

1 heure – calculatrice collège

1 - QCM(4 points)

Indiquer la référence de la réponse correspondant à la question posée :

Question 1

Le tableau de signes de la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 5$ est :

a.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$4 - 4 \times 1 \times 5$$

b.

x	$-\infty$	-16	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

c.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

d.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

Question 2

a) Si le discriminant d'un polynôme du second degré est strictement positif, alors ce polynôme admet 2 racines positives.	b) Si le discriminant d'un polynôme du second degré est strictement négatif, alors ce polynôme admet 2 racines négatives.	c) Si un polynôme du second degré est toujours strictement positif, alors ce polynôme n'admet pas de racine.	d) Si le discriminant d'un polynôme du second degré est nul, alors ce polynôme admet le nombre 0 pour racine.
---	---	--	---

Question 3

Une fonction du second degré f a pour forme canonique valable pour tout réel x :

$$f(x) = 3(x+2)^2 + 5. \quad = 3(x^2 + 4x + 4) + 5$$

$$3x^2 + 12x + 17$$

Concernant son discriminant :

a) on peut dire qu'il est nul	b) on peut dire qu'il est strictement positif	c) on peut dire qu'il est strictement négatif	d) on ne peut rien dire sur son signe
-------------------------------	---	---	---------------------------------------

$$144 - 4 \times 3 \times 17$$

$$2c_1 = -2$$

Question 4

L'équation $x^2 + ax + 6$ admet -2 comme solution.

a. Il n'existe pas d'autres solutions	b. Il existe une autre solution $x = -3$	c. Il existe une autre solution $x = -\frac{1}{3}$	d. On ne peut pas savoir
---------------------------------------	--	--	--------------------------

2 - SUITE GEOMETRIQUE (3 points) 3

La suite suivante est géométrique. Exprimer v_n en fonction de n , puis calculer les 4 premiers termes.

$$v_0 = 2 \text{ et } q = -\frac{1}{2}$$

3 - SUITE GEOMETRIQUE (3 points) u

La suite suivante est géométrique. Exprimer v_n en fonction de n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$v_2 = 4 \text{ et } q = \frac{3}{2}$$

4 - PROBLEME - 10 points I

Un complexe cinématographique a ouvert ses portes en 2021.

En 2021, le complexe a accueilli 180 mille spectateurs. La gestionnaire du complexe prévoit une augmentation de 4% par an de la fréquentation du complexe.

Soit n un entier naturel. On note u_n le nombre de spectateurs, en milliers, du complexe cinématographique pour l'année $(2021 + n)$. On a donc $u_0 = 180$.

- Calculer le nombre de spectateurs prévisibles en 2022, en 2023
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
- Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.
- Exprimer u_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .

Un autre cinéma était déjà installé au centre-ville. « Les Arcades »

En 2021, il a accueilli 260 000 spectateurs. Avec l'ouverture du complexe, le cinéma du centre-ville (« Les Arcades ») prévoit de perdre 10 000 spectateurs par an.

Pour n , entier naturel, on note v_n le nombre de spectateurs, en milliers, accueillis dans le cinéma du centre-ville l'année $(2018 + n)$. On a donc $v_0 = 260$.

- Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Recopier et compléter le programme ci-contre qui modélise les deux suites : compléter les informations manquantes

c. Que fait ce programme ?

```
1 from math import *
2 def cinema():
3     n=0
4     u=....
5     v=260
6     while u < v :
7         n=....
8         u=...
9         v=v-10
10    return n |
```

BONUS :

Dans l'antiquité, le roi des Indes demande un nouveau jeu pour se distraire. Son vizir Sissa inventa le jeu d'échec. (8×8 cases). Le roi, ravi de ce nouvel amusement lui demanda comment le récompenser. Sissa dit « Je voudrais un peu de riz. Placez un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième et ainsi de



suite en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz. »

Le roi accepta cette demande, qu'il trouva bien modeste.

Le conseiller s'écria : « Sire ! Vous conduisez notre pays à la ruine »

Pourquoi le conseiller du roi réagit il ainsi ?

Quelques données de référence :

1 grain de riz = 40 mg

Production mondiale de riz : 756 Millions de Tonnes en 2020

1T = 10^9 mg

1 million = 10^6

On rappelle la somme d'une suite géométrique : $S = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$



Exercice 1 : QCM

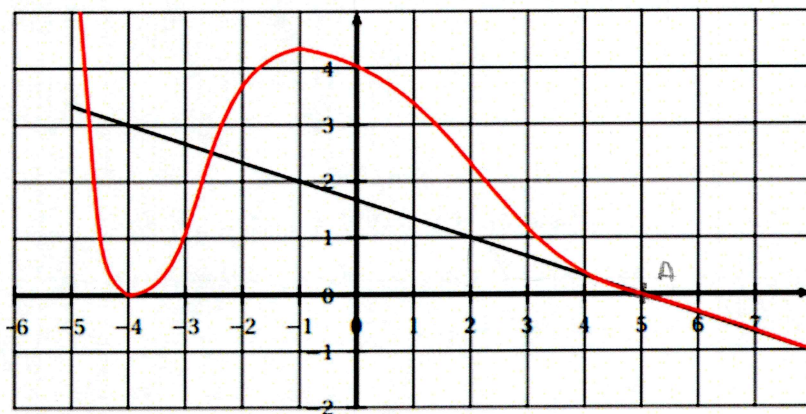
Indiquer la référence de la réponse choisie. Il n'y a qu'une seule réponse possible.

Question 1 :

On se place dans un repère orthonormé du plan.

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative notée C d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$;

La droite D est tangente à la courbe C au point $A(5 ; 0)$.



On note f' la dérivée de la fonction f , alors $f'(5)$ est égal à :

a. 3	b. -3	c. $-\frac{1}{3}$	d. $+\frac{1}{3}$
------	-------	-------------------	-------------------

Question 2

$$g'(-2) = 0$$

$$g'(3) =$$

$$g'(c) = -2$$

$$g(0) = 3$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle n'est pas juste ?

a. $f'(-2) = 0$	☒ b. $f'(3) = -2$	c. $f(0) = 3$	$f'(0) = -2$
-----------------	--	---------------	--------------

Question 3

Soit f une fonction telle que, pour tout nombre réel h , non nul,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = h^2 + 3h - 1$$

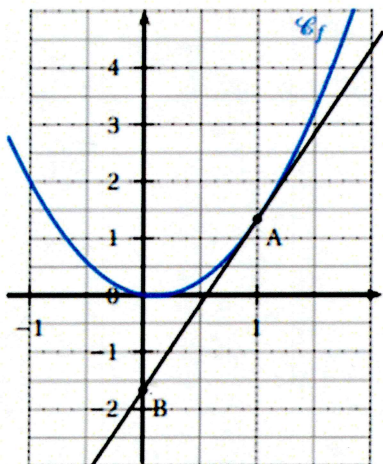
Alors $f'(1)$ est égal à :

☒ a. $h^2 + 3h - 1$	b. -1	☒ c. 3	d. Les données sont insuffisantes pour déterminer $f'(1)$.
--	---------	---	---

Question 4

La tangente à la courbe C_f au point $A(1; \frac{4}{3})$ passe par le point $B(0; -\frac{5}{3})$, alors :

☒ a. $f'(1) = \frac{1}{3}$	b. $f'(1) = \frac{4}{3}$	c. $f'(1) = -\frac{5}{3}$	d. $f'(1) = 3$
---	--------------------------	---------------------------	----------------



Question 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique C_f est donnée ci-dessous. On sait de plus que la courbe C_f admet deux tangentes horizontales : une au point d'abscisse -1 et l'autre au point d'abscisse 3 .

Alors le réel $f'(-1) \times f'(3)$ est :

a. Strictement positif	b. strictement négatif	☒ c. Egal à 0	d. Egal à $f'(3)$.
------------------------	------------------------	--	---------------------

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

1. Montrer que pour tout réel $h \neq -3$, $f(2+h) - f(2) = \frac{2h}{3h+9}$.
2. En déduire que f est dérivable en $x = 2$ et déterminer $f'(2)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 2$.
4. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des abscisses.

Exercice 3

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Indiquer le domaine de définition et de dérivabilité.

- a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$
- b) $g(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$
- c) $h(x) = (x+1)\sqrt{x}$
- d) $i(x) = \frac{x^2+3}{-2x^2+10x-12}$
- e) $j(x) = (-5x+6)^4$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 6$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $f'(a)$
- 2) Donner une équation de la droite (T) tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
- 3) Montrer qu'il existe un autre point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à (T) .
- 4) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?



I QCM (4 points)**Question 1**L'inéquation $x^2 + x + 2 > 0$:

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

a. n'a pas de solution	b. a une seule solution	c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $[1; 2]$	d. a pour solution l'ensemble des nombres réels
------------------------	-------------------------	---	---

Question 2

Soit a , b et c trois réels tels que $a \neq 0$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

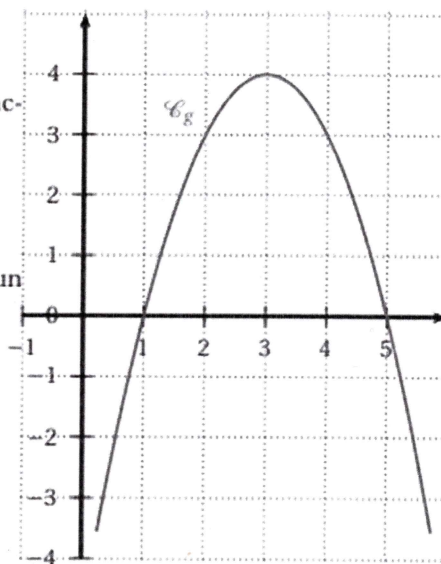
$$g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soit Δ son discriminant.

La représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.

Alors on peut affirmer que :

- a. $a > 0$ et $\Delta > 0$
- b. $a > 0$ et $\Delta < 0$
- c. $a < 0$ et $\Delta > 0$
- d. $a < 0$ et $\Delta < 0$

**Question 3**

L'équation $2x^2 - 8x + 6 = 0$ admet deux solutions. Leur somme S et leur produit P sont :

A. $S = -8$
 $P = 6$

B. $S = -4$
 $P = 3$

C. $S = 4$
 $P = 3$

D. $S = 3$
 $P = -4$

Question 4

1. L'inéquation $2x^2 - 9x + 4 \geq 0$ a pour ensemble de solutions :

a. $S = \left[\frac{1}{2}; 4 \right]$

b. $S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \cup [4; +\infty[$

c. $S = \emptyset$

d. $S = \left] -\infty; -4 \right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[$

NOM : Thierry Elise

3,5

- 1) On donne $A(-2; 3)$ $B(4; 1)$. Donner l'équation du cercle de centre A passant par B.

$$\begin{aligned}(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 &= R^2 \\(x + 2)^2 - (y - 3)^2 &= R^2 \\x^2 + 4x + 4 - y^2 - 6y + 9 &= R^2 \\x^2 - y^2 + 4x - 6y + 13 &= R^2 \\x^2 - y^2 + 4x - 6y + \frac{40}{3} &= 0\end{aligned}$$

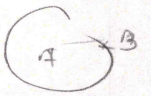
$$R = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$R = \frac{1 - 3}{4 - (-2)}$$

$$R = \frac{-2}{6}$$

$$R = -\frac{1}{3}$$

9,5



- 2) On donne la droite d'équation $2x - 3y + 5 = 0$

Donner un vecteur directeur de la droite (d) :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donner un vecteur normal de la droite (d) :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1

- 3) On donne l'équation du cercle suivante

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

Quelles sont les coordonnées du centre du cercle Ω et le rayon ?

$$\Omega(x_1; y_1)$$

$$\Omega(-1; 3)$$

$$R^2 = 9$$

$$R = 3$$

1

- 4) Que signifie $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$?

Deux réponses sont attendues.

1

- les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont perpendiculaires

- la droite passant par les points M et A et la droite passant par les points M et B sont perpendiculaires.

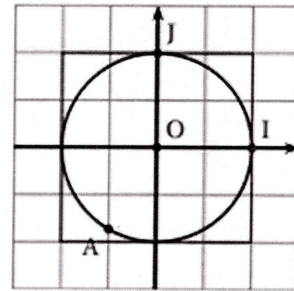
Calculatrice non autorisée

30 minutes

Coefficient 1

1.

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le point A, placé ci-contre sur le cercle trigonométrique de centre O, d'origine I, est associé au réel :



Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$

D

2.

1. Si $\sin x = \frac{1}{3}$ alors

a. $\sin(x + \pi) = -\frac{1}{3}$

b. $\sin(x - \pi) = \frac{1}{3}$

c. $\cos(x) = \frac{2}{3}$

d. $\sin(x + 15\pi) = \frac{1}{3}$.

3.

Le réel $-\frac{23\pi}{3}$ a le même point image sur le cercle trigonométrique que le réel :

a. $-\frac{\pi}{3}$	b. $\frac{\pi}{3}$	c. $-\frac{2\pi}{3}$	d. $\frac{2\pi}{3}$
---------------------	--------------------	----------------------	---------------------

4.

Sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solution(s)

a. $\frac{\pi}{6}$

b. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

c. $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$

d. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

5.

Les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

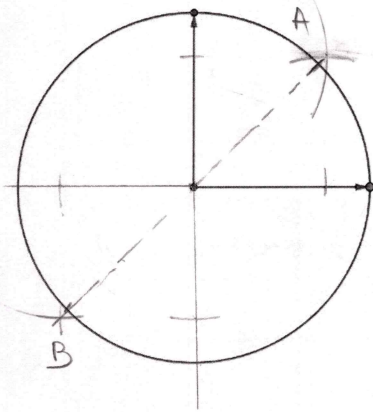
a. $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$

b. $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

d. $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

6. Placer les points A $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et B $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ au compas.



2

7. On donne $\sin(a) = \frac{1}{4}$. Calculer $\cos(a)$ avec $a \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Donner la valeur exacte.

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

$$\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$$

$$\cos^2(a) = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\cos^2(a) = \frac{15}{16}$$

$$\cos(a) = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

2

8. Donner $\sin(26\pi + x)$

$$\sin^2(26\pi + x) + \cos^2(26\pi + x) = 1$$

donc $\sin^2(26\pi + x) = 1 - \cos^2(26\pi + x)$

$$|\sin(26\pi + x)| = \sqrt{1 - \cos^2(26\pi + x)}$$

$$\sin(26\pi + x) = \sin(2 \times 13\pi + x) = \sin(x)$$

0

9. Calculer $C = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (valeur exacte)

$$C = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - 4}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$$

2

10. Calculer $D = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$D = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{2}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

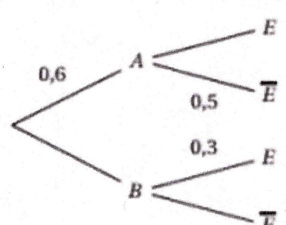
2

1 heure - coeff 2 - calculatrice collège

I Remplir le tableau ci-dessous

Répondre directement sur le sujet.

Toutes les réponses doivent être justifiées en rappelant la formule ou la propriété utilisée.

Question	Réponse	Points
1 - Soient les événements A et B d'un univers E tels que $P(A) = 0,64$ $P(B) = 0,4$ $P(A \cap B) = 0,256$ Que peut-on dire des événements A et B ?	$P(A \cap B) = 0,256$ $P(A) \times P(B) = 0,64 \times 0,4 = 0,256$ $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ Les événements A et B sont indépendants.	1
2 On donne l'arbre de probabilité suivant :  Calculer $p(\bar{E})$	$P(\bar{E}) = P(A) \times P_A(\bar{E}) + P(B) \times P_B(\bar{E})$ $= 0,6 \times 0,5 + 0,4 \times 0,7$ $P(\bar{E}) = 0,58$ $P(B) = 1 - P(A) = 0,4$ $P_B(\bar{E}) = 1 - P_B(E) = 0,7$	1
3 - Calculer $A = (\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2$	$\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) - (\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x))$ $= 4\cos(x)\sin(x)$	1
4 - résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 6x + 1 < 0$	$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 1$ $= 36 - 4 \times 3 \times 1 = 24$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{24}}{6} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{24}}{6} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$ donc $x \in]\frac{3 - \sqrt{6}}{3}; \frac{3 + \sqrt{6}}{3}[$	1
5 - Soit la suite arithmétique $u_n = 4n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ Donner son sens de variation	$u_n = 4n - 2$ donc $r = 4$ $u_n = r \times n + u_0$ $u > 0$, la suite est croissante	1
6 - Soit la suite définie par $u_{n+1} = u_n - 4$ avec $u_0 = 3$: donner l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$	$u_{n+1} = u_n - 4$ $u_n = u_0 + r \times n$ $u_n = 3 + -4n$	1



7 - Soit u_n une suite arithmétique. pour tout $n \in \mathbb{N}$ On donne $u_5 = 6$ et $u_9 = 8$. Donner la raison r de la suite.	$u_n = u_9 + (n-9)r$ $u_5 = u_6 + (9-5)r$ $6 = 6 + 3r$ $2 = 3r$ $\frac{2}{3} = r$	1
8 - Soit v_n une suite géométrique Pour tout $n \in \mathbb{N}$ Soit $v_3 = 5$ et $q = \frac{1}{3}$ donner l'expression de v_n en fonction de n.	$u_n = u_9 \times q^{(n-9)}$ $v_n = v_3 \times q^{(n-3)}$ <i>au km</i>	0,5
9 - Calculer la somme des 10 premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = 20$.	$S = \frac{1-q^{10}}{1-q} \times u_0$ $S = \frac{1-0,8^{10}}{1-0,8} \times 20 \approx 91,41$	0,5
10 - Compléter le programme écrit en python ci-dessous. Il décrit une suite géométrique de premier terme 3,2 et de raison 1,4 <pre> 1 from math import * 2 def terme_suite(n): 3 u=... 4 for i in range(1,n): 5 u=... 6 return(u) 7 </pre>	<pre> from math import * def terme_suite(n): u = 3,2 for i in range(1,n): u = u * 1,4 return(u) </pre>	1
11 - Que fait ce programme écrit en python : <pre> 1 from math import * 2 def rang(): 3 u=5000 4 n=0 5 while u>2500: 6 u=u*0.92 7 n=n+1 8 return(n) </pre>	ce programme donne la valeur de n pour laquelle $u_n < 2500$ avec $u_0 = 5000$ et $q = 0,92$	1
12 - Calculer la somme des 15 premiers entiers naturels.	$S = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$ $= \frac{u_1 + u_{15}}{2} \times 11 = 88$ <i>$S = \frac{n(n+1)}{2}$</i>	0
13 - Soit la suite géométrique $v_n = 0,55 \times 1,02^n$. Quel est son sens de variation ?	$v_n = 0,55 \times 1,02^n$ $v_n = v_0 \times q^n \text{ donc } q = 1,02$ $q > 1$ donc la suite est croissante	1

Dear Mr. [Name]
I have the pleasure to inform you
that the [Name] has been
admitted to the [Name] and
will be [Name] on [Date].
I am, Sir, very respectfully,
Your obedient servant,
[Name]

I am, Sir, very respectfully,
Your obedient servant,
[Name]

I am, Sir, very respectfully,
Your obedient servant,
[Name]

II QCM

Entourer la bonne réponse

Question 1

Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = \frac{1}{2}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

Proposition A : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Proposition B : $x = \frac{\pi}{6}$

Proposition C : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Proposition D : $x = -\frac{7\pi}{6}$

Question 2

Les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

a) $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

d) $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$

Question 3

Dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, l'équation $2 \cos(x) - \sqrt{3} = 0$ a pour solutions :

a) $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$

b) $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$

c) $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$

d) $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

Question 4

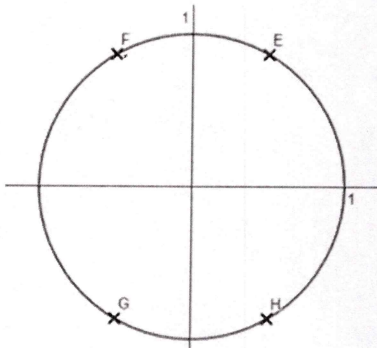
Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le nombre $\frac{14\pi}{3}$ a pour image le point :

a) E

b) F

c) G

d) H



Question 5

L'équation $2x^2 - 8x + 6 = 0$ admet deux solutions. Leur somme S et leur produit P sont :

A)
 $S = -8$
 $P = 6$

B)
 $S = -4$
 $P = 3$

C)
 $S = 4$
 $P = 3$

D)
 $S = 3$
 $P = -4$

Question 6

Question 3

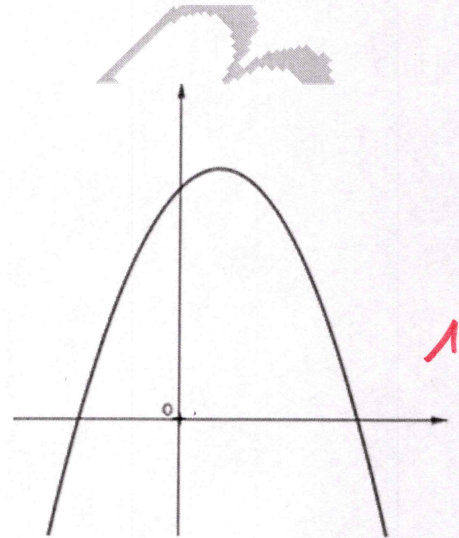
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels.}$$

On considère dans un repère la courbe représentative de f tracée ci-contre.

On appelle Δ son discriminant.

On peut affirmer que :



a) $a > 0$ ou $c < 0$	<u>b) c et Δ sont du même signe</u>	c) $a < 0$ et $c < 0$	d) $a < 0$ et $\Delta < 0$
-----------------------	--	-----------------------	----------------------------

Question 7

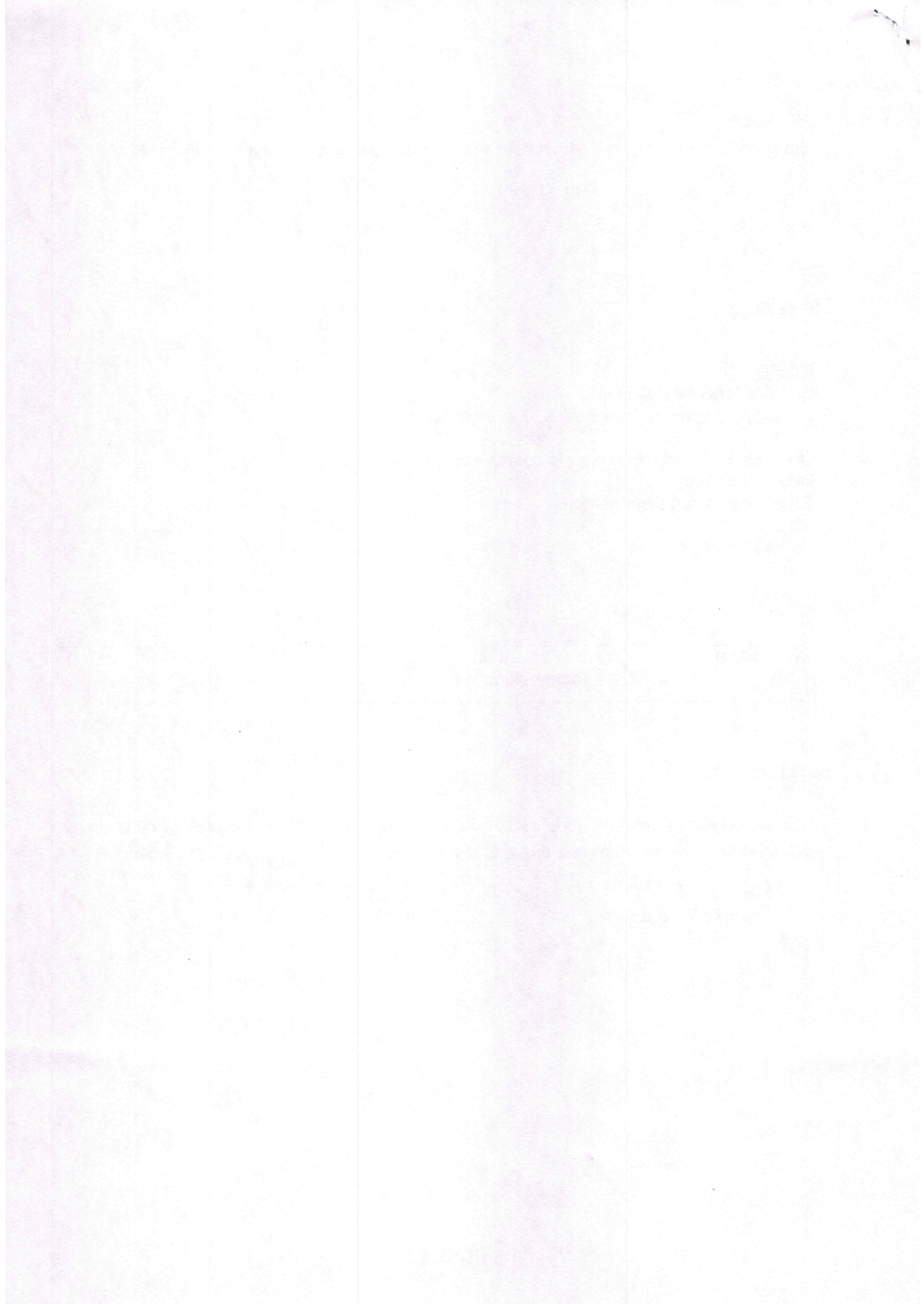
Dans un repère orthonormé, la parabole d'équation $y = 3x^2 - 9x + 5$ a pour sommet le point S et pour axe de symétrie la droite Δ . Les coordonnées de S et l'équation de Δ sont :

a) $S(\frac{3}{2}; \frac{-7}{4})$ et $\Delta : x = \frac{3}{2}$

b) $S(\frac{3}{2}; \frac{-7}{4})$ et $\Delta : y = \frac{-7}{4}$

c) $S(3; 5)$ et $\Delta : x = 3$

d) $S(3; 5)$ et $\Delta : y = 5$



2 heures – calculatrice collège ou mode examen – noté sur 40

EXERCICE 1

Propriétés algébriques (8 points)

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{e^5 \times e^{-3}}{e^{-2}} \quad B = \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \quad C = \left(\frac{e}{e^{-x}}\right)^4 \quad D = (e^x)^3 e^{-3} \quad E = \frac{e^x e^{-y}}{e^{x+y}}$$

2) Montrer les égalités suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$a) (e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2 = 2(e^{2x} + 1) \quad = e^{2x} + 2e^{x+1} + e^{2x} - 2e^{x+1} + 1$$

$$X \quad b) \frac{e^{3x} - e^{2x}}{e^{3x} + e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{(e^x + 1)^2} \quad = \frac{e^{2x} - e^0}{e^{2x} + 2e^x + e^0} \quad \frac{e^x(e^3 - e^2)}{e^{2x}(e^3 + e^2)}$$

$$c) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{2e^{-x}}{2} \times \frac{2e^x}{2} = \frac{2e^0}{4} = 1$$

EXERCICE 2

Résolution équation et inéquation (10 points)

1) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$a) e^{-2x+1} = e^4$$

$$b) e^{x^2+x+4} = e^2 e^{4x}$$

$$c) 2e^{x-4} = -e^{x+4}$$

$$d) e^{x^3} = e^8$$

$$e) e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$$

$$3e^{x-4} = 0$$

2) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement :

$$a) e^{-x+2} - 1 \geq 0$$

$$b) 5e^{-3x} > 0$$

$$c) e^x \leq \frac{1}{e^x}$$

$$e^x \leq e^{-x}$$

$$d) (e^x)^3 \leq e^{x+6}$$

$$e) e^{x^2} \geq \frac{1}{e^2}$$

$$x \leq -x$$

$$e^{x^2} \geq e^{-2}$$

$$x^2$$

QCM : calculs de dérivées (4 points)

5

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{5x-1}$. Pour tout réel x , $f'(x)$ est égal à :

a) e^{5x-1}	b) $5e^{5x}$	c) $5e^{5x-1}$	d) $5xe^{5x-1}$
---------------	--------------	----------------	-----------------

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x + 7)e^x$. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, $f'(x)$ est égal à :

a) $(2x - 3)e^x$	b) $(-2x + 5)e^x$	c) $2e^x$	d) $-5e^x$
------------------	-------------------	-----------	------------

$u = -2x + 7$ $v = e^x$
 $u' = -2$ $v' = e^x$
 $-2e^x + (-2x + 7)e^x$
 $-2e^x + -2xe^x + 7e^x = 5e^x - 2xe^x$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-100x}$. Alors :

a) f est croissante sur $\mathbb{R}$	b) f est décroissante sur $\mathbb{R}$	c) f change de sens de variation sur $\mathbb{R}$	d) On ne peut pas savoir
--	--	---	--------------------------

$-100e^{-100x}$

4) Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x}$. On note f' sa fonction dérivée. Alors $f'(1) =$

a) $-\frac{1}{e}$	b) 1	c) 0	d) $\frac{1}{e}$
-------------------	------	------	------------------

$-\frac{1}{1} = -1$

EXERCICE 4

Reconnaitre une fonction exponentielle (4 points)

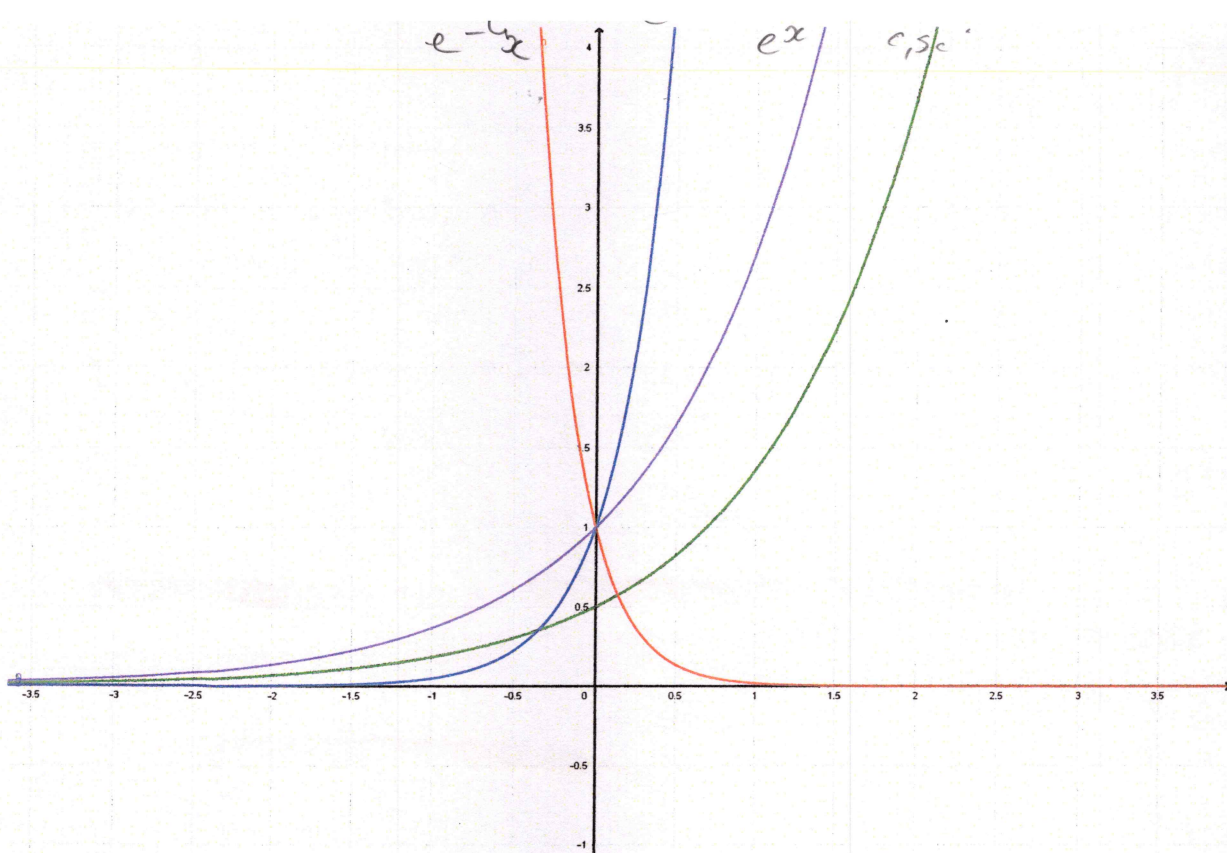
Associer chaque fonction à sa courbe représentative en justifiant :

$f(x) = 0,5e^{0,3x}$

$g(x) = e^{3x}$

$h(x) = e^{-4x}$

$i(x) = e^x$



EXERCICE 5

Variation de fonction (7 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par : $f(x) = 60xe^{-0.5x}$

La fonction dérivée de la fonction f est notée f' .

$$g'(x) = 60$$

$$60xe^{-0.5x} + 60x$$

- Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = -30(x-2)e^{-0.5x}$
- Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
- Etablir le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; 10]$.
- Quelles sont les coordonnées du point en laquelle la tangente à la courbe représentative de la fonction f est parallèle à l'axe des abscisses ?
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

$$y = g'(a)(x-a) + g(a) - 30(x-2)e^{-0.5x} = 0$$

$$y = \quad \quad \quad x = 2$$

$$-30(x-2)e^{-0.5x} > 0$$

$$(x-2)e^{-0.5x} < 0$$

$$e^{-0.5x} > 0$$

$$x-2 < 0$$

$$x < 2$$

Dynamique des populations(7 points)

Dans l'étude de la dynamique des populations, Pierre-François Verhulste (1804-1849) a proposé un modèle élaboré en prenant compte certains facteurs environnementaux – par exemple la limitation des ressources agricoles – pouvant limiter une croissance de population. Considérons la population fictive d'extra-terrestres habitant une exo-planète (par exemple K2-288Bb dont la découverte a été annoncée en janvier 2018), qui serait calculable à l'aide de la formule de Verhulste :

$$f(t) = \frac{20}{1 + e^{-0,1t}}$$

où $f(t)$ représente la population en milliards d'individus et t le temps en années K2-288Bb (c'est-à-dire 31,3 jours terrestres) depuis le début de l'observation. ($t = 0$)

- a) Calculer la population au début de l'observation
- b) Montrer que la population augmente d'environ 20 % sur les 4 premières années.
- c) Montrer que $f'(x) = \frac{2e^{-0,1t}}{(1+e^{-0,1t})^2}$
- d) Etudier les variations de la fonction f
- e) Les habitants de K2-288Bb se demandent si leur population va un jour dépasser $2f(0)$
Aidez-les à répondre à cette question

THE END....



DS8**Fonctions dérivées - Fonctions trigonométriques****Géométrie repérée.**

7 avril 2023 - 2h00

Calculatrice collège ou lycée en mode examen.

Exercice 1 : QCM : Fonctions dérivées(4 points)**Question 1 :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x - 7)^3$ a pour dérivée

a. $g'(x) = 3(4x - 7)^2$	b. $g'(x) = 3(4x - 7)$	c. $g'(x) = 12x - 21$	d. $g'(x) = 12(4x - 7)^2$
--------------------------	------------------------	-----------------------	---------------------------

Question 2 : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 2}$$

 f est dérivable sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ et pour tout réel de $]-2; +\infty[$, on a :

a. $f'(x) = 1$	b. $f'(x) = \frac{2x - 1}{(x + 2)^2}$	c. $f'(x) = \frac{5}{(x + 2)^2}$	d. $f'(x) = 2x - 1$
----------------	---------------------------------------	----------------------------------	---------------------

Question 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et , pour tout réel x , $f'(x)$ est égal à :

a. $\frac{3}{2x}$	b. $\frac{9x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$	c. $\frac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$	d. $9x^2 + 8x + 3$
-------------------	----------------------------------	-----------------------------------	--------------------

Question 4 : On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$ h est dérivable sur $[0; \infty[$

a. $h'(x) = 2x\sqrt{x}$	b. $h'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}}$	c. $h'(x) = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$	d. $h'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
-------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------------

Exercice 2 : QCM sur la géométrie repérée et la trigonométrie(6 points)

Question 1 : soit a un nombre réel. On munit le plan du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (0,5 pt)

On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \sin(a) \\ \cos(a) \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \sin(a) \\ -\cos(a) \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à :

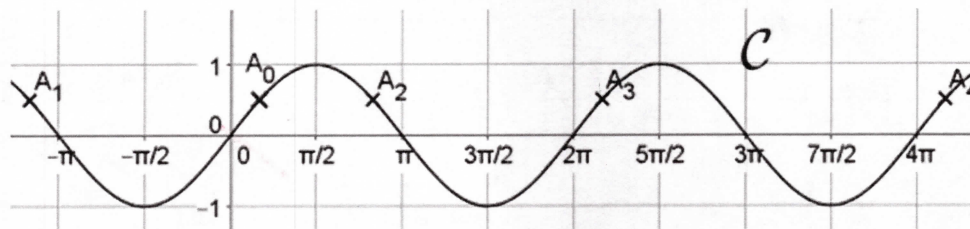
a. $\sin^2(a) + \cos^2(a)$	b. 1	c. $1 - 2\cos^2(a)$	d. 0
----------------------------	------	---------------------	------

Question 2 : la fonction f définie par $f(x) = \cos(2x)$ (0,5 pt)

a. est de période π	b. est de période 2π	c. est impaire	d. est ni paire, ni impaire
-------------------------	--------------------------	----------------	-----------------------------

Question 3 :

On a représenté ci-dessous la courbe C de la fonction sinus dans un repère orthogonal.



A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sont des points de C et ils ont tous la même ordonnée.

Parmi les segments suivants, lequel a pour longueur la période de la fonction sinus ?

a) $[A_0 ; A_1]$	b) $[A_0 ; A_2]$	c) $[A_0 ; A_3]$	d) $[A_0 ; A_4]$
------------------	------------------	------------------	------------------

Question 4 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle C de centre $A(2 : 3)$ et de rayon $R = 4$.

Parmi les équations suivantes, laquelle est une équation du cercle C ?

- a. $x^2 + 4x + y^2 + 6y + 9 = 0$
- b. $x^2 + 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$
- c. $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$
- d. $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$

Question 5 :

Dans un repère orthonormé le cercle C a pour équation $x^2 - 2x + y^2 + y = 1$ et la droite D a pour équation $y = 1$.

- a. C et D n'ont aucun point d'intersection
- ☒ b. C et D ont un seul point d'intersection
- c. C et D ont deux points d'intersection
- d. On ne peut pas savoir

Question 6 :

On donne les points $A(1; -2)$ et $B(3; -4)$. Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est :

- ☒ a. $x^2 + y^2 + 6y - 4x = -11$
- b. $x^2 + y^2 + 2y - 2x - 11 = 0$
- c. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \sqrt{2}$
- d. $2x^2 - 6y^2 + 3x - 2y = 2$

Question 7 :

Parmi les expressions suivantes indiquer celle qui est celle d'un cercle.

- ☒ a. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$
- b. $2x^2 + 6x + y^2 - 4y = 3$
- c. $(x - 2)^2 - (y + 4)^2 = 9$
- d. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$

Exercice 3 : fonction trigonométrique(3 points)

On applique une tension sinusoïdale u aux bornes d'un circuit électrique comportant en série une résistance et une diode idéale.

Le temps t est exprimé en seconde.

La tension est donnée par la fonction u définie pour tout réel $t \geq 0$ par :

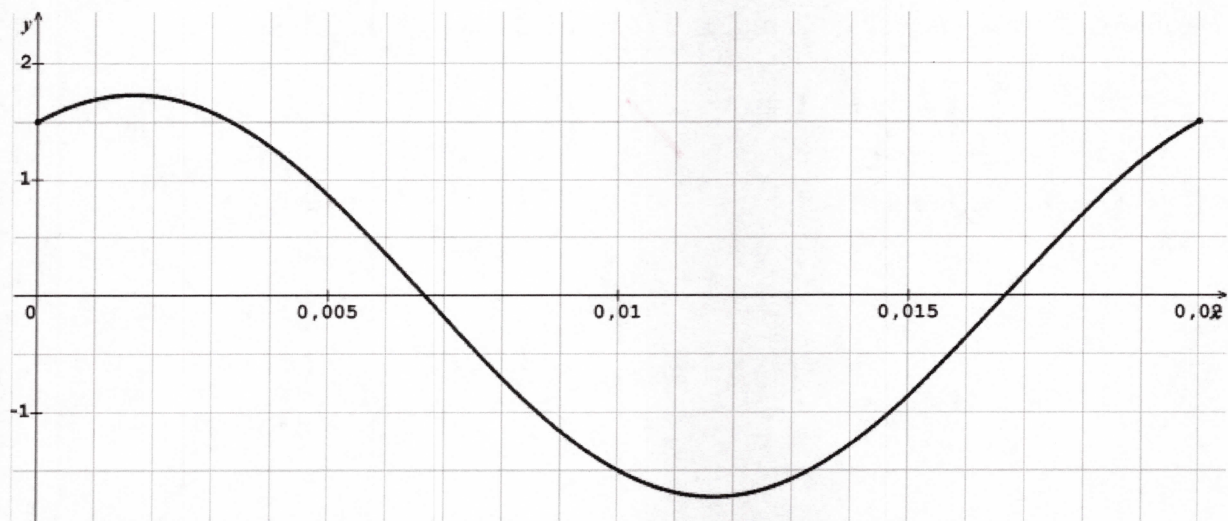
$$u(t) = \sqrt{3} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

La diode est non passante si $u(t) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et passante si $u(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

1. La diode est-elle passante à $t = 0$?
2. Calculer $u\left(\frac{1}{100}\right)$. Interpréter le résultat.
3. On admet que $u\left(t + \frac{2}{100}\right) = u(t)$ pour tout $t \geq 0$. En déduire une propriété de la fonction u .
4. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; 0.02]$:

On cherche à savoir au bout de combien de temps la diode devient non passante pour la première fois.

- a. Conjecturer la solution du problème à l'aide du graphique.
- b. Calculer $u(0,005)$ et conclure.

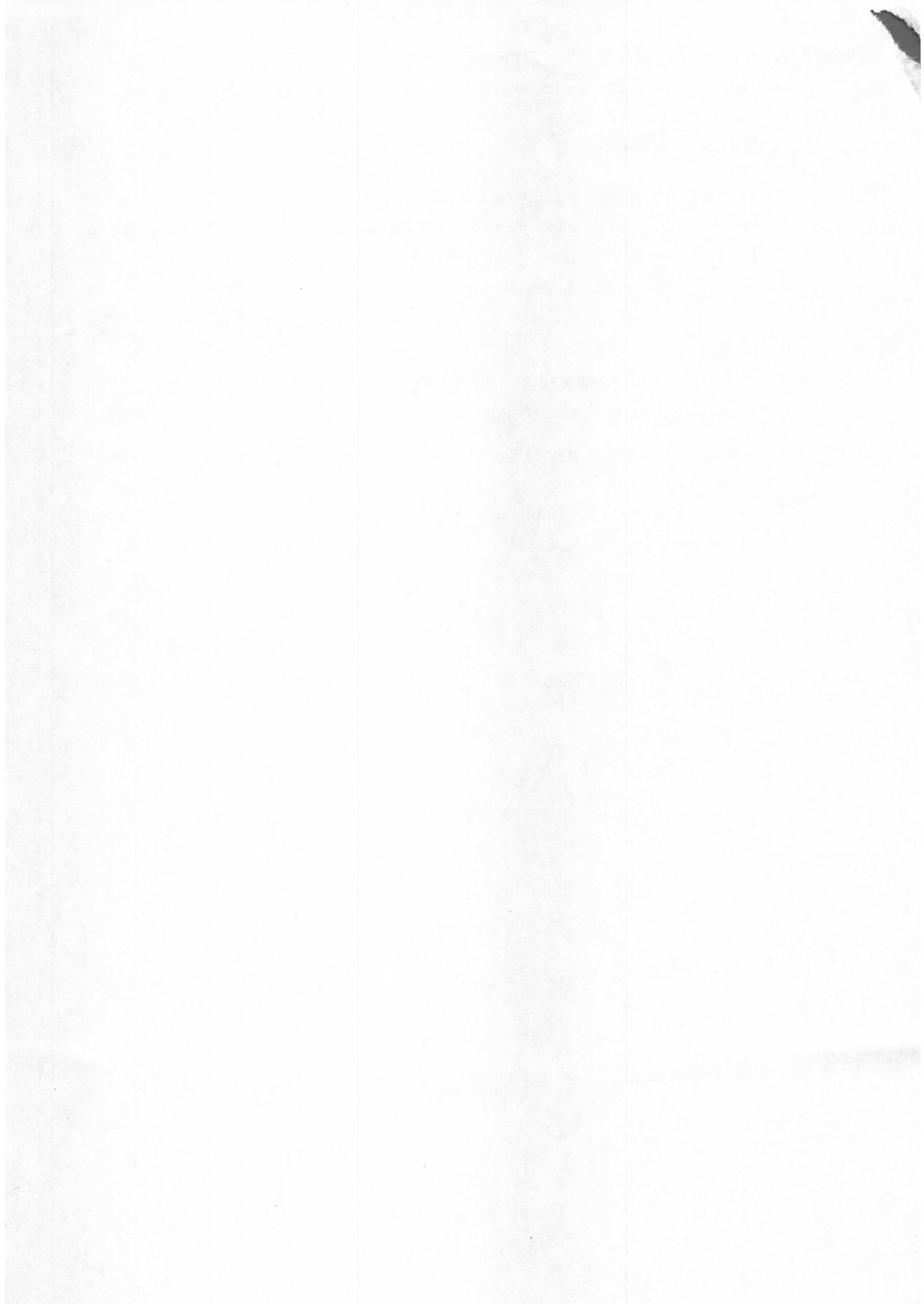


Exercice 4 : Géométrie analytique (7 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point A de coordonnées $A(3 ; 1)$ ainsi que la droite (d) d'équation cartésienne $x - 3y - 4 = 0$.

(faire une figure soignée que l'on complètera au fur et à mesure)

1. Tracer la droite (d) dans un repère orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées du point B d'abscisse 7 appartenant à la droite (d).
3. Donner le vecteur directeur de la droite (d)
4. Donner un vecteur normal à la droite (d).
5. Déterminer une équation de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A ?
6. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (d)
7. Montrer que $AH = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ et donner une interprétation.
8. Donner l'équation du cercle de diamètre [AB]. Préciser les coordonnées du centre du cercle I et le rayon R.
9. Le point H appartient-il à ce cercle ?
10. Que peut-on dire du triangle AHB ? Calculer son aire.



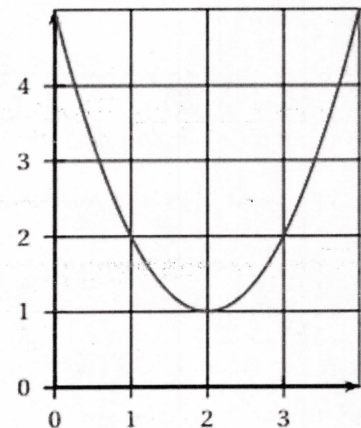
1 heure :

Calculatrice autorisée

Exercice 1 QCM : indiquer sur la copie la référence de la réponse.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la représentation graphique d'une parabole **P** est donnée ci-contre. La forme canonique de son équation est :

a. $y = (x + 2)^2 + 5$	b. $y = (x - 5)^2 + 1$
c. $y = (x - 1)^2 + 2$	d. $y = (x - 2)^2 + 1$



2. Soit **f** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 100x^2 + 10x + 1$. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction **f** est une parabole dont l'axe de symétrie a pour équation :

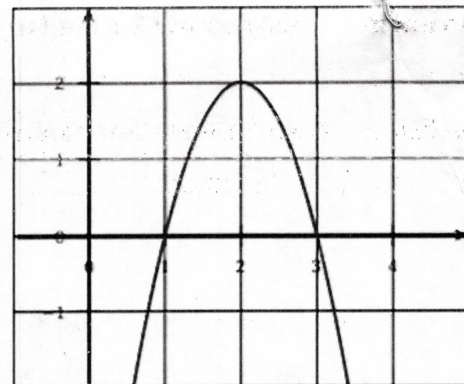
a. $x = 10$	b. $x = -10$
c. $x = 0,05$	d. $x = -0,05$

3. Soient **a** et **b** les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $a(x) = 3x^2 + 15x + 1$ et $b(x) = 25x^2 + 5x - 100$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions **a** et **b** ont :

a. 0 point d'intersection	b. Un point d'intersection	c. Deux points d'intersection	d. Quatre points d'intersection
---------------------------	----------------------------	-------------------------------	---------------------------------

4. On considère une fonction f polynôme de degré 2 dont une représentation graphique est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé. L'expression factorisée de f est :

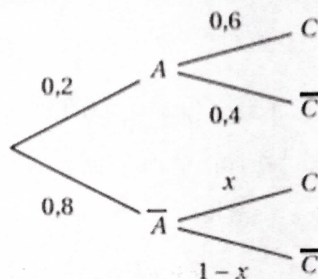


a. $-2(x+1)(x+3)$	b. $-2(x-1)(x-3)$	c. $2(x-1)(x-3)$	d. $2(x+1)(x+3)$
-------------------	-------------------	------------------	------------------

5. A et B sont deux événements, et on donne $p(A) = \frac{3}{7}$, $p(B) = \frac{3}{20}$, $p(A \cup B) = \frac{4}{7}$

a. A et B sont indépendants.	b. $p_A(B) = \frac{3}{980}$	c. $p(A \cap B) = \frac{1}{140}$	d. $p_B(A) = \frac{1}{60}$
------------------------------	-----------------------------	----------------------------------	----------------------------

6. On donne l'arbre de probabilités ci-dessous, ainsi que la probabilité $p(C) = 0,48$



a. $x = 0,6$	b. $x = 0,36$	c. $x = 0,45$	d. $x = \frac{0,48}{0,12}$
--------------	---------------	---------------	----------------------------

Exercice 2 : lecture graphique

Dans un repère orthonormé on représente 5 paraboles. Attribuer à chacune de ces courbes la fonction qui lui est associée. Justifier.

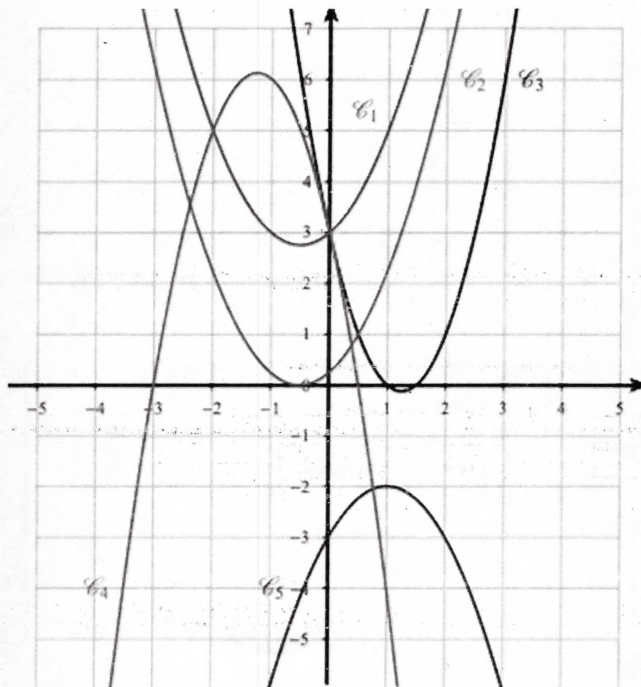
a) $f_1(x) = -x^2 + 2x - 3$

b) $f_2(x) = x^2 + x + 3$

c) $f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3$

d) $f_4(x) = -2x^2 - 5x + 3$ C_4

e) $f_5(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$



$C_1 = 3$

$C_3 = 3$

Exercice 3

On considère la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = 2x^2 - 16x + 37$ $3x^2 - 12x - 8$

a) Donner la forme canonique de $f(x)$ sous forme canonique en détaillant chaque étape.

b) Démontrer que la fonction $f(x)$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 4]$.

c) Dresser le tableau de variation

$]-\infty; 2]$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + 8x + 12$

1) Démontrer que $f(x) = -4(x - 1)^2 + 16$ $/2$

2) Calculer $f(-1)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(\sqrt{3})$ $/3$

3) Résoudre l'équation $f(x) = 12$ $/2$

4) Donner l'équation de l'axe de symétrie en justifiant. $/2$

5) Donner les coordonnées du sommet en justifiant $/1$

6) Donner les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses.

(justifier) $/2$

7) Dresser le tableau de variation. (justifier sans démontrer). $/2$

