

Exercices Probabilités indépendance

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville. L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour. Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.

On choisit un enfant au hasard parmi ceux des écoles primaires de la ville et on considère les événements :

- B : « L'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »
- S : « L'enfant est en surpoids »

1. Justifier que $P_B(S) = 0,125$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer $P(B \cap S)$ puis interpréter le résultat obtenu.
4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.
5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ? On arrondira le résultat au millième.

Une urne contient initialement trois boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne.

- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note A l'événement : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $P(A) = \frac{3}{4}$?

Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
- 2) On lance deux fois le dé.
 - a. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair
 - b. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

Indépendance :

(Indépendance)

A et B sont deux événements indépendants.

1. Déterminer $P(B)$, $P_B(A)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$ sachant que $P(A) = 0,18$ et $P_A(B) = 0,48$.
2. Déterminer $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$ sachant que $P(A) = 0,11$ et $P(B) = 0,37$.
3. Si de plus A et B sont incompatibles et $P(A) = 0,34$, que peut-on dire de $P(B)$?

On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On considère les événements suivants :

- A : « Le nombre obtenu est pair »
- B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 »

Les événements A et B sont ils indépendants ?

(Indépendance - partition)

Un jardinier dispose d'un lot de bulbes de tulipes :

- 40% sont à fleurs rouge , 30% sont à fleurs jaune, le reste est à fleur blanche.
- 85% des bulbes à fleur rouge, 90% des bulbes à fleur jaune et 80% des bulbes à fleur blanche donnent un fleur une fois plantés.

On choisit un bulbe au hasard et on note R : « le bulbe est à fleur rouge » ; J : « le bulbe est à fleur jaune » ; B : « le bulbe est à fleur blanche » et F : « le bulbe fleuri ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Justifier que la probabilité que le bulbe fleurisse est de 0,85.
3. Les événements R et F sont-ils indépendants ?
4. Les événements F et J sont-ils indépendants ?

Une grande entreprise vient de clôturer une campagne de recrutement qui s'est déroulée en 2 temps :
– étude du dossier présenté par le candidat.
– entretien en vue du recrutement.

A l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

- 30% des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité ;
- 20% des candidats qui n'avaient pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés ;
- 65% des candidats qui avaient un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés.

Les résultats seront arrondis si besoin au millième.

On choisit au hasard un candidat. On note :

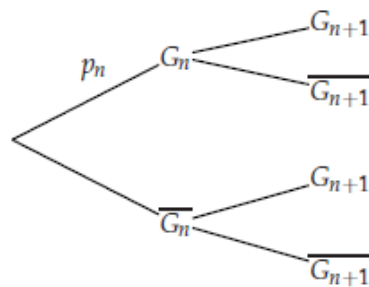
B l'événement « Le candidat a un dossier jugé de bonne qualité » ;

R l'événement « Le candidat est recruté ».

1. Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que le candidat ait un mauvais dossier et ne soit pas recruté.
3. Calculer la probabilité que le candidat soit recruté.
4. Calculer la probabilité que le candidat ait un bon dossier sachant qu'il a été recruté.

Nabolas joue des parties successives sur sa console de jeux. On suppose que la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,4 et que, s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. S'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note G_n l'événement « Nabolas gagne la n -ième partie ». On pose $p_n = P(G_n)$.

- 1) A l'aide d'un arbre pondéré, montrer que $p_2 = 0,58$.
- 2) a) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous.



- b) Établir que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,5$$

- 3) On note (u_n) la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = p_n - 0,625$.

- a) Démontrer que la suite est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

- b) Quelle est, au bout d'un grand nombre de parties, la probabilité pour Nabolas de gagner une partie?

Soit un test supposé dépister une maladie dans une population donnée. On note, pour un individu donné, M l'événement « être malade » et T l'événement « avoir un test positif ». On appelle **valeur diagnostique du test** la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif. On note t le pourcentage d'individus malades dans la population et v la valeur diagnostique du test.

Le fabricant du test indique que :

- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99;
- la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est 0,99.

- 1) Réaliser un arbre de probabilité, puis exprimer v et t avec les notations de probabilités.
- 2) Montrer que $p(\overline{M} \cap T) = 0,01(1 - t)$.
- 3) En déduire que $p(T) = 0,98t + 0,01$.
- 4) Montrer que $v = \frac{99t}{98t + 1}$.
- 5) Étudier la fonction f , définie sur $[0 ; 1]$, par :

$$f(t) = \frac{99t}{98t + 1}$$

- 6) Que peut-on dire de la valeur diagnostique du test pour les maladies rares, c'est-à-dire quand t est proche de 0? A partir de quelle valeur de t la valeur diagnostique du test est-elle supérieure à 0,9?

Probabilités conditionnelles et suite arithmético-géométrique

Un fumeur essaye de réduire sa consommation. On admet qu'il fonctionne toujours suivant les conditions :

- C_1 : S'il reste un jour sans fumer, alors il fume le lendemain avec une probabilité de 0,4.
- C_2 : Par contre, s'il cède et fume un jour, alors la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,2.

On note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ème}}$ jour.

Déterminer la limite de p_n . Conclusion ?