∽ Baccalauréat S 2006 ∾

L'intégrale d'avril 2006 à mars 2007

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S Pondichéry 3 avril 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1. a à 3. d sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.
Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $\left(\text{e}^a\right)^b = \text{e}^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $\text{e}^{a-b} = \dfrac{\text{e}^a}{\text{e}^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim (u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 3. b	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $\left(u_{n,} \times v_n\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. c	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. d	Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\text{i}}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
En déduire la nature du triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 2 — 4 points

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 5 cm pour unité graphique.
Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z + 1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

a. Déterminer les affixes des points A_1 A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

c. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?

3. **a.** Quelle est la nature du triangle ΩA_0A_1 ?
En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle ΩA_nA_{n+1}.

b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
On considère le point I de coordonnées $\left(x_I,\ y_I,\ z_I\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\left|ax_I + by_I + cz_I + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_I,\ y_I$ et z_I, un système d'équations paramétriques de Δ.
2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.
   a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$.
   b. Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_I,\ y_I$ et z_I.
   c. En déduire que $IH = \dfrac{\left|ax_I + by_I + cz_I + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathscr{Q}$
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{Q}$.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.
Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).
D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln\left(f(t)\right)]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$\text{(H)} \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$

$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto \mathrm{e}^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.

2. En déduire $P(T)$.

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à $0,999$. Ce test est-il fiable ?

Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2006

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des 3 *questions, une seule des trois propositions est exacte.*
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :
4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».
Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu. Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin tiré est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1
Le jeu est :

A : favorable au joueur **B :** défavorable au joueur **C :** équitable

Question 2
Le joueur joue 4 parties indépendamment les unes des autres.
La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\dfrac{216}{625}$ **B :** $\dfrac{544}{625}$ **C :** $\dfrac{2}{5}$

Lors d'un second jeu, le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.
Question 3 :
la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à :

A : $\dfrac{4}{15}$ **B :** $\dfrac{11}{30}$ **C :** $\dfrac{11}{15}$

Exercice 2 **5 points**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$, $z_{\text{B}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{C}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.

Partie A

1. **a.** Donner la forme exponentielle de z_{B} puis de z_{C}.
   b. Placer les points A, B et C.
2. Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.
3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$.

Partie B

À tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_{\text{A}}$, on associe le point M' d'affixe z' défini par

$$z' = \frac{-4}{z-2}.$$

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \dfrac{-4}{z-2}$.

b. En déduire les points associés aux points B et C.

c. Déterminer et placer le point G′ associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2. **a.** **Question de cours :**

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

b. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2,

$$\left|z' - 2\right| = \frac{2|z|}{|z-2|}.$$

c. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de $\mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A.

Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

EXERCICE 2 **5 points**

Exercice de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$.

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\left(2 - z'\right)$.

2. **a.** **Question de cours**

• *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$.

On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right).$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Exercice 3 **5 points**

1. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g.

x	0	2,3	x_0	2,4	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

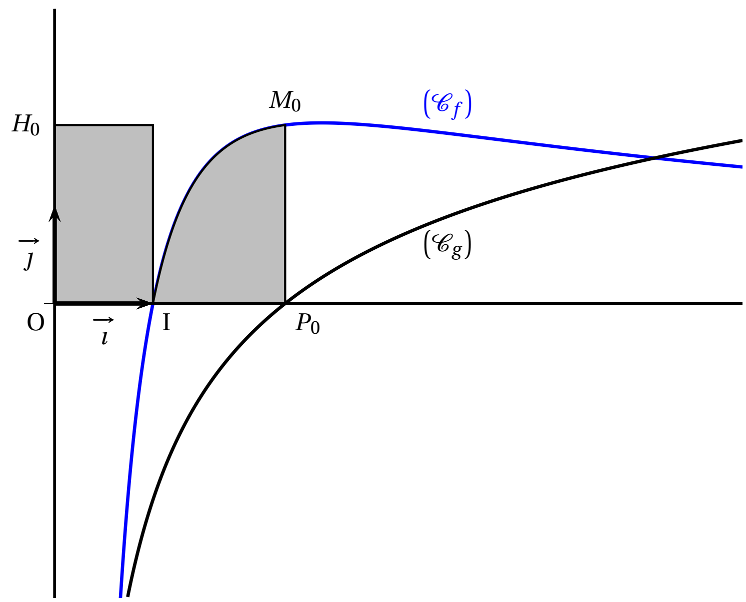
2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5\ln x}{x}$$

a. Montrer que $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\displaystyle\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

3. On a tracé dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$.
On appelle I le point de coordonnées $(1\,;\,0)$, P_0 le point d'intersection de $\left(\mathscr{C}_g\right)$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.
On nomme $(\mathscr{D}_1)$ le domaine du plan délimité par la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et les segments $[\mathrm{I}P_0]$ et $[P_0M_0]$.
On nomme $(\mathscr{D}_2)$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[\mathrm{OI}]$ et $[\mathrm{O}H_0]$.
Démontrer que les deux domaines $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



EXERCICE 4 **7 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant les conditions

$$\left\{\begin{array}{lll}(1) & : & f'(x) = 4 - \left[f(x)\right]^2 \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\ ;\ +\infty[\\ (2) & : & f(0) = 0\end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\left\{\begin{array}{ll}x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = x_n + 0,2\\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel } n,\ y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8\end{array}\right.$$

1. **a.** Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe.
Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. **a.** Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0\ ;\ 2]$ alors $p(x) \in [0\ ;\ 2]$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.

c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n).

d. La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+1}\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. **a.** Montrer que $\left(\mathscr{C}_g\right)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b. Étudier les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $\left(\mathscr{C}_g\right)$ à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

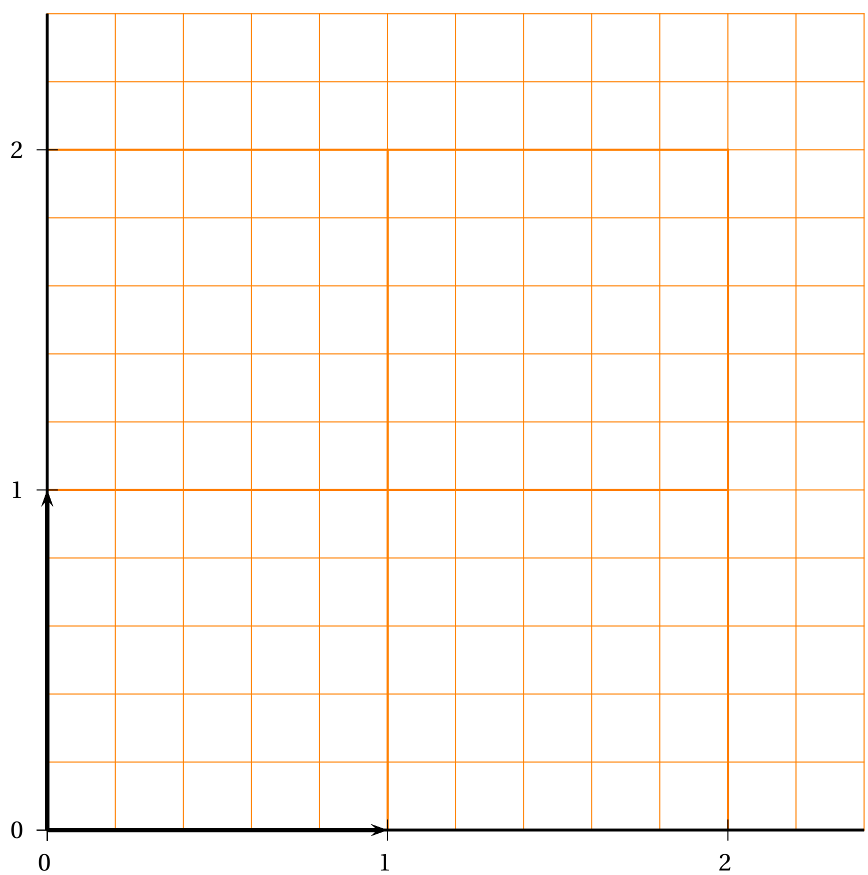
Cette page sera complétée et remise avec la copie avant la fin de l'épreuve

Exercice 4 : Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

Partie B



∾ Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2006 ∾

EXERCICE 1 **3 points**
Commun à tous les candidats

1. **Restitution organisée des connaissances**
   Pré-requis :
   — la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$.
   — $\ln(1) = 0$

   Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x,
   $$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$
2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que
   $$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et que } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
   pour tous réels strictement positifs a et b.
3. On donne $0{,}69 \leqslant \ln 2 \leqslant 0{,}70$ et $1{,}09 \leqslant \ln 3 \leqslant 1{,}10$.
   En déduire des encadrements de $\ln 6$, $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$, et $\ln\left(\dfrac{3}{8}\right)$.

EXERCICE 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 0,75 point, chaque erreur enlève 0,25 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.
Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse.

1. L'équation $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution	**b.** 1 solution	**c.** 2 solutions	**d.** plus de 2 solutions

2. L'expression $-e^{-x}$

a. n'est jamais négative	**b.** est toujours négative	**c.** n'est négative que si x est positif	**d.** n'est négative que si x est négatif

3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{x} - 1}{e^{x} + 2} =$

a. $-\dfrac{1}{2}$	**b.** 1	**c.** 2	**d.** $+\infty$

4. L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

a. $x \mapsto ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	**b.** $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	**c.** $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	**d.** $x \mapsto ke^{2x} + \dfrac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que $P(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
La courbe donnée en ANNEXE 1 représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B

On pose $\lambda = 1{,}5$.

1. Calculer $P(X \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2. Calculer $P(X \geqslant 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.
4. Calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x 1{,}5t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\,\mathrm{d}t$.

   Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
   b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points

   — A d'affixe a, $a \in \mathbb{R}$
   — B d'affixe $b + \mathrm{i}$, $b \in \mathbb{R}$
   — C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $\left(O\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

b. Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.

2. Dans cette question, on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points C d'affixe $c = -\text{i}$ et D d'affixe $d = 2 + \sqrt{3} - 2\text{i}\sqrt{3}$.

a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b. Calculer le quotient $\dfrac{d-a}{c-a}$; que peut-on en déduire pour le triangle ACD ?

c. Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

e. Déterminer la nature du triangle BEF.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sur la figure donnée en ANNEXE 2, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$, par J le milieu du segment $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$.

1. Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.

2. Déterminer le rapport de cette similitude s.

On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Donner, sans justifier, l'image de B par s.

4. Déterminer et placer l'image de C par s.

5. Soit Ω le centre de la similitude s.

a. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.

b. Montrer que Ω ne peut être le point H.

c. Construire Ω.

6. On considère le repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OC}\right)$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.

b. En déduire l'affixe du centre Ω de s.

EXERCICE 5 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ donné en ANNEXE 3, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.
Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n,\ 2)$ et $(B_n,\ 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n,\ 1)$ et $(B_n,\ 3)$.

1. Sur le graphique placer les points A_2, B_2.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}.$$

On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.
   b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
2. **a.** Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).
   b. Étudier les variations de la suite (b_n).
3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

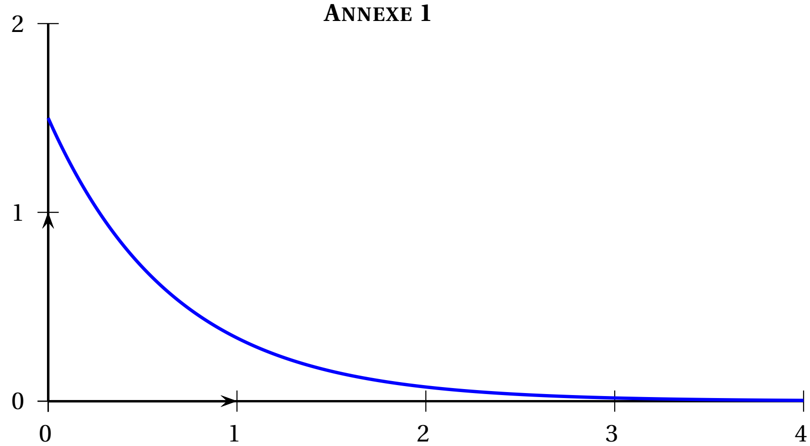
1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = 3a_n + 4b_n.$$

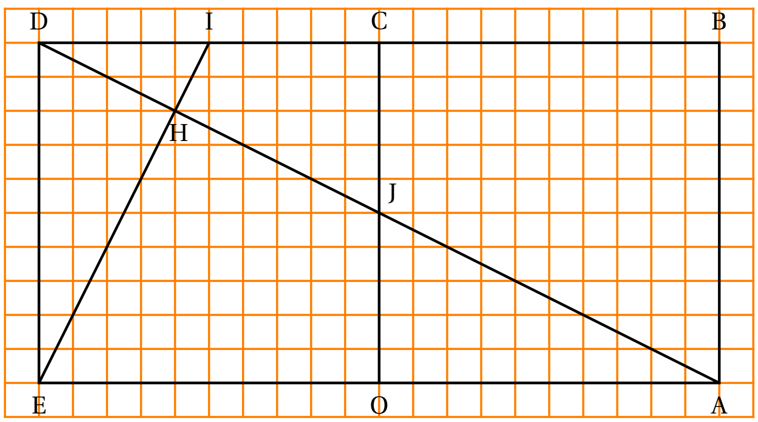
Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

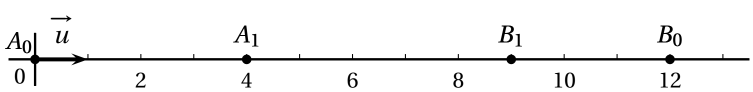
ANNEXE 1



ANNEXE 2



ANNEXE 3



Baccalauréat S Asie juin 2006

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \left\|\overrightarrow{w}\right\|$ et $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ à 2π près.

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives $-\text{i}$ et 3i.

On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\text{i}z + 3}{z + \text{i}}$$

1. Étude de quelques cas particuliers.
   - **a.** Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB].

     Placer ces points sur le dessin.
   - **b.** On note C le point d'affixe $c = -2 + \text{i}$. Démontrer que le point C′, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.
2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que $\arg\left(z'\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près.
3. Étude de deux ensembles de points.
   - **a.** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
   - **b.** Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M' ?

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur la feuille annexe. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AD}} ; \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; 1 ; 1\right)$.

1. Placer le point I sur la figure.
2. Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

3. On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).
   a. Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :
      i. Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$.
      ii. $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
   b. Calculer les coordonnées du point R,
   c. En déduire que la distance IR s'exprime par $IR = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$.
4. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3~;~-3~;~2)$ est normal au plan (ACI).
   En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).
5. Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) est $\dfrac{5}{\sqrt{22}}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels $x,~y$ et z tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \text{ modulo } 2^n.$$

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.
2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.
   a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

   b. Peut-on trouver trois entiers naturels $x,~y$ et z tels que
   $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Étude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels $x,~y$ et z tels que
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels $x,~y$ et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r,~z = 2s + 1$ où $q,~r,~s$ sont des entiers naturels.
   a. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4.
   b. En déduire une contradiction.
3. On suppose que $x,~y,~z$ sont impairs.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   b. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.
   c. Conclure.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est $0,7$. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est $0,8$.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : « Pierre gagne la n-ième partie ».
- P_n : « Pierre perd la n-ième partie ».

On pose : $p_n = p(\mathrm{G}_n)$ et $q_n = p(\mathrm{P}_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.

a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}_2)$ et $p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{G}_2)$.

b. Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.

2. Étude de la suite (p_n).

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + y = 0$.

3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de (E).

5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.

3. En déduire le tableau de variations de f_k.

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.

b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

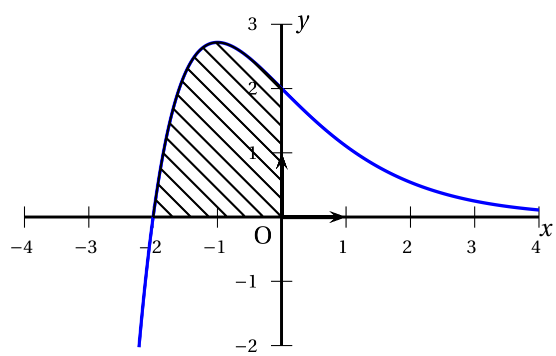
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathscr{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

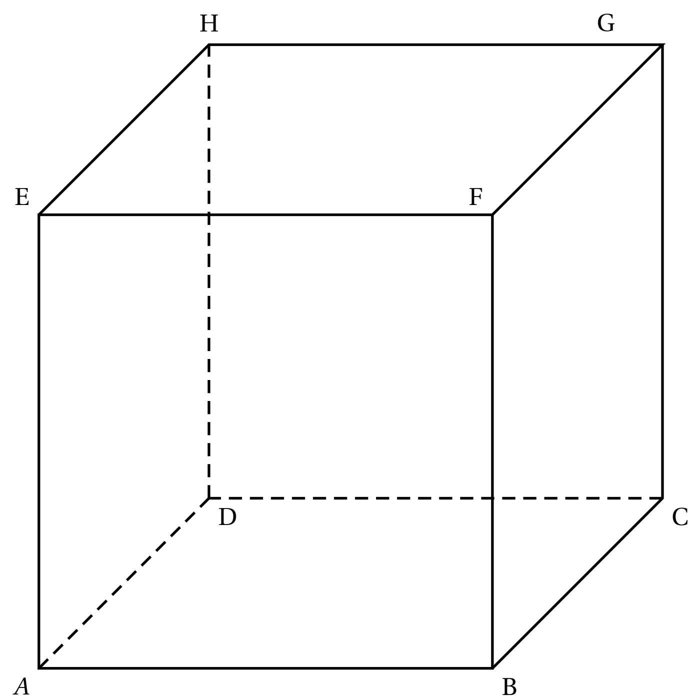
a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

b. Soit $\mathscr{S}$ l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer $\mathscr{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



ANNEXE

Exercice 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \text{i}\sin\theta) \\ r & > & 0\end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \sin b \cos a\end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg\left(z_1\right) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \text{i}$ ou $z = -\text{i}$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$ démontrer que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   a. Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
   b. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
   c. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$ ».

Partie A. Quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \mod p$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \mod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \mod p$. En déduire que $r = 0$.
   b. Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   c. En déduire que b divise $p - 1$.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 5 cm).

Partie A. Étude de la fonction f

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau des variations de f.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes éventuelles dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B. Quelques propriétés graphiques

1. On considère les points M et M' de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, $\mathscr{A}_n$ désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
   a. Calculer $\mathscr{A}_n$.
   b. Étudier la limite éventuelle de $\mathscr{A}_n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif, On note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\lambda}^{0} \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure. exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda \leqslant x \leqslant 0$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\text{pour tout nombre réel } x : \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{a\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} + \frac{b\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

2. Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.
3. Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

1. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
   a. Calculer les coordonnées de I.

b. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?

3. Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}_k$ de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M_k} = k\overrightarrow{\mathrm{AG}}$;
- $\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

1. Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.

2. Calcul des coordonnées de N_k.

a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

b. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_k$ dans ce repère.

c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1\,;\,3k-1\,;\,0)$.

3. Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?

4. Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

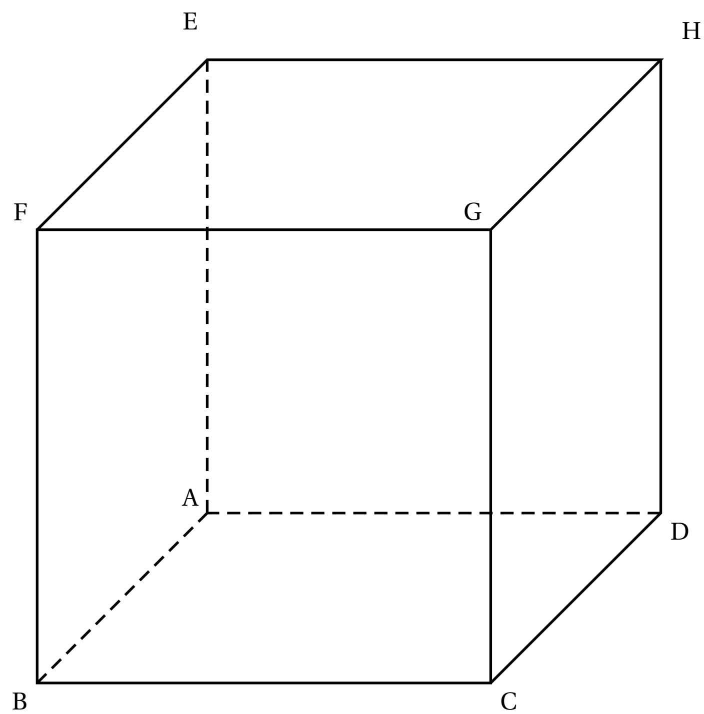
5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.

ANNEXE

Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Feuille à compléter et à rendre avec la copie



꧁ Baccalauréat S Métropole 15 juin 2006 ꧂

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les points

$$\text{A}(2\,;\,4\,;\,1),\ \text{B}(0\,;\,4\,;\,-3),\ \text{C}(3\,;\,1\,;\,-3),\ \text{D}(1\,;\,0\,;\,-2),\ \text{E}(3\,;\,2\,;\,-1),\ \text{I}\left(\frac{3}{5}\,;\,4\,;\,-\frac{9}{5}\right)$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x+2y-z-11=0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(\text{CD}) \quad \left\{\begin{array}{l c l} x & = & -1+2t \\ y & = & -1+\ \ t \\ z & = & \ \ 1-\ \ t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Le point I est sur la droite (AB).

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2\text{e}^{1-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

   b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

   c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n\text{e}^{1-x}\,\text{d}x.$$

   a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

   b. Calculer I_1, puis I_2.

   c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.

3. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leqslant x^n\text{e}^{1-x} \leqslant x^n\text{e}.$$

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

1. Question de cours
On prend comme pré-requis les résultats suivants :

— Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif
— Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2. On considère l'application f de $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ dans $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a. Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg\left(z'\right) = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

b. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ tels que $f(M) = M$.

c. M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.
Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}} = \dfrac{1}{\text{i}}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\text{i}}\right) = -\text{i}\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)}$.
En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)$

3. a. Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \text{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\text{i}}$ est un nombre réel non nul.

b. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 13 & (19)\\ n & \equiv & 6 & (12)\end{array}\right.$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u+12v=1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N=13\times 12v+6\times 19u$ est une solution de (S).

2. **a.** Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19)\\ n & \equiv & n_0 & (12)\end{array}\right.$$

b. Démontrer que le système $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19)\\ n & \equiv & n_0 & (12)\end{array}\right.$ équivaut à $n\equiv n_0 \quad (12\times 19)$.

3. **a.** Trouver un couple $(u\,;\ v)$ solution de l'équation $19u+12v=1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228=12\times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité $0,2$ de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n>0,99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant :
Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,409 6 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b. On pose $d^2 = \Sigma_{k=1}^{4}\left(f_k - \dfrac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé 7

Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion 15 juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de la fonction f.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

   a. On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \text{e}$ (on pourra utiliser la question 1. b.).

   c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[\text{e}\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $\left(f(u_n)\right)$, démontrer que $f(\ell) = \ell$.
2. En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

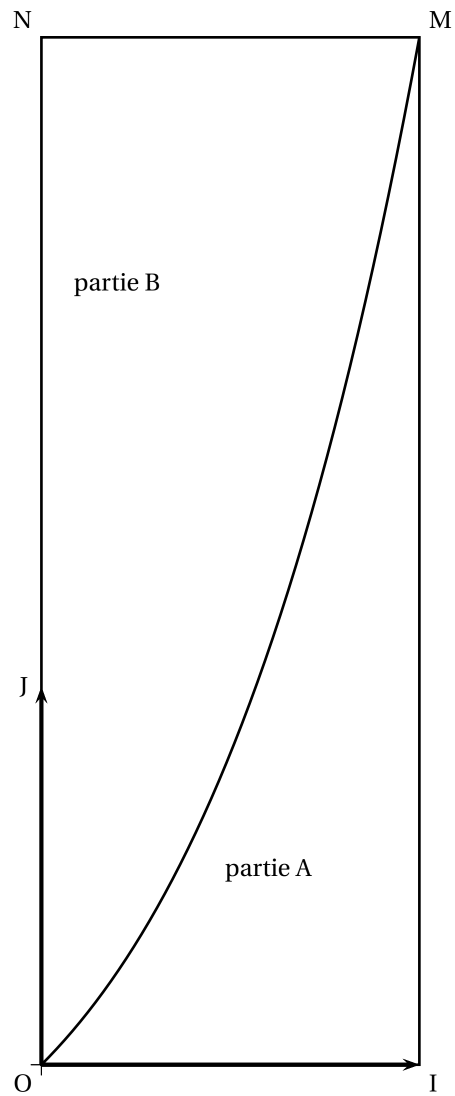
Première partie

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\text{e}^x\,\text{d}x$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire OIMN telle que, dans le repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\text{OI}},\ \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^x$. Cette courbe partage la cible OIMN en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.

Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.



Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\dfrac{1}{2\text{e}}$.

Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.

a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

b. Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

c. Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).

Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?

3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\dfrac{\pi}{2}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\dfrac{z-4}{z} = \text{i}$. Écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A′ et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2, \qquad b = 4, \qquad a' = 2\text{i} \quad \text{et} \quad d = 2 + 2\text{i}.$$

   Quelle est la nature du triangle ODB ?
4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - \text{i}\sqrt{3}$ et $f = 1 + \text{i}\sqrt{3}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?
5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A′ et de rayon 2.
   Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$
   a. On désigne par E′ l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E′.
   b. Démontrer que le point E′ est un point du cercle $\mathscr{C}'$.
   c. Vérifier que : $e - d = \left(\sqrt{3} + 2\right)\left(e' - d\right)$. En déduire que les points E, E′ et D sont alignés.
6. Soit D′ l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE′D′ est rectangle.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

ABCD est un carré tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD].
On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A *on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie* B *on utilisera les nombres complexes.*

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.
3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.

4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).
   a. Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
   b. Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2 , 2 + 2i et 2i.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitudes est $z' = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$.
2. Calculer l'affixe du point Ω.
3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(\mathrm{E}) = \mathrm{A}$. Placer le point E sur la figure.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions 1,2,3 *et* 4, ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur* 1 *point. Toute réponse juste rapporte* 0,5 *point. Donner plus de* 2 *réponses à une question entraîne la nullité de la question.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

1. Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.
   a. La distance du point O au plan P est égale à 1.
   b. La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.
   c. Le vecteur $\vec{n}\left(1\,;\,\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$ est un vecteur normal au plan P.
   d. Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.
2. On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point A(1 ; 1 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; −4 ; −2).
   a. La droite D est parallèle au plan P.
   b. La droite D est orthogonale au plan P.
   c. La droite D est sécante avec le plan P.
   d. Un système d'équations paramétriques de D est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 + t \\ y &=& 1 - 4t \\ z &=& 1 - 2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.
3. On désigne par E l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$. Soit le point A(1 ; 1 ; 1).
   a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.
   b. L'ensemble E est une droite passant par A.
   c. L'ensemble E est un plan passant par A.
   d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; −3 ; 2).
4. ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

a. Le plan P contient toujours le point D.

b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.

c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

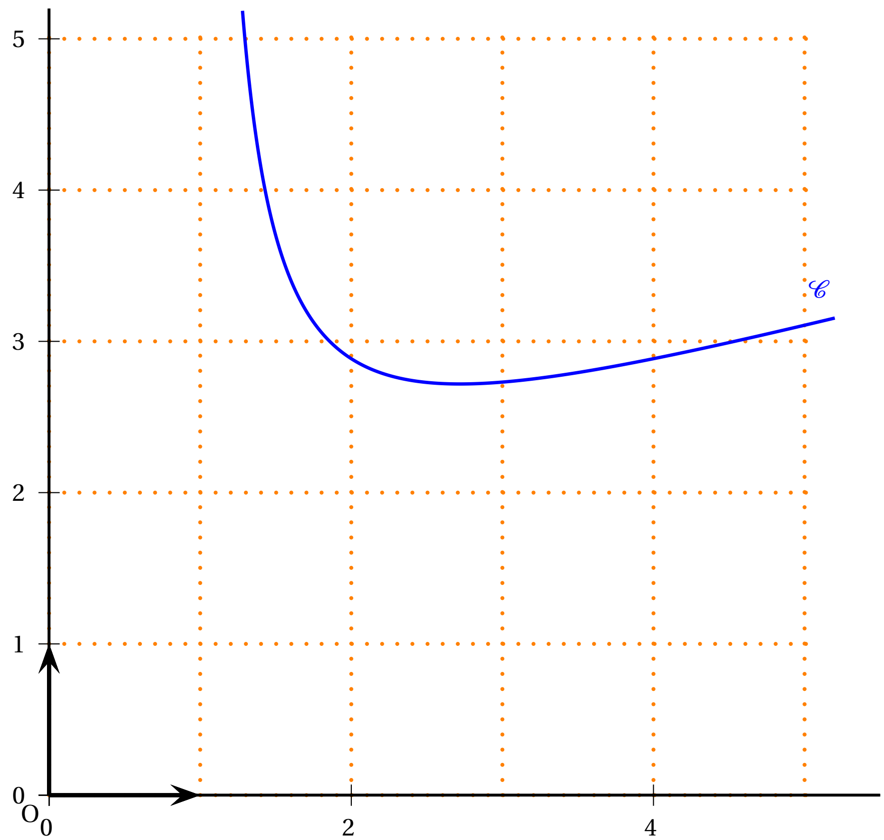
$$\overrightarrow{\mathrm{B}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}.$$

d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

ANNEXE 1

À compléter et à rendre avec la copie

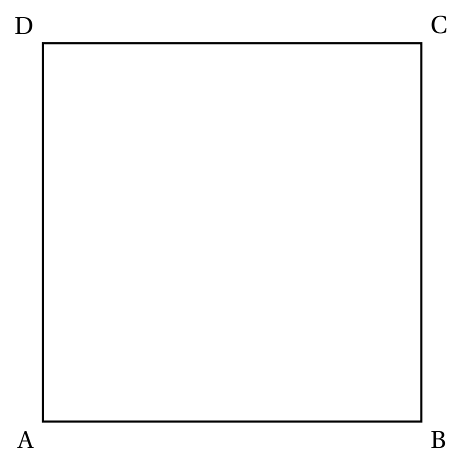
Figure de l'exercice 1



ANNEXE 2

À compléter et à rendre avec la copie

Figure de l'exercice 3



∽ Baccalauréat S Liban mai 2006 ∾

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(2 ; 1 ; 3), B(−3 ; −1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -7+2t \\ y & = & -3t \\ z & = & 4+\ t \end{array}\right.$
   a. Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).
   b. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).
   a. Montrer que H est le barycentre de (A ; −2), (B ; −1) et (C ; 2).
   b. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que
   $$\left(-2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right) = 0$$
   En préciser les éléments caractéristiques.
   c. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que
   $$\left\|-2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \sqrt{29}$$
   En préciser les éléments caractéristiques.
   d. Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.
   e. Le point S (−8 ; 1 ; 3) appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a. Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   b. Déterminer l'affixe du point B′ image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Placer les points A, B et B′.
2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que
   $$z' = (1+\text{i})z + 1.$$
   a. Montrer que B a pour image B′ par f.
   b. Montrer que A est le seul point invariant par f.

c. Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\dfrac{z'-z}{\text{i}-z} = -\text{i}$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction de M′ À partir de M, pour M distinct de A.

3. **a.** Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$.

b. Démontrer que $z' - 3 - 2\text{i} = (1+\text{i})(z-2)$.
En déduire que si le point M appartient À Σ_1, alors son image M' par f appartient À un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B′.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A d'affixe 3i et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

Partie B

1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, À tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = -2\text{i}\overline{z} + 6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
   Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.
2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
   On pose $g = f \circ h$.
   a. Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.
   b. On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformation g.
   Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -\text{i}\overline{z} + 2 + 2\text{i}$ où z'' est l'affixe de M''.
   c. Montrer qu'il existe sur l'axe $\left(\text{O}, \vec{v}\right)$ un unique point invariant par g ; on le note L.
   Reconnaître alors la transformation g.
   d. En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL). Préciser les éléments caractéristiques de h'.
3. Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient parallèles.

EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. **a.** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. L'axe des abscisses est-il tangent À la courbe $(\mathscr{C})$ au point O ?

2. On pose $\text{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\text{d}x$.

   a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

   b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\text{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **3 points**
Commun à tous les candidats

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x.$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda = 0,2}$.

2. À quel instant t, à un mois prés, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\text{e}^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

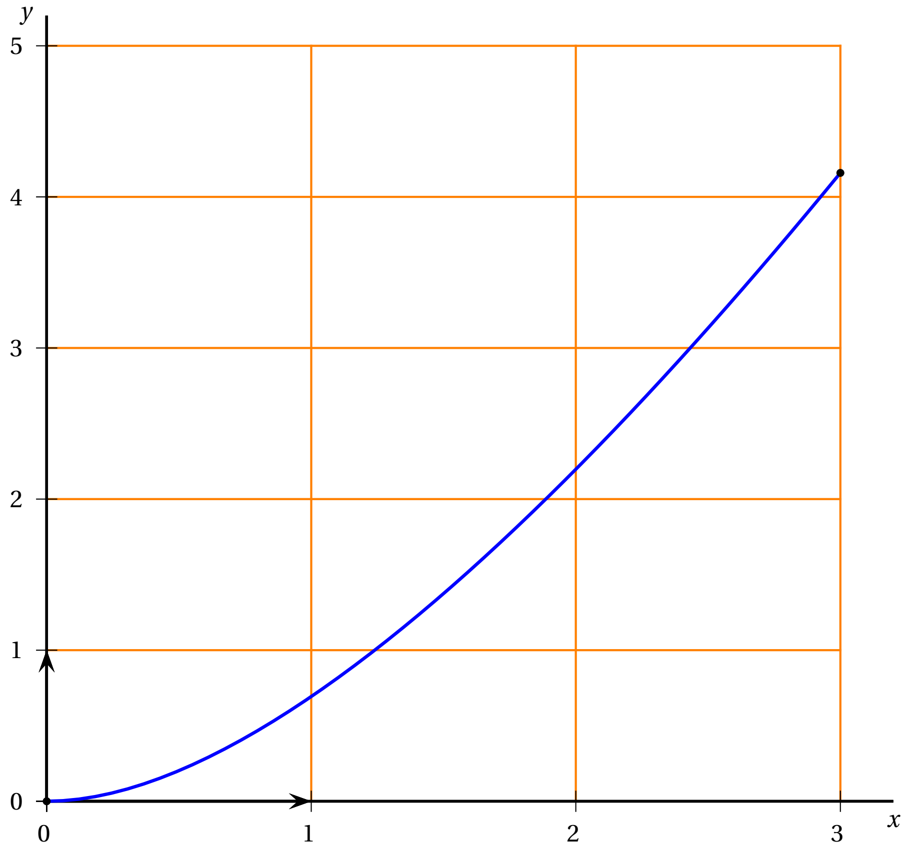
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
   Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Annexe

Exercice 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur

Courbe ($\mathscr{C}$)



Baccalauréat S Polynésie juin 2006

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $\left(z'-1\right)(z+1) = -2$.

   b. En déduire une relation entre $\left|z'-1\right|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg\left(z'-1\right)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C$'$) de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   a. Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

   b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).

   c. Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P$'$ et Q sont alignés.

   d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P$'$ du point P par l'application f.

Exercice 2 **5 points**

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(0 ; 0 ; 2) B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).
On désigne par I le milieu du segment [BC], par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ est la sphère de diamètre [BC] ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{8}{9}\right)$.

Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique
$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& t\\ y &=& 2t\\ z &=& 2-2t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ ».}$$

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n}-1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x \equiv 0 \quad (\text{modulo } 6)$ alors $x \equiv 0 \quad (\text{modulo } 3)$ ».

Proposition 3 : « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x~;~y)$ solutions de l'équation $12x-5y=3$ est l'ensemble des couples $(4+10k~;~9+24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « il existe un seul couple $(a~;~b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a<b$ et $\text{PPCM}(a,~b)-\text{PGCD}(a,~b)=1$ ».

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M-N$ est aussi divisible par 27 ».

Exercice 3 **4 points**

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1$^{\text{er}}$ mois / Retards le 2$^{\text{e}}$mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1 000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.

a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,

b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul).

On fait les hypothèses suivantes :

— si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.

— si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.

— si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

On note A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n,

B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n »,

C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.

a. Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.

b. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.

d. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par
$u_n = p_n - 0,55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 4 **6 points**

Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	4e^{-2}	↘	0

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,\text{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $0 \leqslant F(3) \leqslant 4\text{e}^{-2}$.

Partie B

La fonction f considérée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2\text{e}^{-x}.$$

On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^{-x}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes sont tracées en annexe.

1. **a.** Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A. On ne demande pas de justifier les limites.

b. Étudier les positions relatives des courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ).

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(x^2 - 1\right)\text{e}^{-x}$.

a. Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \left(-x^2 - 2x - 1\right)\text{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

b. Soit un réel α supérieur ou égal à 1.
On considère la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}(a)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

c. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à 4e^{-2}, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe $(\mathscr{C})$ au point $P(x_P\ ;\ m)$ et la courbe (Γ) au point $Q\left(x_Q\ ;\ m\right)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P, appartenant à l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

a. Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe) les points P et Q tels que $x_P \in]-\infty\ ;\ -1]$ et $PQ = 1$.

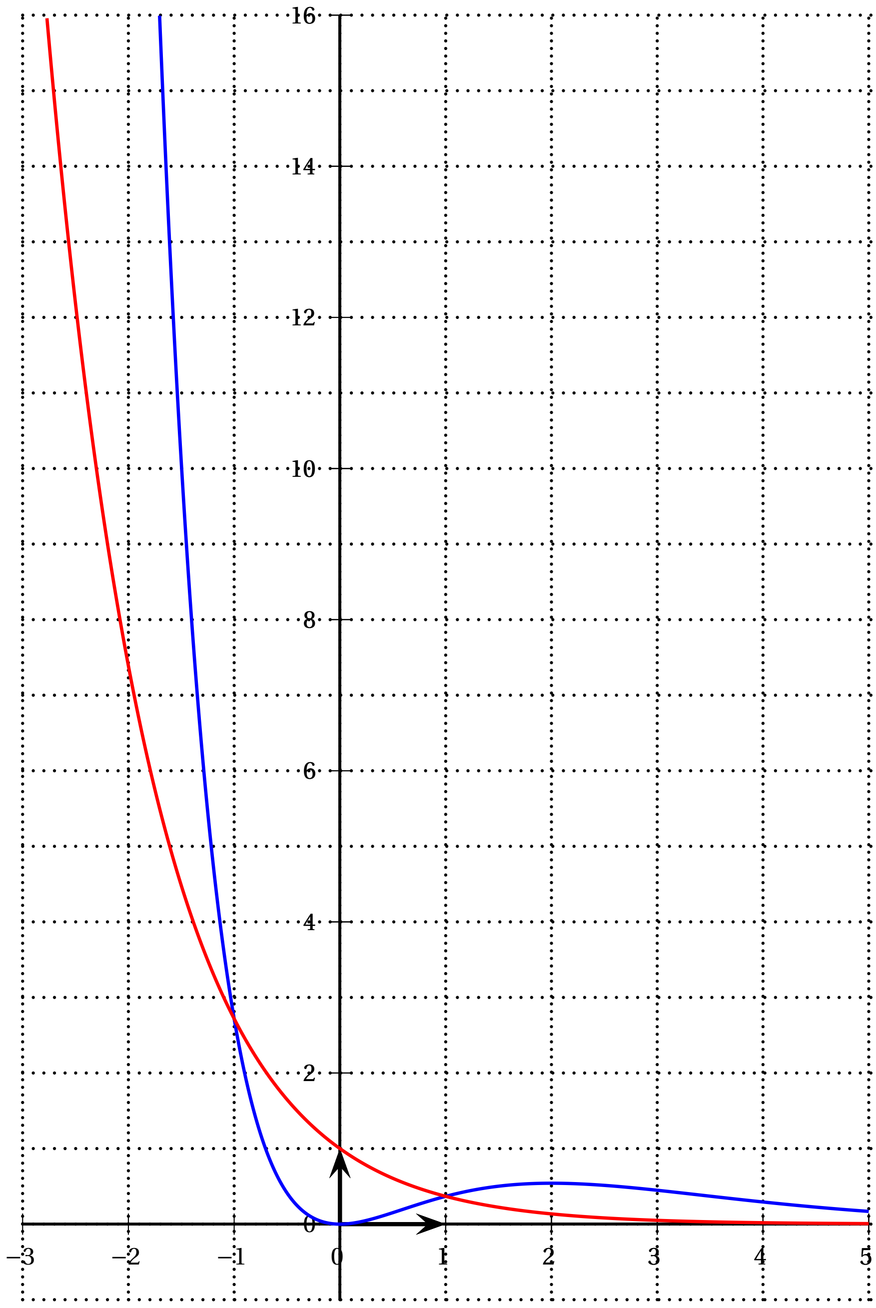
b. Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et de x_Q.
Justifier l'égalité $f(x_P) = g\left(x_Q\right)$.

c. Déterminer la valeur de x_P telle que $PQ = 1$.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 4



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2006

Exercice 1 **6 points**

On se propose de déterminer des valeurs approchées de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{10t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

en utilisant deux méthodes distinctes.

Les parties A et B sont largement indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A
Utilisation d'une intégration par parties

1. En remarquant que $\dfrac{10t^2}{1+t^2} = 5t \times \dfrac{2t}{1+t^2}$, établir l'égalité

$$\mathrm{I} = \frac{5}{2} \times \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t.$$

2. On pose, pour x positif ou nul, $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.
   a. En utilisant les variations de f, démontrer que $f(x) \geqslant 0$. En procédant de la même façon, on pourrait établir que $g(x) \leqslant 0$, inégalité que l'on admettra ici.
   b. À l'aide de ce qui précède, montrer que l'encadrement :

   $$t^2 - \frac{t^4}{2} \leqslant \ln\left(1+t^2\right) \leqslant t^2.$$

   est vrai pour tout réel t.
   c. Déduire de la question précédente que

   $$\frac{5}{24} \leqslant -5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{37}{192}.$$

3. En utilisant les questions précédentes, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 0,02 de I par des nombres décimaux ayant trois chiffres après la virgule.

PARTIE B
Utilisation de la méthode d'Euler

1. On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{10t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.
   Préciser $\Phi(0)$ ainsi que la fonction dérivée de φ.
2. On rappelle que la méthode d'Euler permet de construire une suite de points $M_n\left(x_n\,;\,y_n\right)$ proches de la courbe représentative de φ. En choisissant comme pas $h = 0,1$, on obtient la suite de points M_n définie pour n entier naturel par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 0 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + 0,1 \\ y_{n+1} & = & y_n + \Phi'(x_n) \times 0,1 \end{array}\right.$$

   En utilisant, sans la justifier, l'égalité $x_n = \dfrac{n}{10}$, vérifier que $y_{n+1} = y_n + \dfrac{n^2}{100+n^2}$.

3. Calculer y_1, et y_2, puis exprimer y_3, y_4 et y_5 sous la forme d'une somme de fractions que l'on ne cherchera pas à simplifier.
   Donner maintenant une valeur approchée à $0,001$ près de y_5.
   Le réel x_5 étant égal à $\dfrac{1}{2}$, y_5 est donc une valeur approchée de $\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire de I.
4. Avec la méthode d'Euler au pas $h = 0,01$, on obtient, pour I, la valeur approchée $0,354$.
   Les valeurs de I obtenues avec la méthode d'Euler sont-elles compatibles avec l'encadrement de la question 3. de la partie A ?

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On désigne par A et B les point, d'affixes respectives 2 et 3.
On fera un dessin (unité graphique 2 cm) qui sera complété selon indications de l'énoncé.
La question 1 *est indépendante des questions* 2 *et* 3.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 - 4z + 6 = 0.$$

   b. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives

$$z_1 = 2 + \text{i}\sqrt{2} \text{ et } z_2 = 2 - \text{i}\sqrt{2}.$$

   Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_1 - 3}{z_1}$.
   En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle.

   c. Démontrer sans nouveau calcul que les points O, B, M_1 et M_2, appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.
   Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer les points M_1 et M_2 sur le dessin.
2. On appelle f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par l'égalité $z' = z^2 - 4z + 6$.
   On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin,

   a. Vérifier l'égalité suivante $z' - 2 = (z - 2)^2$.

   b. Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
   Vérifier l'égalité suivante : $z' = 2 + 2\text{e}^{2\text{i}\theta}$ et en déduire que M' est situé sur un cercle Γ' dont on précisera le centre et le rayon.
   Tracer Γ' sur le dessin,
3. On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D′ l'image de D par f.

   a. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d - 2$.
   En déduire que D est situé sur le cercle Γ.

   b. À l'aide la question 2. b., donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{AD}'}\right)$ et placer le point D′ sur le dessin.

   c. Démontrer que le triangle OAD′ est équilatéral.

EXERCICE 3 **4 points**

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ alors, pour t réel positif, $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

- Démontrer l'égalité suivante : $p(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
- En déduire que, pour s et t réels positifs, l'égalité suivante est vraie
  $P_{(X>t)}(X > s+t) = p(X > s)$ (loi de durée de vie sans vieillissement),
  $P_{(X>t)}(X > s+t)$ désignant la probabilité de l'évènement $(X > s+t)$ sachant que $(X > t)$ est réalisé.

Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1. **a.** Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \leqslant 10) = 0,7$.

On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur $0,12$ comme valeur approchée de λ.

b. Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle
$P_{(T>10)}(T > 15)$.

c. Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.

On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à $0,01$ près de la réponse.

On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

a. Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y.

b. Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.

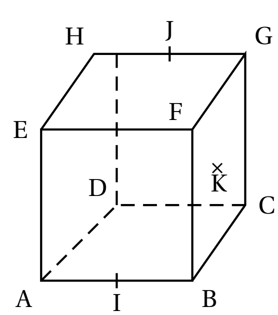
Déterminer à $0,01$ près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

EXERCICE 4 **5 points**

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. **a.** Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.

Établir que DIFJ est en fait un losange et montrer que l'aire de ce losange est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DIJ).

En déduire une équation cartésienne de ce plan.

c. Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide EDIFJ. On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h et de base correspondante $\mathscr{B}$ est donné par la formule suivante $\text{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$.

2. Soit (Δ) la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)

a. Donner une représentation paramétrique de (Δ) et prouver que K est un point de (Δ).

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ).

c. Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3. Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \dfrac{4}{3} = 0$.

a. Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que L est un point de (S), Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-un déduire de ce dernier résultat ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On désigne par A et C les points d'affixes respectives 1 et 2i.
Sur le dessin joint en annexe (à rendre avec la copie), le quadrilatère OABC est un rectangle et I désigne le milieu de [AB].

1. a. Justifier le fait qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme O en I et A en C.

b. Déterminer l'écriture complexe de s. En déduire les éléments caractéristiques de s et, en particulier, établir que l'affixe du centre Ω de s vaut $\dfrac{1+3\text{i}}{5}$.

c. Vérifier par un calcul que Ω est situé sur le cercle Γ de centre A passant par O.

2. Soit f l'application du plan complexe d'écriture complexe

$$z \longmapsto \frac{-3-4\text{i}}{5}\overline{z} + \frac{8+4\text{i}}{5}.$$

a. Déterminer les images par f des points A et C. En déduire la nature précise de f, puis démontrer que I est l'image de Ω par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

b. Construire le cercle Γ sur le dessin et placer également le point Ω en utilisant les informations géométriques précédentes.

3. À tout point M d'image M' par s, on associe le point M'' défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$.

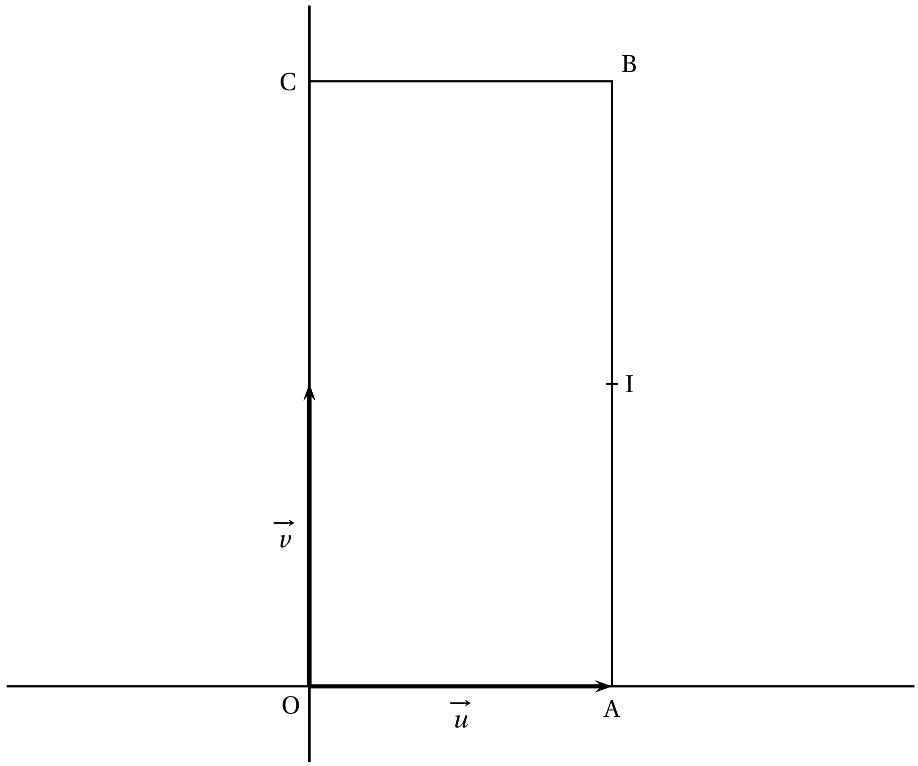
a. Quel est le point Ω'' associé à Ω ?

b. Construire avec soin le point A$''$ en laissant les traits de construction.

c. On suppose maintenant que M a pour affixe z.
Démontrer que M'' a pour affixe $z'' = \mathrm{i}z + \dfrac{4+2\mathrm{i}}{5}$.
En déduire que M'' est l'image de M par une similitude dont on donnera les éléments caractéristiques.

d. Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble Γ'' des points M'' lorsque M décrit le cercle Γ.

Annexe (exercice de spécialité)



∽ Baccalauréat S Métropole septembre 2006 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A - Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(E_1)$; $p_{E_1}(O_2)$; $p(E_1 \cap E_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B - On suppose maintenant que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.
2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux?
   b. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   c. **Application numérique :**
   Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.
On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) = 0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\mathrm{lm}(z'\overline{z}) = 0$.
   Applications

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{O}N}$ soient orthogonaux?

4. On suppose z non nul. P est le point d' affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$.

   On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.

   a. Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\overline{z}^2 \left|\dfrac{1}{z^2} - 1\right|^2$.

   b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation

$$(\mathscr{E}) \quad : \quad 17x - 24y = 9,$$

où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

   a. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation $(\mathscr{E})$.

   b. Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$.

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma de l'annexe 2. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.
Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.
Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.
À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

   a. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x,\ y)$ est solution de l'équation $(\mathscr{E})$ de la question 1.

   b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

   c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

   d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle (E_λ) : $y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.
On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$: $z = \dfrac{1}{y_0}$
Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2. **Question de cours**

   PRÉ-REQUIS

   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'$_\lambda$) : $z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.

b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

3. a. Démontrer que $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.

On pourra étudier sur $]0\,;\,1]$ *la fonction f définie par* $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

Démontrer alors que (E$_\lambda$) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH et représenté sur l'annexe.
Soit I le barycentre des points pondérés (E; 2) et (F; 1), J celui de (F; 1) et (B; 2) et enfin K celui de (G; 2) et (C; 1).

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J *et* K. *On note* Δ *cet ensemble.*

1. Placer les points I, J et K sur la figure de **l'annexe qui sera rendue avec la copie.**
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant : $\left(\text{A}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

3. Donner les coordonnées des points I, J et K.
4. Soit P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3) deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.

   a. Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?

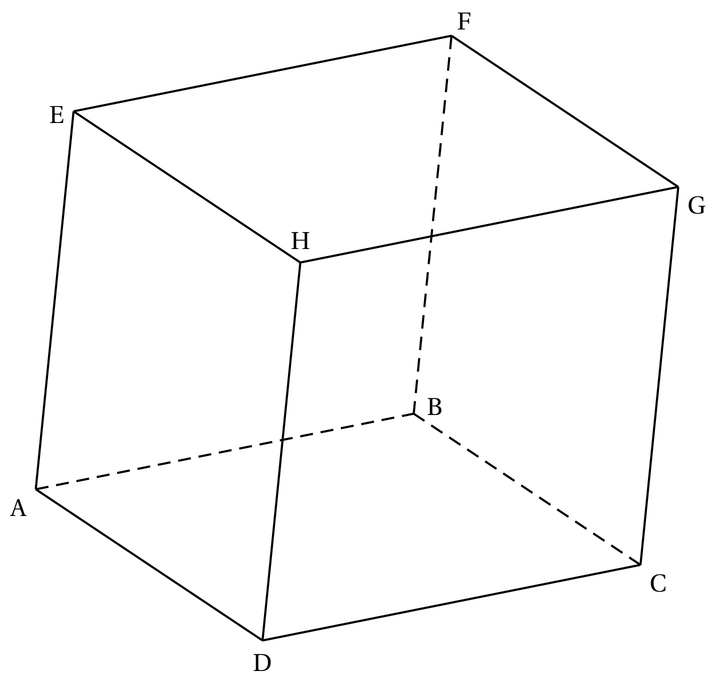
   b. Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6. **a.** Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.

   b. Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

ANNEXE 1

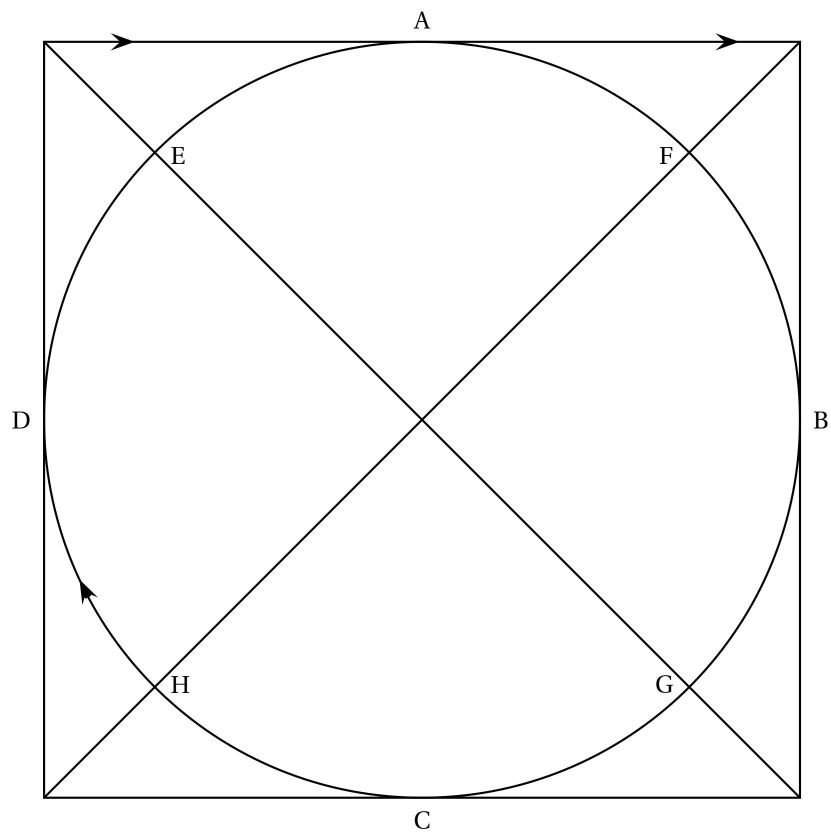
À RENDRE AGRAFÉE À LA COPIE

Figure de l'exercice 4



ANNEXE 2

Schéma de l'exercice 2



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   On pose $a = 3$, $b = 5-2\text{i}$ et $c = 5+2\text{i}$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.

   Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.

   a. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.

   b. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$.

   c. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.

2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2-\text{i}$.

   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   b. Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Calculer $P(X=0)$.

   c. On se propose de déterminer maintenant $P(X=1)$.

   — Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\dfrac{8}{45}$.

   — En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X=1)$.

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

   Soit k un entier compris entre 1 et n.

   Soit N l'évènement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».

   Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».

   Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ».

   Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(N)$.

EXERCICE 3 **7 points**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

d. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Déterminer 1_2 et 1_3.

c. Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Calculer $\mathscr{A}$.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On définit la fonction v sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (où $0 < a < b$).
Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\ ;\ \dfrac{1}{a}\right]$.

b. On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,

c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 4 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.
On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).
Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -7 + 2t \\ y & = & -8 + 3t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\ ;\ -4\ ;\ -1)$.

a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b. Exprimer AM^2 en fonction de t.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.

- Étudier les variations de f.
- Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?
  Dans la suite, on désignera ce point par I.
- Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a. Déterminer une équation de (Q).

b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2006 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

A de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-5)$, B de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-5)$, C de coordonnées $(-1\,;\,2\,;\,-5)$ et D de coordonnées $(2\,;\,3\,;\,4)$.

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrect.*

L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2k \\ y &=& \dfrac{7}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z &=& -\dfrac{1}{2} - 9k \end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours*

   On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ ».

   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

   a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

   b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 4 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{C}} = 5\mathrm{i} \text{ et } z_{\mathrm{D}} = -3 - \mathrm{i}.$$

   Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + 2\mathrm{i})z - 2 - 4\mathrm{i}.$$

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$$z' - z = -2\text{i}(2 - \text{i} - z).$$

b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}$. Écrire z_{E} sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E$'$ associé au point E.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Rappel :
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \mod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

   a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
   Démontrer que : si $a \equiv b \mod 7$ et $c \equiv d \mod 7$ alors $ac \equiv bd \mod 7$.

   b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
   si $a \equiv b \mod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \mod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \mod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

   a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \mod 7$.

   b. On appelle *ordre* de $a \mod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \mod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \mod 7$.
   En déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k ?

   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

   Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \mod 7$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{4}$.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
On définit les évènements suivants :

— A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
— B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
— J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes,

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a. Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n}2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. établir que :

$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}.$$

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

EXERCICE 4 **8 points**
Commun à tous les candidats

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0~;~+\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1~;~\text{e}]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0~;~1)$ et le point B_n de coordonnées $(n~;~0)$.

b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. **a.** Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :
$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite.
Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.

a. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égaie à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.

b. Établir que :

$$(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e} - \alpha_n).$$

c. En déduire un encadrement de $n\,(\mathrm{e} - \alpha_n)$.

d. La suite de terme général $n\,(\mathrm{e} - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. **a.** On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
   Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer son espérance mathématique.

   b. On désigne par A l'évènement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ».
   On désigne par B l'évènement « au moins un animal est malade parmi les 10 ».
   Calculer les probabilités de A et de B.
3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est $0,8$. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est $0,9$.
   On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».

   a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement T.

   c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

On considère l'équation (E)

$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. **a.** Montrer que (E) admet une solution réelle, note z_1.

   b. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-z_1)(z-2-2\mathrm{i})(az+b)$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $1,\ 2+2\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

1. Représenter A, B et C.
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2\text{i}}{1-\text{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.
5. Quelle est la nature de OCDB ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. (unité 1 cm).
On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r.
   Montrer que B a pour affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}$.
2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant
$$\left\{-3\;;\;-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\;;\;\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\;;\;-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\right\}$$
3. **a.** Déterminer $r(\text{F})$.
   b. Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?
4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de s'. En déduire l'angle et le rapport de $s'\circ s$.
   b. Quelle est l'image du point D par $s'\circ s$?
   c. Déterminer l'écriture complexe de $s'\circ s$.
5. Soit A$'$ le symétrique de A par rapport à C.
   a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(\text{A}')$ puis l'image de A$'$ par $s'\circ s$.
   b. Calculer l'affixe du point A$'$. Retrouver alors le résultat du **a.** en utilisant l'écriture complexe de $s'\circ s$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$u_0=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$$

1. **a.** Soit f la fonction définie sur $]0\;;\;+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$
   Étudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. (On prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

En déduire sa valeur.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun tous les candidats

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère :

— les points A(0; 0; 3), B(2; 0; 4), C(−1 ; 1 ; 2) et D(1 ; −4 ; 0)

— les plans (P_1) : $7x + 4y - 3z + 9 = 0$ et (P_2) : $x - 2y = 0$.

— les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& -1+t\\ y &=& -8+2t\\ z &=& -10+5t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{l c l}x &=& 7+2t'\\ y &=& 8+4t'\\ z &=& 8-t'\end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

	a.	b.	e.	d.
1. Le plan (P_1) est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (ABD)
2. La droite (Δ_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3. Position relative de (P_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle a (P_1)	(Δ_1) est incluse dans (P_1)	(Δ_1) coupe (P_1)	(Δ_1) est orthogonale à (P_1)
4. Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2)) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
5. L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est	$\left\{\begin{array}{lcr}x&=&t\\ y&=&-2+\frac{1}{2}t\\ z&=&3t\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{lcr}x&=&2t\\ y&=&t\\ z&=&3+6t\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{lcr}x&=&5t\\ y&=&1-2t\\ z&=&t\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{lcr}x&=&-1+t\\ y&=&2+t\\ z&=&-3t\end{array}\right.$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère la droite (D) passant par A(0; 0; 3) et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}$(1 ; 0 ; −1) et la droite (D′) passant par B(2; 0; 4) et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}$(0 : 1 ; 1).
L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D′), de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

1. On considère un point M appartenant à (D) et un point M' appartenant à (D$'$), définis par $\overrightarrow{\text{A}M} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{\text{B}M'} = b\vec{v}$, où a et b sont de nombres réels.

   Exprimer les coordonnées de M, de M' puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D$'$) si et seulement si le couple $(a\,;\ b)$ est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2a+b & = & 1\\ a+2b & = & -1\end{array}\right.$$

3. Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M', que nous noterons ici H et H', tels que la droite (HH$'$) soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D$'$). Montrer que HH$'$ = $\sqrt{3}$ unités de longueur.
4. On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M' quelconque de la droite (D$'$).
   a. En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1, démontrer que

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.$$

   b. En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H$'$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2007 (spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. *Question de cours*

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\,(a,\ b,\ c)$ et un point $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$.

2. On considère les points A(1 ; 2 ; −3), B(−3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; −1).

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées (−5 ; 9 ; 4). Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 *point.*
Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ **b.** $\dfrac{9}{8}$ **c.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ **d.** $\dfrac{4\times 3\times 2}{8\times 7\times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0 **b.** $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ **c.** $\dfrac{23}{128}$ **d.** $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.
Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque

a. $m = -1$ **b.** $m = \dfrac{1}{2}$ **c.** $m = \text{e}^{\frac{1}{2}}$ **d.** $m = \text{e}^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est

a. $1-\dfrac{1}{\text{e}}$ **b.** $\dfrac{1}{\text{e}}$ **c.** $\dfrac{1}{5\text{e}}$ **d.** $\dfrac{1}{0,2}(\text{e}-1)$

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ 24\ ;\ 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an+b)$ par 26; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$.

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?
2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.
3. *Dans toute la suite de l'exercice*, on prend $a = 5$ et $b = 2$.
   a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n+2$ et $5p+2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.
   b. Coder le mot AMI.
4. On se propose de décoder l a lettre E.
   a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.
   b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
      i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.
      ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.
      iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x\ ;\ y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leqslant x \leqslant 25$.
   c. Décoder alors la lettre E.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. **a.** Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$$

b. Vérifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$$

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n$$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

c. En déduire l'égalité

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

e. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).