{5\sqrt{7}}$.

2 $\sqrt{117} = \sqrt{9 \times 13} = \sqrt{9} \times \sqrt{13} = \underline{3\sqrt{13}}$.

3 $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = \underline{4\sqrt{3}}$.

4 $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = \underline{7\sqrt{2}}$.

5 $\sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = \sqrt{4} \times \sqrt{11} = \underline{2\sqrt{11}}$.

6 $\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{100} \times \sqrt{5} = \underline{10\sqrt{5}}$.

Corrigé de l'exercice 2.18 page 41

1 $\sqrt{\dfrac{50}{49}} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{25 \times 2}}{7} = \boxed{\dfrac{5}{7}\sqrt{2}}$.

2 $\sqrt{\dfrac{75}{36}} = \dfrac{\sqrt{25 \times 3}}{\sqrt{36}} = \boxed{\dfrac{5}{6}\sqrt{3}}$.

3 $\sqrt{\dfrac{128}{25}} = \dfrac{\sqrt{64 \times 2}}{\sqrt{25}} = \boxed{\dfrac{8}{5}\sqrt{2}}$.

4 $\sqrt{\dfrac{48}{735}} = \dfrac{\sqrt{16 \times 3}}{\sqrt{49 \times 15}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7\sqrt{15}}$.

On ne peut pas s'arrêter à ce dernier résultat car il n'est pas sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$.

Remarque 27

Quand on a un radical au dénominateur d'une fraction, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par ce radical afin d'avoir un nombre entier au dénominateur.

On a donc :

$$\sqrt{\frac{48}{735}} = \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{15}}{7\sqrt{15} \times \sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{45}}{7 \times 15} = \frac{4\sqrt{9 \times 5}}{7 \times 3 \times 5} = \frac{4 \times \cancel{3}\sqrt{5}}{7 \times \cancel{3} \times 5} = \boxed{\frac{4\sqrt{5}}{35}}$$

Remarque 28

On peut aussi simplifier le radicande avant de simplifier le radical :

$$\sqrt{\frac{48}{735}} = \sqrt{\frac{\cancel{3} \times 16}{\cancel{3} \times 245}} = \frac{4}{7\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{35}.$$

5 $\sqrt{\dfrac{343}{448}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{7} \times 49}{\cancel{7} \times 64}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \boxed{\dfrac{7}{8}}$.

6 $\sqrt{\dfrac{320}{150}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{10} \times 32}{\cancel{10} \times 15}} = \dfrac{\sqrt{16 \times 2}}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \boxed{\dfrac{4}{15}\sqrt{30}}$.

7 $\sqrt{\dfrac{114}{78}} = \sqrt{\dfrac{19}{13}} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{13}} \times \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \boxed{\dfrac{1}{13}\sqrt{247}}.$

8 $\sqrt{\dfrac{1575}{224}} = \sqrt{\dfrac{9\times 25\times \cancel{7}}{16\times \cancel{7}\times 2}} = \dfrac{3\times 5}{4\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{15}{8}\sqrt{2}}.$

Corrigé de l'exercice 2.19 page 41

Pour cet exercice, il faut se souvenir des identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{et} \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

1 $\begin{aligned}(5+\sqrt{3})^2 &= 5^2 + 2\times 5\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2\\ &= 25 + 10\sqrt{3} + 3\\ &= \underline{28 + 10\sqrt{3}}.\end{aligned}$

2 $\begin{aligned}(7-\sqrt{2})^2 &= 7^2 - 2\times 7\times\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2\\ &= 49 - 14\sqrt{2} + 2\\ &= \underline{51 - 14\sqrt{2}}.\end{aligned}$

3 $\begin{aligned}(-1+2\sqrt{7})^2 &= (-1)^2 + 2\times(-1)\times 2\sqrt{7} + (2\sqrt{7})^2\\ &= 1 - 4\sqrt{7} + 2^2(\sqrt{7})^2\\ &= 1 - 4\sqrt{7} + 4\times 7\\ &= 1 - 4\sqrt{7} + 28\\ &= \underline{29 - 4\sqrt{7}}\end{aligned}$

4 $\begin{aligned}(-3-4\sqrt{2})^2 &= [(-1)(3+4\sqrt{2})]^2\\ &= (-1)^2(3+4\sqrt{2})^2\\ &= (3+4\sqrt{2})^2\\ &= 3^2 + 2\times 3\times 4\sqrt{2} + (4\sqrt{2})^2\\ &= 9 + 24\sqrt{2} + 4^2(\sqrt{2})^2\\ &= 9 + 24\sqrt{2} + 16\times 2\end{aligned}$

$= 9 + 24\sqrt{2} + 32$

$= \underline{41 + 24\sqrt{2}}.$

Corrigé de l'exercice 2.20 page 41

1 $\begin{aligned}\dfrac{5}{1+\sqrt{2}} &= \dfrac{5(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \dfrac{5(1-\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{5(1-\sqrt{2})}{1-2}\\ &= \dfrac{5(1-\sqrt{2})}{-1} = \boxed{-5(1-\sqrt{2})}.\end{aligned}$

Remarque 29

L'intérêt de multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction par l'expression conjuguée de son dénominateur est de faire apparaître en bas (au dénominateur) une identité de la forme $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, qui supprime la racine carrée (en élevant au carré), rendant ainsi le dénominateur entier.

2
$$\begin{aligned}\frac{8}{3-\sqrt{7}} &= \frac{8\left(3+\sqrt{7}\right)}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)}\\ &= \frac{8\left(3+\sqrt{7}\right)}{3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}\\ &= \frac{8\left(3+\sqrt{7}\right)}{9-7}\\ &= \frac{8\left(3+\sqrt{7}\right)}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{8}{3-\sqrt{7}} = 4\left(3+\sqrt{7}\right)}$$

3
$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{1-3}\\ &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{-2}\\ &= \frac{1^2-2\times 1\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{-2}\\ &= \frac{1-2\sqrt{3}+3}{-2}\\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{-2}\\ &= \frac{-2(-2+\sqrt{3})}{-2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -2+\sqrt{3}}$$

4
$$\begin{aligned}\frac{5+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} &= \frac{\left(5+2\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}\\ &= \frac{5\times 3+5\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times 3+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \frac{15+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4)}{9-2} = \boxed{\frac{19+11\sqrt{2}}{7}}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.21 page 42

1 **a.** Pour développer $\left(7-3\sqrt{2}\right)^2$, on utilise l'identité remarquable :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

en prenant $a = 7$ et $b = 3\sqrt{2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left(7-3\sqrt{2}\right)^2 &= 7^2 - 2\times 7\times 3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2\\ &= 49 - 42\sqrt{2} + 3^2\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= 49 - 42\sqrt{2} + 9\times 2\\ &= 49 - 42\sqrt{2} + 18\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(7-3\sqrt{2}\right)^2 = 67 - 42\sqrt{2}}$$

b. On cherche à trouver le signe de $7-3\sqrt{2}$.
On sait que $2 < 4$ donc $\sqrt{2} < \sqrt{4}$, c'est-à-dire $\sqrt{2} < 2$. En multipliant par -3, on obtient :

$$-3\sqrt{2} > -3\times 2 \qquad \text{soit} \qquad -3\sqrt{2} > -6$$

et en ajoutant 7, on arrive à :

$$7-3\sqrt{2} > 1$$

donc $7-3\sqrt{2} > 0$.

c. Du calcul de la question a., on déduit :

$$\sqrt{\left(7-3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{67-42\sqrt{2}}$$

Or, $7-3\sqrt{2} > 0$ donc $\sqrt{\left(7-3\sqrt{2}\right)^2} = 7-3\sqrt{2}$.
Finalement, on obtient :

$$\boxed{\sqrt{67-42\sqrt{2}} = 7-3\sqrt{2}}$$

2 **a.** On a :

$$\begin{aligned}\left(1-5\sqrt{3}\right)^2 &= 1^2 - 2\times 1\times 5\sqrt{3} + \left(5\sqrt{3}\right)^2\\ &= 1 - 10\sqrt{3} + 25\times 3\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(1-5\sqrt{3}\right)^2 = 76 - 10\sqrt{3}}$$

b. Il est assez flagrant que $5\sqrt{3} > 1$ donc $1-5\sqrt{3} < 0$.

c. De la question a., on déduit :

$$\sqrt{\left(1-5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{76-10\sqrt{3}}$$

Or, $1-5\sqrt{3} < 0$ donc $\sqrt{\left(1-5\sqrt{3}\right)^2} = \left|1-5\sqrt{3}\right| = 5\sqrt{3}-1$. Ainsi,

$$\boxed{5\sqrt{3}-1 = \sqrt{76-10\sqrt{3}}}$$

Corrigé de l'exercice 2.22 page 42

1 $\sqrt{392}=\sqrt{2^2\times7^2\times2}=2\times7\times\sqrt{2}=\underline{14\sqrt{2}}$.

2 $\sqrt{4608}=\sqrt{2^9\times3^2}=\sqrt{2^8\times3^2\times2^1}=2^4\times3\times\sqrt{2}=\underline{48\sqrt{2}}$.

3 $\sqrt{8820}=\sqrt{2^2\times3^2\times7^2\times5}=2\times3\times7\times\sqrt{5}=\underline{42\sqrt{5}}$.

4 $\sqrt{111132}=\sqrt{2^2\times3^4\times7^3}=2\times3^2\times7\sqrt{7}=\underline{126\sqrt{7}}$.

5 $\sqrt{6272}=\sqrt{2^7\times7^2}=2^3\times7\sqrt{2}=\underline{56\sqrt{2}}$.

6 $\sqrt{13552}=\sqrt{2^4\times7\times11^2}=2^2\times11\sqrt{7}=\underline{44\sqrt{7}}$.

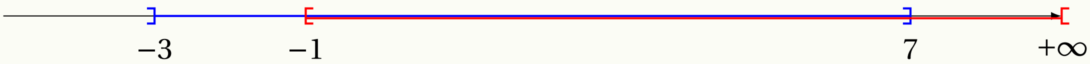
7 $\sqrt{5010005}=\sqrt{5\times7^2\times11^2\times13^2}=7\times11\times13\sqrt{5}=\underline{1001\sqrt{5}}$.

8 $\sqrt{27783}=\sqrt{3^4\times7^3}=3^2\times7\sqrt{7}=\underline{63\sqrt{7}}$.

9 $\sqrt{226800}=\sqrt{2^4\times3^4\times5^2\times7}=2^2\times3^2\times5\sqrt{7}=\underline{180\sqrt{7}}$.

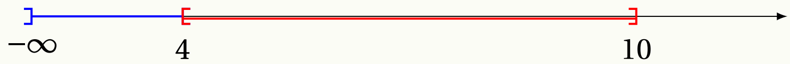
Corrigé de l'exercice 2.23 page 42

1 $I=]-3;7]$ et $J=[-1;+\infty[$



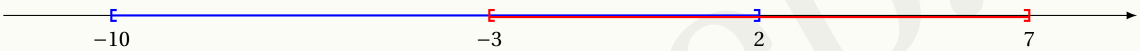
Donc $I\cap J=[-1;7]$ et $I\cup J=]-3;+\infty[$.

2 $I=]-\infty;4[$ et $J=[4;10]$



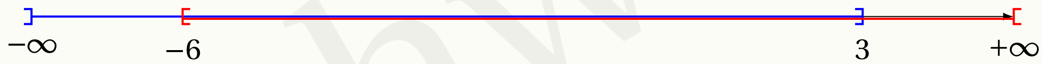
Donc $I\cap J=\varnothing$ et $I\cup J=]-\infty;10]$.

3 $I=[-10;2]$ et $J=[-3;7]$



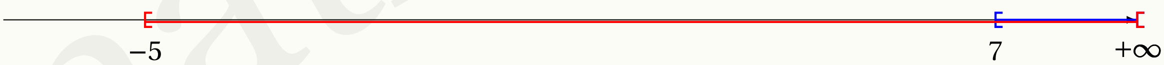
Donc $I\cap J=[-3;2]$ et $I\cup J=[-10;7]$.

4 $I=]-\infty;3]$ et $J=[-6;+\infty[$



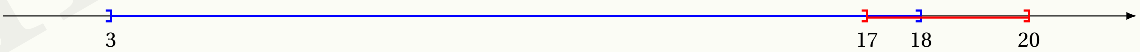
Donc $I\cap J=[-6;3]$ et $I\cup J=\mathbb{R}$.

5 $I=[7;+\infty[$ et $J=[-5;+\infty[$



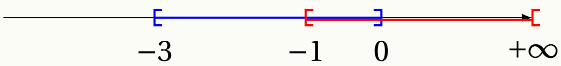
Donc $I\cap J=[7;+\infty[$ et $I\cup J=[-5;+\infty[$.

6 $I=]3;18]$ et $J=]17;20]$



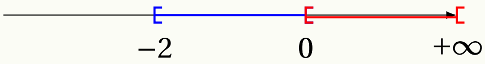
Donc $I\cap J=]17;18]$ et $I\cup J=]3;20]$.

7 $I=[-3;0]$ et $J=[-1;+\infty[$



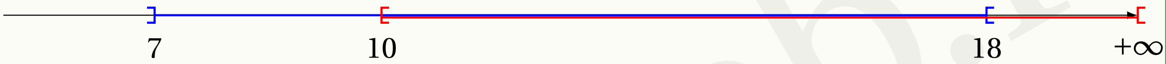
Donc $I \cap J = [-1\,;0]$ et $I \cup J = [-3\,;+\infty[$.

8 $I = [-2\,;0[$ et $J = [0\,;+\infty[$



Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J = [-2\,;+\infty[$.

9 $I =]7\,;18[$ et $J = [10\,;+\infty[$

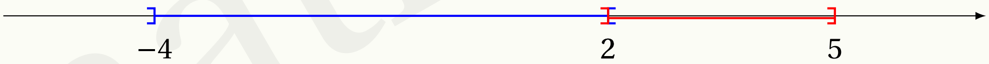


Donc $I \cap J = [10\,;18[$ et $I \cup J =]7\,;+\infty[$.

10 $I =]-4\,;2[$ et $J = [2\,;5]$

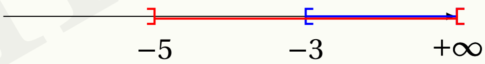
Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J =]-4\,;5]$.

11 $I =]-4\,;2[$ et $J =]2\,;5]$



Donc $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J =]-4\,;2[\cup]2\,;5]$.

12 $I = [-3\,;+\infty[$ et $J =]-5\,;+\infty[$



Donc $I \cap J = [-3\,;+\infty[$ et $I \cup J =]-5\,;+\infty[$.

3

Calcul littéral

Plan du chapitre

I - Puissances à exposants relatifs

I . 1 - Définition

Définition 19

Soient x un nombre réel.
On appelle communément **puissance de x** tout nombre s'écrivant sous la forme x^n, où n est un entier relatif.

Remarque 30

En réalité, on devrait définir tout nombre s'écrivant x^n comme une puissance *d'exposant entier*, mais c'est un peu long, on préfère raccourcir en *puissance de x*.

Exemple 23

1. $1\,024$ est une puissance de 2 car $1\,024 = 2^{10}$.
2. $\dfrac{1}{27}$ est une puissance de 3 car $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = 3^{-3}$.

I . 2 - Propriétés algébriques

Propriété 19

Soient a et b deux nombres réels. Soient m et n deux entiers relatifs. Alors :

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$
4. $(ab)^n = a^n \times b^n$

Exemple 24

1. $5^3 \times 5^{-7} = 5^{3-7} = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4}$.
2. $\dfrac{7^8}{7^5} = 7^{8-5} = 7^3$.
3. $\left(2^7\right)^3 = 2^{7\times 3} = 2^{21}$.
4. $15^3 = (3\times 5)^3 = 3^3 \times 5^3$.

II - Identités remarquables

Propriété 20 (identités remarquables)

Pour tous nombres réels a et b,

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Remarque 31

Ces égalités sont à connaître par cœur.

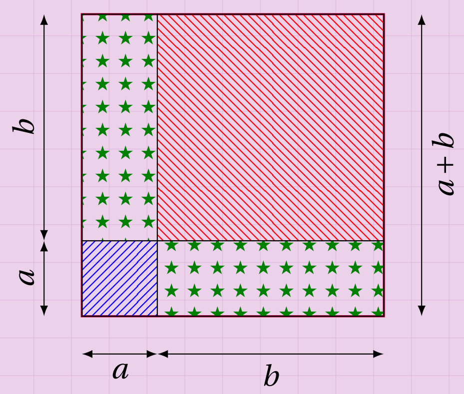
Exemple 25 (développements)

1. $(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2\times 4\times 3x + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$.
2. $(5-3x)^2 = 5^2 - 2\times 5\times 3x + (3x)^2 = 25 - 30x - 9x^2$.
3. $(8x-7)(8x+7) = (8x)^2 - 7^2 = 64x^2 - 49$.

Exemple 26 (factorisations)

1. $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2\times 1\times 2x + 1^2 = (2x+1)^2$.
2. $100 - 80x + 16x^2 = 10^2 - 2\times 10\times 4x + (4x)^2 = (10-4x)^2$.
3. $49x^2 - 25 = (7x)^2 - 5^5 = (7x-5)(7x+5)$.

Démonstration 5 ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)



Le grand carré blue a pour dimension $a+b$; son aire est donc égale à $(a+b)^2$.

Ce grand carré est constitué de deux carrés de côtés a et b, donc d'aires a^2 et b^2, ainsi que de deux rectangles identiques de dimensions $a\times b$, donc d'aire ab.

L'aire totale est donc égale à : $a^2 + b^2 + 2ab$.
Les deux expressions $(a+b)^2$ et $a^2 + b^b + 2ab$ représentant la même aire, elle sont nécessairement égales.

III - Expressions fractionnaires

Propriété 21

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs non nuls. Alors,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Exemple 27

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+8}-\frac{3x+1}{2x-7} &= \frac{2(2x-7)-(3x+1)(x+8)}{(x+8)(2x-7)}\\ &= \frac{4x-14-(3x^2+24x+x+8)}{(x+8)(2x-7)}\\ &= \frac{4x-14-3x^2-24x-x-8}{2x^2-7x+16x-56}\\ &= \frac{-3x^2-21x-22}{2x^2+9x-56}.\end{aligned}$$

IV - Propriétés sur les inégalités

IV . 1 - Conservation de l'ordre par addition

Propriété 22

Soient a, b et k trois nombres réels.

$$a<b \iff a+k<b+k.$$

On peut se servir de cette propriété pour résoudre des inéquations.

Exemple 28

$$\begin{aligned}x+3<2x-8 &\iff x+3-x<2x-8-x\\ &\iff 3<x-8\\ &\iff 3+8<x-8+8\\ &\iff 11<x\end{aligned}$$

L'ensemble solution de toutes les valeurs de x telles que $x+3<2x-8$ est donc l'ensemble des valeurs de x qui sont strictement plus grandes que 11.
On note en général cet ensemble S :

$$\mathrm{S}=]11\,;+\infty[.$$

IV . 2 - Produit d'une inégalité par un réel

Propriété 23

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

- Si $k > 0$ alors $ka < kb$ et $\dfrac{a}{k} < \dfrac{b}{k}$.
- Si $k > 0$ alors $ka > kb$ et $\dfrac{a}{k} > \dfrac{b}{k}$.

Exemple 29

1 $2x > 6 \iff \dfrac{2x}{2} > \dfrac{6}{2}$ (on n'inverse pas le signe car on divise par un positif)

$\iff x > 3.$

2 $-5x > 15 \iff \dfrac{-5x}{-5} < \dfrac{15}{-5}$ (on inverse le signe car on divise par un négatif)

$\iff x < -3.$

Remarque 32

Autrement dit, on change l'inégalité quand on la multiplie ou divise par un nombre négatif.

IV . 3 - Somme de deux inégalités

Propriété 24

Soient a, b, m et n quatre nombres réels.

$$\text{si } a < b \text{ et } m < n \quad \text{alors} \quad a + m < b + n.$$

Exemple 30

On sait que $x + 5 < 12$ et que $2x - 1 < 4$ donc :

$$(x+5) + (2x-1) < 12 + 4$$

et donc :

$$3x + 4 < 16 \qquad \text{soit} \qquad 3x < 12 \quad \text{donc} \quad x < 4.$$

Attention 4

La réciproque n'est pas nécessairement vraie : si $a + m < b + n$ alors on n'a pas toujours $a < b$ et $m < n$.
De plus, la propriété n'est plus vraie si on soustrait.

IV . 4 - Inégalité sur racines carrées

Propriété 25 (inégalité sur les racines carrées)

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Alors,

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Démonstration 6

On a d'une part $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a+b$ et d'autre part $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b > a+b$, donc :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a+b}\right)^2$$

et comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$ sont deux nombres positifs, cela signifie que :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}.$$

Manipulation d'expressions algébriques

Exercice 3.1

La distance d, exprimée en mètres, parcourue par un objet est égale au produit de sa vitesse v (exprimée en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, soit en mètres par seconde) et du temps t du trajet (exprimé en secondes).

1. Calculer la distance parcourue par un objet allant à 50 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ en 5 secondes.
2. Calculer le temps nécessaire pour qu'un objet allant à 80km·$\mathrm{h^{-1}}$ parcourt une distance de 10 km.
3. Calculer la vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) d'un objet parcourant 10 km en 5 minutes.

Solution page 69

Exercice 3.2 (conversions Celsius-Fahrenheit)

Quand on connaît une température en degrés Celsius C et que l'on souhaite connaître son équivalent en degrés Fahrenheit F, on utilise la formule suivante : $\mathrm{F} = \frac{9}{5}\mathrm{C} + 32$.

Déterminer la formule pour passer des degrés Fahrenheit aux degrés Celsius.

Solution page 69

Exercice 3.3 (IMC)

L'Indice de Masse Corporelle (IMC) d'une personne est donné par la formule : $\mathrm{IMC} = \frac{m}{\mathrm{T}^2}$, où m est la masse (exprimée en kg) et T la taille (en mètres).
Calculer la taille d'une personne dont l'IMC est égal à 32 et dont la masse est égale à 75 kg.

Solution page 69

Exercice 3.4 (volume d'un cylindre)

On sait que le volume d'un cylindre de hauteur h et de base circulaire de rayon r est donné par la formule $\mathcal{V} = \pi r^2 h$.

Donner la formule permettant de calculer le rayon de la base quand on connait le volume et le hauteur du cylindre.

Solution page 70

Exercice 3.5 (équation cartésienne)

Soient a, b, c, x et y cinq nombres réels, avec $b \neq 0$.
Sachant que $ax + by + c = 0$, exprimer y en fonction des quatre autres nombres.

Solution page 70

Développements

Exercice 3.6 (double distributivité)

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (x+2)(x+3)$
2. $B = (3x+2)(5x+3)$
3. $C = (3-5x)(2x-7)$
4. $D = (5x-4)(-3x-2)$
5. $E = (4x-1)(2x+4)+(2x-1)(5x+3)$
6. $F = (x-4)(x+3)-2(x+1)(x-2)$
7. $G = (x+5)(2x-1)-5(x+7)(x+1)$

Solution page 70

Exercice 3.7 (identités remarquables)

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (x+2)^2$
2. $B = (3x+2)^2$
3. $C = (3-5x)^2$
4. $D = (5x-4)^2$
5. $E = (4x-1)^2$
6. $F = (x-4)(x+4)$
7. $G = (2x+5)(2x-5)$
8. $H = (3x-7)(3x+7)$

Solution page 71

Exercice 3.8 (florilège de développements)

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (2x-5)(x+3)+(x+6)^2$
2. $B = (3x+4)^2-(x-1)(x+1)$
3. $C = (5x-4)(5x+4)-2(x+3)(x-3)$
4. $D = (8x+3)(3x-8)-3(x+9)^2$
5. $E = (7x-1)(7x+1)-5(3x-2)^2$
6. $F = 3(2x-1)^2+(5x-3)^2$

Solution page 71

Exercice 3.9

Développer l'expression $(a+b+c)^2$, où a, b et c sont trois nombres réels.

Solution page 72

Exercice 3.10 (vers la formule du binôme de Newton)

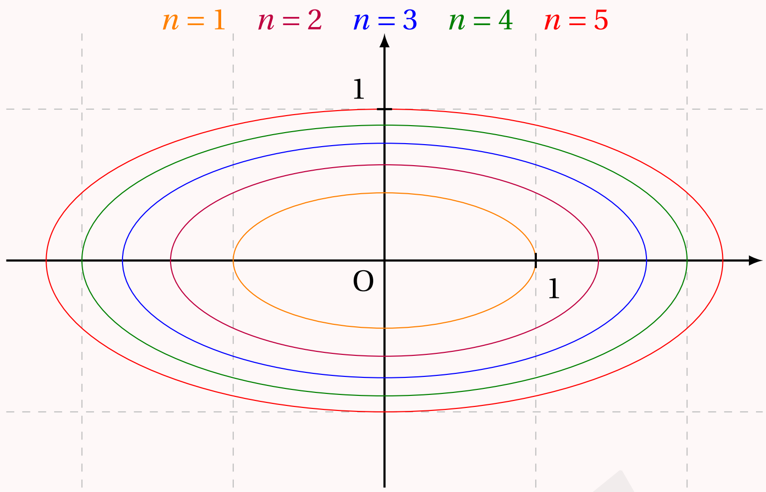
Soient a et b deux nombres réels.
En utilisant l'identité remarquable permettant de développer $(a+b)^2$, donner le développement de $(a+b)^n$, pour $n=3$, $n=4$ puis $n=5$.
Donner alors le développement de $(1+x)^n$ pour $n=2$, $n=3$, $n=4$ et $n=5$.

Solution page 72

Exercice 3.11 (pour les balaises... et pas que les Pascal !)

1 Développer $\left(x+y\sqrt{5}\right)^2$, où x et y sont deux nombres réels.

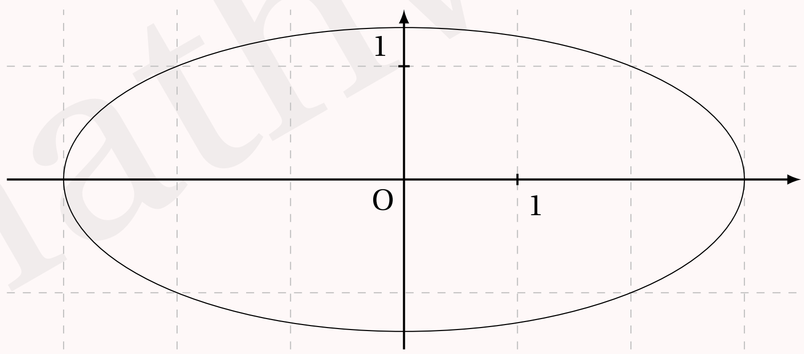
On a tracé ci-dessous dans un repère les ensembles des points $M\left(x\,;y\right)$ tels que $x^2+5y^2=n$, pour n entier variant de 1 à 5.



2 Le point $M(1\,;0)$ appartient-il à l'ensemble orange ?
En remplaçant x par 1 et y par 0 dans le développement de la question **1**, quelle égalité obtient-on ?

3 Existe-t-il des points à coordonnées entières sur les ensembles qui ne sont pas orange ?
Si oui, quelle(s) égalité(s) cela nous permet-il d'écrire ?

Pour $n=9$, on a l'ensemble des points suivant :



4 À l'aide des coordonnées entières d'un point de cet ensemble, montrer que :

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}.$$

5 Pour $n=14$, on peut constater que le point $Q\,(3\,;1)$ appartient à l'ensemble des points de coordonnées $\left(x\,;y\right)$ tels que $x^2+5y^2=14$.
En déduire une écriture simplifiée du nombre $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

6 **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sqrt{n^2+5+2n\sqrt{5}}=n+\sqrt{5}.$$

b. Trouver alors l'écriture simplifiée du nombre $\sqrt{405+40\sqrt{5}}$.

Solution page 73

Exercice 3.12 (extrait du livre X des Éléments d'Euclide)

Montrer l'égalité suivante, où , a et b sont des nombres réels tels que $a^2 \geqslant b$:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

Solution page 75

Factorisations

Exercice 3.13 (avec facteur commun évident)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant que le facteur commun est explicite dans chaque terme.

1. $\mathrm{A}=(2x+1)(x+3)-2(x+3)(5x+6)$
2. $\mathrm{B}=(x-4)(2x+9)+3(x-4)(7x+3)$
3. $\mathrm{C}=(3x-1)(5x+2)-(5x+2)(9x+8)$

Solution page 76

Exercice 3.14 (en faisant apparaître le facteur commun)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître sans l'aide d'une identité remarquable.

1. $\mathrm{D}=(9x+6)(4x+1)+(3x+2)(1-4x)$
2. $\mathrm{E}=(2x+3)(5x-10)-3(x-2)(5x+9)$
3. $\mathrm{F}=(3x-1)(2x+7)-4(1-3x)(7-2x)$

Solution page 76

Exercice 3.15 (à l'aide des identités remarquables)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître à l'aide d'une identité remarquable.

1. $\mathrm{G}=9x^2+6x+1-(3x+1)(4x-1)$
2. $\mathrm{H}=4x^2-12x+9+(2x-3)(7x+1)$
3. $\mathrm{I}=25x^2-4+3(5x-2)(x+3)$

Solution page 77

Exercice 3.16 (à l'aide de la troisième identité remarquable)

Factoriser chacune des expressions suivantes à l'aide de la troisième identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

1. $A = (x+1)^2 - (x-1)^2$
2. $B = (2x+3)^2 - (3x-2)^2$
3. $C = (3-4x)^2 - (5x+1)^2$
4. $D = (8-4x)^2 + (6x+4)^2$
5. $E = 36(x-4)^2 - 64(x+3)^2$
6. $F = 25(3-7x)^2 - 9(2x+5)^2$

Solution page 77

Exercice 3.17 (à l'aide d'une identité remarquable)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant que l'on peut faire apparaître une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ pour factoriser.

1. $J = (9x+18)(x+2) - (4x+20)(x+5)$
2. $K = 2(2x+3)(4x+6) - 3(3x+2)(9x+6)$
3. $L = 7(7x+1)(49x+7) + (1-4x)(16x-4)$

Solution page 78

Exercice 3.18 (à l'aide des identités remarquables)

Factoriser chacune des expressions suivantes à l'aide d'une des trois identités remarquables.

1. $A = x^2 + 2x + 1$
2. $B = 9x^2 - 12x + 4$
3. $C = x^2 - 9$
4. $D = 4x^2 + 12x + 9$
5. $E = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25$
6. $F = 25 - 4x^2$
7. $G = 81x^2 + 126x + 49$
8. $H = 121x^2 - 64$

Solution page 79

Exercice 3.19 (calculs astucieux)

Sans utiliser la calculatrice, donner le résultat des opérations suivantes :

1. $A = 897\,526^2 - 897\,525 \times 897\,527$
2. $B = 100\,001^2 - 99\,999^2$

Solution page 81

Équations

Exercice 3.20 (équations produit nul et quotient nul)

Résoudre les équations suivantes :

1. $-3x+7=0$
2. $\frac{3}{5}x-6=0$
3. $-\frac{2}{7}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{21}x+2$
4. $(-3x+1)(5x-7)=0$
5. $\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$
6. $2x(5x-1)(2x+3)=0$
7. $\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$
8. $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$
9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=2$
10. $\frac{2}{x-1}=1-\frac{x}{x+1}$

Solution page 81

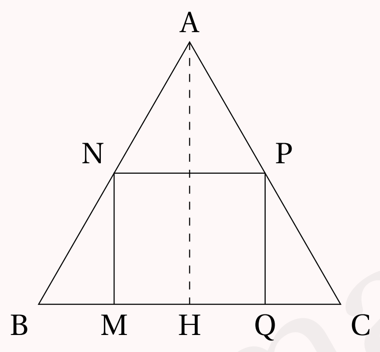
Exercice 3.21 (équations avec carrés)

Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x-5)^2=16$
2. $\left(x^2-4\right)^2=81$
3. $\left(3x^2-4\right)^2=9$
4. $\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2=25$

Solution page 83

Exercice 3.22 (dans un triangle équilatéral)



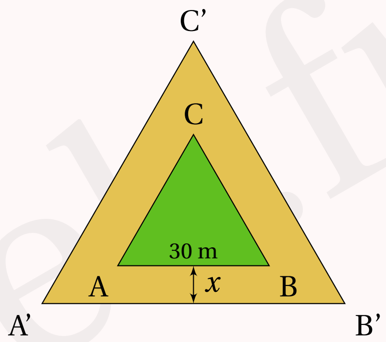
Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 6 et soit H le milieu de [BC].
M est un point de [BH]. On place les points N et P respectivement sur [AB] et [AC] tels que MNPQ soit un rectangle d'axe de symétrie (AH).
On pose BM = x.

1. **a.** Exprimer MN en fonction de x.
   b. Justifier que MQ = $6-2x$.
2. On veut que MNPQ soit un carré.
   a. Montrer alors que $x\sqrt{3} = 6 - 2x$.
   b. Calculer x.

Solution page 85

Exercice 3.23 (mise en équation)

Le jardin ABC est un triangle équilatéral de côté 30 mètres, entouré d'une allée de largeur x mètres (représentée en jaune ci-contre). Le triangle A'B'C' est lui aussi équilatéral.



On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de l'allée est égale à celle du jardin.

On admettra les valeurs suivantes :

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

1 **a.** On note h la hauteur de ABC. Montrer que $h = 15\sqrt{3}$ mètres.

b. Montrer alors que l'aire de ABC est : $\mathscr{A} = 225\sqrt{3}\ \text{m}^2$.

2 **a.** En considérant le point P de [A'B'] de sorte que A'AP soit un triangle rectangle d'hypoténuse AA$'$, montrer que $\text{A}'\text{B}' = 30 + 2x\sqrt{3}$.

b. En déduire que l'aire de A$'$B$'$C$'$ est : $\mathscr{A}' = \left(15 + x\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}$.

3 **a.** Montrer que chercher x pour que l'aire de l'allée soit égale à celle du jardin revient à résoudre l'équation $\mathscr{A}' = 2\mathscr{A}$.

b. Trouver alors la valeur exacte, puis approchée, de x.

Solution page 86

Exercice 3.24 (équations avec racines carrées)

Résoudre les équations suivantes :

1 $\sqrt{3x-2} = 7$.

2 $\sqrt{\dfrac{5x-4}{3x+1}} = 3$.

3 $\sqrt{x^2+x+1} = x+1$.

4 $x\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{7} - x\sqrt{2}$.

5 $\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4)$.

Solution page 88

Inéquations et inégalités

Exercice 3.25 (nombre minimal de contrats)

Le salaire d'un représentant est calculé de la façon suivante : un salaire fixe de 800 €, et une commission de 152 € sur chaque contrat qu'il vend.

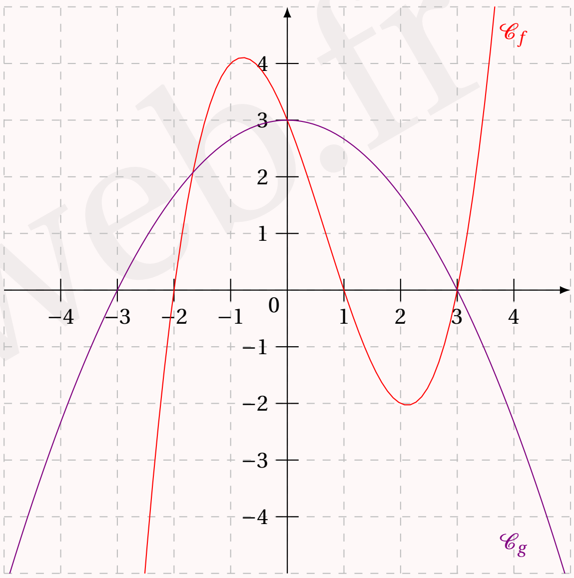
Quel nombre minimal de contrats doit-il vendre pour obtenir un salaire de 2 300 € ?

Solution page 91

Exercice 3.26 (résolutions graphiques)

Résoudre graphiquement sur $[-5;5]$ les inéquations suivantes à l'aide du graphique ci-contre :

1. $f(x) > g(x)$
2. $f(x) \geqslant 0$
3. $g(x) \leqslant 0$



Solution page 91

Exercice 3.27 (moyennes arithmétiques et géométriques)

Soient a et b deux nombres positifs tels que $a \neq b$.

On appelle *moyenne arithmétique* de a et b le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$.

On appelle *moyenne géométrique* de a et b le nombre $g = \sqrt{ab}$.

Montrer que $g < m$.

Aide : on pourra regarder la démonstration de la propriété 25 du cours de ce livre pour se donner une idée.

Solution page 93

Algorithmes et programmation

Exercice 3.28 (algorithmes de seuil)

On considère le nombre : $U_n = 2^n$, où n est un entier naturel.

1. Écrire un algorithme permettant de calculer et d'afficher la première valeur de n pour laquelle $U_n > 10^6$.
2. Écrire le programme Python qui correspond à cet algorithme.

Solution page 93

Exercice 3.29 (algorithmes de seuil)

On considère le nombre : $U_n = 3^{-n}$, où n est un entier naturel.

1. Écrire un algorithme permettant de calculer et d'afficher la première valeur de n pour laquelle $U_n < 10^{-8}$.
2. Écrire le programme Python qui correspond à cet algorithme.

Solution page 94

Corrigé de l'exercice 3.1 page 61

1 $d = v \times t \iff d = 50 \times 5$

$\iff \underline{d = 250 \text{ m.}}$

2 $v = d \times t \iff t = \dfrac{v}{d}$

$\iff t = \dfrac{80}{10}$

$\iff \underline{t = 8 \text{ h.}}$

3 $d = v \times t \iff v = \dfrac{d}{t}$

$\iff v = \dfrac{10\,000 \text{ m}}{5 \times 60 \text{ s}}$

$\iff \underline{v \approx 33{,}33 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.}$

Corrigé de l'exercice 3.2 page 61

$\text{F} = \dfrac{9}{5}\text{C} + 32 \iff \text{F} - 32 = \dfrac{9}{5}\text{C}$

$\iff \dfrac{5}{9} \times (\text{F} - 32) = \dfrac{5}{9} \times \dfrac{9}{5}\text{C}$ (on multiplie par l'inverse de $\dfrac{9}{5}$ pour supprimer cette fraction)

$\iff \boxed{\text{C} = \dfrac{5}{9}(\text{F} - 32)}$

Corrigé de l'exercice 3.3 page 61

$\text{IMC} = \dfrac{p}{\text{T}^2} \iff 32 = \dfrac{75}{\text{T}^2}$

$\iff \text{T}^2 \times 32 = 75$ (égalité des produits en croix)

$\iff \text{T}^2 = \dfrac{75}{32}$

$\iff \text{T} = \sqrt{\dfrac{75}{32}}$

$\iff \boxed{\text{T} \approx 1{,}53}$

<u>La personne mesure donc environ 1,53 mètres.</u>

Remarque 36

Chez les adultes, l'IMC devrait être compris entre 18,5 et 25. Au-delà, la personne est définie comme en *surpoids* (ou en *obésité* si l'IMC dépasse 30). Pour un IMC en-dessous de 18,5, la personne est définie comme en *insuffisance pondérale* (maigreur).

Corrigé de l'exercice 3.4 page 61

$$\mathcal{V} = \pi r^2 h \iff \frac{\mathcal{V}}{\pi h} = r^2$$
$$\iff \boxed{r = \sqrt{\frac{\mathcal{V}}{\pi h}}}$$

Corrigé de l'exercice 3.5 page 61

$$ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c$$
$$\iff \boxed{y = \frac{-ax - c}{b}}$$

Corrigé de l'exercice 3.6 page 62

1. $\mathrm{A} = (x+2)(x+3)$
   $= x^2 + 3x + 2x + 6$
   $\boxed{\mathrm{A} = x^2 + 6x + 6}$
2. $\mathrm{B} = (3x+2)(5x+3)$
   $= 15x^2 + 9x + 10x + 6$
   $\boxed{\mathrm{B} = 15x^2 + 19x + 6}$
3. $\mathrm{C} = (3-5x)(2x-7)$
   $= 6x - 21 - 10x^2 + 35x$
   $\boxed{\mathrm{C} = -10x^2 + 41x - 21}$
4. $\mathrm{D} = (5x-4)(-3x-2)$
   $= -15x^2 - 10x + 12x + 8$
   $\boxed{\mathrm{D} = -15x^2 + 2x + 8}$
5. $\mathrm{E} = (4x-1)(2x+4) + (2x-1)(5x+3)$
   $= (8x^2 + 16x - 2x - 4) + (10x^2 + 6x - 5x - 3)$
   $\boxed{\mathrm{E} = 18x^2 + 15x - 7}$
6. $\mathrm{F} = (x-4)(x+3) - 2(x+1)(x-2)$
   $= (x^2 + 3x - 4x - 12) - 2(x^2 - 2x + x - 2)$
   $= x^2 - x - 12 - 2x^2 + 2x + 4$
   $\boxed{\mathrm{F} = -x^2 + x - 8}$

7 $\begin{aligned} G &= (x+5)(2x-1) - 5(x+7)(x+1) \\ &= (2x^2 - x + 10x - 5) - 5(x^2 + x + 7x + 7) \\ &= 2x^2 + 9x - 5 - 5x^2 - 40x - 35 \end{aligned}$

$\boxed{G = -3x^2 - 31x - 40}$

Corrigé de l'exercice 3.7 page 62

1 $A = (x+2)^2 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 = \boxed{x^2 + 4x + 4}$

2 $B = (3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 2 \times 3x + 2^2 = \boxed{9x^2 + 12x + 4}$

3 $C = (3-5x)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times 5x + (5x)^2 = \boxed{9 - 30x + 25x^2}$

4 $D = (5x-4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 4 \times 10x + 4^2 = \boxed{25x^2 - 40x + 16}$

5 $E = (4x-1)^2 = (4x)^2 - 2 \times 1 \times 4x + 1^2 = \boxed{16x^2 - 8x + 1}$

6 $F = (x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = \boxed{x^2 - 16}$

7 $G = (2x+5)(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = \boxed{4x^2 - 25}$

8 $H = (3x-7)(3x+7) = (3x)^2 - 7^2 = \boxed{9x^2 - 49}$

Corrigé de l'exercice 3.8 page 62

1 $\begin{aligned} A &= (2x-5)(x+3) + (x+6)^2 \\ &= (2x^2 + 6x - 5x - 15) + (x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2) \\ &= 2x^2 + x - 15 + x^2 + 12x + 36 \end{aligned}$

$\boxed{A = 3x^2 + 13x + 21}$

2 $\begin{aligned} B &= (3x+4)^2 - (x-1)(x+1) \\ &= (3x)^2 + 2 \times 4 \times 3x + 4^2 - (x^2 - 1^2) \\ &= 9x^2 + 24x + 16 - x^2 + 1 \end{aligned}$

$\boxed{B = 8x^2 + 24x + 17}$

3 $\begin{aligned} C &= (5x-4)(5x+4) - 2(x+3)(x-3) \\ &= (5x)^2 - 4^2 - 2(x^2 - 3^2) \\ &= 25x^2 - 16 - 2x^2 + 18 \end{aligned}$

$\boxed{C = 23x^2 + 2}$

4 $\begin{aligned} D &= (8x+3)(3x-8) - 3(x+9)^2 \\ &= 24x^2 - 64x + 9x - 24 - 3(x^2 + 2 \times 9 \times x + 9^2) \\ &= 24x^2 - 55x - 24 - 3(x^2 + 18x + 81) \\ &= 24x^2 - 55x - 24 - 3x^2 - 54x - 243 \end{aligned}$

$\boxed{D = 21x^2 - 109x - 267}$

5 $\mathrm{E} = (7x-1)(7x+1) - 5(3x-2)^2$

$$\begin{aligned} &= (7x)^2 - 1^2 - 5\left[(3x)^2 - 2\times 2\times 3x + 2^2\right] \\ &= 49x^2 - 1 - 5(9x^2 - 12x + 4) \\ &= 49x^2 - 1 - 45x^2 + 60x - 20 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{E} = 4x^2 + 60x - 21}$$

6 $\mathrm{F} = 3(2x-1)^2 + (5x-3)^2$

$$\begin{aligned} &= 3(4x^2 - 4x + 1) + (25x^2 - 30x + 9) \\ &= 12x^2 - 12x + 3 + 25x^2 - 30x + 9 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{F} = 37x^2 - 42x + 12}$$

Corrigé de l'exercice 3.9 page 62

Pour développer $(a+b+c)^2$, on peut voir ce calcul sous la forme :

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) \\ &= \left[(a+b)(a+b+c)\right] + c(a+b+c) \\ &= \left[(a+b)(a+b) + c(a+b)\right] + c(a+b+c) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc + ac + bc + c^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

Corrigé de l'exercice 3.10 page 62

- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$$\begin{aligned} &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= \underbrace{(a^3 + 2a^2b + ab^2)}_{=a(a^2+2ab+b^2)} + \underbrace{(a^2b + 2ab^2 + b^3)}_{=b(a^2+2ab+b^2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

- $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3$

$$\begin{aligned} &= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= (a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3) + (a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4) \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

- $(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$

$$\begin{aligned} &= (a+b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \\ &(a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4) + (a^4b + 4a^4b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5) \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5}$$

Si on représente les coefficients des termes du développement de $(a+b)^n$ pour n allant de 0 à 5, on a ceci :

n	Coefficients					
$n=0: (a+b)^0 = 1$	1					
$n=1: (a+b)^1 = 1a+1b$	1	1				
$n=2: (a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

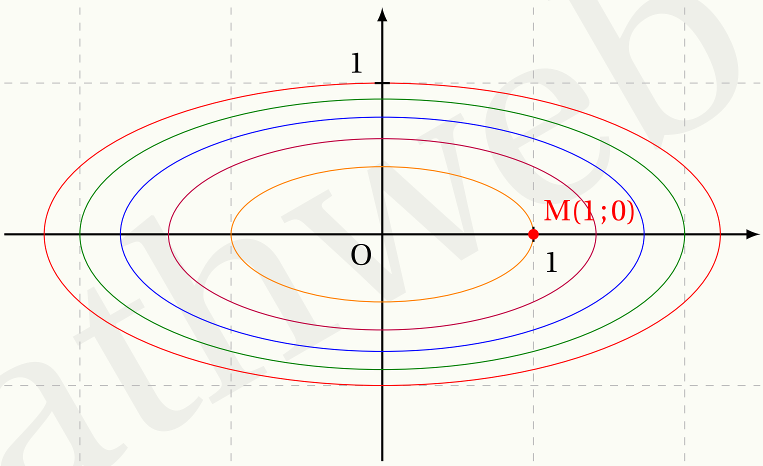
On s'aperçoit qu'un coefficient est la somme de celui qui est juste au-dessus et de son prédécesseur (comme dans l'exemple des cases jaunes : $10 = 4+6$).
Les coefficients forment une sorte de triangle de nombres; c'est ce que l'on appelle le *triangle de Pascal* (Blaise Pascal était un grand mathématicien français du XVIIe siècle).
Le développement de $(1+x)^n$ pour n variant de 2 à 5 est donc :

- $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$,
- $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$,
- $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$,
- $(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$.

Corrigé de l'exercice 3.11 page 63

1 $$\left(x+y\sqrt{5}\right)^2 = x^2+2\times x\times y\sqrt{5}+\left(y\sqrt{5}\right)^5$$
$$= x^2+2xy\sqrt{5}+5y^2$$
$$\boxed{\left(x+y\sqrt{5}\right)^2 = x^2+5y^2+2xy\sqrt{5}}$$

2 M(1;0) appartient en effet à l'ensemble orange car l'ellipse orange passe par ce point :



Si on remplace les coordonnées de ce point dans l'égalité de la question 1, on a :

$$(1+0\times\sqrt{5})^2 = 1^2+5\times 0^2+2\times 1\times 0\times\sqrt{5}$$

soit :

$$1^2 = 1^2.$$

3 Sur les ensembles violet, bleu et vert, il n'y a aucun point à coordonnées entières.
En revanche, le point $N(0;1)$ est sur l'ensemble rouge. En remplaçant x par 0 et y par 1 dans l'égalité de la question **1**, on obtient :

$$(0^2+1\sqrt{5})^2 = 0^2+5\times 1^2+2\times 0\times 1\sqrt{5}$$

soit :

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5.$$

Bon, là non plus, ce n'est pas une révolution... mais on avance...

4 Le point $P\,(2;1)$ appartient à cet ensemble car :

$$2^2+5\times 1^2 = 9.$$

En remplaçant x par 2 et y par 1 dans l'égalité de la question **1**, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(2+1\sqrt{5}\right)^2 &= 2^2+5\times 1^2+2\times 2\times 1\sqrt{5}\\ &= 9+4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\sqrt{\left(2+1\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

soit :

$$\boxed{\sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}}$$

5 $Q\,(3;1)$ appartient à l'ensemble. En remplaçant x par 3 et y par 1 dans l'égalité de la question **1**, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(3+1\sqrt{5}\right)^2 &= 3^2+5\times 1^2+2\times 3\times 1\sqrt{5}\\ &= 14+6\sqrt{5}.\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\sqrt{\left(3+1\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{14+6\sqrt{5}}$$

soit :

$$\boxed{\sqrt{14+6\sqrt{5}} = 3+\sqrt{5}}$$

6 **a.** Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}\left(n+\sqrt{5}\right)^2 &= n^2+2n\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\\ &= n^2+5+2n\sqrt{5}.\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée des deux membres de cette dernière égalité, on obtient :

$$\boxed{n+\sqrt{5} = \sqrt{n^2+5+2n\sqrt{5}}}$$

b. $\sqrt{405+40\sqrt{5}} = \sqrt{20^2+5+2\times 20\sqrt{5}}$ donc en prenant $n=20$ dans la formule précédente, on obtient :

$$\boxed{\sqrt{405+40\sqrt{5}} = 20+\sqrt{5}}$$

Corrigé de l'exercice 3.12 page 64

Premier constat : les deux membres de l'égalité à démontrer sont positifs. Ainsi, démontrer l'égalité entre leur carré est équivalent. En d'autres termes, démontrer l'égalité :

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}$$

est équivalent à démontrer l'égalité :

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2$$

c'est-à-dire :

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=a+\sqrt{b}.$$

C'est ce que nous allons faire.
Développons le membre de gauche à l'aide de l'identité remarquable :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2=\mathrm{A}^2+2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2.$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2\\
&=\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\times\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2\\
&=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\times\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\\
&=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\times\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\\
&\quad\text{(on a réorganisé les termes)}\\
&=a+2\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}{4}}\\
&=a+2\frac{\sqrt{a^2-\left(\sqrt{a^2-b}\right)^2}}{\sqrt{4}}\\
&=a+\sqrt{a^2-(a^2-b)}\\
&=a+\sqrt{b}.\ \text{(nous avons démontré l'égalité souhaitée)}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.13 page 64

A	$= (2x+1)(x+3) - 2(x+3)(5x+6)$	
	$= (x+3)[(2x+1) - 2(5x+6)]$	le facteur commun est $(x+3)$
	$= (x+3)(2x+1-10x-12)$	on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -2 le $5x$ et le 6
	$= (x+3)(-8x-11)$	on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
	$\underline{= -(x+3)(8x+11)}$	on met en facteur « -1 » pour la lisibilité
B	$= (x-4)(2x+9) + 3(x-4)(7x+3)$	
	$= (x-4)[(2x+9) + 3(7x+3)]$	le facteur commun est $(x-4)$
	$= (x-4)(2x+9+21x+9)$	on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par 3 le $7x$ et le 3
	$\underline{= (x-4)(23x+18)}$	on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
C	$= (3x-1)(5x+2) - (5x+2)(9x+8)$	
	$= (5x+2)[(3x-1) - (9x+8)]$	le facteur commun est $(5x+2)$
	$= (5x+2)(3x-1-9x-8)$	on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -1 le $9x$ et le 8
	$= (5x+2)(-6x-9)$	on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
	$\underline{= -3(5x+2)(2x+3)}$	on factorise par -2 ce qu'il y a dans la deuxième paire de parenthèses

Corrigé de l'exercice 3.14 page 64

D	$= (9x+6)(4x+1) + (3x+2)(1-4x)$	
	$= 3\underline{(3x+2)}(4x+1) + \underline{(3x+2)}(1-4x)$	on factorise $(9x+6)$ par 3
	$= (3x+2)[3(4x+1) + (1-4x)]$	on factorise par $(3x+2)$
	$= (3x+2)(12x+3+1-4x)$	on enlève les parenthèses dans les crochets
	$= (3x+2)(8x+4)$	on réduit l'expression
	$\underline{= 4(3x+2)(2x+1)}$	on factorise par 4 dans le deuxième facteur
E	$= (2x+3)(5x-10) - 3(x-2)(5x+9)$	
	$= 5\underline{(x-2)}(2x+3) - 3\underline{(x-2)}(5x+9)$	on factorise $(5x-10)$ par 5
	$= (x-2)[5(2x+3) - 3(5x+9)]$	on factorise par $(x-2)$
	$= (x-2)(10x+15-15x-27)$	on enlève les parenthèses dans les crochets
	$= (x-2)(-5x-12)$	on réduit l'expression dans le second facteur
	$\underline{= -(x-2)(5x+12)}$	on factorise par -1 dans le deuxième facteur
F	$= (3x-1)(2x+7) - 4(1-3x)(7-2x)$	
	$= (3x-1)(2x+7) + 4(3x-1)(7-2x)$	on factorise $(1-3x)$ par (-1)
	$= (3x-1)[(2x+7) + 4(7-2x)]$	on factorise par $(3x-1)$
	$= (3x-1)(2x+7+28-8x)$	on enlève les parenthèses dans les crochets
	$\underline{= (3x-1)(-6x+35)}$	on réduit l'expression dans le second facteur

Corrigé de l'exercice 3.15 page 64

G $= 9x^2 + 6x + 1 - (3x+1)(4x-1)$

$= (3x+1)^2 - (3x+1)(4x-1)$ — on veut que $9x^2 + 6x + 1$ soit une identité remarquable de la forme $(a+b)^2$, donc il faut que $9x^2 = a^2$ et que $1 = b^2$ donc $a = 3x$ et $b = 1$

$= (3x+1)[(3x+1) - (4x-1)]$ — on factorise par $(3x+1)$

$= (3x+1)(3x+1-4x+1)$ — on enlève les parenthèses dans les crochets

$= \underline{(3x+1)(-x+2)}$ — on réduit l'expression dans le second facteur

H $= 4x^2 - 12x + 9 + (2x-3)(7x+1)$

$= (2x-3)^2 + (2x-3)(7x+1)$ — il faut que $4x^2 = a^2$ et $9 = b^2$, donc $a = 2x$ et $b = 3$

$= (2x-3)(2x-3+7x+1)$

$= \underline{(2x-3)(9x+2)}$

I $= 25x^2 - 4 + 3(5x-2)(x+3)$

$= (5x)^2 - 2^2 + 3(5x-2)(x+3)$ — on fait apparaître une expression de la forme $a^2 - b^2$

$= (5x-2)(5x+2) + 3(5x-2)(x+3)$ — on factorise $a^2 - b^2$ en $(a-b)(a+b)$

$= (5x-2)[5x+2+3(x+3)]$

$= (5x-2)(5x+2+3x+9)]$

$= \underline{(5x-2)(8x+11)}$

Corrigé de l'exercice 3.16 page 65

1 $\mathrm{A} = (x+1)^2 - (x-1)^2$.

A est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = (x+1)$ et $b = (x-1)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \big[(x+1)-(x-1)\big]\big[(x+1)+(x-1)\big] \\ &= (x+1-x+1)(x+1+x-1) \\ &= 2\times 2x \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{A} = 4x}$$

2 $\mathrm{B} = (2x+3)^2 - (3x-2)^2$.

B est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = (2x+3)$ et $b = (3x-2)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \big[(2x+3)-(3x-2)\big]\big[(2x+3)+(3x-2)\big] \\ &= (2x+3-3x+2)(2x+3+3x-2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{B} = (-x+5)(5x+1)}$$

3 $\mathrm{C} = (3-4x)^2 - (5x+1)^2$.

C est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = (3-4x)$ et $b = (5x+1)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{C} &= \big[(3-4x)-(5x+1)\big]\big[(3-4x)+(5x+1)\big] \\ &= (3-4x-5x-1)(3-4x+5x+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{C} = (2-9x)(x+4)}$$

4 $D = (8-4x)^2 + (6x+4)^2$.

D est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = (8-4x)$ et $b = (6x+4)$, d'où :

$$\begin{aligned} D &= \left[(8-4x)-(6x+4)\right]\left[(8-4x)+(6x+4)\right] \\ &= (8-4x-6x-4)(8-4x+6x+4) \\ &\boxed{D = (4-10x)(2x+12)} \end{aligned}$$

On pourrait continuer à factoriser D en écrivant :

$$D = 2(2-5x)\times 2(x+6)$$
$$\boxed{D = 4(2-5x)(x+6)}$$

Les deux résultats encadrés sont corrects.

5 $E = 36(x-4)^2 - 64(x+3)^2$.

E peut s'écrire :

$$E = \left[6(x-4)\right]^2 - \left[8(x+3)\right]^2.$$

Ainsi, E est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 6(x-4)$ et $b = 8(x+3)$, d'où :

$$\begin{aligned} E &= \left[6(x-4)-8(x+3)\right]\left[6(x-4)+8(x+3)\right] \\ &= (6x-24-8x-24)(6x-24+8x+24) \\ &= (-2x-48)(14x) \\ &\boxed{E = 14x(-2x-48)} \\ &= 14x\times(-2)(x+24) \\ &\boxed{E = -28x(x+24)} \qquad \text{(forme factorisée optimale)} \end{aligned}$$

6 $F = 25(3-7x)^2 - 9(2x+5)^2$.

On peut écrire :

$$F = \left[5(3-7x)\right]^2 - \left[3(2x+5)\right]^2.$$

Ainsi, F est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 5(3-7x)$ et $b = 3(2x+5)$, d'où :

$$\begin{aligned} F &= \left[5(3-7x)-3(2x+5)\right]\left[5(3-7x)+3(2x+5)\right] \\ &= (15-35x-6x-15)(15-35x+6x+15) \\ &\boxed{F = -41x(30-29x)} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.17 page 65

$$\begin{aligned} J &= (9x+18)(x+2) - (4x+20)(x+5) \\ &= 9(x+2)(x+2) - 4(x+5)(x+5) \\ &= [3(x+2)]^2 - [2(x+5)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2\text{, avec } a = 3(x+2) \text{ et } b = 2(x+5) \\ &= [3(x+2)-2(x+5)][3(x+2)+2(x+5)] \\ &= (3x+6-2x-10)(3x+6+2x+10) && \text{on développe dans les crochets} \\ &= \underline{(x-4)(5x+16)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{K} &= 2(2x+3)\color{red}{(4x+6)} - 3(3x+2)\color{blue}{(9x+6)} \\
&= 2(2x+3)\times \color{red}{2(2x+3)} - 3(3x+2)\times \color{blue}{3(3x+2)} \\
&= [2(2x+3)]^2 - [3(3x+2)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2 \\
&= [2(2x+3)-3(3x+2)][2(2x+3)+3(3x+2)] \\
&= (4x+6-9x-6)(4x+6+9x+6) && \text{on développe dans les crochets} \\
&= \underline{-5x(13x+12)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{L} &= 7(7x+1)\color{red}{(49x+7)} + \color{green}{(1-4x)}\color{blue}{(16x-4)} \\
&= 7(7x+1)\times \color{red}{7(7x+1)} \color{green}{-(4x-1)}\times \color{blue}{4(4x-1)} \\
&= [7(7x+1)]^2 - [2(4x-1)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2-b^2 \\
&= [7(7x+1)-2(4x-1)][7(7x+1)+2(4x-1)] \\
&= (49x+7-8x+2)(49x+7+8x-2) && \text{on développe dans les crochets} \\
&= \underline{(41x+9)(57x+5)}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.18 page 65

Remarque 37

Rappelons avant tout les trois identités remarquables :

Formes factorisées = Formes développées
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

Quand on souhaite factoriser à l'aide d'une identité remarquable, il faut lire ces égalités de droite à gauche :

Formes développées = Formes factorisées
$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

1 A $= x^2+2x+1$.

Nous voyons qu'il y a trois termes dans cette expression; or, seules les deux premières égalités développées comportent trois termes.

De plus, il n'y a que des signes « + » donc seule la première égalité ne peut convenir.

Il faut donc que :

$$x^2+2x+1 = a^2+2ab+b^2\,,$$

ce qui signifie que nous devons avoir :

$$\begin{cases} a^2 = x^2 \\ b^2 = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = x \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{par exemple.}$$

On vérifie que le double produit ($2ab$) est correct :

$$2\times x\times 1 = 2x\,;$$

donc :

$$\boxed{x^2 + 2x + 1) = (x + 1)^2}$$

2 B $= 9x^2 - 12x + 4$.

Nous voyons qu'il y a trois termes dans cette expression ; or, seules les deux premières égalités développées comportent trois termes.

De plus, il y a un signe « – » donc seule la deuxième égalité ne peut convenir.

Il faut donc que :

$$9x^2 - 12x + 4 = a^2 - 2ab + b^2 ,$$

ce qui signifie que nous devons avoir :

$$\begin{cases} a^2 = 9x^2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 3x \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{par exemple.}$$

On vérifie que le double produit ($2ab$) est correct :

$$2 \times 3x \times 2 = 12x ;$$

donc :

$$\boxed{9x^2 - 12x + 4) = (3x + 2)^2}$$

3 C $= x^2 - 9$.

Il n'y a que deux termes dans cette expression donc seule la troisième identité remarquable ne peut convenir. On a :

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = a^2 - b^2 \text{ avec } a = x \text{ et } b = 3$$

donc :

$$\boxed{x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)}$$

4 D $= 4x^2 + 12x + 9$.

On peut écrire :

$$\mathrm{D} = (2x)^2 + 2 \times 6x + 3^2.$$

Ainsi, D est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$, d'où :

$$\boxed{\mathrm{D} = (2x + 3)^2}$$

5 E $= \dfrac{1}{4}x^2 - 5x + 25$.

On peut écrire :

$$\mathrm{E} = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{5}{2}x + 5^2.$$

Ainsi, E est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \dfrac{1}{2}x$ et $b = 5$, d'où :

$$\boxed{\mathrm{E} = \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^2}$$

6 $F = 25 - 4x^2$.

On peut écrire :

$$F = 5^2 - (2x)^2$$

donc F est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 5$ et $b = 2x$, d'où :

$$\boxed{(5-2x)(5+2x)}$$

7 $G = 81x^2 + 126x + 49$.

On peut écrire :

$$G = (9x)^2 + 2 \times 63x + 7^2 = (9x)^2 + 2 \times 9x \times 7 + 7^2$$

donc G est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 9x$ et $b = 7$, d'où :

$$\boxed{G = (9x+7)^2}$$

8 $H = 121x^2 - 64$.

On peut écrire :

$$H = (11x)^2 - 8^2$$

donc H est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 11x$ et $b = 8$, d'où :

$$\boxed{H = (11x-8)(11x+8)}$$

Corrigé de l'exercice 3.19 page 65

1 $A = 897\,526^2 - 897\,525 \times 897\,527$.

Posons $x = 897\,526$. Alors,

$$\begin{aligned} A &= x^2 - (x-1)(x+1) \\ &= x^2 - (x^2 - 1^2) \\ &= x^2 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 1}$$

2 $B = 100\,001^2 - 99\,999^2$.

Posons $x = 100\,000$. Alors,

$$\begin{aligned} B &= (x+1)^2 - (x-1)^2 \\ &= \big[(x+1)-(x-1)\big]\big[(x+1)+(x-1)\big] \\ &= 4x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{B = 4 \times 100\,000 = 400\,000}$.

Corrigé de l'exercice 3.20 page 66

1

$$\begin{aligned} & -3x + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -3x = -7 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{-7}{-3} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{S = \left\{\frac{7}{3}\right\}} \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5}x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{5}x = 6 \\ \Leftrightarrow\ & x = 6 \times \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{S = \{10\}} \end{aligned}$$

3 $$-\frac{2}{7}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{21}x+2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{7}x-\frac{2}{21}x=2-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{21}x=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{21}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{-\frac{63}{16}\right\}}$$

4 $$(-3x+1)(5x-7)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+1=0 \text{ ou } 5x-7=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ ou } x=\frac{7}{5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{\frac{1}{3}\,;\,\frac{7}{5}\right\}}$$

5 $$\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-5=0 \text{ ou } \frac{3}{4}x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-10 \text{ ou } x=-\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{-10\,;\,-\frac{8}{3}\right\}}$$

6 $$2x(5x-1)(2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x=0 \text{ ou } 5x-1=0 \text{ ou } 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{5} \text{ ou } x=-\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{0\,;\,\frac{1}{5}\,;\,-\frac{3}{2}\right\}}$$

7 $$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1},\ x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2+1=2x,\ x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0,\ x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2=0,\ x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow x=1,\ x\neq 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S=\varnothing}$$

8 $$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2 \text{ et } x\neq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2 \text{ et } x\neq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2 \text{ et } x\neq 2$$

$$\Leftrightarrow x-2=1,\ x\neq 2 \text{ et } x\neq -2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S=\{3\}}$$

9 $$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=2,\ x\neq 0 \text{ et } x\neq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=\frac{2x(x+1)}{x(x+1)},\ x\neq 0 \text{ et } x\neq -1$$

$$\Leftrightarrow x+1+x=2x(x+1),\ x\neq 0 \text{ et } x\neq -1$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=2x^2+2x,\ x\neq 0 \text{ et } x\neq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2},\ x\neq 0 \text{ et } x\neq -1$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \boxed{S=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}}$$

10 $\dfrac{2}{x-1} = 1 - \dfrac{x}{x+1},\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)},\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2(x+1) = x^2 - 1 - x(x-1),\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = x^2 - 1 - x^2 + x,\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2x + 2 - x^2 + 1 + x^2 - x = 0,\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0,\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$

$\Leftrightarrow x = -3,\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$

$\Leftrightarrow \boxed{\text{S} = \{-3\}}$

Corrigé de l'exercice 3.21 page 66

1 $(3x-5)^2 = 16 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} 3x-5=4 \\ \text{ou} \\ 3x-5=-4 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} 3x=9 \\ \text{ou} \\ 3x=1 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x=3 \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{3\,;\dfrac{1}{3}\right\}}$.

2 $\left(x^2-4\right)^2 = 81 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x^2-4=9 \\ \text{ou} \\ x^2-4=-9 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x^2=13 \\ \text{ou} \\ x^2=-5 \quad \longleftarrow \text{impossible car } x^2 \geqslant 0 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x=\sqrt{13} \\ \text{ou} \\ x=-\sqrt{13} \end{array}\right.$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{13}\,;\sqrt{13}\right\}}$.

3 $(3x^2-4)^2=9 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} 3x^2-4=3 \\ \text{ou} \\ 3x^2-4=-3 \end{array}\right.$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} 3x^2=7 \\ \text{ou} \\ 3x^2=1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x^2=\dfrac{7}{3} \\ \text{ou} \\ x^2=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x=\sqrt{\dfrac{7}{3}} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\sqrt{\dfrac{7}{3}};-\sqrt{\dfrac{7}{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}}$.

4 $\left(\dfrac{2x-1}{x-7}\right)^2=25 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x-7}=5 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}=-5 \end{array}\right. \\ x-7\neq 0 \end{array}\right.$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x-7}-5=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+5=0 \end{array}\right. \\ x\neq 7 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x-7}-\dfrac{5(x-7)}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+\dfrac{5(x-7)}{x-7}=0 \end{array}\right. \\ x\neq 7 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x-7}-\dfrac{5x-35}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+\dfrac{5x-35}{x-7}=0 \end{array}\right. \\ x\neq 7 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1-5x+35}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1+5x-35}{x-7}=0 \end{array}\right. \\ x\neq 7 \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25 \iff \begin{cases} \begin{cases} 2x-1-5x+35=0 \\ \text{ou} \\ 2x-1+5x-35=0 \end{cases} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} -3x+34=0 \\ \text{ou} \\ 7x-36=0 \end{cases} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x=\dfrac{34}{3} \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{36}{7} \end{cases} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{36}{7}\,;\frac{34}{3}\right\}}$.

Corrigé de l'exercice 3.22 page 66

1 **a.** Dans le triangle équilatéral ABC, $\widehat{ABC} = 60°$.
Dans le triangle NBM rectangle en M,

$$\tan\widehat{NBM} = \frac{NM}{BM}$$

donc :

$$\tan 60° = \frac{NM}{x}.$$

On a donc :

$$\boxed{MN = x\tan 60° = x\sqrt{3}}$$

b. Par symétrie, $BM = QC = x$ et $MH = HQ = 3 - x$.
Donc, $MQ = 2 \times (3 - x)$, soit $\boxed{MQ = 6 - 2x}$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. La condition mène à l'égalité :

$$MQ = MN$$

c'est-à-dire, d'après la question 1 :

$$\boxed{x\sqrt{3} = 6 - 2x}$$

b. Si $x\sqrt{3} = 6 - 2x$, alors $x\sqrt{3} + 2x = 6$.
Ainsi, $\left(\sqrt{3}+2\right)x = 6$, soit :

$$\boxed{x = \frac{6}{2+\sqrt{3}}}$$

En mathématiques, on a souvent l'habitude de ne pas laisser les résultats sous cette forme (avec un radical au dénominateur).
On continue donc le calcul ainsi :

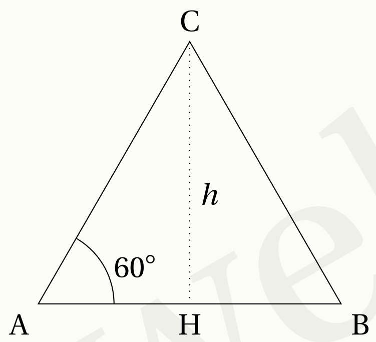
$$\begin{aligned}\frac{6}{2+\sqrt{3}} &= \frac{6\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{12-6\sqrt{3}}{4-3}\\ &= 12-6\sqrt{3}\end{aligned}$$

de sorte à ce que le dénominateur soit entier.
On peut s'assurer que $x < 3$ en trouvant une valeur approchée :

$$x \approx 1,6.$$

Corrigé de l'exercice 3.23 page 67

1 **a.** Nous avons le schéma suivant :



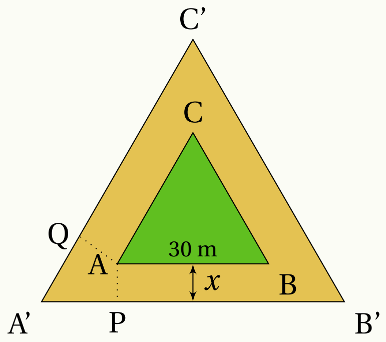
Dans le triangle ACH rectangle en H :

$$\sin 60° = \frac{h}{\text{AC}} \qquad \text{donc} \qquad h = \text{AC}\sin 60° = 30\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{15\sqrt{3}}.$$

b. L'aire d'un triangle est donnée par la formule : $\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$ donc l'aire de ABC est :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{AB}\times h}{2} = \frac{30\times 15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\mathscr{A} = 225\sqrt{3}\ \text{m}^2}$$

2 **a.** Considérons les points P et Q comme indiqués ci-dessous, de sorte que AA'P et AA'Q soient rectangles respectivement en P et Q (voir schéma page suivante).



$$\left.\begin{array}{l}\text{AP} = \text{AQ}\\ (\text{AP}) \perp (\text{A}'\text{B}') \text{ et } (\text{AQ}) \perp (\text{A}'\text{C}')\end{array}\right\} \Rightarrow (\text{A}'\text{A}) \text{ est la bissectrice de } \widehat{\text{B}'\text{A}'\text{C}'}.$$

Ainsi, $\widehat{\text{B}'\text{A}'\text{A}} = 30°$. Dans le triangle A'AP, rectangle en P, on a donc :

$$\tan\widehat{\text{PA}'\text{A}} = \frac{\text{AP}}{\text{A}'\text{P}} \Rightarrow \text{A}'\text{P} = \frac{\text{AP}}{\tan 30°} \Rightarrow \text{A}'\text{P} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \text{A}'\text{P} = x\sqrt{3}.$$

Pour des raisons de symétrie de la figure, on a : $\text{A}'\text{B}' = 2\text{A}'\text{P} + \text{AB}$, soit $\underline{\text{A}'\text{B}' = 30 + 2x\sqrt{30}}$.

b. D'après ce qui a été fait dans la question **1** b., l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}' &= (\text{A}'\text{B}')^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= \left(30 + 2x\sqrt{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= \left[2\left(15 + x\sqrt{3}\right)\right]^2\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}' = \left(15 + x\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}$$

3 **a.** L'aire de l'allée $(\mathscr{A}' - \mathscr{A})$ est égale à celle du jardin $(\mathscr{A})$ donc $\mathscr{A}' - \mathscr{A} = \mathscr{A}$.

En ajoutant $\mathscr{A}$ à droite et à gauche du signe « = », on arrive à l'équation : $\mathscr{A}' = 2\mathscr{A}$.

b.
$$\begin{aligned}\mathscr{A}' = 2\mathscr{A} &\iff \left(15 + x\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3} = 450\sqrt{3}\\ &\iff \left(15 + x\sqrt{3}\right)^2 = 450\\ &\iff 15 + x\sqrt{3} = \sqrt{450} \qquad (\text{car } 15 + x\sqrt{3} > 0)\\ &\iff x\sqrt{3} = \sqrt{450} - 15\\ &\iff x = \frac{\sqrt{450} - 15}{\sqrt{3}}\\ &\iff x = \frac{15\sqrt{2} - 15}{\sqrt{3}}\\ &\iff x = \frac{15\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{3}}{3}\\ &\iff \boxed{x = 5\sqrt{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.24 page 67

Remarque 38

Dès lors que l'équation à résoudre est de la forme :

$$\sqrt{f(x)} = a,$$

où f est une fonction et a un nombre réel positif, il faut s'assurer avant tout que ce qu'il y a sous la racine carrée soit positif ou nul ; c'est la première condition.
Ensuite, on élève au carré chaque membre de l'équation pour résoudre l'équation :

$$f(x) = a^2.$$

1 $\sqrt{3x-2} = 7 \iff \begin{cases} 3x-2 \geqslant 0 \\ 3x-2 = 7^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3x \geqslant 2 \\ 3x = 49+2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x = \dfrac{51}{3} = 17 \end{cases}$$

$17 \geqslant \dfrac{2}{3}$ donc l'ensemble solution de l'équation est : $\boxed{\mathscr{S} = \{17\}}$.

2 $\sqrt{\dfrac{5x-4}{3x+1}} = 3 \iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ 3x+1 \neq 0 \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} = 9 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} - \dfrac{9(3x+1)}{3x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4-27x-9}{3x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}}=3 \iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1}\geqslant 0 \\ x\neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-22x-13}{3x+1}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1}\geqslant 0 \\ x\neq -\dfrac{1}{3} \\ -22x-13=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1}\geqslant 0 \\ x\neq -\dfrac{1}{3} \\ x=-\dfrac{13}{22} \end{cases}$$

On calcule maintenant $\dfrac{5x-4}{3x+1}$ pour $x=-\dfrac{13}{22}$ afin de voir si cette solution est valable :

$$\frac{5x-4}{3x+1}=9>0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{13}{22}\right\}}$.

3 $$\sqrt{x^2+x+1}=x+1 \iff \begin{cases} x^2+x+1\geqslant 0 \\ x+1\geqslant 0 \\ x^2+x+1=(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+x+1\geqslant 0 \\ x\geqslant -1 \\ x^2+x+1=x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+x+1\geqslant 0 \\ x\geqslant -1 \\ x=0 \end{cases}$$

On vérifie que $x^2+x+1\geqslant 0$ pour $x=0$ (assez facilement) donc $\boxed{\mathscr{S}=\{0\}}$.

4
$$\begin{aligned}
x\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{7}-x\sqrt{2} &\iff x\sqrt{7}+x\sqrt{2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}\\
&\iff x\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{7}-\sqrt{2}\\
&\iff x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\\
&\iff x=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}\\
&\iff x=\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\
&\iff x=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{9-2\sqrt{14}}{5}\right\}}$.

5
$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-2)(3x+4)}=2(3x+4) &\iff \begin{cases} 2(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)=\left[2(3x+4)\right]^2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 3x+4\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)=4(3x+4)^2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 3x\geqslant -4\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)-4(3x+4)^2=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)\left[(x-2)-4(3x+4)\right]=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)(x-2-12x-16)=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)(-11x-18)=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l} 3x+4=0\\ \text{ou}\\ -11x-18=0\end{array}\right.\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) \iff \begin{cases} x \geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{18}{11} \end{array}\right. \end{cases}$$

On regarde maintenant si $(x-2)(3x+4) \geqslant 0$ pour $x = -\dfrac{4}{3}$ et pour $x = -\dfrac{18}{11}$.

Pour $x = -\dfrac{4}{3}$, on obtient 0, donc cette valeur convient.

Pour $x = -\dfrac{18}{11}$, on obtient $\dfrac{400}{121} > -\dfrac{4}{3}$ donc cette valeur convient.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{4}{3}\,;\,-\dfrac{18}{11}\right\}}$.

Corrigé de l'exercice 3.25 page 67

Notons x le nombre de contrats du représentant. Alors, son salaire se calcule en faisant :

$$800 + 152x.$$

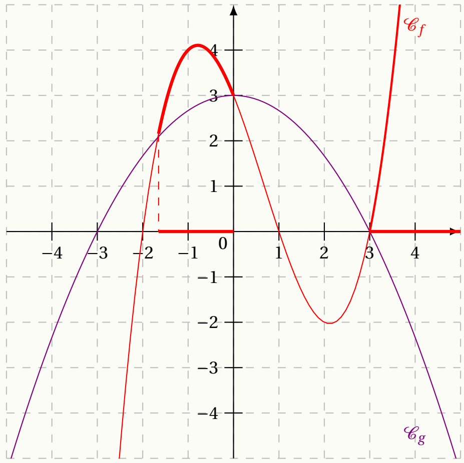
On cherche donc x tel que :

$$\begin{aligned} 800 + 152x &\geqslant 2\,300 \\ 152x &\geqslant 2\,300 - 800 \\ 152x &\geqslant 1\,500 \\ x &\geqslant \frac{1\,500}{152} \\ x &\geqslant 9,87 \end{aligned}$$

Il faut donc que le représentant vende au moins 10 contrats.

Corrigé de l'exercice 3.26 page 68

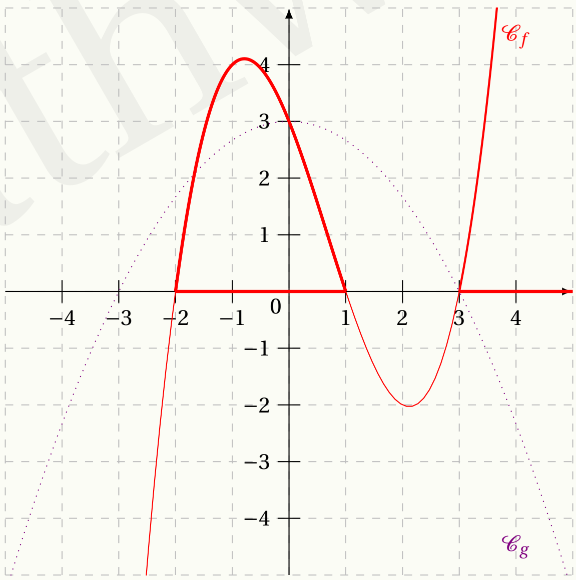
1. $f(x) > g(x)$: il faut regarder les portions de courbes de $\mathscr{C}_f$ qui sont au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.



Les intervalles de x qui correspondent à ces « morceaux » de courbes sont $]-1,6;0[$ et $]3;5]$ (les bornes ne sont pas incluses – sauf 5 – car l'inégalité doit être stricte : $f(x) > g(x)$. L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{S =]-1,6;0[\cup]3;5]}$$

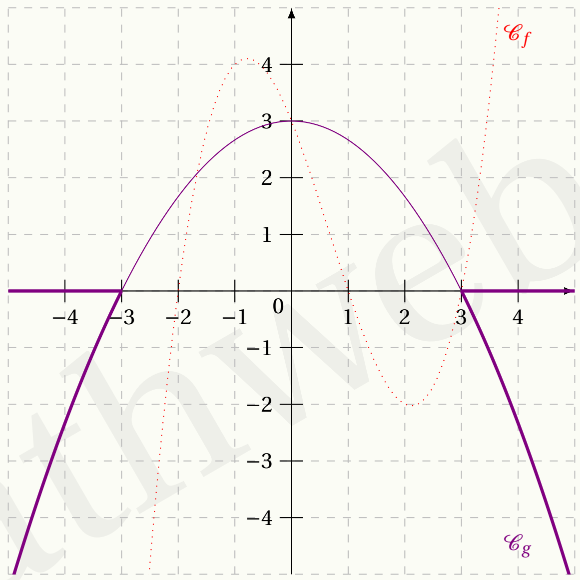
2 $f(x) \geqslant 0$. Il faut regarder les portions de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont au-dessus de l'axe des abscisses.



L'ensemble solution est :

$$\boxed{S = [-2;1] \cup [3;5]}$$

3 $g(x) \leqslant 0$. Il faut regarder ici les morceaux de la courbe $\mathscr{C}_g$ sous l'axe des abscisses.



L'ensemble solution est :

$$\boxed{S = [-5\,;-3] \cup [3\,;5]}$$

Corrigé de l'exercice 3.27 page 68

Pour tous nombres a et b positifs tels que $a \neq b$,

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 > 0 \text{ donc } & \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 > 0 \\
& \text{donc } a - 2\sqrt{ab} + b > 0 \\
& \text{donc } a + b > 2\sqrt{ab} \\
& \text{donc } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \text{ (en divisant par 2, nombre positif)} \\
& \text{donc } m > g.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.28 page 68

1 Un algorithme possible est le suivant :

```
Initialisation
  U ← 1
  N ← 0
Traitement
  Tant que U ⩽ 1000000:
     N ← N+1
     U ← 2^N
  Fin du Tant Que
Sortie:   Afficher N
```

2 Le programme Python correspondant à cet algorithme est :

```python
u = 1
n = 0
while u <= 1000000:
    n = n + 1
    u = 2**n
print(n)
```
Code Python 3-7

Il affiche la valeur « 20 », ce qui signifie que $2^{19} \leqslant 10^6$ et $2^{20} > 10^6$.

Corrigé de l'exercice 3.29 page 68

1 Un algorithme possible est le suivant :

```
Initialisation
  U ← 1
  N ← 0
Traitement
  Tant que U ⩾ 0.00000001:
     N ← N+1
     U ← 3^-N
  Fin du Tant Que
Sortie:   Afficher N
```

2 Le programme Python correspondant à cet algorithme est :

```python
u = 1
n = 0
while u >= 0.00000001:
    n += 1
    u = 3**(-n)
print(n)
```
Code Python 3-8

Il affiche la valeur « 17 », ce qui signifie que $3^{-16} \geqslant 10^{-8}$ et $3^{-17} < 10^{-8}$.

4

Repérage dans le plan

Plan du chapitre

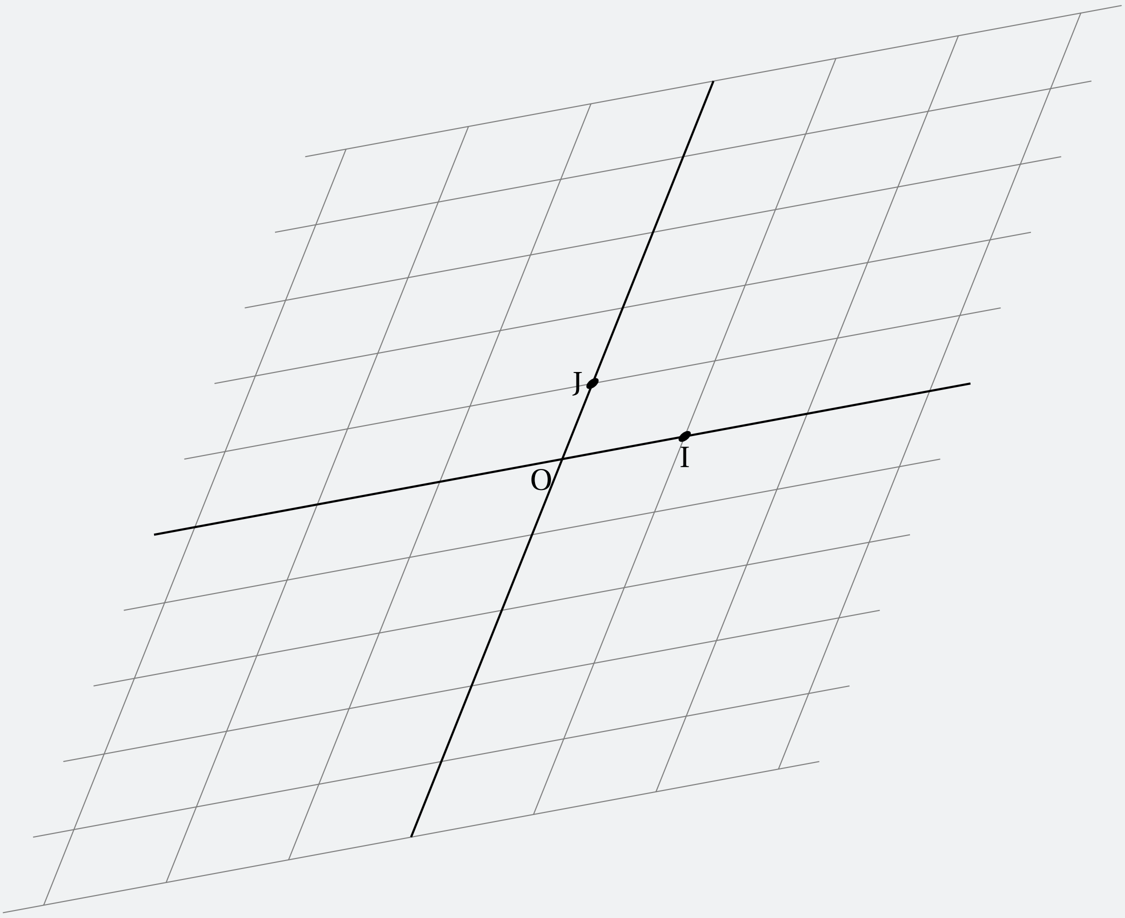
I - Repère

I . 1 - Définition générale

Définition 20

Soient O, I et J trois points du plan euclidien tels que $I \notin (OJ)$.
Alors, on dit que $(O\,;I,J)$ est un repère cartésien du plan.

Cela signifie que l'on fait un *maillage* du plan en traçant des droites parallèles à (OI) et parallèles à (OJ) comme ceci :



Afin de faciliter les représentations futures, on fera en sorte que (OI) et (OJ) soient perpendiculaires, ce qui rend le repère **orthogonal**.
Si de plus $OI = OJ$ alors le repère est dit **orthonormé** (*ortho* = « angle droit » et *normé* signifie que $OI = OJ$).

Les droites (OI) et (OJ) sont orientées (comme la droite graduée représentant les nombres réels). Un repère est donc constitué de deux droites graduées qui se coupent en « 0 ». Ces deux droites sont alors appelées les **axes** du repère.

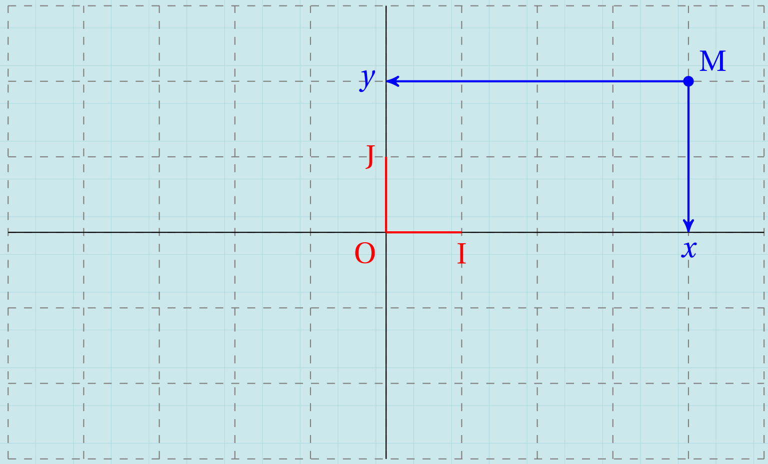
Dans la suite de ce chapitre, on se placera dans un repère orthonormé.

I . 2 - Coordonnées d'un point

Définition 21

On considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J).
Soit M un point quelconque du plan.
Par M, on trace la parallèle à (OJ) ; elle coupe (OI) en x.
Par M, on trace la parallèle à (OI) ; elle coupe (OJ) en y.
Alors, x est appelé l'**abscisse** de M et y, son **ordonnée**.
Le couple $(x\,;y)$ représente les **coordonnées** du point M, et on note : $\mathrm{M}(x\,;y)$.

Exemple 31



Ici, M(4 ; 2). Son abscisse est 4, son ordonnée est 2.

II - Distance entre deux points

Propriété 26

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Dans ce repère, soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ deux points quelconques.
Alors, la distance entre A et B est donnée par la formule :

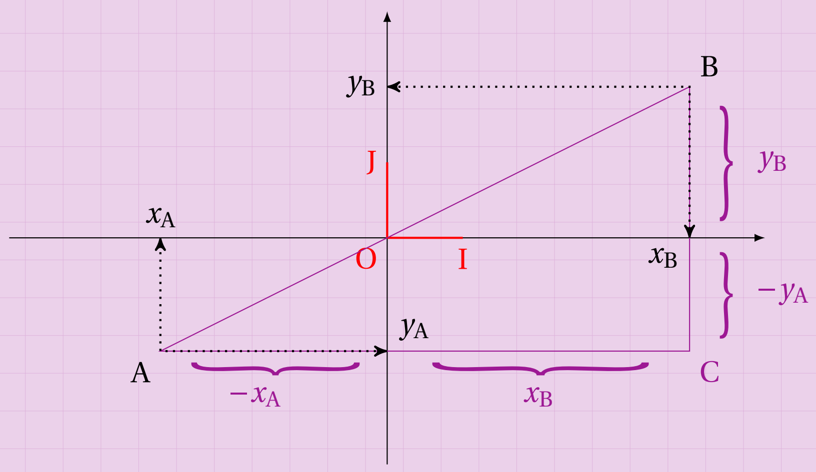
$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}.$$

Exemple 32

Soient A(−3 ; 2) et B(5 ; −7). Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{(5-(-3))^2+(-7-2)^2}\\ &= \sqrt{8^2+(-9)^2}\\ \boxed{\mathrm{AB}} &\boxed{= \sqrt{145}}\end{aligned}$$

Démonstration 7



Le repère est orthonormé donc le triangle ABC tracé en bleu est rectangle en C.
Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Or,

$$AC = |x_B - x_A|, \text{ donc } AC^2 = |x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$$

et

$$BC = |y_B - y_A|, \text{ donc } BC^2 = |y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2.$$

Donc,

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2.$$

En prenant la racine carrée de chacun des membres de cette dernière égalité, on a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}.$$

III - Milieu d'un segment

Propriété 27

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Dans ce repère, soient $A\left(x_A ; y_A\right)$ et $B\left(x_B ; y_B\right)$ deux points quelconques.
Soit $M\left(x_M ; y_M\right)$ le milieu du segment [AB]. Alors,

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

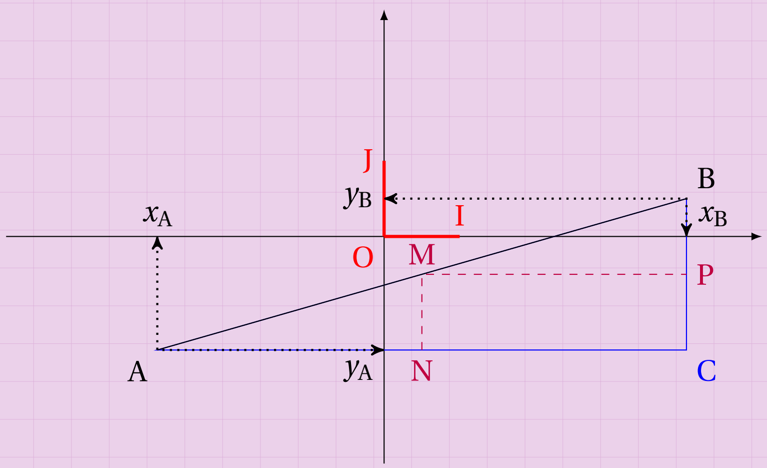
Exemple 33

Soient A$(1;7)$ et B$(3;-1)$. Soit M le milieu de [AB] ; donc :

$$x_M = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{7+(-1)}{2} = 3.$$

Démonstration 8

On construit le triangle ABC rectangle en C comme indiqué ci-dessous :



On trace la parallèle à (BC) passant par M; elle coupe [AC] en N.
On trace la parallèle à (AC) passant par M; elle coupe [BC] en P.
D'après le théorème des milieux, P est le milieu de [BC] et N celui de [AC].
Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{AN} &= \frac{1}{2}\text{AC} \\ \text{AN} &= \frac{1}{2}(x_C - x_A) \\ \text{AN} &= \frac{1}{2}x_C - \frac{1}{2}x_A \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} x_N &= x_A + \text{AN} \\ x_N &= x_A + \frac{1}{2}x_C - \frac{1}{2}x_A \\ x_N &= \frac{1}{2}x_A + \frac{1}{2}x_C \\ x_M = x_N &= \frac{x_A + x_B}{2} \text{ car } x_C = x_B. \end{aligned}$$

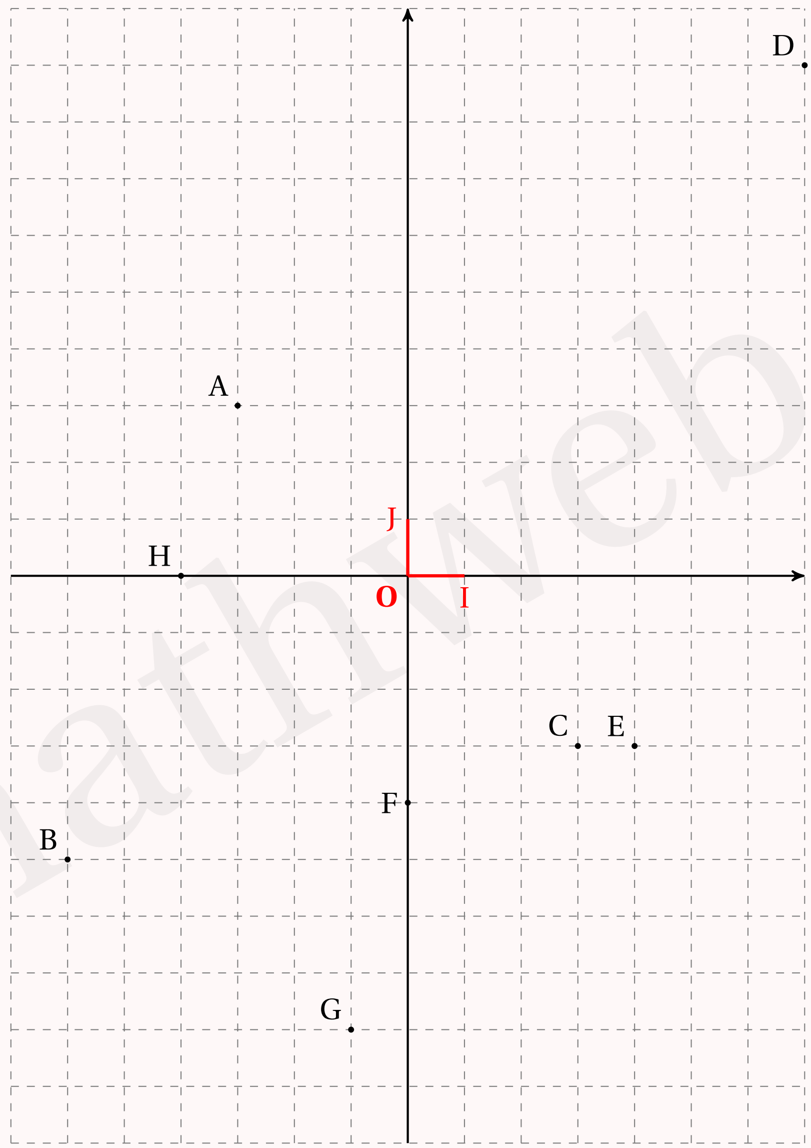
$$\begin{aligned} \text{PC} &= \frac{1}{2}\text{BC} \\ \text{PC} &= \frac{1}{2}\left(y_B - y_C\right) \text{ (il faut que PC} \geqslant 0) \\ \text{PC} &= \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_C \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} y_P &= y_C + \text{PC} \\ y_P &= y_C + \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_C \\ y_P &= \frac{1}{2}y_B + \frac{1}{2}y_C \\ y_M = y_P &= \frac{y_A + y_B}{2} \text{ car } y_C = y_A. \end{aligned}$$

Exercice 4.1 (lecture de coordonnées de points)

Dans le repère suivant, donner les coordonnées de tous les points.



Solution page 103

Exercice 4.2 (calculs de longueurs)

Pour chaque question, déterminer la longueur AB.

1 $A(-2;3)$ et $B(-3;5)$

2 $A(3;2)$ et $B(8;1)$

3 $A(-1;-3)$ et $B(-4;-6)$

4 $A(3;-2)$ et $B(-2;7)$

5 $A(1;-2)$ et $B(7;-5)$

6 $A(1;4)$ et $B(-2;-1)$

Solution page 103

Exercice 4.3 (milieu d'un segment)

Pour chacun des points A et B suivants, calculer les coordonnées du point I, milieu de [AB].

1. $A(1;2)$ et $B(3;4)$.
2. $A(-1;2)$ et $B(-3;4)$.
3. $A(2;-1)$ et $B(4;-5)$.
4. $A(-1;-1)$ et $B(5;-7)$.

Solution page 104

Exercice 4.4 (milieu d'un segment)

Pour chacune des questions suivantes, on a les coordonnées d'un point A ainsi que celles du point M, milieu de [AB].
Déterminer les coordonnées du point B.

1. $A(1;2)$ et $M(3;4)$.
2. $A(-1;2)$ et $M(-3;4)$.
3. $A(2;-1)$ et $M(4;-5)$.
4. $A(-1;-1)$ et $M(5;-7)$.

Solution page 105

Exercice 4.5 (exercice récapitulatif de base)

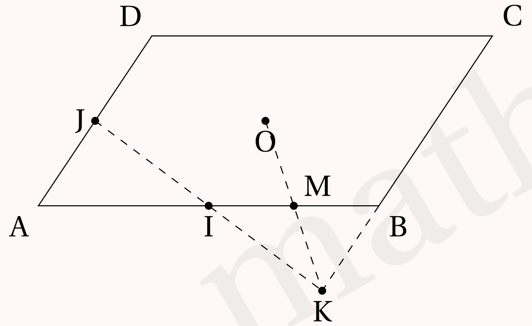
Dans le repère orthonormé (O,I,J), on considère les points $A(-1;1)$, $B(5;-3)$ et $C(4;2)$.

1. Placer les points A, B et C. Vous compléterez au fur et à mesure la figure.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Déterminer les coordonnées du point F, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
4. Calculer les coordonnées du milieu E de [AC].
5. En déduire les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
6. Sans calcul, donner la longueur EF.
7. Déterminer les coordonnées de G, symétrique de C par rapport à F.

Solution page 106

Exercice 4.6 (lire des coordonnées dans un parallélogramme)

ABCD est un parallélogramme. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AD]. On note K le point d'intersection des droites (IJ) et (BC).
On note O le centre du parallélogramme ABCD et M le point d'intersection des droites (OK) et (AB).



Dans le repère (A; B,D), donner les coordonnées de chacun de ces points.

Solution page 108

Exercice 4.7 (exercice de recherche)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;5)$, $B(1;-2)$ et $C(3;y)$, où y est un nombre réel.

Déterminer la valeur de y afin que ABC soit un triangle rectangle en A.

Solution page 109

Exercice 4.8 (algorithme et programme Python)

Écrire un algorithme permettant de calculer la longueur entre deux points A et B connaissant leurs coordonnées, ainsi que les coordonnées du milieu de [AB].
Écrire deux fonctions Python `milieu(A,B)` et `distance(A,B)`, où les arguments `A` et `B` désignent respectivement les coordonnées des points A et B (par exemple, `A=(-3,2)` si $A(-3;2)$), qui renvoient respectivement les coordonnées du milieu de [AB] et la distance entre A et B.

Solution page 109

Exercice 4.9 (trouver un point)

Soient $A(-3;5)$ et $B(5;2)$ dans un repère orthonormé $(O;I,J)$.
On sait que $M(x;y)$ est à 3 unités de A et à 6 unités de B.

1 Montrer que :

$$\begin{cases} x^2+y^2=10y-6x-25 & \text{à l'aide du point A,} \\ x^2+y^2=4y+10x+7 & \text{à l'aide du point B.} \end{cases}$$

En déduire que $y=\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}$.

2 Montrer alors que $73x^2+70x+1=0$ (on ne demande pas de résoudre cette équation).

3 Tracer la courbe de la fonction $f(x)=73x^2+70x+1$ sur votre calculatrice. Conjecturer alors le nombre de valeurs de x possibles.

Solution page 110

Corrigé de l'exercice 4.1 page 100

- $A(-3;3)$
- $B(-6;-5)$
- $C(3;-3)$
- $D(7;9)$
- $E(4;-3)$
- $F(0;-4)$
- $G(-1;-8)$
- $H(-4;0)$

Corrigé de l'exercice 4.2 page 100

1 $A(-2;3)$ et $B(-3;5)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(-3-(-2)\right)^2+(5-3)^2} \\ &= \sqrt{(-3+2)^2+2^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2+2^2} \\ &= \sqrt{1+4} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB=\sqrt{5}}$$

2 $A(3;2)$ et $B(8;1)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(8-3)^2+(1-2)^2} \\ &= \sqrt{5^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{25+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB=\sqrt{26}}$$

3 $A(-1;-3)$ et $B(-4;-6)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(-4-(-1)\right)^2+\left(-6-(-3)\right)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{9+9} \\ &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB=3\sqrt{2}}$$

4 $A(3;-2)$ et $B(-2;7)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2-3)^2+\left(7-(-2)\right)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2+9^2} \\ &= \sqrt{25+81} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB=\sqrt{106}}$$

5 A(1 ; −2) et B(7 ; −5).

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(7-1)^2+\left(-5-(-2)\right)^2} \\ &= \sqrt{6^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{36+9} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{9\times 5} \\ &= \sqrt{9}\times\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB = 3\sqrt{5}}$$

6 A(1 ; 4) et B(−2 ; −1).

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2-1)^2+(-1-4)^2} \\ &= \sqrt{9+25} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{34}}$$

Corrigé de l'exercice 4.3 page 101

1 A(1 ; 2) et B(3 ; 4).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2. \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M\,(2\,;3)}$

2 A(−1 ; 2) et B(−3 ; 4).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{-1+(-3)}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2. \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M\,(-2\,;3)}$

3 A(2 ; −1) et B(4 ; −5).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3. \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{-1+(-5)}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M\,(3\,;-3)}$

4 A(−1 ; −1) et B(5 ; −7).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2. \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{-1+(-7)}{2} = \dfrac{-8}{2} = 4. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{M\,(2\,;4)}$

Corrigé de l'exercice 4.4 page 101

1 A(1;2) et M(3;4).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 \times 3 - 1 = 5. \\ y_B = 2y_M - y_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(5;6)}$

2 A(−1;2) et M(−3;4).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 \times (-3) - (-1) = -6 + 1 = -5. \\ y_B = 2y_M - y_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(-5;6)}$

3 A(2;−1) et M(4;−5).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \\ y_B = 2y_M - y_A = 2 \times (-5) - (-1) = -10 + 1 = -9. \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(6;-9)}$

4 A(−1;−1) et M(5;−7).

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 \times 5 - (-1) = 11. \\ y_B = 2y_M - y_A = 2 \times (-7) - (-1) = -13. \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(11;-13)}$

Corrigé de l'exercice 4.5 page 101

1 La figure complétée est celle donnée en fin de correction page suivante (manque de place sur celle-ci).

2 Calculons la longueur des côtés du triangle ABC :

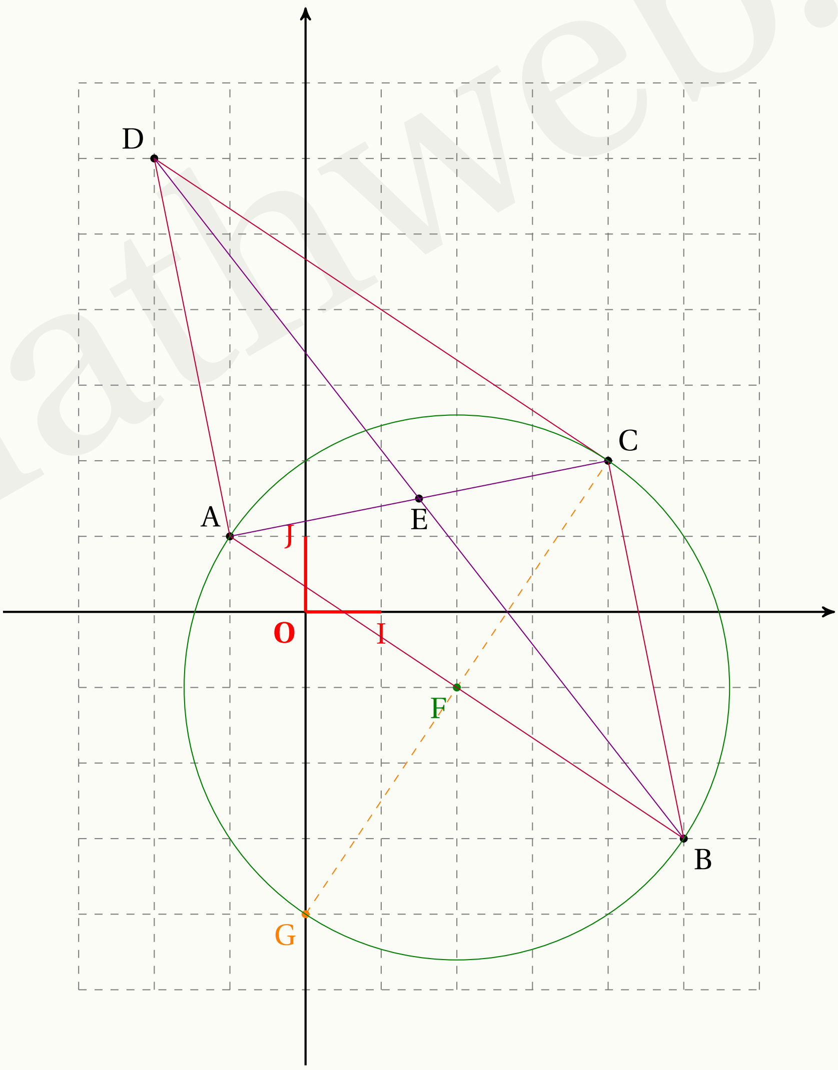
$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (5-(-1))^2 + (-3-1)^2 \\ &= 6^2 + (-4)^2 \\ &= 36+16 \\ AB^2 &= 52. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 \\ &= (4-(-1))^2 + (2-1)^2 \\ &= 5^2 + 1^2 \\ &= 25+1 \\ AC^2 &= 26. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ &= (4-5)^2 + (2-(-3))^2 \\ &= 1^2 + 5^2 \\ &= 1+25 \\ BC^2 &= 26. \end{aligned}$$

On remarque ainsi que $AB^2 = AC^2 + BC^2$ et que $AC^2 = BC^2$ (donc que $AC = BC$).
Le triangle ABC est donc rectangle isocèle en C.

3 Le triangle ABC étant rectangle en C, le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse, à savoir [AB].
Ainsi, $F\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, soit $F\left(\dfrac{-1+5}{2}\,;\dfrac{1-3}{2}\right)$, et donc $F(2\,;-1)$.



4 E est le milieu de [AC] donc $E\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$, soit $F\left(\frac{-1+4}{2};\frac{1+2}{2}\right)$, et donc $E\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

5 Si ABCD est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, F (qui est le milieu de [AC]) est le milieu de [BD]. On en déduit alors les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x_F = \dfrac{x_B+x_D}{2} \\ y_F = \dfrac{y_B+y_D}{2} \end{cases}$$

D'où, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} = \dfrac{5+x_D}{2} \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{-3+y_D}{2} \end{cases} \qquad \text{ou encore :} \qquad \begin{cases} 3 = 5+x_D \\ 3 = -3+y_D \end{cases}$$

On en déduit alors que $x_D = 3-5 = -2$ et $y_D = 3+3 = 6$.
Ainsi, $D(-2;6)$.

6 E et F sont les milieux respectifs de [AC] et [AB].

Ainsi, d'après le théorème des milieux appliqué au triangle ABC, $EF = \frac{BC}{2}$, soit $\boxed{EF = \frac{\sqrt{26}}{2}}$.

7 G est le symétrique de C par rapport à F donc F est le milieu de [CG]. Ainsi :

$$\begin{cases} x_F = \dfrac{x_C+x_G}{2} \\ y_F = \dfrac{y_C+y_G}{2} \end{cases}$$

et donc :

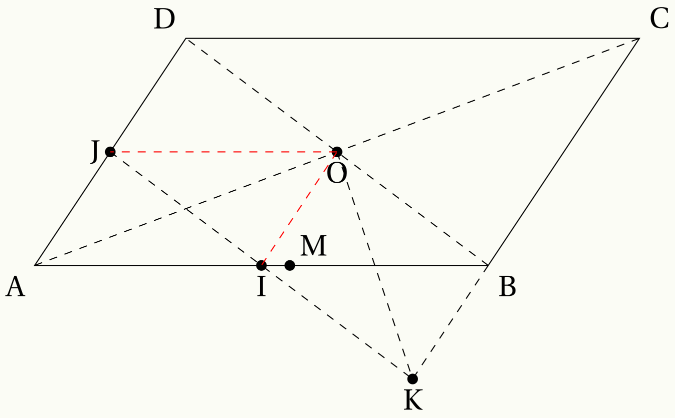
$$\begin{cases} 2 = \dfrac{4+x_G}{2} \\ -1 = \dfrac{2+y_G}{2} \end{cases}$$

ou encore, en multipliant par 2 de chaque côté du signe « = » :

$$\begin{cases} 4 = 4+x_G \\ -2 = 2+y_G \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $G(0;-4)$.

Corrigé de l'exercice 4.6 page 101



- $A(0\,;0)$ car A est l'origine du repère.
- $B(1\,;0)$ car B définit l'unité en abscisses.
- $D(0\,;1)$ car D définit l'unité en ordonnées.
- $I\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$ car I est le milieu de [AB].
- $J\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ car J est le milieu de [AD].
- $C(1\,;1)$ car (BC) // (AD) (donc l'abscisse de C vaut 1) et (CD) // (AB) (donc l'ordonnée de C vaut 1).
- Dans le triangle ABC, O est le milieu de [AC] et I celui de [AB] donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (OI) est parallèle à (BC) ; donc l'abscisse de O est égale à $\frac{1}{2}$.
  De même, dans le triangle ABD, on montre que (OJ) et (AB) sont parallèles donc l'ordonnée de O est égale à $\frac{1}{2}$.
  Finalement, $O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
- I, J, K d'une part, A, I, B d'autre part sont alignés. De plus, (AJ) et (BK) sont parallèles (ce qui signifie que l'abscisse de K vaut 1), donc I est le milieu de [JK] et AJ = BK, donc l'ordonnée de K vaut $-\frac{1}{2}$.
  Finalement, $K\left(1\,;-\frac{1}{2}\right)$.
- Dans le triangle ABD, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AD] donc (IJ) et (BD) sont parallèles. Ainsi, (IK) // (OB).
  De plus, (OI) // (AD) et (AD) // (BC) donc (IO) // (BK).
  Donc OIKB est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent donc en leur milieu ; donc M est le milieu de [IB].
  D'où $M\left(\frac{3}{4}\,;0\right)$.

Corrigé de l'exercice 4.7 page 102

$$
\begin{aligned}
\text{ABC rectangle en A} &\iff \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 \\
&\iff \left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2 = \left[\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2\right] \\
&\qquad + \left[\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2\right] \\
&\iff (3-1)^2 + (y+2)^2 = \left[(1+3)^2 + (-2-5)^2\right] + \left[(3+3)^2 + (y-5)^2\right] \\
&\iff 4 + \cancel{y^2} + 4y + 4 = 16 + 49 + 36 + \cancel{y^2} - 10y + 25 \\
&\iff 4y + 10y = 16 + 49 + 36 + 25 - 4 - 4 \\
&\iff 14y = 118 \\
&\iff \boxed{y = \frac{118}{14} = \frac{59}{7}}
\end{aligned}
$$

Corrigé de l'exercice 4.8 page 102

Un algorithme possible est le suivant :

Entrées:
  Coordonnées de A : x_A et y_A
  Coordonnées de B : x_B et y_B
Traitement:
  d $\leftarrow$ $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  x $\leftarrow$ $(x_A + x_B)/2$
  y $\leftarrow$ $(y_A + y_B)/2$
Sortie:
  Afficher : "AB = ", d
  Afficher : "Les coordonnées du milieu de [AB] sont : ", x , y

En Python, cela donne les deux fonctions suivantes :

Code Python 4-10

```python
def milieu(A,B):
    # A[0] est l'abscisse de A, A[1] est son ordonnée
    # B[0] est l'abscisse de B, B[1] est son ordonnée
    return (A[0]+B[0])/2 , (A[1]+B[1])/2

def distance(A,B):
    return ( (B[0]-A[0])**2 + (B[1]-A[1])**2 )**0.5
    # (...)**0.5 correspond à prendre la racine carrée
```

Corrigé de l'exercice 4.9 page 102

1 $A(-3\,;5)$ et $M(x\,;y)$ donc :

$$MA^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = (-3-x)^2 + (5-y)^2.$$

Or, $MA = 3$ (d'après l'énoncé) donc $MA^2 = 3^2 = 9$ d'où :

$$(-3-x)^2 + (5-y)^2 = 9$$

soit, en développant : $9 + 6x + x^2 + 25 - 10y + y^2 = 9$

ou encore : $\underline{x^2 + y^2 = 10y - 6x - 25.}$ (1)

$B(5\,;2)$ donc, de façon analogue à ce qui vient d'être fait :

$$(5-x)^2 + (2-y)^2 = 6^2 = 36$$

soit : $25 - 10x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 36$

ou encore : $\underline{x^2 + y^2 = 4y + 10x + 7}$ (2)

Des égalités (1) et (2), on déduit :

$$10y - 6x - 25 = 4y + 10x + 7$$

et donc :

$$6y = 16x + 32 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}}$$

2 À l'aide de l'égalité (2), en remplaçant y par $\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}$, on obtient :

$$x^2 + \left(\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}\right)^2 = 4\left(\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}\right) + 10x + 7$$

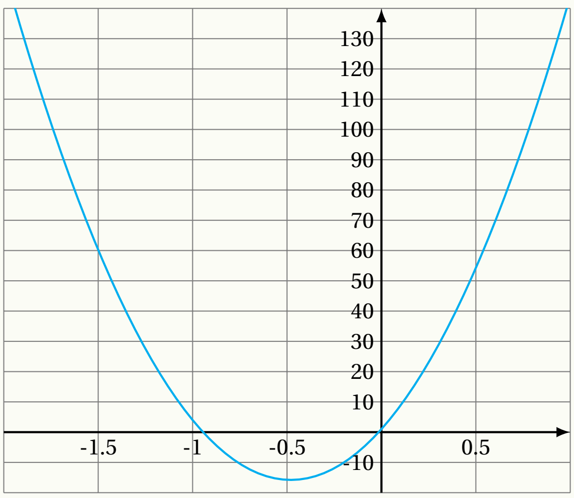
$$\iff x^2 + \frac{64}{9}x^2 + 2 \times \frac{8}{3}x \times \frac{16}{3} + \frac{16^2}{3^2} = \frac{32}{3}x + \frac{64}{3} + 10x + 7$$

$$\iff \frac{9}{9}x^2 + \frac{64}{9}x^2 + \frac{256}{9}x + \frac{256}{9} = \frac{96}{9}x + \frac{192}{9} + \frac{90}{9}x + \frac{63}{9}$$

$$\iff 73x^2 + 256x + 256 = 186x + 255$$

$$\iff 73x^2 + 70x + 1 = 0.$$

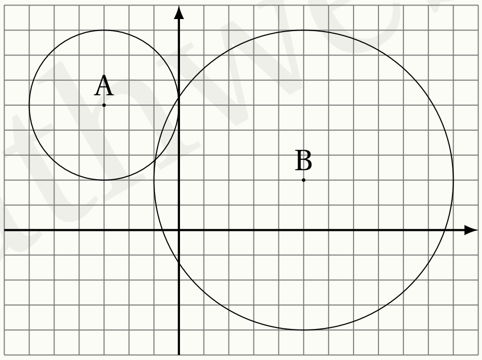
3 Sur la calculatrice, on obtient :



On peut alors conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions car la courbe représentative de f coupe en deux points l'axe des abscisses.

Il semble donc y avoir deux points possibles à notre problème.

Cela semble cohérent : ces deux points sont les intersections des cercles de centres A et B et de rayons respectifs 3 et 6.



5

Vecteurs

Plan du chapitre

I - Introduction

I . 1 - Définition

Définition 22

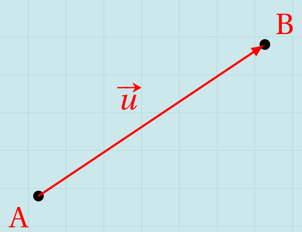
Un **vecteur** est la représentation graphique (à l'aide d'une flèche) d'un déplacement par translation.
Un vecteur est donc défini par :

- une direction (l'inclinaison de la flèche) ;
- un sens (vers la droite, vers la gauche, vers le haut, vers le bas) ;
- une norme (la longueur de la flèche).

Il est noté par une lettre surmontée d'une flèche (toujours de la gauche vers la droite dans la notation).

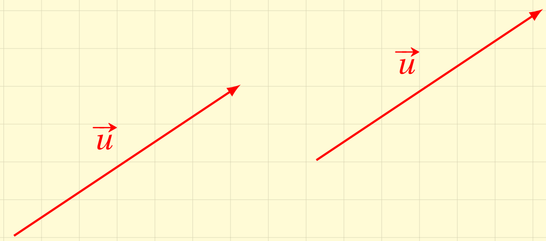
Exemple 34

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ représente la translation qui transforme A en B.



Remarque 39

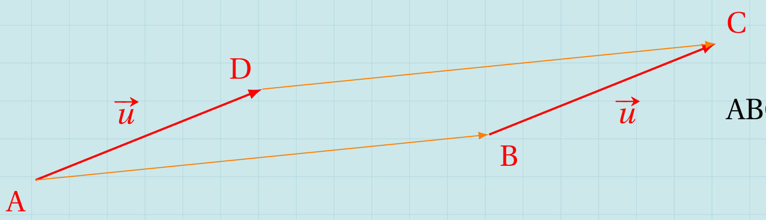
Un même vecteur peut être représenté par plusieurs flèches identiques :



Propriété 28 (règle du parallélogramme)

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Exemple 35



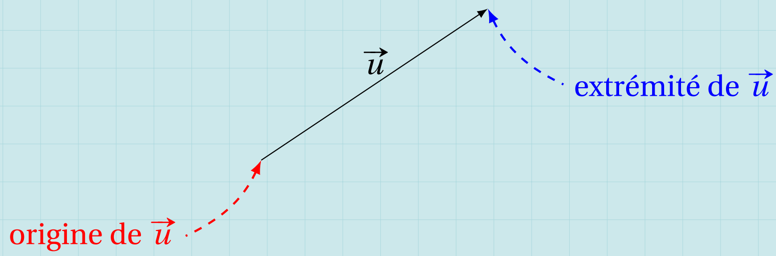
ABCD est un parallélogramme.

I . 2 - Vocabulaire

Définition 23

L'**origine** d'un vecteur est le point à partir duquel la flèche part.
L'**extrémité** d'un vecteur est le point où la flèche arrive.

Exemple 36



Remarque 40

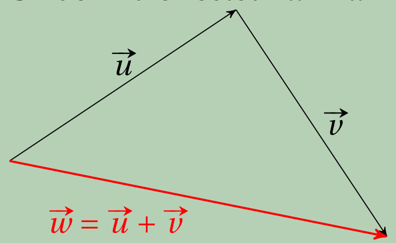
Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, « A » (la première lettre) représente toujours l'origine et « B » (la seconde lettre) désigne toujours l'extrémité.

II - Opérations sur les vecteurs

II . 1 - Somme de deux vecteurs

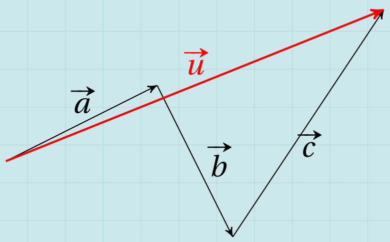
Définition 24

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On définit le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de la façon suivante :



- on met « bout-à-bout » les vecteurs ;
- l'origine du vecteur-somme est celle du 1$^{\text{er}}$ vecteur ;
- l'extrémité du vecteur-somme est celle du dernier vecteur.

Exemple 37 (somme de 3 vecteurs)



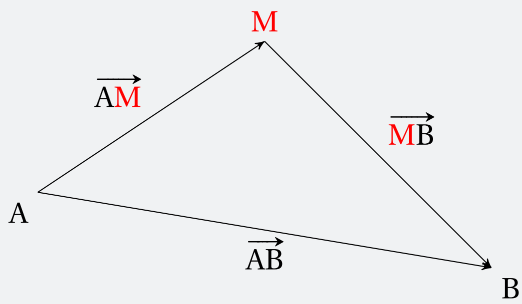
$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Propriété 29 (relation de Chasles)

Soient A, B et M trois points quelconques.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}.$$

Cette relation signifie que pour aller d'un point (A) à un autre (B), on peut partir du premier (A), puis passer par un autre (M) avant d'arriver au point final (B).



II . 2 - Vecteur opposé

Définition 25

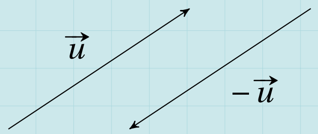
Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque.
On définit le vecteur $-\vec{u}$ comme étant le vecteur ayant :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le sens contraire de $\vec{u}$;
- la même norme que $\vec{u}$.

Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Exemple 38



Définition 26 (vecteur nul)

On définit le **vecteur nul** comme étant le vecteur de norme nulle. On le note $\vec{0}$.
Si un vecteur représente un déplacement, le vecteur nul représente, quant à lui, la stabilité : le « non déplacement ».

Remarque 41

Quel que soit le vecteur $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

II . 3 - Produit d'un vecteur par un réel

Définition 27

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque et k un nombre réel non nul.

- Si $k > 0$, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ comme étant le vecteur somme :

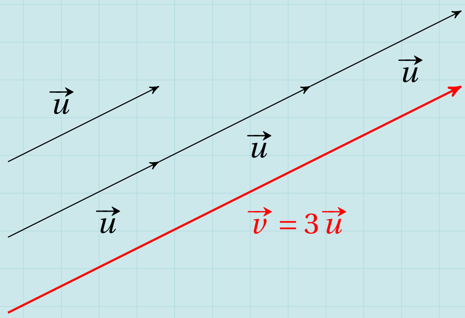
$$\vec{v} = \underbrace{\vec{u} + \vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{k \text{ fois}}.$$

- Si $k < 0$, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ comme étant le vecteur somme :

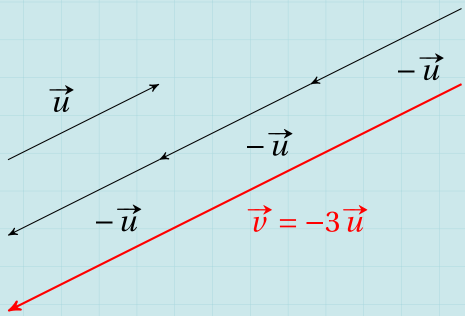
$$\vec{v} = \underbrace{(-\vec{u}) + (-\vec{u}) + \cdots + (-\vec{u})}_{k \text{ fois}}.$$

Exemple 39

1 $k > 0$:



2 $k < 0$:



Définition 28

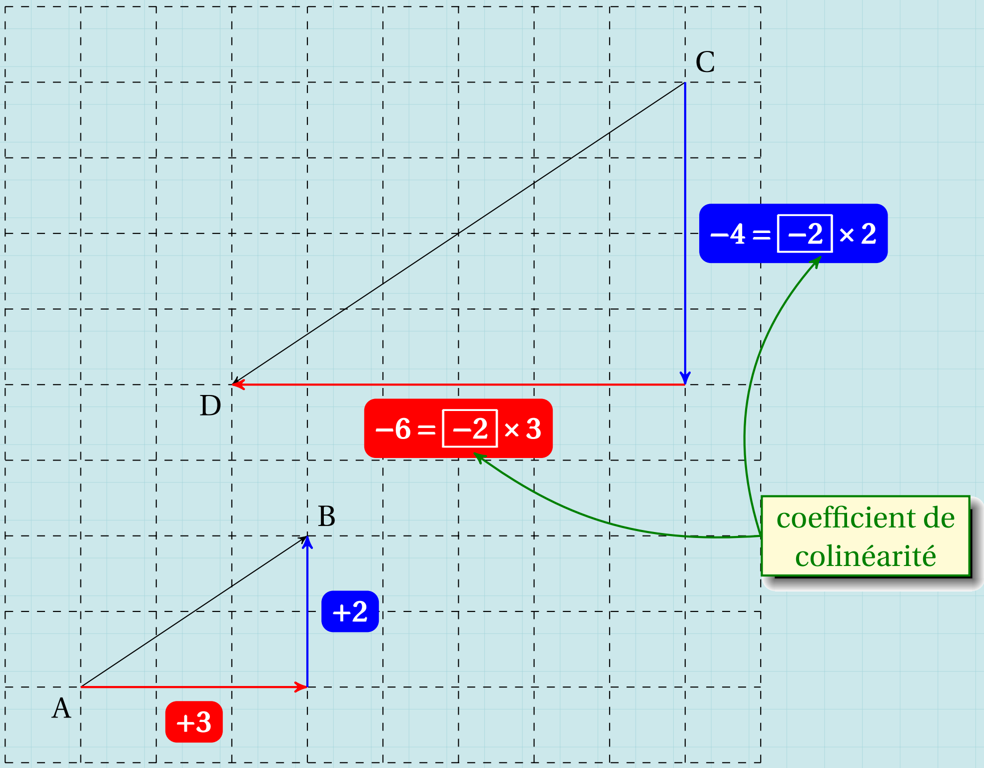
Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.
On peut écrire cette définition de la façon suivante :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \exists\ k \in \mathbb{R}^*,\ \vec{u} = k\vec{v}.$$

Attention 5

On ne dit pas que deux vecteurs sont parallèles.
Le terme « parallèle » est uniquement utilisé pour des droites ou des segments, voire éventuellement des courbes, mais pas pour des vecteurs.
Si deux vecteurs sont colinéaires, on pourra dire que leur *support* (les droites qui les supportent) sont parallèles.

Exemple 40



À l'aide du quadrillage, on peut remarquer ici que $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 30 (alignement de trois points)

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.

III - Dans un repère

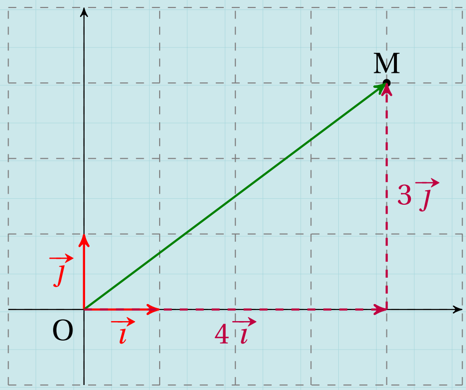
III . 1 - Introduction

Définition 29

- On considère un repère (O;I,J).
  On appelle **vecteurs unitaires** de ce repère les vecteurs :
  $$\vec{\imath} = \overrightarrow{\text{OI}} \qquad \text{et} \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{\text{OJ}}.$$
  Le repère est alors noté : $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
- On considère un point $\text{M}\left(x; y\right)$ dans un repère $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
  Alors,
  $$\overrightarrow{\text{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Exemple 41

On considère le point M (4 ; 3) :



Remarque 42

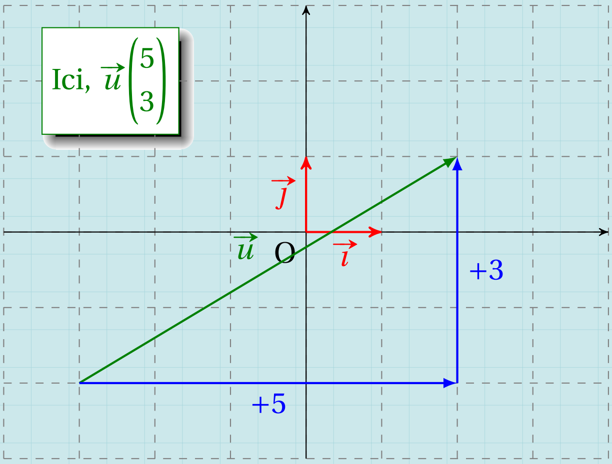
Le repère utilisé dans l'exemple est orthonormé (axes perpendiculaires – *ortho* – et mêmes unités sur les axes – *normé*), mais le résultat est valable quel que soit le repère utilisé.

III . 2 - Coordonnées d'un vecteur

Définition 30

On considère un vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ dans un repère $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont notées ainsi :
$$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
où x représente la dénivellation relative en abscisses et y celle en ordonnées pour passer de A à B.

Exemple 42



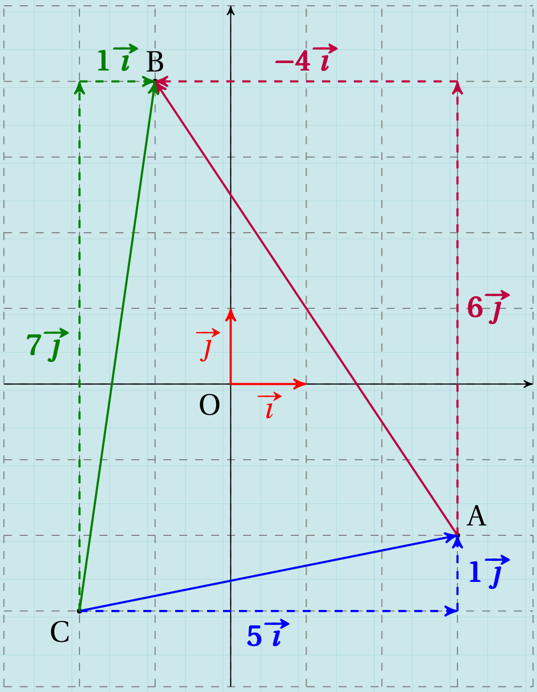
Propriété 31

En posant $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}.$$

Exemple 43

On considère les points A(3 ; −2), B(−1 ; 4) et C(−2 ; −3) dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-3\\4-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3-(-2)\\-2-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\4-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

Propriété 32

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

- Le vecteur-somme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :
$$\vec{w}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}.$$
- Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Alors, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées :
$$k\vec{u}\begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}.$$

Exemple 44

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{w}\begin{pmatrix} -1+3 \\ 2+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $-3\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \times (-1) \\ -3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

III . 3 - Vecteurs colinéaires

Définition 31

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
On appelle *déterminant* le nombre :
$$\det\left(\vec{u}; \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Propriété 33

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\det\left(\vec{u}; \vec{u}\right) = 0$.

Exemple 45

Dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$.

On a d'une part :

$$\det\left(\vec{u}\,;\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}\sqrt{2}-1 & 1\\ 1 & \sqrt{2}+1\end{vmatrix}=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)-1=(2-1)-1=0.$$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration 9

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan rapportés à un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  Alors, il existe un réel non nul k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$, et donc :

$$\begin{cases}x'=kx\\ y'=ky\end{cases}$$

  Ainsi,

$$xy'=x\times ky=k(xy)\qquad\text{et}\qquad x'y=kx\times y=k(xy).$$

  Donc $xy'=x'y$, soit $xy'-x'y=0$, ou encore $\det\left(\vec{u}\,;\vec{u}\right)=0$.
- Supposons maintenant que $xy'=x'y$, c'est-à-dire que $\det\left(\vec{u}\,;\vec{u}\right)=0$.
  Alors,
  - → si x' et y' sont tous deux différents de 0,

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}.$$

    Notons $\lambda=\dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}$. On a donc :

$$x=\lambda x'\qquad\text{et}\qquad y=\lambda y'.$$

    Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x'\\ \lambda y'\end{pmatrix}$, soit $\vec{u}=\lambda\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires ;
  - → si $x'=0$ et $y'\neq 0$ alors :

$$xy'=x'y\iff xy'=0\iff x=0 \text{ ou } y'=0 \text{ (ce qui est impossible par hypothèse).}$$

    Donc $x=0$ et on a donc $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires car il existe toujours un réel k tel que $y'=ky$.
  - → si $x'\neq 0$ et $y'=0$ alors, avec un raisonnement analogue, on obtient que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, les deux vecteurs sont colinéaires ;
  - → si $x'=y'=0$ alors x et y peuvent être quelconques, l'égalité $xy'=x'y$ est toujours vraie. Dans ce cas, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est le vecteur nul, et il est alors colinéaires à $\vec{u}$ car le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

Géométrie vectorielle

Exercice 5.1 (placement de points)

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que (CE) et (FB) sont parallèles.

Solution page 130

Exercice 5.2 (placement et alignement de points)

ABCD est un parallélogramme.

1. Placer les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$$

2. Placer les points G et H tels que BAEG et BAFH sont des parallélogrammes.
3. Démontrer que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$.
4. En déduire que les points C, G et H sont alignés.

Solution page 130

Exercice 5.3 (relation de Chasles)

Simplifier au maximum les écritures suivantes :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
2. $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
3. $\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

Solution page 131

Exercice 5.4 (exprimer un vecteur en fonction d'un autre)

Soient A et B deux points tels que AB = 5 cm.
Soit M le point défini par :

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}\,.$$

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M.

Solution page 131

Exercice 5.5 (égalités de vecteurs)

Le segment suivant est partagé en 6 parties de même longueur.

A C D E F G B

Compléter les relations suivantes :

1. $\overrightarrow{E\ldots} = -2\overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots G} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{A\ldots}$
4. $\overrightarrow{CE} = \ldots\overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{AD} = \ldots\overrightarrow{BF}$
6. $\overrightarrow{DE} = \ldots\overrightarrow{BF}$

Solution page 131

Exercice 5.6 (construction de points, égalité vectorielle)

Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

1. Construire le point M tel que :
$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$$
et le point N tel que :
$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$$
2. Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire ?
3. Justifier que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.
En déduire la nature de ABNI.

Solution page 131

Exercice 5.7 (alignement de points)

ABC est un triangle quelconque. Soient D, E et F les points tels que :

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB} \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BA}$$

Démontrer que D, E et F sont alignés.

Solution page 132

Exercice 5.8 (alignement de points)

On considère un parallélogramme ABCD puis les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

On souhaite démontrer que les points F, C et E sont alignés.

1. Exprimer $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Conclure.

Solution page 133

Exercice 5.9 (milieu)

Soit ABC un triangle quelconque.
On définit le point D par l'égalité : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$.
Montrer que D est le milieu de [BC] après avoir construit le point D.

Solution page 134

Exercice 5.10 (alignement de points)

Soit ABCD un parallélogramme. On définit les points E et F par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Montrer que A, E et F sont alignés.

Solution page 135

Exercice 5.11 (équations vectorielles)

On considère deux points quelconques A et B du plan.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.
2. Construire le point N tel que $2\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{NB}=\vec{0}$.
3. Construire le point P tel que $-3\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.
4. Construire le point R tel que $2\overrightarrow{RA}+3\overrightarrow{RB}=\vec{0}$.
5. Construire le point S tel que $3\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{SB}=\vec{0}$.
6. Construire le point T tel que $5\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{TB}=\vec{0}$.

Solution page 135

Exercice 5.12 (égalités vectorielles définissant des points)

On considère un triangle ABC. On définit les points D, E et F par les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BA} \quad ; \quad 3\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{AB} \quad ; \quad 3\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FB}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que ADFE est un parallélogramme.

Solution page 137

Exercice 5.13 (construction de points)

On considère un triangle ABC. On définit les points D, E et F par les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CE}=\vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CF}.$$

1. Construire une figure avec les points A, B, C, D, E et F.
2. Montrer que ABCF est un parallélogramme.

Solution page 138

Exercice 5.14 (droites parallèles)

Soit ABC un triangle. On définit les points M et N par les égalités :

$$4\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \qquad ; \qquad 9\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

Montrer que (MN) est parallèle à (BC).

Solution page 138

Géométrie repérée

Exercice 5.15 (vecteurs colinéaires)

Le plan est rapporté à un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Pour chaque question, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1 $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

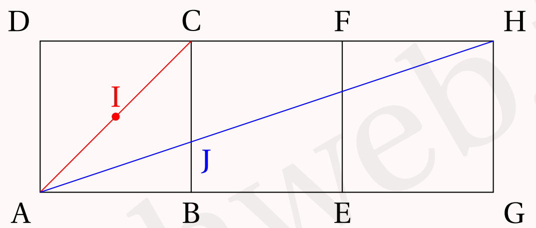
2 $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$.

3 $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\5\end{pmatrix}$.

4 $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

Solution page 139

Exercice 5.16 (alignement de points)



ABCD, CEFD et EGHF sont trois carrés de même côtés.
I est le milieu de [AC] et J est le point d'intersection de (BC) et (AH).

En considérant le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}\right)$, montrer que E, J et I sont alignés.

Solution page 140

Exercice 5.17 (alignement de points et nature d'un triangle)

On considère les points $A(2;-1)$, $B(1;1)$, $C\left(-\frac{1}{2};2\right)$ et $D(3;0)$ dans un repère orthonormé.

1 Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2 Quelle est la nature du triangle ABD ?

Solution page 140

Exercice 5.18 (trouver des coordonnées)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(-2;-3)$, $B(4;-1)$ et $C(-7;2)$.

1 **a.** Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b. En déduire les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

2 Déterminer les coordonnées du milieu I de [AD].

Solution page 140

Exercice 5.19 (à la recherche d'un nombre)

On considère le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$dans lequel on place les points $A(-2;-1)$, $B(1;2)$ et $C(5;-2)$.

1 Quelles sont les coordonnées du milieu I de [AC] ?

2 Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3 On considère un point $M(5; y)$, où $y \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur de y telle que A, B et M soient alignés.

Solution page 141

Exercice 5.20 (alignement de points avec un triangle isocèle)

On considère un triangle ABC isocèle en B.
Soient D et E deux points définis par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

On souhaite montrer que les points B, E et D sont alignés. Pour cela, on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

1 Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$?

2 Quelles sont les coordonnées des points D et E ?

3 Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$.

4 Conclure.

Solution page 142

Exercice 5.21 (alignement de points)

Soit ABC un triangle. On considère alors les points E, F et H tels que :

$$\overrightarrow{EC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{CH} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{BC}.$$

1 Faire une figure.

2 Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En déduire que les points E, F et H sont alignés (on pourra se placer dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$).

Solution page 143

Exercice 5.22 (parallélisme de deux droites)

ABCD est un parallélogramme. Soit I le milieu de [BC] et J celui de [CD]. On définit alors H par l'égalité $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et K par l'égalité $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En se plaçant dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$, montrer que les droites (HI) et (KJ) ne sont pas parallèles.

Solution page 144

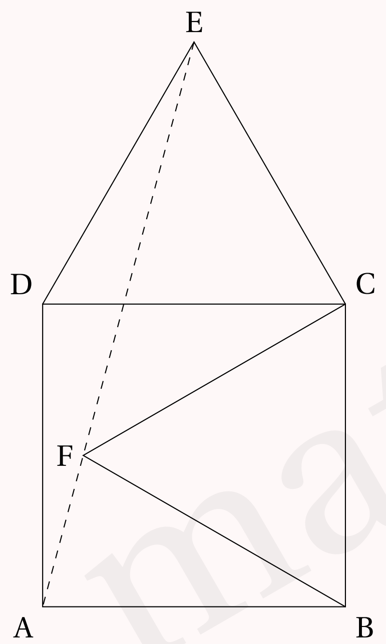
Exercice 5.23 (milieu, centre de gravité, points alignés)

Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(1 ;2), B(3 ;−4) et C(5 ;0).

1. Calculer les coordonnées du point I, milieu de [AB].
2. Montrer que C appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. On considère le point D(−4 ;−3).
   Montrer que D, I et C sont alignés.
5. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle BAD.
   Aide : on admet que $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_D}{3}$ et $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_D}{3}$.
6. On considère le point M définit par : $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.
   Montrer que D, G, I, M et C sont alignés.
   Aide : on admet que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Solution page 144

Exercice 5.24 (triangles équilatéraux et points alignés)



Soit ABCD un carré. Les triangles DEC et BCF sont équilatéraux.
La figure est reportée dans repère $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ où $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$.

1. Déterminer les coordonnées des points E et F.
2. Montrer que E, F et A sont alignés.

Solution page 146

Exercice 5.25 (prendre des initiatives)

Soit ABCD un parallélogramme.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{EB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
3. Démontrer que les points C, E et F sont alignés.

Solution page 147

Exercice 5.26 (équations vectorielles)

Le plan est rapporté à un repère $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$ orthonormé. On pose :

$$A(-3\,;2) \quad , \quad B(5\,;4) \quad , \quad C(1\,;7)\,.$$

1. Trouver les coordonnées du point M tel que $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
2. Trouver les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.
3. Le point P tel que $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ existe-t-il ?

Solution page 148

Exercice 5.27 (récapitulatif analytique)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.
On considère les points $A(-3\,;-2)$, $B(3\,;-1)$ et $C(6\,;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. La formule suivante nous dit comment calculer l'aire du parallélogramme ABCD :

$$\mathscr{A}_{ABCD} = \det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right).$$

   Calculer cette aire.

3. En déduire la hauteur du parallélogramme ABCD issue du sommet D.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AC) et (BD).
5. On considère le point $E\left(-6\,;-\frac{5}{2}\right)$. Les points E, A et B sont-ils alignés ?

Solution page 151

Exercice 5.28 (récapitulatif ultime)

On considère trois points quelconques du plan A, B et C.
On définit alors les points E, F et G tels que :

- $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG}+k\overrightarrow{AC}$ où k est un nombre réel.

1 Déterminer la valeur de k telle que les points A, E et F soient alignés.

2 Construire alors la figure.

3 Exprimer $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Les points C, F et G sont-il alignés ?

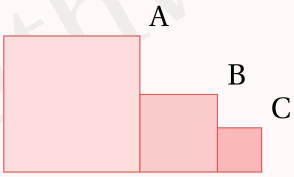
4 Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right)$, déterminer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{ME}=\vec{0}.$$

Solution page 152

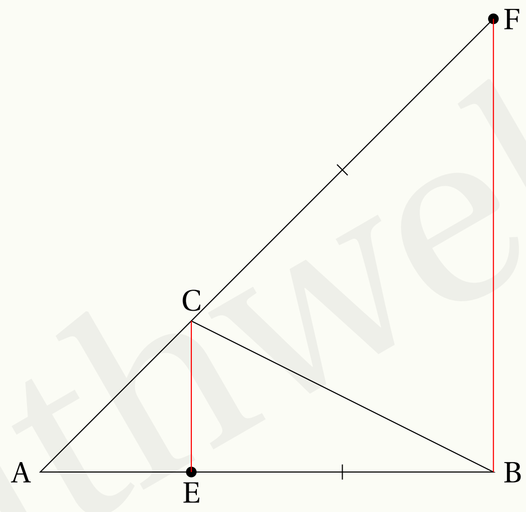
Exercice 5.29 (Exercice de recherche)

La figure ci-dessous représente trois carrés. Celui de gauche a un côté de mesure 1. Le carré du milieu est une réduction de facteur k du carré de gauche. Le carré de droite est une réduction de facteur k du carré du milieu.
Les points A, B et C sont-ils toujours alignés, quelle que soit la valeur de k ?



Solution page 153

Corrigé de l'exercice 5.1 page 122

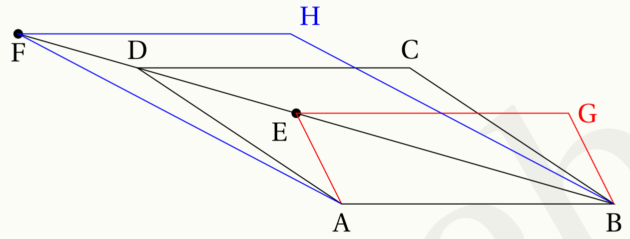


On sait que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ par construction. Ainsi, $\frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (CE) et (BF) sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 5.2 page 122

1 On a la figure suivante :



2 On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FH}$ car BADC et BAFH sont des parallélogrammes.
Donc CDFH est un parallélogramme.
Ainsi, $\underline{\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CH}}$.

De même, BAEG et BADC sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DC}$, ce qui implique que GEDC est un parallélogramme.
Donc $\underline{\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG}}$.

3 On sait que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG}$ (d'après la question précédente).

Donc, $\frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CG}$.

De même, $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CH}$. Donc $-\frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CH}$.

Ainsi, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun donc <u>C, H et G sont alignés.</u>

Corrigé de l'exercice 5.3 page 122

1
$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AA}$
$\underline{\vec{u} = \vec{0}}$

2
$\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
$\vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}$
$\vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE}$
$\vec{v} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE}$
$\underline{\vec{v} = \overrightarrow{DE}}$

3
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}$
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}$
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$
$\underline{\vec{w} = 2\overrightarrow{BA}}$

Corrigé de l'exercice 5.4 page 122

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

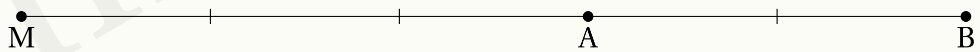
$$-5\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$



Corrigé de l'exercice 5.5 page 123

1 $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EF}$.

2 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$.

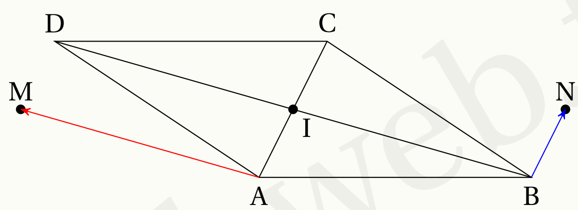
3 $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$.

4 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5 $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BF}$.

6 $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

Corrigé de l'exercice 5.6 page 123



1 $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$.
Or, $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IA}$.
Donc, $\underline{\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}}$.

On en déduit alors que I est le milieu de [MN].

2 On sait que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ (par construction) et que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BN}$ (d'après la relation de Chasles).
Ainsi, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ et donc $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$.

I étant le milieu de [AC], $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.

Ainsi, $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BN}$ donc ABNI est un parallélogramme.

Corrigé de l'exercice 5.7 page 123
D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} \\
2\overrightarrow{EF} &= 3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

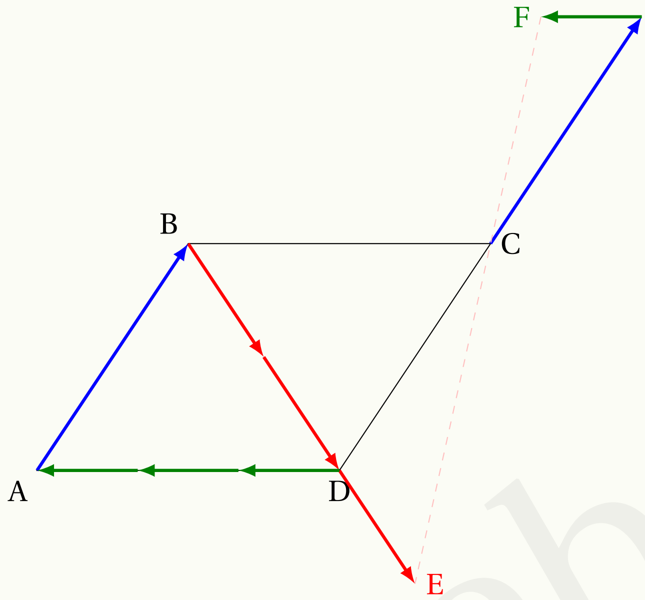
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} \\
&= 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA} \\
&= 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + 2\overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{2}{3}\left(3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \frac{2}{3} \times 2\overrightarrow{EF}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont donc colinéaires. Ils ont un point en commun, donc D, E et F sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.8 page 123

1 Faisons une figure :



2 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}$ car ABCD est un parallélogramme

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$ d'après l'énoncé

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$ d'après la relation de Chasles

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$ car ABCD est un parallélogramme

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\overrightarrow{CE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$$

3 On sait désormais que :

$$\overrightarrow{CE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Or,

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun (le point C) donc <u>C, E et F sont alignés</u>

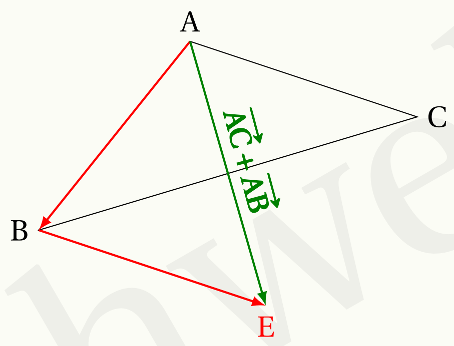
Corrigé de l'exercice 5.9 page 124

Le point D étant défini par une égalité vectorielle où il apparaît deux fois, il est conseillé d'utiliser la relation de Chasles afin de simplifier cette dernière de sorte à ce que le point D n'apparaisse qu'une seule fois. On peut donc, par exemple, écrire $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ (ici, j'ai décomposé en utilisant le point A car il apparaît dans l'autre vecteur qui s'écrit avec le point D).

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \\
&\iff 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} \\
&\iff 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\
&\iff \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right).
\end{aligned}$$

On a alors :



$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ est le « vecteur diagonal » du parallélogramme ABEC. Les diagonales d'un parallélogrammes se coupent en leur milieu, et D est défini comme le milieu du vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$; donc D est le milieu de [BC].

On aurait pu aussi raisonner de façon purement vectorielle en continuant la suite des équivalences :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) \\
&\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right) \\
&\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\
&\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{BC}\Big) \\
&\iff \cancel{\overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{BD} = \cancel{\overrightarrow{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&\iff \boxed{\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre bien que D est le milieu de [BC].

Corrigé de l'exercice 5.10 page 124

On a d'une part :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

et d'autre part :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

On a donc :

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{1}{\cancel{3}}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, donc les points A, E et F sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.11 page 124

1 On souhaite construire le point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Utilisons la relation de Chasles pour écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} &\iff 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}\\ &\iff 2\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB}\\ &\iff -2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}\\ &\iff \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\\ &\iff \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Ainsi, M est le milieu de [AB].

Remarque 45

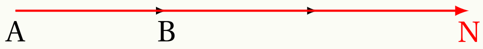
Quand on souhaite construire un point inconnu défini par une égalité vectorielle (comme ici), on utilise la relation de Chasles de sorte à faire apparaître un seul vecteur qui dépend du point inconnu (ici, $\overrightarrow{MA}$).
Il faut arriver à une égalité vectorielle de la forme $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.

2 On souhaite construire le point N tel que $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} &= 2\overrightarrow{NA} - 3\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= 2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AB}\\ &= -\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$



3 On souhaite construire le point P tel que $-3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} -3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} &= -3\overrightarrow{PA} + 5\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= -3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} -3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} = \vec{0} &\iff 2\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\iff -2\overrightarrow{AP} = -5\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

On divise donc [AB] en deux et on reporte 5 fois cette moitié :

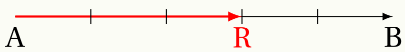
4 On souhaite construire le point R tel que $2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} &= 2\overrightarrow{RA} + 3\left(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \\ &= 2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} + 3\overrightarrow{AB} \\ &= 5\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} = \vec{0} &\iff 5\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\iff 5\overrightarrow{RA} = -3\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{RA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \\ &\iff -\overrightarrow{AR} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{AR} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Il faut donc couper en 5 le segment [AB] :

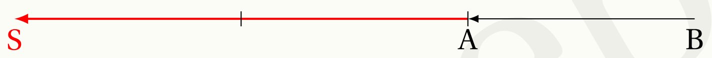


5 On souhaite construire le point S tel que $3\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{SB}=\vec{0}$.

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{SB}&=3\overrightarrow{SA}-2\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}\right)\\&=3\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{SB}=\vec{0}&\iff\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\\&\iff\overrightarrow{SA}=2\overrightarrow{AB}\\&\iff\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$



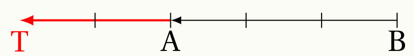
6 On souhaite construire le point T tel que $5\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{TB}=\vec{0}$.

$$\begin{aligned}5\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{TB}&=5\overrightarrow{TA}-2\left(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AB}\right)\\&=5\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{AB}\\&=3\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}5\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{TB}=\vec{0}&\iff3\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\\&\iff3\overrightarrow{TA}=2\overrightarrow{AB}\\&\iff\overrightarrow{TA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\&\iff\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Il faut donc couper [AB] en 3 et reporter les deux tiers de l'autre côté du point A :



Corrigé de l'exercice 5.12 page 124

1 • $$\begin{aligned}3\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{AB}&\iff3\overrightarrow{CE}=2\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right)+3\overrightarrow{AB}\\&\iff3\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CE}+3\overrightarrow{AB}\\&\iff\boxed{\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AB}}\end{aligned}$$

- $3\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FB} \iff 3\overrightarrow{FC} = 2(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CB})$
$\iff 3\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FC}+2\overrightarrow{CB}$
$\iff \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{CB}$
$\iff \boxed{\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{BC}}$

2 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}$

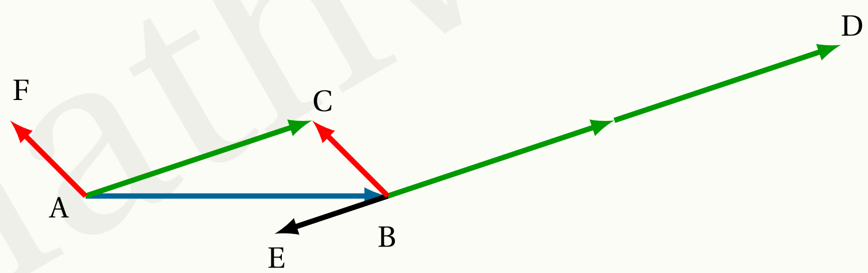
$$= 3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$$
$$= \underbrace{3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AB}}_{=\vec{0}}\underbrace{-2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}}_{=\vec{0}}+\overrightarrow{DF}$$
$$= \overrightarrow{DF}.$$

Ainsi, ADFE est un parallélogramme.

Corrigé de l'exercice 5.13 page 124

1
- $\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CE} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AE}+2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})-(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}) = \vec{0}$
$\iff 2\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$
$\iff \boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}}$
- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CF} \iff \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})$
$\iff \vec{0} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CB}$
$\iff \boxed{\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}$

On a alors la figure suivante :



2 Par construction, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF}$. Ainsi, ABCF est un parallélogramme.

Corrigé de l'exercice 5.14 page 125

- $4\overrightarrow{AM}-5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff 4\overrightarrow{AM}-5(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$
$\iff 4\overrightarrow{AM}-5\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
$\iff 4\overrightarrow{AM}+5\overrightarrow{AM}-5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
$\iff 9\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AB}.$

- $9\overrightarrow{BN}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{BC}=\vec{0} \iff 9\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\right)+4\overrightarrow{AB}-5\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$
$\iff 9\overrightarrow{BA}+9\overrightarrow{AN}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\iff -9\overrightarrow{AB}+9\overrightarrow{AN}+4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\iff 9\overrightarrow{AN}=5\overrightarrow{AC}.$

Donc :

$$\begin{aligned}9\overrightarrow{MN}&=9\overrightarrow{MA}+9\overrightarrow{AN}\\&=5\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{AC}\\&=5\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent, (MN) et (BC) sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 5.15 page 125

1 $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-1\times 2-5\times 3=-2-15=-17\neq 0.$$

<u>Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.</u>

2 $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-3\times 3-7\times(-7)=-9+49=40\neq 0.$$

<u>Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.</u>

3 $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\5\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=2\times 5-\frac{10}{3}\times 3=10-10=0.$$

<u>Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.</u>

4 $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\times 2=2-1-1=0.$$

<u>Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.</u>

Corrigé de l'exercice 5.16 page 125

On considère le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$.

Dans ce repère, on a : $A(0;0)$; $B(1;0)$; $H(3;1)$; $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $E(2;0)$.

Ainsi, la droite (AH) a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{3}$ et donc, son équation est (AH) : $y=\dfrac{1}{3}x$.

Par conséquent, $J\left(1;\frac{1}{3}\right)$. Donc, $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EI}\right)=-1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires, <u>ce qui implique que E, I et J sont alignés.</u>

Corrigé de l'exercice 5.17 page 125

1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\ 1-(-1)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-2\\ 2-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ 3\end{pmatrix}$.

$x_{\overrightarrow{AC}}=\dfrac{5}{2}x_{\overrightarrow{AB}}$ et $y_{\overrightarrow{AC}}=\dfrac{3}{2}y_{\overrightarrow{AB}}$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 $AB^2=x^2_{\overrightarrow{AB}}+y^2_{\overrightarrow{AB}}=1+4=5.$

$AD^2=(x_D-x_A)^2+\left(y_D-y_A\right)^2=1+1=2.$

$BD^2=(x_D-x_B)^2+\left(y_D-y_B\right)^2=4+1=5.$

Donc <u>le triangle ABD est isocèle en B</u> sans être rectangle.

Corrigé de l'exercice 5.18 page 126

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-2;-3)$, $B(4;-1)$ et $C(-7;2)$.

1 **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-2)\\ -1-(-3)\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\ 2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7-(-2)\\ 2-(-3)\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\ 5\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6+(-5)\\ 2+5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ 7\end{pmatrix}}$.

b. ABDC est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

$$\iff \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_D-(-2)\\y_D-(-3)\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_D+2\\y_D+3\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}1 = x_D+2\\7 = y_D+3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x_D = 1-2 = -1\\y_D = 7-3 = 4\end{cases}$$

Ainsi, $D(-1;4)$.

2 I milieu de [AD] $\iff \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} \iff \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_I-(-2)\\y_I-(-3)\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_I+2\\y_I+3\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x_I = \frac{1}{2}-2 = -\frac{3}{2}\\y_I = \frac{7}{2}-3 = \frac{1}{2}\end{cases}$$

Ainsi, $I\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 5.19 page 126

1 I milieu de [AC] donc :

$$x_I = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$$

et

$$y_I = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2},$$

donc $\boxed{I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)}$.

2 ABCD est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\iff \begin{pmatrix}1-(-2)\\2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-x_D\\-2-y_D\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-x_D\\-2-y_D\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}3 &= 5-x_D\\3 &= -2-y_D\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x_D &= 5-3 = 2\\y_D &= -2-3 = -5\end{cases}$$

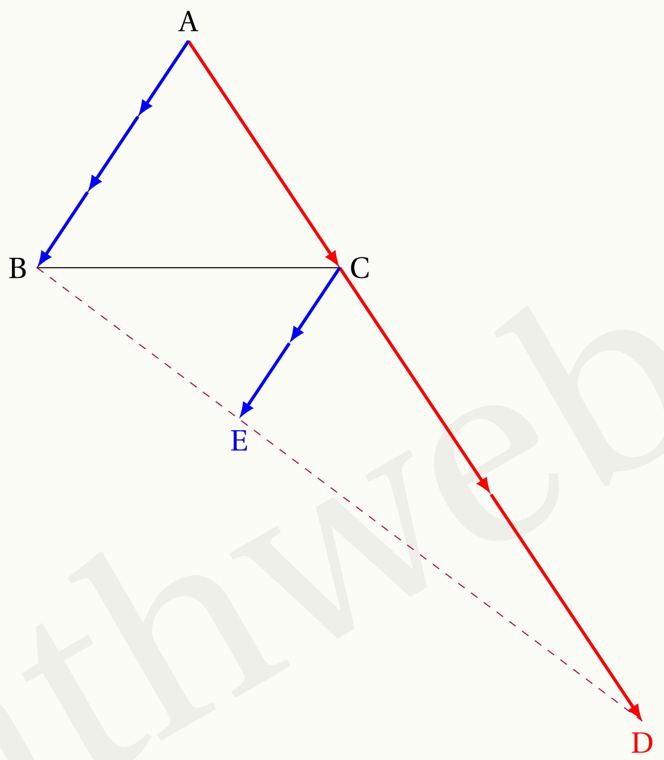
Finalement, $D(2;-5)$.

3 A, B, M sont alignés $\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}7\\y+1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff 3(y+1)-3\times 7=0$$
$$\iff 3y+3-21=0$$
$$\iff 3y=18$$
$$\iff \underline{y=6}.$$

Corrigé de l'exercice 5.20 page 126

1 Faisons une figure :



$\overrightarrow{AC}$ est le premier vecteur unitaire du repère dans lequel on se place donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ est le second vecteur unitaire du repère dans lequel on se place donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

2 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$ donc D$(3;0)$.

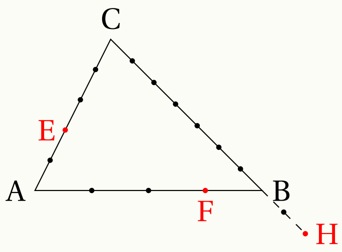
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc E$\left(1;\dfrac{2}{3}\right)$.

3 $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}0-1\\1-\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3-0\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

4 $(-1)\times(-1)-3\times\dfrac{1}{3}=1-1=0$ donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun (le point B) donc B, E et D sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.21 page 126

1 On a la figure suivante :



- $\overrightarrow{EC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{CE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{CA}$ (il est plus simple de partir d'un point que l'on connaît (ici, le point C) pour construire le point E.
- $\overrightarrow{CH}=-\dfrac{9}{7}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{CH}=\dfrac{9}{7}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{CB}$.

2
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$$

3
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH}&=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CH}\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{9}{7}\overrightarrow{CB}\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{9}{7}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{9}{7}\overrightarrow{AC}+\frac{9}{7}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EH}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{24}{35}\overrightarrow{AC}}$$

4 Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$, on a :

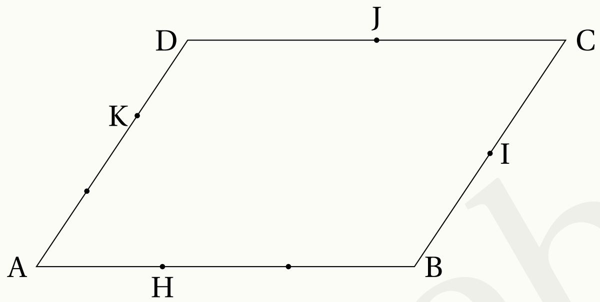
$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}\frac{9}{7}\\-\frac{24}{35}\end{pmatrix}.$$

$$\det\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}\right)=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{24}{35}\right)-\frac{9}{7}\times\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{18}{35}+\frac{18}{35}=0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont colinéaires ; ils ont un point en commun (E), donc les points E, F et H sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.22 page 127

1 La figure est la suivante :



2 $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BI}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\boxed{\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$

$\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DJ}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\boxed{\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$

3 Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$, on a :

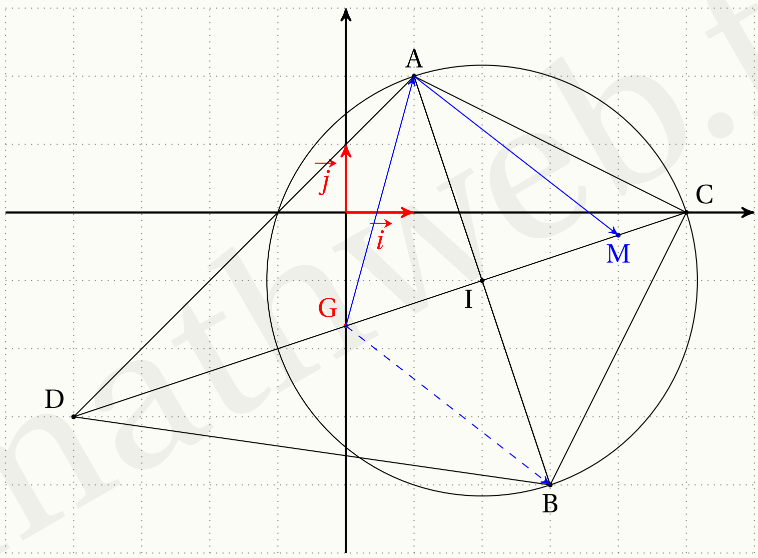
$$\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

$$\det\left(\overrightarrow{HI},\overrightarrow{KJ}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ ne sont pas colinéaires.

<u>Les droites (HI) et (KJ) ne sont donc pas parallèles.</u>

Corrigé de l'exercice 5.23 page 127



1 I est le milieu de [AB] donc :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1$$

Donc $I(2;-1)$.

2 $IC = \sqrt{(x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2}$
$IC = \sqrt{(5-2)^2 + (0-(-1))^2}$
$IC = \sqrt{9+1}$
$IC = \sqrt{10}$
$IB = \sqrt{(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2}$
$IB = \sqrt{(3-2)^2 + (-4-(-1))^2}$
$IB = \sqrt{1+9}$
$IB = \sqrt{10}$

$IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2}$
$IA = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-(-1))^2}$
$IA = \sqrt{1+9}$
$IA = \sqrt{10}$

Ainsi, $IA = IB = IC$ donc A, B et C sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{10}$.

3 ABC est inscrit dans $\mathscr{C}$, qui a pour diamètre [AC]. Donc ABC est rectangle en C.
De plus :

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$BC = \sqrt{(5-3)^2 + (0-(-4))^2}$
$BC = \sqrt{4+16}$
$BC = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2}$
$AC = \sqrt{16+4}$
$AC = 2\sqrt{5}$

Donc $AC = BC$. Ainsi, ABC est un triangle rectangle isocèle en C.

4 $\overrightarrow{DI}(x_I - x_D; y_Y - y_D)$ donc $\overrightarrow{DI}(6;2)$. De plus, $\overrightarrow{IC}(x_C - x_I; y_C - y_I)$ donc $\overrightarrow{IC}(3;1)$.

Ainsi, $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DI}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires. Ils ont un point en commun (I), donc D, I et C sont alignés.

5 G est le centre de gravité du triangle BAD donc :

$$x_G = \frac{x_B + x_A + x_D}{3} = \frac{3+1+(-4)}{3} = 0$$

$$y_G = \frac{y_B + y_A + y_D}{3} = \frac{-4+2+(-3)}{3} = \frac{-5}{3}$$

Ainsi, $G\left(0;-\frac{5}{3}\right)$.

6 Par définition, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
Donc, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GD}$.
Ainsi, $\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GD}$.

Les deux vecteurs sont donc colinéaires et ont un point en commun (G). Par conséquent, D, G et M sont alignés.

Or, I appartient à (DG) car I est le milieu de [AB] et (DG) est la médiane issue de D dans le triangle BAD.
De plus, D, I et C sont alignés. Donc D, G, I, M et C sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.24 page 127

1 Dans le triangle équilatéral DEC, la hauteur issue de E coupe [DC] en son milieu, donc coupe [AB] en son milieu. Ainsi, l'abscisse de E est $\frac{1}{2}$.
Pour trouver l'ordonnée de E, on doit calculer la hauteur de DEC, que l'on ajoutera à 1 (l'ordonnée de D).
Posons H le pied de la hauteur issue de E dans DEC. Alors, DEH est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\mathrm{EH}^2 &= \mathrm{DE}^2 - \mathrm{DH}^2\\ &= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= 1 - \frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{4}\\ \mathrm{EH} &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\,;1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Des calculs précédents, on peut déduire que $\boxed{\mathrm{F}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$.

2 D'après la question précédente, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\begin{pmatrix}1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.
Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si $xy' = yx'$.
Dans notre cas, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}xy' &= \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\ &= 1 - \frac{3}{4}\\ xy' &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$yx' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$yx' = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $xy' = yx'$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires. Ils ont de plus un point en commun, donc les points A, E et F sont alignés.

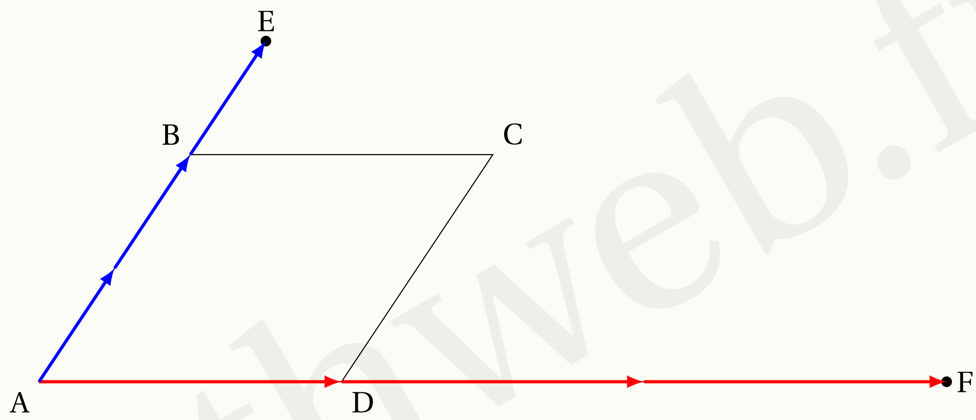
Corrigé de l'exercice 5.25 page 128

1 Le point E est défini par l'égalité : $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Pour construire E, il vaut mieux transformer l'égalité en :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

afin de partir d'un point que l'on connaît (ici, le point B).

2 Les points E et F sont disposés ainsi :



3 Plaçons-nous dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$.
Dans ce repère, C(1 ; 2), E(0 ; 3) et F(3 ; 0). Ainsi,

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On a $(-1) \times (-2) - 1 \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires. Or, ils ont un point en commun (le point C) donc E, C et F sont alignés.

Remarque 46

Le choix du repère importe peu. J'ai choisi en second axe $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ pour simplifier les futures coordonnées, mais rien ne nous empêche de nous placer dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)$ ou tout autre repère.

Corrigé de l'exercice 5.26 page 128

1 Il s'agit ici de trouver les coordonnées du point M tel que $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, avec $A(-3;2)$ et $B(5;4)$.

Il existe deux méthodes pour répondre à cette question :

- **Première méthode.**
  On pose $M(x;y)$.

  $\rightarrow$ $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x_A-x_M\\y_A-y_M\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-3-x\\2-y\end{pmatrix} \iff 3\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}3(-3-x)\\3(2-y)\end{pmatrix}$.

  $\rightarrow$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x_B-x_M\\y_B-y_M\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix} \iff 2\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}2(5-x)\\2(4-y)\end{pmatrix}$.

  Ainsi,

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} &\iff \begin{pmatrix}3(-3-x)\\3(2-y)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2(5-x)\\2(4-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-9-3x+10-2x\\6-3y+8-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-5x+1\\-5y+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}-5x+1 &=0\\-5y+14 &=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-5x=-1\\-5y=-14\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=\frac{1}{5}\\y=\frac{14}{5}\end{cases}
\end{aligned}$$

  Finalement, $\boxed{M\left(\frac{1}{5};\frac{14}{5}\right)}$.

- **Seconde méthode.**
  D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB} &= 3\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)+2\overrightarrow{MB}\\
&= 3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{MB}\\
&= 5\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{BA}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} &\iff 5\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}\\
&\iff 5\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{BA}\\
&\iff 5\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{AB}\\
&\iff \overrightarrow{MB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\\
&\iff \begin{pmatrix} x_B-x_M\\ y_B-y_M\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix} x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} 5-x\\ 4-y\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix} 5-(-3)\\ 4-2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} &\iff \begin{pmatrix} 5-x\\ 4-y\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix} 8\\ 2\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} 5-x\\ 4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5}\times 8\\ \frac{3}{5}\times 2\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} 5-x\\ 4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{24}{5}\\ \frac{6}{5}\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} 5-x &= \frac{24}{5}\\ 4-y &= \frac{6}{5}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x &= 5-\frac{24}{5}=\frac{25}{5}-\frac{24}{5}=\frac{1}{5}\\ y &= 4-\frac{6}{5}=\frac{20}{5}-\frac{6}{5}=\frac{14}{5}\end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{M\left(\frac{1}{5}\,;\frac{14}{5}\right)}$.

2 Il s'agit ici de trouver les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, avec $A(-3;2)$, $B(5;4)$ et $C(1;7)$.

Je vais faire comme dans la seconde méthode précédente : je vais utiliser la relation de Chasles pour faire apparaître $\overrightarrow{NA}$ dans les vecteurs $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NC}$, en posant $N(x;y)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC} &= \overrightarrow{NA}+\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}\right)\\
&= -\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0} &\iff \overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\
&\iff \begin{pmatrix} x_N-x_A\\ y_N-y_A\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x+3\\ y-2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 4\\ 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8\\ 2\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x+3\\ y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12\\ 15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8\\ 2\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x+3\\ y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\\ 13\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} x+3 &= 4\\ y-2 &= 13\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=4-3=1\\ y=13+2=15\end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{N(1;15)}$.

3 Le point P tel que $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ existe-t-il ?

Pour répondre à cette question utilisons la relation de Chasles pour faire apparaître $\overrightarrow{PA}$ dans $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PA}+\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}\right)-2\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}\right)\\
&= \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0} &\iff \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\
&\iff \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC} \qquad \iff \begin{pmatrix} 8\\ 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 4\\ 5\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} 8\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8\\ 10\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité n'étant pas vraie, l'égalité $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ non plus.

<u>Par conséquent, il n'existe pas de point P tel que $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.</u>

Corrigé de l'exercice 5.27 page 128

1 ABCD est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\iff \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - x_D \\ 2 - y_D \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - x_D \\ 2 - y_D \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 6 = 6 - x_D \\ 1 = 2 - y_D \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $D(0;1)$.

2 On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0-(-3) \\ 1-(-2) \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\mathscr{A}_{ABCD} = \det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 1 \times 3 = 18 - 3 = 15.$$

L'aire de ABCD est donc égale à 15.

3 On sait que l'aire d'un parallélogramme est égale à :

$$\text{base} \times \text{hauteur}.$$

Donc, si l'on considère la hauteur du sommet D, que l'on va noter h, on a :

$$\mathscr{A}_{ABCD} = AB \times h.$$

Or,

$$AB = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

donc cette dernière égalité s'écrit :

$$15 = \sqrt{37} \times h$$

c'est-à-dire :

$$h = \frac{15}{\sqrt{37}}.$$

La hauteur du parallélogramme ABCD issue du sommet D est donc égale à $\dfrac{15}{\sqrt{37}}$.

4 Le point d'intersection des droites (AC) et (BD) est le milieu des diagonales [AC] et [BD] car ABCD est un parallélogramme. Appelons ce point I. Alors,

$$x_I = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{3}{2}$$

et

$$y_I = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

Ainsi, $I\left(\frac{3}{2};0\right)$.

5 On considère le point $E\left(-6;-\frac{5}{2}\right)$. Les points E, A et B sont-ils alignés ?
Pour répondre à cette question, on peut voir si $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}-3-(-6)\\ -2-\left(-\frac{5}{2}\right)\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}3\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\det\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix}3 & 6\\ \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix} = 3\times 1 - 6\times\frac{1}{2} = 3-3 = 0.$$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont alignés.

Corrigé de l'exercice 5.28 page 128

1 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} + k\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$

Ainsi, en prenant $\boxed{k = \frac{2}{3}}$, on a :

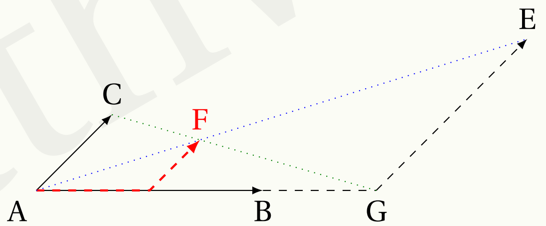
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce cas, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et donc, A, E et F sont alignés.

2 On a la figure suivante :



3 • $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$

$$= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

- $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$
  $= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

  $\boxed{\overrightarrow{CG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$

On constate alors que :

$$3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires, ce qui implique que C, F et G sont alignés.

4 Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC})$, posons $M(x\,;y)$.
On a :

- $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $F\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{2}{3}\right)$;
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $G\left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$;
- $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ donc $E\left(\dfrac{3}{2}\,;2\right)$.

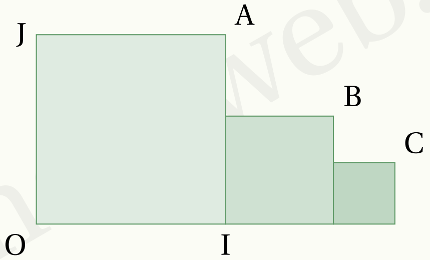
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{ME} = \vec{0} &\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x \\ \frac{2}{3} - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - x \\ 0 - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - x \\ 2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{2} - x + \frac{3}{2} - x + \frac{3}{2} - x = 0 \\ \frac{2}{3} - y - y + 2 - y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x = \frac{7}{2} \\ 3y = \frac{8}{3} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \frac{7}{6} \\ y = \frac{8}{9} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{M\left(\dfrac{7}{6}\,;\dfrac{8}{9}\right)}$.

Corrigé de l'exercice 5.29 page 129

Introduisons le repère $(O;I,J)$ comme ci-dessous :



Le carré du milieu est une réduction du carré de gauche avec un facteur de réduction k, donc son côté mesure $1 \times k = k$.
Le carré du droite est une réduction du carré du milieu avec un facteur de réduction k, donc son côté mesure $k \times k = k^2$.
Ainsi, dans le repère $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J})$,

$$\mathrm{A}\,(1\,;1) \qquad , \qquad \mathrm{B}\,(1+k\,;k) \qquad , \qquad \mathrm{C}\left(1+k+k^2\,;k^2\right).$$

On en déduit alors que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} k+k^2 \\ k^2-1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) &= k(k^2-1) - (k-1)(k+k^2) \\ &= k(k-1)(k+1) - (k-1)k(k+1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont donc toujours colinéaires, quelle que soit la valeur de k.
Par conséquent, les points A, B et C sont toujours alignés.

6

Équations cartésiennes de droites, systèmes linéaires

Plan du chapitre

I - Introduction

Dans ce chapitre, le plan est rapporté à un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

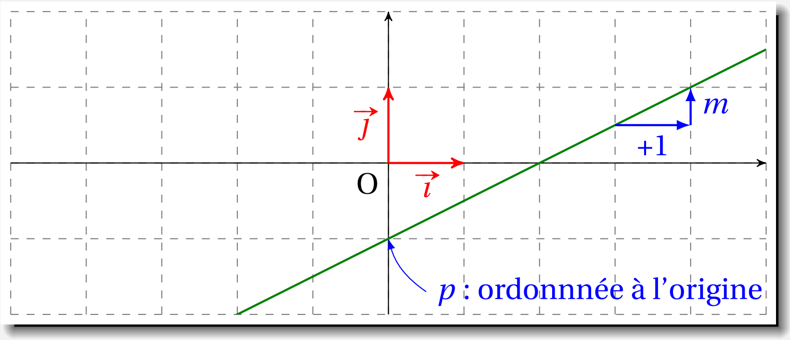
I . 1 - Équation réduite d'une droite

Définition 32

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan. On appelle **équation réduite** de $\mathscr{D}$ l'égalité :

$$y = mx + p \qquad , \qquad m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}$$

où $M\left(x;y\right)$ est un point quelconque de $\mathscr{D}$.
m est appelé le **coefficient directeur** de $\mathscr{D}$; on l'appelle aussi la **pente** de la droite.
p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de $\mathscr{D}$; c'est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de l'axe des ordonnées.



Propriété 34

Soient $A\left(x_A ; y_A\right)$ et $B\left(x_B ; y_B\right)$ deux points du plan. L'équation de la droite (AB) est $y = mx+p$, où :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et

$$p = y_A - mx_A = y_B - mx_B.$$

Exemple 46

Soient $A(-1;-3)$ et $B(3;5)$. Alors, l'équation réduite de (AB) est $y = mx + p$ où :

$$m = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

et

$$p = y_B - mx_B = 5 - 2\times 3 = -1.$$

Ainsi, l'équation réduite de (AB) est : $y = 2x - 1$.

Remarque 47

- si $m = 0$ alors la droite est horizontale.
- si $p = 0$ alors la droite passe par l'origine du repère.

I . 2 - Équation cartésienne d'une droite

Définition 33

Une **équation cartésienne de droite** est une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

Exemple 47

- $3x - 5y + 2 = 0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.
- $-4y + 7 = 0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a = 0$, $b = -4$ et $c = 7$.
- $3x + 1 = 0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a = 3$, $b = 0$ et $c = 1$.

Attention 6

⚠ Une équation cartésienne n'est pas unique (d'où l'article « une »).
En effet, si on considère l'équation $x + y + 1 = 0$, elle est équivalente à l'équation $2x + 2y + 2 = 0$ (on a multiplié par 2 les deux membres de la première équation).
Ainsi, une droite admet une infinité d'équations cartésiennes, contrairement au fait qu'elle admet une unique équation réduite.

I . 3 - Interprétation d'une équation de droite

Qu'elle soit réduite ou cartésienne, une équation de droite représente toujours un lien entre les abscisses et les ordonnées des points de cette droite.

- En écrivant $y = mx + p$, on signifie que n'importe quel point M de la droite a pour ordonnée $mx + p$, où x est son abscisse.
  Ainsi, si on connaît l'abscisse d'un point de la droite, on peut connaître son ordonnée, et réciproquement.
- En écrivant $ax + by + c = 0$, on signifie que, quel que soit le point $\mathrm{M}(x;y)$ sur la droite, on a nécessairement l'égalité $ax + by + c = 0$.

On décrit ainsi, à l'aide d'une égalité (algébrique), un ensemble (géométrique).

C'est le français René Descartes qui, au XVII^{e} siècle, fait le lien entre la géométrie et l'algèbre.

II - Établir une équation cartésienne d'une droite

Il existe deux façons principales d'obtenir une équation cartésienne d'une droite : à partir de son équation réduite ou à l'aide de vecteurs.

II . 1 - À partir de l'équation réduite

L'équation réduite d'une droite étant de la forme $y = mx + p$, on arrive à :

$$mx - y + p = 0.$$

Exemple 48

Soient $A(-1;-3)$ et $B(3;5)$. Alors, l'équation réduite de (AB) est :

$$y = 2x - 1$$

d'après l'exemple 1.
Une équation cartésienne de (AB) est donc :

$$2x - y - 1 = 0.$$

II . 2 - À l'aide de vecteurs

Considérons deux points $A\left(x_A\,;y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;y_B\right)$, ainsi qu'un point $M\left(x\,;y\right)$ sur (AB), où :

- $x_A,\ y_A,\ x_B,\ y_B$ sont quatre réels fixés ;
- x et y sont deux réels variables (dont les valeurs peuvent changer).

Dire que M appartient à (AB) signifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
Or, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.
Nous avons ainsi un moyen de passer de la géométrie (colinéarité) à l'algèbre (égalité), ce qui signifie que nous pouvons établir une équation cartésienne.

Exemple 49

Soient $A(-2;5)$ et $B(5;-1)$. Posons alors $M\left(x\,;y\right) \in (AB)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} &\iff 7(y-5) - (-6)(x+2) = 0\\ &\iff 7y - 35 + 6x + 12 = 0\\ &\iff 6x + 7y - 23 = 0.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $6x + 7y - 23 = 0$.

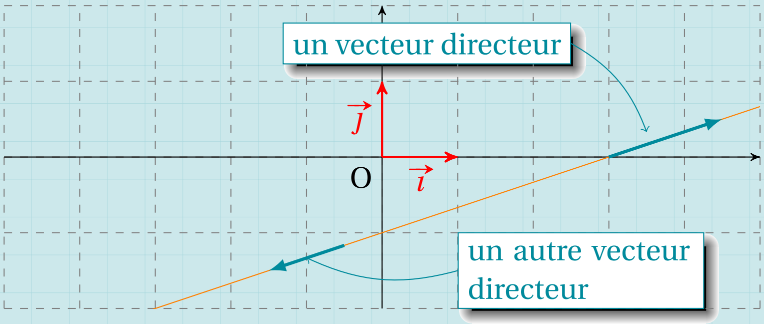
III - Vecteur directeur d'une droite

III . 1 - Définition

Définition 34

Un **vecteur directeur** d'une droite est un vecteur dont la direction est la même que celle de la droite.

Exemple 50



III . 2 - Lien entre vecteur directeur et équations de droite

III . 2 . a - Équation réduite

Propriété 35 (équation réduite)

Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$.

Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Démonstration 10

Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A} ; y_\mathrm{A})$ un point de (d).
Cherchons les coordonnées du point B dont l'abscisse vaut $x_\mathrm{B} = x_\mathrm{A} + 1$:

$$y_\mathrm{B} = mx_\mathrm{B} + p = m(x_\mathrm{A} + 1) + p = mx_\mathrm{A} + p + m = y_\mathrm{A} + m.$$

D'où $\mathrm{B}(x_\mathrm{A} + 1 ; y_\mathrm{A} + m)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\\y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x_\mathrm{A} + 1) - x_\mathrm{A}\\(y_\mathrm{A} + m) - y_\mathrm{A}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un vecteur directeur de (d) car A et B sont sur (d).

Donc le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

III . 2 . b - Équation cartésienne

Propriété 36 (coefficient directeur)

Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Démonstration 11

$ax+by+c=0 \iff y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$.

Ainsi, l'équation réduite de (d) est : $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$, où $-\dfrac{a}{b}$ est le coefficient directeur.

D'après la propriété 35, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), comme tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

Ainsi, $\vec{u}=-b\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d). Or, $-b\vec{v}\begin{pmatrix}-b\times 1\\-b\times\left(-\frac{a}{b}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

IV - Intersection de droites

IV . 1 - Critère d'existence

Par définition, deux droites sécantes sont deux droites qui ne sont pas parallèles.
Ainsi, l'intersection de deux droites existe quand leur vecteur directeur ne sont pas colinéaires.

Propriété 37

Soient (d) et (d') deux droites d'équations cartésiennes respectives :

$$ax+by+c=0 \qquad \text{et} \qquad a'x+b'y+c'=0.$$

$$(d) \text{ et } (d') \text{ sont parallèles} \iff ab'=ba'$$

Démonstration 12

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de (d) et (d').

$$\begin{aligned}\vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ colinéaires} &\iff -b\times a'-a\times(-b')=0\\ &\iff -ba'+ab'=0\\ &\iff ab'=ba'.\end{aligned}$$

Exemple 51

$(d) : -3x+5y-2=0$
$(d') : 8x+3y+1=0$

$-3\times 3=-9$ et $8\times 5=40\neq -9$, donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

IV . 2 - Méthodes

IV . 2 . a - Avec les équations réduites

Soient $(d)\ :\ y=mx+p$ et $(d')\ :\ y=m'x+p'$. On suppose que $m\neq m'$, ce qui signifie que les deux droites sont sécantes.
Pour trouver les coordonnées du point d'intersection des deux droites, on recherche d'abord son abscisse en résolvant l'équation :

$$mx+p=m'x+p'$$

puis on remplace x dans l'équation $y=mx+p$ par la valeur trouvée.

Exemple 52

$(d) : y=-5x+2$
$(d') : y=3x+10$

$$-5x+2=3x+10 \iff -8x=8 \iff x=-1.$$

On remplace x par -1 dans l'équation $y=-5x+2$: $y=-5\times(-1)+2=7$.

Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(-1;7)$.

IV . 2 . b - Avec les équations cartésiennes

On peut certes se ramener aux équations réduites, mais on peut aussi faire autrement.
Chercher les coordonnées du point d'intersection de deux droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} ax+\ by+\ c=0 & \mathrm{L}_1 \\ a'x+b'y+c'=0 & \mathrm{L}_2 \end{cases}$$

On note L_1 la première ligne du système et L_2 la seconde.
Nous avons le droit de multiplier les équations par n'importe quel nombre non nul. Par conséquent, on peut multiplier L_1 par a' et L_2 par a afin de faire apparaître le même coefficient devant x dans chacune des équations. On notera alors :

$$\begin{cases} aa'x+ba'y+ca'=0 & \mathrm{L}_1 \longleftarrow a'\mathrm{L}_1 \\ aa'x+ab'y+ac'=0 & \mathrm{L}_2 \longleftarrow a\mathrm{L}_2 \end{cases}$$

Ainsi, en faisant par exemple $\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2$, on se retrouve avec une équation d'inconnue y :

$$\begin{cases} aa'x+\ ba'y+ \qquad\qquad\qquad ca'=0 & \mathrm{L}_1 \longleftarrow \mathrm{L}_1 \\ \qquad -ab')y+(ba'+(ca'-ac')=0 & \mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2 \end{cases}$$

On peut alors trouver y, puis x à l'aide de l'une des deux équations du début.

Exemple 53

$$\begin{cases} 3x - 5y - 1 = 0 & \mathrm{L}_1 \\ -7x + 15y + 1 = 0 & \mathrm{L}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x - 15y - 3 = 0 & \mathrm{L}_1 \longleftarrow 3\mathrm{L}_1 \\ -7x + 15y + 1 = 0 & \mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9x - 15y - 3 = 0 & \mathrm{L}_1 \longleftarrow 3\mathrm{L}_1 \\ 2x \qquad\quad - 2 = 0 & \mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \end{cases}$$

$\mathrm{L}_2 \iff x = 1$ et donc, en prenant l'équation $3x - 5y - 1 = 0$ et en remplaçant x par 1, on obtient $3 - 5y - 1 = 0$, soit $y = \dfrac{2}{5}$.

Le point d'intersection des deux droites a pour coordonnées $\left(1\,;\dfrac{2}{5}\right)$.

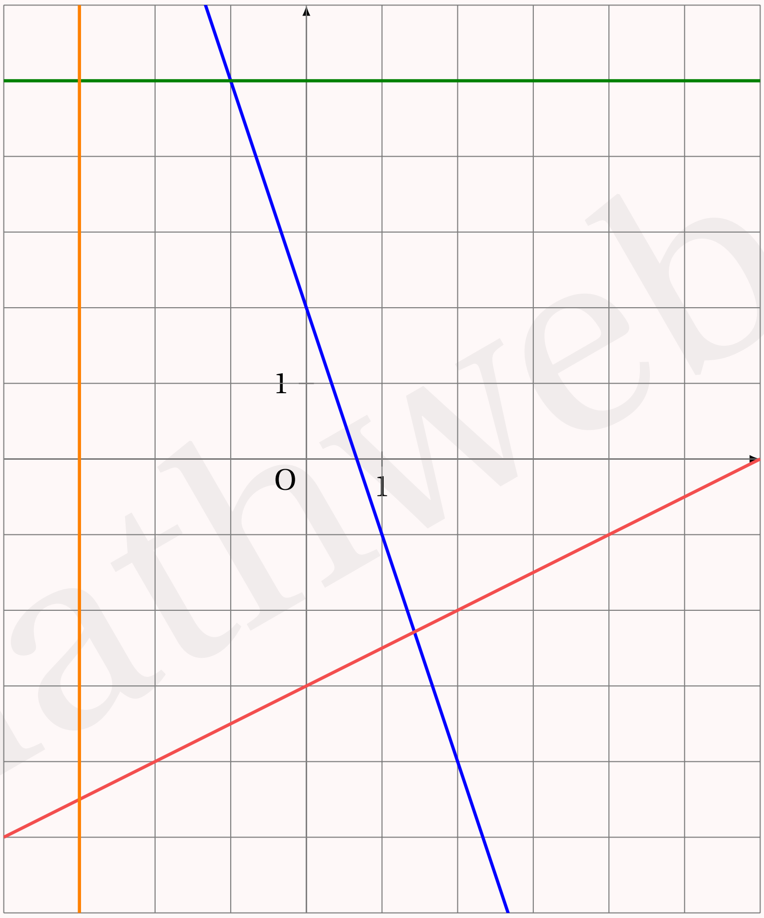
Remarque 48

On peut bien sûr choisir d'éliminer l'inconnue que l'on veut : soit x, soit y (comme dans l'exemple).

Équations de droites

Exercice 6.1 (trouver une équation cartésienne)

Pour chacune des droites représentées ci-dessous, donner une équation cartésienne.



Solution page 169

Exercice 6.2 (appartenance d'un point à une droite)

Pour chacune des questions suivantes, dire si le point A, dont on donne les coordonnées, appartient à la droite d, dont on donne l'équation réduite.

1. $(d) : y = -3x + 7\,;\, \mathrm{A}(-3\,;2)$.
2. $(d) : y = 7x - 1\,;\, \mathrm{A}(-1\,;-8)$.
3. $(d) : y = -\dfrac{2}{5}x + 21\,;\, \mathrm{A}(10\,;17)$.
4. $(d) : y = -\dfrac{1}{3}x + 8\,;\, \mathrm{A}(9\,;5)$.
5. $(d) : y = x\sqrt{2} - 2\,;\, \mathrm{A}\left(\sqrt{2}\,;0\right)$.

6 $(d) : y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x + 5 - \sqrt{3}$; $\mathrm{A}\left(1-\sqrt{3} ; 2\sqrt{3}\right)$.

Solution page 170

Exercice 6.3 (appartenance d'un point à une droite)

Pour chacune des questions suivantes, dire si le point A appartient à la droite (d).

1 $(d) : 3x + y - 5 = 0$; $\mathrm{A}(-2 ; 1)$.

2 $(d) : -x + 5y + 6 = 0$; $\mathrm{A}(1 ; -1)$.

3 $(d) : -x\sqrt{2} - y\sqrt{3} + 5 = 0$; $\mathrm{A}\left(\sqrt{2} ; \sqrt{3}\right)$.

4 $(d) : \dfrac{1}{2}x - 9y + 5 = 0$; $\mathrm{A}(8 ; 1)$.

Solution page 171

Exercice 6.4 (droites confondues ?)

Les droites suivantes sont-elles confondues ?

1 $(d) : \dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{10} = 0$ et $(d') : 20x - 18y + 3 = 0$.

2 $(d) : \dfrac{1}{7}x + 2y - \dfrac{1}{5} = 0$ et $(d') : 5x + 70y - 7 = 0$.

3 $(d) : \dfrac{3}{5}x - \dfrac{5}{3}y + 1 = 0$ et $(d') : -9x + 25y + 15 = 0$.

Solution page 171

Exercice 6.5 (connaissant deux points)

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

1 $\mathrm{A}(-1 ; 2)$ et $\mathrm{B}(3 ; -7)$.

2 $\mathrm{A}(3 ; -2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

3 $\mathrm{A}(5 ; -4)$ et (AB) est parallèle à la droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.

4 $\mathrm{A}(3 ; 2)$ et (AB) a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

Solution page 172

Exercice 6.6 (trouver un vecteur directeur)

Dans chacun des cas suivants, donner un vecteur directeur de la droite dont on donne une équation cartésienne.

1 $3x - 5y + 2 = 0$

2 $-5x + 9y - 7 = 0$

3 $y = 3x - 1$

4 $y = 5$

Solution page 174

Exercice 6.7 (trouver un coefficient directeur)

Dans chacun des cas suivants, donner un coefficient directeur de la droite dont on donne une équation cartésienne.

1. $3x-5y+2=0$
2. $-5x+9y-7=0$
3. $y=3x-1$
4. $y=5$

Solution page 174

Exercice 6.8 (médiatrice)

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(3;1)$, $B(1;2)$, $C(2;-1)$ et $D(-4;2)$.

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Montrer que O appartient à (CD).
3. Soit $M\left(x;y\right)$. Exprimer les distances BM et CM en fonction de x et y.
   En déduire une équation de la droite Δ, médiatrice de [BC], puis montrer que Δ est la droite (OA).

Solution page 174

Exercice 6.9 (équation de droites avec paramètre)

Dans un repère, on considère la droite $\mathscr{D}_m$, $m\in\mathbb{R}$, dont une équation cartésienne est :

$$mx+(2m-1)y+4=0.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ?
3. Montrer que quelle que soit la valeur de m, la droite $\mathscr{D}_m$ passe par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

Solution page 175

Systèmes d'équations

Exercice 6.10 (dimensions d'un rectangle)

On désigne par x la longueur d'un rectangle et par y sa largeur, exprimées en cm.
Le périmètre de ce rectangle est 16 cm. Si on ajoute 3 cm à la longueur et si on double la largeur, le périmètre devient 28 cm.
Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Solution page 175

Exercice 6.11 (livre et stylo)

Pour l'achat d'un livre et d'un stylo de luxe, la dépense est de 35 €. Après une réduction de 20 % sur le prix du livre et de 30 % sur le prix du stylo, la dépense n'est que de 26 €.
Calculer le prix d'un livre et celui d'un stylo avant la réduction.

Solution page 176

Exercice 6.12 (combien de pièces ?)

Max a 10 pièces dans son porte-monnaie. Ce sont uniquement des pièces de 1 € et 2 €. Le montant contenu dans le porte monnaie est de 15 €.
Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?

Solution page 177

Exercice 6.13 (posts Instagram)

Sur mon premier post Instagram, la somme des « likes » et « reposts » est égale à 840.
Sur mon second, j'ai trois fois plus de « likes » et deux fois plus de « reposts », et leur somme est égale à 2 208.
Combien de « likes » et de « reposts » y a-t-il pour mon premier post ?

Solution page 177

Exercice 6.14 (intersection de droites)

Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites dont on donne une équation cartésienne.

1. $(d)\ :\ 3x+4y+1=0$ et $(d')\ :\ -5x+6y-2=0$.
2. $(d)\ :\ 8x-3y-3=0$ et $(d')\ :\ -4x-5y+1=0$.
3. $(d)\ :\ 5x+7y+6=0$ et $(d')\ :\ 3x-5y+1=0$.
4. $(d)\ :\ \sqrt{2}x+\sqrt{3}y+1=0$ et $(d')\ :\ \sqrt{3}x-\sqrt{2}y+1=0$.

Solution page 178

Exercice 6.15

Trouver deux entiers naturels x et y tels que la somme de leurs carrés est égale à 225 et la différence de leurs carrés égale à 63.

Solution page 179

Exercice 6.16 (baguette et croissant)

Un client demande : « 4 baguettes et 5 croissants ». Il paie 9,35 €.
Un autre client demande : « 2 baguettes et 3 croissants ». Il paie 5,15 €.
Quel est le prix d'une baguette ? D'un croissant ?

Solution page 179

Exercice 6.17 (le jeu du « mouxalok »)

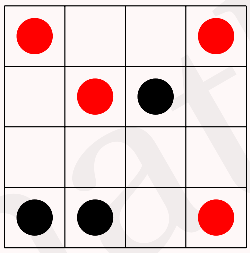
Le jeu du « mouxalok » se joue à deux joueurs sur un plateau sur lequel on place des jetons rouges (qui sont à un des joueurs) et noirs (pour l'autre joueur). Chaque jeton rouge rapporte x points et chaque jeton noir en rapporte y.

Les règles sont très compliquées, mais ce qu'il faut retenir est qu'en fin de partie, le joueur qui possède le plus de jetons sur le plateau remporte la totalité des points correspondants.

Par exemple, s'il reste 2 jetons rouges et 1 noir, le joueur qui possède les jetons rouges remporte $2x + y$ points.

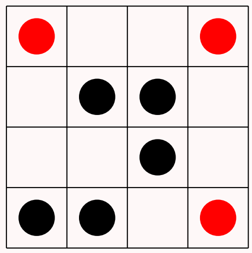
Ci-dessous sont représentés les plateaux en fin de partie 1 et de partie 2 :

Partie 1



Total : 40 points

Partie 2



Total : 41 points

Combien rapporte un jeton rouge ? Un jeton noir ?

Solution page 180

Exercice 6.18 (pommes & carottes)

Dans le panier de Mme Martin, il y a 5 kg de pommes et 2 kg de carottes.

Dans le panier de M. Bernard, il y a 3 kg de pommes et 7 kg de carottes.

Mme Martin a payé 18,5 € alors que M. Bernard a payé 28,5 €.

Quel est le prix d'un kg de pommes et d'un kg de carottes ?

Solution page 180

Exercice 6.19 (chute d'une pierre)

Une pierre qui s'est détachée du haut d'une falaise est tombée dans la mer.

La pierre est tombée à la vitesse moyenne de 16 m/s dans l'air jusqu'à atteindre l'eau, puis elle a continué à descendre à la vitesse moyenne de 3 m/s avant d'atteindre le fond marin.

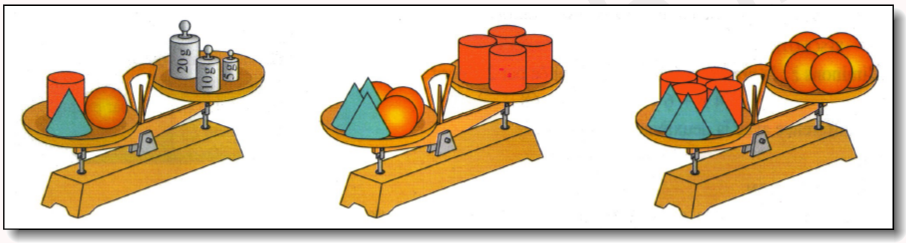
La distance totale du haut de la falaise jusqu'au fond marin est égale à 127 mètres et la chute de la pierre a duré 12 secondes en tout.

Pendant combien de temps la pierre est-elle tombée dans l'air et pendant combien de temps est-elle tombée dans l'eau ?

Solution page 181

Exercice 6.20 (balances et masses)

Les balances suivantes sont en équilibre :



Quelle est la masse d'un cône, d'un cylindre et d'une boule ?

Solution page 182

Exercice 6.21 (discussion de mathématiciens)

Un mathématicien dit à son collègue : « j'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez.
Quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera égale à 153.
Quels sont nos âges actuels ? »
Saurez-vous répondre à cette question ?

Solution page 183

Corrigé de l'exercice 6.1 page 163

- La droite verte est horizontale est passe par le point de coordonnées $(0;5)$. Tous les points de cette droite ont une ordonnée égale à 5, donc son équation est :

$$y = 5.$$

- La droite orange est verticale et tous les points de cette droite ont une même abscisse : -3. Son équation est donc :

$$x = -3.$$

Pour les autres droites, le principe consiste à trouver les coordonnées d'un point de la droite et d'un vecteur directeur, puis d'appliquer la « méthode du déterminant ».

- Pour la droite bleue, le point A $(0;2)$ est sur cette droite, ainsi que le point B $(1;-1)$. Un vecteur directeur de cette droite est alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} 1 & x-0 \\ -3 & y-2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 1(y-2) - (-3)(x-0) = 0 \\ &\iff y - 2 + 3x = 0 \\ &\iff 3x + y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite bleue est alors $3x + y - 2 = 0$.

- Pour la droite rouge, le point C $(0;-3)$ est sur cette droite, ainsi que le point D $(2;-2)$. Un vecteur directeur de cette droite est alors :

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (CD) &\iff \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{CM} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \det\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM}\right) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} 2 & x-0 \\ 1 & y-(-2) \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 2(y+2) - 1(x-0) = 0 \\ &\iff 2y + 4 - x = 0 \\ &\iff -x + 2y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite bleue est alors $-x + 2y + 4 = 0$.

Corrigé de l'exercice 6.2 page 163

Un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. Il suffit donc de remplacer dans chaque équation x par l'abscisse du point A donné, et de vérifier si le calcul donne l'ordonnée de A.

1 $(d) : y = -3x + 7$; $A(-3;2)$.

$$-3x_A + 7 = -3 \times (-3) + 7 = 9 + 7 = 16 \neq 2 (= y_A).$$

Donc $A \notin (d)$.

2 $(d) : y = 7x - 1$; $A(-1;-8)$.

$$7x_A - 1 = 7 \times (-1) - 1 = -7 - 1 = -8 = y_A.$$

Donc $A \in (d)$.

3 $(d) : y = -\frac{2}{5}x + 21$; $A(10;17)$.

$$-\frac{2}{5}x_A + 21 = -\frac{2}{5} \times 10 + 21 = -4 + 21 = 17 = y_A.$$

Donc $A \in (d)$.

4 $(d) : y = -\frac{1}{3}x + 8$; $A(9;5)$.

$$-\frac{1}{3}x_A + 8 = -\frac{1}{3} \times 9 + 8 = -3 + 8 = 5 = y_A.$$

Donc $A \in (d)$.

5 $(d) : y = x\sqrt{2} - 2$; $A\left(\sqrt{2};0\right)$.

$$x_A\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2 = 2 - 2 = 0 = y_A.$$

Donc $A \in (d)$.

6 $(d) : y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x + 5 - \sqrt{3}$; $A\left(1-\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x_A + 5 - \sqrt{3} &= \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}(1-\sqrt{3}) + 5 - \sqrt{3} \\
&= \frac{(1-\sqrt{3})^2}{1+\sqrt{3}} + 5 - \sqrt{3} \\
&= \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1+\sqrt{3}} + 5 - \sqrt{3} \\
&= \frac{4-2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + 5 - \sqrt{3} \\
&= \frac{4-4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\times 3}{1^2-(\sqrt{3})^2} + 5 - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x_{\mathrm{A}}+5-\sqrt{3} &= \frac{10-6\sqrt{3}}{-2}+5-\sqrt{3}\\ &= -5+3\sqrt{3}+5-\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\\ &= y_{\mathrm{A}}.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{A} \in (d)$.

Corrigé de l'exercice 6.3 page 164

1 $(d) : 3x+y-5=0$; $\mathrm{A}(-2;1)$.

$$3x_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{A}}-5=3\times(-2)+1-5=-6+1-5=-10\neq 0.$$

Donc $\mathrm{A} \notin (d)$.

2 $(d) : -x+5y+6=0$; $\mathrm{A}(1;-1)$.

$$-x_{\mathrm{A}}+5y_{\mathrm{A}}+6=-1+5\times(-1)+6=-1-5+6=-6+6=0.$$

Donc $\mathrm{A} \in (d)$.

3 $(d) : -x\sqrt{2}-y\sqrt{3}+5=0$; $\mathrm{A}\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

$$-x_{\mathrm{A}}\sqrt{2}-y_{\mathrm{A}}\sqrt{3}+5=-\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+5=-2-3+5=0.$$

Donc $\mathrm{A} \in (d)$.

4 $(d) : \frac{1}{2}x-9y+5=0$; $\mathrm{A}(8;1)$.

$$\frac{1}{2}x_{\mathrm{A}}-9y_{\mathrm{A}}+5=\frac{1}{2}\times 8-9\times 1+5=4-9+5=-5+5=0.$$

Donc $\mathrm{A} \in (d)$.

Corrigé de l'exercice 6.4 page 164

Deux droites sont confondues si leurs équations cartésiennes sont équivalentes, c'est-à-dire si, en multipliant l'une, on obtient l'autre.

1 $(d) : \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y+\frac{1}{10}=0$ et $(d') : 20x-18y+3=0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\left(x;y\right)\in(d) &\iff \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y+\frac{1}{10}=0\\ &\iff 30\times\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y+\frac{1}{10}\right)=30\times 0\\ &\iff 30\times\frac{2}{3}x-30\times\frac{3}{5}y+30\times\frac{1}{10}=0\end{aligned}$$

$$\iff 20x - 18y + 3 = 0 \leftarrow \text{ équation de } (d')$$
$$\iff \mathrm{M}\left(x\,;y\right) \in (d').$$

Ainsi, (d) et (d') sont confondues.

Remarque 50

Comment obtenir le nombre « 30 » par lequel j'ai multiplié ? J'ai regardé les dénominateurs des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{10}$ et j'ai pris le plus petit nombre dans leurs table (le ppcm de 3, 5 et 10 est égal à 30).

2 $(d) : \frac{1}{7}x + 2y - \frac{1}{5} = 0$ et $(d') : 5x + 70y - 7 = 0.$

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\left(x\,;y\right) \in (d) &\iff \frac{1}{7}x + 2y - \frac{1}{5} = 0\\
&\iff 35 \times \left(\frac{1}{7}x + 2y - \frac{1}{5}\right) = 35 \times 0\\
&\iff 5x + 70y - 7 = 0 \leftarrow \text{ équation de } (d')\\
&\iff \mathrm{M}\left(x\,;y\right) \in (d').
\end{aligned}$$

Ainsi, (d) et (d') sont confondues.

3 $(d) : \frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y + 1 = 0$ et $(d') : -9x + 25y + 15 = 0.$

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\left(x\,;y\right) \in (d) &\iff \frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y + 1 = 0\\
&\iff 15 \times \left(\frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y + 1\right) = 0\\
&\iff 9x - 25y + 15 = 0\\
&\iff -9x + 25y - 15 = 0 \text{ en multipliant par } (-1)
\end{aligned}$$

Nous n'obtenons pas la même écriture que celle de l'équation de (d') (le signe de « 15 » n'est pas le même) donc les deux droites ne sont pas confondues.

Corrigé de l'exercice 6.5 page 164

1 $\mathrm{A}(-1\,;2)$ et $\mathrm{B}(3\,;-7)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3-(-1)\\-7-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\left(x\,;y\right) \in (\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff -9(x+1) - 4(y-2) = 0\\
&\iff -9x - 4y - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $9x + 4y + 1 = 0$.

2 A$(3;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\left(x;y\right)\in(\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff 1(x-3)-2(y+2)=0\\ &\iff x-2y-7=0.\end{aligned}$$

<u>Une équation cartésienne de (AB) est donc $x-2y-7=0$.</u>

3 A$(5;-4)$ et (AB) est parallèle à la droite d'équation cartésienne $x+y+1=0$.

La droite d'équation cartésienne $x+y+1=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et (AB) est parallèle à cette droite, donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (AB). Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\left(x;y\right)\in(\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-5\\y+4\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff 1(x-5)-(-1)(y+4)=0\\ &\iff x+y-1=0.\end{aligned}$$

<u>Une équation cartésienne de (AB) est donc $x+y-1=0$.</u>

4 A$(3;2)$ et (AB) a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

Une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$, où m est le coefficient directeur de la droite.
Donc un vecteur directeur de (AB) est ici $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\left(x;y\right)\in(\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff -\frac{1}{2}(x-3)-1(y-2)=0\\ &\iff -\frac{1}{2}x-y+\frac{7}{2}=0\\ &\iff x+2y-7=0.\end{aligned}$$

<u>Une équation cartésienne de (AB) est donc $x+2y-7=0$.</u>

Corrigé de l'exercice 6.6 page 164

1 $3x-5y+2=0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ (propriété 36).

2 $-5x+9y-7=0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix}$ (propriété 36).

3 $y=3x-1$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ (propriété 35).

4 $y=5$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (propriété 35).

Corrigé de l'exercice 6.7 page 165

1 $3x-5y+2=0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ (propriété 36). Donc le coefficient directeur est :

$$m=\frac{3}{5}.$$

2 $-5x+9y-7=0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix}$ (propriété 36). Donc le coefficient directeur est :

$$m=\frac{-5}{-9}=\frac{5}{9}.$$

3 $y=3x-1$. C'est une équation réduite, donc le coefficient directeur de la droite est le coefficient de x :

$$m=3.$$

4 $y=5$. La droite est horizontale, donc son coefficient directeur est nul (il n'y a aucune inclinaison par rapport à l'horizontale). Donc, $m=0$.

Corrigé de l'exercice 6.8 page 165

1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-3\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4-2\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}=3\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

2 $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=-\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CD}=-3\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc O, C et D sont alignés.

3 $BM=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ et $CM=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$.
La médiatrice de [BC] est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $BM=CM$, donc $BM^2=CM^2$ On en déduit les équivalences page suivante.

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y+1)^2 &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2-4x+4+y^2+2y+1\\ &\Leftrightarrow 2x-6y=0\\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x.\end{aligned}$$

L'équation réduite de Δ est donc $y=\frac{1}{3}x$.

Les coordonnées de O et de A vérifient cette équation (car $y_0=\frac{1}{3}x_O$ et $y_A=\frac{1}{3}x_A$) donc O et A appartiennent à cette droite. Ainsi, $\Delta=(OA)$.

Corrigé de l'exercice 6.9 page 165

1 La droite est parallèle à l'axe des abscisses lorsqu'un vecteur directeur est de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{R}$. Or, on sait que la droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Ainsi, il faut que $m=0$ pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

2 La droite est parallèle à l'axe des ordonnées lorsqu'un vecteur directeur est de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{R}$. D'après ce que l'on a dit dans la question précédente, il faut donc que $1-2m=0$, soit $m=\frac{1}{2}$.

Ainsi, il faut que $m=\frac{1}{2}$ pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées.

3 Posons $A(x_A\,;y_A)$ le point fixe. Ainsi, $A\in\mathscr{D}_0$ et $A\in\mathscr{D}_{\frac{1}{2}}$ (on prend les valeurs de m précédemment trouvées par exemple).

$\mathscr{D}_0 : y=4$. Donc $y_A=4$.
$\mathscr{D}_{\frac{1}{2}} : x=-8$. Donc $x_A=-8$.

Le point fixe est donc $A(-8\,;4)$.

Corrigé de l'exercice 6.10 page 165

Traduisons par deux équations les données :

- « Le périmètre de ce rectangle est 16 cm » se traduit par :

$$2(x+y)=16 \iff x+y=8.$$

- « Si on ajoute 3 cm à la longueur et si on double la largeur, le périmètre devient 28 cm » se traduit par :

$$2\left[(x+3)+2y\right]=28 \iff x+3+2y=14 \iff x+2y=11.$$

On résout alors le système : $\begin{cases} x + y = 8 & (L_1) \\ x + 2y = 11 & (L_2) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} (L_2) - (L_1) &\iff (x+2y) - (x+y) = 11 - 8 \\ &\iff y = 3. \end{aligned}$$

Ainsi, $(L_1) \iff x + 3 = 8 \iff x = 8 - 3 = 5$.
Les dimensions du rectangle sont donc 5 cm et 3 cm.

Corrigé de l'exercice 6.11 page 166

Notons :

- x le prix d'un livre avant la réduction,
- y le prix d'un stylo avant la réduction.

Traduisons par des équations les données :

- « Pour l'achat d'un livre et d'un stylo, la dépense est de 35 € » :

$$x + y = 35.$$

- « Après une réduction de 20 % sur le prix du livre et de 30 % sur le prix du stylo, la dépense n'est que de 26 € » :

$$0,8x + 0,7y = 26.$$

On doit alors résoudre le système (S) : $\begin{cases} x + y = 35 & (L_1) \\ 0,8x + 0,7y = 26 & (L_2) \end{cases}$.

- Trouvons y :

$$(S) \iff \begin{cases} 0,8x + 0,8y = 28 & (L_1) \longleftarrow 0,8(L_1) \\ 0,8x + 0,7y = 26 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (L_1) - (L_2) &\iff 0,1y = 2 \\ &\iff y = 20. \end{aligned}$$

- Trouvons x :

$$(S) \iff \begin{cases} 0,7x + 0,7y = 24,5 & (L_1) \longleftarrow 0,7(L_1) \\ 0,8x + 0,7y = 26 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (L_2) - (L_1) &\iff 0,1x = 1,5 \\ &\iff x = 15. \end{aligned}$$

Un livre coûte donc 15 € et le stylo coûte 20 €.

Corrigé de l'exercice 6.12 page 166

Posons :

- x le nombre de pièces de 1 €;
- y le nombre de pièces de 2 €.

« Max a 10 pièces dans son porte-monnaie » signifie que $x+y=10$.
« Le montant contenu dans le porte monnaie est de 15 € » signifie que $1x+2y=15$.

On doit alors résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y=10 & (\mathrm{L}_1) \\ x+2y=15 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}_2)-(\mathrm{L}_1) &\iff (x+2y)-(x+y)=15-10 \\ &\iff y=5\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant y par 5 dans (L_1), on a :

$$(\mathrm{L}_1) \iff x+5=10 \iff x=10-5=5.$$

<u>Ainsi, Max possède 5 pièces de chaque sorte.</u>

Corrigé de l'exercice 6.13 page 166

Posons :

- x le nombre de « likes » sur mon premier post;
- y le nombre de « reposts » sur mon premier post.

L'énoncé nous dit alors que :

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} x+y=840 & (\mathrm{L}_1) \\ 3x+2y=2208 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

- Trouvons y en éliminant x.

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} 3x+3y=2520 & (\mathrm{L}_1) \leftarrow 3(\mathrm{L}_1) \\ 3x+2y=2208 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}_1)-(\mathrm{L}_2) &\iff (3x+3y)-(3x+2y)=2520-2208 \\ &\iff y=312.\end{aligned}$$

- On en déduit alors à partir du système (S) initial :

$$(\mathrm{L}_1) \iff x+312=840 \iff x=840-312=528.$$

<u>Ainsi, mon premier post a 528 « likes » et 312 « reposts ».</u>

Corrigé de l'exercice 6.14 page 166

1 $(d)\ :\ 3x+4y+1=0$ et $(d')\ :\ -5x+6y-2=0$. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x+4y+1=0 & L_1 \\ -5x+6y-2=0 & L_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 15x+20y+5=0 & L_1 \longleftarrow 5L_1 \\ -15x+18y-6=0 & L_2 \longleftarrow 3L_2 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 15x+20y+5=0 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 38y-1=0 & L_2 \longleftarrow L_1+L_2 \end{cases}$$

On en déduit que $y=\dfrac{1}{38}$ et en remplaçant y par cette valeur dans l'équation $3x+4y+1=0$ (par exemple), on obtient :

$$3x+\frac{4}{38}+1=0 \Longleftrightarrow 3x=\frac{-21}{19} \Longleftrightarrow x=-\frac{7}{19}.$$

Les droites (d) et (d') se coupent donc en un point de coordonnées $\left(-\dfrac{7}{19};\dfrac{1}{38}\right)$.

2 $(d)\ :\ 8x-3y-3=0$ et $(d')\ :\ -4x-5y+1=0$. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 8x-3y-3=0 & L_1 \\ -4x-5y+1=0 & L_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 8x-\ \ 3y-3=0 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -8x-10y+2=0 & L_2 \longleftarrow 2L_2 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 8x-\ \ 3y-3=0 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -13y-1=0 & L_2 \longleftarrow L_1+L_2 \end{cases}$$

On en déduit que $y=-\dfrac{1}{13}$ et avec l'équation $8x-3y-3=0$, on a :

$$8x+\frac{3}{13}-3=0 \Longleftrightarrow 8x=\frac{36}{13} \Longleftrightarrow x=\frac{9}{26}.$$

Les droites (d) et (d') se coupent donc en un point de coordonnées $\left(\dfrac{9}{26};-\dfrac{1}{13}\right)$.

3 $(d)\ :\ 5x+7y+6=0$ et $(d')\ :\ 3x-5y+1=0$. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 5x+7y+6=0 & L_1 \\ 3x-5y+1=0 & L_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 15x+21y+18=0 & L_1 \longleftarrow 3L_1 \\ -15x+25y-\ \ 5=0 & L_2 \longleftarrow -5L_2 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 15x+21y+18=0 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 46y+13=0 & L_2 \longleftarrow L_1+L_2 \end{cases}$$

O en déduit que $y=-\dfrac{13}{46}$ et à l'aide de l'équation $3x-5y+1=0$, on trouve :

$$3x+\frac{65}{46}+1=0 \Longleftrightarrow 3x=-\frac{111}{46} \Longleftrightarrow x=-\frac{37}{46}.$$

Les droites (d) et (d') se coupent donc en un point de coordonnées $\left(-\dfrac{37}{46};-\dfrac{13}{46}\right)$.

4 (d) : $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+1=0$ et (d') : $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y+1=0$. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+1=0 & L_1\\ \sqrt{3}x-\sqrt{2}y+1=0 & L_2\end{cases} \iff \begin{cases}\sqrt{6}x+3y+\sqrt{3}=0 & L_1\longleftarrow\sqrt{3}L_1\\ -\sqrt{6}x+2y-\sqrt{2}=0 & L_2\longleftarrow-\sqrt{2}L_2\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\sqrt{6}x+3y+\sqrt{3}=0 & L_1\longleftarrow L_1\\ 5y+\sqrt{3}-\sqrt{2}=0 & L_2\longleftarrow L_1+L_2\end{cases}$$

On en déduit alors que $y=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$ et à l'aide de l'équation $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+1=0$, on obtient :

$$\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{6}-3}{5}+1=0 \iff \sqrt{2}x=-\frac{\sqrt{6}+2}{5} \iff x=-\frac{\sqrt{6}+2}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{12}+2\sqrt{2}}{10}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5}.$$

Les droites (d) et (d') se coupent donc en un point de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5};\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}\right)$.

Corrigé de l'exercice 6.15 page 166

On cherche les nombres $x>0$ et $y>0$ tels que :

$$\begin{cases}x^2+y^2=225\\ x^2-y^2=63\end{cases}$$

Posons alors $X=x^2$ et $Y=y^2$ pour simplifier les écritures. On a alors :

$$\begin{cases}X+Y=225 & L_1\\ X-Y=63 & L_2\end{cases} \iff \begin{cases}X+Y=225 & L_1\longleftarrow\\ 2X=288 & L_2\longleftarrow L_1+L_2\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}X+Y=225\\ X=144\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}Y=225-144=81\\ X=144\end{cases}$$
$$\iff x=\sqrt{144}=12,\ y=\sqrt{81}=9.$$

Corrigé de l'exercice 6.16 page 166

Posons :

- x le prix d'une baguette,
- y le prix d'un croissant.
- « 4 baguettes et 5 croissants valent 9,35 € » se traduit par l'équation :

$$4x+5y=9,35.$$

- « 2 baguettes et 3 croissants valent 5,15 € » se traduit par l'équation :

$$2x+3y=5,15.$$

On doit alors résoudre le système : (S) : $\begin{cases} 4x+5y=9{,}35 & (L_1) \\ 2x+3y=5{,}15 & (L_2) \end{cases}$.

$$(S) \iff \begin{cases} 4x+5y=9{,}35 & (L_1) \\ 4x+6y=10{,}3 & (L_2) \longleftarrow 2(L_2) \end{cases}$$

$$(L_2)-(L_1) \iff y=10{,}3-9{,}35 \iff y=0{,}95.$$

$$(S) \iff \begin{cases} 12x+15y=28{,}05 & (L_1) \longleftarrow 3(L_1) \\ 10x+15y=25{,}75 & (L_2) \longleftarrow 5(L_2) \end{cases}$$

$$(L_1)-(L_2) \iff 2x=28{,}05-25{,}75=2{,}30 \iff x=1{,}15.$$

Ainsi, une baguette coûte 1,15 € et un croissant coûte 0,95 €.

Corrigé de l'exercice 6.17 page 167

- À la fin de la partie 1, il y a 4 jetons rouges, valant chacun x points, et 3 jetons noirs (valant chacun y points).
  Le nombre total de points est donc égal à $4x+3y$.
  Or, ce total vaut 40 points d'après ce qui est indiqué sous le dessin.
  Par conséquent, $4x+3y=10$.
- À la fin de la partie 2, il y a 3 jetons rouges et 5 jetons noirs, pour un total de points de 41 points.
  Donc $3x+5y=41$.

On doit donc résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 4x+3y=40 & L_1 \\ 3x+5y=41 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 12x+\ \ 9y=120 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ 12x+20y=164 & L_2 \leftarrow 4L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 12x+\ \ 9y=120 & L_1 \\ \quad\quad 11y=44 & L2 \leftarrow L_2-L_1 \end{cases}$$

On déduit de la deuxième équation que $y=\dfrac{44}{11}=4$.
On peut alors s'aider de la première équation du premier système pour écrire :

$$x=\frac{1}{4}(40-3\times 4)=7.$$

Ainsi, un jeton rouge rapporte 7 points et un jeton noir, 4 points.

Corrigé de l'exercice 6.18 page 167

Posons :

- x le prix d'un kg de pommes ;
- y le prix d'un kg de carottes.

« Dans le panier de Mme Martin, il y a 5 kg de pommes et 2 kg de carottes.
Mme Martin a payé 18,5 €. »

Cela signifie que $5x+2y=18,5$.

« Dans le panier de M. Bernard, il y a 3 kg de pommes et 7 kg de carottes.
M. Bernard a payé 28,5 €. »
Cela signifie que $3x+7y=28,5$.
On doit alors résoudre le système :

$$(S) : \begin{cases} 5x+2y=18{,}5 & (L_1) \\ 3x+7y=28{,}5 & (L_2) \end{cases}$$

- Trouvons y en éliminant les x.

$$(S) \iff \begin{cases} 15x+\ \ 6y=55{,}5 & (L_1)\leftarrow 3(L_1) \\ 15x+35y=142{,}5 & (L_2)\leftarrow 5(L_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(L_2)-(L_1) &\iff (15x+35y)-(15x+6y)=142,5-55,5 \\ &\iff 29y=87 \\ &\iff y=\frac{87}{29}=3\end{aligned}$$

- Trouvons x en éliminant y.

$$(S) \iff \begin{cases} 35x+14y=129{,}5 & (L_1)\leftarrow 7(L_1) \\ \ \ 6x+14y=57 & (L_2)\leftarrow 2(L_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(L_1)-(L_2) &\iff (35x+14y)-(6x+14y)=129,5-57 \\ &\iff 29x=72,5 \\ &\iff x=\frac{72,5}{29}=2,5.\end{aligned}$$

Ainsi, 1 kg de pommes vaut 2,50 € et 1 kg de carottes vaut 3 €.

Corrigé de l'exercice 6.19 page 167

Appuyons-nous sur la formule :

$$\text{vitesse}=\frac{\text{distance}}{\text{temps}}.$$

Notons :

- t le temps de chute de la pierre dans l'air;
- $12-t$ le temps de chute de la pierre dans l'eau (car la temps total de la chute est égal à 12 secondes);
- d la distance parcourue par la pierre dans l'air;
- $127-d$ la distance parcourue par la pierre dans l'eau (car la distance totale est égale à 127 mètres).

Alors,

- dans l'air, $16 = \dfrac{d}{t}$, soit : $d = 16t$;
- dans l'eau, $3 = \dfrac{127-d}{12-t}$, soit : $3(12-t) = 127-d$, ou encore : $3t - d = 36-127$, et donc : $3x - d = -91$.
  En remplaçant d par $16t$, on obtient :
  $$-13t = -91 \quad \text{soit} \quad t = \frac{91}{13} = 7$$
  et donc $d = 16 \times 7 = 112$.

La pierre chute donc dans l'air sur 112 mètres pendant 7 secondes, puis dans l'eau sur 15 mètres pendant 5 secondes.

Corrigé de l'exercice 6.20 page 168

Notons :

- x la masse (en g) d'un cône,
- y la masse (en g) d'un cylindre,
- z la masse (en g) d'une boule.

Alors, on peut écrire les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} x+y+z &= 35 \\ 3x+3z &= 4y \\ 3x+4y &= 7z \end{cases} \iff \begin{cases} x+\ y+\ z=35 & \mathrm{L}_1 \\ 3x-4y+3z=0 & \mathrm{L}_2 \\ 3x+4y-7z=0 & \mathrm{L3} \end{cases}$$

Si on ajoute L_2 et L_3, on élimine les y :

$$\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3 \iff 6x-4z=0 \iff x = \frac{2}{3}z.$$

Si on les soustrait, on élimine les x :

$$\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2 \iff 8y-10z=0 \iff y = \frac{5}{4}z.$$

Ainsi, la première ligne devient :

$$\mathrm{L}_1 \iff \frac{2}{3}z+\frac{5}{4}z+z=35 \iff \frac{35}{12}z=35 \iff z=12.$$

On en déduit alors : $x = \dfrac{2}{3} \times 12 = 8$ et $y = \dfrac{5}{4} \times 12 = 15$.

Ainsi, un cône pèse 12 g, un cylindre pèse 15 g et une boule pèse 12 g.

Corrigé de l'exercice 6.21 page 168

Pour ce type de problème, il faut faire un tableau (par exemple) :

	Passé	Présent	Futur
Moi	y	$2x$	$4x-y$
Vous	x	y	$2x$

- « J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez » : je vais noter « $2x$ » mon âge actuel car il est égal à deux fois l'âge que vous aviez dans le passé : je note donc x votre âge dans le passé. Le passé est l'époque où j'avais l'âge que vous avez actuellement. Je vais donc noter y votre âge actuel.
- « Quand vous aurez l'âge que j'ai… » : dans le futur, quand vous aurez un âge égal à $2x$, il se sera écoulé $2x-y$ années, donc j'aurais $2x-y$ ans de plus, soit $2x+2x-y=4x-y$ années.

Maintenant que nous avons compléter le tableau, traduisons l'énoncé en équations :

- dans le futur, la somme de nos âges sera égale à 153 ans : $4x-y+2x=153$, soit $6x-y=153$;
- du passé au présent, il s'est passé $2x-y$ années (si on se réfère à mes âges), qui doit être égal à $y-x$ (si on se réfère à vos âges). On a donc : $2x-y=y-x$, soit $3x-2y=0$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases}6x-y=153\\3x-2y=0\end{cases}\iff\begin{cases}12x-2y=306 & \mathrm{L}_1\longleftarrow 2\mathrm{L}_1\\ 3x-2y=0 & \mathrm{L}_2\longleftarrow\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}9x=306 & \mathrm{L}_1\longleftarrow \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2\\3x-2y=0 & \mathrm{L}_2\longleftarrow\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=34\\ y=51\end{cases}$$

<u>Ainsi, le mathématicien qui parle a 68 ans et son collègue, 51 ans.</u>

7

Généralités sur les fonctions

Plan du chapitre

I - Définition

I . 1 - Introduction

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- l'élever au carré
- soustraire 7

Si on note x le nombre choisi au départ, ce programme donne à la fin le nombre x^2-7.
Si on décide de noter $r(x)$ le **r**ésultat (dépendant du nombre de départ x) alors :

$$r(x)=x^2-7.$$

Si on avait noté a le nombre de départ et $f(a)$ le nombre **f**inal obtenu (dépendant de a), alors on aurait noté :

$$f(a)=a^2-7.$$

Ce qui compte est l'expression qui permet d'obtenir le nombre final *en fonction* du nombre de départ.

On dit qu'à tout nombre réel x, ce programme **associe** le nombre x^2-7, et on note :

$$x \longmapsto x^2-7.$$

Il y a donc deux notations pour désigner le fait qu'un nombre est transformé en un autre.

Cette transformation est appelée une **fonction**.

I . 2 - Définition mathématique

Définition 35

Soit x un nombre réel.
On appelle **fonction** toute opération sur x qui le transforme en un autre nombre.

Si on note f cette fonction alors le nombre final est noté $f(x)$.
x est appelé **un antécédent** de $f(x)$.
$f(x)$ est appelé **l'image** de x par la fonction f.
On note alors :

$$f\,:\,x \longmapsto f(x)$$

II - Ensemble de définition et ensemble image

II . 1 - Ensemble de définition

Définition 36

Soit f une fonction.
L'**ensemble de définition** de f (aussi appelé **domaine de définition**) est l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.
On le note en général $\mathscr{D}_f$.

Exemple 54

1. Si $f : x \longmapsto x^2 - 7$ alors $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ car on peut calculer $x^2 - 7$ pour toutes les valeurs réelles de x.
2. Si $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ alors $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car on peut toujours calculer $\dfrac{1}{x-1}$ sauf si $x = 1$ (car il est impossible de diviser par 0)

II . 2 - Ensemble image

Définition 37

Soit f une fonction dont le domaine de définition est $\mathscr{D}_f$.
On appelle **ensemble image** de f l'ensemble de toutes les valeurs que prend $f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Exemple 55

Soit $f : x \longmapsto x^2 - 7$. On sait que pour tout x réel, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - 7 \geqslant -7$.
De plus, x pouvant prendre des valeurs de plus en plus grandes, x^2 peut aussi prendre des valeurs de plus en plus grandes, donc il n'y a pas de limite supérieure à x^2, donc à $x^2 - 7$ (on dit que $x^2 - 7$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
Ainsi, l'ensemble image de f est $[-7 ; +\infty[$.

Remarque 51

Trouver l'ensemble image d'une fonction n'est pas immédiat. Il sera très souvent nécessaire d'étudier la fonction. C'est l'objet du reste de ce chapitre.

III - Représentation graphique

III . 1 - Tableau de valeurs

Définition 38

On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.
On appelle **tableau de valeurs** de f un tableau constitué de deux lignes :

- sur la 1re, sont reportées plusieurs valeurs de x comprises entre a et b ;
- sur la 2e, sont reportées les images des valeurs de x de la 1re ligne.

Remarque 52

Le **pas** des valeurs de x, c'est-à-dire la différence entre chaque valeur de x, est arbitraire : c'est nous qui le choisissons selon le contexte dans lequel nous sommes.

Exemple 56

Soit $f : x \longmapsto x^2 - 7$. Un tableau de valeurs de f sur $[-5\,;5]$ est :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	18	9	2	-3	-6	-7	-6	-3	2	9	18

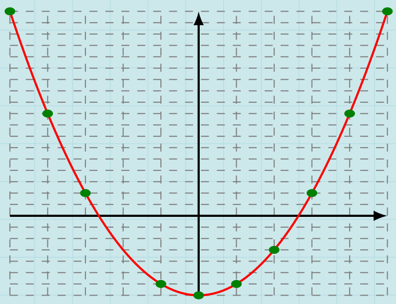
Ici, j'ai pris la décision (ça n'a pas été simple, mais j'y suis tout de même arrivé...) de prendre un pas égal à 1 pour les valeurs de x, c'est-à-dire que je suis parti de la plus petite valeur de x permise (donc $x = -5$ car la fonction est définie sur $[-5\,;5]$) et j'ai avancé en ajoutant 1 à chaque fois, jusqu'à arriver à la plus grande valeur de x permise, donc jusqu'à $x = 5$.
Pour chaque valeur de x, j'ai calculé $f(x)$ (donc $f(-5)$, $f(-4)$, $f(-3)$, ... jusqu'à $f(5)$).

III . 2 - Courbe représentative

Définition 39

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
On appelle **courbe représentative** de f dans un repère cartésien l'ensemble de tous les points de coordonnées $\big(x\,;f(x)\big)$, pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Exemple 57 (courbe représentative)



On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$.
Pour tracer cette courbe, on s'aide du tableau de valeurs établi précédemment en mettant dans le repère les points de coordonnées $(-5\,;18)$, $(-4\,;9)$, ..., $(5\,;18)$.

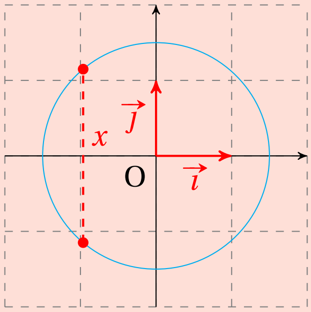
On les relie ensuite de sorte à ce que la courbe finale ne soit pas trop rectiligne.

Remarque 53

La définition de la courbe représentative d'une fonction est très importante. En effet, elle nous permet de savoir l'ordonnée d'un de ses points si on en connaît l'abscisse.
Par exemple, sur la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$, on sait que le point de la courbe représentative de f d'abscisse $x = 2,5$ a pour ordonnée $y = f(2,5) = 2,5^2 - 7 = -0,75$.

Attention 7

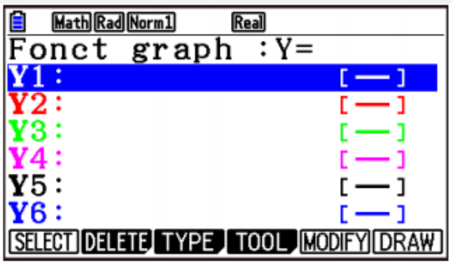
La courbe représentative d'une fonction ne « retourne pas en arrière »; autrement dit, pour un x donné, il n'y a qu'un seul point sur la courbe dont l'abscisse vaut x. Par exemple, le cercle suivant n'est pas la courbe représentative d'une fonction car pour l'abscisse x indiquée, il y a deux points sur le cercle dont l'abscisse est x :



III . 3 - Ce que fait votre calculatrice

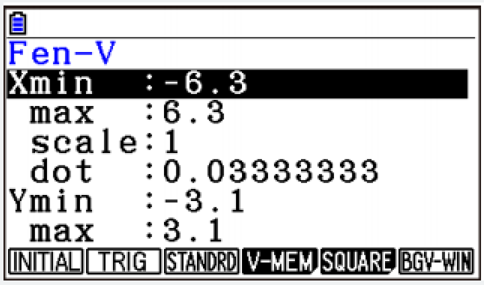
Les captures d'écran ci-dessous sont issues du manuel d'utilisation de la CASIO GRAPH90+.
Pour tracer une courbe sur une calculatrice,

1. il faut avant tout entrer l'expression de la fonction en accédant à un écran ressemblant à celui-ci :



(Exemple : mode **Graphe**)

2. il faut ensuite entrer les paramètres d'affichage en accédant à une fenêtre comme celle-ci :



Ici, `Xmin` représente la plus petite valeur de x du domaine de définition sur lequel on souhaite tracer la courbe. Quant à `Xmax`, cela représente la plus grande valeur de x. Ainsi, pour une fonction définie sur $[-5;5]$, on entrera `Xmin=-5` et `Xmax=5`.

Il va de soit que `Ymin` et `Ymax` jouent le même rôle, mais pour les valeurs des images. Sur l'exemple précédent, d'après le tableau de valeurs, on pourra prendre `Ymin=-7` et `Ymax=18`.

Le paramètre `scale` représente l'échelle des graduations.

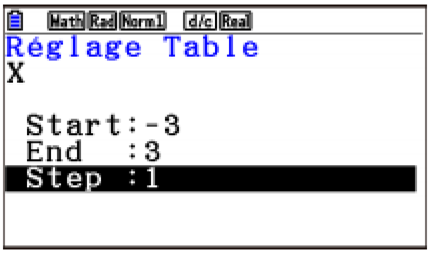
Sur la TI89, un paramètre `xres` est présent : pour un tracé très précis, ce paramètre doit valoir 1. Pour un tracé rapide mais moins précis, on peut entrer une valeur de 2 à 10 (si « 10 » est entré, cela sous-entend que la calculatrice prendra 1 pixel sur 10, calculera son image, et tracera une segment de cette image à la suivante).

Votre calculatrice peut aussi construire un tableau de valeurs.
Par exemple, sur la CASIO GRAPH90+, après avoir entrée l'expression de la fonction, on devra définir les paramètres du tableau de valeurs :

MENU Table

F5 (SET)

(−) 3 EXE 3 EXE 1 EXE

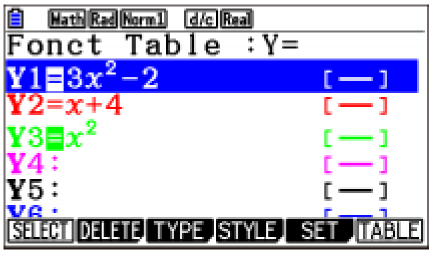


Ici, le paramètre `step` informe le *pas* entre chaque valeurs de x (sur cet exemple, `step=1` stipule que les valeurs de x vont être : -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3).

Voici ci-dessous un extrait du manuel d'utilisation de la CASIO GRAPH90+ permettant de voir comment générer un tableau de valeurs pour trois fonctions ($x \mapsto 3x^2 - 2$, $x \mapsto x + 4$ et $x \mapsto x^2$).

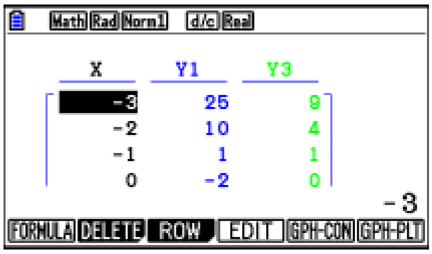
Utilisez ⏶ et ⏷ pour mettre en surbrillance la fonction que vous voulez sélectionner pour générer le tableau et appuyez sur F1 (SELECT) pour la sélectionner.

Le signe « = » des fonctions sélectionnées est en surbrillance à l'écran. Pour désélectionner une fonction, amenez le curseur sur celle-ci et appuyez une nouvelle fois sur F1 (SELECT).



Appuyez sur F6 (TABLE) pour générer un tableau de chiffres à partir des fonctions sélectionnées. La valeur de la variable x change en fonction de la plage ou du contenu de la liste que vous avez spécifiée.

L'exemple ci-contre montre les résultats obtenus pour la liste 6 (–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3).



Chaque cellule peut contenir jusqu'à six chiffres, signe négatif compris.

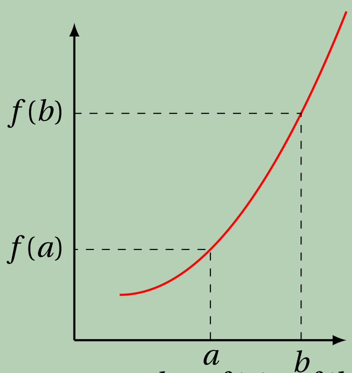
IV - Variations d'une fonction

IV . 1 - Sens de variation

Définition 40

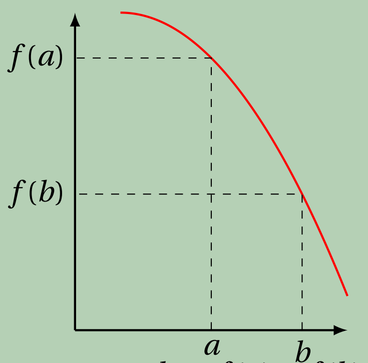
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère deux nombres a et b quelconques dans I tels que $a < b$.

- On dit que f est **strictement croissante sur I** si $f(a) < f(b)$.
- On dit que f est **strictement décroissante sur I** si $f(a) > f(b)$.
- On dit que f est **constante sur I** si $f(a) = f(b)$.



$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

f est strictement croissante

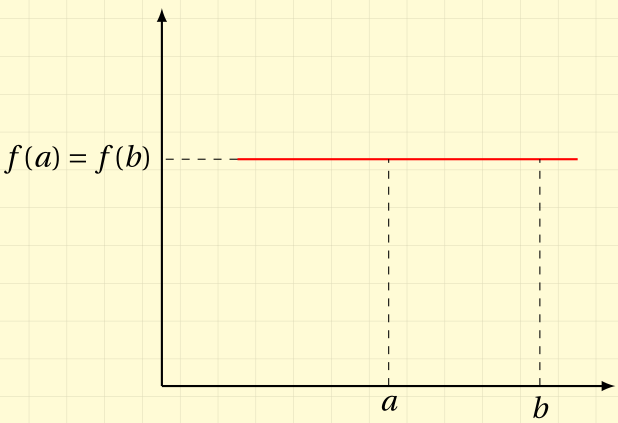


$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

f est strictement décroissante

Remarque 54

- Si f est strictement croissante sur un intervalle I alors les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents.
- Si f est strictement décroissante sur un intervalle I alors les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents.
- Une fonction constante sur un intervalle I sera représentée par une droite (ou segment si l'intervalle est fini) horizontal.e. :



IV . 2 - Tableau de variations

Définition 41

Soit f une fonction définie sur un domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
Le **tableau de variations** de f sur $\mathscr{D}_f$ est un tableau comportant deux lignes :

- sur la 1^{re} sont reportées toutes les valeurs de x importantes (bornes du domaine de définition, valeurs interdites de la fonction, valeurs de x où la fonction change de sens de variation) ;
- sur la 2^e sont représentées les variations de f (une flèche montante quand f est croissante, une flèche descendante quand f est décroissante), ainsi éventuellement que la donnée de certaines images.

Exemple 58

D'après la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ donnée dans l'exemple 57, ainsi que du tableau de valeurs de cette fonction, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	-5		0		5
Variations de $f(x)$	18	↘	-7	↗	18

IV . 3 - Minimum et maximum

Définition 42

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On appelle **minimum** de f sur I la plus petite valeur atteinte par $f(x)$ pour $x \in$ I.
- On appelle **maximum** de f sur I la plus grande valeur atteinte par $f(x)$ pour $x \in$ I.

Exemple 59

D'après le tableau de variations précédent,

- le minimum de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ sur $[-5;5]$ est -7 ;
- le maximum de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ sur $[-5;5]$ est 18.

V - Fonctions paires, fonctions impaires

V . 1 - Fonctions paires

Définition 43

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est **paire** si :

- $\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$;
- $f(-x) = f(x)$.

Exemple 60

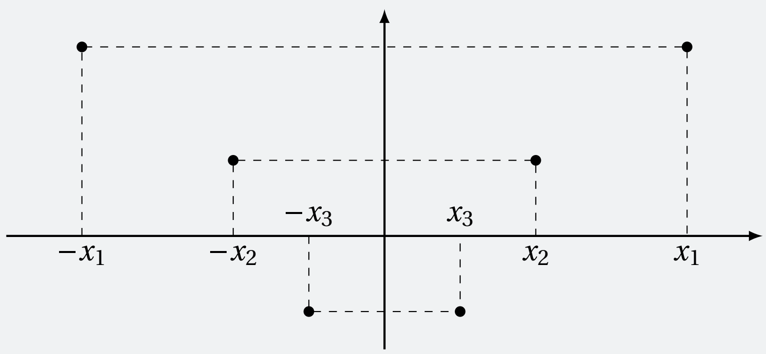
La fonction $f\ :\ x \mapsto x^2 - 7$ est paire car son domaine de définition est $\mathbb{R}$ (donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$) et :

$$f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x).$$

Propriété 38

Si une fonction f est paire alors, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

En effet, on a la situation suivante :



f est paire donc $f(x_1) = f(-x_1)$, $f(x_2) = f(-x_2)$, $f(x_3) = f(-x_3)$, etc.
Les points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

V . 2 - Fonctions impaires

Définition 44

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.
On dit que f est **impaire** si :

- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$;
- $f(-x) = -f(x)$.

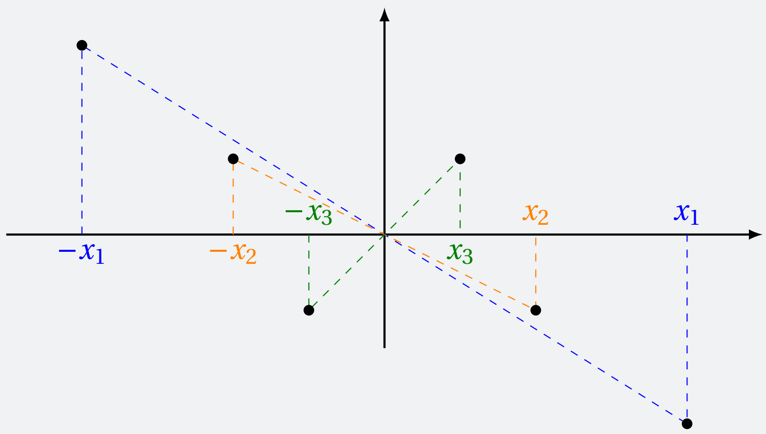
Exemple 61

La fonction $f\ :\ x \mapsto x^3 + x$ est impaire car son domaine de définition est $\mathbb{R}$ (donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$) et :

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

Propriété 39

Si une fonction f est impaire alors, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

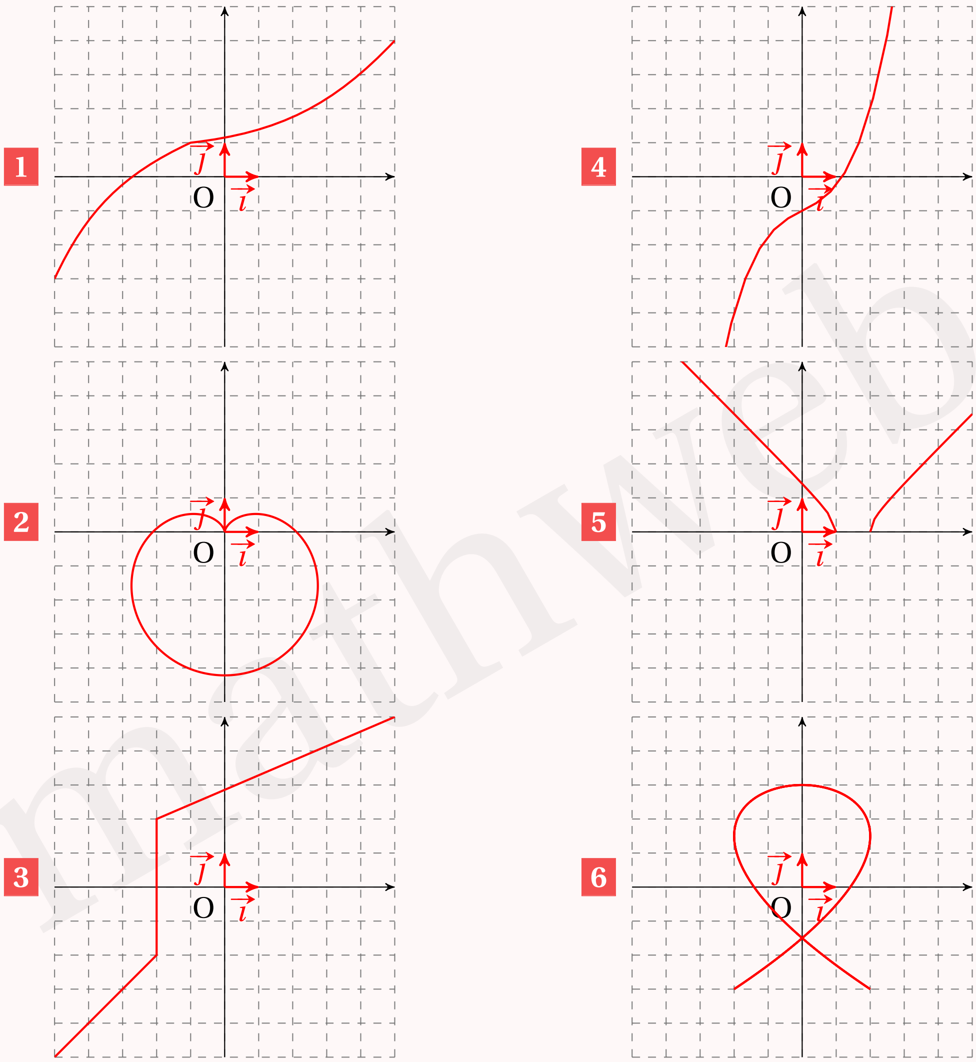


f est impaire donc $f(x_1) = -f(x_1)$, $f(x_2) = -f(x_2)$, $f(x_3) = -f(x_3)$, etc.
Les points sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Notion de fonctions

Exercice 7.1 (fonction ou pas fonction ?)

Pour chaque courbe dessinée ci-dessous, dire si elle représente une fonction en justifiant.



Solution page 204

Exercice 7.2 (associer une fonction à une notion)

Dans chacune des situations suivantes, donner l'expression de la fonction associée.

1. Soit ABCD un carré de côté x. p est la fonction qui à x associe le périmètre de ABCD.
2. Soit ABCD un carré de côté x. $\mathscr{A}$ est la fonction qui à x associe l'aire de ABCD.
3. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 10 et AC = x. f est la fonction qui à x associe d'aire de ABC.
4. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 10 et AC = x. c est la fonction qui à x associe la longueur BC.

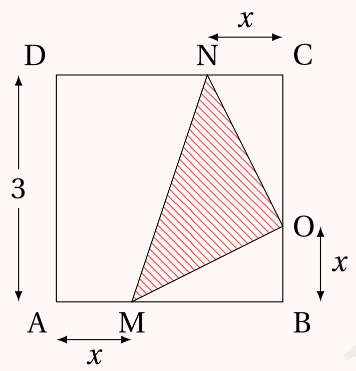
Solution page 204

Exercice 7.3 (établir une expression d'une fonction)

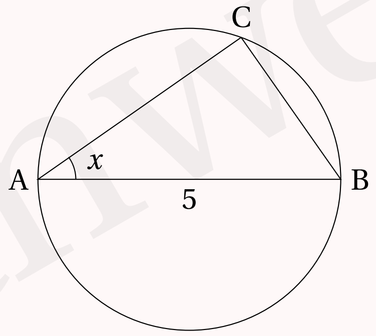
Pour chacune des questions suivantes, exprimer $f(x)$ sous sa forme la plus simple, puis donner son domaine de définition.

1 Un complexe sportif est composé de plusieurs activités. Pour pouvoir y avoir accès, on doit payer un droit d'entrée de 5 € puis payer 2 € par heure.
$f(x)$ représente le prix à payer pour x heures.

2 $f(x)$ représente l'aire hachurée dans le carré ABCD suivant :

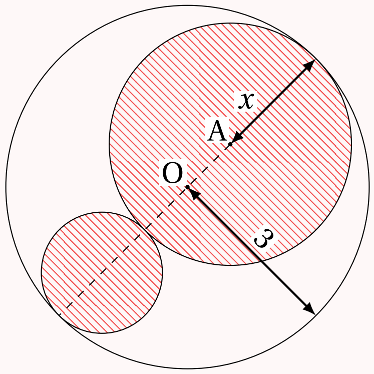


3 $f(x)$ représente l'aire du triangle ABC inscrit dans le cercle de diamètre [AB] :



4 On choisit un nombre x. $f(x)$ représente alors la différence entre le carré de son précédent et celui de son suivant.

5 $f(x)$ représente l'aire du domaine blanc de la figure suivante, où O est le centre du cercle de rayon 3 et A le centre du cercle de rayon x :



Solution page 205

Exercice 7.4 (fonction impaire)

Soit f une fonction impaire telle que $f(0)$ existe.
Montrer que $f(0) = 0$.

Solution page 206

Domaine de définition et tableau de valeurs

Exercice 7.5 (domaine de définition)

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver leur domaine de définition.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x-8}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x-7}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
5. $f_5 : x \mapsto x^2 - 5x + 1$
6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{-8}{x-1}}$

Solution page 206

Exercice 7.6 (loi d'Ohm)

En sciences physiques, la *loi d'Ohm* dit que la tension U (en volts) entre les bornes d'un résistor de résistance R est égale au produit de l'intensité du courant électrique I (en ampères) et de la valeur de R : $\mathrm{U} = \mathrm{R} \times \mathrm{I}$.

1. Si l'intensité reste constamment égale à 5 ampères, quelle est la fonction $f(\mathrm{R})$ donnant la tension en fonction de la résistance ?
2. Construire un tableau de valeurs de la fonction f sur $[1;10]$ avec un pas de 1.
3. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Solution page 207

Exercice 7.7 (tableau de valeurs à la calculatrice)

À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de valeurs donné pour chaque fonction.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 6$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

2. $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

x	-1	0	1	2	2,25	2,5	2,75	3,25	3,5	3,75	4	5	6
$g(x)$													

3. $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$									

Solution page 208

Exercice 7.8 (appartenance de points à une courbe)

Soit f une fonction et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si le point A (dont les coordonnées sont données à chaque fois) appartient ou non à $\mathscr{C}_f$.

1. $f(x) = -5x+2$, $A(-1;7)$.
2. $f(x) = x^2+x+1$, $A(-2;3)$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $A(2;0,25)$.
4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $A\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

Solution page 209

Exercice 7.9 (images et antécédents)

1. Soit $f(x) = -3x+2$.
   - **a.** Donner l'image des nombres -1, 0 et $\sqrt{2}$ par la fonction f.
   - **b.** -1 est-il un antécédent de 1 par la fonction f ?
   - **c.** Trouver tous les antécédents de -3 par la fonction f.
2. Soit $g(x) = x^2-5x+2$.
   - **a.** Donner l'image des nombres -1, 1 et $\sqrt{2}$ par la fonction g.
   - **b.** -2 est-il un antécédent de 1 par la fonction g ?
   - **c.** Donner tous les antécédents de 2 par la fonction g.

Solution page 209

Exercice 7.10

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-4}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier votre réponse.
2. Calculer l'image de 2 par f, puis l'image de -1 par f.
3. Les points suivants sont-ils situés sur $\mathscr{C}$? Justifier votre réponse.

$$A\left(0;\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad B(15;4,27) \quad ; \quad C\left(\frac{1}{3};-\frac{9}{11}\right).$$

Solution page 210

Tableau de variations

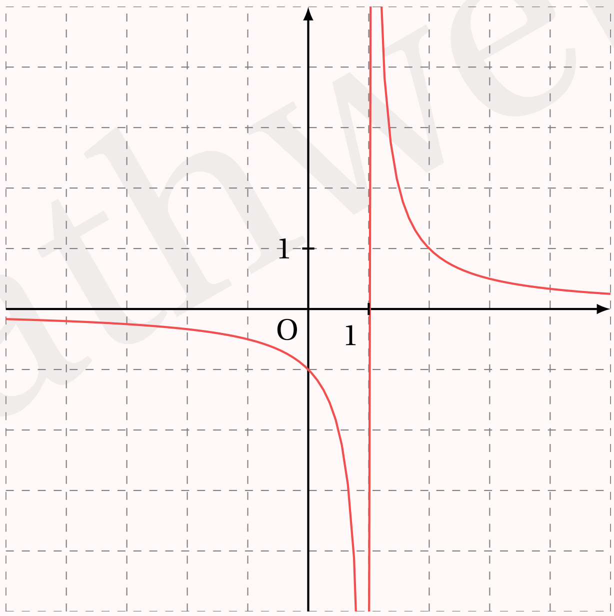
Exercice 7.11 (tableau de variations avec valeur interdite)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé (dessinée à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes) est donnée ci-dessous.

Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.



Solution page 211

Exercice 7.12 (lecture d'un tableau de variations)

On considère la fonction f définie sur $[-6;5]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-6		-3		0		1		5
$f(x)$			5				0		
	2	↗		↘	-3	↗		↘	-4

1. Quel est le maximum de la fonction f sur $[-6;5]$?
2. Quel est le minimum de la fonction f sur $[-6;5]$?
3. Comparer $f(-5)$ et $f(-4)$. Justifier.
4. Peut-on comparer $f(-5)$ et $f(3)$? Justifier.
5. Peut-on comparer $f(-1)$ et $f(4)$? Justifier.

Solution page 211

Exercice 7.13 (lecture d'un tableau de variations)

Le tableau de variations d'une fonction f est donnée ci-dessous.

x	-5		-2		0		3		5
$f(x)$	-4	↘	-5	↗	6	↘	0	↗	4

1 Déterminer le maximum et le minimum de f ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

2 Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Justifier votre réponse.

3 Compléter par $<$, $>$, ou ? si on ne peut pas savoir en justifiant votre réponse :

$$f(1)\dots f(2) \quad ; \quad f(-1)\dots f(-2) \quad ; \quad f(-1)\dots f(4) \quad ; \quad f(4)\dots f(-3)$$

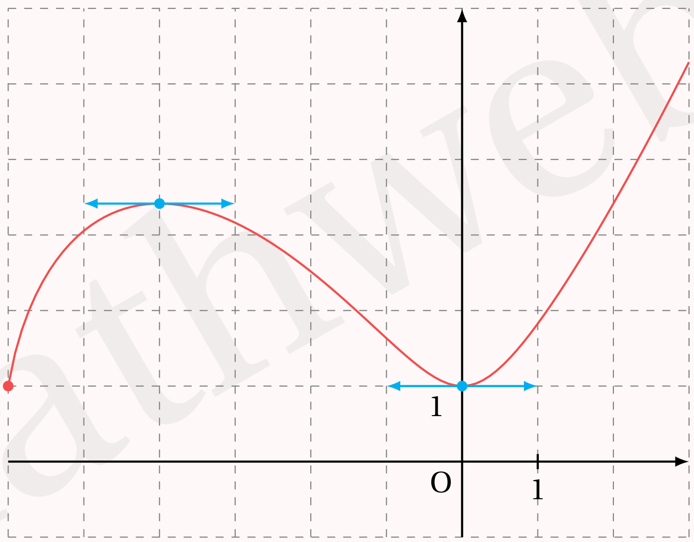
Solution page 211

Exercice 7.14 (tableau de variations)

On considère la fonction f définie sur $[-6;3]$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est donnée page suivante.



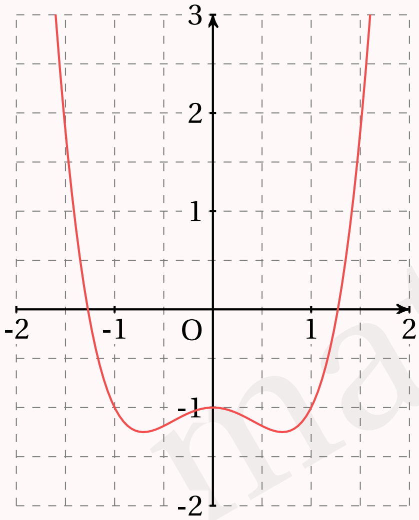
Construire le tableau de variations de f sur $[-6;3]$ en précisant les valeurs des extrema locaux (maximum et minimum dans cet intervalle).

Solution page 212

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Exercice 7.15

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;2]$ représentée par la courbe ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Résoudre l'équation : $f(x) = -1$ sur $[-2\,;2]$.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant -1$ sur $[-2\,;2]$.
3. Résoudre l'inéquation : $f(x) < -2$ sur $[-2\,;2]$.

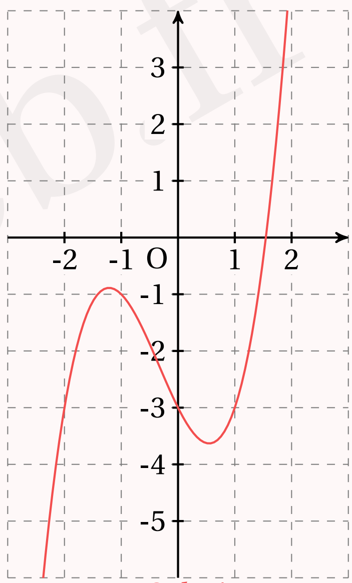
Solution page 212

Exercice 7.16

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ représentée par la courbe ci-dessous :

À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

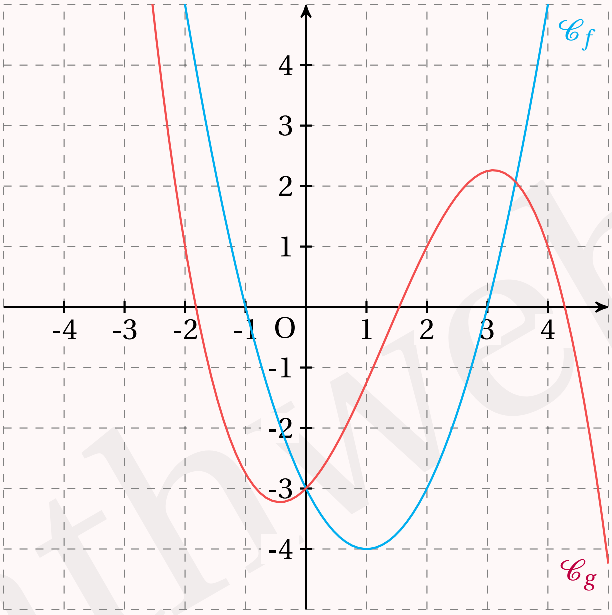
1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$ sur $[-3\,;3]$.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant -3$ sur $[-3\,;3]$.
3. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$ sur $[-3\,;3]$.



Solution page 213

Exercice 7.17

On considère deux fonctions f et g définies sur $[-5;5]$ dont les courbes représentatives sont dessinées ci-dessous :



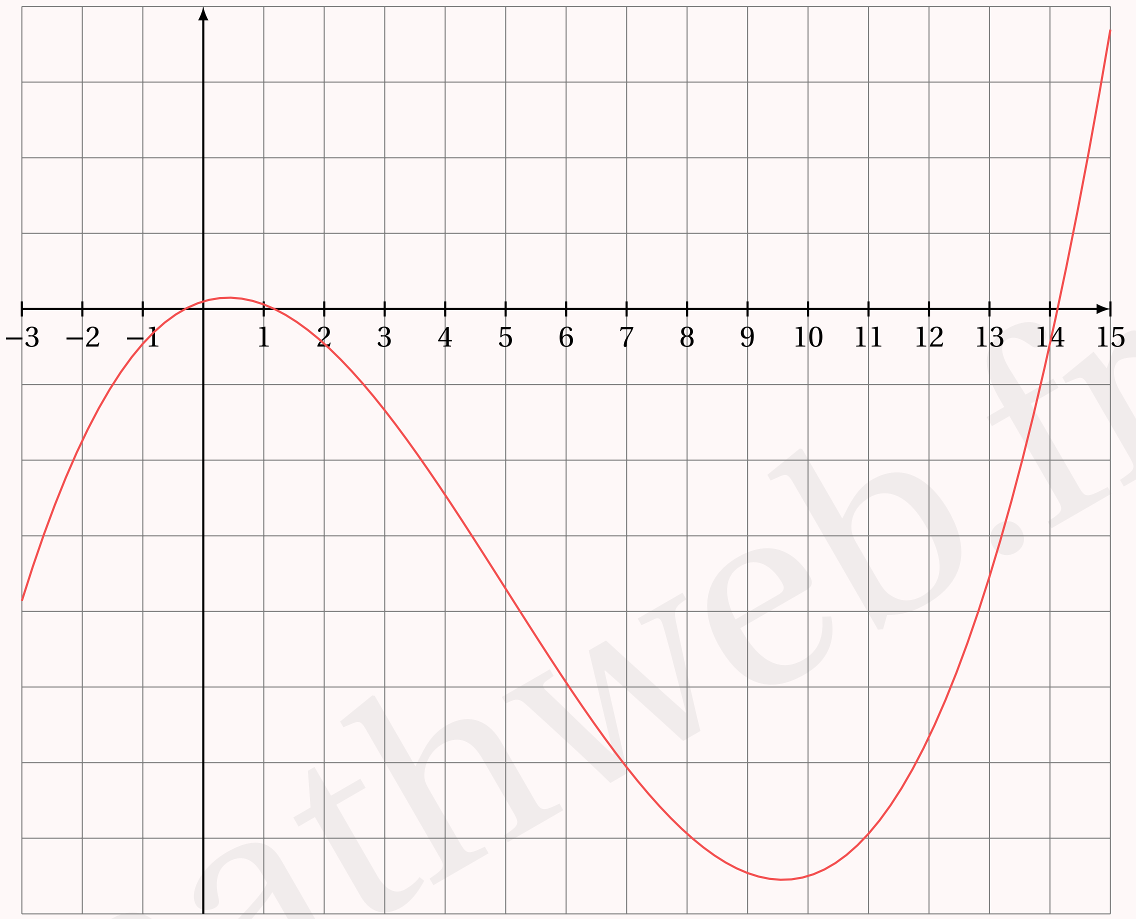
À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$ sur $[-5;5]$.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[-5;5]$.
3. Combien l'équation $g(x) = 3$ possède-t-elle de solution(s) ?
4. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[-5;5]$.
5. Dresser un tableau de signes de la fonction g sur $[-5;5]$.

Solution page 214

Exercice 7.18 (Python)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{12}{5}x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative sur $[-3;15]$ est donnée ci-dessous :



Compléter le programme suivant, écrit en Python, afin qu'il calcule l'image de toutes les valeurs de x pour $x \in [0;1]$ avec un pas de 0,01 et d'afficher le maximum de f sur cet intervalle ainsi que l'abscisse de ce maximum.

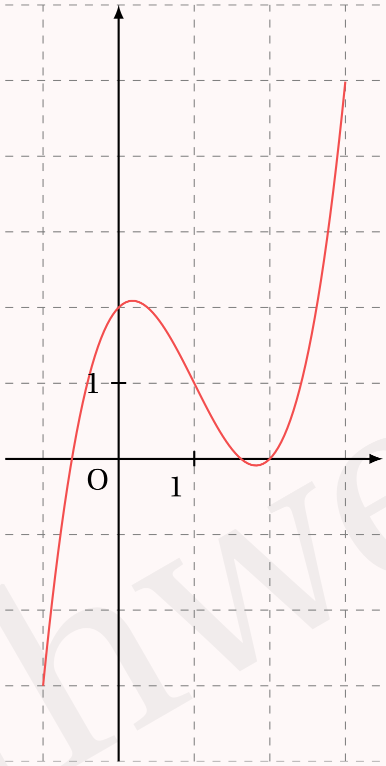
Code Python 7-11

```python
M = 0
xmax = 0
x = 0
while x <= ...:
    if 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1 > ...:
        M = 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1
        xmax = ...
    x = x + 0.01
print(xmax,M)
```

Solution page 216

Exercice 7.19

On donne la représentation graphique d'une fonction f sur $[-1;3]$:



1 Par lectures graphiques, donner :

a. l'image de -1 par la fonction f ;

b. un antécédent entier de 2 par la fonction f ;

c. le nombre de solutions à l'équation $f(x) = 0$

2 On donne : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

a. Montrer que $f(x) = (x-2)\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

b. En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

c. Dresser alors le tableau de signes de f sur $[-1;3]$.

Solution page 216

Corrigé de l'exercice 7.1 page 194

1 La courbe représente bien une fonction malgré la singularité au point d'abscisse -1 (regardez bien ce qui se passe au point de coordonnées $(-1;1)$: la courbe se « brise » mais ce n'est pas vraiment grave...). En effet, chaque valeur de x dans $[-5;5]$ n'admet qu'une image $f(x)$: si on prend une valeur de x quelconque dans $[-5;5]$, on ne peut trouver qu'un seul point de la courbe qui a pour abscisse x.

2 La courbe ne représente pas une fonction car il existe au moins un x pour lequel deux images par f existent. Par exemple, pour $x = 1$, les points de coordonnées $(1;0,5)$ et $(1;-4)$ sont sur cette courbe.

3 Cette courbe ne représente pas une fonction car on voit qu'il existe plusieurs points de cette courbe dont l'abscisse vaut -2.

4 La courbe représente bien une fonction car sur $[-5;5]$, chaque valeur de x admet une unique image.

5 Cette courbe représente bien une fonction malgré le fait qu'elle possède un « trou » sur $[1;2]$. En effet, chaque valeur de x dans $[-5;1]$ possède une unique image et il en est de même pour chaque valeur de x dans $[2;5]$.

6 Cette courbe n'est pas représentative d'une fonction car il existe au moins une valeur de x qui possède deux images. Par exemple, pour $x = 0$, il y a deux images : 3 et -1.5.

Corrigé de l'exercice 7.2 page 194

1 Le périmètre d'un carré de côté x est égal à $4x$. Donc :

$$\boxed{p : x \mapsto 4x \qquad \text{ou} \qquad p(x) = 4x.}$$

2 L'aire d'un carré de côté x est égale à x^2. Donc :

$$\boxed{\mathscr{A} : x \mapsto x^2 \qquad \text{ou} \qquad \mathscr{A}(x) = x^2.}$$

3 L'aire de ABC est égale à $\dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2}$ car il est rectangle en A.

$$\frac{\text{AB} \times \text{AC}}{2} = \frac{10 \times x}{2} = 5x.$$

Donc :

$$\boxed{f : x \mapsto 5x \qquad \text{ou} \qquad f(x) = 5x.}$$

4 D'après le théorème de Pythagore,

$$\text{BC} = \sqrt{\text{AB}^2 + \text{AC}^2} = \sqrt{10^2 + x^2} = \sqrt{100 + x^2}.$$

Donc :

$$\boxed{c : x \mapsto \sqrt{100 + x^2} \qquad \text{ou} \qquad c(x) = \sqrt{100 + x^2}.}$$

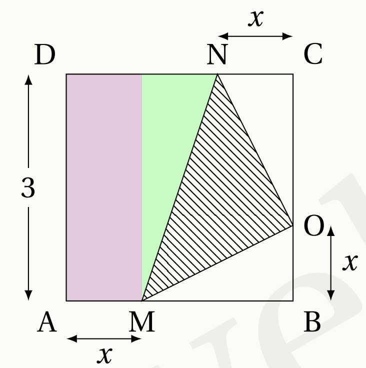
Corrigé de l'exercice 7.3 page 195

1 $f(x) = 5 + 2x$. Son domaine de définition est $[0; +\infty[$ car x ne peut pas être négatif (vu que x représente un nombre d'heures).

2
- L'aire du carré ABCD est : 9.
- L'aire des triangles MBO et NCO est : $\dfrac{x(3-x)}{2}$.
- L'aire du trapèze AMND est la somme des aires des figures violette et verte :

$$3x + \frac{3(3-2x)}{2} = \frac{6x+9-6x}{2} = \frac{9}{2}$$

(soit la moitié de l'aire du carré ABCD... coïncidence ? Je ne crois pas...)



L'aire du triangle MON est donc :

$$f(x) = 9 - \frac{9}{2} - 2 \times \frac{x(3-x)}{2} = \frac{9}{2} - x(3-x) = x^2 - 3x + \frac{9}{2}.$$

Son domaine de définition est $[0; 3]$ car x ne peut pas être négatif ni plus grand que la mesure d'un côté de ABCD.

3 Le triangle ABC est rectangle en C donc :

$$\cos x = \frac{AC}{5} \quad ; \quad \sin x = \frac{BC}{5}$$

donc $AC = 5\cos x$ et $BC = 5\sin x$.

L'aire de ABC est donc $f(x) = \dfrac{AC \times BC}{2} = \dfrac{25}{2}\sin x \cos x$.

x étant un angle aigu, le domaine de définition de f est $[0; 90[$, si x est exprimé en degrés.

4 Le carré du précédent de x est $(x-1)^2$.

Le carré du suivant de x est $(x+1)^2$.

Ainsi, $f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2 = -4x$. C'est une fonction linéaire dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

5 L'aire du disque de rayon 3 est : 9π (formule : $\pi \times r^2$).

L'aire du disque de rayon x est : πx^2.

L'aire du « petit disque » est : $(3-x)^2\pi$.

Ainsi, l'aire blanche est :

$$\begin{aligned} 9\pi - \pi x^2 - (3-x)^2\pi &= \left[9 - x^2 - (9 - 6x + x^2)\right]\pi \\ &= (6x - 2x^2)\pi \\ &\boxed{f(x) = 2x(3-x)\pi} \end{aligned}$$

Le domaine de définition de f est $[0;3]$.

Corrigé de l'exercice 7.4 page 196

f est impaire donc pour tout x de son domaine de définition, $f(-x) = -f(x)$.

$f(0)$ existe donc, en remplaçant x par 0 dans l'égalité $f(-x) = -f(x)$, on a les équivalences page suivante.

$$\begin{aligned} f(-0) = -f(0) &\iff f(0) = -f(0) \\ &\iff f(0) + f(0) = 0 \\ &\iff 2f(0) = 0 \\ &\iff \frac{2f(0)}{2} = \frac{0}{2} \\ &\iff \underline{f(0) = 0}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.5 page 196

1 $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x-8}$ est définie pour toutes les valeurs de x sauf quand $x - 8 = 0$ car le dénominateur d'une fraction ne peut pas être égal à 0.
Or $x - 8 = 0 \iff x = 0$; donc il faut enlever « 8 » à l'ensemble des nombre réels pour que $f_1(x)$ existe.
Donc $\mathscr{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{8\}$.

2 $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$ est définie pour toutes les valeurs de x sauf pour les valeurs telles que $x^2 - 4 = 0$.
Or, $x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$.
On doit donc enlever à $\mathbb{R}$ les valeurs -2 et 2.

Donc $\mathscr{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$.

3 $f_3 : x \mapsto \sqrt{x-7}$ est définie uniquement si $x - 7 \geqslant 0$, donc si $x \geqslant 7$.
Ainsi, $\mathscr{D}_{f_3} = [7;+\infty[$.

4 $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est définie uniquement si $x^2 + 1 \geqslant 0$. Or, pour toutes les valeurs de x réelles, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1$. Donc $f_4(x)$ existe toujours, quelle que soit la valeur de x.

Donc $\mathscr{D}_{f_4} = \mathbb{R}$.

5 $f_5 : x \mapsto x^2 - 5x + 1$ est définie pour toutes les valeurs que x peut prendre car on peut toujours calculer $x^2 - 5x + 1$.

Donc $\mathscr{D}_{f_5} = \mathbb{R}$.

6 $f_6 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{-8}{x-1}}$ est définies uniquement si $\dfrac{-8}{x-1} \geqslant 0$ et si $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire si $x - 1 < 0$, soit $x < 1$.

Donc $\mathscr{D}_{f_6} =]-\infty ; 1[$.

Corrigé de l'exercice 7.6 page 196

1 $f(\mathrm{R}) = \mathrm{U} = \mathrm{RI} = 5\mathrm{R}$ d'après la loi d'Ohm.

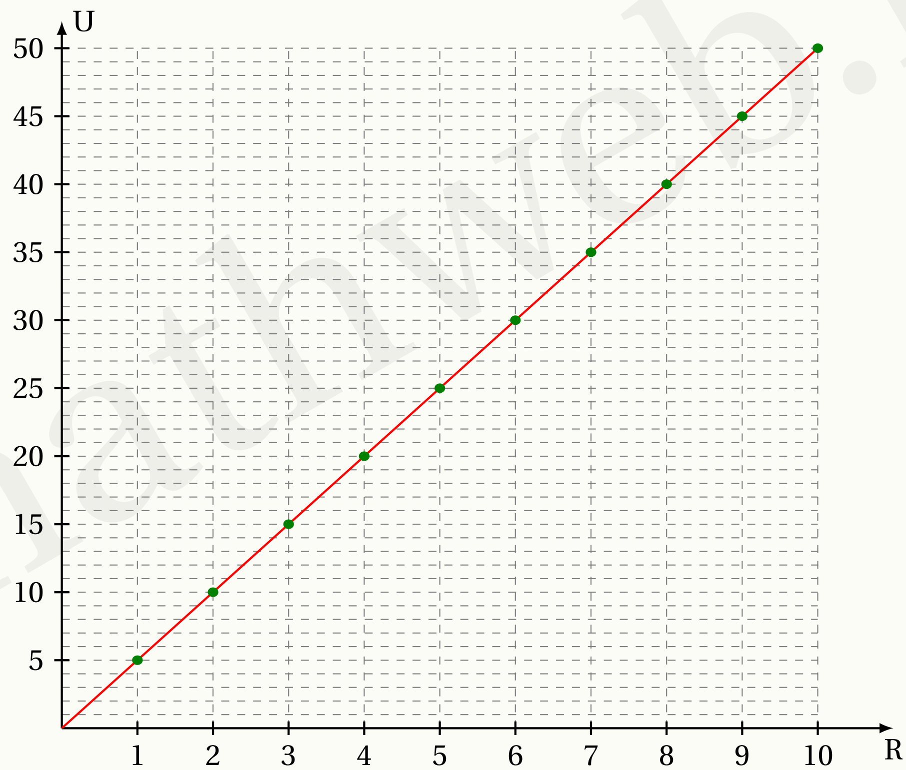
2 Tableau de valeurs de la fonction f sur $[1 ; 10]$ avec un pas de 1 :

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(\mathrm{R})$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Remarque 60

C'est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité égal à 5.

3 Courbe représentative de f dans un repère orthonormé :



Remarque 61

On reconnaît ici la représentation d'une fonction linéaire : c'est une droite qui passe par l'origine du repère.

Corrigé de l'exercice 7.7 page 196

Sur CASIO, appuyer sur la touche [MENU], puis appuyer sur la touche [7] (ou sélectionner [TABLE]).
Ensuite, entrer l'expression de chaque fonction en Y1, Y2 et Y3. Noter que la touche [X,t,θ,n] est à utiliser pour la variable X. Valider en appuyant sur la touche [EXE].
Pour construire le tableau de valeurs d'une fonction, positionnez-vous sur la ligne correspondant à la fonction souhaitée, puis appuyer sur la touche [F5] (SET) pour paramétrer la valeur initiale et la valeur finale de x, en précisant le pas (Step).

Sur TI, appuyer sur la touche [$f(x)$] pour rentrer l'expression des fonctions en Y1, Y2 et Y3. Noter que la touche [X,t,θ,n] est à utiliser pour la variable X. Valider en appuyant sur la touche [ENTRER].
Pour paramétrer le tableau de valeurs, appuyer sur [2nd]+[F4] (afin de sélectionner "TblSet").

Sur NUMWORKS, c'est bien plus simple : après avoir entré l'expression de la fonction (en choisissant « Fonctions » dans le menu principal, sélectionner « Afficher les valeurs » et aller sur « Régler l'intervalle » au-dessus du tableau.

1 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -5
- End : 5
- Step : 1

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -5
- Δtbl : 1

On obtient :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	46	34	24	16	10	6	4	4	6	10	16

2 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -1
- End : 6
- Step : 0.25

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -1
- Δtbl : 0.25

On obtient :

x	-1	0	1	2	2,25	2,5	2,75	3,25	3,5	3,75	4	5	6
$g(x)$	$-0,25$	$-0,333$	$-0,5$	-1	$-1,333$	-2	-4	4	2	1,333	1	0,5	0,333

3 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -2
- End : 2
- Step : 0.5

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -2
- Δtbl : 0.5

On obtient :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$	0	1,323	1,732	1,936	2	1,936	1,732	1,323	0

Corrigé de l'exercice 7.8 page 197

Remarque 62

Pour voir si un point appartient à la courbe représentative d'une fonction f, on doit vérifier si son ordonnée est égale à l'image de son abscisse par la fonction f ; autrement dit,

$$\mathrm{M}\left(x;y\right)\in\mathscr{C}_f \iff y=f(x).$$

1 $f(x)=-5x+2$, $\mathrm{A}(-1;7)$.
$f(-1)=-5\times(-1)+2=5+2=7=y_{\mathrm{A}}$. Donc $\underline{\mathrm{A}\in\mathscr{C}_f}$.

2 $f(x)=x^2+x+1$, $\mathrm{A}(-2;3)$.
$f(-2)=(-2)^2+(-2)+1=4-2+1=2+1=3=y_{\mathrm{A}}$ donc $\underline{\mathrm{A}\in\mathscr{C}_f}$.

3 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $\mathrm{A}(2;0,25)$.
$f(2)=\dfrac{1}{2^2+1}=\dfrac{1}{4+1}=\dfrac{1}{5}=0,2\neq y_{\mathrm{A}}$. Donc $\underline{\mathrm{A}\notin\mathscr{C}_f}$.

4 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $\mathrm{A}\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.
$f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{\sqrt{2}^2+1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}=y_{\mathrm{A}}$ donc $\underline{\mathrm{A}\in\mathscr{C}_f}$.

Corrigé de l'exercice 7.9 page 197

1 Soit $f(x)=-3x+2$.

a. Donner l'image des nombres -1, 0 et $\sqrt{2}$ par la fonction f.

$$f(-1)=-3\times(-1)+2=5 \quad ; \quad f(0)=-3\times0+2=2 \quad ;$$
$$\underline{f\left(\sqrt{2}\right)=-3\sqrt{2}+2.}$$

b. -1 est-il un antécédent de 1 par la fonction f ?
$f(-1)=-3\times(-1)+2=3+2=5\neq1$.
<u>-1 n'est donc pas un antécédent de 1 par la fonction f.</u>

c. Trouver tous les antécédents de -3 par la fonction f.
Rechercher les antécédents de -3 par f revient à trouver toutes les valeurs de x telles que $f(x)=-3$. Il faut donc résoudre cette équation.

$$\begin{aligned} f(x)=-3 &\iff -3x+2=-3\\ &\iff -3x=-5\\ &\iff x=\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

<u>Ainsi, le seul antécédent de -3 par f est $\dfrac{5}{3}$.</u>

2 $g(x) = x^2 - 5x + 2$.

a. Donner l'image des nombres -1, 1 et $\sqrt{2}$ par la fonction g.

$$g(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 2 = 8 \quad ; \quad g(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 2 = -2 \quad ;$$

$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 - 5\sqrt{2} + 2 = \underline{4 - 5\sqrt{2}}.$$

b. -2 est-il un antécédent de 1 par la fonction g ?
$g(-2) = (-2)^2 - 5(-2) + 2 = 4 + 10 + 2 = 16 \neq 1$.
<u>-2 n'est donc pas un antécédent de 1 par g.</u>

c. Donner tous les antécédents de 2 par la fonction g.

$$\begin{aligned} g(x) = 2 &\iff x^2 - 5x + 2 = 2 \\ &\iff x^2 - 5x = 0 \\ &\iff x(x-5) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$

<u>Les antécédents de 2 par g sont donc 0 et 5.</u>

Corrigé de l'exercice 7.10 page 197

1 Le nombre $f(x)$ est défini quand son dénominateur n'est pas égal à zéro.
Or, $x - 4 = 0 \iff x = 4$. Donc la fonction f admet une valeur interdite : $x = 4$.
Par conséquent, le domaine de définition de f est : $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

2 L'image de 2 par la fonction f est :

$$f(2) = \frac{3 \times 2 + 2}{2 - 4} = \frac{8}{-2} = -4.$$

L'image de -1 par la fonction f est :

$$f(-1) = \frac{3(-1) + 2}{-1 - 4} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}.$$

3 Un point de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ quand $y = f(x)$.

- $f(0) = \dfrac{3 \times 0 + 2}{0 - 4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, donc $\mathrm{A}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right) \in \mathscr{C}$.
- $f(15) = \dfrac{3 \times 15 + 2}{15 - 4} = \dfrac{47}{11} \approx 4{,}272727\cdots \neq 4{,}27$, donc $\mathrm{B}(15\,;4{,}27) \notin \mathscr{C}$.

Attention 9

⚠ Il faut que l'ordonnée du point soit exactement égale à l'image de son abscisse pour que le point appartienne à la courbe. Ici, l'image de 15 n'est pas exactement égale à 4,27, donc le point B ne sera pas exactement sur la courbe, mais « juste à côté ».

- $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3 \times \frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3} - 4} = \dfrac{3}{\frac{-11}{3}} = \dfrac{-9}{11}$, donc $\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{9}{11}\right) \in \mathscr{C}$.

Corrigé de l'exercice 7.11 page 198

Avant de construire le tableau de variations de f, remarquons qu'il a été tracée une droite verticale en $x=1$. Cette droite ne fait pas partie de la courbe mais a été tracée par le logiciel automatiquement pour signifier qu'en $x=1$, il y a une valeur interdite. En effet, l'expression de la fonction montre que l'on divise par $x-1$ et que ce n'est pas possible de le faire quand $x-1=0$, soit quand $x=1$.

De plus, il semblerait que la courbe se rapproche de l'axe des abscisses aux infinis, donc que $f(x)$ se rapproche de 0 aux infinis.
Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Corrigé de l'exercice 7.12 page 198

1 Le maximum de la fonction f sur $[-6;5]$ est 5 ; il est atteint pour $x=-3$.

2 Le minimum de la fonction f sur $[-6;5]$ est -4 ; il est atteint pour $x=5$.

3 $-6<-5<-4<-3$. De plus, sur $[-6;-3]$, f est strictement croissante donc $f(-6)<f(-5)<f(-4)<f(-3)$ (les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents quand la fonction est strictement croissante).
Ainsi, $f(-5)<f(-4)$.

4 $-6<-5<-3$ et f est strictement croissante sur $[-6;-3]$ donc $f(-6)<f(-5)<f(-3)$, soit $2<f(-5)<5$.
De plus, $1<3<5$ et f est strictement décroissante sur $[1;5]$ donc $f(1)>f(3)>f(5)$, soit $0>f(3)>-4$, que l'on peut aussi écrire : $-<f(3)<0$.
Donc $f(3)$ est négatif et $f(-5)$ est positif.
Ainsi, $f(-5)>f(3)$.

5 De la même manière, $-3<f(-1)<5$ et $-4<f(4)<0$. On ne peut donc pas comparer $f(-1)$ et $f(4)$ car les intervalles sur lesquels ils sont (à savoir $]-3;5[$ et $]-4;0[$) ne sont pas disjoints, c'est-à-dire que leur réunion n'est pas vide.

Corrigé de l'exercice 7.13 page 199

1
- Le maximum de f est 6 ; il est atteint pour $x=0$.
- Le minimum de f est -5 ; il est atteint pour $x=-2$.

2 L'équation $f(x)=4$ admet exactement 3 solutions. En effet,
- Sur $[-5;-2]$, $f(x)$ passe de -4 à -5, donc ne passe pas par 4 ;
- sur $[-2;0]$, $f(x)$ passe de -5 à 6, donc passe par 4 une fois ;
- sur $[0;3]$, $f(x)$ passe de 6 à 0, donc passe par 4 une fois ;
- sur $[3;5]$, $f(x)$ passe de 0 à 4, donc passe par 4 une fois (à la fin).

3

- Sur $[0\,;3]$, f est strictement décroissante, donc :

$$1 < 2 \iff f(1) > f(2).$$

- Sur $[-2\,;0]$, f est strictement croissante, donc :

$$-1 > -2 \iff f(-1) > f(-2).$$

- Sur $[-1\,;4]$, f n'est pas monotone et les valeurs de $f(0)$ et $f(3)$ ne peuvent pas nous permettre d'ordonner $f(-1)$ et $f(4)$ donc :

$$f(-1) \quad ? \quad f(4).$$

- Sur $[-3\,;4]$, f n'est pas monotone mais, d'après les valeurs des images mises dans le tableau de variations, $f(-3) < 0$ et $f(4) > 0$. Donc :

$$f(4) > f(-3).$$

Corrigé de l'exercice 7.14 page 199

Avant de construire le tableau de variations de f, calculons la valeur du minimum et du maximum :

- il y a un maximum pour $x = -4$, et :

$$f(-4) = \sqrt{\frac{1}{3}\times(-4)^3 + 2\times(-4)^2 + 1} = \sqrt{-\frac{64}{3} + 32 + 1} = \sqrt{\frac{35}{3}}.$$

- il y a un minimum pour $x = 0$ et $f(0) = 1$.
- $f(-6) = 1$.
- $f(3) = 2\sqrt{7}$.

Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	-6		-4		0		3
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{35}{3}}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$2\sqrt{7}$

Corrigé de l'exercice 7.15 page 200

1 La droite horizontale passant par $y = -1$ coupe la courbe en 3 points d'abscisses respectives -1, 0 et 1. Ainsi, l'équation $f(x) = -1$ admet pour ensemble solution :

$$\boxed{S = \{-1\,;0\,;1\}}$$

2 Les parties de la courbe se trouvant au-dessus de la droite horizontale passant par $y = -1$ (ou sur cette droite) se trouvent respectivement sur $[-2;-1]$, $[1;2]$ et au point d'abscisse 0. L'inéquation $f(x) \geqslant -1$ admet donc pour ensemble solution :

$$\boxed{S = [-2;-1] \cup \{0\} \cup [1;2]}$$

3 La courbe n'est jamais sous de la droite horizontale passant par $y = -2$ donc l'inéquation $f(x) < -2$ admet pour ensemble solution :

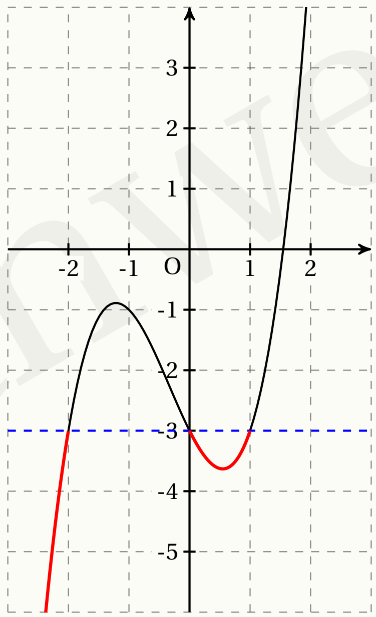
$$\boxed{S = \varnothing} \quad \text{(ensemble vide)}$$

Corrigé de l'exercice 7.16 page 200

1 La courbe semble couper l'axe des abscisses en $x = 1,5 = \dfrac{3}{2}$. Ainsi, $f(x) = 0$ admet pour ensemble solution :

$$\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

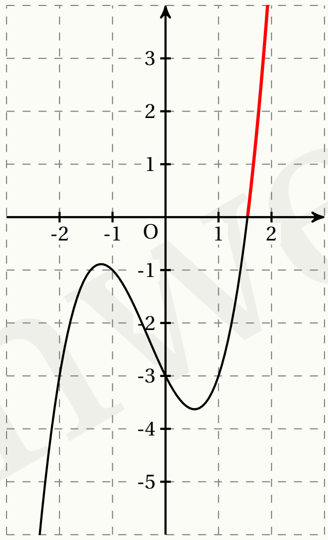
2 Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -3$ sont les valeurs de x pour lesquelles les points de la courbe d'abscisse x sont sous la droite horizontale passant par $y = -3$, donc sur les parties en rouge page suivante.



Ces parties sont sur les intervalles $[-3;-2]$ et $[0;1]$ donc l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leqslant -3$ est :

$$\boxed{S = [-3;-2] \cup [0;1]}$$

3 Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles les points de la courbe d'abscisse x sont au-dessus de l'axe des abscisses, donc sur la branche rouge ci-dessous :

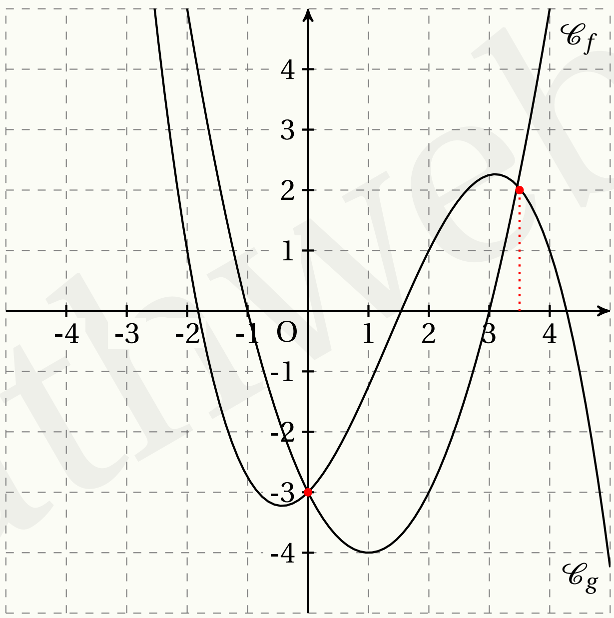


Donc l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > 0$ sur $[-3;3]$ est :

$$\boxed{S = \left]\frac{3}{2};3\right]}$$

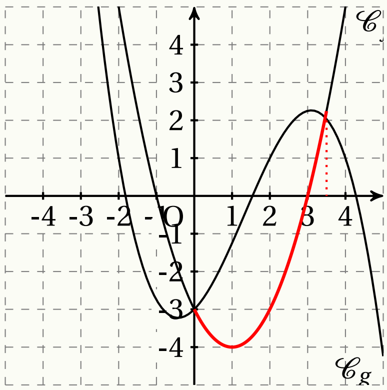
Corrigé de l'exercice 7.17 page 201

1 Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Il y a deux points d'intersection (en rouge).



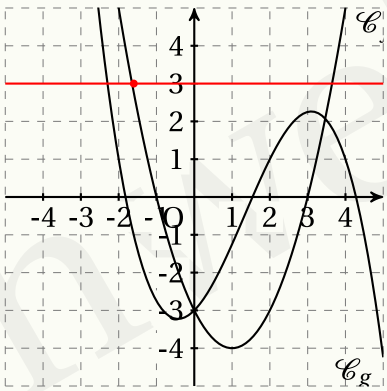
Les solutions à l'équation $f(x) = g(x)$ sont donc $x = 0$ et $x = 3,5$.

2 Repassons en rouge la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ sous $\mathscr{C}_g$:



La partie repassée en rouge correspond aux images des x compris entre 0 à 3,5.
Donc, l'inéquation a pour solution l'intervalle $[0;3,5]$.

3 Pour savoir combien l'équation $f(x) = 3$ admet de solution(s), on regarde combien il y a de points d'intersection entre la droite d'équation $y = 3$ et $\mathscr{C}_f$:



Il n'y a qu'un seul point d'intersection donc il n'y a qu'une solution à l'équation $f(x) = 3$.

4 Le tableau de variations de la fonction g est :

x	-5	$-0,5$	$3,1$	5
$g(x)$	↘	$-3,2$ ↗	$2,2$ ↘	$-4,2$

5 Le tableau de signes de la fonction g est :

x	-5		$-1,9$		$1,5$		$4,4$		5
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque 63

Les valeurs mises pour les deux dernières réponses sont approximatives.

Corrigé de l'exercice 7.18 page 202

Le programme Python complété est le suivant.

Code Python 7-13

```python
M, xmax, x = 0,0,0
while x <= 1:
    if 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1 > M:
        M = 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1
        xmax = x
    x = x + 0.01
print(xmax,M)
```

Explications :

- `while x <= 1` : les instructions dans la boucle « `while` » sont exécutées tant que la valeur de `x` est inférieure ou égale à 1. En effet, on veut les images des x qui sont dans $[0;1]$.
- `if 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1 > M` : si $f(x) > \mathrm{M}$ c'est que M n'est pas le maximum de la fonction f, donc il faut remplacer la valeur mise dans `M` par $f(x)$: `M = 0.2*x*x*x-3*x*x+2.4*x+1`. Dans ce cas, `xmax` représente la valeur de x pour laquelle on atteint ce maximum, donc la valeur du `x` sur laquelle on est actuellement dans la boucle « while ».

Le programme affiche alors `xmax=0,42` et `M=1,4936176`.

Remarque 64

Si vous suivez l'enseignement de spécialité en 1re, vous saurez démontrer qu'en fait, l'abscisse du maximum est $x = 5-\sqrt{21} \approx 0,4174$.

Corrigé de l'exercice 7.19 page 203

1 Par lectures graphiques,

a. l'image de -1 par la fonction f est -3 ;

b. un antécédent entier de 2 par la fonction f est 0 car $f(0) = 2$;

c. le nombre de solutions à l'équation $f(x) = 0$ est 3 car la courbe coupe trois fois l'axe des abscisses.

2 **a.** Développons :

$$\begin{aligned}
&(x-2)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\
=&(x-2)\left(x^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\
=&(x-2)\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=(x-2)\left(x^2-x+\frac{1^2-\sqrt{5}^2}{4}\right)\\
&=(x-2)(x^2-x-1)\\
&=x^3-x^2-x-2x^2+2x+2\\
&=x^3-3x^2+x+2\\
&=f(x).
\end{aligned}$$

b. $f(x)=0 \iff (x-2)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$

$\iff x-2=0 \text{ ou } x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0 \text{ ou } x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=0$

$\iff x=2 \text{ ou } x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

L'ensemble solutions de l'équation $f(x)=0$ est donc :

$$S=\left\{2;\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

c. Le tableau de signes de f peut être obtenu à partir de sa représentation graphique :

x	-3		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		2		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

8

Fonctions affines et linéaires. Tableaux de signes.

Plan du chapitre

I - Fonctions affines et linéaires

I . 1 - Fonctions affines (rappels de collège)

I . 1 . a - Définition

Définition 45

Une fonction f est une **fonction affine** si, pour tout réel x,

$$f(x) = mx + p \quad , \quad m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}.$$

Une fonction affine est représentée dans un repère par une droite. Tout ce qui a été vu dans le chapitre 6 sera donc utile quand on parlera de fonctions affines.

m est donc le **coefficient directeur** de la droite représentative de la fonction, et p est l'**ordonnée à l'origine**, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

I . 1 . b - Signe d'une fonction affine

Propriété 40 (signe d'une fonction affine)

Soit $f(x) = mx + p$, où $m \neq 0$.

- Si $m < 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- Si $m > 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

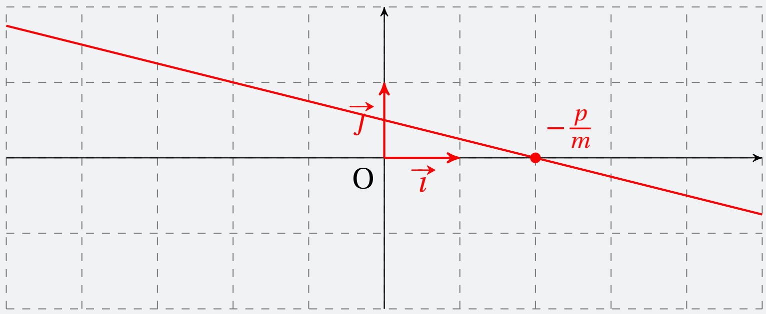
x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

En effet,

- d'une part, résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff mx + p = 0 \\ &\iff mx = -p \\ &\iff x = -\frac{p}{m} \text{ car } m \neq 0. \end{aligned}$$

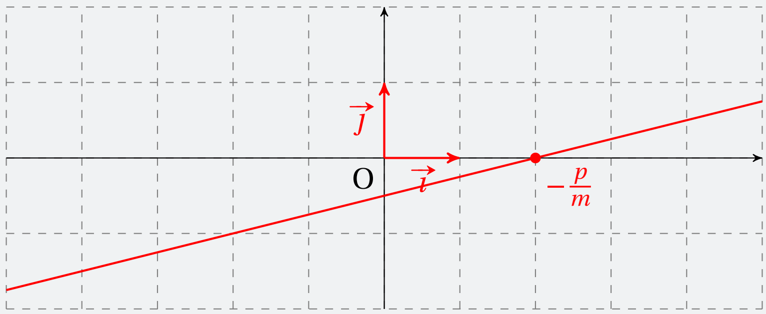
- d'autre part, si $m < 0$ alors la fonction est décroissante. On a donc la situation suivante :



La droite est **au-dessus** de l'axe des abscisses pour $x < -\dfrac{p}{m}$, ce qui signifie que $f(x) > 0$ sur $\left]-\infty ; -\dfrac{p}{m}\right[$, et donc $f(x) < 0$ sur $\left]-\dfrac{p}{m} ; +\infty\right[$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Et si $m > 0$, la fonction est croissante :



La droite est **au-dessus** de l'axe des abscisses pour $x < -\dfrac{p}{m}$, ce qui signifie que $f(x) > 0$ sur $\left]-\infty ; -\dfrac{p}{m}\right[$, et donc $f(x) < 0$ sur $\left]-\dfrac{p}{m} ; +\infty\right[$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Remarque 65

Dans le cas où $m = 0$, $f(x) = p$ donc $f(x)$ est du signe de p sur $\mathbb{R}$.

I . 2 - Fonctions linéaires

Définition 46

Une fonction f est une **fonction linéaire** si pour tout réel x,

$$f(x) = mx \quad , \quad m \in \mathbb{R}.$$

C'est un cas particulier de fonctions affines.
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Propriété 41

Soit $f(x) = mx$, avec $m \neq 0$.

- Si $m < 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- Si $m > 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

II - Équations-produits (rappels)

Définition 47

Une **équation-produit** (sous-entendu *équation-produit nul*) est une équation dont un membre est le produit de plusieurs fonctions affines ou linéaires et dont le second membre est le nombre 0.

Exemple 62

1. $(2x-1)(3x+8) = 0$ est une équation-produit. Le membre de gauche est le produit des fonctions affines $x \longmapsto 2x-1$ et $x \longmapsto 3x+8$.
2. $-2x(5-3x)$ est aussi une équation-produit. Le membre de gauche est le produit de la fonction linéaire $x \longmapsto -2x$ et de la fonction affine $x \longmapsto 5-3x$.

Théorème 1 (du produit nul : TPN)

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Exemple 63

$$\begin{aligned}(2x-1)(3x+8) = 0 &\iff 2x-1=0 \quad \text{ou} \quad 3x+8=0\\ &\iff 2x=1 \quad \text{ou} \quad 3x=-8\\ &\iff x=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(2x-1)(3x+8) = 0$ est donc $S = \left\{\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{8}{3}\right\}$.

III - Inéquations-produits

III . 1 - Définition et méthode de résolution

Définition 48

Une **inéquation-produit** (sous-entendu *inéquation-produit nul*) est une inéquation dont un membre est le produit de plusieurs fonctions affines ou linéaires et dont le second membre est le nombre 0.

Exemple 64

1. $(2x-1)(3x+8) < 0$ est une inéquation-produit.
2. $(8x-7)(6x-3)(7x+1) \geqslant 0$ est une inéquation-produit.

Remarque 66

Pour résoudre une inéquation-produit,

- on cherche le signe de chaque facteur ;
- on dresse un tableau dans lequel chaque ligne contient les différents signes de chaque facteur (1 ligne par facteur) ;
- la dernière ligne est le signe « bilan », trouvé avec la règle des signes.

III . 2 - Exemple de résolution

On souhaite résoudre l'inéquation : $(3x-5)(-7x-8) \leqslant 0$.

- **On cherche le signe de chaque facteur.**
  Pour cela, on résout les inéquations suivantes (ou on utilise la propriété 40).

$$\begin{aligned} 3x-5>0 &\iff 3x>5 \\ &\iff x>\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x-8>0 &\iff -7x>8 \\ &\iff x<-\frac{8}{7} \end{aligned}$$

- **On en déduit le tableau de signes.**

x	$-\infty$		$-\frac{8}{7}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x-5)(7x-8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est ici négatif ou nul

Le produit est ici négatif ou nul

Donc l'ensemble solution de l'inéquation est : $S = \left]-\infty ; -\frac{8}{7}\right] \cup \left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[$.

IV - Inéquations-quotients

IV . 1 - Définition et méthode de résolution

Définition 49

Une **inéquation-quotient** est une inéquation où un membre est de la forme $\dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}$, où $\mathrm{N}(x)$ et $\mathrm{D}(x)$ sont des produits de fonctions affines.

Exemple 65

1. $\dfrac{3-2x}{7x+6} \geqslant 0$ est une inéquation-quotient.
2. $\dfrac{(8x+5)(6x-3)}{x+1} < 0$ est une inéquation-quotient.

Pour résoudre une inéquation-quotient, on procède de la même façon que pour les inéquations-produits, à ceci près que l'on doit toujours exclure sur la dernière ligne du tableau de signes les valeurs de x qui annulent le dénominateur. Cela se traduit par des **doubles barres**, symbolisées par « ‖ », au niveau des valeurs de x à exclure.

IV . 2 - Exemple de résolution

On souhaite résoudre l'inéquation : $\dfrac{(7x-21)(20-5x)}{8x+16} \geqslant 0.$

En utilisant la propriété 40 pour connaître le signe des facteurs, on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		4		$+\infty$
$7x-21$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$20-5x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$8x+16$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

On exclut $x = -2$ car le dénominateur du quotient s'annule pour cette valeur ; le quotient n'est donc pas défini ici.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $\mathrm{S} =]-\infty\,;-2[\cup [3\,;4]$ (on exclut -2).

Fonctions affines

Exercice 8.1 (établir l'expression de la fonction)

f est une fonction affine. Déterminer son expression dans chacun des cas suivants.

1. $f(0) = 2$ et $f(1) = 5$.
2. $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.
3. $f(-3) = 2$ et $f(2) = -3$.
4. $f(5) = 1$ et $f(-5) = 2$.

Solution page 230

Exercice 8.2 (établir l'expression de la fonction)

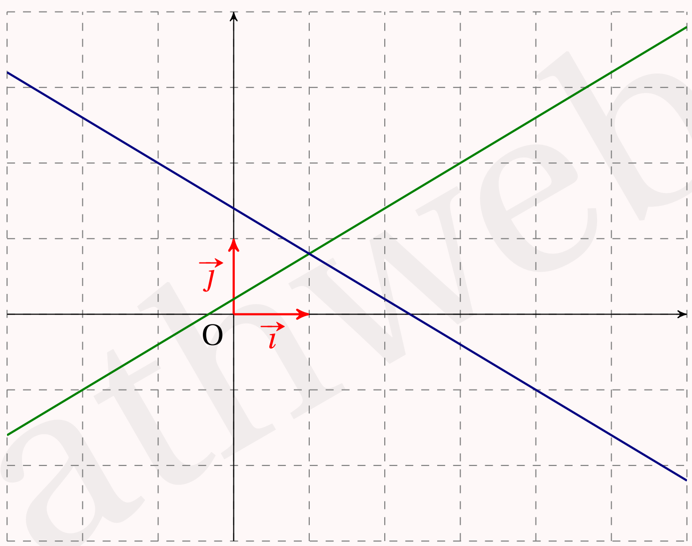
f est une fonction affine. On note $\mathscr{D}$ sa représentation graphique. Dans chacun des cas suivants, donner son expression.

1. $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur -3 et passe par le point $A(0;2)$.
2. $\mathscr{D}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et passe par le point $B(-1;0)$.
3. $\mathscr{D}$ passe par les points $A(-3;5)$ et $B(2;-1)$.

Solution page 231

Exercice 8.3

On donne ci-dessous la représentation de deux fonctions affines f (en vert) et g (en bleu) :



Déterminer une expression de $f(x)$ et $g(x)$.

Solution page 231

Exercice 8.4 (le zéro absolu)

Guillaume Amontons, physicien du XVII[e] siècle fit une expérience : il a calculé la pression d'un gaz (exprimé en kPa - kilo-Pascal) en fonction de la température (exprimé en degré Celsius). Il a obtenu les résultats suivants :

Température (°C)	Pression (kPa)
0	100
50	118,3
100	136,6

On note $p(t)$ la fonction qui donne la pression du gaz (en kPa) pour une température de t °C. On suppose que $p(t) = at + b$.

1. Calculer les valeurs de a et b.
2. Pour quelle valeur théorique de la température la pression serait-elle nulle ?

Solution page 233

Exercice 8.5 (taxi)

La compagnie de taxis « Charles à temps » propose les tarifs suivants :

- 1,40 € / km
- 0,25 € / min

1. Combien devra-t-on payer pour une course de 22,7 km faite en 22 minutes ?
2. **a.** Je dois le rendre à 50 km de chez moi. Je note $f(t)$ la fonction représentant le prix que je devrai payer pour un trajet fait en t minutes .
   Quelle est l'expression de $f(t)$?
   b. Je n'ai que 30 minutes pour faire mon trajet. Je note $g(x)$ la fonction représentant le prix que je devrai payer pour x kilomètres parcourus.
   Quelle est l'expression de $g(x)$?
3. **a.** Je dois me rendre à un endroit situé à 17 km de chez moi. En combien de temps au maximum le trajet doit-il être fait pour dépenser au maximum 30 € ?
   b. Est-ce réalisable sachant que je suis en ville et que la vitesse moyenne est d'environ 35 km/h ?

Solution page 233

Exercice 8.6 (fonction définie par morceaux)

Une entreprise vend des vis au poids. Le prix est de :

- 0,15 € par gramme jusqu'à 100 grammes ;
- 0,07 € par gramme supplémentaire jusqu'à 200 grammes ;
- 0,05 € par gramme au-delà.

1. Quel est le coût total pour 52 grammes ? 130 grammes ? 220 grammes ?

2 On note $f(x)$ le prix à payer pour x grammes de vis achetées.

a. Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0;100]$, $x \in]100;200]$ et $x \in]200;+\infty]$.

3 Quelle quantité de vis a-t-on achetée si l'on a payé 11,25 €? 19,20 €? 57 €?

Solution page 234

Exercice 8.7 (fonction par morceaux)

Dans un magasin bio, on peut acheter des lentilles en fonction de la masse selon la tarification suivante :

- 0,05 € par gramme jusqu'à 50 grammes;
- 0,03 € par gramme supplémentaire jusqu'à 150 grammes;
- 0,02 € par gramme au-delà.

1 Quel est le coût total pour 20 grammes? 100 grammes? 200 grammes?

2 On note $f(x)$ le prix à payer pour x grammes de lentilles achetées.

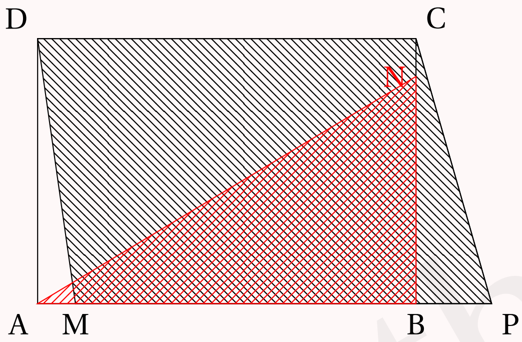
a. Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0;50]$, $x \in]50;150]$ et $x \in]150;+\infty]$.

3 Quelle quantité de lentilles a-t-on achetée si l'on a payé 2,25 €? 4,75 €? 12,50 €?

Solution page 236

Exercice 8.8

On considère la figure suivante :



On donne :

- AB = 10, AD = 7
- M est un point de [AB] tel que AM = x
- N est un point de [BC]
- BP = $2x$, CN = x
- $f(x)$ représente l'aire de MPCD
- $g(x)$ représenter l'aire de ABN

1 Donner le domaine de définition des fonctions f et g?

2 Donner l'expression de $f(x)$.

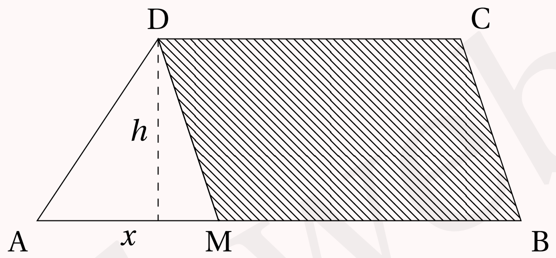
3 Donner l'expression de $g(x)$.

4 Pour quelle valeur de x l'aire de MPCD est-elle égale au triple de celle de ABN?

Solution page 237

Exercice 8.9

ABCD est un trapèze de hauteur $h = 6$ avec $AB = 17$ et $CD = 9$.



À tout point M du segment [AB], on associe le réel $x = AM$.
On note f la fonction telle que le nombre $f(x)$ est égal à l'aire du trapèze MBCD.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Justifier que $f(x) = 78 - 3x$.
3. Déterminer la position du point M pour que l'aire de MBCD soit supérieure ou égale à la moitié de celle de ABCD.

Solution page 237

Exercice 8.10

Soit f la fonction affine définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + b \qquad \text{avec} \qquad f(3) = -1.$$

Lequel des quatre tableaux de variation suivants est celui de la fonction f ?

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$A(x)$	↘	0	↘

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$C(x)$	↗	0	↗

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$B(x)$	↗	0	↗

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$D(x)$	↘	0	↘

Solution page 238

Tableaux de signes

Exercice 8.11 (comparaison de deux fonctions)

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (4x-1)(2-3x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = -6x^2 - 5x + 6.$$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g.

1 **a.** Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
b. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

2 **a.** Vérifier que $f(x) - g(x) = -2(x-2)(3x-2)$.
b. Étudier alors la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
c. Comparer alors sans calcul $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Solution page 239

Exercice 8.12 (inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $(4x-5)^2 \leqslant (12x-15)(1-x)$

2 $3x^3 > 12x$

Solution page 240

Exercice 8.13

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x^2 - x + 7 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 7x + 7.$$

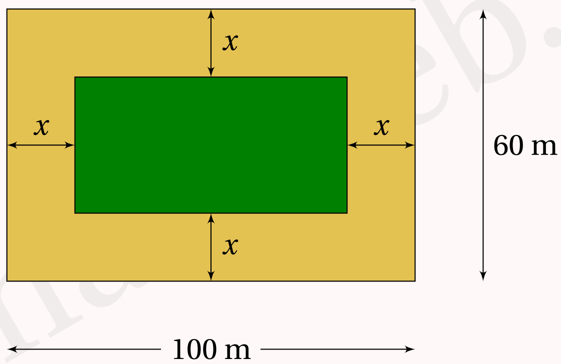
1 Vérifier que $f(x) - g(x) = 2x(1-x)(x+3)$.

2 Déterminer alors la position relatives des courbes représentatives des deux fonctions.

Solution page 241

Exercice 8.14 (mise en inéquation)

Un jardin à forme rectangulaire est représenté ci-dessous (partie verte) :



On note $f(x)$ l'aire (en m^2) de la partie extérieure à l'espace vert.

1. Montrer que $f(x) = -4x(x-80)$.
2. Montrer que $f(x) = -4(x-40)^2 + 6\,400$.

On souhaite savoir pour quelles valeurs de x cette aire est inférieure ou égale à 1 500 m^2.

3. Montrer alors que $(75-x)(x-5) \leqslant 0$.
4. Résoudre cette dernière inéquation et conclure.

Solution page 241

Exercice 8.15 (inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x-1)(x+2) \leqslant 0$
2. $(3x-2)(5x-7) \geqslant 0$
3. $(5x-1)(-x+9)(2x+1) > 0$
4. $\dfrac{2x+1}{2x-1} - \dfrac{2x-1}{2x+1} < \dfrac{2x+6}{4x^2-1}$
5. $\dfrac{5x+4}{2x-3} + \dfrac{(8-x)(10x+8)}{(2x-3)^2} \leqslant 0$
6. $\dfrac{(4-3x)(9x^2-10x-3)}{2x-7} < 4-3x$
7. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x(x^2-1)}$
8. $\dfrac{1-2x}{16x^2-9} \geqslant \dfrac{1-2x}{4x+3}$

Solution page 242

Corrigé de l'exercice 8.1 page 224

Posons $f(x) = ax + b$.

1 $f(0) = 2$ et $f(1) = 5$.

- $f(0) = 2 \iff a \times 0 + b = 2 \iff b = 2$. Donc $f(x) = ax + 2$.
- $f(1) = 5 \iff a \times 1 + 2 = 5 \iff a = 5 - 2 = 3$.

Ainsi, $\underline{f(x) = 3x + 2}$.

2 $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.

- $f(-1) = -1 \iff a \times (-1) + b = -1 \iff -a + b = -1 \iff b = -1 + a$.
- $$\begin{aligned} f(1) = 1 &\iff a \times 1 + b = 1 \\ &\iff a + b = 1 \\ &\iff a + (-1 + a) = 1 \\ &\iff 2a = 2 \\ &\iff a = 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $b = -1 + a = -1 + 1 = 0$, et donc $\underline{f(x) = x}$.

3 $f(-3) = 2$ et $f(2) = -3$.

- $f(-2) = 3 \iff -2a + b = 3 \iff b = 3 + 2a$.
- $f(3) = -2 \iff 3a + b = -2 \iff b = -2 - 3a$.

On en déduit :

$$3 + 2a = -2 - 3a \iff 2a + 3a = -2 - 3 \iff 5a = -5 \iff a = -1$$

et donc :

$$b = 3 + 2a = 3 + 2 \times (-1) = 3 - 2 = -1.$$

Finalement, $\underline{f(x) = -x - 1}$.

4 $f(5) = 1$ et $f(-5) = 2$.

- $f(5) = 1 \iff 5a + b = 1 \iff b = 1 - 5a$.
- $f(-5) = 2 \iff -5a + b = 2 \iff b = 2 + 5a$.

On en déduit que :

$$1 - 5a = 2 + 5a \iff -5a - 5a = 2 - 1 \iff -10a = 1 \iff a = -\frac{1}{10}$$

et donc :

$$b = 1 - 5a = 1 - 5 \times \left(-\frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{5}{10} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Finalement, $\boxed{f(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{3}{2}}$.

Corrigé de l'exercice 8.2 page 224

1 $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur -3 et passe par le point $A(0;2)$.

- $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur -3 donc $f(x) = -3x + p$.
- $\mathscr{D}$ passe par le point $A(0;2)$ donc $f(0) = 2$, soit $p = 2$.

Ainsi, $f(x) = -3x + 2$.

2 $\mathscr{D}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et passe par le point $B(-1;0)$.

- $\mathscr{D}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 donc $f(0) = 1$, c'est-à-dire $f(x) = mx + 1$.
- $\mathscr{D}$ passe par le point $B(-1;0)$ donc $f(-1) = 0$, soit $-m + 1 = 0$, donc $m = 1$.

Finalement, $f(x) = x + 1$.

3 $\mathscr{D}$ passe par les points $A(-3;5)$ et $B(2;-1)$. Posons $f(x) = mx + p$.

- $\mathscr{D}$ passe par le point $A(-3;5)$ donc $f(-3) = 5$, soit $-3m + p = 5$, et donc $p = 5 + 3m$.
- $\mathscr{D}$ passe par le point $B(2;-1)$ donc $f(2) = -1$, soit $2m + p = -1$, et donc $p = -1 - 2m$.

On en déduit alors que :

$$5 + 3m = -1 - 2m \iff 3m + 2m = -1 - 5 \iff 5m = -6 \iff m - -\frac{6}{5}$$

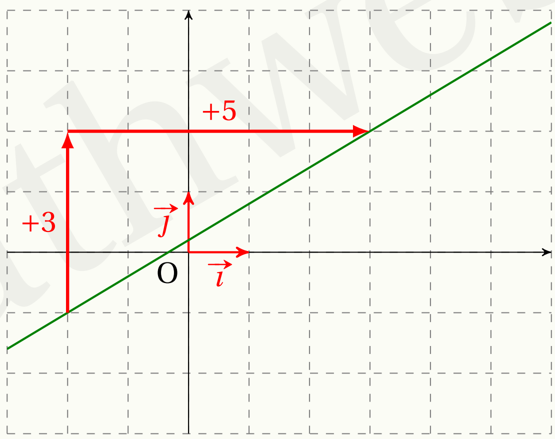
et donc :

$$p = 5 + 3m = 5 + 3 \times \left(-\frac{6}{5}\right) = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}.$$

Finalement, $\boxed{f(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}}$.

Corrigé de l'exercice 8.3 page 224

- Détermination de $f(x) = mx + p$.
  On prend deux points de la droite verte dont les coordonnées sont entières (si possible) : ici, $A(-2;-1)$ et $B(3;2)$.
  Pour aller de A à B, on fait : $+3$ en y (à la verticale) pour $+5$ en x (à l'horizontale). Le coefficient directeur est donc $m = \frac{3}{5}$.



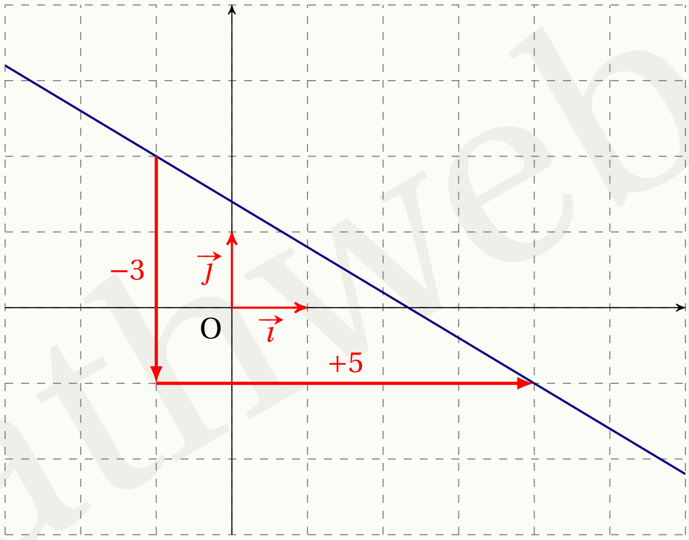
Pour trouver l'ordonnée à l'origine, qui n'est pas très visible sur le schéma, on exploite le fait que le point B$(3;2)$ appartient à la droite et donc que ses coordonnées vérifient l'équation. Autrement dit, on remplace x et y par les coordonnées :

$$\begin{aligned} \mathrm{B} \in (\mathrm{AB}) &\iff y_\mathrm{B} = \frac{3}{5}x_\mathrm{B} + p \\ &\iff 2 = \frac{3}{5} \times 3 + p \\ &\iff p = 2 - \frac{9}{5} = \frac{10}{5} - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}}$$

- Détermination de $g(x) = m'x + p'$.
  On prend deux points de la droite : C$(-1;2)$ et D$(4;-1)$.



On obtient un coefficient directeur $m' = \frac{-3}{5}$. Ainsi, $g(x) = -\frac{3}{5}x + p'$.

$$\begin{aligned} \mathrm{D} \in (\mathrm{CD}) &\iff y_\mathrm{D} = -\frac{3}{5}x_\mathrm{D} + p' \\ &\iff -1 = -\frac{3}{5} \times 4 + p' \\ &\iff p = -1 + \frac{12}{5} = \frac{-5+12}{5} = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{g(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}}$$

Remarque 68

Pour déterminer la valeur de p et p', sous avons pris les points B et D, mais nous aurions pu aussi prendre les points A et C.

Corrigé de l'exercice 8.4 page 225

1 $f(t) = at + b$.

- $a = \dfrac{p(50) - p(0)}{50 - 0} = \dfrac{118,3 - 100}{50} = 0,366$.
- $b = p(0) = 100$.

Donc, $p(t) = 0,366t + 100$.

2 On doit résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} p(t) = 0 &\iff 0,366t + 100 = 0 \\ &\iff 0,366t = -100 \\ &\iff t = -\frac{100}{0,366} \approx -273. \end{aligned}$$

Ainsi, en théorie, pour une température de −273°C, la pression serait nulle.

Cette dernière valeur (−273°C) est appelée « le zéro absolu » et constitue l'origine de l'échelle *Kelvin* (le zéro absolu est égal à 0 degré Kelvin).

Corrigé de l'exercice 8.5 page 225

1 Selon les tarifs proposés, si une course fait 22,7 km et que je paie 1,40 €/km, cela me fera :

$$22,7 \times 1,40 = 31,78 \text{ €}.$$

À cela s'ajoute le prix que je dois payer pour 22 minutes sachant que je dois payer 0,25 €/min, donc :

$$22 \times 0,25 = 5,5 \text{ euro}.$$

Je devrais donc payer :

$$31,78 + 5,5 = 37,28 \text{ euro}.$$

2 **a.** Dans cette question, je connais la distance (50 km), donc je sais que je vais payer :

$$50 \times 1,40 = 70 \text{ €}$$

en plus de 0,25 € par minute, donc en plus de $0,25t$ (car un trajet dure t minutes). Donc :

$$\boxed{f(t) = 0,25t + 70}$$

b. Dans cette question, je connais le temps (30 minutes) donc je sais que je vais payer :

$$1,40 \times 30 = 7,5 \text{ €}$$

en plus de 1,40 € par kilomètre, donc en plus de $1,4x$ pour x km de parcourus. Donc :

$$\boxed{g(x) = 1,4x + 7,5}$$

3 Si je note x le nombre de kilomètres et t le nombre de minutes d'une course, alors le prix à payer est :

$$1,4x + 0,25t.$$

a. Dans cette question, je sais que $x = 17$ et je cherche à connaître t de sorte que le tarif soit inférieur ou égal à 30 €, donc :

$$\begin{aligned}
1,4\times 17+0,25t &\leqslant 30\\
23,8+0,25t &\leqslant 30\\
0,25t &\leqslant 30-23,8\\
0,25t &\leqslant 6,2\\
t &\leqslant \frac{6,2}{0,25}\\
t &\leqslant 24,8.
\end{aligned}$$

<u>Ainsi, il faut que le trajet soit fait en moins de 25 minutes (si on arrondit à la minute près).</u>

b. Dans cette question, je dois calculer le temps théorique d'une course de 17 km avec une vitesse moyenne de 35 km/h, à l'aide de la formule :

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$

soit ici :

$$35 = \frac{17}{t},\ \text{soit : } t = \frac{17}{35} \approx 0,4857\ \text{h} = 0,4857\times 60\ \text{min} \approx 29\text{min}.$$

On dépasse donc le temps imparti (25 minutes).

Corrigé de l'exercice 8.6 page 225

1 Quel est le coût total pour 52 grammes ? 130 grammes ? 220 grammes ?

- $0 \leqslant 52 \leqslant 100$ donc le coût total pour 52 grammes est :

$$52\times 0,15 = 7,80\ €.$$

- $100 < 130 \leqslant 200$ donc le coût total pour 130 grammes est :

$$100\times 0,15+(130-100)\times 0,07 = 17,10\ €.$$

- $220 > 200$ donc le coût total pour 220 grammes est :

$$100\times 0,15+(200-100)\times 0,07+(230-200)\times 0,05 = 23\ €.$$

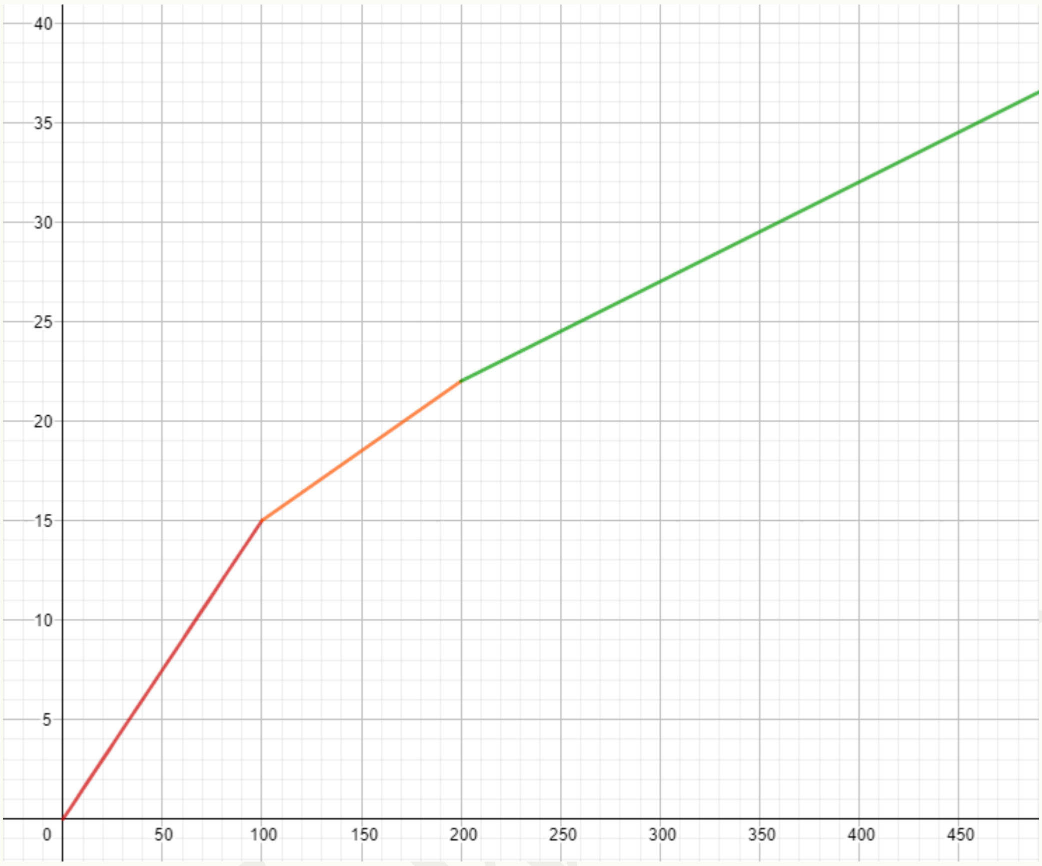
2 **a.** En s'inspirant des calculs de la question précédent, on peut écrire :

$$f(x) = \begin{cases} 0,15x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 100\\ 15+0,07(x-100) & \text{si } 100 < x \leqslant 200\\ 15+7+0,05(x-200) & \text{si } x > 200\end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0,15x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 100\\ 0,07x+8 & \text{si } 100 < x \leqslant 200\\ 0,05+12 & \text{si } x > 200\end{cases}}$$

Cela donne graphiquement :



3 Quelle quantité de vis a-t-on achetée si l'on a payé 11,25 €? 19,20 €? 57 €?

- On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 11,25$. Or, $11,25 < 15$ donc nous devons prendre la première expression de $f(x)$:

$$0,15x = 11,25 \iff x = \frac{11,25}{0,15} \iff x = 75.$$

Donc si l'on a payé 11,25 €, on a pris 75 grammes de vis.

- On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 19,20$. Or, $15 < 19,20 < 22$ donc nous devons prendre la deuxième expression de $f(x)$:

$$\begin{aligned} 0,07x + 8 = 19,20 &\iff 0,07x = 19,20 - 8 \\ &\iff 0,07x = 11,2 \\ &\iff x = \frac{11,20}{0,07} \\ &\iff x = 160. \end{aligned}$$

Donc si l'on a payé 19,20 €, on a pris 160 grammes de vis.

- On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 57$. Or, $57 > 22$ donc nous devons prendre la troisième expression de $f(x)$:

$$0,05x + 22 = 57 \iff 0,05x = 57 - 22 \iff 0,05x = 35 \iff x = \frac{35}{0,05} \iff x = 700.$$

Donc si l'on a payé 57 €, on a pris 700 grammes de vis.

Corrigé de l'exercice 8.7 page 226

1 Quel est le coût total pour 20 grammes ? 100 grammes ? 200 grammes ?

- $0 \leqslant 20 \leqslant 50$ donc pour 20 grammes, on doit payer $0,05 \times 20 = 1$ €.
- $20 < 100 \leqslant 150$ donc pour 100 grammes, on doit payer $0,05 \times 50 + 0,03(100-50) = 4$ €.
- $200 > 150$ donc pour 200 grammes, on doit payer $0,05 \times 50 + 0,03(150-50) + 0,02(200-150) = 6,50$ €.

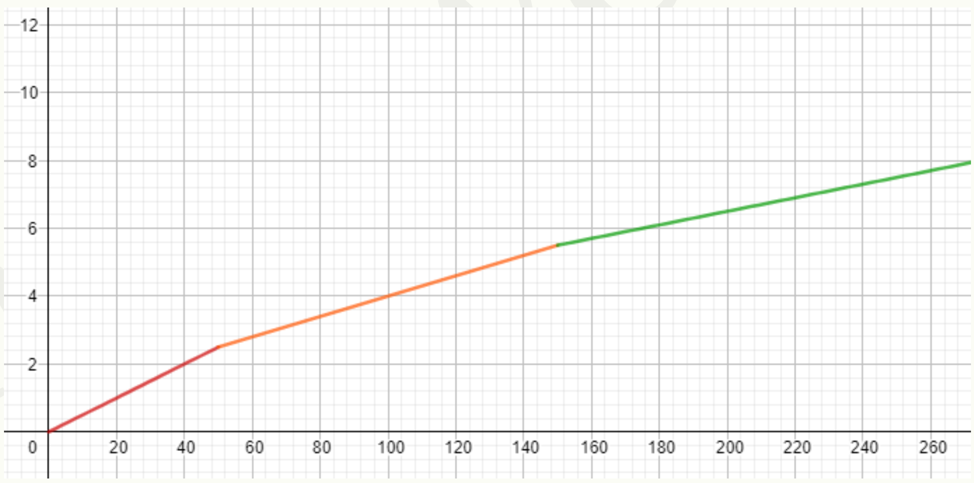
2 **a.** D'après les calculs faits à la question précédente, on peut écrire :

$$f(x) = \begin{cases} 0,05x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 0,05 \times 50 + 0,03(x-50) & \text{si } 50 < x \leqslant 150 \\ 0,05 \times 50 + 0,03 \times 100 + 0,02(x-150) & \text{si } x > 150 \end{cases}$$

soit, après simplifications :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0,05x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 0,03x + 1 & \text{si } 50 < x \leqslant 150 \\ 0,02x + 2,5 & \text{si } x > 150 \end{cases}}$$

Cela donne le graphique page suivante.



3 Quelle quantité de lentilles a-t-on achetée si l'on a payé 2,25 € ? 4,75 € ? 12,50 € ?

- $2,25 < 2,5$ donc $f(x) = 2,25 \iff 0,05x = 2,25 \iff x = \dfrac{2,25}{0,05} = 45$.
  On a donc pris 45 grammes de lentilles si l'on a payé 2,25 €.
- $2,5 < 4,75 < 5,5$ donc $f(x) = 4,75 \iff 0,03x + 2,5 = 4,75$
  $\iff 0,03x = 2,25$
  $\iff x = 75$.
  On a donc pris 75 grammes de lentilles si l'on a payé 4,75 €.
- $12,5 > 5,5$ donc $f(x) = 12,5 \iff 0,02x + 2,5 = 5,5 \iff 0,02x = 3 \iff x = 150$.
  On a donc pris 150 grammes de lentilles si l'on a payé 12,50 €.

Corrigé de l'exercice 8.8 page 226

1 x représentant la longueur AM, et M étant un point de [AB], x peut varier de 0 à 10.
Le domaine de définition de la fonction f est donc $[0;10]$.

N est un point de [BC], donc CN varie de 0 à 7.
Le domaine de définition de la fonction g est donc $[0;7]$.

2 Pour calculer l'aire de MPCD, on peut ajouter l'aire de MBCD et celle de BPC.
L'aire de MBCD se trouve en prenant l'aire de ABCD et en lui enlevant celle de AMD.
On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(7\times 10 - \frac{7x}{2}\right) + \frac{2x\times 7}{2} \\ &= 70 - \frac{7}{2}x + \frac{14}{2}x \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{7}{2}x + 70}$$

3 L'aire du triangle rectangle ABN est :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{AB\times BC}{2} \\ &= \frac{10\times(7-x)}{2} \\ &= 5(7-x) \end{aligned}$$

$$\boxed{g(x) = 35 - 5x}$$

4 L'aire de MPCD est égale au triple de celle de ABN si :

$$\begin{aligned} f(x) = 2g(x) &\iff \frac{7}{2}x + 70 = 3(35-5x) \\ &\iff \frac{7}{2}x + 70 = 105 - 15x \\ &\iff \frac{7}{2}x + 15x = 105 - 70 \\ &\iff \frac{37}{2}x = 35 \\ &\iff x = 35\times\frac{2}{37} = \frac{70}{37} \approx 1,9 \end{aligned}$$

$\frac{70}{37}$ étant dans le domaine de définition des fonctions f et g, cette valeur est bien solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Corrigé de l'exercice 8.9 page 227

1 M est un point de [AB], avec AB = 17. Par conséquent, le domaine de définition de f est $[0;17]$.

2 L'aire d'un trapèze est obtenue à l'aide de la formule :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\mathrm{MB}+\mathrm{CD})\times h}{2} \\ &= \frac{\left[(17-x)+9\right]\times 6}{2} \\ &= 3(26-x) \\ &= 78-3x. \end{aligned}$$

3 On veut :

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant \frac{1}{2}\times\frac{(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\times h}{2} &\iff 78-3x \geqslant \frac{(17+9)\times 6}{4} \\ &\iff 78-3x \geqslant 39 \\ &\iff 78-39 \geqslant 3x \\ &\iff 13 \geqslant x. \end{aligned}$$

Il faut donc que M soit à une distance au plus égale à 13 de A pour que l'aire de MBCD soit supérieure ou égale à la moitié de celle de ABCD.

Corrigé de l'exercice 8.10 page 227

Avant tout, déterminons la valeur de b : $f(3) = -1$ donc :

$$-\frac{2}{3}\times 3 + b = -1 \iff b = -1 + \frac{2}{3}\times 3 = -1+2 = 1.$$

Ainsi, $f(x) = -\frac{2}{3}x+1$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -\frac{2}{3}x+1 = 0 \\ &\iff -\frac{2}{3}x = -1 \\ &\iff x = -1\times\left(-\frac{3}{2}\right) \\ &\iff x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Le coefficient directeur de f est négatif, donc la fonction est décroissante. Elle s'annule pour $x = \frac{3}{2}$.
Le tableau de variation qui convient est donc celui de D(x) :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\mathrm{D}(x) = f(x)$	↘	0	↘

Corrigé de l'exercice 8.11 page 228

1 **a.** Le tableau de signes de $f(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est donc :

$$\boxed{S = \left[\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right]}$$

2 **a.** Pour vérifier que $f(x)-g(x) = -2(x-2)(3x-2)$, on peut développer les membres de droite et gauche séparément, et constater que les formes développées sont égales :

- $$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (4x-1)(2-3x)-(-6x^2-5x+6) \\ &= 8x-12x^2-2+3x+6x^2+5x-6 \\ &= -6x^2+16x-8. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} -2(x-2)(3x-2) &= -2(3x^2-2x-6x+4) \\ &= -2(3x^2-8x+4) \\ &= -6x^2+16x-8. \end{aligned}$$

Les deux formes développées sont donc égales : $f(x)-g(x) = -2(x-2)(3x-2)$.

b. Dressons le tableau de signes de $f(x)-g(x)$ à l'aide de la forme factorisée trouvée à la question précédente :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut alors conclure que :

- $f(x)-g(x) < 0$, et donc $f(x) < g(x)$, sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ et sur $]2;+\infty[$, soit $\mathscr{C}_f$ sous $\mathscr{C}_g$ sur ces intervalles ;
- $f(x)-g(x) > 0$, et donc $f(x) > g(x)$, sur $\left]\frac{2}{3}; 2\right[$, soit $\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur cet intervalle ;

- $f(x)-g(x)=0$, soit $f(x)=g(x)$, pour $x=\dfrac{2}{3}$ et $x=2$ et donc que les courbes se coupent aux points de coordonnées $\big(2\,;f(2)\big)$ et $\left(\dfrac{2}{3}\,;f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)$, c'est-à-dire aux points de coordonnées $(2\,;-28)$ et $\left(\dfrac{2}{3}\,;0\right)$.

c. Comparer alors sans calcul $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$\dfrac{2}{3}<\dfrac{\pi}{2}<2$ donc d'après l'étude précédente de la position relative des deux courbes, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 8.12 page 228

1
$$\begin{aligned}(4x-5)^2\leqslant(12x-15)(1-x) &\iff (4x-5)^2\leqslant 3(4x-5)(1-x)\\ &\iff (4x-5)^2-3(4x-5)(1-x)\leqslant 0\\ &\iff (4x-5)\big[(4x-5)-3(1-x)\big]\leqslant 0\\ &\iff (4x-5)(4x-5-3+3x)\leqslant 0\\ &\iff (4x-5)(7x-8)\leqslant 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{8}{7}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x-8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x-5)(7x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S=\left[\frac{8}{7}\,;\frac{5}{4}\right]}$$

2
$$\begin{aligned}3x^3>12x &\iff 3x^3-12x>0\\ &\iff 3x(x^2-4)>0\\ &\iff 3x(x-2)(x+2)>0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(x-2)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S=\,]-2\,;0[\,\cup\,]2\,;+\infty[}$$

Corrigé de l'exercice 8.13 page 228

1

- $f(x) - g(x) = (2x^2 - x + 7) - (2x^3 + 6x^2 - 7x + 7)$
  $= 2x^2 - x + 7 - 2x^3 - 6x^2 + 7x - 7$
  $= -2x^3 - 4x^2 + 6x.$
- $2x(1-x)(x+3) = 2x(x + 3 - x^2 - 3x)$
  $= 2x(-x^2 - 2x + 3)$
  $= -2x^3 + 4x^2 + 6x$
  $= f(x) - g(x).$

2 Dressons le tableau de signes de $f(x) - g(x)$:

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f, et $\mathscr{C}_g$ celle de g.
Du tableau de signes, on déduit alors que :

- sur $]-\infty\,; -3[$ et sur $]0\,; 1[$, $f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$, ce qui signifie que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$;
- sur $]-3\,; 0[$ et sur $]1\,; +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$;
- les courbes se coupent aux points d'abscisses $A\big(-3\,; f(-3)\big)$, $B\big(0\,; f(0)\big)$ et $C\big(1\,; f(1)\big)$, soit $A(-3\,;28)$, $B(0\,;7)$ et $C(1\,;8)$.

Corrigé de l'exercice 8.14 page 228

1 $f(x) = 100 \times 60 - (100 - 2x)(60 - 2x)$
$= 6000 - 6000 + 200x + 120x - 4x^2$
$= -4x^2 + 320x$

$\boxed{f(x) = -4x(x - 80)}$

2 On a : $-4(x-40)^2 + 6400 = -4(x^2 - 80x + 1600) + 6400$
$= -4x^2 + 320x - 6400 + 6400$
$= -4x^2 + 320x$
$= f(x).$

3 $f(x) \leqslant 1500 \iff -4(x-40)^2 + 6400 \leqslant 1500$

$$\begin{aligned}
&\iff -4(x-40)^2 + 6400 - 1500 \leqslant 0\\
&\iff 4900 - 4(x-40)^2 \leqslant 0\\
&\iff 70^2 - \left[2(x-40)\right]^2 \leqslant 0\\
&\iff \left[70 - 2(x-40)\right]\left[70 + 2(x-40)\right] \leqslant 0\\
&\iff (70 - 2x + 80)(70 + 2x - 80) \leqslant 0\\
&\iff (150 - 2x)(2x - 10) \leqslant 0\\
&\iff 2(75 - x) \times 2(x - 5) \leqslant 0\\
&\iff (75 - x)(x - 5) \leqslant 0
\end{aligned}$$

4 Dressons le tableau de signes du produit $(75-x)(x-5)$ sur $[0;30]$ (car x ne peut pas dépasser 30 mètres, soit la moitié de la largeur du rectangle extérieur) :

x	0		5		30
$75 - x$		$+$		$+$	
$x - 5$		$-$	0	$+$	
$(75-x)(x-5)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, l'aire jaune est inférieure à 1 500 m^2 pour $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Corrigé de l'exercice 8.15 page 229

1 $(x-1)(x+2) \leqslant 0$.

Les valeurs de x qui annulent le produit $(x-1)(x+2)$ sont les solutions des équations $x - 1 = 0$ et $x + 2 = 0$, donc sont égales à $x = 1$ et $x = -2$.

De plus, le coefficient de x dans chaque facteur est positif, donc pour chacun d'eux, le signe sera : $-$ 0 $+$, d'où le tableau de signes page suivante.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S = [-2;1]}$

2 $(3x-2)(5x-7) \geqslant 0$.

Les valeurs de x qui annulent le produit $(3x-2)(5x-7)$ sont les solutions des équations $3x - 2 = 0$ et $5x - 7 = 0$, donc sont égales à $x = \frac{2}{3}$ et $x = \frac{7}{5}$, où $\frac{2}{3} < \frac{7}{5}$.

De plus, le coefficient de x dans chaque facteur est positif, donc pour chacun d'eux, le signe sera : $-$ 0 $+$, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{7}{5}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x-2)(5x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S = \left]-\infty;\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{5};+\infty\right[}$

3 $(5x-1)(-x+9)(2x+1) > 0$.
Les valeurs de x qui annulent le produit $(5x-1)(-x+9)(2x+1)$ sont les solutions des équations $5x-1=0$, $-x+9=0$ et $2x+1=0$, donc sont égales à $x=\frac{1}{5}$, $x=9$ et $x=-\frac{1}{2}$, où $-\frac{1}{2}<\frac{1}{5}<9$.
D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{5}$		9		$+\infty$
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+9$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{S = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{5};9\right[}$

4 $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}<\dfrac{2x+6}{4x^2-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x+1)(2x-1)}<\dfrac{2x+6}{4x^2-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+1-2x+1)(2x+1+2x-1)-2x-6}{4x^2-1}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{8x-2x-6}{(2x-1)(2x+1)}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6(x-1)}{(2x+1)(2x-1)}<0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Fraction		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; 1\right[}$

5 $\dfrac{5x+4}{2x-3} + \dfrac{(8-x)(10x+8)}{(2x-3)^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(5x+4)(2x-3)+2(8-x)(5x+4)}{(2x-3)^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(5x+4)(2x-3+16-2x)}{(2x+3)^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{13(5x+4)}{(2x-3)^2} \leq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$5x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
Fraction		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

Donc $\boxed{S = \left]-\infty ; -\frac{4}{5}\right]}$

6 $\dfrac{(4-3x)(9x^2-10x-3)}{2x-7} < 4-3x$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4-3x)(9x^2-10x-3)-(4-3x)(2x-7)}{2x-7} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4-3x)(9x^2-10x-3-2x+7)}{2x-7} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4-3x)(9x^2-12x+4)}{2x-7} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4-3x)(3x-2)^2}{2x-7} < 0$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$4-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x-2)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Fraction		$-$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Donc $\boxed{S = \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{2} ; +\infty\right[}$

7 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x(x^2-1)}$, $x\neq0,\ x\neq-1,\ x\neq1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x+1)-x(x-1)-(x+1)(x-1)-2}{x(x-1)(x+1)}\leq0$ (remarqué :$(x^2-1)=(x-1)(x+1)$)

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-x^2-1}{x(x+1)(x-1)}\leqslant0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{x^2-2x+1}{x(x+1)(x-1)}\leqslant0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)}\leqslant0$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)>0$, car $(x-1)^2>0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Fraction		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Donc $\boxed{S=]-1;0[\cup]1;+\infty[}$

8 $\dfrac{1-2x}{16x^2-9}\geqslant\dfrac{1-2x}{4x+3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1-2x)-(1-2x)(4x-3)}{16x^2-9}\geqslant0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1-2x)(1-4x+3)}{16x^2-9}\geqslant0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(1-2x)(1-x)}{(4x-3)(4x+3)}\geqslant0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Fraction		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S=\left]-\infty;-\dfrac{3}{4}\right[\cup\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right[\cup[1;+\infty[}$

9

Fonctions de référence

Plan du chapitre

I - La fonction carré

I . 1 - Définition

Définition 50

La fonction carré est la fonction qui à tout réel x associe son carré x^2.
On la note :

$$x \longmapsto x^2.$$

Propriété 42

La fonction carré est paire.

Démonstration 13

Posons $f(x) = x^2$.
f est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel x,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

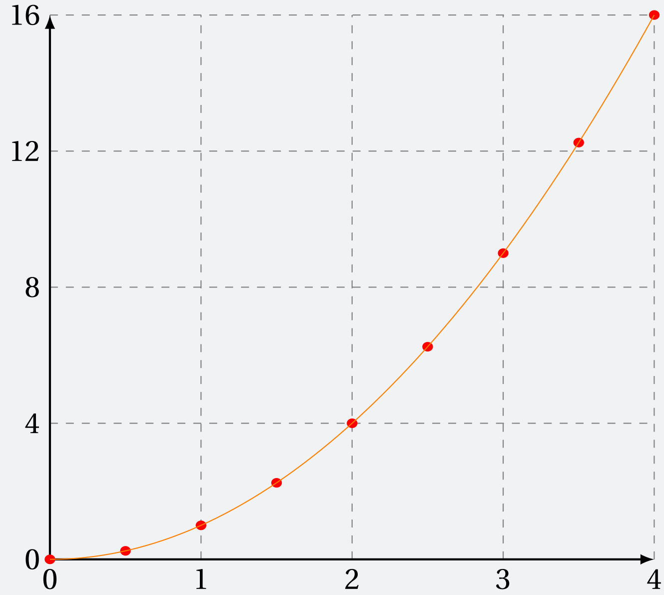
ce qui justifie que f est paire.

I . 2 - Courbe représentative

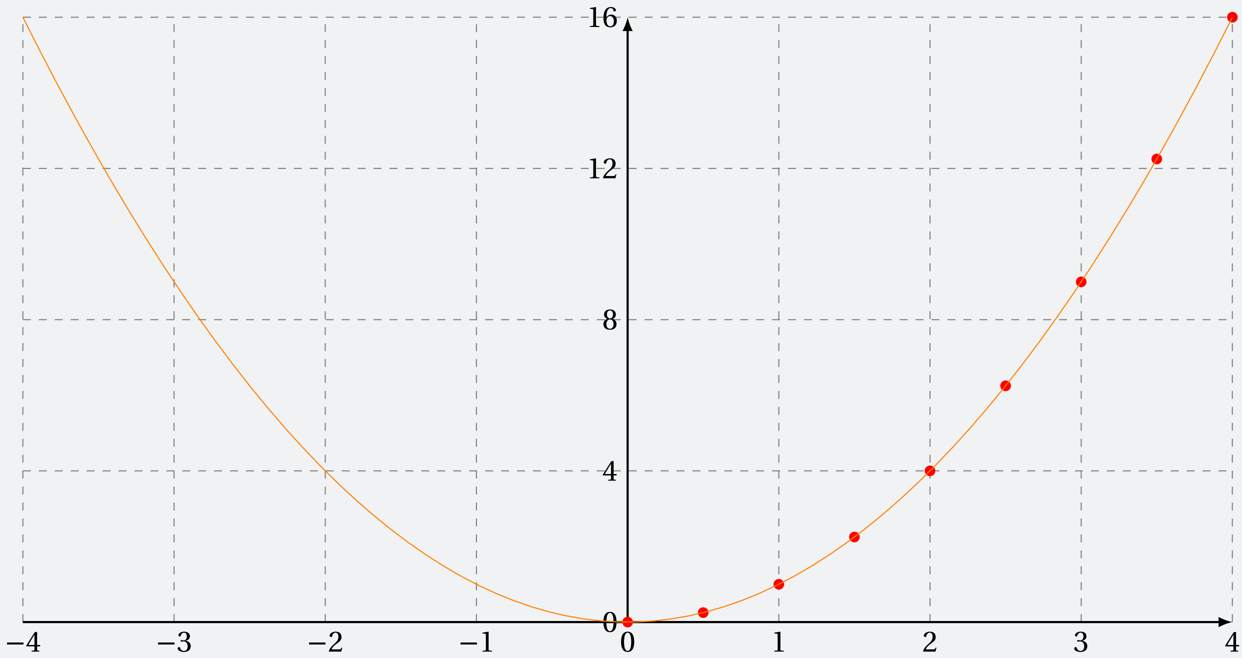
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction carré sur un intervalle $[-4;4]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $[0;4]$ car la fonction est paire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $[0;4]$).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x^2	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16

On obtient alors la courbe suivante :



Par symétrie, on obtient la courbe représentative complète sur $[-4;4]$:



On dit que cette courbe est une *parabole*.

I . 3 - Sens de variation

On peut bien entendu voir sur le graphique les variations de la fonction carré, mais on aurait pu aussi trouver les variations avant de construire la courbe.

Pour cela, on aurait pu prendre deux nombres a et b sur l'intervalle $[0;+\infty[$, et comparer a^2 et b^2 :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant a < b &\iff a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)}_{<0}\underbrace{(a+b)}_{>0} \\ &\iff a^2 < b^2 \\ &\iff \text{la fonction carré est strictement croissante sur } [0;+\infty[. \end{aligned}$$

Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on peut en déduire que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Le tableau de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}$ est donc le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	↘	0	↗

I . 4 - Équations

Propriété 43

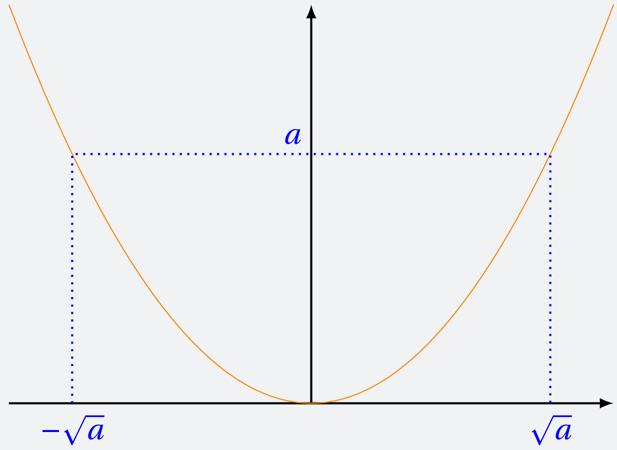
Pour tout nombre $a > 0$,

$$x^2 = a \iff x = -\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a}.$$

Exemple 66

1. $x^2 = 7 \iff x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.
2. $x^2 = 16 \iff x = -\sqrt{16} = -4$ ou $x = \sqrt{16} = 4$.

Graphiquement, cela revient à trouver les antécédents du nombre a par la fonction carré :



I . 5 - Inéquations

Propriété 44

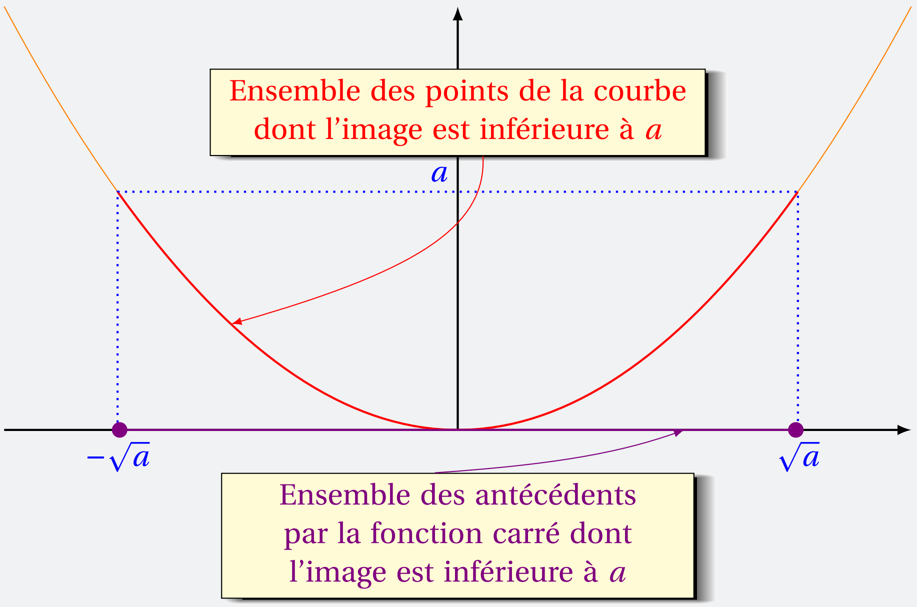
Pour tout nombres $a > 0$,

$$x^2 < a \iff -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}.$$

Exemple 67

$$x^2 < 9 \iff -3 < x < 3.$$

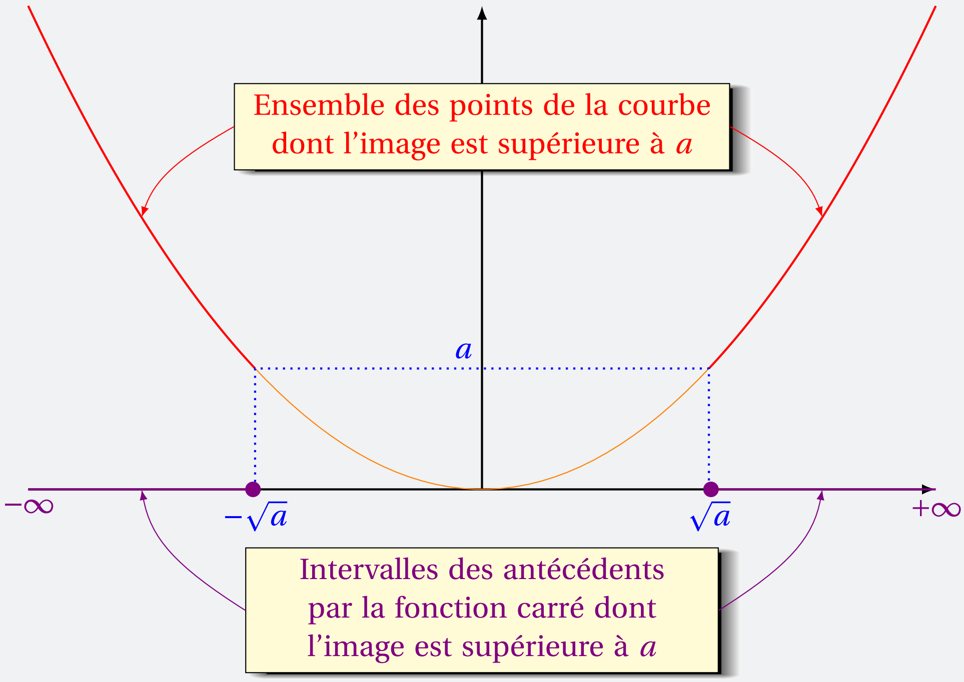
Graphiquement, cela revient à trouver tous les antécédents dont l'image est plus petite que 9 par la fonction carré :



Propriété 45

Pour tout réel $a > 0$,

$$x^2 > a \iff x \in \left]-\infty ; -\sqrt{a}\right[\cup \left]\sqrt{a} ; +\infty\right[.$$



II - La fonction inverse

II . 1 - Définition

Définition 51

La fonction inverse est la fonction qui à tout réel x associe son inverse $\frac{1}{x}$.
On la note :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Propriété 46

La fonction carré est impaire.

Démonstration 14

Posons $f(x) = \frac{1}{x}$.
f est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x),$$

ce qui justifie que f est impaire.

II . 2 - Sens de variation

Soient deux nombres a et b tels que $a < b$. Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ &= \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} \\ &= \frac{b-a}{ab}. \end{aligned}$$

- Si on se place sur $]-\infty;0[$ alors $a < 0$ et $b < 0$ donc a et b sont de même signe, ce qui signifie que $ab > 0$.
- Si on se place sur $]0;+\infty[$ alors $a > 0$ et $b > 0$ donc a et b sont aussi de même signe, ce qui signifie que $ab > 0$.

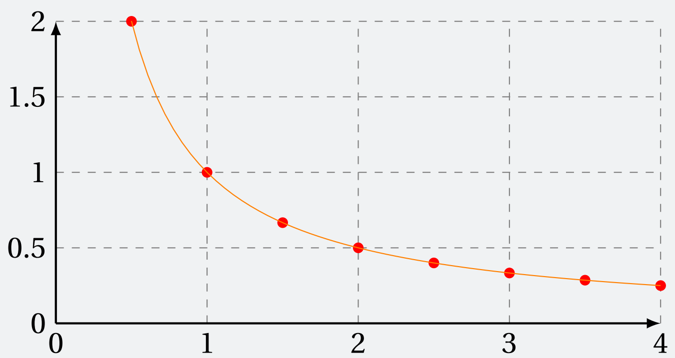
De plus, $a < b$ donc $b - a > 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) > 0$, ce qui signifie que f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

II . 3 - Courbe représentative

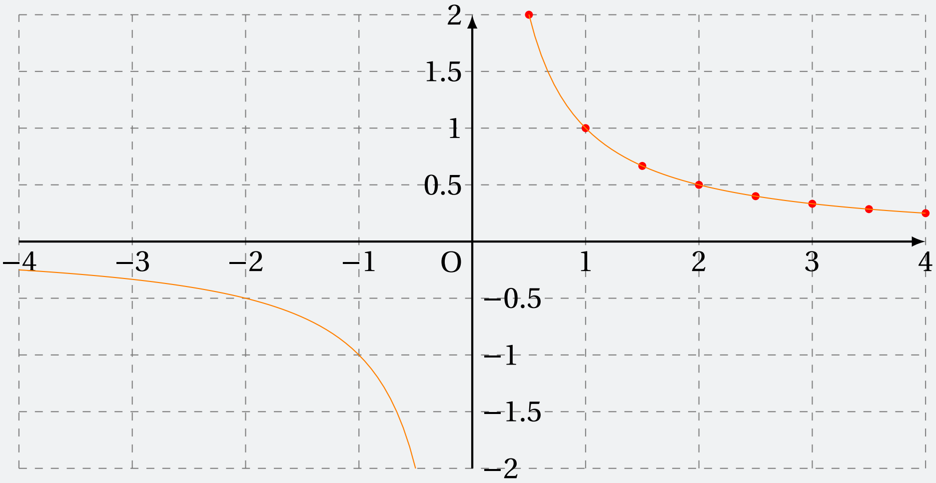
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction inverse sur un intervalle $[-4;0] \cup]0;4]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $]0;4]$ car la fonction est impaire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $]0;4]$).

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x^2	2	1	0,66	0,5	0,4	0,33	0,29	0,25

On obtient alors :



Par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe représentative complète sur $[-4;4]$:



On dit que cette courbe est une *hyperbole*.

II . 4 - Équations

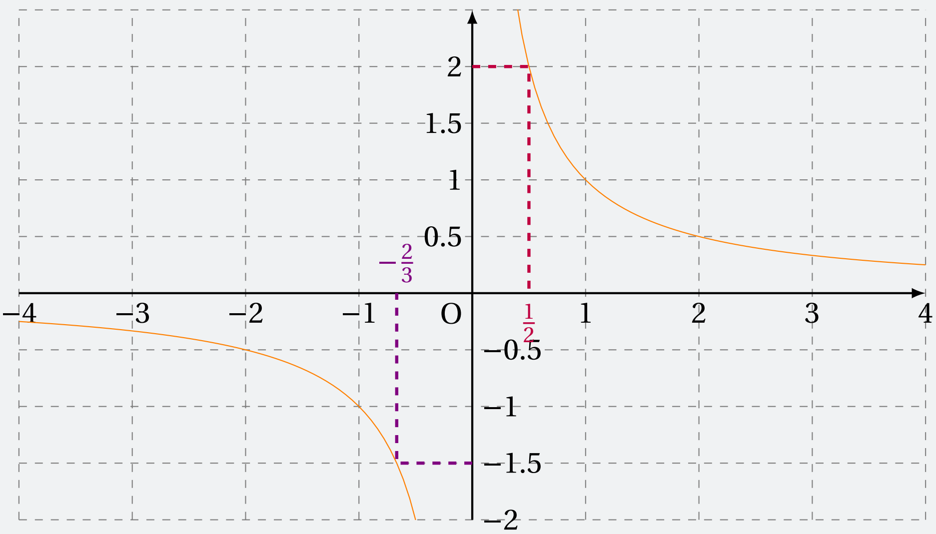
Propriété 47

Pour tout nombre $a \neq 0$,

$$\frac{1}{x} = a \iff x = \frac{1}{a}.$$

Exemple 68

1. $\dfrac{1}{x} = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
2. $\dfrac{1}{x} = -1,5 \iff x = \dfrac{1}{-1,5} = -\dfrac{1}{1,5} = -\dfrac{1}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{3}$.



II . 5 - Inéquations

Propriété 48

1 Si $a > 0$,

- $\dfrac{1}{x} > a \iff x \in \left]0\,;\dfrac{1}{a}\right[$;
- $\dfrac{1}{x} < a \iff x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]\dfrac{1}{a}\,;+\infty\right[$.

2 Si $a < 0$,

- $\dfrac{1}{x} > a \iff x \in \left]-\infty\,;\dfrac{1}{a}\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$;
- $\dfrac{1}{x} < a \iff x \in \left]\dfrac{1}{a}\,;0\right[$.

Exemple 69

1 $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{2} \iff x \in \left]0\,;\dfrac{2}{3}\right[$.

2 $\dfrac{1}{x} < \dfrac{3}{2} \iff x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.

III - La fonction cube

III . 1 - Définition

Définition 52

La fonction cube est la fonction qui à tout réel x associe son cube x^3.
On la note :

$$x \longmapsto x^3.$$

Propriété 49

La fonction carré est impaire.

Démonstration 15

Posons $f(x) = x^3$.
f est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel x,

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1 \times x)^3 = (-1)^3 \times x^3 = -1 \times x^3 = -x^3 = -f(x),$$

ce qui justifie que f est impaire.

III . 2 - Sens de variation

Soient deux nombres a et b tels que $a < b$. Posons $f(x) = x^3$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^3 - b^3 \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

- Si on se place sur $]-\infty;0]$ alors $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$ donc $ab \geqslant 0$.
- Si on se place sur $[0;+\infty[$ alors $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ donc $ab \geqslant 0$.

Dans les deux cas, $ab \geqslant 0$; de plus, $a^2 \geqslant 0$ et $b^2 \geqslant 0$ donc $a^2 + ab + b^2 > 0$.

Remarque 69

a et b ne peuvent pas être égaux à 0 tous les deux car on a supposé $a < b$. Donc $a^2 + b^2 \neq 0$, et donc $a^2 + b^2 > 0$, d'où $a^2 + b^2 + ab > 0$ (l'inégalité est nécessairement stricte).

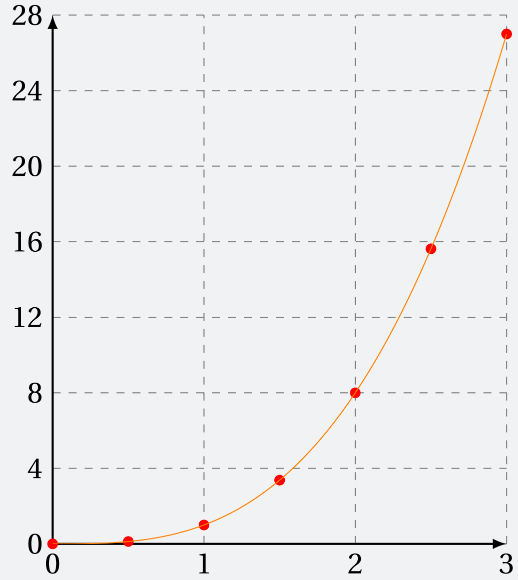
De plus, $a < b$ donc $a - b < 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, ce qui signifie que f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

III . 3 - Courbe représentative

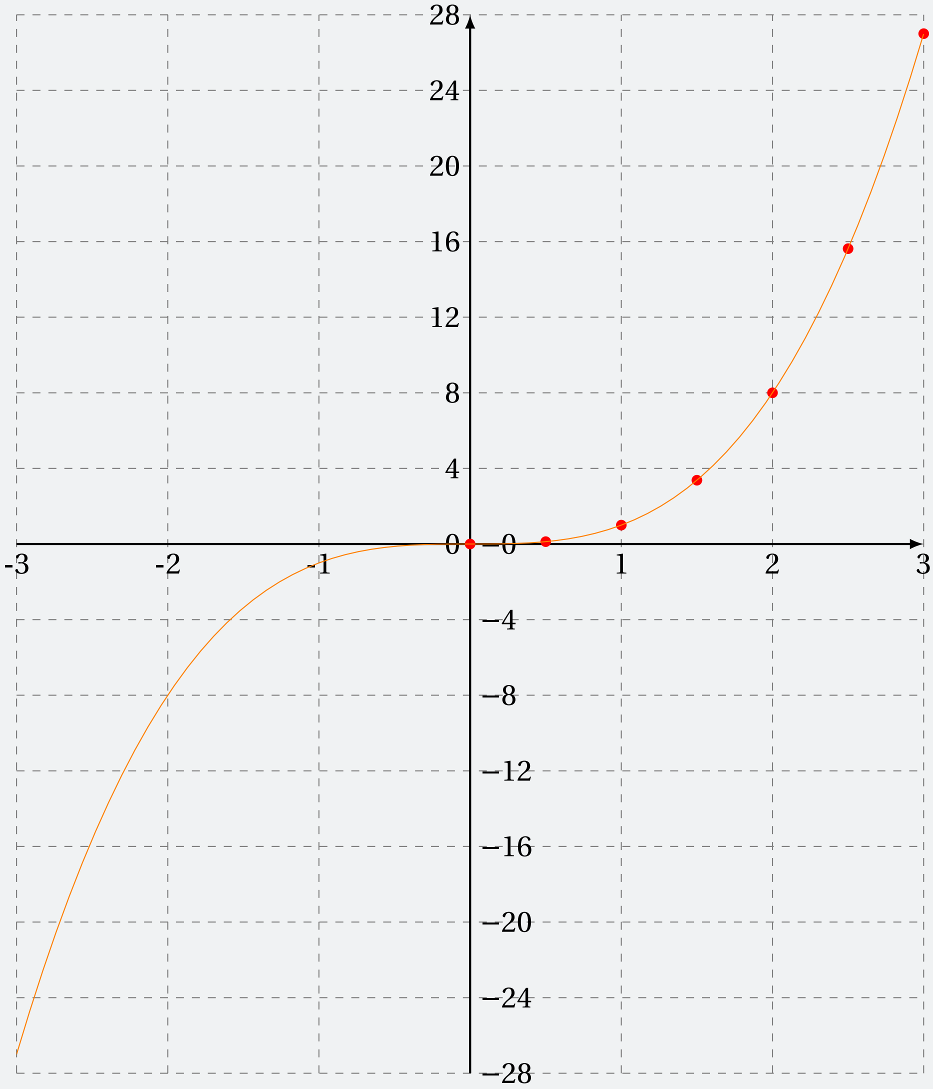
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction cube sur un intervalle $[-3;3]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $]0;3]$ car la fonction est impaire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $]0;3]$).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^2	0	0,125	1	3,375	8	15,625	27

On obtient alors :



Par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe représentative complète sur $[-3;3]$:



III . 4 - Équations et inéquations

Propriété 50

Pour tout nombre réel a,

$$x^3 = a \iff x = \sqrt[3]{a}.$$

Exemple 70

1. $x^3 = 27 \iff x = \sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$.
2. $x^3 = -8 \iff x = \sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

Propriété 51

Pour tout nombre réel a,

$$x^3 > a \iff x > \sqrt[3]{a}$$
$$x^3 < a \iff x < \sqrt[3]{a}$$

IV - Racine carrée

IV . 1 - Définition

Définition 53

La fonction racine carrée est la fonction qui à tout réel x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.
On la note :

$$x \longmapsto \sqrt{x}.$$

Son domaine de définition est $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $[0\,;+\infty[$.

IV . 2 - Sens de variation

Soient deux nombres positifs a et b tels que $a < b$. Posons $f(x) = \sqrt{x}$.

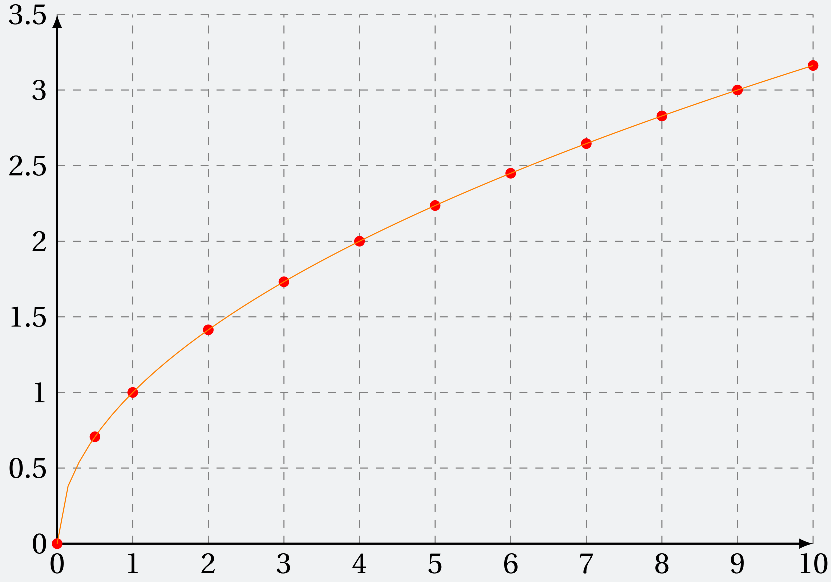
$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ &= \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

$a < b$ donc $a - b < 0$. De plus, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, ce qui signifie que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

IV . 3 - Courbe représentative

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2

On obtient alors :



IV . 4 - Équations et inéquations

Propriété 52

Soit $a > 0$.

$$\sqrt{x} = a \iff x = a^2$$
$$\sqrt{x} < a \iff x \in \left]0; a^2\right]$$
$$\sqrt{x} > a \iff x \in \left]a^2; +\infty\right[.$$

Exemple 71

1. $\sqrt{x} = 2 \iff x = 2^2 = 4.$
2. $\sqrt{x} < 3 \iff 0 < x < 9.$
3. $\sqrt{x} > 4 \iff x > 4^2 \iff x > 16.$

V - Généralités sur les fonctions de référence

V . 1 - Ordre des images

Propriété 53

1. $0 < a < b \iff 0 < a^2 < b^2$ et $a < b < 0 \iff 0 < b^2 < a^2$.
2. $a < b \iff \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
3. $a < b \iff a^3 < b^3$.
4. $0 < a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Les résultats de cette propriété viennent des variations des fonctions de référence.
Quand une fonction est croissante sur un intervalle, les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents ($x \mapsto x^2$ sur $[0;+\infty[$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$).

Au contraire, quand une fonction est décroissante sur un intervalle, les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents ($x \mapsto x^2$ sur $]-\infty;0]$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$).

V . 2 - Position relative des courbes

Propriété 54

Pour tout réel x strictement compris entre 0 et 1, $x^3 < x^2 < x$.
Pour tout réel $x > 1$, $x < x^2 < x^3$.

Démonstration 16

- Soit $x \in]0;1[$.

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1).$$

  Or, $x^2 > 0$ et $x - 1 < 0$, donc $x^2(x-1) < 0$, soit $x^3 - x^2 < 0$. Donc $x^3 < x^2$.

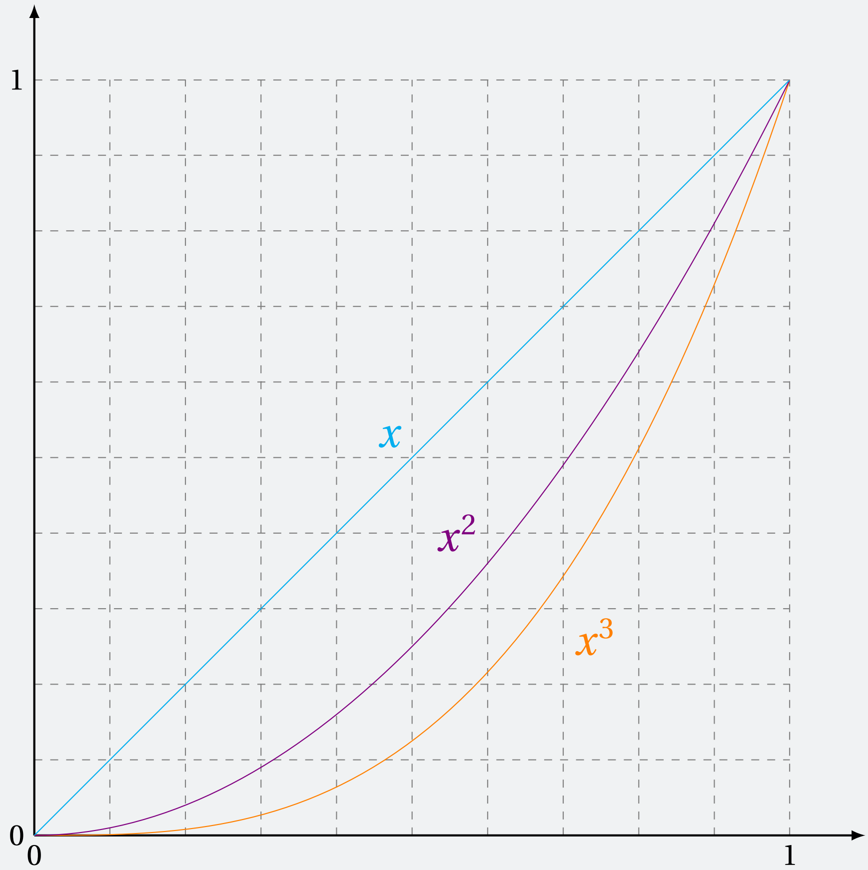
  De plus, $x^2 - x = x(x-1) < 0$ car $x > 0$ et $x - 1 < 0$. Ainsi, $x^2 < x$.

  Finalement, on obtient : $x^3 < x^2 < x$.
- Soit $x > 1$. Alors, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$ car $x^2 > 0$ et $x - 1 > 0$. Donc $x^3 > x^2$.

  De plus, $x^2 - x = x(x-1) > 0$ car $x > 0$ et $x - 1 > 0$. Donc $x^2 > x$.

  On obtient finalement : $x^3 > x^2 > x$, que l'on peut aussi écrire : $x < x^2 < x^3$.

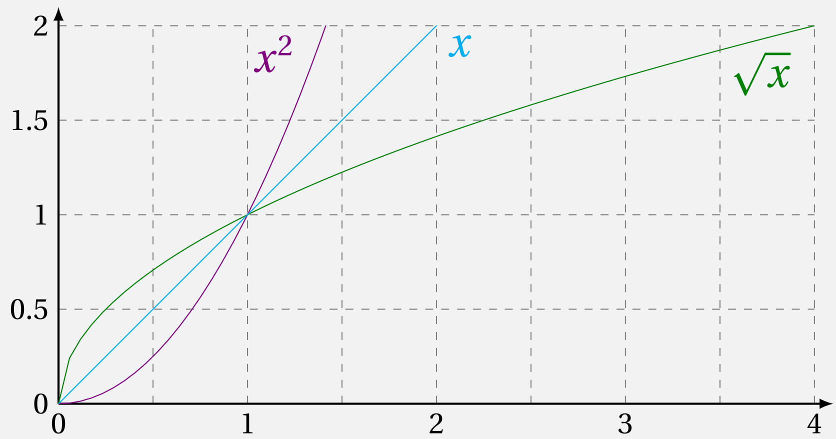
Graphiquement, cela se traduit par le fait que sur $[0;1]$, la courbe représentative de $x \mapsto x^3$ est en-dessous de celle de $x \mapsto x^2$, qui est elle-même en-dessous de celle de $x \mapsto x$:



Cela sous-entend notamment que si $0 < x < 1$ alors x^2 et x^3 sont plus petits que x.

Propriété 55

Pour tout réel x strictement compris entre 0 et 1, $x^2 < x < \sqrt{x}$.
Pour tout réel $x > 1$, $\sqrt{x} < x < x^2$.



Fonction carré

Exercice 9.1 (complétions et ordre)

Compléter les pointillés par l'un des symboles « < » et « > ».

1. $2,18^2 \dots 2,19^2$
2. $(-\pi)^2 \dots (-4)^2$
3. $1,718^2 \dots 1,0817^2$
4. $0,04^2 \dots 0,006^2$
5. $(-0,78)^2 \dots (-0,77)^2$
6. $(1-\pi)^2 \dots (3-2\pi)^2$

Solution page 268

Exercice 9.2 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2 = 8$
2. $x^2 = 16$
3. $x^2 = 25$
4. $x^2 = 54$
5. $2x^2 - 18 = 0$
6. $5x^2 + 1 = 0$

Solution page 268

Exercice 9.3 (résolution d'inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x^2 \geqslant 81$
2. $x^2 < -1$
3. $x^2 > -5$
4. $x^2 \leqslant 64$

Solution page 269

Exercice 9.4 (équations)

Résoudre les équations suivantes.

1. $(x+1)^2 = 5$
2. $(x-3)^2 = 100$
3. $(2x-1)^2 = 36$
4. $(5-2x)^2 = 64$
5. $2(x-1)^2 - 7 = 0$
6. $5(x+3)^2 + 1 = 0$

Solution page 269

Exercice 9.5 (complétions)

Compléter les pointillés.

1. Si $x \in [5;8]$ alors $x^2 \in \dots$
2. Si $x \in [-4;-2[$ alors $x^2 \in \dots$
3. Si $x \in]-1;1]$ alors $x^2 \in \dots$
4. Si $x \in]-2;6[$ alors $x^2 \in \dots$

Solution page 271

Exercice 9.6 (déroutant mais pas si difficile que ça)

On pose $f(x) = x^2$. Soient a et b deux réels quelconques. Calculer et simplifier :

1 $\frac{1}{2}\left[f(a+b) - \left(f(a) + f(b)\right)\right]$

2 $f(a+b) - f(a-b)$

3 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Solution page 272

La fonction inverse

Exercice 9.7 (complétions et ordre)

Compléter les pointillés par l'un des symboles « < » et « > ».

1 $\frac{1}{2,18} \cdots \frac{1}{2,19}$

2 $\frac{1}{-\pi} \cdots \frac{1}{-4}$

3 $\frac{1}{1,718} \cdots \frac{1}{1,0817}$

4 $\frac{1}{0,04} \cdots \frac{1}{0,006}$

5 $\frac{1}{-0,78} \cdots \frac{1}{-0,77}$

6 $\frac{1}{1-\pi} \cdots \frac{1}{3-2\pi}$

Solution page 272

Exercice 9.8 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1 $\frac{1}{x} = 8$

2 $\frac{1}{x} = -16$

3 $\frac{1}{x} = 0$

Solution page 273

Exercice 9.9 (résolution d'inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1 $\frac{1}{x} \geqslant 81$

2 $\frac{1}{x} < -1$

3 $\frac{1}{x} > -5$

4 $\frac{1}{x} \leqslant 64$

Solution page 273

Exercice 9.10 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1 $\frac{1}{x+1} = 5$

2 $\frac{1}{x-3} = 100$

3 $\frac{1}{2x-1} = 36$

4 $\frac{1}{5-2x} = 64$

5 $\frac{2}{x-1} - 7 = 0$

6 $\frac{5}{x+3} + 1 = 0$

Solution page 274

Exercice 9.11 (complétions)

Compléter les pointillés.

1. Si $x \in [5;8]$ alors $\frac{1}{x} \in \dots$
2. Si $x \in [-4;-2[$ alors $\frac{1}{x} \in \dots$
3. Si $x \in]-1;0[$ alors $\frac{1}{x} \in \dots$
4. Si $x \in]0;7[$ alors $\frac{1}{x} \in \dots$

Solution page 276

Exercice 9.12

On pose $f(x) = \frac{1}{x}$. Soient a et b deux nombres non opposés. Calculer et simplifier :

1. $f(a+b) - f(a-b)$
2. $\frac{1}{2}[f(a+b) + f(a-b)]$

Solution page 277

La fonction cube

Exercice 9.13 (complétions et ordre)

Compléter les pointillés par l'un des symboles « < » et « > ».

1. $2,18^3 \dots 2,19^3$
2. $(-\pi)^3 \dots (-4)^3$
3. $1,718^3 \dots 1,0817^3$
4. $(-0,04)^3 \dots 0,006^3$
5. $(-0,78)^3 \dots (-0,77)^3$
6. $(1-\pi)^3 \dots (3-2\pi)^3$

Solution page 277

Exercice 9.14 (complétions)

Compléter les pointillés.

1. Si $x \in [5;8]$ alors $x^3 \in \dots$
2. Si $x \in [-4;-2[$ alors $x^3 \in \dots$
3. Si $x \in]-1;1]$ alors $x^3 \in \dots$
4. Si $x \in]-2;6[$ alors $x^3 \in \dots$

Solution page 278

La fonction racine carrée

Exercice 9.15 (complétion et ordre)

Compléter les pointillés par l'un des symboles « < » et « > ».

1. $\sqrt{2,18} \dots \sqrt{2,19}$
2. $\sqrt{(-\pi)^2} \dots \sqrt{(-4)^2}$
3. $1,718^2 \dots 1,0817^2$
4. $\sqrt{(-0,04)^2} \dots \sqrt{0,006^2}$
5. $\sqrt{(-0,78)^2} \dots \sqrt{(-0,77)^2}$
6. $\sqrt{(1-\pi)^2} \dots \sqrt{(3-2\pi)^2}$

Solution page 278

Exercice 9.16 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1. $\sqrt{x} = 8$
2. $\sqrt{x} = 16$
3. $\sqrt{x} = 25$
4. $\sqrt{x} = 54$
5. $2\sqrt{x} - 18 = 0$
6. $5\sqrt{x} + 1 = 0$

Solution page 279

Exercice 9.17 (résolution d'équations)

Résoudre les équations suivantes.

1. $\sqrt{x+1} = 5$
2. $\sqrt{x-3} = 1$
3. $\sqrt{2x-1} = 6$
4. $\sqrt{5-2x} = 7$
5. $2\sqrt{x-1} - 7 = 0$
6. $5\sqrt{x+3} - 1 = 0$

Solution page 279

Exercice 9.18 (résolutions d'inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{x} \geqslant 9$
2. $\sqrt{x} < -1$
3. $\sqrt{x} > -5$
4. $\sqrt{x} \leqslant 8$
5. $\sqrt{3x-8} < 1$
6. $\sqrt{5-2x} \geqslant 2$

Solution page 281

Exercice 9.19

On pose $f(x) = \sqrt{x}$.
Montrer que pour tous réels positifs a et b, $f(a+b) < f(a) + f(b)$.

Solution page 282

Exercices généraux

Exercice 9.20 (comparaison de deux nombres)

Comparer a et b dans chacun des cas suivants.

1. $a = (\pi+1)^3$ et $b = 4,5^3$
2. $a = \sqrt{\pi+4}$ et $b = \sqrt{7}$
3. $a = \dfrac{1}{\pi}$ et $b = \dfrac{1}{3,1}$
4. $a = (\pi-5)^3$ et $b = (\pi-4)^3$
5. $a = \dfrac{1}{-4}$ et $b = \dfrac{1}{\pi-7}$

Solution page 282

Exercice 9.21 (comparaison de deux nombres)

Comparer a et b sans calcul.

1. $a=(\pi-2)^2$ et $b=1,1^2$
2. $a=\sqrt{\pi-1}$ et $b=\sqrt{2}$
3. $a=\frac{1}{\pi}$ et $b=\frac{\pi^2+1}{\pi}$
4. $a=(\pi-7)^3$ et $b=(\pi-6)^3$

Solution page 282

Exercice 9.22 (encadrements)

1. Encadrer a^2, a^3 et $\dfrac{1}{a}$ dans chacun des cas suivants/

   a. $3<a<5$ **b.** $-2\leqslant a<-\dfrac{1}{2}$

2. Encadrer a^2 dans les cas suivants :

   a. $-\pi\leqslant a\leqslant 3$ **b.** $-\dfrac{6}{7}<a<\dfrac{7}{6}$

Solution page 282

Exercice 9.23 (intersection de courbes)

Montrer que la courbe représentative des fonctions carré et racine carrée se coupent en seulement deux points, dont on donnera les coordonnées.

Solution page 283

Exercice 9.24 (intersection de courbes)

Montrer que la courbe représentative des fonctions inverse et racine carrée se coupent en un unique point, dont on donnera les coordonnées.

Solution page 283

Exercice 9.25 (intersection de courbes)

Montrer que la courbe représentative des fonctions inverse et carré se coupent en un unique point, dont on donnera les coordonnées.

Solution page 284

Exercice 9.26 (équations et inéquations)

1. Résoudre les équations suivantes :

   a. $x^2=10$ **b.** $x^3=216$ **c.** $\sqrt{x}=8$ **d.** $\dfrac{1}{x}=5$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

   a. $x^2<6$ **b.** $x^2\geqslant 10$ **c.** $x^3<8$ **d.** $\sqrt{x}\leqslant 4$

Solution page 284

Exercice 9.27 (équations et inéquations)

1 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 7$ **b.** $x^3 = -64$ **c.** $\sqrt{x} = 16$ **d.** $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{7}$

2 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2 < 12$ **b.** $x^2 \geqslant 7$ **c.** $x^3 < -1$ **d.** $\sqrt{x} \leqslant 9$

Solution page 285

Exercice 9.28 (encadrements)

1 Encadrer a^2, a^3 et $\frac{1}{a}$ dans chacun des cas suivants :

a. $1 \leqslant a < 2$ **b.** $-3 \leqslant a < -1$

2 Encadrer a^2 dans chacun des cas suivants :

a. $-2\pi < a \leqslant 3$ **b.** $-\dfrac{2}{3} \leqslant a < \dfrac{3}{2}$

Solution page 285

Exercice 9.29

On considère deux fonctions f et g telles que :

$$f(x) = 2 + \sqrt{x} - x \qquad \text{et} \qquad g(x) = x + \frac{1}{x}.$$

1 Quel est le domaine de définition de f ?

2 Quel est le domaine de définition de g ?

3 Montrer que les courbes représentatives de f et g se coupent au point $\mathrm{A}(1;2)$.

4 Tracer sur une calculatrice les deux courbes, puis en déduire le nombre de points d'intersection de ces deux courbes.

5 En déduire la valeur des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. On donnera une valeur approchée au centième si nécessaire.

À partir de là, les questions sont assez compliquées.

6 Montrer que l'équation $2x^2 - 2x + 1 = x\sqrt{x}$ admet les mêmes solutions que l'équation $f(x) = g(x)$.

7 Montrer alors que les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont aussi solutions de l'équation $4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0$.

8 On sait que $x = 1$ est une solution de cette dernière équation. On peut alors écrire : $4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = (x-1)(ax^3 + bx^2 + xc + d)$.
Trouver les valeurs de a, b, c et d.

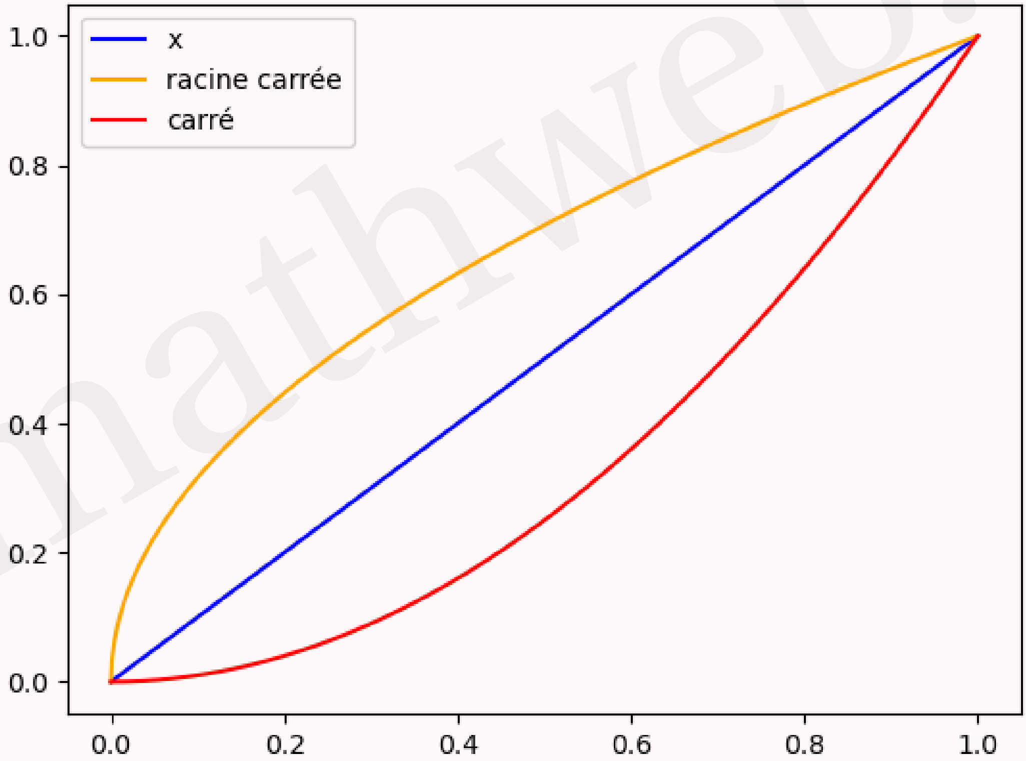
Solution page 286

Exercice 9.30 (utilisation de matplotlib)

Le module `matplotlib` permet de faire des graphiques, notamment des représentations graphiques de courbes (avec la bibliothèque `matplotlib.pyplot`).
On l'installe en ligne de commande avec la commande :

```
pip install matplotlib
ou
conda install matplotlib (sous anaconda)
```

Effectuer quelques recherches sur le fonctionnement de ce module, puis écrire un programme Python permettant d'afficher les courbes de référence $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x^2$ sur $[0;1]$ comme l'illustration suivante en faisant appel au moins de fonctions possible.



Solution page 288

Corrigé de l'exercice 9.1 page 261

1. $2,18^2 < 2,19^2$. En effet, $0 < 2,18 < 2,19$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.
2. $(-\pi)^2 < (-4)^2$. En effet, $-4 < -\pi < 0$ et la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc les images sont rangées dans l'ordre inverse : $(-4)^2 > (-\pi)^2$.
3. $1,718^2 > 1,0817^2$. En effet, $0 < 1,0817 < 1,718$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.
4. $0,04^2 > 0,006^2$. En effet, $0 < 0,006 < 0,04$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.
5. $(-0,78)^2 > (-0,77)^2$. En effet, $-0,78 < -0,77 < 0$ et la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc les images sont rangées dans l'ordre inverse : $(-0,78)^2 > (-0,77)^2$.
6. $(1-\pi)^2 < (3-2\pi)^2$. En effet, $1-\pi \approx 1-3,14 \approx -2,14$ et $3-2\pi \approx 3-6,28 \approx -3,28$ donc $3-2\pi < 1-\pi < 0$. De plus, la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc les images sont rangées dans l'ordre inverse : $(3-2\pi)^2 > (1-\pi)^2$.

Corrigé de l'exercice 9.2 page 261

1. $$\begin{aligned} x^2 = 8 &\iff x = -\sqrt{8} \text{ ou } x = \sqrt{8} \\ &\iff x = -\sqrt{4\times 2} \text{ ou } x = \sqrt{4\times 2} \\ &\iff x = -\sqrt{4}\times\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{4}\times\sqrt{2} \\ &\iff x = -2\sqrt{2} \text{ ou } x = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $x^2 = 8$ est donc : $\boxed{S = \left\{-2\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2}\right\}}$.
2. $$\begin{aligned} x^2 = 16 &\iff x = -\sqrt{16} \text{ ou } x = \sqrt{16} \\ &\iff x = -4 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $x^2 = 16$ est donc : $\boxed{S = \{-4\,;\,4\}}$.
3. $$\begin{aligned} x^2 = 25 &\iff x = -\sqrt{25} \text{ ou } x = \sqrt{25} \\ &\iff x = -5 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $x^2 = 25$ est donc : $\boxed{S = \{-5\,;\,5\}}$.
4. $$\begin{aligned} x^2 = 54 &\iff x = -\sqrt{54} \text{ ou } x = \sqrt{54} \\ &\iff x = -\sqrt{9\times 6} \text{ ou } x = \sqrt{9\times 6} \\ &\iff x = -3\sqrt{6} \text{ ou } x = 3\sqrt{6}. \end{aligned}$$
   L'ensemble solution de l'équation $x^2 = 16$ est donc : $\boxed{S = \left\{-3\sqrt{6}\,;\,3\sqrt{6}\right\}}$.

5 $2x^2 - 18 = 0 \iff 2x^2 = 18$

$$\iff x^2 = 9$$
$$\iff x = -3 \text{ ou } x = 3.$$

L'ensemble solution de l'équation $2x^2 - 18 = 0$ est donc : $\boxed{S = \{-3\ ;\ 3\}}$.

6 $5x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -\dfrac{1}{5}$ ← impossible car un carré est toujours positif ou nul.

L'ensemble solution de l'équation $5x^2 + 1 = 0$ est donc : $\boxed{S = \varnothing}$.

Corrigé de l'exercice 9.3 page 261

1 $x^2 \geqslant 81 \iff \underline{x \in]-\infty ; -9] \cup [9 ; +\infty[}$.

2 $x^2 < -1$. Cette inégalité étant impossible (car un carré est toujours positif ou nul), l'ensemble solution est : $\underline{S = \varnothing}$.

3 $x^2 > -5$. Un carré étant toujours positif ou nul, il est toujours plus grand que -5 donc l'ensemble solution de l'inéquation est : $\underline{S = \mathbb{R}}$.

4 $x^2 \leqslant 64 \iff \underline{x \in [-8 ; 8]}$.

Corrigé de l'exercice 9.4 page 261

1 $(x+1)^2 = 5$. Posons $X = x + 1$. Alors,

$$\begin{aligned}(x+1)^2 = 5 &\iff X^2 = 5\\ &\iff X = -\sqrt{5} \text{ ou } X = \sqrt{5}\\ &\iff x + 1 = -\sqrt{5} \text{ ou } x + 1 = \sqrt{5}\\ &\iff x = -\sqrt{5} - 1 \text{ ou } x = \sqrt{5} - 1.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(x+1)^2 = 5$ est donc : $\boxed{S = \left\{-\sqrt{5} - 1\ ;\ \sqrt{5} - 1\right\}}$.

2 $(x-3)^2 = 100$. Posons $X = x - 3$. Alors,

$$\begin{aligned}(x-3)^2 = 100 &\iff X^2 = 100\\ &\iff X = -10 \text{ ou } X = 10\\ &\iff x - 3 = -10 \text{ ou } x - 3 = 10\\ &\iff x = -10 + 3 \text{ ou } x = 10 + 3\\ &\iff x = -7 \text{ ou } x = 13.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(x-3)^2 = 100$ est donc : $\boxed{S = \{-7\ ;\ 13\}}$.

3 $(2x-1)^2 = 36$. Posons $X = 2x-1$. Alors,

$$\begin{aligned}(2x-1)^2 = 36 &\iff X^2 = 36\\ &\iff X = -6 \text{ ou } X = 6\\ &\iff 2x-1 = -6 \text{ ou } 2x-1 = 6\\ &\iff 2x = -5 \text{ ou } 2x = 7\\ &\iff x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(2x-1)^2 = 36$ est donc :

$$\boxed{S = \left\{-\frac{5}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right\}}$$

4 $(5-2x)^2 = 64$. Posons $X = 5-2x$. Alors,

$$\begin{aligned}(5-2x)^2 = 64 &\iff X^2 = 64\\ &\iff X = -8 \text{ ou } X = 8\\ &\iff 5-2x = -8 \text{ ou } 5-2x = 8\\ &\iff -2x = -13 \text{ ou } -2x = 3\\ &\iff x = \frac{13}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(5-2x)^2 = 64$ est donc : $\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{13}{2}\right\}}$.

5 $2(x-1)^2 - 7 = 0$. Posons $X = x-1$. Alors,

$$\begin{aligned}2(x-1)^2 - 7 = 0 &\iff 2X^2 = 7\\ &\iff X^2 = \frac{7}{2}\\ &\iff X = -\sqrt{\frac{7}{2}} \text{ ou } X = \sqrt{\frac{7}{2}}\\ &\iff x-1 = -\sqrt{\frac{7}{2}} \text{ ou } x-1 = \sqrt{\frac{7}{2}}\\ &\iff x = -\sqrt{\frac{7}{2}}+1 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{2}}+1.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $2(x-1)^2 - 7 = 0$ est donc :

$$\boxed{S = \left\{1-\sqrt{\frac{7}{2}}\,;\,1+\sqrt{\frac{7}{2}}\right\}}$$

6 $5(x+3)^2 + 1 = 0 \iff 5(x+3)^2 = -1$.
Or, $5 > 0$ et $(x+3)^2 \geqslant 0$ donc $5(x+3)^2 \geqslant 0$, quel que soit x.
Ainsi, $5(x+3)^2$ ne peut jamais être égal à -1. Donc :

$$\boxed{S = \varnothing}$$

Corrigé de l'exercice 9.5 page 261

1 Si $x \in [5;8]$ alors $x^2 \in [25;64]$.

En effet, $5 > 0$ et $8 > 0$, et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc quand on passe aux carrés, l'ordre ne change pas :

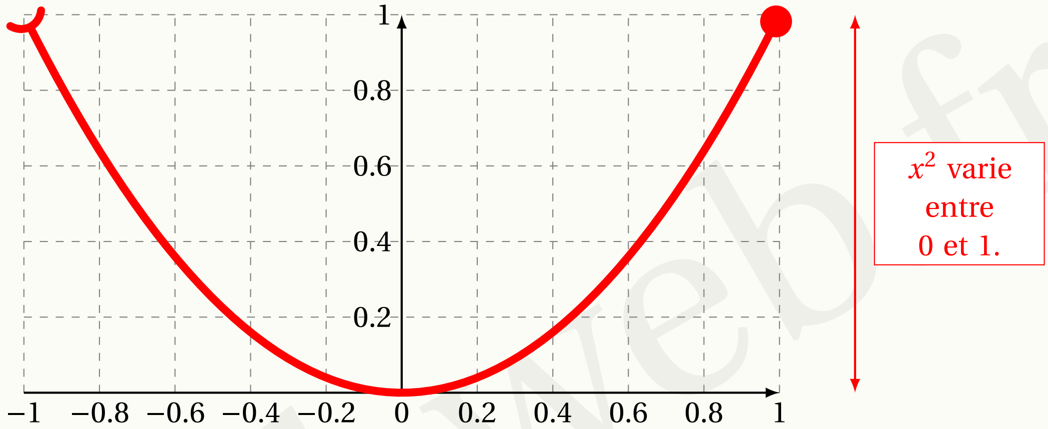
$$5 \leqslant x \leqslant 8 \iff 5^2 \leqslant x^2 \leqslant 8^2.$$

2 Si $x \in [-4;-2[$ alors $x^2 \in]4;16]$.

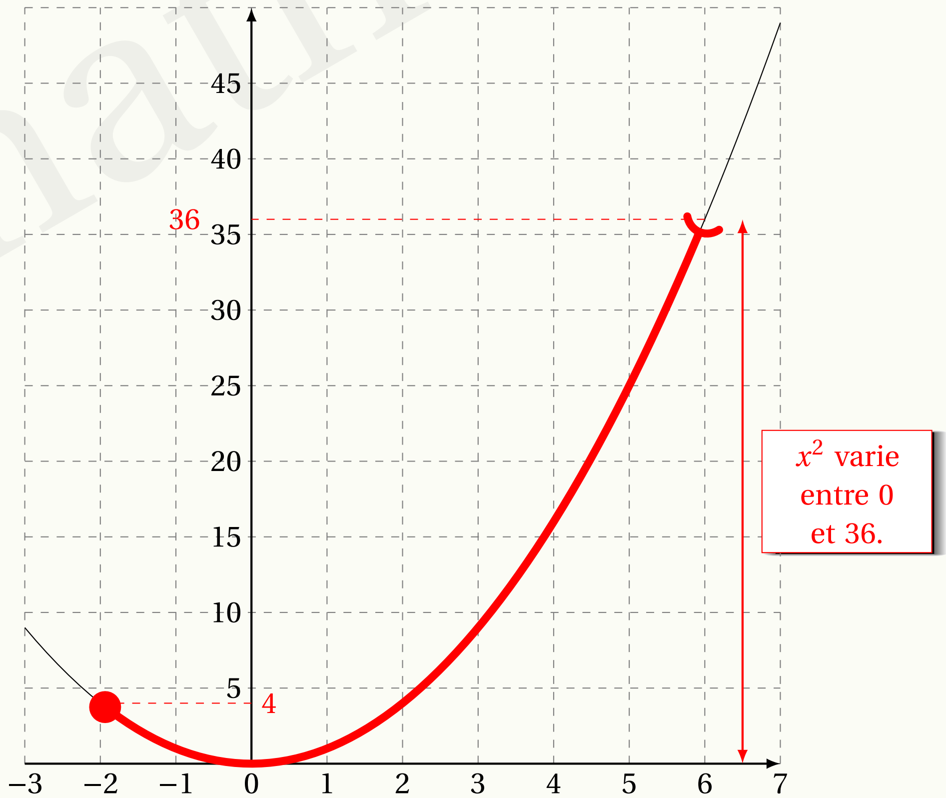
En effet, $-4 < 0$ et $-2 < 0$, et la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc quand on passe aux carrés, on change l'ordre :

$$-4 \leqslant x < -2 \iff (-4)^2 \geqslant x^2 > (-2)^2.$$

3 Si $x \in]-1;1]$ alors $x^2 \in [0;1]$. On peut le voir sur le graphique suivant :



4 Si $x \in]-2;6[$ alors $x^2 \in [0;36[$. On peut le voir sur le graphique suivant :



Corrigé de l'exercice 9.6 page 262

1 $$\frac{1}{2}\Big[f(a+b)-\big(f(a)+f(b)\big)\Big]=\frac{1}{2}\Big[(a+b)^2-\big(a^2+b^2\big)\Big]$$
$$=\frac{1}{2}[a^2+2ab+b^2-a^2-b^2]$$
$$\boxed{\frac{1}{2}\Big[f(a+b)-\big(f(a)+f(b)\big)\Big]=ab}$$

2 $$f(a+b)-f(a-b)=(a+b)^2-(a-b)^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$$
$$\boxed{f(a+b)-f(a-b)=4ab}$$

3 $$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$$
$$=\frac{4ab}{4}\text{ (d'après la question précédente)}$$
$$\boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)=ab}$$

Corrigé de l'exercice 9.7 page 262

1 $\dfrac{1}{2,18}>\dfrac{1}{2,19}$. En effet, $2,18<2,19$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc les images sont rangées dans l'ordre inverse.

2 $\dfrac{1}{-\pi}<\dfrac{1}{-4}$. En effet, $-\pi>-4$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, donc les images sont rangées dans l'ordre inverse.

3 $\dfrac{1}{1,718}<\dfrac{1}{1,0817}$ car $1,718>1,0817$ et les images par la fonction inverse sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents.

4 $\dfrac{1}{0,04}<\dfrac{1}{0,006}$ car $0,04>0,006$.

5 $\dfrac{1}{-0,78}>\dfrac{1}{-0,77}$ car $-0,78<-0,77$.

6 $\dfrac{1}{1-\pi}<\dfrac{1}{3-2\pi}$ car $1-\pi\approx-2,14$ et $3-2\pi\approx-3,28$, donc $1-\pi>3-2\pi$.

Corrigé de l'exercice 9.8 page 262

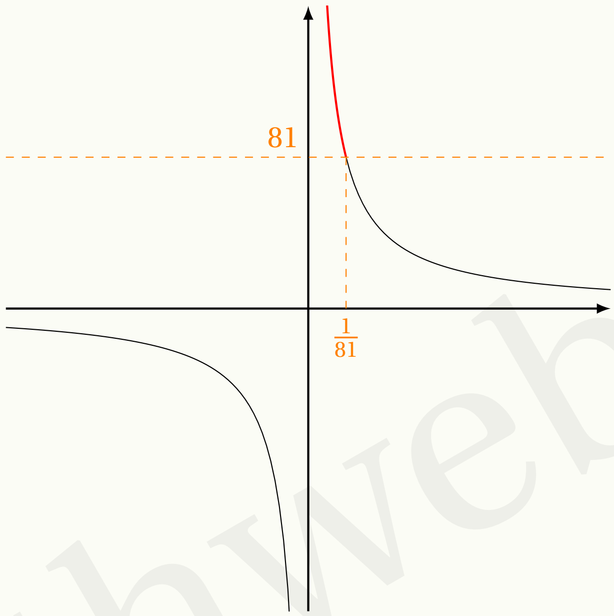
1 $\dfrac{1}{x} = 8 \iff \boxed{x = \dfrac{1}{8}}$.

2 $\dfrac{1}{x} = -16 \iff \boxed{x = -\dfrac{1}{16}}$.

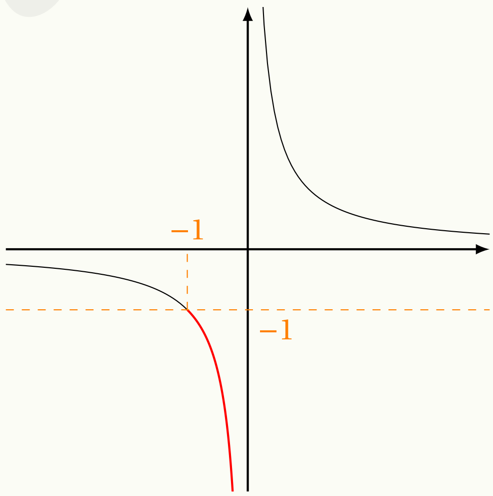
3 $\dfrac{1}{x} = 0 \leftarrow$ impossible (la courbe représentative de la fonction inverse ne coupe jamais la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses). Donc $\underline{S = \varnothing}$.

Corrigé de l'exercice 9.9 page 262

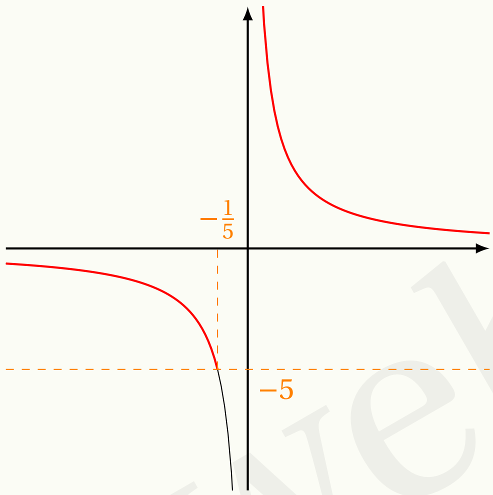
1 $\dfrac{1}{x} \geqslant 81 \iff x \in \left]0\,;\dfrac{1}{81}\right]$.



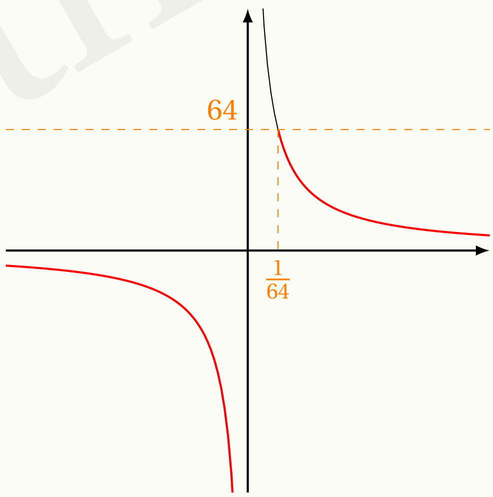
2 $\dfrac{1}{x} < -1 \iff x \in \left]-1\,;0\right[$.



3 $\dfrac{1}{x} > -5 \iff x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{5}\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$.



4 $\dfrac{1}{x} \leqslant 64 \iff x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup \left[\dfrac{1}{64}\,;+\infty\right[$.



Corrigé de l'exercice 9.10 page 262

1 $\dfrac{1}{x+1} = 5$. Posons $X = x+1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} = 5 &\iff \frac{1}{X} = 5\\
&\iff X = \frac{1}{5}\\
&\iff x+1 = \frac{1}{5}\\
&\iff x = \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{5}\\
&\iff x = -\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{1}{x+1}=5$ est donc : $\boxed{S=\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}}$.

2 $\dfrac{1}{x-3}=100$. Posons $X=x-3$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-3}=100 &\iff \frac{1}{X}=100\\
&\iff X=\frac{1}{100}\\
&\iff x-3=\frac{1}{100}\\
&\iff x=\frac{1}{100}+3=\frac{1}{100}+\frac{300}{100}\\
&\iff x=\frac{301}{100}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{1}{x-3}=100$ est donc : $\boxed{S=\left\{\dfrac{301}{100}\right\}}$.

3 $\dfrac{1}{2x-1}=36$. Posons $X=2x-1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x-1}=36 &\iff \frac{1}{X}=36\\
&\iff X=\frac{1}{36}\\
&\iff 2x-1=\frac{1}{36}\\
&\iff 2x=\frac{1}{36}+1\\
&\iff 2x=\frac{37}{36}\\
&\iff x=\frac{1}{2}\times\frac{37}{36}\\
&\iff x=\frac{37}{72}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{1}{2x-1}=36$ est donc : $\boxed{S=\left\{\dfrac{37}{72}\right\}}$.

4 $\dfrac{1}{5-2x} = 64$. Posons $\mathrm{X} = 5-2x$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{5-2x} = 64 &\iff \frac{1}{\mathrm{X}} = 64\\ &\iff \mathrm{X} = \frac{1}{64}\\ &\iff 5-2x = \frac{1}{64}\\ &\iff -2x = \frac{1}{64} - 5\\ &\iff -2x = \frac{-319}{64}\\ &\iff x = \frac{319}{128}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{1}{5-2x} = 64$ est donc : $\boxed{\mathrm{S} = \left\{\dfrac{319}{128}\right\}}$.

5 $$\begin{aligned}\frac{2}{x-1} - 7 = 0 &\iff \frac{2}{x-1} = 7\\ &\iff \frac{x-1}{2} = \frac{1}{7} \quad \text{(on a inversé les deux membres de l'égalité)}\\ &\iff x-1 = \frac{2}{7} \quad \text{(on a multiplié par deux les deux membres)}\\ &\iff x = \frac{2}{7} + 1\\ &\iff x = \frac{9}{7}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{2}{x-1} - 7 = 0$ est donc : $\boxed{\mathrm{S} = \left\{\dfrac{9}{7}\right\}}$.

6 $$\begin{aligned}\frac{5}{x+3} + 1 = 0 &\iff \frac{5}{x+3} = -1\\ &\iff \frac{x+3}{5} = -1\\ &\iff x+3 = -5 \quad \text{(on a multiplié par 5 les deux membres de l'égalité)}\\ &\iff x = -8.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $\dfrac{5}{x+3} + 1 = 0$ est donc : $\boxed{\mathrm{S} = \{-8\}}$.

Corrigé de l'exercice 9.11 page 263

1 Si $x \in [5;8]$ alors $\dfrac{1}{x} \in \left[\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{5}\right]$.

En effet, la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, les images sont rangées dans l'ordre inverse : $5 \leqslant x \leqslant 8 \iff \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{8}$.

2 Si $x \in [-4;-2[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \left]-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right]$.

3. Si $x \in]-1;0[$ alors $\frac{1}{x} \in]-\infty;-1[$.

4. Si $x \in]0;7[$ alors $\frac{1}{x} \in \left]\frac{1}{7};+\infty\right[$.

Corrigé de l'exercice 9.12 page 263

1.
$$\begin{aligned} f(a+b)-f(a-b) &= \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b} \\ &= \frac{a-b}{(a+b)(a-b)}-\frac{a+b}{(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{(a-b)-(a+b)}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{a-b-a-b}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(a+b)-f(a-b)=\frac{-2b}{a^2-b^2}}$$

2.
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(a+b)+f(a-b)] &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}+\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(a-b)+(a+b)}{(a-b)(a+b)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a-b+a+b}{a^2-b^2}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}[f(a+b)+f(a-b)]=\frac{a}{a^2-b^2}}$$

Corrigé de l'exercice 9.13 page 263

1. $2,18^3 < 2,19^3$. En effet, $0<2,18<2,19$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.
2. $(-\pi)^3 > (-4)^3$. En effet, $-4<-\pi<0$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, donc les images sont rangées dans le même ordre : $(-4)^3<(-\pi)^3$.
3. $1,718^3 > 1,0817^3$. En effet, $0<1,0817<1,718$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.
4. $(-0,04)^3 < 0,006^3$. En effet, $-0,04<0$ donc $(-0,04)^3<0$ et $0,006>0$ donc $0,006^3>0$.
5. $(-0,78)^3 < (-0,77)^3$. En effet, $-0,78<-0,77<0$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, donc les images sont rangées dans le même ordre.
6. $(1-\pi)^3 > (3-2\pi)^3$. En effet, $1-\pi \approx 1-3,14 \approx -2,14$ et $3-2\pi \approx 3-6,28 \approx -3,28$ donc $3-2\pi<1-\pi<0$. De plus, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ donc les images sont rangées dans l'ordre inverse : $(3-2\pi)^3>(1-\pi)^3$.

Corrigé de l'exercice 9.14 page 263

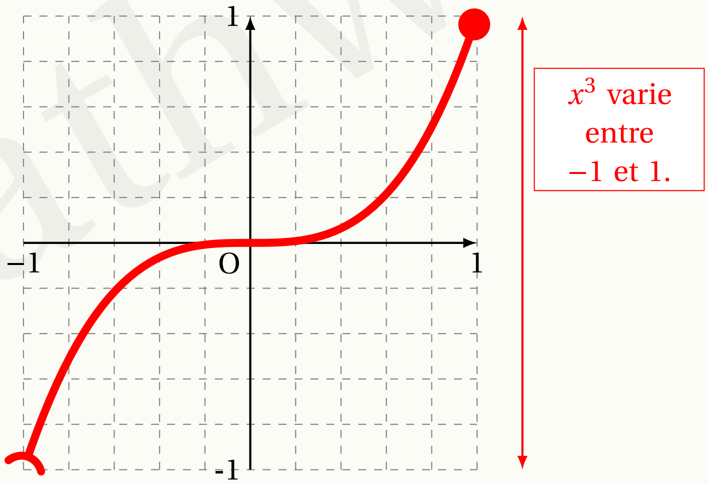
1 Si $x \in [5;8]$ alors $x^3 \in [125;512]$, où $5^3 = 125$ et $8^3 = 512$.
En effet, $5 > 0$ et $8 > 0$, et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc quand on passe aux cubes, l'ordre ne change pas :

$$5 \leqslant x \leqslant 8 \iff 5^3 \leqslant x^3 \leqslant 8^3.$$

2 Si $x \in [-4;-2[$ alors $x^2 \in [-64;-8[$.
En effet, $-4 < 0$ et $-2 < 0$, et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ donc quand on passe aux cubes, on change l'ordre :

$$-4 \leqslant x < -2 \iff (-4)^3 \leqslant x^3 < (-2)^2.$$

3 Si $x \in]-1;1]$ alors $x^3 \in]-1;1]$. On peut le voir sur le graphique suivant :



4 Si $x \in]-2;6[$ alors $x^3 \in]-8;216[$, où $(-2)^3 = -8$ et $6^3 = 216$.

Corrigé de l'exercice 9.15 page 263

1 $\sqrt{2,18} < \sqrt{2,19}$. En effet, $0 < 2,18 < 2,19$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

2 $\sqrt{(-\pi)^2} < \sqrt{(-4)^2}$. En effet, $(-\pi)^2 = \pi^2 \approx 9,9$ et $(-4)^2 = 16$, donc $(-\pi)^2 < (-4)^2$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

3 $\sqrt{1,718} > \sqrt{1,0817}$. En effet, $0 < 1,0817 < 1,718$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc les images sont rangées dans le même ordre.

4 $\sqrt{(-0,04)^2} > \sqrt{0,006^2}$. En effet, $(-0,04)^2 = 0,04^2$ et $0,006 < 0,04$; de plus, $\sqrt{0,04^2} = 0,04$ et $\sqrt{0,006^2} = 0,006$. Or, on sait que $0,006 < 0,4$. D'où le résultat.

5 $\sqrt{(-0,78)^2} > \sqrt{(-0,77)^2}$. En effet, $\sqrt{(-0,78)^2} = 0,78$ et $\sqrt{(-0,77)^2} = 0,77$. Or, on sait que $0,77 < 0,78$. D'où le résultat.

6 $\sqrt{(1-\pi)^2} < \sqrt{(3-2\pi)^2}$. En effet, $1-\pi \approx 1-3,14 \approx -2,14$ donc $1-\pi < 0$, ce qui signifie que $\sqrt{(1-\pi)^2} = \pi - 1 \approx 2,314$.

De plus, $3-2\pi \approx 3-6,28 \approx -3,28 < 0$ donc $\sqrt{(3-2\pi)^2} = 2\pi - 3 \approx 6,28-3 \approx 3,28$.
À l'aide des valeurs approchées trouvées précédemment, on peut dire que $\pi - 1 < 2\pi - 3$. D'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 9.16 page 264

1 $\sqrt{x} = 8 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 = 8^2 \iff x = 64$. Donc $\underline{S = \{64\}}$.

2 $\sqrt{x} = 16 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 = 16^2 \iff x = 256$. Donc $\underline{S = \{256\}}$.

3 $\sqrt{x} = 25 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 = 25^2 \iff x = 625$. Donc $\underline{S = \{625\}}$.

4 $\sqrt{x} = 54 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 = 54^2 \iff x = 2\,916$. Donc $\underline{S = \{2\,916\}}$.

5 $2\sqrt{x} - 18 = 0 \iff 2\sqrt{x} = 18 \iff \sqrt{x} = 9 \iff x = 9^2 \iff x = 81$. Donc $\underline{S = \{81\}}$.

6 $5\sqrt{x} + 1 = 0 \iff \sqrt{x} = -\frac{1}{5}$ ←impossible car une racine carrée est toujours positive ou nulle. Donc $\underline{S = \varnothing}$.

Corrigé de l'exercice 9.17 page 264

1 $\sqrt{x+1} = 5$. On pose $X = x+1$. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} = 5 &\iff \sqrt{X} = 5\\ &\iff X = 5^2\\ &\iff x+1 = 25\\ &\iff x = 24.\end{aligned}$$

On vérifie que $x = 24$ vérifie l'égalité : $\sqrt{24+1} = \sqrt{25} = 5$, ce qui est ce que nous souhaitons.

<u>L'ensemble solution de l'équation est donc $S = \{24\}$.</u>

2 $\sqrt{x-3} = 1$. On pose $X = x-3$. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} = 1 &\iff \sqrt{X} = 1\\ &\iff X = 1^2\\ &\iff x-3 = 1\\ &\iff x = 4.\end{aligned}$$

On vérifie que $x = 4$ vérifie l'égalité : $\sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$, ce qui est ce que nous souhaitons.

<u>L'ensemble solution de l'équation est donc $S = \{4\}$.</u>

3 $\sqrt{2x-1}=6$. On pose $\mathrm{X}=2x-1$. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1}=6 &\iff \sqrt{\mathrm{X}}=6\\ &\iff \mathrm{X}=6^2\\ &\iff 2x-1=36\\ &\iff 2x=37\\ &\iff x=\frac{37}{2}.\end{aligned}$$

On vérifie que $x=\frac{37}{2}$ vérifie l'égalité : $\sqrt{2\times\frac{37}{2}-1}=\sqrt{37-1}=\sqrt{36}=6$, ce qui est ce que nous souhaitons.

L'ensemble solution de l'équation est donc $\mathrm{S}=\left\{\frac{37}{2}\right\}$.

4 $\sqrt{5-2x}=7$. On pose $\mathrm{X}=5-2x$. Alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{5-2x}=7 &\iff \sqrt{\mathrm{X}}=7\\ &\iff \mathrm{X}=7^2\\ &\iff 5-2x=49\\ &\iff -2x=44\\ &\iff x=-22.\end{aligned}$$

On vérifie que $x=-22$ vérifie l'égalité : $\sqrt{5-2\times(-22)}=\sqrt{5+44}=\sqrt{49}=7$, ce qui est ce que nous souhaitons.

L'ensemble solution de l'équation est donc $\mathrm{S}=\{-22\}$.

5 $2\sqrt{x-1}-7=0$. On pose $\mathrm{X}=x-1$. Alors,

$$\begin{aligned}2\sqrt{x-1}-7=0 &\iff 2\sqrt{\mathrm{X}}=7\\ &\iff \mathrm{X}=\frac{7}{2}\\ &\iff \mathrm{X}=\left(\frac{7}{2}\right)^2\\ &\iff x-1=\frac{49}{4}\\ &\iff x=\frac{49}{4}+1\\ &\iff x=\frac{53}{4}.\end{aligned}$$

On vérifie que $x=\frac{53}{4}$ vérifie l'égalité :

$$2\sqrt{\frac{53}{4}-1}-7=2\sqrt{\frac{49}{4}}-7=2\times\frac{7}{2}-7=7-7=0,$$

ce qui est ce que nous souhaitons.

L'ensemble solution de l'équation est donc $\mathrm{S}=\left\{\frac{53}{4}\right\}$.

6 $5\sqrt{x+3}-1=0 \iff 5\sqrt{x+3}=1$

$$\iff \sqrt{x+3}=\frac{1}{5}$$

$$\iff x+3=\frac{1}{25}$$

$$\iff x=\frac{1}{25}-3$$

$$\iff x=-\frac{74}{25}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc $\underline{S=\left\{-\frac{22}{25}\right\}}$.

Remarque 74

Nous ne sommes pas obligés de toujours vérifier l'exactitude de la valeur trouvée, comme je l'ai fait dans les questions 1 à 5. Nous ne sommes pas non plus obligés de poser $X=\cdots$. Dans la question 6, j'ai justement fait autrement pour montrer qu'il est possible d'aller plus vite.
Attention toutefois : il faut tout de même vérifier que la valeur trouvée est possible quand il y a une racine carrée... En effet, si on trouve par exemple $x=-2$ et que l'équation comporte $\sqrt{x-3}$, cette valeur n'est pas possible car $\sqrt{-2-3}=\sqrt{-5}$ n'existe pas! Enfin... pas dans les nombres réels.

Corrigé de l'exercice 9.18 page 264

1 $\sqrt{x}\geqslant 9 \iff x\geqslant 9^2 \iff x\geqslant 81$. Donc $\underline{S=[81\,;+\infty[}$.

2 $\sqrt{x}<-1$. Une racine carrée étant toujours positive ou nulle, elle ne peut pas être inférieure à -1. Donc il n'y a aucune valeur de x qui vérifie l'inégalité $\sqrt{x}<-1$. D'où $\underline{S=\varnothing}$.

3 $\sqrt{x}>-5$. Cette inégalité est toujours vraie car une racine carrée est toujours positive ou nulle. En revanche, x doit être positif ou nul pour que $\sqrt{x}$ existe. Donc $\underline{S=[0\,;+\infty[}$.

4 $\sqrt{x}\leqslant 8 \iff 0\leqslant x\leqslant 8^2$. Donc $\underline{S=[0\,;64]}$.

5 $\sqrt{3x-8}<1 \iff 0\leqslant 3x-8<1$

$$\iff 8\leqslant 3x<9 \qquad \text{en ajoutant 8 à chaque membre}$$

$$\iff \frac{8}{3}\leqslant x<3 \qquad \text{en divisant par 3 chaque membre}$$

L'ensemble solution est donc $\underline{S=\left[\frac{8}{3}\,;3\right[}$.

6 $\sqrt{5-2x}\geqslant 2 \iff 5-2x\geqslant 4$

$$\iff -2x\geqslant -1$$

$$\iff x\leqslant \frac{1}{2}.$$

L'ensemble solution est donc :

$$\underline{S=\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]}.$$

Remarque 75

On s'assure que $5-2x\geqslant 0$ pour $x\in S$ sinon $\sqrt{5-2x}$ n'existe pas.

Corrigé de l'exercice 9.19 page 264

Pour tous a et b strictement positifs,

$$\begin{aligned} f(a)+b) < f(a)+f(b) &\iff \sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ &\iff \left(\sqrt{a+b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \text{car } x \longmapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff a+b < \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}\times\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \\ &\iff a+b < a+2\sqrt{ab}+b \\ &\iff 0 < 2\sqrt{ab} \quad \leftarrow \text{ ce qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$

Nous avons raisonné par *équivalences*, ce qui justifie que dans la mesure où « $2\sqrt{ab} > 0$ » est toujours vraie, « $f(a+b) < f(a)+f(b)$ » l'est aussi.

Corrigé de l'exercice 9.20 page 264

1 $\pi+1 \approx 3,14+1 \approx 4,14$ donc $\pi+1 < 4,5$; ainsi, $\underline{(\pi+1)^3 < 4,5^3}$ (la fonction « cube » conserve l'ordre de deux nombres).

2 $\pi+4 \approx 7,14$ donc $\pi+4 > 7$; ainsi, $\underline{\sqrt{\pi+4} > \sqrt{7}}$ (la fonction « racine carrée » conserve l'ordre de deux nombres positifs).

3 $\pi \approx 3,14 > 3,1$ donc $\boxed{\dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{3,1}}$ (la fonction « inverse » inverse l'ordre de deux nombres de même signe).

4 $\pi-5 < \pi-4$ donc $\underline{(\pi-5)^3 < (\pi-4)^3}$.

5 $\pi-7 \approx 3,14-7 \approx -3,86$ donc $\pi-7 > -4$; ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{-4} > \dfrac{1}{\pi-7}}$.

Corrigé de l'exercice 9.21 page 265

1 $\pi-2 \approx 1,14 > 1,1 > 0$ donc $(\pi-2)^2 > (1,1)^2$ car la fonction carré conserve l'ordre de deux nombres positifs.

2 $\pi-1 \approx 2,14 > \sqrt{2}$ donc $\sqrt{\pi-1} > \sqrt{2}$ car la fonction racine carrée conserve l'ordre de deux nombres positifs.

3 $1 < 1+\pi^2$ donc $\frac{1}{\pi} < \frac{\pi^2+1}{\pi}$.

4 $\pi-7 < \pi-6$ donc $(\pi-7)^3 < (\pi-6)^3$ car la fonction cube conserve l'ordre.

Corrigé de l'exercice 9.22 page 265

1 **a.** Si $3 < a < 5$ alors :

- $3^2 < a^2 < 5^2$, soit $9 < a^2 < 25$ car 3 et 5 sont tous les deux positifs et la fonction « carré » conserve l'ordre sur les nombres positifs ;
- $3^3 < a^3 < 5^3$, soit $27 < a^3 < 125$ car la fonction « cube » conserve l'ordre ;
- $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{3}$ car la fonction « inverse » change l'ordre sur les nombres de mêmes signes.

b. Si $-2 \leqslant a < -\dfrac{1}{2}$ alors :

- $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 < a^2 \leqslant (-2)^2$, soit $\dfrac{1}{4} < a^2 \leqslant 4$;
- $(-2)^3 \leqslant a^3 < \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$, soit $-8 \leqslant a^3 < -\dfrac{1}{8}$;
- $\dfrac{1}{-\frac{1}{2}} < \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{-2}$, soit $-2 < \dfrac{1}{a} \leqslant -2$ (attention aux signes « < » et « $\leqslant$ »).

2 **a.** Si $-\pi \leqslant a \leqslant 3$ alors $3^2 \leqslant a^2 \leqslant (-\pi)^2$, soit $\underline{9 \leqslant a^2 \leqslant \pi^2}$.

Attention 13

La fonction « carré » inverse l'ordre sur les nombres négatifs.

b. Si $-\dfrac{6}{7} < a < \dfrac{7}{6}$ alors $0 \leqslant a < \left(\dfrac{7}{6}\right)^2$, soit $\boxed{0 \leqslant a^2 < \dfrac{49}{36}}$.

Attention 14

Ici, a est compris entre un nombre négatif et un nombre positif donc quand on élève au carré, on « passera » forcément par « 0 », donc a^2 sera égal à $0^2 = 0$. « 0 » ets donc la valeur minimale atteinte par a^2.

Corrigé de l'exercice 9.23 page 265

Supposons que la courbe représentative de la fonction carré coupe celle de la fonction racine carrée en au moins un point. Notons alors ce point $\mathrm{I}(x\,;y)$.

Alors, $y = x^2$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction carré) et $y = \sqrt{x}$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction racine carrée), avec $x \geqslant 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
x^2 = \sqrt{x} &\iff (x^2)^2 = (\sqrt{x})^2 \\
&\iff x^4 = x \\
&\iff x^4 - x = 0 \\
&\iff x(x^3 - 1) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x^3 - 1 = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x^3 = 1 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe deux points d'intersection :

- l'un d'abscisse 0, et donc d'ordonnée $y = 0^2 = 0$; c'est l'origine du repère,
- l'autre d'abscisse 1, et donc d'ordonnée $y = 1^2 = 1$.

Corrigé de l'exercice 9.24 page 265

Supposons que la courbe représentative de la fonction inverse coupe celle de la fonction racine carrée en au moins un point. Notons alors ce point $\mathrm{I}(x\,;y)$.

Alors, $y = \dfrac{1}{x}$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction inverse), avec $x \neq 0$, et $y = \sqrt{x}$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction racine carrée), avec $x \geqslant 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} = \sqrt{x} &\iff \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \\
&\iff \frac{1}{x^2} = x \\
&\iff \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x} = x \times \frac{1}{x} \\
&\iff \frac{1}{x^3} = 1 \\
&\iff x^3 = 1 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, il n'existe qu'un seul point d'intersection, donc l'abscisse vaut 1 et dont l'ordonnée vaut $y = \sqrt{1} = 1$.

Corrigé de l'exercice 9.25 page 265

Supposons que la courbe représentative de la fonction inverse coupe celle de la fonction carré en au moins un point. Notons alors ce point $\mathrm{I}(x\,;y)$.

Alors, $y = \dfrac{1}{x}$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction inverse), avec $x \neq 0$, et $y = x^2$ (car I appartient à la courbe représentative de la fonction carré). Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} = x^2 &\iff \frac{1}{x} \times x = x^2 \times x \\
&\iff 1 = x^3 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, il n'existe qu'un seul point d'intersection, donc l'abscisse vaut 1 et dont l'ordonnée vaut $y = 1^2 = 1$.

Corrigé de l'exercice 9.26 page 265

1 **a.** $x^2 = 10 \iff x = -\sqrt{10}$ ou $x = \sqrt{10}$

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{-\sqrt{10}\,;\sqrt{10}\right\}}$$

b. $x^3 = 216 \iff x = \sqrt[3]{216} \iff x = 6.$

$$\boxed{\mathrm{S} = \{6\}}$$

c. $\sqrt{x} = 8 \iff x = 8^2 \iff x = 64.$

$$\boxed{\mathrm{S} = \{64\}}$$

d. $\dfrac{1}{x} = 5 \iff x = \dfrac{1}{5}$.

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{\frac{1}{5}\right\}}$$

2 **a.** $x^2 < 6 \iff -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \iff \boxed{x \in \left]-\sqrt{6};\sqrt{6}\right[}$.

b. $x^2 \geqslant 10 \iff x \leqslant \sqrt{10}$ ou $x \geqslant \sqrt{10} \iff \boxed{x \in \left]-\infty;\sqrt{10}\right] \cup \left[\sqrt{10};+\infty\right[}$.

c. $x^3 < 8 \iff x < \sqrt[3]{8} \iff x < 2 \iff \boxed{x \in \left]-\infty;2\right[}$.

d. $\sqrt{x} \leqslant 4 \iff 0 \leqslant x \leqslant 4^2 \iff 0 \leqslant x \leqslant 16 \iff \boxed{x \in [0;16]}$.

Corrigé de l'exercice 9.27 page 266

1 **a.** $x^2 = 7 \iff x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$. $\boxed{\mathrm{S} = \{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}}$

b. $x^3 = -64 \iff x = -8$. $\boxed{\mathrm{S} = \{-8\}}$

c. $\sqrt{x} = 16 \iff x = 16^2 \iff x = 256$. $\boxed{\mathrm{S} = \{256\}}$

d. $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{7} \iff x = -\frac{7}{2}$. $\boxed{\mathrm{S} = \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}}$

2 **a.** $x^2 < 12 \iff -\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$. $\boxed{\mathrm{S} = \left]-\sqrt{12};\sqrt{12}\right[}$, que l'on peut aussi écrire $\boxed{\mathrm{S} = \left]-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right[}$

b. $x^2 \geqslant 7 \iff x \leqslant -\sqrt{7}$ ou $x \geqslant \sqrt{7}$. $\boxed{\mathrm{S} = \left]-\infty;-\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7};+\infty\right[}$

c. $x^3 < -1 \iff x < -1$. $\boxed{\mathrm{S} = \left]-\infty;-1\right[}$

d. $\sqrt{x} \leqslant 9 \iff 0 \leqslant x \leqslant 81$. $\boxed{\mathrm{S} = [0;81]}$

Corrigé de l'exercice 9.28 page 266

1 Encadrer a^2, a^3 et $\frac{1}{a}$ dans chacun des cas suivants :

a. $1 \leqslant a < 2$. On a :

$$1 \leqslant a^2 < 4 \quad 1 \leqslant a^3 < 8 \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{a} \leqslant 1$$

b. $-3 \leqslant a < -1$. On a :

$$1 < a^2 < 9 \quad -27 < a^3 < 1 \quad -1 < \frac{1}{a} < -\frac{1}{3}$$

2 Encadrer a^2 dans chacun des cas suivants :

a. $-2\pi < a \leqslant 3 \iff 0 \leqslant a^2 < 4\pi^2$

b. $-\dfrac{2}{3} \leqslant a < \dfrac{3}{2} \iff 0 \leqslant a^2 < \dfrac{9}{4}$

Corrigé de l'exercice 9.29 page 266

1 $f(x) = \sqrt{x} + 2 - x$. Le domaine de définition de $x \mapsto \sqrt{x}$ étant $\mathbb{R}_+$ et celui de $x \mapsto 2 - x$ étant $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f est l'intersection des deux ensembles, c'est-à-dire :

$$\underline{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[.}$$

2 $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Le domaine de définition de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant $\mathbb{R}^*$, celui de g est aussi :

$$\underline{\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^* =]0\,;+\infty[\cup]0\,;+\infty[.}$$

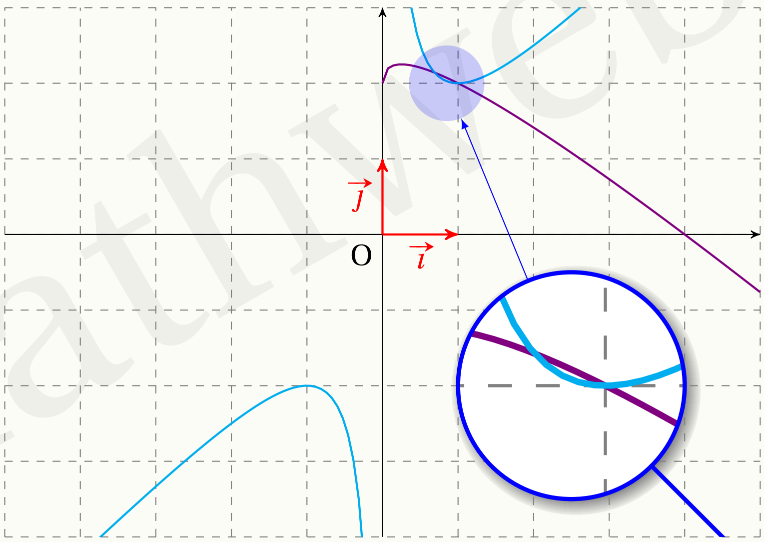
3 $f(1) = 2 + \sqrt{1} - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$; donc le point A(1 ; 2) appartient à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.

$g(1) = \dfrac{1}{1} + 1 = 1 + 1 = 1$, donc $A \in \mathscr{C}_g$, courbe représentative de g.

<u>Par conséquent, les deux courbes se coupent en A.</u>

4 On trace les deux courbes.

On voit alors qu'il y a deux points d'intersection, dont le point A.



5 Le premier point d'intersection a pour abscisse à peu près 0,69. Par conséquent, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $x \approx 0,69$ et $x = 2$; ce sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

6
$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\iff 2 + \sqrt{x} - x = \frac{1}{x} + x \\
&\iff \color{red}{x}\left(2 + \sqrt{x} - x\right) = \color{red}{x}\left(\frac{1}{x} + x\right) && \text{on multiplie par } x \neq 0 \text{ chaque membre de l'équation} \\
&\iff 2x + x\sqrt{x} - x^2 = 1 + x^2 && \text{on distribue le } x \\
&\iff x\sqrt{x} = 2x^2 - 2x + 1
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux équations $f(x) = g(x)$ et $x\sqrt{x} = 2x^2 - 2x + 1$ sont équivalentes, ce qui signifie qu'elles sont exactement les mêmes solutions.

Remarque 76

L'étape où on a multiplié par x les deux membres de l'équation est importante. Ici, nous avons pu faire cela car $x = 0$ n'est pas une solution de l'équation $f(x) = g(x)$. Si 0 avait été une solution de l'équation, on aurait tout de même pu multiplié par x, mais en posant la condition « avec $x \neq 0$ » et en transformant l'équivalence (« $\iff$ ») en implication (« $\Rightarrow$ »), ce qui rend la tâche moins évidente, mais possible tout de même. Dans un tel cas, les deux équations n'auraient pas eu exactement les mêmes solutions.

7 $f(x) = g(x) \iff x\sqrt{x} = 2x^2 - 2x + 1$ d'après la question précédente

$$\implies \left(x\sqrt{x}\right)^2 = \left(2x^2 - 2x + 1\right)^2$$

$$\implies x^2 \times x = 4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1$$ d'après la formule $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$\implies 4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Attention 15

Dès que nous élevons au carré deux membres d'une équation, nous perdons l'équivalence. Cela signifie que SI x est solution de $f(x) = g(x)$ ALORS x est aussi solution de $4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0$, mais la réciproque est fausse.

8 Développons :

$$\begin{aligned}(x-1)(ax^3 + bx^2 + xc + d) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - ax^3 - bx^2 - cx - d \\ &= ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b)x^2 + (d-c)x - d \\ &= 4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 \text{ (par hypothèse).}\end{aligned}$$

Donc les coefficients de x^4 doivent être égaux; de même pour ceux de x^3, x^2, x et pour le nombre constant :

$$\begin{cases} a & = 4 \\ b - a & = -9 \\ c - b & = 8 \\ d - c & = -4 \\ -d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ d = -1 \\ b = -9 + a = -9 + 4 = -5 \\ c = 8 + b = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\underline{4x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = (x-1)(4x^3 - 5x^2 + 3x - 1)}.$$

Remarque 77

Le fait d'écrire la dernière équation sous la forme $(x-1)(4x^3-5x^2+3x-1)=0$ est intéressante car pour trouver la solution différente de 1, il suffit de résoudre l'équation $4x^3-5x^2+3x-1=0$. Mais cette équation n'est pas facile à résoudre pour des élèves de lycées. Il existe cependant une méthode, que l'on appelle la *méthode de Cardan*, qui permet de trouver la valeur exacte de la solution qu'il manque, et non une valeur approchée.

En résumé, nous sommes partis de l'équation $\sqrt{x}+2-x=\frac{1}{x}+x$ et comme nous n'avons pas pu trouver de valeur exacte à toutes ses solutions, nous l'avons transformé en l'équation $(x-1)(4x^3-5x^2+3x-1)=0$ en ayant à l'esprit que les solutions de la 1re équation sont nécessairement dans l'ensemble solution de la seconde (ici, elles sont mêmes identiques). Si nous avons transformé la 1re équation, c'est dans l'espoir de trouver une équation plus simple à résoudre (ce qui est le cas pour les mathématiciens, mais pas pour les élèves de Seconde).

On arrive ainsi à démontrer que la valeur exacte de la seconde solution est... (accrochez-vous...) :

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{5\,041}{746\,496}-\frac{1\,331}{2\,985\,984}}+\frac{71}{1\,728}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{5\,041}{746\,496}-\frac{1\,331}{2\,985\,984}}-\frac{71}{1\,728}}+\frac{5}{12},$$

dont une valeur approchée est 0,688 042 944 721.
Je précise que $\sqrt[3]{y}$ est le nombre x tel que $x^3=y$ (c'est l'antécédent de y par la fonction cube).

Corrigé de l'exercice 9.30 page 267

Un programme possible est le suivant :

Code Python 9-15

```python
from matplotlib.pyplot import plot,show,legend

x = [ a/1000 for a in range(0,1001) ]
y1 = [ (a/1000)**0.5 for a in range(0,1001) ]
y2 = [ (a/1000)**2 for a in range(0,1001) ]

plot(x,x,color='blue',label='x')
plot(x,y1,color='orange',label='racine carrée')
plot(x,y2,color='red',label='carré')
legend()
show()
```

La plupart des exemples que l'on peut trouver sur Internet font appel au module `numpy`, ce qui est totalement superflu à mon sens ici...
En effet, pour tracer la courbe représentative d'une fonction f, il faut avant tout définir une *plage de données*, c'est-à-dire un intervalle sur lequel les valeurs de x vont varier. Comme

je veux tracer mes courbes sur $[0;1]$, il me faut définit une *liste* (que je vais naturellement nommer `x`) dont les éléments sont les valeurs de x que je veux prendre.
Ici, j'ai donc construit ma liste `x` comme étant la liste des valeurs `a/1000` pour `a` = 0, 1, 2, 3, ..., 1000. En effet, il ne faut pas oublier que la fonction `range(0,1001)` donne tous les entiers de 0 à 1 000, c'est-à-dire les 10 001 premiers entiers naturels.
Ainsi, on a :

```
x = [ 0 , 0.001 , 0.002 , 0.003 , ... , 0.999 , 1 ]
```

Ensuite, je créé une liste `y1` qui contient toutes les valeurs de `(a/1000)**0.5` pour `a` = 0, 1, 2, ..., 1001. Ici, il ne faut pas oublier que `b**0.5` représente $\sqrt{b}$. Ainsi, `y1` ets la liste des images des éléments de la liste `x` par la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.
De même, `y2` est la liste des images des éléments de `x` par la fonction $x \longmapsto x^2$.
La ligne 7 trace alors la fonction $x \longmapsto x$ en bleu ;
la ligne 8 trace la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ en orange ;
la ligne 9 trace la fonction $x \longmapsto x^2$ en rouge.
La commande `legend()` place la légende grâce aux étiquettes (`label`) renseignés dans les fonctions `plot`.
La commande `show()` affiche le graphique.

10

Fonctions carrés

Plan du chapitre

Attention 16

Ce chapitre n'est pas explicitement au programme. Je tenais toutefois à le mettre car certain.e.s enseignant.e.s peuvent tout de même parler de fonctions carrés dans leurs cours.

I - Lien avec la fonction carré

I . 1 - Première approche

On pose $f(x) = x^2$ (la fonction carré).
Cette fonction peut-être modifiée en prenant par exemple pour variable $x-\alpha$, où α est un réel non nul. Dans ce cas, on peut nommer g la fonction ainsi obtenue :

$$g(x) = f(x-\alpha) = (x-\alpha)^2.$$

On peut aussi, à partir de la fonction f, ajouter une constante et considérer la fonction :

$$h(x) = f(x) + \beta = x^2 + \beta.$$

On peut aussi multiplier $f(x)$ par une constante $a \neq 0$ et obtenir une fonction :

$$p(x) = ax^2.$$

Et puis, on peut tout faire en même temps et considérer la fonction :

$$c(x) = af(x-\alpha) + \beta.$$

Pour résumer, à partir de la fonction carré, avec les opérations de base que sont l'addition et la multiplication, on peut obtenir d'autres fonctions où intervient x^2, mais où il n'est pas seul.

Ce sont toutes ces fonctions que l'on appelle les fonctions carrés.

I . 2 - Définition

Définition 54

On appelle **fonctions carrés** toutes les fonctions f de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois réels, avec $a \neq 0$.

Exemple 72

1. $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ est une fonction carré.
2. $g(x) = 3x^2 - 5$ est une fonction carré.
3. $h(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - 8x$ est une fonction carré.

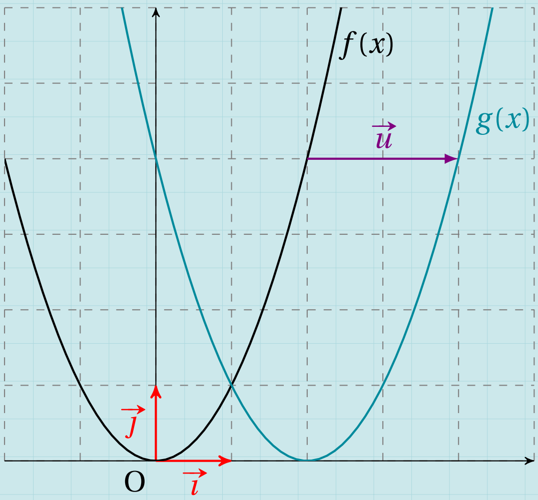
I . 3 - Transformations de la fonction carré

Posons $f(x) = x^2$.

- La courbe représentative de la fonction $g(x) = f(x-\alpha)$ est obtenue à partir de celle de la fonction f par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$.

Exemple 73

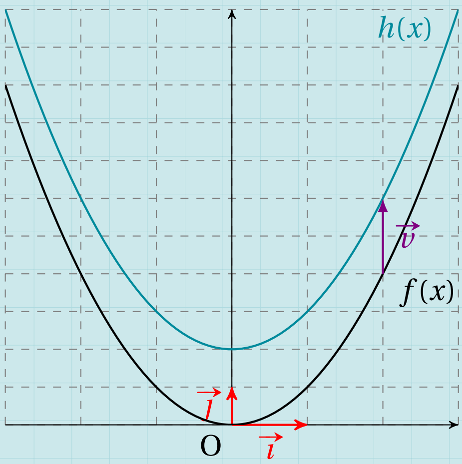
$g(x) = f(x-2) = (x-2)^2$: ici, $\alpha = 2$ donc on effectue une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.



- La courbe représentative de la fonction $h(x) = f(x) + \beta$ est obtenue à partir de celle de la fonction f par translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\\beta\end{pmatrix}$.

Exemple 74

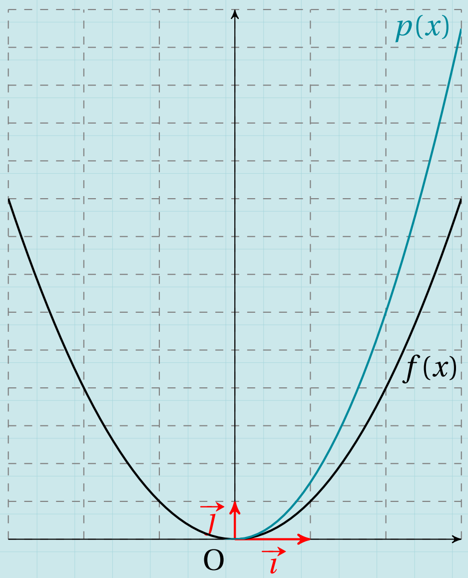
$g(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2$: ici, $\beta = 2$ donc on effectue une translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.



- La courbe représentative de la fonction $p(x) = kf(x)$ est obtenue à partir de celle de la fonction f par « étirement » (vers le haut si $k > 0$ ou vers le bas si $k < 0$) car on multiplie par k toutes les images $f(x)$, donc tous les y. Cette construction est bien moins simple à faire concrètement que la translation, mais vous n'aurez pas à le faire : c'est juste pour que vous compreniez ce qui va suivre...

Exemple 75

$h(x) = 1,5f(x) = 1,5x^2$.



Si on combine ces trois transformations, on obtient une fonction :

$$c(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

II - Forme canonique

II . 1 - Définition

Définition 55

Soit f une fonction carré.
La **forme canonique** de f est :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Exemple 76

1. $-2(x-1)^2 + 5$ est la forme canonique d'une fonction carré, où $a = -2$, $\alpha = 1$ et $\beta = 5$.
2. $\frac{1}{3}(x+4)^2$ est la forme canonique d'une fonction carré, où $a = \frac{1}{3}$, $\alpha = -4$ et $\beta = 0$.

II . 2 - Variations

Propriété 56

Soit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

- Si $a < 0$, on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

On voit ainsi que :

- si $a > 0$, f admet un **minimum** en $x = \alpha$, et ce minimum vaut alors β ;
- si $a < 0$, f admet un **maximum** en $x = \alpha$, et ce maximum vaut alors β.

Exercice 10.1 (variations)

Donner les variations des fonctions suivantes en dressant leur tableau de variations.

1. $f(x) = 3(x-1)^2 + 7$
2. $g(x) = -5(x-4)^2 - 2$
3. $h(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

Solution page 298

Exercice 10.2 (équations)

Résoudre les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ et $h(x) = 0$, où f, g et h sont définies dans l'exercice 10.1.

Solution page 298

Exercice 10.3 (point d'intersection avec l'axe des abscisses)

Pour chacune des fonctions f, g et h suivantes, trouver l'abscisse des éventuels points d'intersection de leur courbe représentative avec l'axe des abscisses.

1. $f(x) = 4(x+5)^2 - 16$
2. $g(x) = -5(x-6)^2 + 10$
3. $h(x) = 7(x+8)^2$

Solution page 299

Exercice 10.4 (les différentes formes)

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 9x^2 + 18x - 16.$$

1. Montrer que $f(x) = 9(x+1)^2 - 25$.
2. Montrer que $f(x) = (3x-2)(3x+8)$.
3. En choisissant la forme la plus adaptée, résoudre les équations suivantes :

a. $f(x) = 0$ **b.** $f(x) = -25$ **c.** $f(x) = -16$ **d.** $f(x) = 25$

Solution page 300

Exercice 10.5 (forme développée)

Donner la forme développée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = -5(x+3)(4-2x)$
2. $f(x) = 2(x+3)^2 - 7$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-6)^2 + \dfrac{3}{2}$
4. $f(x) = 3(x-8)(x+1)$

Solution page 301

Exercice 10.6 (variations, équation et inéquation)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 9 - 4(x+3)^2.$$

1 Dresser le tableau de variations de f.

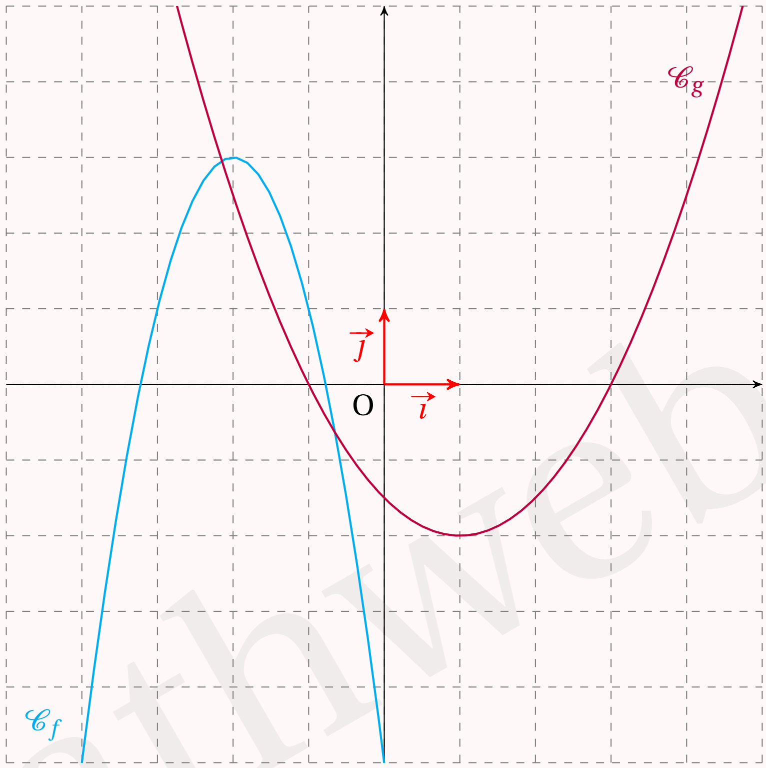
2 Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3 Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant -16$.

Solution page 302

Exercice 10.7 (lectures graphiques et forme canonique)

On donne ci-dessous la courbe représentative deux deux fonction f et g :



On sait que $f(x) = a_1(x-\alpha_1)^2 + \beta_1$ et $g(x) = a_2(x-\alpha_2)^2 + \beta_2$.

1 La fonction f.

a. Lire graphiquement les valeurs de α_1 et β_1.

b. Lire graphiquement les coordonnées entières d'un point appartement à $\mathscr{C}_f$, puis en déduire l'expression canonique de $f(x)$.

2 La fonction g.

a. Lire graphiquement les valeurs de α_2 et β_2.

b. Lire graphiquement l'abscisse des points d'intersection de $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des abscisses.

Déduire alors l'expression canonique de $g(x)$.

Solution page 303

Exercice 10.8 (trouver l'expression de la fonction)

Déterminer l'expression d'une fonction du second degré f dont la courbe représentative admet pour sommet le point $S(-3;8)$ et coupant l'axe des abscisses eau point $A(2;0)$.

Solution page 304

Corrigé de l'exercice 10.1 page 295

1 $f(x)$ est sous sa forme canonique, avec $a = 3$, $\alpha = 1$ et $\beta = 7$. $a > 0$ donc les branches de la parabole représentative de f sont dirigées vers le haut. Le tableau de variations de la fonction f est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	7	$\nearrow$	

2 $g(x)$ est sous sa forme canonique, avec $a = -5$, $\alpha = 4$ et $\beta = -2$. $a < 0$ donc les branches de la parabole représentative de g sont dirigées vers le bas. Le tableau de variations de la fonction g est donc :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Variations de g		$\nearrow$	-2	$\searrow$	

3 $h(x)$ est sous sa forme canonique, avec $a = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = -2$ et $\beta = -1$. $a > 0$ donc les branches de la parabole représentative de h sont dirigées vers le haut. Le tableau de variations de la fonction h est donc :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variations de h		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Corrigé de l'exercice 10.2 page 295

- D'après les variations de la fonction f, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 7$ donc il n'existe aucune valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$.

  Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$ est : $S = \varnothing$.
- D'après les variations de la fonction g, pour tout réel x, $g(x) \leqslant -2$ donc il n'existe aucune valeur de x pour laquelle $g(x) = 0$.

  Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $g(x) = 0$ est : $S = \varnothing$.

- $h(x) = 0 \iff \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1 = 0$

$$\iff \frac{1}{2}(x+2)^2 = 1$$
$$\iff (x+2)^2 = 2$$
$$\iff x+2 = -\sqrt{2} \text{ ou } x+2 = \sqrt{2}$$
$$\iff x = -2-\sqrt{2} \text{ ou } x = -2+\sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $h(x) = 0$ est : $S = \{-2-\sqrt{2}\,;\ -2+\sqrt{2}\}$.

Corrigé de l'exercice 10.3 page 295

Remarque 80

Trouver l'abscisse des éventuels points d'intersection d'une courbe représentative d'une fonction f avec l'axe des abscisses revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1 $f(x) = 0 \iff 4(x+5)^2 - 16 = 0$

$$\iff 4(x+5)^2 = 16$$
$$\iff (x+5)^2 = 4$$
$$\iff x+5 = -\sqrt{4} = -2 \text{ ou } x+5 = \sqrt{4} = 2$$
$$\iff x = -2-5 = -7 \text{ ou } x = 2-5 = -3$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points, d'abscisses respectives $x_1 = -3$ et $x_2 = -7$.

2 $g(x) = 0 \iff -5(x-6)^2 + 10 = 0$

$$\iff -5(x-6)^2 = -10$$
$$\iff (x-6)^2 = 2$$
$$\iff x-6 = -\sqrt{2} \text{ ou } x-6 = \sqrt{2}$$
$$\iff x = 6-\sqrt{2} \text{ ou } x = 6+\sqrt{2}.$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction g coupe l'axe des abscisses en deux points, d'abscisses respectives $x_1 = 6-\sqrt{2}$ et $x_2 = 6+\sqrt{2}$.

3 $h(x) = 0 \iff 7(x+8)^2 = 0$

$$\iff (x+8)^2 = 0$$
$$\iff x+8 = 0$$
$$\iff x = -8.$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction h coupe l'axe des abscisses en un point (le sommet de la parabole), d'abscisse $x = -8$.

Corrigé de l'exercice 10.4 page 295

1 On développe la forme canonique donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}9(x+1)^2-25 &= 9(x^2+2x+1)-25\\ &= 9x^2+18x+9-25\\ &= 9x^2+18x-16\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Donc $f(x)=9(x+1)^2-25$.

2 On développe la forme factorisée donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}(3x-2)(3x+8) &= (3x)\times(3x)+8\times 3x-2\times 3x-2\times 8\\ &= 9x^2+24x-6x-16\\ &= 9x^2+18x-16\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Donc $f(x)=(3x-2)(3x+8)$.

3 **a.** Pour résoudre l'équation $f(x)=0$, il faut que $f(x)$ soit sous la forme factorisée.

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\iff (3x-2)(3x+8)=0\\ &\iff 3x-2=0 \quad \text{ou} \quad 3x+8=0\\ &\iff x=\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x)=0$ est donc : $S=\left\{-\frac{8}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right\}$.

b. Pour résoudre l'équation $f(x)=-25$, nous allons prendre la forme canonique de $f(x)$ car « -25 » y apparaît :

$$\begin{aligned}f(x)=-25 &\iff 9(x+1)^2-25=-25\\ &\iff 9(x+1)^2=0\\ &\iff (x+1)^2=0\\ &\iff x+1=0\\ &\iff x=-1.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x)=-25$ est donc : $S=\{-1\}$.

c. Pour résoudre l'équation $f(x)=-16$, nous allons prendre la forme développée de $f(x)$ car « -16 » y apparaît :

$$\begin{aligned}f(x)=-16 &\iff 9x^2+18x-16=-16\\ &\iff 9x^2+18x=0\\ &\iff 9x(x+2)=0\\ &\iff 9x=0 \text{ ou } x+2=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=-2.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x)=-16$ est donc : $S=\{-2\ ;\ 0\}$.

d. Pour résoudre l'équation $f(x) = 25$, nous allons prendre la forme canonique. En effet, la forme factorisée ne sert qu'à résoudre les équations de la forme $f(x) = 0$, et la forme développée nous donne une équation de la forme $9x^2 + 18x - 16 = 25$, c'est-à-dire $9x^2 + 18x - 41 = 0$, que l'on ne peut pas résoudre car $9x^2 + 18x - 41$ ne peut pas se factoriser simplement (pas de facteur commun, et ce n'est pas une identité remarquable).

$$\begin{aligned}
f(x) = 25 &\iff 9(x+1)^2 - 25 = 25 \\
&\iff 9(x+1)^2 = 50 \\
&\iff (x+1)^2 = \frac{50}{9} \\
&\iff x+1 = -\sqrt{\frac{50}{9}} \text{ ou } x+1 = \sqrt{\frac{50}{9}} \\
&\iff x+1 = -\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}} \text{ ou } x+1 = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}} \\
&\iff x+1 = -\frac{5\sqrt{2}}{3} \text{ ou } x+1 = \frac{5\sqrt{2}}{3} \\
&\iff x = -1 - \frac{5\sqrt{2}}{3} \text{ ou } x = -1 + \frac{5\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 25$ est donc : $S = \left\{-1 - \frac{5\sqrt{2}}{3}\ ;\ -1 + \frac{5\sqrt{2}}{3}\right\}$.

Corrigé de l'exercice 10.5 page 295

1
$$\begin{aligned}
f(x) &= -5(x+3)(4-2x) \\
&= -5(4x - 2x^2 + 12 - 6x) \\
&= -5(-2x^2 - 2x + 12)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 10x^2 + 10x - 60}$$

2
$$\begin{aligned}
f(x) &= 2(x+3)^2 - 7 \\
&= 2(x^2 + 6x + 9) - 7 \\
&= 2x^2 + 12x + 18 - 7
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 2x^2 + 12x + 11}$$

3
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(x-6)^2 + \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36) + \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}x^2 - 6x + 18 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{39}{2}}$$

4 $f(x) = 3(x-8)(x+1)$

$$= 3(x^2 + x - 8x - 8)$$

$$= 3(x^2 - 7x - 8)$$

$$\boxed{f(x) = 3x^2 - 21x - 24}$$

Corrigé de l'exercice 10.6 page 296

1 On peut écrire : $f(x) = -4(x+3)^2 + 9$, qui est la forme canonique d'une fonction carré, avec $a = -4$, $\alpha = -3$ et $\beta = 9$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	9	$\searrow$

2
$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff 9 = 4(x+3)^2 \\
&\iff \sqrt{9} = \sqrt{4(x+3)^2} \text{ ou } -\sqrt{9} = \sqrt{4(x+3)^2} \\
&\iff 2(x+3) = 3 \text{ ou } 2(x+3) = -3 \\
&\iff x+3 = \frac{3}{2} \text{ ou } x+3 = -\frac{3}{2} \\
&\iff x = \frac{3}{2} - 3 \text{ ou } x = -\frac{3}{2} - 3 \\
&\iff x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$ est donc : $S = \left\{-\frac{9}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\right\}$.

Remarque 81

On aurait aussi pu factoriser $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff 9 - 4(x+3)^2 = 0 \\
&\iff 3^2 - [2(x+3)]^2 = 0 \\
&\iff [3 - 2(x+3)][3 + 2(x+3)] = 0 \\
&\iff (3 - 2x - 6)(3 + 2x + 6) = 0 \\
&\iff (-3 - 2x)(9 + 2x) = 0 \\
&\iff -3 - 2x = 0 \text{ ou } 9 + 2x = 0 \\
&\iff x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

3 $f(x) \geqslant -16 \iff -4(x+3)^2+9 \geqslant -16$

$$\begin{aligned} &\iff -4(x+3)^2+25 \geqslant 0 \\ &\iff 25-4(x+3)^2 \geqslant \\ &\iff 5^2-\left[2(x+3)\right]^2 \geqslant 0 \\ &\iff \left[5-2(x+3)\right]\left[5+2(x+3)\right] \geqslant 0 \\ &\iff (5-2x-6)(5+2x+6) \geqslant 0 \\ &\iff (-2x-1)(2x+11) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre cette dernière inéquation, on dresse le tableau de signes de l'expression $(-2x-1)(2x+11)$.

x	$-\infty$		$-\frac{11}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+11$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x-1)(2x+11)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geqslant -16$ est : $S = \left[-\dfrac{11}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right]$.

Corrigé de l'exercice 10.7 page 296

1 **a.** $(\alpha_1\,;\beta_1)$ sont les coordonnées du sommet de la parabole qui représente graphiquement f ; donc $\alpha_1 = -2$ et $\beta_1 = 3$.

b. On peut constater que le point de coordonnées $(-1\,;1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.
Ainsi, $f(-1) = 1$, c'est-à-dire $a_1(-1+2)^2+3 = 1$ (en remplaçant x par -1, α_1 par -2 et β_1 par 3.
On en déduit alors que $a_1 = 1-3 = -2$, et donc :

$$\boxed{f(x) = -2(x+2)^2+3}$$

2 **a.** $\alpha_2 = 1$ et $\beta_2 = -2$ car le sommet de la parabole représentant g a pour coordonnées $(1\,;-2)$.

b. Les deux points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-1\,;0)$ et $(3\,;0)$.

On en déduit alors que :

$$g(-1) = 0, \qquad \text{soit :} \qquad a_2(-1-1)^2-2 = 0,$$

donc :

$$4a_2 = 2$$

soit :

$$a_2 = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2-2}$$

Corrigé de l'exercice 10.8 page 297

Posons $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Si la parabole admet pour sommet S $(-3\,;8)$ alors $\alpha = -3$ et $\beta = 8$, donc :

$$f(x) = a(x+3)^2 + 8.$$

De plus, si elle passe par le point A $(2\,;0)$ alors

$$f(2) = 0 \qquad \text{donc} \qquad a(2+3)^2 + 8 = 0 \iff a = -\frac{8}{25}.$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = -\frac{8}{25}(x+3)^2 + 8}$$

11

Pourcentages et statistiques

Plan du chapitre

I - Pourcentages et proportions

I . 1 - Partie d'un tout

Propriété 57

On considère un ensemble constitué de n éléments.
Dans cet ensemble, on considère un sous-groupe A constitué de x éléments.

Le pourcentage représentant x par rapport à n est :

$$\frac{x}{n} \times 100.$$

Exemple 77

Si une ville est constituée de 150 000 habitants et qu'un quartier de cette ville compte 30 000 habitants, alors le pourcentage correspondant est :

$$\frac{30\,000}{150\,000} \times 100 = 20\,\%.$$

Il y a donc 20 % des habitants de cette ville qui habitent dans ce quartier.

I . 2 - Partie d'une partie

Propriété 58

On considère un ensemble E constitué de n éléments.
Dans cet ensemble, on considère un sous-groupe A constitué de $x_A\%$ éléments de E, et un sous-groupe B de A constitué de $x_B\%$ éléments de A.

Le pourcentage d'éléments dans B par rapport à l'ensemble E est alors :

$$x_A \times x_B\%.$$

Exemple 78

Dans une ville, 20 % des habitants résident dans un quartier Q.
Dans ce quartier, 40 % ont un salaire inférieur à 1 100€. Cela représente :

$$\frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{800}{10\,000} = \frac{8}{100} = 8\,\%$$

de la ville.

II - Évolutions

II . 1 - Évolution simple

Propriété 59

Soit x un nombre.

1. Si x *augmente* de $t\%$ alors la valeur finale est égale à $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)x$.
2. Si x *diminue* de $t\%$ alors la valeur finale est égale à $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)x$.

Exemple 79

1. Un tee-shirt « Adada » est normalement vendu à 150 €dans la boutique de monsieur Arnac. Il décide d'augmenter ce prix de 20 %. Le prix final sera alors :

$$\left(\frac{1+20}{100}\right)\times 150 = 1,2\times 150 = 180\text{ €}.$$

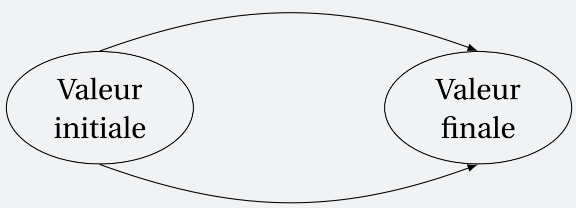
2. Dans la boutique de monsieur Bonepouar, ce même tee-shirt est à 110 €. Il décide de le solder à −30 %. Le prix final sera alors :

$$\left(1-\frac{30}{100}\right)\times 110 = 0,7\times 110 = 77\text{ €}.$$

Définition 56

Lors d'une évolution de $t\%$ (avec $t>0$ ou $t<0$), le nombre $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$ es appelé le *coefficient multiplicateur* (en abrégé : CM).

évolution de $t\%$



$$\times\left(1+\frac{t}{100}\right) = \text{CM}$$

Remarque 82

On dit ici que l'évolution est *relative* car elle dépend de la valeur initiale.

Propriété 60

Soient deux valeurs V_1 et V_2, et soit CM le coefficient multiplicateur représentant l'évolution de V_1 à V_2. Alors,

$$\mathrm{CM} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Exemple 80

Un article est passé de 150 € à 120 €. Le coefficient multiplicateur est donc :

$$\mathrm{CM} = \frac{120}{150} = 0,8.$$

Remarque 83

Si $0 < \mathrm{CM} < 1$ alors l'évolution est une réduction.
Si $\mathrm{CM} > 1$ alors l'évolution est une augmentation.

II . 2 - Évolutions successives

Propriété 61

Faire deux évolutions successives de t_1% et t_2% revient à multiplier par $\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\left(1+\frac{t_2}{100}\right)$.

Exemple 81

1. Un article vaut 150 €. Son prix diminue de 10 % puis augmente de 10 %. Le prix final est alors :
$$150 \times \left(1-\frac{10}{100}\right) \times \left(1+\frac{10}{100}\right) = 150 \times 0,9 \times 1,1 = 148,50 \text{ €}.$$
2. Un article coûte 140 €. Son prix subit une première hausse de 5 %, puis une seconde hausse de 5 %. Le prix final est alors :
$$140 \times \left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = 140 \times 1,05^2 = 154,35 \text{ €}.$$

Remarque 84

Cette propriété revient à dire que lors de deux évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient :

$$\mathrm{CM}_{\text{global}} = \mathrm{CM}_1 \times \mathrm{CM}_2.$$

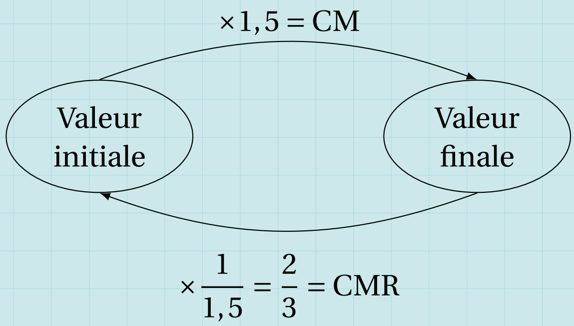
II . 3 - Évolution réciproque

Définition 57

Soient deux valeurs V_1 et V_2, et soit CM le coefficient multiplicateur représentant l'évolution de V_1 à V_2. Alors, le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$\text{CMR} = \frac{1}{\text{CM}} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Exemple 82



III - Indicateurs d'une série statistique

III . 1 - Moyenne pondérée

Définition 58

On considère la série statistique représentée par le tableau ci-dessous :

Caractères x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
Effectifs n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_p

La **moyenne pondérée** de cette série est :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}.$$

Exemple 83

Jean-Simon a obtenu en mathématiques les notes suivantes au cours du deuxième trimestre :

Notes	18	12	8	14
Coefficients	1	2	3	2

Sa moyenne en mathématiques au deuxième trimestre est donc :

$$\overline{x} = \frac{18 \times 1 + 12 \times 2 + 8 \times 3 + 14 \times 2}{1 + 2 + 3 + 2} = 11,75.$$

Propriété 62

On considère deux séries statistiques S_1 et S_2 :

- S_1 a pour effectif total N_1, et a pour moyenne $\overline{x}_1$;
- S_2 a pour effectif total N_2, et a pour moyenne $\overline{x}_2$.

Alors, la moyenne de la série constituée des deux séries S_1 et S_2 a pour moyenne :

$$\overline{x} = \frac{N_1 \times \overline{x}_1 + N_2 \times \overline{x}_2}{N_1 + N_2}.$$

Exemple 84

Monsieur Lessadic fait un même contrôle à ses deux classes de Seconde.

- En Seconde A, la moyenne est égale à 11,2 sur un effectif total de 25 élèves.
- En Seconde B, la moyenne est égale à 7,8 sur un effectif total de 32 élèves.

La moyenne générale sur ces deux classes à ce contrôle est donc :

$$\overline{x} = \frac{25 \times 11,2 + 32 \times 7,8}{25 + 32} \approx 9,3.$$

Propriété 63 (linéarité de la moyenne)

On considère une série statistique $S = \left\{(x_i\,;n_i)\right\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$, de moyenne $\overline{x}$.
Alors, la moyenne de la série $S' = \left\{(ax_i + b\,;n_i)\right\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ (obtenue en multipliant par a toutes les valeurs de la série S et en leur ajoutant b) est :

$$\overline{x}' = a\overline{x} + b.$$

Exemple 85

Monsieur Lessadic constate que la moyenne générale de ses deux classes de Seconde est égale à 9,3. Il souhaite que cette moyenne soit égale à 10. Il a plusieurs possibilités, dont :

- 1re possibilité : il ajoute 0,7 point à chaque note ; dans ce cas, il obtient une série $S' = \left\{(x_i + 0,7\,;n_i)\right\}$ et la moyenne de cette nouvelle série est alors :

$$\overline{x}' = \overline{x} + 0,7 = 9,3 + 0,7 = 10.$$

- 2e possibilité : il multiplie toutes les notes par $\dfrac{10}{9,3}$. Il obtient donc une série $S' = \left\{\left(\frac{10}{9,3}x_i\,;n_i\right)\right\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dont la moyenne est :

$$\overline{x}' = \frac{10}{9,3} \times \overline{x} = \frac{10}{9,3} \times 9,3 = 10.$$

III . 2 - Écart interquartile

Définition 59 (quartiles)

- On appelle **premier quartile** d'une série statistique, et on note Q_1, la valeur du caractère pour lequel 25 % des valeurs lui sont inférieures.
- On appelle **troisième quartile** d'une série statistique, et on note Q_3, la valeur du caractère pour lequel 75 % des valeurs lui sont inférieures.
- On appelle **écart interquartile** le nombre $Q_3 - Q_1$.

Exemple 86

On considère la série statistique suivante, représentant les diverses notes d'une classe lors d'un contrôle noté sur 10 :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	1	1	2	5	3	8	6	5	3	1	1
E.c.c.	1	2	4	9	12	20	26	31	34	35	36

25 % de l'effectif total

75 % de l'effectif total sont dépassés

- $Q_1 = 3$ car pour la note « 3 », on a atteint un effectif cumulé croissant (E.c.c.) de 9, qui est le quart (25 %) de l'effectif total (36).
- $Q_3 = 7$ car pour la note « 7 », on a dépassé les $\dfrac{3}{4}$ (les 75 %) de l'effectif total.
- L'écart interquartile est donc $Q_3 - Q_1 = 7 - 3 = 4$.

III . 3 - Variance et écart-type

Définition 60

On considère une série statistique $S = \left\{(x_i\,;n_i)\right\}_{1\leqslant i\leqslant p}$, de moyenne $\overline{x}$.

- La **variance** de la série est la valeur V telle que :

$$V = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\cdots+n_p}.$$

- L'**écart-type** de la série est la valeur σ telle que :

$$\sigma = \sqrt{V}.$$

Exemple 87

On considère la série représentée par le tableau suivant :

n_i	x_i
6	7
3	8
4	9
3	10

Sa moyenne est $\overline{x} = 8{,}25$.

On considère alors la série dont les effectifs sont les mêmes mais où les valeurs sont égales à $(x_i - \overline{x})^2$:

n_i	$(x_i - \overline{x})^2$
6	1,5625
3	0,0625
4	0,5625
3	3,0625

La variance est la moyenne de cette nouvelle série :

$$V = \frac{6 \times 1{,}5625 + \cdots + 3 \times 3{,}0625}{6+3+4+3} = 1{,}3125.$$

L'écart-type est donc :

$$\sigma = \sqrt{1{,}3125} \approx 1{,}15.$$

Pourcentages

Exercice 11.1 (calculs de pourcentages)

Le tableau suivant donne la répartition des élèves d'une classe de Seconde suivant leur genre et le type de leur résidence.

genres \ résidence	Appartement	Maison	Total
Masculin	5	15	20
Féminin	4	12	16
Total	9	27	36

Les résultats seront arrondis au centième si nécessaire.

1. À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves garçons vivant en appartement par rapport à l'ensemble de la classe ?
2. À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves garçons vivant en appartement par rapport à l'ensemble des garçons ?
3. À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves filles vivant en maison par rapport à l'ensemble des élèves vivant en maison ?

Solution page 322

Exercice 11.2 (taux d'évolution simples)

Calculer, dans chacun des cas suivants, le taux d'évolution pour passer de la valeur x_1 à la valeur x_2.

1. $x_1 = 20$ et $x_2 = 130$.
2. $x_1 = 15$ et $x_2 = 70$.
3. $x_1 = 150$ et $x_2 = 100$.
4. $x_1 = 200$ et $x_2 = 10$.

Solution page 322

Exercice 11.3 (taux d'évolution simples)

1. Un article coûtant 20 € en temps normal est en solde à « −15 % ». Calculer le prix de cet article pendant ces soldes.
2. Un article vaut, après réduction de 15 %, 21,25 €. Quel est le prix de cet article avant réduction ?

Solution page 323

Exercice 11.4 (évolution réciproque)

Une valeur subit une évolution de 30 %.
Quelle doit être l'évolution suivante pour revenir à la valeur initiale ?

Solution page 323

Exercice 11.5 (prix du timbre)

Le coût d'un timbre poste pour une lettre normale a été de :

1990	1993	1994	2021
0,34 €	0,38 €	0,43 €	0,95 (*)

(*) tarif pour un écopli (tarif le plus bas)

1. Quel est le pourcentage d'augmentation du prix du timbre entre 1990 et 1993 ? Entre 1993 et 1994 ? Entre 1990 et 2021 ?
2. À l'aide d'un tableur ou de Python, par exemple, trouver le pourcentage moyen annuel d'évolution entre 1990 et 2021.

Solution page 323

Exercice 11.6 (évolutions successives)

Le prix d'un article subit une hausse de 20 %, puis une baisse de 10 %.
Quel est le taux d'évolution global ?

Solution page 324

Exercice 11.7 (hausse et baisse successives)

Une valeur est augmentée de t %, puis diminuée de t %, où $t > 0$.
Existe-t-il une valeur de t telle que le nombre final soit égal au nombre initial ?

Solution page 324

Exercice 11.8 (retour à l'état initial)

Une valeur est augmentée de t %, puis diminuée de t' %, où $t > 0$ et $t' > 0$.

1. Exprimer t' en fonction de t de sorte que le nombre final soit égal au nombre initial.
2. Calculer alors t' quand $t = 20$.

Solution page 325

Exercice 11.9 (taux d'évolution moyen)

On considère deux évolutions successives t_1 % et t_2 %.
On appelle *taux d'évolution moyen* le pourcentage t % tel que, si l'on effectue deux évolutions successives de t %, on obtient la même évolution globale.

Calculer le taux d'évolution moyen lorsque $t_1 = 6$ % et $t_2 = 10$ %.

Solution page 325

Exercice 11.10 (taux d'évolution moyen, le retour)

Une grande entreprise souhaite voir le prix de ses prestations augmenter de 30 % sur 5 ans. Les journalistes disent alors que cela fera une augmentation annuelle moyenne de 6 %. Ont-ils raison ?

Solution page 326

Exercice 11.11 (un peu de tout...)

1 Le prix initial d'un parfum est 80 €. Il bénéficie d'une baisse de 70 % lors du Black Friday.
À quel prix sera vendu ce parfum ce jour-là ?

2 En 2017, 224 femmes ont été élues députées à l'Assemblée Nationale française. Elles représentaient $38,8\,\%$ du nombre total de députés.
Quel était le nombre de députés à l'Assemblée Nationale ?

3 En 2015, la ville de Porto-Vecchio, en Corse, comptait 11 826 habitants, en augmentation de $7,17\,\%$ par rapport à 2010.
Combien cette ville comptait-elle d'habitants en 2010 ?

4 Fin 2017, il y avait 173 000 sites de e-commerce actifs en France.
Fin 2018, il y en avait 182 000.
Calculer le taux d'évolution (en pourcentage) du nombre de sites de e-commerce entre ces deux dates (donner une valeur approchée au dixième).

5 Une commune organise chaque année une course à pieds dans ses rues. En 2017, le nombre de participants a augmenté de 20 % par rapport à l'année précédente, mais en 2018, il a baissé de 12 % par rapport à 2017.

- **a.** Calculer le taux d'évolution global, en pourcentage, du nombre de participants entre 2016 et 2018.
- **b.** Quelle doit être l'évolution (en pourcentage) du nombre de coureurs de 2018 à 2019 pour que l'évolution globale de 2017 à 2019 soit $+0,32\%$?

6 Quel est le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 43 % ?

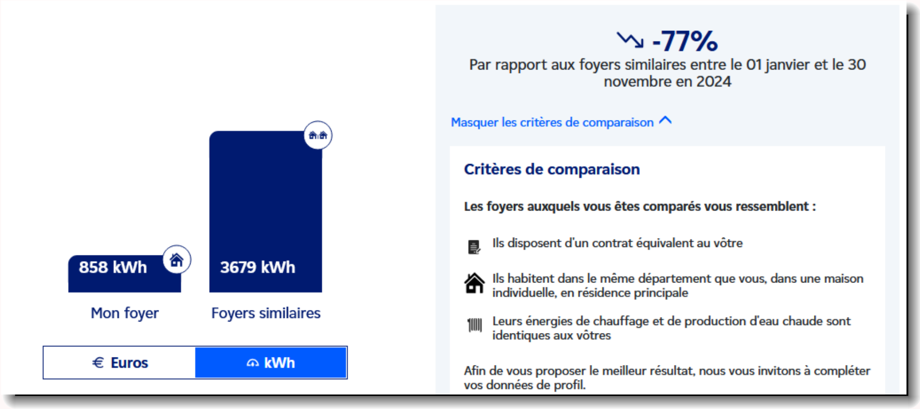
7 Une entreprise possède 34 % de cadres, dont 85 % parlent couramment anglais.
Quel est dans l'entreprise le pourcentage de salariés qui sont des cadres parlant couramment anglais ?

Solution page 326

Dans la vraie vie...

Exercice 11.12 (consommation d'électricité)

1 La capture d'écran suivante a été faite sur le site internet d'un fournisseur d'électricité :



Donnez le calcul ayant permis de trouver « 77 % ».

2 La capture d'écran suivante a été faite sur le même site internet en cliquant sur l'onglet « Euros ».

Vérifiez que le pourcentage affiché est correct.

3 Sachant que ces deux pourcentages portent sur la même période, que vous inspire cette différence de pourcentages ?

4 Le client voit ses deux captures d'écran :

Quelle est l'évolution du montant de sa facture entre début 2022 et fin 2024 ?(en pourcentage)

Solution page 328

Indicateurs d'une série statistique

Exercice 11.13 (moyenne, e.c.c. et médiane)

Le tableau ci-dessous donne la répartition des diverses notes d'une classe de 35 élèves à un contrôle.

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	Total
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	35

1. Recopier et compléter ce tableau en calculant les fréquences à 10^{-3} près, et les effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Donner la médiane de la série statistique.
3. Calculer la moyenne de la série statistique et comparer à la médiane.

Solution page 329

Exercice 11.14 (moyenne, e.c.c. et médiane avec classes)

Un relevé des durées des communications téléphoniques effectué dans un central téléphonique a fourni les informations consignées dans le tableau suivant (l'unité de durée est la minute) :

Intervalles de durée	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$
Effectifs	14	16	25	15	17	13

1. Calculer la durée moyenne d'un appel.
2. Dans quel intervalle se trouve la médiane.

Solution page 329

Exercice 11.15 (calculs avec classes)

On considère la série statistique suivante :

Classes	$[0;3[$	$[3;6[$	$[6;12[$	$[12;20[$	$[20;25]$
Effectifs	10	15	10	20	25

1. Calculer les effectifs cumulés croissants.
   En déduire l'intervalle dans lequel se trouve la médiane de la série statistique.
2. En assimilant chaque classe à son centre, calculer une valeur approchée de la moyenne de la série statistique.

Solution page 330

Exercice 11.16 (notes de deux classes)

Un professeur a en charge deux classes de Seconde. Il souhaite comparer les résultats de ces deux classes sur le dernier contrôle à l'aide des tableaux suivants :

NOTES DE LA SECONDE 1

Notes (x_i)	2	5	6	7	8	9	11	13	14	15	18
Effectifs (n_i)	1	1	2	5	3	6	5	6	1	1	1

NOTES DE LA SECONDE 2

Notes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs (n_i)	1	1	1	3	2	3	4	3	5	4	3	1	1	1	1	1

1. Calculer la moyenne des deux classes.
2. Calculer la variance, puis l'écart-type, des deux classes.
3. Déterminer la médiane ainsi que l'écart inter-quartile.
4. Comparer alors les résultats de ces deux classes.

Solution page 330

Exercice 11.17 (salaires dans deux entreprises)

Nous avons observé les salaires nets dans deux entreprises concurrentes, et nous les avons réunis dans les tableaux suivants :

ENTREPRISE A

Classes	$[1\,150;1\,250[$	$[1\,250;1\,350[$	$[1\,350;1\,450[$	$[1\,450;1\,550[$
Effectifs	18	27	52	48

Classes	$[1\,550;1\,650[$	$[1\,650;1\,750[$	$[1\,750;1\,850[$	$[1\,850;2\,000]$
Effectifs	36	25	20	8

ENTREPRISE B

Classes	$[\ 900;1\,000[$	$[1\,000;1\,100[$	$[1\,100;1\,200[$	$[1\,200;1\,300[$
Effectifs	10	15	22	34

Classes	$[1\,300;1\,400[$	$[1\,400;1\,500[$	$[1\,500;1\,600[$	$[1\,600;1\,700[$
Effectifs	38	42	58	30

Classes	$[1\,700;1\,800[$	$[1\,800;1\,900[$	$[1\,900;2\,000[$	$[2\,000;2\,100]$
Effectifs	22	14	10	4

Déterminer le couple $(\overline{x};\sigma)$ pour chacune des deux entreprises.

Solution page 331

Exercice 11.18 (influence d'un ajout dans une série statistique)

On considère une série statistique de n données $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
On note $\overline{x}$ sa moyenne.

On ajoute une donnée x à cette série, et on note $m(x)$ la nouvelle moyenne.

1. Montrer que $m(x) = \dfrac{x + n\overline{x}}{n+1}$.
2. Quelle valeur de x faut-il prendre pour que $m(x) = \overline{x}$?

Solution page 332

Exercice 11.19 (de l'algèbre dans les statistiques)

1. Hugo a obtenu au 2^e trimestre une moyenne de 8/20 aux 3 premiers contrôles (dont les coefficients respectifs sont 0,5, 2 et 1). Il ne reste qu'un contrôle avant l'arrêt des notes (dont le coefficient sera égal à 2).
   Combien faut-il qu'il obtienne au minimum pour obtenir 10/20 de moyenne au 2^e trimestre ?
2. M. Zébulon enseigne les mathématiques aux classes Seconde 1 (30 élèves) et Seconde 2 (26 élèves). Il propose systématiquement les mêmes sujets de devoirs. Sur celui portant sur les statistiques, la Seconde 1 a obtenu une moyenne de 14,5/20.
   a. Quelle doit être la moyenne de la Seconde 2 pour que la moyenne de ce contrôle (sur les deux classes) soit supérieure à 12/20 ?
   b. Lors des précédents devoirs, la moyenne de la Seconde 2 était inférieure à celle de la Seconde 1 de 20 %.
   Peut-il espérer atteindre 12/20 de moyenne à ce contrôle sur les deux classes ?
3. Mme Zébulon enseigne aussi les mathématiques dans le même lycée que son mari. Elle a la Seconde 3 dans laquelle se trouve Kévin Zépadbol à qui elle propose, avec un sourire narquois, l'énigme suivante :
   « Tu as eu 5/20 (coefficient 2) et 8/20 (coefficient 1) aux deux premiers devoirs, et tu attends ta note pour le dernier devoir coefficient 2. Sur ces trois devoirs, l'écart-type de tes notes est à peu près égal à 1,643. Si tu arrives à trouver la note que tu as obtenue au dernier contrôle, je la triple. »
   Saurez-vous trouver la note de Kévin ? (il faudra dans cette question faire preuve d'initiative).

Solution page 332

Exercice 11.20 (moyenne de deux groupes)

Un club sportif est composé de deux groupes : le groupe A, composé de 135 personnes, et le groupe B, composé de 98.
Lors d'une compétition, les deux groupes participent à une course. Le temps moyen du groupe A est de 10 minutes et 27 secondes. Celui du groupe B est de 9 minutes et 2 secondes.

Quel est le temps moyen du club ?

Solution page 334

Exercice 11.21

Dans une village, on a relevé le nombre d'enfants par habitation, et on a mis les résultats dans le tableau ci-dessous :

Nombres d'enfants x_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs n_i	230	125	142	97	24	2
Effectifs cumulés						
$(x_i - \overline{x})^2$						

1. Compléter la troisième ligne du tableau (celle des effectifs cumulés).
   En déduire la valeur de la médiane M_e et des quartiles Q_1 et Q_3.
2. Calculer le nombre moyen d'enfants (noté $\overline{x}$) par habitation dans ce village.
3. Compléter alors la dernière ligne du tableau.
   Calculer ensuite la variance V, puis l'écart-type σ.
4. Calculer le pourcentage d'habitations ayant un nombre d'enfants compris dans l'intervalle $\left[\overline{x} - \sigma ; \overline{x} + \sigma\right]$.

Solution page 334

Exercice 11.22

Dans une entreprise, on a relevé les salaires des employés, que l'on a répertoriés dans le tableau ci-dessous en les regroupant par classes :

Salaires (en €)	$[0;950[$	$[950;1\,250[$	$[1\,250;1\,400[$	$[1\,400;1\,700[$	$[1\,700;2\,400]$
Centre des classes x_i					
Effectifs n_i	230	320	550	480	420
Effectifs cumulés					
$(x_i - \overline{x})^2$					

1. Dans quel intervalle se trouve la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 ?
2. Calculer le salaire moyen $\overline{x}$ de cette entreprise.
3. Calculer la variance et l'écart-type des salaires.

Solution page 335

Exercice 11.23 (propriété de la moyenne)

1. Les élèves de deux classes A et B, d'effectifs respectifs 35 et 27 élèves, ont fait le même devoir. La moyenne de la classe A est $10,7$ et celle de la classe B est $12,3$.
   Quelle est la moyenne de ce devoir sur les deux classes A et B ?
2. Deux classes C et D ont fait le même devoir. La moyenne de la classe C (dans laquelle il y avait 30 élèves) est 8,9 et celle de la classe D est $15,7$.
   Sachant que la moyenne des deux classes est environ égale à 12, combien d'élèves de la classe D ont fait ce devoir ?

Solution page 336

Exercice 11.24 (vers une équation)

Un groupe de touristes est séparé en deux pour faire des achats.
Le premier groupe, constitué de 25 personnes, a dépensé en moyenne, 50 € par personne.
Le second a dépensé en moyenne 80 € par personne.
La dépense moyenne du groupe par personne est 67,50 €.

Combien de personnes constituent le second groupe ?

Solution page 337

Corrigé de l'exercice 11.1 page 313

1 *À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves garçons vivant en appartement par rapport à l'ensemble de la classe ?*

Il y a 5 garçons qui vivent en appartement sur les 36 élèves de la classe. Cela représente :

$$\frac{5}{36} \times 100 \approx 13,89\,\%.$$

2 *À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves garçons vivant en appartement par rapport à l'ensemble des garçons ?*

Il y a 5 garçons qui vivent en appartement sur les 20 garçons. Cela représente :

$$\frac{5}{20} \times 100 = 25\,\%.$$

Remarque 86

Par rapport à 20, 5 représente le quart, donc 25 %. C'est un pourcentage à connaître, au même titre que la moitié correspond à 50 %.

3 *À quel pourcentage correspond le nombre d'élèves filles vivant en maison par rapport à l'ensemble des élèves vivant en maison ?*

Il y a 12 filles qui vivent en maison sur les 27 élèves vivant en maison. Cela représente :

$$\frac{12}{27} \times 100 \approx 44,44\,\%.$$

Corrigé de l'exercice 11.2 page 313

1 $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \dfrac{130 - 20}{20} \times 100 = \dfrac{110}{20} \times 100 = 550.$

Le taux d'évolution est donc égal à 550 %.

2 $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \dfrac{70 - 15}{15} \times 100 = \dfrac{55}{15} \times 100 \approx 366,67.$

Le taux d'évolution est donc égal à 366,67 %.

3 $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \dfrac{100 - 150}{150} \times 100 = \dfrac{-50}{150} \times 100 \approx -33,33.$

Le taux d'évolution est donc égal à −33,33 %.

4 $\dfrac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \dfrac{10 - 200}{200} \times 100 = \dfrac{-190}{200} \times 100 = -95.$

Le taux d'évolution est donc égal à −95 %.

Corrigé de l'exercice 11.3 page 313

1 $20 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 20 \times 0,8 = 16.$

L'article vaut donc 16 € pendant ces soldes.

2 $21,25 \div \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 25.$

L'article vaut donc, avant réduction, 25 €.

Corrigé de l'exercice 11.4 page 314

Le CM correspondant à 30 % est égal à 1,3. Le CM inverse est donc égal à :

$$\frac{1}{1,3} \approx 0,77\,,$$

ce qui correspond à une évolution de −23 %.

L'évolution doit donc être de −23 % pour revenir à la valeur initiale.

Corrigé de l'exercice 11.5 page 314

1

- Entre 1990 et 1993, le prix du timbre est passé de 0,34 € à 0,38 €. Le pourcentage d'évolution est donc :
$$\frac{0,38 - 0,34}{0,34} \times 100 \approx 11,76\,\%.$$
- Entre 1993 et 1994, le prix du timbre est passé de 0,38 € à 0,43 €. Le pourcentage d'évolution est donc :
$$\frac{0,43 - 0,38}{0,38} \times 100 \approx 13,16\,\%.$$
- Entre 1990 et 2021, le prix du timbre est passé de 0,34 € à 0,95 €. Le pourcentage d'évolution est donc :
$$\frac{0,95 - 0,34}{0,34} \times 100 \approx 179,4\,\%.$$

2 Notons t le pourcentage moyen annuel d'évolution entre 1990 et 2021, soit sur 31 ans. Il faut alors que :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{31} \approx 1 + \frac{179,4}{100} \approx 2,794.$$

(le coefficient multiplicateur global sur 31 ans doit être le même que celui qui nous permet de voir l'évolution de 1990 à 2021).

On pourrait écrire une boucle en Python calculant les valeurs successives de $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{31}$ pour t variant de 1 à 10 par exemple :

```
for t in range(10):
    print( t, (1+t/100)**31 )
```

```
0 1.0
1 1.3613274044862351
2 1.847588815785422
3 2.500080345325352
4 3.3731334104286432
5 4.538039493908201
6 6.088100643288055
7 8.145112895648387
8 10.867669440199327
9 14.461769531353092
```

On peut alors voir que $3 < t < 4$. On peut ensuite calculer les valeurs de $\left(1+\frac{t}{100}\right)^{31}$ pour $3+\frac{t}{100}$, pour t variant de 0 à 99 :

```python
for t in range(100):
    print( 3+t/100, (1+(3+t/100)/100)**31 )
```

```
...
3.36 2.7856562290189264
3.37 2.7940231777974414
3.38 2.8024144443710957
...
```

On constate alors que le pourcentage moyen annuel d'augmentation est $t \approx 3,37$.

Corrigé de l'exercice 11.6 page 314

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 20 % est égal à 1,2 ; celui correspondant à une baisse de 10 % est égal à 0,9.
Ainsi, le coefficient multiplicateur global est égal à $1,2 \times 0,9$, soit 1,08, ce qui correspond à une hausse de 8 %.

Le taux d'évolution global est donc égal à 8 %.

Corrigé de l'exercice 11.7 page 314

Le coefficient multiplicateur global (CMG) est égal à $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1-\dfrac{t}{100}\right) = 1-\dfrac{t^2}{10\,000}$.
Pour que le nombre final soit égal au nombre initial, il faudrait que le CMG soit égal à 1, ce qui ne peut pas être le cas car $\dfrac{t^2}{10\,000} \neq 0$.

Il n'existe donc aucun pourcentage correspondant à ce que l'on veut.

Corrigé de l'exercice 11.8 page 314

1 Le coefficient multiplicateur global (CMG) est égal à :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t'}{100}\right).$$

On souhaite que le CMG soit égal à 1 d'où :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t'}{100}\right)=1 \Leftrightarrow 1-\frac{t'}{100} &= \frac{1}{1+\frac{t}{100}}\\
\Leftrightarrow 1-\frac{t'}{100} &= \frac{100}{100+t}\\
\Leftrightarrow -\frac{t'}{100} &= \frac{100}{100+t}-1\\
\Leftrightarrow \frac{t'}{100} &= 1-\frac{100}{100+t}\\
\Leftrightarrow t' &= 100-\frac{10\,000}{100+t}\\
\Leftrightarrow t' &= \frac{10\,000+100t-10\,000}{100+t}\\
\Leftrightarrow & \boxed{t'=\frac{100t}{100+t}}
\end{aligned}$$

2 Si $t=20$, alors $t'=\dfrac{100\times 20}{100+20}=\dfrac{2\,000}{120}=\dfrac{200}{12}=\dfrac{50}{3}\approx 16,67$.

Corrigé de l'exercice 11.9 page 314

Le CMG est égal ici à $1,06\times 1,1=1,116$.

Si les deux augmentations sont égales à $t\,\%$, alors le CMG est égal à $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2$.

Ainsi, on veut :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{t}{100}\right)^2=1,116 \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} &= \sqrt{1,116}\\
\Longleftrightarrow \frac{t}{100} &= \sqrt{1,116}-1\\
\Longleftrightarrow t &= 100\left(\sqrt{1,116}-1\right)\approx 5,64.
\end{aligned}$$

<u>Le taux moyen d'évolution est donc égal ici à 5,64 %.</u>

Corrigé de l'exercice 11.10 page 315

Prenons un tarif au hasard : $x = 100$.
S'il subit 5 hausses successives de 6 %, alors le CMG est égal à :

$$1,06^5 = 1,338\,225\,578.$$

À la fin, le tarif sera égal à :

$$100 \times 1,338\,225\,578 = 133,822\,557\,8.$$

Or,

$$\frac{133,822\,557\,8 - 100}{100} \times 100 = 33,8225578.$$

Donc l'augmentation sera de 33,82 %, et non 30 %.

Les journalistes ont donc tort de diviser le pourcentage total par le nombre d'années.

Corrigé de l'exercice 11.11 page 315

1 **Le prix initial d'un parfum est 80 €. Il bénéficie d'une baisse de** 70 % **lors du Black Friday.**

Cela signifie que ce parfum est vendu à un prix égal à 30 % du prix initial, soit :

$$\frac{30}{100} \times 80 = 0,3 \times 80 = 24\text{ €}.$$

2 **En 2017, 224 femmes ont été élues députées à l'Assemblée Nationale française. Elles représentaient** 38,8 % **du nombre total de députés.**

Notons x le nombre de députés cherché.

On sait que :

$$\frac{38,8}{100} \times x = 224 \qquad \text{soit} \quad 0,388x = 224.$$

Ainsi,

$$x = \frac{224}{0,338} = 577.$$

Il y avait donc 577 députés à l'Assemblée Nationale (ce qui est toujours le cas).

3 **En 2015, la ville de Porto-Vecchio, en Corse, comptait 11 826 habitants, en augmentation de** 7,17 % **par rapport à 2010.**

Notons c le nombre d'habitants de la ville en 2010, avant l'augmentation de 7,17 %. Alors,

$$\left(1 + \frac{7,17}{100}\right) x = 11\,826 \qquad \text{soit} \qquad 1,0717x = 11\,826.$$

On en déduit alors que :

$$x = \frac{11\,826}{1,0717} = 11\,035.$$

4 **Fin 2017, il y avait 173 000 sites de e-commerce actifs en France. Fin 2018, il y en avait 182 000.**

Le taux d'évolution est donc, en pourcentage :

$$\frac{182\,000 - 173\,000}{173\,000} \times 100 \approx 5,2\,\%.$$

5 **Une commune organise chaque année une course à pieds dans ses rues. En 2017, le nombre de participants a augmenté de $20\,\%$ par rapport à l'année précédente, mais en 2018, il a baissé de $12\,\%$ par rapport à 2017.**

a. **Calculer le taux d'évolution global, en pourcentage, du nombre de participants entre 2016 et 2018.**

Le coefficient multiplicateur entre 2016 et 2017 est :

$$CM_1 = 1 + \frac{20}{100} = 1,2.$$

Le coefficient multiplicateur entre 2017 et 2018 est :

$$CM_2 = 1 - \frac{12}{100} = 0,88.$$

Le coefficient multiplicateur global entre 2016 et 2018 est donc :

$$CM = CM_1 \times CM_2 = 1,2 \times 0,88 = 1,056.$$

Ce qui signifie que globalement, le nombre de participants à augmenté (car $CM > 1$) de $5,6\,\%$.

b. **Quelle doit être l'évolution (en pourcentage) du nombre de coureurs de 2018 à 2019 pour que l'évolution globale de 2017 à 2019 soit $+0,32\%$?**

Fouillouillou ! C'est compliqué tout ça... :-) Non, pas tant que ça finalement : c'est le même raisonnement que précédemment sauf que nous avons une inconnue à trouver.

Le coefficient multiplicateur entre 2017 et 2018 est :

$$CM_2 = 0,88.$$

Notons CM_3 celui entre 2018 et 2019.

Le coefficient multiplicateur global entre 2017 et 2019 est donc :

$$CM' = CM_2 \times CM_3 = 0,88 \times CM_3.$$

Mais on sait que sa valeur doit être :

$$CM' = 1 + \frac{0,32}{100} = 1,0032.$$

Donc :

$$0,88 \times CM_3 = 1,0032 \qquad \text{soit} \qquad CM_3 = \frac{1,0032}{0,88} = 1,14.$$

Ainsi, l'évolution entre 2018 et 2019 doit être de $+14\%$.

6 **Quel est le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 43 % ?**

Partons d'une valeur x et baissons-la de 43 % pour obtenir une valeur y. Alors,

$$(1-0,43)x = y \qquad \text{soit} \qquad 0,57x = y.$$

Ainsi,

$$x = \frac{1}{0,57}y$$

soit :

$$x \approx 1,7544y$$

Par conséquent, pour passer de y à x (donc pour faire l'évolution réciproque), il faut multiplier par :

$$1+0,7544 = 1+\frac{75,44}{100}.$$

Donc le taux d'évolution réciproque est $+75,44\,\%$.

7 **Une entreprise possède 34 % de cadres, dont 85 % parlent couramment anglais.**

Pour connaître le pourcentage de salariés qui sont des cadres parlant couramment anglais, on fait :

$$\frac{85}{100}\times\frac{34}{100}\times 100 = 0,85\times 0,34\times 100 = 28,9.$$

Il y a donc 28,9 % de salariés qui sont des cadres parlant couramment anglais.

Corrigé de l'exercice 11.12 page 316

1 Pour obtenir le pourcentage d'évolution, on fait le calcul suivant :

$$\frac{858-3\,679}{3\,679}\times 100 \approx -76,678\,\% \approx -77\,\%.$$

2 Pour obtenir le pourcentage d'évolution, on fait le calcul suivant :

$$\frac{351-1\,048}{1\,048}\times 100 \approx -66,50763\,\% \approx -67\,\%.$$

3 Les pourcentages portant sur une même période, le fait que les pourcentages diffèrent alors qu'ils portent sur les mêmes consommations d'énergie signifie que le tarif de cette énergie a changé.

Ici, comme le pourcentage portant sur les montants (en euros) est plus petit que celui de la consommation (en kWh), cela signifie que les tarifs ont augmenté.

4 Le montant de sa facture a augmenté de 6 % la première année, puis de 6 % la seconde année.

Le coefficient multiplicateur global est alors :

$$\left(1+\frac{6}{100}\right)^2 = 1,1236$$

ce qui signifie que le montant de sa facture a augmenté de :

$$(1,1236-1)\times 100 = 12,36\,\%.$$

Corrigé de l'exercice 11.13 page 317

1 Le tableau complété est :

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	Total
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	35
Fréquences	0,029	0,086	0,057	0,057	0,171	0,114	0,114	0,143	0,086	0,086	0,057	1
e.c.c.	1	4	6	8	14	18	22	27	30	33	35	

2 Les effectifs cumulés croissants dépassent 50 % de l'effectif total (soit 17,5) pour la note 11.

La médiane est donc ici égale à $m_e = 11$.

3 La moyenne de la série statistique est :

$$\overline{x} = \frac{2\times1+4\times3+5\times2+\cdots+15\times3+16\times3+18\times2}{1+3+2+\cdots+3+3+2}$$
$$= \frac{381}{35}$$
$$\boxed{\overline{x} \approx 10,9}$$

Corrigé de l'exercice 11.14 page 317

1 La durée moyenne se calcule ainsi :

$$\overline{x} = \frac{1\times14+3\times16+5\times25+7\times15+9\times17+11\times13}{14+16+25+15+17+13}$$
$$= \frac{588}{100}$$
$$= 5,88$$
$$= 5\text{ min} + 0,88\times60\text{ sec}$$

<u>La durée moyenne d'un appel est donc d'à peu près 5 minutes et 53 secondes.</u>

2 Complétons le tableau avec la ligne des effectifs cumulés croissants (E.c.c) :

Intervalles de durée	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Effectifs	14	16	25	15	17	13
E.c.c.	14	30	55	70	87	100

50 % de l'effectif total (soit 50) sont atteints et dépassés pour [4;6[.

<u>Ainsi, la médiane appartient à [4;6[.</u>

Corrigé de l'exercice 11.15 page 317

1 On a :

Classes	[0;3[	[3;6[	[6;12[	[12;20[	[20;25]
Effectifs	10	15	10	20	25
E.c.c.	10	25	35	55	80

50% de l'effectif total sont dépassés dans [12;20[, donc la médiane appartient à cet intervalle.

2 La moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{2\times 10 + 4,5\times 15 + 9\times 10 + 16\times 20 + 22,5\times 25}{10+15+10+20+25}$$

$\boxed{\overline{x} \approx 13,2}$

Corrigé de l'exercice 11.16 page 318

1

- **Moyenne de la Seconde 1 :**

$$\overline{x}_1 = \frac{2\times 1 + 5\times 1 + 6\times 2 + \cdots + 15\times 1 + 18\times 1}{1+1+2+\cdots+1+1} = \frac{312}{32}$$

$\boxed{\overline{x}_1 \approx 9,75}$

- **Moyenne de la Seconde 2 :**

$$\overline{x}_2 = \frac{1\times 1 + 2\times 1 + 3\times 1 + \cdots + 15\times 1 + 16\times 1}{1+1+1+\cdots+1+1} = \frac{286}{35}$$

$\boxed{\overline{x}_2 \approx 8,17}$

2 Pour la Seconde 1, la variance est : $V_1 = \frac{173}{16} \approx 10,81$.

Ainsi, son écart-type est : $\sigma_1 = \sqrt{V_1} = \frac{\sqrt{173}}{4} \approx 3,29$.

Pour la Seconde 2, la variance est : $V_2 = \frac{15014}{1225} \approx 12,26$.

Ainsi, son écart-type est : $\sigma_2 = \sqrt{V_2} = \frac{\sqrt{15014}}{35} \approx 3,5$.

3 Complétons les deux tableaux avec la ligne des effectifs cumulés croissants :

NOTES DE LA SECONDE 1

Notes (x_i)	2	5	6	7	8	9	11	13	14	15	18
Effectifs (n_i)	1	1	2	5	3	6	5	6	1	1	1
E.c.c.	1	2	4	9	12	18	23	29	30	31	32

NOTES DE LA SECONDE 2

Notes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs (n_i)	1	1	1	3	2	3	4	3	5	4	3	1	1	1	1	1
E.c.c.	1	2	3	6	8	11	15	18	23	27	30	31	31	33	34	35

On voit alors que ma médiane de la Seconde 1 est 9 (car c'est la première note pour laquelle les e.c.c. sont supérieurs ou égaux à la moitié de l'effectif total, soit $32 \div 2 = 16$).

Donc $m_1 = 9$.

De plus, $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 13$ donc l'écart interquartile est $e_1 = 13 - 7 = 6$.

On voit aussi que la médiane de la Seconde 2 est $m_2 = 8$.
De plus, $Q_1 = 6$ et $Q_3 = 10$, donc l'écart inter-quartile est $e_2 = 10 - 6 = 4$.

4 Le couples $(m_1\,;e_1) = (9\,;6)$ et $(m_2\,;e_2) = (8\,;4)$ nous permettent de dire que la dispersion des notes autour des médianes est plus étroite dans la Seconde 2 que dans la Seconde 1, en ayant à peu près la même médiane (à 1 point près).

Les couples $\left(\overline{x}_1\,;\sigma_1\right) = (9,75\,;3,29)$ et $\left(\overline{x}_2\,;\sigma_2\right) = (8,17\,;3,5)$ nous permet de dire que la concentration des notes autour des moyennes est quasiment identique, en ayant une moyenne plus forte dans la Seconde 1 que dans la Seconde 2.

On peut donc voir que la Seconde 1 est légèrement plus performante que la Seconde 2.

Corrigé de l'exercice 11.17 page 318

- Pour l'entreprise A :

$$\begin{aligned}\overline{x}_A &= \frac{1\,200 \times 18 + 1\,300 \times 27 + \cdots + 1\,925 \times 8}{18 + 27 + 52 + \cdots + 20 + 8} \\ &= \frac{353\,000}{234} \\ \boxed{\overline{x}_A \approx 1\,509}\end{aligned}$$

$$V_A = \frac{18(1\,509 - 1\,200)^2 + 27(1\,509 - 1\,300)^2 + \cdots + 8(1\,509 - 1\,925)^2}{234}$$

$$\boxed{V_A \approx 33\,367}$$

$$\sigma_A = \sqrt{V_A}$$

$$\boxed{\sigma_A \approx 183}$$

- Pour l'entreprise B :

$$\begin{aligned}\overline{x}_B &= \frac{950 \times 10 + 1\,050 \times 15 + \cdots + 2\,050 \times 4}{10 + 15 + \cdots + 10 + 4} \\ &= \frac{436\,750}{299} \\ \boxed{\overline{x}_B \approx 1\,461}\end{aligned}$$

$$V_B = \frac{10(950-1\,461)^2 + 15(1\,050-1\,461)^2 + \cdots + 4(2\,050-1\,461)^2}{299}$$

$$\boxed{V_B \approx 61\,959}$$

$$\sigma_B = \sqrt{V_B}$$

$$\boxed{\sigma_B \approx 249}$$

Ainsi, des couples $(\overline{x}_A ; \sigma_A) = (1\,509 ; 183)$ et $(\overline{x}_B ; \sigma_B) = (1\,461 ; 249)$, on peut déduire qu'en moyenne, on gagne plus dans l'entreprise A que dans la B, mais que l'écart à ce salaire moyen est plus important dans l'entreprise B quand dans la A.

Corrigé de l'exercice 11.18 page 319

Posons $x_{n+1} = x$.

1 Par définition, on a :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad \text{donc} \qquad n\overline{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n\,.$$

On a alors :

$$m(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x}{n+1}$$

$$\boxed{m(x) = \frac{n\overline{x} + x}{n+1}}$$

2

$$m(x) = \overline{x}$$

$$\iff \frac{x + n\overline{x}}{n+1} = \overline{x}$$

$$\iff x + n\overline{x} = (n+1)\overline{x}$$

$$\iff x = \overline{x}.$$

<u>Il faut ainsi choisir d'ajouter à la série une valeur égale à la moyenne de la série pour que la moyenne de la nouvelle série soit la même que la série initiale.</u>

Corrigé de l'exercice 11.19 page 319

1 Notons x la note au devoir coefficient 2. Il faut :

$$\frac{(0,5+2+1)\times 8 + 2x}{0,5+2+1+2} \geqslant 10$$

soit :

$$28 + 2x \geqslant 10 \times 5,5.$$

On a alors :

$$x \geqslant \frac{55-28}{2}$$

ou encore :

$$x \geqslant 13,5.$$

Il faut donc que Hugo obtienne une note supérieure ou égale à 13,5/20 lors du prochain contrôle.

2 **a.** Notons $\overline{x_1} = 14,5$ la moyenne de la Seconde 1 et $\overline{x_2}$ celle de la Seconde 2. Il faut :

$$\begin{aligned}\frac{30 \times 14,5 + 26 \times \overline{x_2}}{30+26} \geqslant 12 &\iff 435 + 26\overline{x_2} \geqslant 12 \times 56 \\ &\iff \overline{x_2} \geqslant \frac{12 \times 56 - 435}{26} \\ &\iff \overline{x_2} \geqslant 9,12.\end{aligned}$$

Il faut donc que la moyenne de la Seconde 2 soit supérieure ou égale à 9,12.

b. Lors des précédents devoirs, $\overline{x_2} = 0,8\overline{x_1}$. Ici, $0,8\overline{x_1} = 0,8 \times 14,5 = 11,6$.

M. Zébulon peut donc se rassurer : il est fort probable que la moyenne de ses deux classes soit supérieure à 12/20.

3 La variance des notes de Kévin est : $1,643^2 \approx 2,7$.

Notons n sa note au dernier devoir, $\overline{x}$ sa moyenne sur ses trois contrôles et V la variance. Alors :

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{5 \times 2 + 8 \times 1 + 2n}{5} \\ \mathrm{V} = \dfrac{2(5-\overline{x})^2 + (8-\overline{x})^2 + 2(n-\overline{x})^2}{5} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{18}{5} + \dfrac{2}{5}n \\ \mathrm{V} = \dfrac{1}{5}\left[5\overline{x}^2 - (36+4n)\overline{x} + 114 + 2n^2\right] \end{cases}$$

En remplaçant dans la deuxième égalité $\overline{x}$ par son expression en fonction de n, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{V} &= \frac{1}{25}(18+2n)^2 - \frac{1}{25}\underbrace{(36+4n)}_{=2(18+2n)}(18+2n) + \frac{1}{5}(114+2n^2) \\ &= -\frac{1}{25}(18+2n)^2 + \frac{1}{25}(570+10n^2) \\ &= \frac{1}{25}(10n^2 + 570 - 18^2 - 72n - 4n^2) \\ &= \frac{2}{25}(3n^2 - 36n + 123).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} = 2,7 \iff & \frac{2}{25}(3n^2 - 36n + 123) = \frac{27}{10} \\
\iff & 3n^2 - 36n + 123 = \frac{27}{10} \times \frac{25}{2} \\
\iff & 3n^2 - 36n + 123 = \frac{135}{4} \\
\iff & 3n^2 - 36n + 123 - \frac{135}{4} = 0 \\
\iff & 12n^2 - 144n + 357 = 0.
\end{aligned}$$

La fonction $n \mapsto 92n^2 - 144n - 233$ est une fonction du second degré. En la traçant à la calculatrice, on trouve qu'elle coupe l'axe des abscisses en $n = 3,5$ et $n = 8,5$.
Mais le fait que l'enseignante puisse tripler la note suggère que cette note ne peut pas être 8,5 (sans quoi la note triplée serait supérieure à 20).
Kévin a donc eu 3,5/20.

Corrigé de l'exercice 11.20 page 319

Il faut ici utiliser la formule :

$$\frac{n_{\mathrm{A}} \times \overline{x_{\mathrm{A}}} + n_{\mathrm{B}} \times \overline{x_{\mathrm{B}}}}{n_{\mathrm{A}} + n_{\mathrm{B}}}$$

où n_{A} et n_{B} représentent respectivement l'effectif du groupe A et celui du groupe B, et où $\overline{x_{\mathrm{A}}}$ et $\overline{x_{\mathrm{B}}}$ leurs moyennes (en secondes, par exemple).
Ainsi, $\overline{x_{\mathrm{A}}} = 10 \times 60 + 27 = 627$ secondes et $\overline{x_{\mathrm{B}}} = 9 \times 60 + 2 = 542$ secondes.
Alors, le temps moyen du club est :

$$\frac{135 \times 627 + 98 \times 542}{135 + 98} \approx 591,25 \text{ secondes;}$$

soit un temps moyen de 9 min 51 sec

Corrigé de l'exercice 11.21 page 320

1 Le tableau complété est le suivant :

Nombres d'enfants x_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs n_i	230	125	142	97	24	2
Effectifs cumulés	230	355	497	594	618	620

La médiane M_e est la valeur du caractère pour laquelle 50% de l'effectif total est dépassé. La moitié de 620 est égale à 310.

Or, 310 est dépassé pour un nombre d'enfants de 1.

Donc $\underline{M_e = 1}$. Le quart de 620 est la moitié de 310, soit 155, atteint pour un nombre d'enfants de 0. Donc $\underline{Q_1 = 0}$.

Les trois quarts de 620 sont égaux à $3 \times 155 = 465$, atteint pour un nombre d'enfants de 2. Donc $\underline{Q_3 = 2}$.

2 Le nombre moyen d'enfants est obtenu par le calcul suivant :

$$\overline{x} = \frac{0 \times 230 + 1 \times 125 + 2 \times 142 + 3 \times 97 + 4 \times 24 + 5 \times 2}{620} = 1,3.$$

<u>Le nombre moyen d'enfants par habitation dans ce village est donc 1,3.</u>

3 Le tableau complété est le suivant :

Nombres d'enfants x_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs n_i	230	125	142	97	24	2
Effectifs cumulés	230	355	497	594	618	620
$(x_i - \overline{x})^2$	1,69	0,09	0,49	2,89	7,29	13,69

La variance est donc la moyenne des $(x_i - \overline{x})^2$, soit :

$$V = \frac{230 \times 1,69 + 125 \times 0,09 + 142 \times 0,49 + 97 \times 2,89 + 24 \times 7,29 + 2 \times 13,69}{620}$$

soit :

$$\boxed{V \approx 1,54}$$

Ainsi, l'écart-type est :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V} \approx 1,2}$$

4 L'intervalle $[\overline{x} - \sigma ; \overline{x} + \sigma]$ est $[1,3 - 1,2 ; 1,2 + 1,2] = [0,1 ; 2,4]$. On cherche donc le pourcentage d'habitations ayant 1 ou 2 enfants.

Il y a $125 + 142 = 267$ habitations concernées, soit un pourcentage de $\frac{267}{620} \times 100 \approx 43\%$.

<u>Il y a donc environ 43% d'habitations ayant 1 ou 2 enfants dans ce village.</u>

Corrigé de l'exercice 11.22 page 320

1 Complétons la ligne des effectifs cumulés :

Salaires (en €)	$[0;950[$	$[950;1\,250[$	$[1\,250;1\,400[$	$[1\,400;1\,700[$	$[1\,700;2\,400]$
Effectifs n_i	230	320	550	480	420
Effectifs cumulés	230	550	1 100	1 580	2 000

On voit alors que la moitié de l'effectif total est atteint pour la classe $[1\,250;1\,400[$; la médiane appartient donc à cet intervalle.

Le quart de l'effectif total (500) est atteint pour la classe $[950;1250[$ donc $Q_1 \in [950;1250[$.

Les trois quarts (1 500) sont atteints pour $[1\,400;1\,700[$ donc $Q_3 \in [1\,400;1\,700[$.

2 Calculons le salaire moyen en complétant d'abord la ligne des centres des classes :

Salaires (en €)	$[0;950[$	$[950;1\,250[$	$[1\,250;1\,400[$	$[1\,400;1\,700[$	$[1\,700;2\,400]$
Centre des classes x_i	475	1 100	1 325	1 550	2 050
Effectifs n_i	230	320	550	480	420

Par exemple, pour trouver le centre de la classe $[950;1\,250[$, on fait :

$$\frac{1250+950}{2} = 1100.$$

Calculons alors la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{475 \times 230 + 1\,100 \times 320 + 1\,325 \times 550 + 1\,550 \times 480 + 2\,050 \times 420}{2\,000}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\overline{x} = 1\,397{,}50}$$

3 Pour calculer la variance, complétons la ligne des $(x_i - \overline{x})^2$:

Salaires (en €)	$[0;950[$	$[950;1\,250[$	$[1\,250;1\,400[$	$[1\,400;1\,700[$	$[1\,700;2\,400]$
Centre des classes x_i	475	1 100	1 325	1 550	2 050
Effectifs n_i	230	320	550	480	420
$(x_i - \overline{x})^2$	851 006,25	88 506,25	5 256,25	23 256,25	425 756,25

Ainsi,

$$V = \frac{230 \times 851\,006{,}25 + 320 \times 88\,506{,}25 + \cdots + 420 \times 425\,756{,}25}{2\,000}.$$

On obtient alors :

$$\boxed{V \approx 208\,462{,}5}$$

soit un écart-type de :

$$\boxed{\sigma \approx 456{,}58}$$

Corrigé de l'exercice 11.23 page 320

1 Calculons la moyenne du devoir sur les deux classes :

$$\frac{10,7 \times 35 + 12,3 \times 27}{35+27} \approx 11,4.$$

Ainsi, la moyenne de ce devoir sur les deux classes est d'environ 11,4.

2 Notons x le nombre d'élèves de la classe D qui ont fait le devoir. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{8,9\times 30+15,7x}{(30+x)}=12 \iff \frac{267+15,7x}{(30+x)}&=12\\
&\iff 267+15,7x=12(30+x)\\
&\iff 267+15,7x=360+12x\\
&\iff 15,7x-12x=360-267\\
&\iff 3,7x=93\\
&\iff x=\frac{93}{3,7}\\
&\iff x\approx 25.
\end{aligned}$$

Ainsi, 25 élèves ont fait le devoir dans la classe D.

Corrigé de l'exercice 11.24 page 321

On sait que la moyenne du groupe de touristes est donnée par la formule :

$$\bar{x}=\frac{n_1\overline{x_1}+n_2\overline{x_2}}{n_1+n_2}\quad \text{avec :}$$

- n_1 est l'effectif du premier groupe,
- $\overline{x_1}$ est la moyenne du premier groupe,
- n_2 est l'effectif du second groupe,
- $\overline{x_2}$ est la moyenne du second groupe.

Cela donne alors :

$$\begin{aligned}
67,50&=\frac{25\times 50+n_2\times 80}{25+n_2}\\
\iff 67,50&=\frac{1\,250+80n_2}{25+n_2}\\
\iff 67,50(25+n_2)&=1\,250+80n_2\\
\iff 67,5\times 25+67,5n_2&=1\,250+80n_2\\
\iff 1\,687,5+67,5n_2&=1\,250+80n_2\\
\iff 67,5n_2-80n_2&=1\,250-1\,687,5\\
\iff -12,5n_2&=-437,5\\
\iff n_2&=\frac{-437,5}{12,5}\\
\iff n_2&=35.
\end{aligned}$$

Il y a donc 35 personnes dans le second groupe de touristes.

12

Probabilités

Plan du chapitre

I - Vocabulaire

I . 1 - Expérience aléatoire

Définition 61

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les issues sont obtenues par hasard.

L'ensemble de toutes les issues que l'on peut obtenir est appelé l'**univers**. On le note : Ω (Oméga).

Exemple 88

On considère l'expérience qui consiste à lancer un dé tétraédrique (4 faces numérotées 1, 2, 3 et 4). On s'intéresse à la face obtenue (au numéro qu'elle porte). Pour un dé tétraédrique, c'est la face cachée.
Si le dé n'est pas pipé (truqué), c'est une expérience aléatoire car on ne sait pas à l'avance quelle face sera obtenue.
L'univers est ici : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

I . 2 - Événement

Définition 62

On appelle **événement** d'une expérience aléatoire une des issues possibles.

Exemple 89

Dans le lancer de dé tétraédrique, « obtenir un 1 » est un événement.
De même, « obtenir un 2 » est un événement. Idem pour les autres faces.
L'univers est donc ici composé de 4 événements.

I . 3 - Réunion d'événements

Définition 63

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
On appelle **réunion** de A et B l'événement « A ou B est réalisé. »
On note cette réunion : $A \cup B$.

Exemple 90

On lance un dé cubique et on note :

- A l'événement : « obtenir un nombre pair »
- B l'événement : « obtenir un multiple de 3 »

L'événement $A \cup B$ est alors : « obtenir un nombre pair ou un multiple de 3 ».

Remarque 87

Dans ce dernier exemple, on peut aussi *décrire* la réunion :

- $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$;
- $B = \{3\ ;\ 6\}$;
- $A \cup B = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;6\}$.

En effet, $A \cup B$ est constitué des nombres compris entre 1 et 6 qui sont pairs ou multiples de 3 (ou les deux).

I . 4 - Intersection d'événements

Définition 64

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
On appelle **intersection** de A et B l'événement « A et B sont réalisés en même temps. »
On note cette réunion : $A \cap B$.

Exemple 91

On lance un dé cubique et on note :

- A l'événement : « obtenir un nombre pair »
- B l'événement : « obtenir un multiple de 3 »

L'événement $A \cap B$ est alors : « obtenir un nombre pair et un multiple de 3 », c'est-à-dire : « obtenir 6 ».

Remarque 88

Dans ce dernier exemple, on peut aussi *décrire* l'intersection :

- $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$;
- $B = \{3\ ;\ 6\}$;
- $A \cap B = \{6\}$.

En effet, $A \cap B$ est constitué des nombres compris entre 1 et 6 qui sont à la fois pairs et multiples de 3 ; il n'y a donc que le nombre 6.

I . 5 - Événement complémentaire

Définition 65

Soit A un événement d'un univers Ω.
Le **complémentaire de A** est l'événement : « A n'est pas réalisé ». On le note $\overline{A}$ (on le lit souvent : *A barre*).

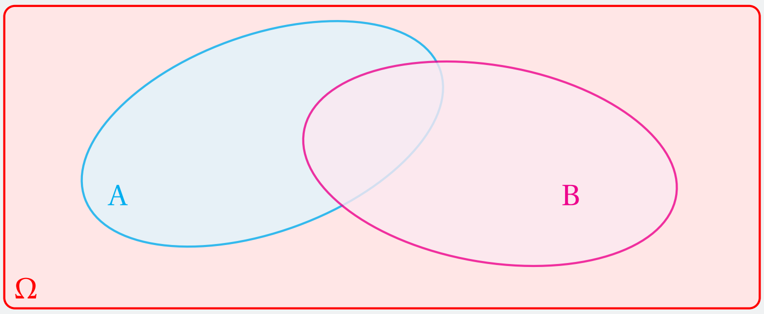
Exemple 92

Soit $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

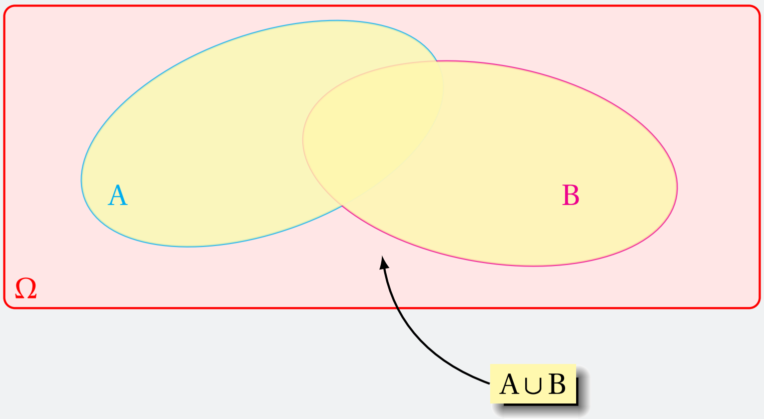
- Si $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ alors $\overline{A} = \{1\ ;\ 3\ ;\ 5\}$;
- Si $B = \{3\ ;\ 6\}$ alors $\overline{B} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 5\}$.

II - Diagrammes de Venn

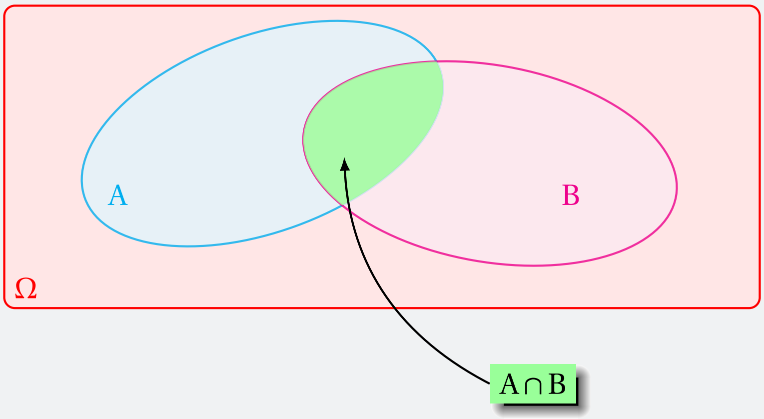
Une expérience aléatoire ainsi que des événements de cette expérience peuvent être modélisés par un dessin ; c'est un diagramme de Venn.



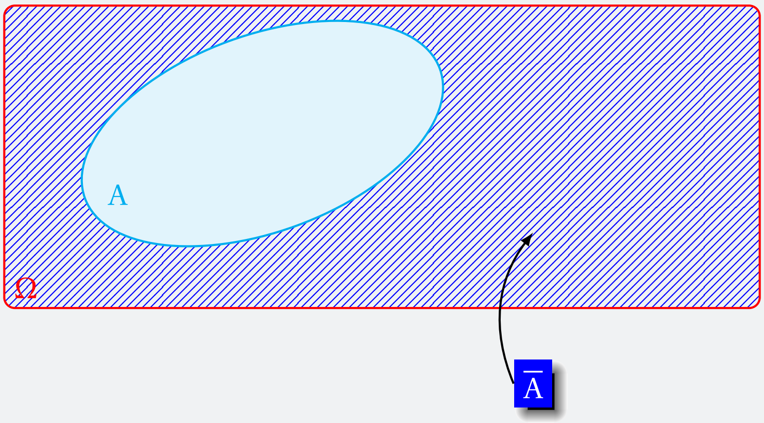
II . 1 - Union



II . 2 - Intersection



II . 3 - Complémentaire



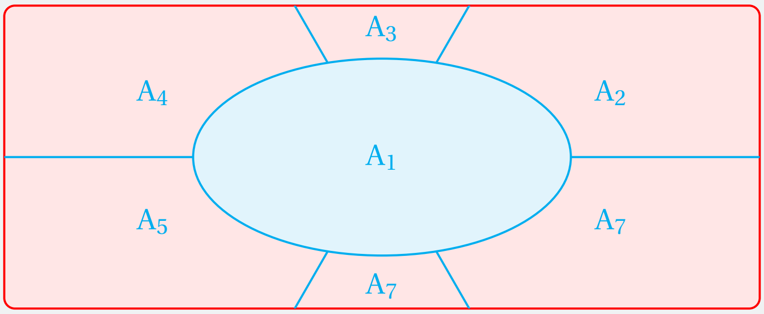
II . 4 - Partition de l'univers

Définition 66

On dit que des événements A_1, A_2, ..., A_n forment une **partition de l'univers** Ω si :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \\ A_i \cap A_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

On peut représenter une partition par exemple de la façon suivante :



III - Probabilités

III . 1 - Loi de probabilité

Définition 67

Une **loi de probabilité** est un modèle que l'on adopte en fonction de l'expérience aléatoire menée.

Si toutes les issues ont la même probabilité d'être obtenues, la loi de probabilité usuelle que l'on choisit est l'**équiprobabilité**.

Si l'on peut calculer les probabilités de chaque issue dans un cas autre que l'équiprobabilité, la loi de probabilité peut-être donnée sous forme de tableau contenant les probabilités de toutes les issues.

Exemple 93 (loi de probabilité)

1 Si l'expérience consiste à lancer un dé cubique et à regarder la face obtenue, il y a équiprobabilité car toutes les faces ont une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ d'être obtenue.

2 Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte. On considère les événements :

- F : « on choisit une figure » ;
- A : « on choisit un as »
- D : « on choisit un 7, 8, 9 ou 10 ».

La loi de probabilité de cette expérience est donnée par le tableau suivant :

Événements	F	A	D
Probabilités	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

En effet, il y a 3 figures par famille – qui compte 8 cartes (donc $P(F) = \frac{3}{8}$) ; de plus, il y a 1 As par famille (donc $P(A) = \frac{1}{8}$) et il y a 4 cartes sur 8 qui sont des 7, 8, 9 ou 10 (donc $P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$).

III . 2 - Propriétés fondamentales

Propriété 64

Soit Ω un univers et soient A_1, A_2, ..., A_n des événements de formant une partition de Ω.
Alors, $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$.

Exemple 94

Si on reprend la question **2** de l'exemple 93, les événements F, A et D forment une partition de l'univers, et la somme des probabilités trouvées est bien égale à 1 :

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1.$$

Propriété 65

Soient A et B deux événements d'un univers Ω. Alors,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cela vient du fait que $A \cup B$ *se trouve en prenant* A *et* B, *mais en prenant* B, *on a pris aussi une partie de* A *(qui est* $A \cap B$*) qu'il faut enlever sinon on l'aura prise deux fois.*

IV - Méthodes de dénombrement

Il existe deux méthodes principales pour dénombrer : le tableau à double entrée et l'arbre.

IV . 1 - Le tableau à double entrée

Il est souvent utilisé quand on s'intéresse à deux caractères dans un même univers.

Exemple 95 (tableau à double entrée)

Dans un lycée, il y a 50 % d'élèves de Seconde, 30 % d'élèves de Première et 20 % d'élèves de Terminale.
Parmi les élèves de Seconde, il y en a 48 % qui sont des filles.
Parmi les élèves de Première, il y en a 51 % qui sont des filles.
Parmi les élèves de Terminale, il y en a 55 % qui sont des filles.
La répartition peut alors se représentée par le tableau suivant :

Classes / Genres	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	24 %	15,3 %	11 %	50,3 %
Garçons	26 %	14,7 %	9 %	49,7 %
Total	50 %	30 %	20 %	100 %

- On commence par mettre 50 %, 30 % et 20 % sur la dernière ligne car cela représente le total (en pourcentage) de chaque classe.
- Ensuite, on calcule 48 % de 50 % : $\frac{48}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{24}{100}$, ce qui correspond au pourcentage de filles de Seconde par rapport à l'ensemble du lycée.
  On fait de même pour les autres pourcentages des filles.
- On finit ensuite en complétant la ligne des garçons de sorte que le total des pourcentages de chaque colonne soit égal à celui indiqué en dernière ligne.

1 On peut ainsi dire, par exemple, que si on choisit au hasard un élève de ce lycée,

a. la probabilité que ce soit un garçon de Terminale est égale à 9 % ;
b. la probabilité que ce soit une fille est égale à 50,3 %.

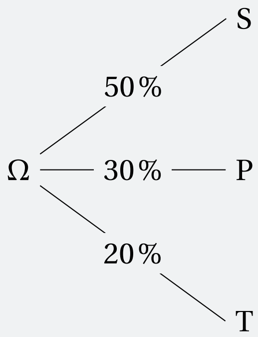
2 Si maintenant on choisit un élève parmi les garçons, la probabilité qu'il soit en Première est égale à $\frac{14,7}{49,7}$, soit $\frac{147}{497} = \frac{21}{71}$. Attention ici, l'univers n'est plus l'ensemble du lycée mais l'ensemble des garçons.

IV . 2 - L'arbre des possibilités (ou arbre des probabilités)

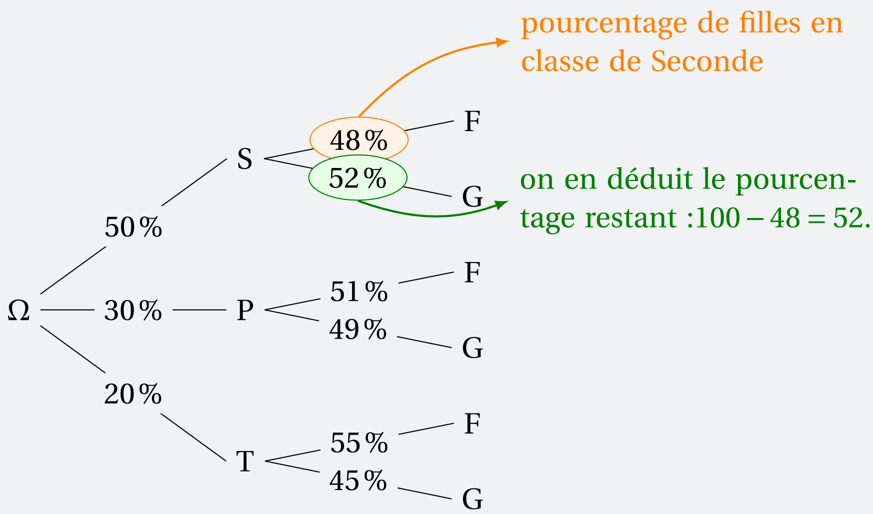
C'est sans nul doute la représentation la plus répandue en probabilités.
Reprenons l'exemple 95, et notons :

- S l'événement : « l'élève choisi.e. est en Seconde » ;
- P l'événement : « l'élève choisi.e. est en Première » ;
- T l'événement : « l'élève choisi.e. est en Terminale » ;
- F l'événement : « l'élève choisie est une fille » ;
- G l'événement : « l'élève choisi est un garçon » ;

L'énoncé nous parle en premier de la répartition des élèves en fonction de leur classe, donc le premier niveau de l'arbre doit concerner les classes :



On complète ensuite le second niveau de l'arbre par les possibilités : pour chaque élève de Seconde, Première et Terminale, nous avons la possibilité que l'élève soit une fille ou un garçon :



L'événement $T \cap G$ est : « l'élève choisi est un garçon de Terminale ».
Pour calculer $P(P \cap G)$, on multiplie les probabilités des deux branches :

$$\frac{20}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{9}{100}.$$

On retrouve bien la probabilité trouvée dans l'exemple 95.

En revanche, la probabilité que l'élève soit en Première sachant que c'est un garçon (calculée à la question 2 de l'exemple 95) ne peut pas se lire directement sur l'arbre.
Toutefois, vous verrez en première une méthode pour la trouver à l'aide de l'arbre.

Exercice 12.1 (lancer de deux dés équilibrés)

On lance un dé cubique et un dé tétraédrique (4 faces), tout deux non pipés (c'est-à-dire parfaitement équilibrés).

1. Quelle est la probabilité pour que la somme des faces obtenues soit un multiple de 3 ?
2. Avec les deux chiffres obtenus, on forme un nombre dont le chiffre des unités est celui obtenu avec le dé cubique et celui des dizaines, obtenu avec le dé tétraédrique.
   a. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un multiple de 3 ?
   b. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un multiple de 2 ?
3. Reprendre les questions a et b de la question précédente en considérant maintenant que le chiffre des unités est donné par le dé tétraédrique et celui des dizaines par le dé cubique.

Solution page 353

Exercice 12.2 (jeu de cartes : réunion et intersection)

Un jeu de cartes est constitué de 52 cartes.
Il est composé de 4 « couleurs » : cœur (rouge), carreau (rouge), pique (noire) et trèfle (noire).
Pour chaque couleur, il y a 3 figures : valet, dame et roi.
On tire au hasard une carte de ce jeu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure ou une carte rouge ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure rouge ou une carte noire qui ne soit pas une figure ?

Solution page 353

Exercice 12.3 (avec un dé portant des lettres)

Un dé cubique porte sur chaque face une lettre.
Ce dé est pipé ; le tableau suivant donne les probabilités de chaque face :

A	M	H	T	U	Y
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	?

On lance une fois ce dé. On note :

- Y l'événement : « on obtient la face où figure la lettre Y » ;
- X l'événement : « on obtient une lettre du mot MATH »

1. Calculer P(Y).
2. Calculer P(X).
3. Calculer $P(Y \cap X)$.
4. Calculer $P(Y \cup X)$.

Solution page 354

Exercice 12.4 (changement d'univers)

Dans un lycée, nous avons réparti les élèves selon leur genre et le moyen de locomotion qu'ils utilisent pour venir en cours. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Moyens de locomotion	Filles	Garçons
En transport en commun	126	148
À vélo	16	10
À pieds	108	84
En voiture	42	30

1 On choisit au hasard un élève parmi les 564 élèves de ce lycée.

- **a.** Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
- **b.** Quelle est la probabilité pour que cet élève vienne à vélo ?
- **c.** Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille qui vienne à pieds ?

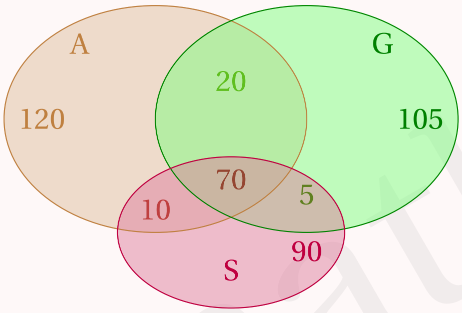
2 On choisit maintenant un garçon au hasard.
Quelle est la probabilité pour qu'il vienne en voiture ?

3 On choisit maintenant un élève qui vient en transport en commun.
Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?

Solution page 355

Exercice 12.5 (chez les profs de math)

Chaque année, le club des profs de math d'une ville convie chacun de ses membres à une réunion secrète. Cette année, il envoie 420 invitations.
Parmi ces profs de math, il y a ceux qui adorent la géométrie, ceux qui adorent l'algèbre et ceux qui adorent les statistiques. Mais certains peuvent adorer deux des trois disciplines, voire même les trois. La répartition est donnée par le diagramme de VENN suivant :



On choisit un prof au hasard dans cette réunion. On note :

- A est l'événement : « le prof adore l'algèbre » ;
- G est l'événement : « le prof adore la géométrie » ;
- S est l'événement : « le prof adore les statistiques ».

1 Calculer la probabilité pour que le prof adore la géométrie et les statistiques.

2 Calculer la probabilité pour que le prof adore la géométrie ou les statistiques.

Solution page 356

Exercice 12.6 (anglais & espagnol dans une classe)

Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol. 8 étudient les deux langues.
Pour un élève donné, on note A l'événement : « l'élève étudie l'anglais » et E l'événement : « l'élève étudie l'espagnol ».

1. Que représente l'événement $A \cap E$?
2. Que représente l'événement $A \cup E$?
3. Combien d'élèves n'apprennent ni l'anglais ni l'espagnol ?
4. Quel est l'événement contraire de A ?

Solution page 356

Exercice 12.7 (QCM)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (QCM). Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte.

1. On a lancé 5 fois de suite un dé cubique équilibré, et on n'a jamais obtenu le SIX. La probabilité d'obtenir SIX au 6ᵉ lancer est :

   a. inférieure à $\frac{1}{6}$ **b.** supérieure à $\frac{1}{6}$ **c.** égale à $\frac{1}{6}$ **d.** inconnue

2. Une famille possède deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles ?

   a. $\frac{1}{8}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** 1

3. On effectue 2 tirages aléatoires successifs et sans remise dans un jeu de 52 cartes ordinaire.
   Quelle est la probabilité d'obtenir deux cartes identiques ?

   a. 1 **b.** $\frac{1}{16}$ **c.** 0 **d.** $\frac{1}{32}$

4. On lance deux dés cubiques non truqués. Quelle est la probabilité d'obtenir un « double », c'est-à-dire que les faces des deux dés indiquent le même chiffre ?

   a. $\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{1}{36}$ **c.** 6 **d.** $\frac{2}{36}$

Solution page 356

Exercice 12.8 (le digicode)

Le digicode d'un immeuble possède un clavier pour saisir un code. Le code est composé de deux chiffres, parmi 1, 2 ou 3, suivis d'une lettre parmi A ou B. Par exemple : 21B est un code possible, tout comme 33A.
Un seul code permet d'accéder au hall de l'immeuble.

1. À l'aide d'un arbre des possibilités, déterminer le nombre de codes possibles.

2 Calculer la probabilité des événements A, B, C, D et E suivants :

- A : « Le code ouvrant l'immeuble est le code 33A » ;
- B : « Le code ouvrant l'immeuble commence par le chiffre 2 » ;
- C : « Le code ouvrant l'immeuble se termine par la lettre A » ;
- D : « Le code ouvrant l'immeuble contient deux fois le même chiffre » ;
- E : « Le code ouvrant l'immeuble ne contient ni le 1, ni le B ».

Solution page 357

Exercice 12.9 (les fantômes du village)

Dans un village, 13 % des habitant·e·s affirment avoir vu au moins un fantôme dans leur vie. Parmi les personnes qui ont vu un fantôme, 93 % aiment bien faire un tour au bistrot en fin de journée, contre seulement 15 % des autres habitant·e·s (celles et ceux qui n'en ont jamais vu).
On choisit au hasard une personne habitant ce village. Quelle est la probabilité qu'elle aime aller au bistrot en fin de journée ?

Solution page 357

Exercice 12.10 (dans un magasin)

Un petit magasin possède 2 caisses, toujours ouvertes (mais bien sûr pas toujours libres, parfois les caisses sont occupées et il faut attendre). On note :

- C_1 l'événement : « La caisse n°1 est libre »
- C_2 l'événement : « La caisse n°2 est libre »

1 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $C_1 \cap C_2$.

Une étude statistique permet d'affirmer que $P(C_1) = 0,3$, $P(C_2) = 0,4$ et $P(C_1 \cap C_2) = 0,2$.

2 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{C_1}$ puis calculer sa probabilité.

3 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $C_1 \cup C_2$ puis calculer sa probabilité.

4 Calculer la probabilité qu'il faille attendre, c'est-à-dire qu'aucune des deux caisses ne soient libres.

Solution page 358

Exercice 12.11 (dans un sac)

Un sac contient 4 jetons, indiscernables au toucher, portant les chiffres 1, 3, 6 et 9.
On tire au hasard un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac. On note le nombre à deux chiffres obtenu dont les dizaines sont données par le premier jeton extrait et les unités par le second.

Par exemple, le tirage « 6 » puis « 1 » conduit au nombre « 61 ».

1 **a.** Construire un arbre des possibilités représentant cette expérience aléatoire.
b. Déterminer le nombre d'issues possibles liées à cette expérience.

2 On considère les événements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est un multiple de 3 »

a. Déterminer les probabilités des événements A, B et $\overline{B}$.

b. Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$ puis calculer sa probabilité.

c. Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.

Solution page 358

Exercice 12.12 (compléter un programme)

On souhaite simuler 1 000 lancers d'un dé cubique équilibré et compter le nombre de fois que l'on obtient la face « 1 ».
Pour cela, on utilise le programme Python suivant, que vous devez compléter :

Code Python 12-16

```python
from random import randint

count = 0

for i in range(...):
    d = randint(1,6)
    if d == ...:
        count = count + 1

print( count )
```

Solution page 359

Exercice 12.13

On lance un dé cubique, dont les faces portent les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et un dé tétraédrique, dont les faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. Ces dés sont tous les deux équilibrés. On souhaite simuler 1 000 lancers de ces dés en Python en s'intéressant à la fréquence de toutes les sommes possibles. Par exemple, si le dé cubique donne « 3 » et le tétraédrique « 2 », la somme est $3+2$, soit 5.

1 Quelle est la plus petite somme possible ? La plus grande ?

On construit alors en Python la liste :

```python
S = [ (2,0), (3,0), ..., (10,0) ]
```

à l'aide de l'instruction :

```python
S = [ (i,0) for i in range(2,11) ]
```

L'idée est de compter le nombre de fois que l'on obtient une somme et de mettre ce nombre à la place du « 0 ». Ainsi, sur les 1 000 lancers, si on obtient 18 fois la somme « 5 », la liste S contiendra le couple 5 , 18.

2 Expliquer alors le programme suivant :

Code Python 12-18

```
from random import randint

S = [ (i,0) for i in range(2,11) ]

for i in range(1000):
    d1 = randint(1,6)
    d2 = randint(1,4)
    somme = d1 + d2

    for k in range( len(S) ):
        if S[k][0] == somme:
            n = S[k][1]
            S[k] = (somme, n+1)

print( S )
```

3 On exécute 5 fois ce programme et on obtient les cinq résultats suivants :

```
[(2, 42), (3, 82), (4, 131), (5, 145), (6, 177), (7, 173), (8, 129), (9, 88), (10, 33)]
[(2, 44), (3, 104), (4, 114), (5, 167), (6, 178), (7, 157), (8, 122), (9, 73), (10, 41)]
[(2, 44), (3, 86), (4, 121), (5, 149), (6, 182), (7, 152), (8, 148), (9, 77), (10, 41)]
[(2, 39), (3, 81), (4, 123), (5, 172), (6, 150), (7, 179), (8, 126), (9, 86), (10, 44)]
[(2, 43), (3, 85), (4, 125), (5, 177), (6, 164), (7, 166), (8, 120), (9, 68), (10, 52)]
```

Quelles sont les sommes les plus fréquemment obtenues ?

4 Calculer la probabilité de chacune des sommes.

Solution page 360

Exercice 12.14 (jetons carrés, ronds, verts, bleus et noirs)

Un sac contient des jetons carrés ou ronds, de couleur verte, bleue ou noire.
Il y a 10 jetons verts dont 4 carrés ; 10 des 12 jetons bleus sont carrés ; 14 des 18 jetons noirs sont ronds.

1 Utiliser un arbre ou un tableau pour donner le nombre de jetons de chaque sorte.

2 On tire un jeton au hasard. On suppose qu'il y a équiprobabilité. Soit A l'événement : « le jeton est vert », B l'événement : « le jeton est carré » et C l'événement : « le jeton est carré et n'est pas bleu ».

a. Calculer les probabilités respectives de A, de B et de C.

b. Calculer les probabilités des événements contraires de A, de B et de C.

c. Exprimer par une phrase l'événement contraire de C et calculer sa probabilité de deux manières différentes.

Solution page 361

Exercice 12.15 (dé truqué)

On joue avec un dé truqué à 6 faces. On lance une fois ce dé. On sait que :

- la probabilité d'obtenir 1,2,3,4 ou 5 est la même ;
- la probabilité d'obtenir un 6 est égale à $\frac{1}{2}$.

1 Soit A l'événement : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 ».
Calculer $P(A)$.

2 Soit B l'événement : « obtenir 1 ».
Déterminer $P(B)$.

3 Soit C l'événement : « obtenir un nombre pair ».
Déterminer $P(C)$.

En déduire la probabilité d'obtenir un nombre impair.

Solution page 361

Exercice 12.16

Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100. On prélève une boule au hasard.
On considère les événements suivants :

- A : « le numéro de la boule est pair » :
- B : « le numéro de la boule est un multiple de 5 » ;
- C : « le numéro de la boule est un multiple de 10 ».

1 Calculer les probabilités des événements A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$ et $A \cap \overline{C}$.

2 En déduire la probabilité des événements $A \cup B$ et $A \cup C$.
Que peut-on dire de l'événement $A \cup \overline{C}$?

Solution page 362

Corrigé de l'exercice 12.1 page 346

1 Représentons les sommes possibles dans un tableau :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Nous voyons ici qu'il y a $6 \times 4 = 24$ issues possibles. De plus, il y a 8 issues correspondant à une somme qui est multiple de 3. Donc la probabilité d'obtenir une somme multiple de 3 est :

$$p_1 = \frac{8}{24} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{1}{3}}$$

2 **a.** Le nombre formé est un multiple de 3 si la somme des chiffres est un multiple de 3. D'après la question précédente, on obtient une probabilité de :

$$p_2 = p_1 \quad \boxed{p_2 = \frac{1}{3}}$$

b. Un nombre est un multiple de 2 s'il est pair. Il y a ici $3 \times 4 = 12$ nombres pairs, soit la moitié des issues possibles. La probabilité pour que le nombre formé soit un multiple de 2 est alors :

$$\boxed{p_3 = \frac{1}{2}}$$

3 **a.** L'ordre des chiffres importe peu, donc :

$$\boxed{p_4 = p_2 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}}$$

b. Il y a toujours un nombre pair sur 2 pour le chiffre des unités. Donc :

$$\boxed{p_5 = \frac{1}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 12.2 page 346

1 Il y a 6 figures rouges (en tout, $4 \times 3 = 12$ figures dont la moitié sont rouges). La probabilité est alors :

$$p_1 = \frac{6}{52} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{3}{26}}$$

2 En notant F l'événement « obtenir une figure » et R l'événement « obtenir une carte rouge », on peut écrire :

$$P(F \cup R) = P(F) + P(R) - P(F \cap R).$$

D'après la question précédente, $P(F \cap R) = \dfrac{3}{26}$.

De plus, $P(F) = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$ et $P(R) = \dfrac{1}{2}$ (car il y a autant de cartes rouges que de cartes noires).

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(F \cup R) &= \frac{3}{13} + \frac{1}{2} - \frac{3}{26} \\ &= \frac{6}{26} + \frac{13}{26} - \frac{3}{26} \\ \boxed{P(F \cup R) = \frac{8}{13}} \end{aligned}$$

Remarque 90

On aurait aussi pu raisonner en passant par l'événement contraire, à savoir $\overline{F \cup R}$: « obtenir une carte qui n'est pas une figure et qui est noire ». On en compte en tout $10 \times 2 = 20$ (10 cartes ne sont pas des figures et il n'y a que 2 couleurs noires). Donc la probabilité de l'événement contraire est égale à $\dfrac{20}{52} = \dfrac{5}{13}$.

La probabilité demandée au départ est donc égale à $1 - \dfrac{5}{13} = \dfrac{13}{13} - \dfrac{5}{13} = \dfrac{8}{13}$.

3 Pour cette question, il vaut mieux compter les cartes de chaque ensemble car ces deux derniers sont disjoints (ils n'ont pas d'élément en commun).

Il y a 6 figures rouges et 20 cartes noires qui ne sont pas des figures, donc il y a en tout 26 cartes (soit la moitié du jeu).

La probabilité est donc égale à $\dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 12.3 page 346

1
$$\begin{aligned} P(Y) &= 1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15}\right) \\ &= 1 - \frac{13}{15} \\ \boxed{P(Y) = \frac{2}{15}} \end{aligned}$$

2 $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{15}$

$= \dfrac{9}{15}$

$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \dfrac{3}{5}}$

3 Il n'est pas possible d'avoir une lettre du mot MATH **et** le Y donc $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{Y} \cap \mathrm{X}) = 0}$.

4 $\mathrm{P}(\mathrm{Y} \cup \mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}) + \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}(\mathrm{Y} \cap \mathrm{X})$

$= \dfrac{2}{15} + \dfrac{3}{5} - 0$

$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{Y} \cup \mathrm{M}) = \dfrac{11}{15}}$

Corrigé de l'exercice 12.4 page 347

1 L'univers est ici composé de tous les élèves du lycée, donc il comporte 564 éléments.

a. Il y a, dans le collège, $148 + 10 + 84 + 30 = 272$ garçons.
Par conséquent, la probabilité de choisir un garçon parmi tous les élèves est :

$$p_1 = \frac{272}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{68}{141}}.$$

b. Il y a $10 + 16 = 26$ élèves qui viennent à vélo.
Par conséquent, la probabilité de choisir un élève qui vient à vélo parmi les élèves du collège est :

$$p_2 = \frac{26}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_2 = \frac{13}{282}}$$

c. Il y a 108 filles qui viennent à pieds donc la probabilité de choisir une fille qui vient à pieds parmi les élèves du collège est :

$$p_3 = \frac{108}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_3 = \frac{9}{47}}$$

2 L'univers est ici composé des garçons du collège ; il est donc composé de 272 éléments.
Il y a 30 garçons qui viennent en voiture donc la probabilité de choisir un élève qui vient en voiture parmi les garçons est :

$$p_4 = \frac{30}{272} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_4 = \frac{15}{136}}$$

3 L'univers est ici composé des élèves qui viennent en transport en commun ; il y a donc $126 + 148 = 274$ éléments dans l'univers.
Il y a 126 filles dans cet univers donc la probabilité de choisir une fille parmi les élèves qui viennent en transport en commun est :

$$p_5 = \frac{126}{274} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_5 = \frac{63}{137}}$$

Corrigé de l'exercice 12.5 page 347

1 D'après le diagramme, il y a $70+5=75$ profs qui adorent les statistiques et la géométrie. Donc :

$$P(G\cap S)=\frac{75}{420}\qquad\text{soit}\qquad \boxed{P(G\cap S)=\frac{5}{28}}$$

2 Il y a 120 profs qui ne sont pas dans l'ensemble $S\cup G$ donc :

$$P(S\cup G)=1-\frac{120}{420}\qquad\text{soit}\qquad \boxed{P(S\cup G)=\frac{5}{7}}$$

Corrigé de l'exercice 12.6 page 348

1 $A\cap E$ est l'événement : « l'élève étudie l'anglais et l'espagnol ».

2 $A\cup E$ est l'événement : « l'élève étudie l'anglais ou l'espagnol ».

> **Attention 18**
>
> Quand on décrit « l'élève étudie l'anglais ou l'espagnol », cela sous-entend qu'il étudie l'une des deux langues ou les deux.
> On dit que le « ou » est *inclusif*. Il ne faut pas le confondra avec le « ou » *exclusif*, qui signifie que l'élève étudie l'une des deux langues mais pas les deux en même temps.

3 Sur les 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol, sachant que 8 étudient les deux langues.
Le nombre d'élèves qui n'étudient pas l'une des ces langues est alors :

$$30-(20+15-8)=30-27=3.$$

4 L'événement contraire de A est :

$$\overline{A}=\text{« l'élève n'étudie pas l'anglais. »}$$

Corrigé de l'exercice 12.7 page 348

1 Réponse (c) : $\frac{1}{6}$.
En effet, le dé est équilibré donc chaque face a la même probabilité d'être obtenue, à savoir 1 chance sur 6, quelles que soient les issues obtenues précédemment du lancer.

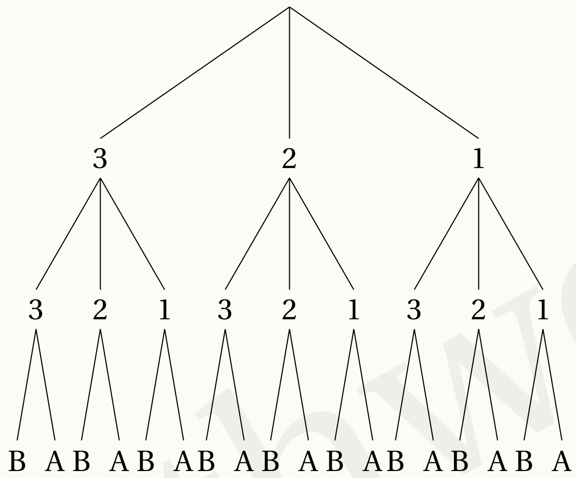
2 Réponse (c) : $\frac{1}{4}$. En effet, il y a 1 chance sur 2 pour que le 1[er] enfant soit une fille et autant pour le 2[e] enfant, donc la probabilité que les deux enfants soient deux filles est $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

3 Réponse (c) : 0. Le tirage se fait sans remise, ce qui signifie que la carte obtenue lors du premier tirage n'est pas remise dans le jeu et donc ne peut pas être obtenue lors du second tirage.

4 Réponse (a) : $\frac{1}{6}$. Si on lance deux dés cubiques, il y a $6\times 6 = 36$ issues possibles : 11,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,26,31,32, ...
Parmi ces 36 issues, 6 donnent deux chiffres identiques (11,22,33,44,55,66), donc la probabilité d'obtenir 2 chiffres identiques est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Corrigé de l'exercice 12.8 page 348

1 On a l'arbre suivant :

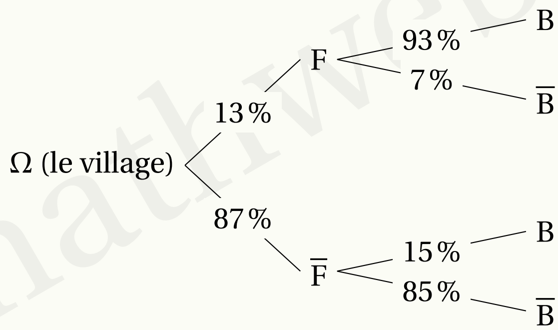


Il y a donc 18 codes possibles.

2
- $P(A) = \frac{1}{18}$: il n'y a qu'un code « 33A » sur les 18 codes possibles.
- $P(B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ car il y a 6 codes commençant par 2.
- $P(C) = \frac{1}{2}$: il y a 1 code sur 2 qui finit par A.
- $P(D) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$: seuls les codes 11A, 11B, 22A, 22B, 33A et 33B conviennent.
- $P(E) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$: seuls les codes 22A, 23A, 32A et 33A ne contiennent ni le 1, ni le B.

Corrigé de l'exercice 12.9 page 349

Commençons par noter :
- F l'événement : « la personne a vu au moins un fantôme dans sa vie » ;
- B l'événement : « la personne aime bien aller au bistrot en fin de journée ».



La probabilité que la personne choisie au hasard aime aller au bistrot en fin de journée est égale à la probabilité qu'elle ait vu un fantôme et qu'elle aime aller au bistrot, ou qu'elle n'ait pas vu de fantôme et qu'elle aime aller au bistrot.

Autrement dit : $P(B) = P(F \cap B) + P\left(\overline{F} \cap B\right)$

$$= 0,13 \times 0,93 + 0,87 \times 0,15$$
$$= 0,1209 + 0,1305$$
$$\boxed{P(B) = 0,2514}$$

Corrigé de l'exercice 12.10 page 349

1 $C_1 \cap C_2$ est l'événement : « les caisses 1 et 2 sont libres en même temps ».

2 $\overline{C_1}$ est l'événement : « la caisse 1 n'est pas libre ».

$$P(\overline{C_1}) = 1 - P(C_1) = 1 - 0,3 = \underline{0,7}.$$

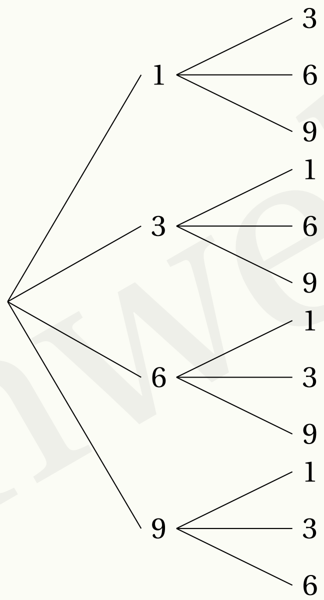
3 $C_1 \cup C_2$ est l'événement : « la caisse 1 ou la caisse 2 est libre ».

$$P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = 0,3 + 0,4 - 0,2 = \underline{0,5}.$$

4 $P\left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}\right) = P\left(\overline{C_1 \cup C_2}\right) = 1 - P(C_1 \cup C_2) = 1 - 0,5 = \underline{0,5}.$

Corrigé de l'exercice 12.11 page 349

1 **a.** L'arbre des possibilités est le suivant :



b. Nous voyons sur l'arbre des possibilités qu'il y a 12 issues possibles.

2 **a.** • Il y a 3 issues qui représentent des nombres pairs (16, 36 et 96) donc $P(A) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

- Un nombre est un multiple de 3 lorsque la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3. Il y a donc 6 nombres divisibles par 3 (36, 39, 63, 69, 93 et 96), donc $P(B) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.
- $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

b. $A \cup B$ est l'événement : « le nombre obtenu est pair ou multiple de 3 »; il contient donc 7 issues concernées (16, 36, 39, 63, 69, 93 et 96), donc $P(A \cup B) = \dfrac{7}{12}$.

c. $A \cap B$ est l'événement : « le nombre obtenu est pair et divisible par 3 »; il y a donc 2 issues concernées (36 et 96), donc $P(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

N.B. On aurait aussi pu utiliser la formule :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{3}{12} + \frac{6}{12} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{2}{12} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 12.12 page 350

Le programme complété est le suivant :

Code Python 12-19

```
1  from random import randint
2
3  count = 0
4
5  for i in range(1000):
6      d = randint(1,6)
7      if d == 1:
8          count = count + 1
9
10 print( count )
```

Explications :

Ligne 5 : c'est une boucle *itérative*, qui signifie « Pour chaque valeur de `i` dans la liste `[0,1,2,...,999]` ». Elle signifie donc que l'on va exécuter 1 000 fois les instructions qui se trouvent dans cette boucle.

Ligne 6 : `d` prend une valeur entière aléatoire entre 1 et 6 (inclus).

Ligne 7 : on teste ici si `d` est égale à 1, auquel cas on exécute l'instruction suivante.

Ligne 8 : la valeur contenue dans la variable `count` est désormais égale à elle-même augmentée de 1. Donc cette variable compte le nombre de fois où `d` prend la valeur 1.

Ainsi, la boucle représente les 1 000 lancers du dé, et l'instruction « `d = randint(1,6)` » simule un lancer du dé. À la fin du programme, la valeur contenue dans `count` est affichée, représentant le nombre de fois où l'on a obtenu « 1 ».

Corrigé de l'exercice 12.13 page 350

1 La plus petite somme possible est 2 car le plus petit nombre du dé cubique est 1, et celui du dé tétraédrique est 1.

La plus grande somme possible est 10 car le plus grand nombre du dé cubique est 6, et celui du dé tétraédrique est 4.

2 La boucle itérative *for* exécute 1 000 fois les instructions qui sont placées à l'intérieur de cette boucle : on simule 1 000 lancers.

Les lignes 6 et 7 simulent respectivement un lancer du dé cubique et tétraédrique.

La ligne 8 calcule la somme des nombres obtenus.

De la ligne 10 à la ligne 13, on parcourt chaque couple de la liste `S` : quand le premier nombre du couple correspond à la somme obtenue, on ajoute 1 au deuxième nombre du couple et on remplace le couple existant par le nouveau. Par exemple, si la somme obtenue est 4 et que le couple est (4,8), il sera remplacé par (4,9). Le deuxième nombre compte le nombre de fois où l'on obtient le premier nombre.

3 À la vue des simulations données, on peut observer que les sommes « 5 », « 6 » et « 7 » sont les plus fréquentes.

4 Pour déterminer la probabilité de chacune des sommes, on peut dresser une table d'addition :

Dé tétra. \ Dé cubique	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

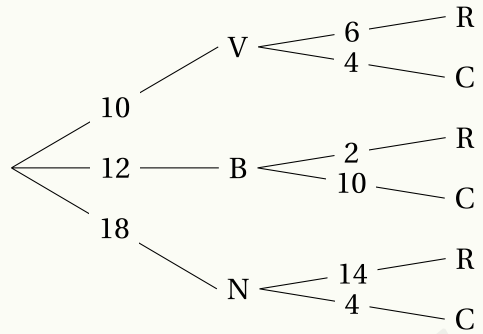
Il y a donc 24 issues. Si on note S la somme obtenu, on a alors :

- $P(S=2) = \frac{1}{24}$
- $P(S=3) = \frac{2}{24}$
- $P(S=4) = \frac{3}{24}$
- $P(S=5) = \frac{4}{24}$
- $P(S=6) = \frac{4}{24}$
- $P(S=7) = \frac{4}{24}$
- $P(S=8) = \frac{3}{24}$
- $P(S=9) = \frac{2}{24}$
- $P(S=10) = \frac{1}{24}$

On peut alors voir que nos simulations Python reflètent la réalité : les sommes « 5 », « 6 » et « 7 » sont bien les plus fréquentes.

Corrigé de l'exercice 12.14 page 351

1 Construisons un arbre pour dénombrer les jetons selon leur couleur et leur forme :



2 **a.** D'après l'arbre construit précédemment, on a :

- $P(A) = \dfrac{10}{10+12+18} = \dfrac{1}{4}$.
- $P(B) = \dfrac{4+10+4}{30} = \dfrac{18}{40} = \dfrac{9}{20}$.
- $P(C) = \dfrac{4+4}{40} = \dfrac{1}{5}$.

b.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
- $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{9}{20} = \dfrac{11}{20}$.
- $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$.

c. L'événement contraire de C est :

$\overline{C}$: « le jeton n'est pas carré ou il est bleu ».

- On compte les jetons qui ne sont pas carrés ou qui sont bleus pour calculer :

$$P(\overline{C}) = \frac{6+2+14+10}{40} = \frac{32}{40} = \frac{\cancel{8}\times 4}{\cancel{8}\times 5} = \frac{4}{5}.$$

- On utilise la formule du cours :

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Corrigé de l'exercice 12.15 page 352

Avant de répondre aux questions, on peut dresser le tableau suivant :

Face du dé	1	2	3	4	5	6
Probailité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$

En effet, si la probabilité d'obtenir 6 est $\dfrac{1}{2}$, la somme des autres probabilités est aussi égale à $\frac{1}{2}$. De plus, toutes les autres probabilités sont égales ; donc elles sont égales à $\frac{\frac{1}{2}}{5}=\frac{1}{10}$.

1 $P(A)=\frac{1}{2}$.

2 $P(B)=\frac{1}{10}$.

3 Obtenir un nombre pair, c'est obtenir « 2 ou 4 ou 6 ».

Donc $P(C)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir un nombre impair est :

$$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}.$$

Ce dernier résultat est cohérent d'après le tableau construit en début de corrigé.

Corrigé de l'exercice 12.16 page 352

1
- $P(A)=\frac{1}{2}$. En effet, il y a un nombre pair sur 2 sur l'intervalle des entiers $[\![1;100]\!]$.
- $P(B)=\frac{1}{5}$. En effet, il y a un nombre sur 5 qui est un multiple de 5 sur l'intervalle des entiers $[\![1;100]\!]$.
- $P(C)=\frac{1}{10}$. En effet, il y a un nombre sur 10 qui est un multiple de 10 sur l'intervalle des entiers $[\![1;100]\!]$.
- $P(A\cap B)=P(C)=\frac{1}{10}$. En effet, « un nombre pair ET multiple de 5 » est un nombre multiple de 10.
- $P(B\cap C)=P(C)=\frac{1}{10}$. En effet, « un nombre multiple de 5 ET de 10 » est un nombre multiple de 10.
- $P(A\cap\overline{C})=\frac{50-10}{100}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$. En effet, parmi les 50 nombres pairs, on enlève les 10 multiples de 10 pour obtenir les « nombres pairs qui ne sont pas multiples de 10 ».

2
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$.
- $P(A\cup\overline{C})=P(A)+\left[1-P(C)\right]-P(A\cap\overline{C})=\frac{1}{2}+\frac{9}{10}-\frac{2}{5}=\frac{5+9-4}{10}=1$.

On peut alors dire que l'événement $A\cup\overline{C}$ est *certain*.

13

Échantillonnage

Plan du chapitre

Attention 19

Officiellement, le programme suggère d'aborder la notion d'échantillonnage uniquement à travers des simulations informatiques.
Le cours et les exercices de ce chapitre traitant des intervalles de fluctuation sont donc *hors-programme*.
J'ai toutefois décidé de les garder pour les élèves souhaitant aller au-delà du programme.

I - Introduction

Nous allons considérer l'expérience consistant à lancer un dé cubique supposé non truqué.
On pose alors :

A : « obtenir le 1 ».

Nous allons effectuer une simulation de 100 lancers de dé à l'aide d'un tableur.
Ouvrons un tableur et entrons dans la cellule `A1` la formule suivante :

	A	B	C
1	`=ENT(1+6*ALEA())`		
2			

- La fonction `ALEA()` permet de calculer un nombre aléatoire compris entre 0 (compris) et 1 (non compris) ;
- `6*ALEA()` affichera donc un nombre dans l'intervalle `[0;6[` ;
- `1+6*ALEA()` affichera donc un nombre dans l'intervalle `[1;7[` ;
- La fonction `ENT` calcule la partie entière d'un nombre ; donc `ENT(1+6*ALEA())` affichera un nombre entier parmi : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Maintenant, copions cette formule de `A2` à `A100` afin d'obtenir, au final, 100 nombres entiers compris entre 1 et 6.
Dans la cellule `A101`, entrons la formule :

`=NB.SI(A1:A100;1)`

Elle affichera le nombre de « 1 » qui apparaissent dans la colonne `A`.
Ensuite, entrons dans la cellule `A102` la formule :

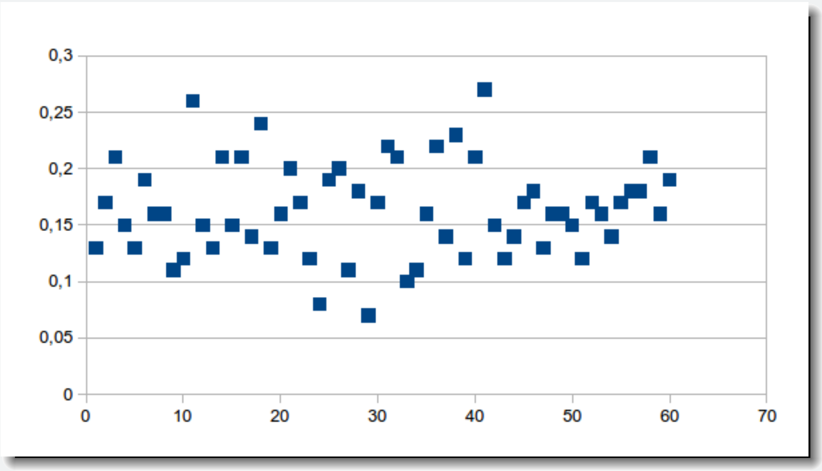
`=A101/100`

pour afficher la fréquence d'apparition du nombre « 1 » dans la colonne `A`.

Copions alors la colonne `A` dans les colonnes de `B` à `BG` afin d'obtenir au final 60 colonnes de nombres.
Ceci simule 60 échantillons de 100 lancers d'un dé cubique (60 échantillons de taille $n = 100$).

On construit alors un nuage de points représentant les différentes fréquences obtenues.

En appuyant sur la touche `[F9]`, on rafraîchit les calculs et on obtient un autre graphique. Voici un des graphiques obtenus :



La fréquence d'apparition théorique du nombre « 1 » est la probabilité d'obtenir ce nombre :

$$p = \frac{1}{6} \approx 0,17.$$

On s'aperçoit alors sur le graphique que les fréquences semblent se regrouper autour de cette valeur. On peut donc imaginer que les fréquences d'apparition du nombre « 1 » vont se trouver dans un intervalle centré en p : un intervalle de la forme $\mathrm{I} = \left[p-\delta\,;p+\delta\right]$.
Nous allons prendre $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$. Alors, $\mathrm{I} \approx [0,066\,;0,267]$.

Pour connaître le pourcentage de fréquences comprises dans cet intervalle, insérons dans la cellule `A103` la formule :

```
=SI(A102<=0,266;SI(A102>0,067;1;0);0)
```

qui affiche « 1 » si tel est le cas, et « 0 » sinon. Ensuite, copions-la sur toute la ligne 103 jusqu'à `BH103`.
Dans la cellule `A104`, insérons la formule :

```
=SOMME(A103:BH103)/60
```

puis formatons cette cellule de sorte à ce qu'elle affiche un pourcentage (en cliquant sur l'icône « % ») : ceci affichera le pourcentage de fréquences d'apparition du « 1 » qui sont dans I.

En appuyant sur la touche `[F9]` plusieurs fois, je vois les pourcentages suivants :

$$100\,\% \quad ; \quad 96,67\,\% \quad ; \quad 98,33\,\% \quad ; \quad 100\,\% \quad ; \quad 100\,\% \quad ; \quad 98,33\,\%.$$

En utilisant donc cette valeur de δ, nous sommes *a priori* assurés qu'au moins 95 % des fréquences se trouvent dans I.

II - Intervalle de fluctuation

II . 1 - Échantillon

Définition 68

Soit une population dans laquelle on observe un groupe de n individus.
Ce groupe est appelé un **échantillon de taille *n*** de la population.

Exemple 96

Dans l'expérience précédente, qui consiste à lancer 100 fois un dé cubique, l'échantillon était de taille 100 car on a effectué 100 lancers de dés (que l'on a ensuite répété 60 fois).

II . 2 - Intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

Définition 69

On considère une expérience aléatoire dans laquelle on considère un événement A de probabilité p. On effectue n fois cette expérience ; on note alors f la fréquence d'apparition de l'événement A sur cet échantillon de taille n.
Un **intervalle de fluctuation au seuil de** 95 % de f, noté I_f, est un intervalle centré en p qui contient f dans un échantillon de taille n avec une probabilité égale à 0,95 :

$$\mathrm{I}_f = \left[p-\delta\,;p+\delta\right] \quad (\delta > 0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(f \in \mathrm{I}_f) = 0{,}95.$$

Propriété 66

Considérons un échantillon de taille n et posons p la probabilité d'obtenir un résultat précis. Notons f la fréquence d'apparition de ce résultat dans l'échantillon.
Si $0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$ et $n \geqslant 25$, un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est approché par l'intervalle :

$$\mathrm{I}_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

II . 3 - Prise de décision

On utilise les intervalles de fluctuations pour déterminer si l'on peut considérer qu'un événement est « normal » ou pas.

Exemple 97

On lance 100 fois un dé tétraédrique (4 faces) et on observe que la fréquence d'apparition de la face « 3 » est $f = 0{,}32$. On peut donc se demander si le dé n'est pas truqué car la fréquence observé est plus grande que la probabilité de l'événement, à savoir $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\mathrm{I}_f = \left[0{,}25 - \frac{1}{\sqrt{100}}\,;0{,}25 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}15\,;0{,}35].$$

On constate alors que $f \in \mathrm{I}_f$, ce qui nous permet de dire que le dé n'est probablement pas truqué.

En revanche, si $f = 0{,}29$ sur 10 000 lancers, l'intervalle de fluctuation devient :

$$\mathrm{I}'_f = \left[0{,}25 - \frac{1}{\sqrt{10\,000}}\,;0{,}25 + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}\right] = [0{,}24\,;0{,}26].$$

Dans ce cas, $f \notin \mathrm{I}'_f$, ce qui nous permet de dire que le dé est probablement truqué.

Exercice 13.1 (le dé d'Al)

Al a fabriqué un dé cubique. Il le lance 50 fois et obtient 10 fois la face « 3 ».

1. Avec un dé équilibré, quelle est la probabilité d'obtenir la face « 3 » ?
2. Peut-on utiliser l'intervalle de fluctuation vu en cours pour déterminer si le dé d'Al est équilibré ?

Solution page 370

Exercice 13.2 (le Dédale)

Le Dédale est un labyrinthe d'un parc de loisirs.
D'après les statistiques observées au cours de la première année d'ouverture de cette attraction, le pourcentage de visiteurs ayant mis plus de 5 minutes pour le traverser était de 69 %.
La seconde année, sur 1 000 visiteurs, le pourcentage de clients ayant mis plus de 5 minutes pour le traverser était de 66 %.

Doit-on s'inquiéter de cette baisse ?

Solution page 370

Exercice 13.3 (influence de la taille d'un échantillon)

En 2014, selon l'INSEE, la France comptait 51,45 % de femmes.
À des fins de sondages, un institut souhaite constituer un échantillon représentatif de la population concernant la répartition des genres (hommes/femmes).

1. Un premier échantillon de 500 personnes est constitué de 55 % de femmes.
   Est-il représentatif de la France quant à la répartition des genres ?
2. Un second échantillon de 1 000 est constitué de 55 % de femmes ?
   Est-il représentatif de la France quant à la répartition des genres ?

Solution page 370

Exercice 13.4 (fourchette de sondage)

Au second tour d'une élection locale, un candidat souhaite savoir s'il a des chances de gagner.
On admettra qu'en théorie, il a une chance sur deux qu'un électeur pris au hasard vote pour lui.

Il commande alors un sondage qui rapporte que sur 800 personnes, 387 ont l'intention de voter pour lui.

1. Donner l'intervalle de fluctuation correspondant à ce sondage.
2. Ce sondage semble-t-il acceptable au seuil de 95 % ?

Solution page 370

Exercice 13.5 (taux de réussite au bac)

Dans le lycée Casimir, le taux de réussite au bac est en moyenne égal à 79,7 %.

En 2022, dans ce même lycée, d'après le bac blanc effectué en février, 75,1 % des 500 élèves de Terminale ont eu une note supérieure ou égale à 10.

Le proviseur de ce lycée doit-il sérieusement s'inquiéter ?

Solution page 371

Exercice 13.6 (recherche de la taille d'un échantillon)

Sur la planète Vailox, on estime à 78 % la proportion de personnes circulant à deux roues. Dans un village de n habitants de cette planète, le pourcentage de personnes circulant à deux roues est égal à 85 % sans que cela soit incohérent avec les statistiques planétaires.

Donnez la valeur maximale de n.

Solution page 371

Exercice 13.7 (d'après un exercice SESAMATH 2014)

Double Face, célèbre ennemi de Batman, utilise une pièce fétiche pour choisir s'il doit gracier ou tuer ses ennemis. Spiderman, fan de Batman, a regardé tous les comics et a constaté que la pièce était tombée 117 fois sur la face vie pour 256 lancers.
Clark Kent pense qu'il y a autant de chances à ce tirage de tomber sur la face mort que sur la face vie.
Catwoman, et son esprit vif comme un félin, pense, elle, que Double Face a truqué la pièce pour laisser seulement à ses proies une chance de survie de 40 %.
Qui de Clark ou de Catwoman peut avoir raison ?

Solution page 371

Exercice 13.8 (taux de passage en Premières S et ES)

Jusqu'en 2017, dans le lycée Casimir, le taux d'élèves de Seconde souhaitant aller en 1$^{\text{re}}$ S (paix à son âme) était de 52 %, et celui des élèves souhaitant aller en 1$^{\text{re}}$ ES (paix à son âme aussi) était de 36 % (reposez en paix, chères 1$^{\text{re}}$ S et 1$^{\text{re}}$ ES).
En 2018, ces taux étaient égaux à 45 % (pour la 1$^{\text{re}}$ S) et 48 % (pour la 1$^{\text{re}}$ ES).

Quelles devaient être les nombres possibles d'élèves en 2018 pour que ces taux soient acceptables au seuil de 95 % ?

Solution page 372

Exercice 13.9 (lire un programme Python)

Voici un programme bien mystérieux écrit en Python :

Code Python 13-20

```python
import random

def success(x):
    if x>0.7:
        return 1
    else:
        return 0

def decision(f,a,b):
    if (f>a) and (f<b):
        return True
    else:
        return False

k = 0

n = int(input("Entrez le nombre de simulations : "))

for i in range(0,n):
    x = random.random()
    k += success(x)

a = 0.3-1/(n**0.5)
b = 0.3+1/(n**0.5)
f = k/n

if decision(f,a,b):
    print('Tout est normal.')
else:
    print("Y'a comme qui dirait un bins quelque part...")
```

Que fait-il ?

Solution page 373

Corrigé de l'exercice 13.1 page 367

1. La probabilité d'obtenir la face « 3 »avec un dé équilibré est $p = \frac{1}{6}$.

2. L'intervalle de fluctuation correspondant à $n = 50 \geqslant 25$ lancers et à $p = \frac{1}{6}$ ne peut pas se trouver à l'aide de la formule du cours car $p \notin [0,2\,;0,8]$.
   On ne peut donc pas, avec cette formule, vérifier si le dé d'Al est équilibré.

Corrigé de l'exercice 13.2 page 367

Ici, $n = 1\,000$ et $p = 0,69$ (69 %).
On a bien $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$. On peut donc utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation du pourcentage de clients ayant mis plus de 5 minutes pour traverser le Dédale :

$$\mathrm{I}_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,69 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\,; 0,69 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0,6584\,; 0,7216]$$

$f = 0,66 \in \mathrm{I}_f$ donc la fluctuation du pourcentage ne semble pas anormale.

Corrigé de l'exercice 13.3 page 367

1. Ici, $n = 500$ et $p = 0,5145$. On a bien $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ donc on peut utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation :

$$\mathrm{I}_f = \left[0,5145 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,; 0,5145 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,4678\,; 0,5592]$$

   $f = 0,55 \in \mathrm{I}_f$ donc l'échantillon peut être considéré comme représentatif de la France concernant la répartition des genres (au risque de se tromper de 5 %).

2. Ici, $n = 1\,000$ et $p = 0,5145$. On a bien $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ donc on peut utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation :

$$\mathrm{I}_f = \left[0,5145 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\,; 0,5145 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0,4829\,; 0,5461]$$

   $f = 0,55 \notin \mathrm{I}_f$ donc l'échantillon ne peut pas être considéré comme représentatif de la France concernant la répartition des genres (au risque de se tromper de 5 %).

Corrigé de l'exercice 13.4 page 367

1. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % se calcule en prenant $n = 800$ et $p = 0,5$ (probabilité théorique qu'il gagne) :

$$\mathrm{I}_f = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{800}}\,; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{800}}\right] \approx [0,4647\,; 0,5353].$$

2 $f = \dfrac{387}{800} \approx 0,48375 \in \mathrm{I}_f$. Par conséquent, cette observation semble conforme à nos attentes, donc ce sondage semble conforme au seuil de 95 %.

Corrigé de l'exercice 13.5 page 368

Notons $p = 0,918$ la probabilité qu'un·e caondidat·e ait son bac.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est, sur la population constituée des 500 élèves :

$$\mathrm{I} = \left[0,797 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;0,797 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,7523\,;0,8417].$$

Remarque 93

On arrondit toujours la borne inférieure par excès et la borne supérieure par défaut.

Le taux d'élèves ayant eu au moins 10 au bac blanc est 75, 1 %. Or, $0,751 \notin \mathrm{I}$ donc le proviseur peut s'inquiéter.

Corrigé de l'exercice 13.6 page 368

Ici, $p = 0,78$. Donc $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$. On peut donc utiliser la formule du cours donnant un intervalle de fluctuation :

$$\mathrm{I}_f = \left[0,78 - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;0,78 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

De plus, $f = 0,85 \in \mathrm{I}_f$ car cette fréquence est dite cohérente avec les statistiques planétaires. On peut donc déduire :

$$\begin{aligned}
& 0,85 \leqslant 0,78 + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\Longleftrightarrow\ & 0,85 - 0,78 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\Longleftrightarrow\ & 0,07 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{0,07} \geqslant \sqrt{n} \\
\Longleftrightarrow\ & n \leqslant \left(\frac{1}{0,07}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & n \leqslant 204,08
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a au maximum 204 habitants dans ce village.

Corrigé de l'exercice 13.7 page 368

Notons $f = \dfrac{117}{256} \approx 0,457$ la fréquence de faces « vie » obtenue.

- S'il y avait autant de chances d'obtenir l'une ou l'autre des deux faces de la pièce, alors la probabilité théorique d'obtenir la face « vie » serait $p = 0,5$ et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % serait :

$$I_1 = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{256}} ; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{256}}\right] = [0,4375 ; 0,5625].$$

$f \in I_1$ donc la pièce pourrait en effet être équilibrée.

- Si, au contraire, la pièce n'était pas équilibrée pour ne donner que 40 % de chances de survie aux proies de Double Face, alors $p = 0,4$ et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % serait :

$$I_2 = \left[0,4 - \frac{1}{\sqrt{256}} ; 0,4 + \frac{1}{\sqrt{256}}\right] = [0,3375 ; 0,4625].$$

$f \in I_2$ donc la pièce aurait pu aussi être truquée.

Conclusion : au seuil de 95 %, on ne peut pas conclure quant à l'équilibre de la pièce de Double Face.

Corrigé de l'exercice 13.8 page 368

Notons n le nombre d'élèves dans le lycée Casimir.

- Pour la 1re S, notons $p_S = 0,52$ la probabilité qu'un élève de Seconde souhaite passer dans cette classe et $f = 0,45$ la fréquence de ces élèves en 2018.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de cette fréquence est :

$$I_S = \left[0,52 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,52 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

On doit alors avoir :

$$0,52 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,45 \leqslant 0,52 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

soit, en soustrayant 0,52 à chaque membre de cet encadrement :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -0,07 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ou encore :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0,07$$

et donc :

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{0,07}.$$

Alors,

$$n \leqslant \frac{1}{0,07^2}$$

Ainsi, $n \leqslant 204$.

- Pour la 1re ES, on a l'intervalle suivant :

$$I_{ES} = \left[0,36 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,36 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

et on doit avoir :

$$0,36-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 0,48\leqslant 0,36+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

soit :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 0,12\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et en particulier :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant 0,12$$

donc :

$$\sqrt{n}\leqslant \frac{1}{0,12}$$

soit $n\leqslant \frac{1}{0,12^2}$, soit $n\leqslant 69,444$, donc $n\geqslant 70$.

Ainsi, le nombre d'élèves de Seconde dans le lycée Casimir doit être compris entre 70 et 204.

Corrigé de l'exercice 13.9 page 369

Nous allons décortiquer ce programme.

```
import random
```

Ici, on importe le module *random*, qui a un lien étroit avec le pseudo-aléatoire (c'est-à-dire l'aléatoire informatique).

```
def success(x):
    if x>0.7:
        return 1
    else:
        return 0
```

On définit ici une fonction nommée **success** qui a un argument : x. Si $x>0,7$ alors la fonction renvoie la valeur « 1 »; sinon, elle renvoie « 0 ».

```
def decision(f,a,b):
    if (f>=a) and (f<=b):
        return True
    else:
        return False
```

Ici, on définit une fonction nommée **decision** qui admet 3 arguments : f, a et b. Si $f>a$ ET $f<b$, c'est-à-dire si $f\in[a;b]$ alors la fonction renvoie le booléen « True » (vrai) ; sinon, elle renvoie « False » (faux).

Cette fonction teste donc si un nombre f est compris entre deux nombres a et b.

```python
k = 0
n = int(input("Entrez le nombre de simulations : "))
```

On initialise ici deux variables : k (qui prend par défaut la valeur 0) et n (qui est une valeur entière entrée au clavier).

```python
for i in range(0,n):
    x = random.random()
    k += success(x)
```

Cette boucle s'exécute n fois ; à chaque fois, x est un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 (la fonction `random()` du module *random* a cet objectif...

Remarque 94

Il fallait ici se renseigner en regardant par exemple la documentation du module sur la page :

https://docs.python.org/3/library/random.html).

Dans un cas général, quand on a un programme Python dans lequel on ne connaît pas bien le fonctionnement d'un module, il est souhaitable de consulter sa documentation sur le site https://docs.python.org/3/library.

Une fois x choisi, on incrémente la variable k de 1 si ce nombre est supérieur à 0,7, et de 0 sinon.

```python
a = 0.3-1/(n**0.5)
b = 0.3+1/(n**0.5)
f = k/n
```

Tiens tiens... ça me dit quelque chose ces calculs...
$a = 0,3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation dont nous avons parlé en cours (0,3 étant la probabilité d'obtenir un nombre plus grand que 0,7 si on choisit un nombre au hasard entre 0 et 1). Pour trouver 0,7, on considère le fait qu'entre 1 et 0,7, il y a une différence de 0,3.
Quant à b, c'est la borne supérieure.

$$f = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre de fois où l'on a obtenu un nombre supérieur à } 0,7}{\text{nombre de fois où l'on a simulé l'expérience}}.$$

C'est donc la fréquence du nombre de nombres supérieurs à 0,7 obtenus.

```python
if decision(f,a,b):
    print('Tout est normal.')
else:
    print("Y'a comme qui dirait un bins quelque part...")
```

Il effectue ici un test : si $f \in [a ; b]$ alors on affiche que tout est normal ; sinon, on affiche qu'il y a un problème.

Finalement, ce programme teste la fonction **random** avec l'intervalle de fluctuation.