BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

(SUJET D'ENTRAÎNEMENT CONÇU PAR STÉPHANE PASQUET pour https://mathweb.fr)

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il comporte exactement 8 pages numérotées de 1 à 8.

Le ou la candidat·e traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3, communs à tous les candidats, et un seul des exercices A ou B.

Le ou la candidat·e est invité·e à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il ou elle aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1}$$

où ln désigne le logarithme népérien.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. On pose pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

   $$g(x) = 1 + x + \ln(x).$$

   On admet que $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
   (a) Justifier que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{2}\right]$; on notera α cette solution.
   Donner une valeur approchée au millième de α.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
3. (a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$

   (b) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
4. On pose $h(x) = \ln(x)$, dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}_h$.
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;+\infty[$, on considère le point H d'abscisse x sur $\mathcal{C}_h$, et le point F, de même abscisse x, sur $\mathcal{C}_f$.
   On note $d(x)$ la distance entre H et F en fonction de x.
   Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} d(x) = 0$.
   Donner une interprétation graphique de ce dernier résultat.

5. On admet que les variations de la fonction d sont données par le tableau suivant :

x	1		β		$+\infty$
d	0	$\nearrow$		$\searrow$	

où $\beta \approx 3,591$.

On considère alors le programme suivant, écrit en langage Python :

```
from math import log

def seuil(p):
    x = 3.59
    while log(x) >= (x+1)*10**(-p):
        x = x + 0.01

    return x
```

On admet que `log(x)` renvoie la valeur du logarithme népérien de x.
L'appel à `seuil(2)` retourne la valeur « 646.0999999995574 ».
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte pas ni enlève de point. Aucune justification n'est demandée. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Soit n un entier naturel.
Un mot *bilitère* de longueur n est une chaîne de n caractères composée uniquement de deux lettres différentes. Par exemple, « XXYXY » est un mot bilitère de longueur 5.

1. Le nombre de mots bilatères de longueur n est égal à :

   (a) 2^n (b) $\binom{n}{2}$ (c) $2n$ (d) $\frac{n!}{2}$

2. La probabilité qu'un mot bilatère de longueur 10 contienne exactement trois lettres identiques est à peu près égale à :

   (a) $0,711$ (b) $0,145$ (c) $0,117$ (d) $0,234$

3. On considère un mot bilatère de longueur 20 formé des lettres « A » et « B ». La probabilité qu'il contienne au moins cinq lettres « A » est environ égale à :

   (a) $0,005$ (b) $0,994$ (c) $0,25$ (d) $0,5$

4. On considère un mot bilatère de longueur 30 formé des lettres « A » et « B ». La probabilité qu'il contienne strictement moins de quinze lettres « A » est environ égale à :

   (a) $0,572$ (b) $0,428$ (c) $0,607$ (d) $0,5$

5. On considère un mot bilatère de longueur 50 formé des lettres « A » et « B ». La probabilité qu'il contienne un nombre de « A » compris entre 20 (inclus) et 30 (inclus) est environ égale à :

   (a) $0,5$ (b) $0,881$ (c) $0,725$ (d) $0,779$

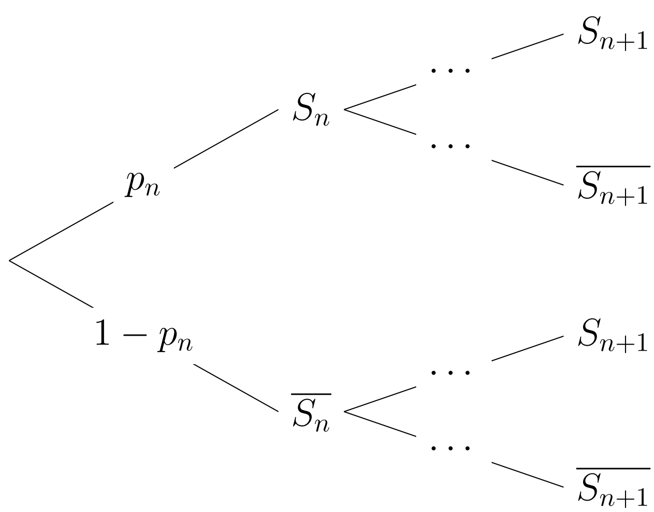
Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

Lucas s'abonne à une salle de sports. Il a l'intention d'y aller chaque semaine. La probabilité qu'il y aille cette semaine est égale à 0,95.
Pour un entier naturel n, il estime que la probabilité qu'il y aille la $(n+1)$-ième semaine est égale à 0,8 s'il y est allé la n-ième semaine ; sinon, la probabilité est de 0,95.
On note :

- S_n l'événement : « Lucas est allé à la salle de sports la n-ième semaine » ;
- $\overline{S_n}$ l'événement contraire de S_n ;
- p_n la probabilité que l'événement S_n soit réalisé.

Ainsi, $p_0 = 0,95$.

1. Montrer que $p_1 = 0,8075$.
2. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,95 - 0,15p_n$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{57}{460} \times 0,15^n + \dfrac{19}{23}$.
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

   Interpréter ce résultat dans le cadre de cet exercice.

EXERCICES AU CHOIX DU CANDIDAT (5 points)

Le ou la candidat·e doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il ou elle indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

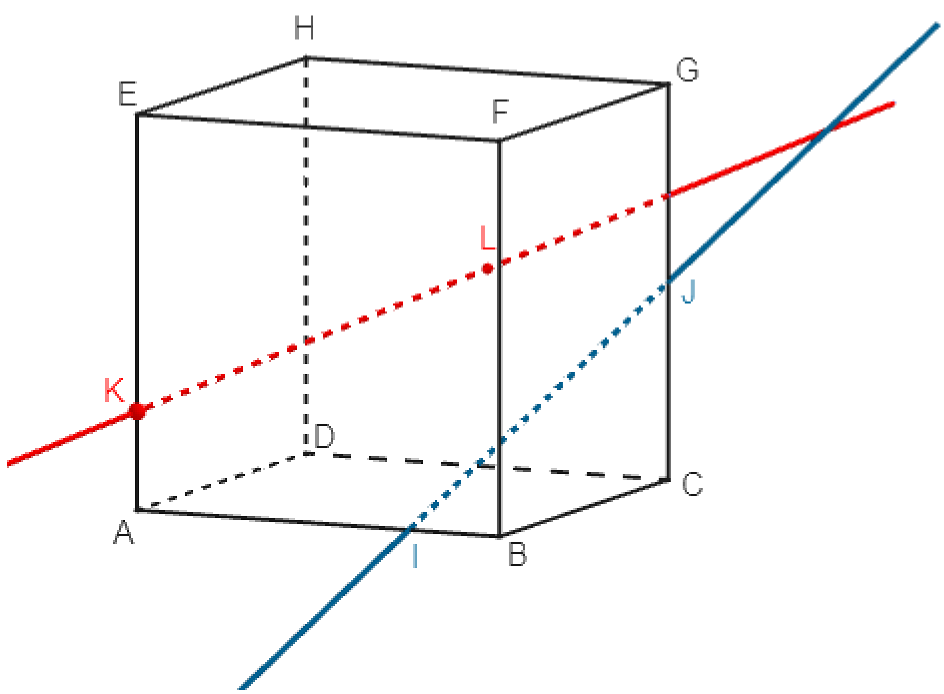
Exercice A

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace : représentation paramétrique de droites, équation cartésienne de plans, intersection d'une droite et d'un plan.

On considère un cube ABCDEFGH. On place alors les points I, J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} \quad ; \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \quad ; \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

On considère le repère $\mathcal{R} = \left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points K, L, I et J dans le repère $\mathcal{R}$.
   Aucune justification n'est demandée.

2. Montrer qu'une représentation paramétrique de (IJ) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

On admet qu'une représentation paramétrique de (KL) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}k \\ y = k \\ z = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}k \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?
4. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EI}$.

   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (EHI).

   (c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EHI) est :

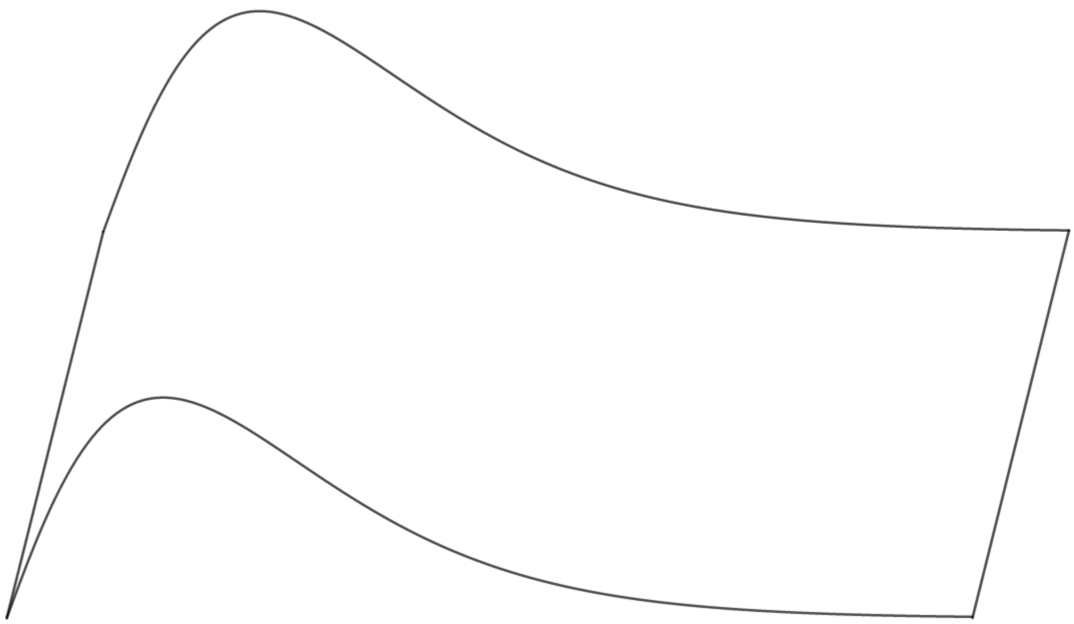
$$4x + 3z - 3 = 0.$$

5. Calculer les coordonnées du point d'intersection P de la droite (KL) et du plan (EHI).

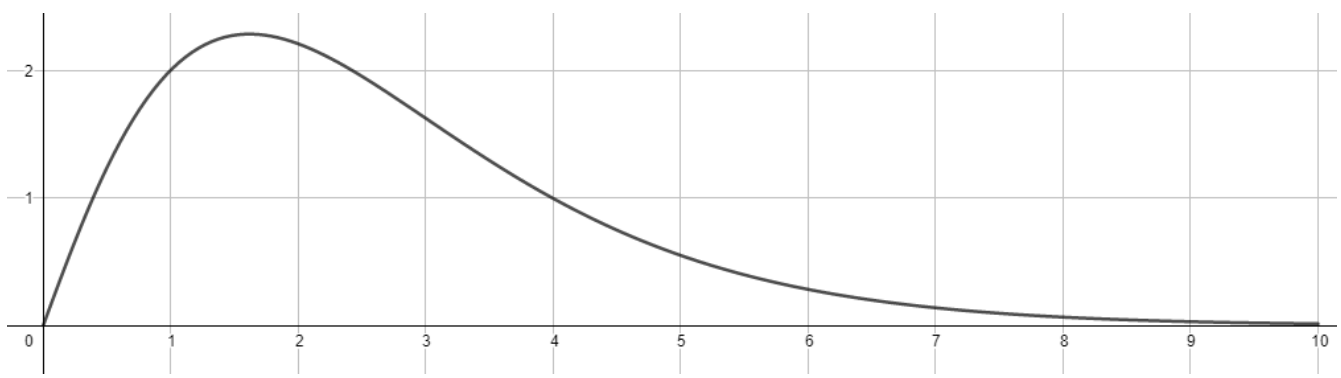
Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle, convexité, Python.

Une architecte souhaite construire un édifice dont la forme de la toiture serait la suivante :



Elle considère alors sa coupe transversale et la rapporte à un repère orthonormé, où l'unité est le mètre :



Elle souhaite que l'expression de la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessus soit de la forme :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{1-x}$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

Cette courbe doit passer par l'origine du repère ainsi que par le point $A\,(1\,;2)$ et l'équation réduite de sa tangente en A doit avoir un coefficient directeur égal à 1.

1. Trouver les valeurs de a, b et c.

On admet que la fonction f est définie sur $[0\,;10]$ par : $f(x) = x(x+1)\mathrm{e}^{1-x}$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;10]$ et on note f' sa dérivée.
   (a) Montrer que $f'(x) = (-x^2+x+1)\mathrm{e}^{1-x}$.
   (b) En déduire la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un maximum sur $[0\,;10]$.
3. On admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = (x^2-3x)\mathrm{e}^{1-x}.$$

   (a) En déduire les coordonnées du point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.
   (b) L'architecte envisage de mettre des panneaux solaires sur la toiture où la fonction est convexe, en raison de son orientation par rapport au soleil. Sur quel intervalle de x devra-t-elle mettre des panneaux solaires ?
4. On considère le programme suivant, écrit en Python, où les paramètres `a` et `b` sont les bornes d'un intervalle $[a\,;b]$.

```
1  f = lambda x: x * (x+1) * exp(1-x)
2
3  def longueur(a,b):
4      x = a
5      L = 0
6      pas = 10**-5
7      while x < b:
8          L = L + sqrt( pas**2 + (f(x+pas)-f(x))**2 )
9          x = x + pas
10
11     return L
```

On admet que :

— la ligne 1 de ce programme renvoie la valeur de $f(x)$ pour un x donné ;

— la fonction Python `sqrt(x)` renvoie la valeur de $\sqrt{x}$;

— la fonction Python `exp(x)` renvoie la valeur de e^x.

Que renvoie cette fonction Python ?