BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

(CORRIGÉ DU SUJET D'ENTRAÎNEMENT CONÇU pour https://mathweb.fr)

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Le ou la candidat·e traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3, communs à tous les candidats, et un seul des exercices A ou B.

Le ou la candidat·e est invité·e à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il ou elle aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1}$$

où ln désigne le logarithme népérien.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   On sait d'après le cours que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ (croissante comparée).
   Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0+1} = 0}$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   On peut avant tout écrire pour tout réel $x > 0$:

   $$f(x) = \frac{x}{x+1}\ln(x) = \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ln(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\ln(x).$$

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
   Par conséquent, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. On pose pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

   $$g(x) = 1 + x + \ln(x).$$

   On admet que $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

   (a) Justifier que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

   Pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ et donc $1 + \frac{1}{x} > 0$.
   Ainsi, $\underline{g'(x) > 0}$ sur $]0\,;+\infty[$, ce qui équivaut à dire que g est strictement croissant sur cet intervalle.

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right]$; on notera α cette solution.

Donner une valeur approchée au millième de α.

— $g\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} + \ln\frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \ln 4 \approx -0,136\,;$

— $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ln 2 \approx 0,807\,;$

— g est strictement croissante et continue sur $\left[\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right]$.

« 0 » est une valeur intermédiaire entre $g\left(\frac{1}{4}\right)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $\left[\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\boxed{\alpha \approx 0,278}$.

(c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

D'après les questions précédentes, on peut déduire le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3. (a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$

La dérivée de $u\ :\ x \mapsto x\ln(x)$ est :

$$u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $v(x) = x + 1$, et donc $v'(x) = 1$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2}(x) \\ &= \frac{\big(1+\ln(x)\big)(x+1) - x\ln(x)\times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x + x\ln(x) + \ln(x) - x\ln(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x + \ln(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}}$$

(b) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

D'après la question précédente, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $(x+1)^2 > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.
Donc, d'après la question 2c, nous avons le tableau de variations suivants :

x	0		α		$+\infty$
f	$\Vert$ 0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. On pose $h(x) = \ln(x)$, dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}_h$.
Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;+\infty[$, on considère le point H d'abscisse x sur $\mathcal{C}_h$, et le point F, de même abscisse x, sur $\mathcal{C}_f$.
On note $d(x)$ la distance entre H et F en fonction de x.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$.

Donner une interprétation graphique de ce dernier résultat.

Par définition,

$$\begin{aligned} d(x) &= \mid f(x) - \ln(x) \mid \\ &= \left| \frac{x\ln(x)}{x+1} - \frac{(x+1)\ln(x)}{x+1} \right| \\ &= \frac{\ln(x)}{x+1}. \end{aligned}$$

Note : $\mid \ln(x) \mid \; = \ln(x)$ pour $x \geqslant 1$ car $\ln(x) \geqslant 0$.

Posons : $p(x) = \dfrac{1}{d(x)} = \dfrac{x+1}{\ln(x)} = \dfrac{x}{\ln(x)} + \dfrac{1}{\ln(x)}$.

On sait d'après le cours (croissance comparée) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$.

Ainsi, par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ et donc, par inverse, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0}$.

Ainsi, la distance entre les points F et H se rapproche de 0 ; ayant la même abscisse, cela signifie que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ se rapprochent quand x tend vers $+\infty$.

5. On admet que les variations de la fonction d sont données par le tableau suivant :

x	1	β	$+\infty$
d	0 ↗		↘

où $\beta \approx 3,591$.

On considère alors le programme suivant, écrit en langage Python :

```python
from math import log

def seuil(p):
    x = 3.59
    while log(x) >= (x+1)*10**(-p):
        x = x + 0.01

    return x
```

On admet que `log(x)` renvoie la valeur du logarithme népérien de x.
L'appel à `seuil(2)` retourne la valeur « 646.0999999995574 ».
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Cette fonction Python retourne la première valeur de x qui ne remplit pas la condition de la boucle `while`, donc la première valeur de x pour laquelle :

$$\ln(x) \leqslant (x+1) \times 10^{-p},$$

soit :

$$d(x) \leqslant 10^{-p}.$$

Le résultat de `seuil(2)` nous indique alors que la distance entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ commence à être inférieure ou égale à 0,01 à partir de $x = 646,1$.
Ainsi, pour des valeurs de x supérieures à 646,1, $\ln(x)$ est une bonne approximation de $f(x)$ à 0,01 près.

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte pas ni enlève de point. Aucune justification n'est demandée. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Soit n un entier naturel.
Un mot *bilitère* de longueur n est une chaîne de n caractères composée uniquement de deux lettres différentes. Par exemple, « XXYXY » est un mot bilitère de longueur 5.

1. Le nombre de mots bilatères de longueur n est égal à :

   (a) 2^n (b) $\binom{n}{2}$ (c) $2n$ (d) $\dfrac{n!}{2}$

   > **Réponse (a).** En effet, il y a deux choix possibles pour la première lettre, puis 2 choix possibles pour la deuxième, etc.
   > Sur un mot bilatère de n lettres, il y a donc $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ facteurs}} = 2^n$ mots bilatères possibles.

2. La probabilité qu'un mot bilatère de longueur 10 contienne exactement trois lettres identiques est à peu près égale à :

   (a) $0,711$ (b) $0,145$ (c) $0,117$ (d) $0,234$

   > **Réponse (d).**
   > Notons « A » et « B » les lettres du mot bilatère.
   > La probabilité d'obtenir exactement 3 « A » est égale à :
   >
   > $$\binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} = \binom{10}{3} \times \frac{1}{2^{10}},$$
   >
   > qui est aussi la probabilité d'obtenir exactement 3 « B ».
   > Donc la probabilité d'obtenir exactement trois lettres identiques est égale à $2 \times \binom{10}{3} \times \frac{1}{2^{10}} = \binom{10}{3} \times \frac{1}{2^9} \approx 0,234$.

3. On considère un mot bilatère de longueur 20 formé des lettres « A » et « B ». La probabilité qu'il contienne au moins cinq lettres « A » est environ égale à :

   (a) $0,005$ (b) $0,994$ (c) $0,25$ (d) $0,5$

   Réponse (b).
   Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de « A » dans un mot bilatère de longueur 20. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{2}$. On calcule donc à la calculatrice :

   $$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \geqslant 5\right) \approx 0,994.$$

4. On considère un mot bilatère de longueur 30 formé des lettres « A » et « B ». La probabilité qu'il contienne strictement moins de quinze lettres « A » est environ égale à :

   (a) $0,572$ (b) $0,428$ (c) $0,607$ (d) $0,5$

   Réponse (b).
   Notons Y la variable aléatoire représentant le nombre de « A » dans un mot bilatère de longueur 30. Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \frac{1}{2}$. On calcule donc à la calculatrice :

   $$\mathrm{P}\left(\mathrm{Y} \leqslant 14\right) \approx 0,428.$$

5. On considère un mot bilatère de longueur 50 formé des lettres « A » et « B ». La probabilité qu'il contienne un nombre de « A » compris entre 20 (inclus) et 30 (inclus) est environ égale à :

   (a) $0,5$ (b) $0,881$ (c) $0,725$ (d) $0,779$

   Réponse (b).
   Notons Z la variable aléatoire représentant le nombre de « A » dans un mot bilatère de longueur 50. Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{2}$. On calcule donc à la calculatrice :

   $$\mathrm{P}(20 \leqslant \mathrm{Z} \leqslant 30) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leqslant 30) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leqslant 19) \approx 0,881$$

Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

Lucas s'abonne à une salle de sports. Il a l'intention d'y aller chaque semaine. La probabilité qu'il y aille cette semaine est égale à 0,95.
Pour un entier naturel n, il estime que la probabilité qu'il y aille la $(n+1)$-ième semaine est égale à 0,8 s'il y est allé la n-ième semaine ; sinon, la probabilité est de 0,95.
On note :

— S_n l'événement : « Lucas est allé à la salle de sports la n-ième semaine » ;

— $\overline{S_n}$ l'événement contraire de S_n ;

— p_n la probabilité que l'événement S_n soit réalisé.

Ainsi, $p_0 = 0,95$.

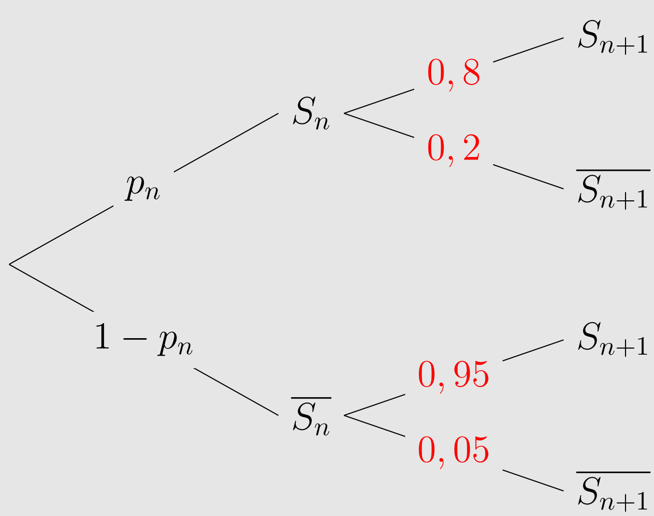
1. Montrer que $p_1 = 0,8075$.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right) &= \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_0 \cap \mathrm{S}_1\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_0} \cap \mathrm{S}_1\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_0\right) \times \mathrm{P}_{\mathrm{S}_0}\left(\mathrm{S}_1\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_0}\right) \times \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{S}_0}}\left(\mathrm{S}_1\right) \\ &= 0,95 \times 0,8 + 0,05 \times 0,95 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right) = 0,8075}$$

2. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,95 - 0,15p_n$.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\mathrm{S_{n+1}}\right) &= \mathrm{P}\left(\mathrm{S_n} \cap \mathrm{S_{n+1}}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S_n}} \cap \mathrm{S_{n+1}}\right)\\
p_{n+1} &= \mathrm{P}\left(\mathrm{S_n}\right) \times \mathrm{P}_{\mathrm{S_n}}\left(\mathrm{S_{n+1}}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S_n}}\right) \times \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{S_n}}}\left(\mathrm{S_{n+1}}\right)\\
&= p_n \times 0,8 + (1-p_n) \times 0,95\\
&= 0,8pn + 0,95 - 0,95p_n\\
\boxed{p_{n+1} = 0,95 - 0,15p_n}
\end{aligned}$$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{57}{460} \times 0,15^n + \dfrac{19}{23}$.

Posons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $p_n = \dfrac{57}{460} \times 0,15^n + \dfrac{19}{23}$ ».

— $\mathcal{P}_0$: $p_0 = \dfrac{57}{460} + \dfrac{19}{23} = 0,95$.
L'égalité est vraie donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Supposons que pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k$ est vraie.
Ainsi, $p_k = \dfrac{57}{460} \times 0,15^k + \dfrac{19}{23}$.
Donc,

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= 0,95 - 0,15p_k\\
&\quad \text{(d'après la relation de récurrence de la suite } (p_n))\\
&= 0,95 - 0,15 \times \left(\frac{57}{460} \times 0,15^k + \frac{19}{23}\right)\\
&\quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)}\\
&= \frac{95}{100} - \frac{57}{460} \times 0,15^{k+1} - \frac{15}{100} \times \frac{19}{23}\\
&= \frac{57}{460} \times 0,15^{k+1} + \frac{19}{23}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$. L'hérédité est donc montrée.

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

   Interpréter ce résultat dans le cadre de cet exercice.

   $0 < 0,15 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,15^n = 0$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{57}{460} \times 0,15^n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{19}{23}}$

   On peut alors en conclure qu'à longs termes, la probabilité que Lucas aille à la salle de sports est égale à $\dfrac{19}{23}$, soit à peut près 0,826.

EXERCICES AU CHOIX DU CANDIDAT (5 points)

Le ou la candidat·e doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il ou elle indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

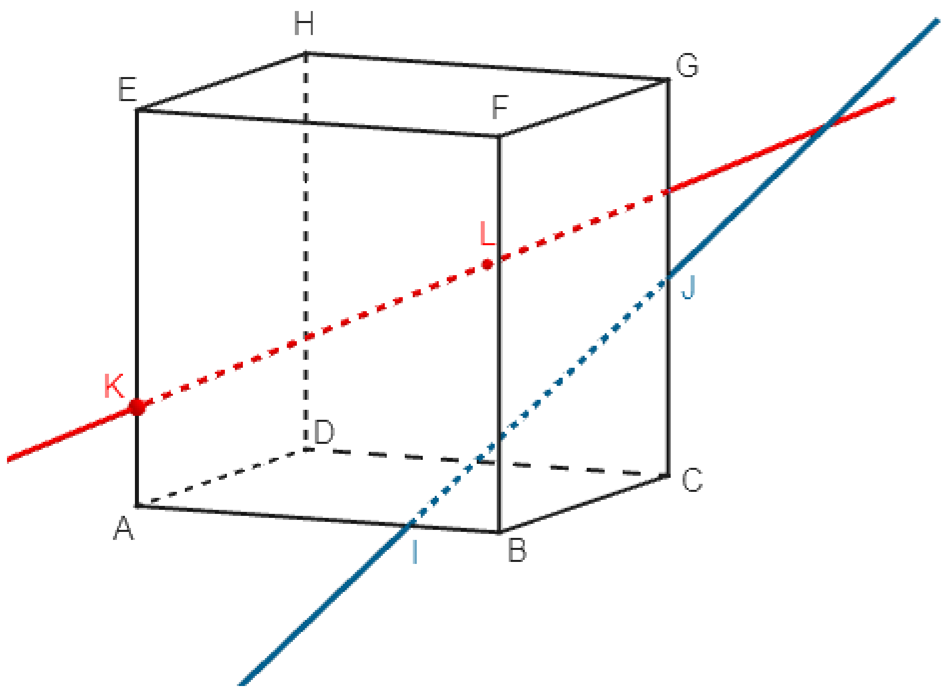
Exercice A

Principaux domaines abordés :   ***Géométrie dans l'espace : représentation paramétrique de droites, équation cartésienne de plans, intersection d'une droite et d'un plan.***

On considère un cube ABCDEFGH. On place alors les points I, J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} \quad ; \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \quad ; \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

On considère le repère $\mathcal{R} = \left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points K, L, I et J dans le repère $\mathcal{R}$.
   Aucune justification n'est demandée.

$$K\left(0\,;0\,;\frac{1}{4}\right) \quad ; \quad L\left(\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad I\left(\frac{3}{4}\,;0\,;0\right) \quad ; \quad J\left(1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$$

2. Montrer qu'une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$\begin{cases} x = x_I + \frac{1}{4}t \\ y = y_I + 1t \\ z = z_I + \dfrac{1}{2}t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + \frac{1}{4}t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{2}t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

On admet qu'une représentation paramétrique de (KL) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}k \\ y = k \\ z = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}k \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes s'il existe un couple $(t\,;k)$ tel que :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + \frac{1}{4}t = \dfrac{1}{2}k \\ y = t = k \\ z = \dfrac{1}{2}t = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}k \end{cases}$$

On en déduit alors que $t = k$ et la troisième ligne du système donne : $t = k = 1$. La première ligne donne : $t = k = 3$. Il y a donc contraction. Les droites ne sont donc pas sécantes.

4. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EI}$.

$E\,(0\,;0\,;1)$ et $H\,(0\,;1\,;1)$ donc $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

De plus, $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-0\\0-0\\0-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\0\\-1\end{pmatrix}$.

(b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (EHI).

— $\overrightarrow{EH}\cdot\vec{n} = 0\times 4 + 1\times 0 + 0\times 3 = 0$.
— $\overrightarrow{EI}\cdot\vec{n} = \frac{3}{4}\times 4 + 0\times 0 - 1\times 3 = 0$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EHI) ; il est donc normal à ce plan.

(c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EHI) est :

$$4x + 3z - 3 = 0.$$

On sait que si un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à un plan, alors ce dernier admet pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
Donc, une équation cartésienne du plan (EHI) est :

$$4x + 0y + 3z + d = 0.$$

Or, $E \in (EHI)$ donc $4x_E + 3z_E + d = 0$, soit $d = -3$.
Une équation du plan (EHI) est donc : $4x + 3z - 3 = 0$.

5. Calculer les coordonnées du point d'intersection P de la droite (KL) et du plan (EHI).

Si P est le point d'intersection du plan (EHI) et de la droite (KL), alors :

— $P \in (EHI)$ donc $4x_P + 3z_P - 3 = 0$;

— $P \in (KL)$ donc $\begin{cases} x_P = \dfrac{1}{2}k \\ y_P = k \\ z_P = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

En remplaçant les données de la représentation paramétrique de (KL) dans l'équation cartésienne de (EHI), on a alors :

$$4 \times \frac{1}{2}k + 3 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}k\right) - 3 = 0$$

soit :

$$k = \frac{9}{11}.$$

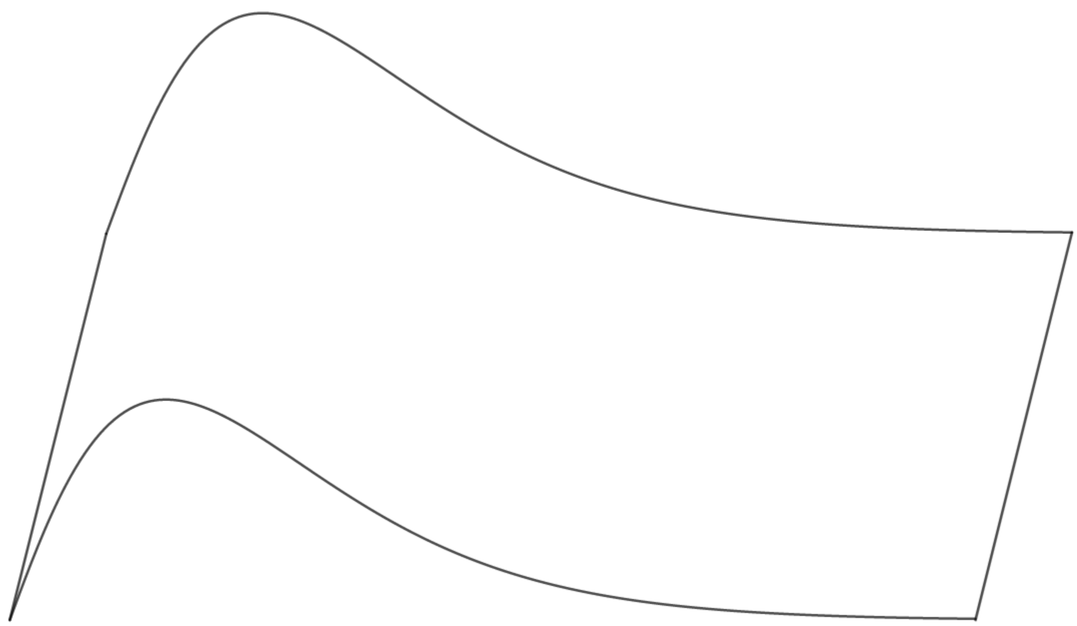
On obtient ainsi :

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{11} = \dfrac{9}{22} \\ y_P = \dfrac{9}{11} \\ z_P = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{9}{11} = \dfrac{5}{11} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{P\left(\frac{9}{22}\,;\frac{9}{11}\,;\frac{5}{11}\right)}$$

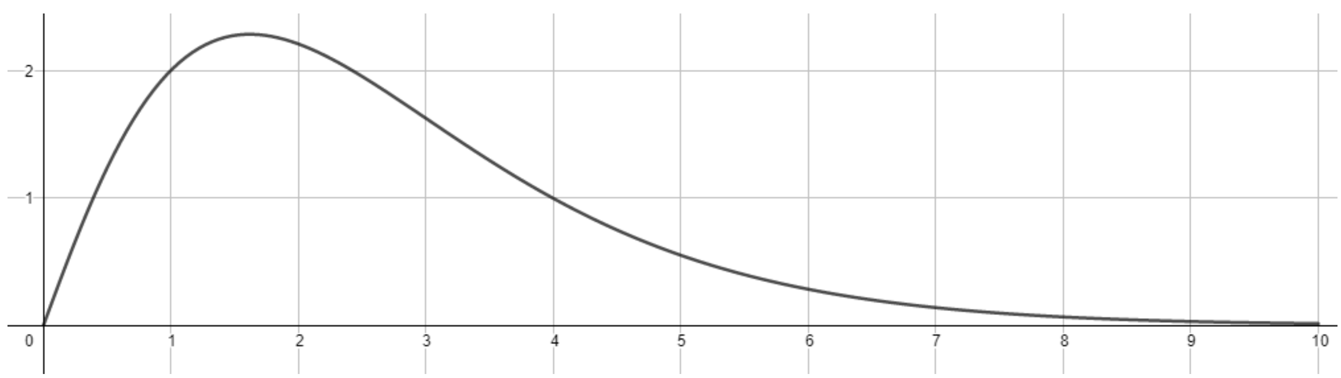
Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle, convexité.

Une architecte souhaite construire un édifice dont la forme de la toiture serait la suivante :



Elle considère alors sa coupe transversale et la rapporte à un repère orthonormé, où l'unité est le mètre :



Elle souhaite que l'expression de la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessus soit de la forme :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{1-x}$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

Cette courbe doit passer par l'origine du repère ainsi que par le point $A\,(1\,;2)$ et l'équation réduite de sa tangente en A doit avoir un coefficient directeur égal à 1.

1. Trouver les valeurs de a, b et c.

$f = u \times v$ avec $u(x) = ax^2 + bx + c$, donc $u'(x) = 2ax + b$, et $v(x) = \mathrm{e}^{1-x}$, donc $v'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$. Ainsi :
$f'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{1-x} - (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{1-ax} = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\mathrm{e}^{1-x}$.

- $A\,(1\,;2) \in \mathcal{C} \iff f(1) = 2 \iff a+b+c = 2$.
- $O\,(0\,;0) \in \mathcal{C} \iff c\mathrm{e}^1 = 0 \iff c = 0$.
- $f'(1) = 1 \iff -a+2a-b+b-c = 1 \iff a = 1$.

On en déduit alors que $b = 2-1-0 = 1$. Finalement,

$$\boxed{f(x) = (x^2+x)\mathrm{e}^{1-x}}$$

On admet que la fonction f est définie sur $[0\,;10]$ par : $f(x) = x(x+1)\mathrm{e}^{1-x}$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;10]$ et on note f' sa dérivée.
   (a) Montrer que $f'(x) = (-x^2+x+1)\mathrm{e}^{1-x}$.

   On peut ici utiliser le résultat obtenu dans la question précédente en remplaçant a, b et c par respectivement 1, 1 et 0 :

   $$f'(x) = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\mathrm{e}^{1-x} = (-x^2+x+1).$$

   (b) En déduire la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un maximum sur $[0\,;10]$.

   f admet un maximum lorsque $f'(x) = 0$ en changeant de signe.
   $f'(x) = 0 \iff -x^2+x+1 = 0$ car $\mathrm{e}^{1-x} \neq 0$ pour tout réel x.
   Le discriminant de $-x^2+x+1$ est :

   $$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5 > 0$$

   donc le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

   $$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

   Donc $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le maximum de f est atteint pour cette valeur.

3. On admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{1-x}.$$

   (a) En déduire les coordonnées du point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.

   > $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion lorsque $f''(x) = 0$ en changeant de signe.
   >
   > $$f''(x) = 0 \iff x(x-3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3.$$
   >
   > Or, en $x = 0$, $f''(x)$ ne peut pas changer de signe car f est définie sur $[0\,;10]$. $f''(x)$ change de signe uniquement en $x = 3$.
   > L'unique point d'inflexion à $\mathcal{C}$ est donc le point de coordonnées $(3\,;f(3))$, soit $\left(3\,;12\mathrm{e}^{-2}\right)$.

   (b) L'architecte envisage de mettre des panneaux solaires sur la toiture où la fonction est convexe, en raison de son orientation par rapport au soleil. Sur quel intervalle de x devra-t-elle mettre des panneaux solaires ?

   > f convexe $\iff f''(x) > 0 \iff x(x-3) > 0 \iff 3 < x < 10$.
   > L'architecte doit donc mettre les panneaux solaires sur $[3\,;10]$.

4. On considère le programme suivant, écrit en Python, où les paramètres `a` et `b` sont les bornes d'un intervalle $[a\,;b]$.

```python
f = lambda x: x * (x+1) * exp(1-x)

def longueur(a,b):
    x = a
    L = 0
    pas = 10**-5
    while x < b:
        L = L + sqrt( pas**2 + (f(x+pas)-f(x))**2 )
        x = x + pas

    return L
```

   On admet que :

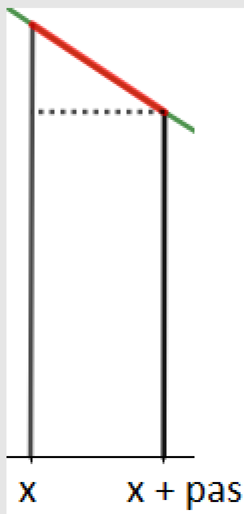
— la ligne 1 de ce programme renvoie la valeur de $f(x)$ pour un x donné ;

— la fonction Python `sqrt(x)` renvoie la valeur de $\sqrt{x}$;

— la fonction Python `exp(x)` renvoie la valeur de e^x.

Que renvoie cette fonction Python ?

La fonction Python effectue les instructions de la boucle `while` *tant que* x est strictement inférieur à b, donc inférieure à la borne supérieur de l'intervalle entré considéré.
À la ligne 8, on voit que l'on affecte à la variable `L` la valeur précédente de cette variable à laquelle on ajoute `sqrt( pas**2 + (f(x+pas)-f(x))**2 )`, c'est-à-dire $\sqrt{pas^2 + \left[f(x+pas) - f(x)\right]^2}$. Regardons sur un schéma :



Cette racine carrée calcule l'hypoténuse du triangle rectangle de côtés $f(x)$ et $f(x+pas)$: pour un pas assez petit, cette hypoténuse est très proche de $\mathcal{C}$.

La ligne 8 permet donc d'ajouter des petits segments qui sont tous très proches de $\mathcal{C}$.
La variable `L` contiendra donc, à l'issue de la boucle `while`, une valeur approchée de la longueur de la courbe $\mathcal{C}$.