ൾ Baccalauréat S 2007 ൿ

L'intégrale d'avril 2007 à mars 2008

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat S Pondichéry 12 avril 2007 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3\,;2\,;6)$, B de coordonnées $(1\,;2\,;4)$, et C de coordonnées $(4\,;\,-2\,;\,5)$.

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
   b. Vérifier que ce plan est le plan $\mathscr{P}$.
2. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
   c. Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{P}$. Calculer la distance OK.
   d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.
3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S=\{(\text{O},\ 3),\ (\text{A},\ 1),\ (\text{B},\ 1),\ (\text{C},\ 1)\}$$

   a. Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.
   b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).
   c. Déterminer la distance de G au plan $\mathscr{P}$.
4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left\|3\overrightarrow{M\text{O}}+\overrightarrow{M\text{A}}+\overrightarrow{M\text{B}}+\overrightarrow{M\text{C}}\right\|=5.$$

   Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à $\mathscr{P}$ et Γ ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*
   Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

   — $R(\Omega)=\Omega$
   — pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M'=\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\ \overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta\quad[2\pi]$.

   On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b,
   $AB=|b-a|$ et $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{AB}\right)=\arg(b-a)\quad[2\pi]$.

   Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation

$$z'-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_{\text{I}}=1+\mathrm{i}$ et $z_{\text{B}}=2+2\mathrm{i}$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_{A} de A.

c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{OA}}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IO}}$. On pose $\text{A}' = T(\text{A})$.

a. Calculer l'affixe $z_{\text{A}'}$ de A′.

b. Quelle est la nature du quadrilatère OIAA′ ?

c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{\text{A}'}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

On suppose connus les résultats suivants :

— la composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;

— la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;

— une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que $s(\text{A}) = s'(\text{A})$, $s(\text{B}) = s'(\text{B})$ et $s(\text{C}) = s'(\text{C})$. Montrer que $s = s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1+\text{i}$, F d'affixe $2+\text{i}$ et G d'affixe $3+\text{i}$.

a. Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.

b. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S, en déterminant l'écriture complexe de S.

c. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $\text{A}' = h(\text{A})$ et $\text{G}' = h(\text{G})$, et on appelle I le milieu de [EA′]. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $S = \sigma \circ h$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\text{d}x$.

a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = [\ln(x+3)]^2.$$

a. Justifier la dérivabilité sur $[0~;~+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les évènements :
A : « au moins une personne accepte de répondre »
B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »
C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».
Calculer les probabilités des évènements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ P(X=k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!}\\ \text{et } P(X=n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!},\\ \text{formules dans lesquelles } a = \dfrac{n}{10}\end{array}\right.$$

a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre $6,29$ et $6,3$.

c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

∽ Baccalauréat S Liban juin 2007 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2.$$

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont données en annexe.

1. **a.** Étudier le signe de $(\ln x)(1-\ln x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, M est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N est le point de $\mathscr{C}'$ de même abscisse.

   a. Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   Étudier les variations de la fonction h sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire que sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

   c. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

   d. En déduire que, sur $]0\,;\,1[\ \cup\ ]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, il existe deux réels a et b $(a < b)$ pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

   b. Vérifier que la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

   c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ne faisant pas l'option mathématiques

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.*
Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 - \dfrac{t}{2} \\ y & = & 1 \\ z & = & 5 - \dfrac{3t}{2} \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

On note A le point de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,1)$, B le point de coordonnées $(4\,;\,-2\,;\,2)$ et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. Proposition 1
   « La droite (d) est parallèle à l'axe $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$ ».

2. Proposition 2
   « Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. Proposition 3
   « La mesure de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».
4. Soit G le barycentre des points pondérés (A ; −1), (B ; 1) et (C ; 1).
   Proposition 4
   « Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu ».
5. Proposition 5
   « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan P d'équation
   $x+3z-5=0$ ».

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'option mathématiques

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2\text{i}z+1$.
   Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\text{i}$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».
2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on note S la surface d'équation $z = x^2+2x+y^2+1$.
   Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z=5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et de rayon 5 ».
3. **Proposition 3 :** « $5^{750}-1$ est un multiple de 7 ».
4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 ».
5. Soient a et b deux entiers naturels.
   Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n $(n \geqslant 2)$:

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3.
4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
   d. Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|).$$

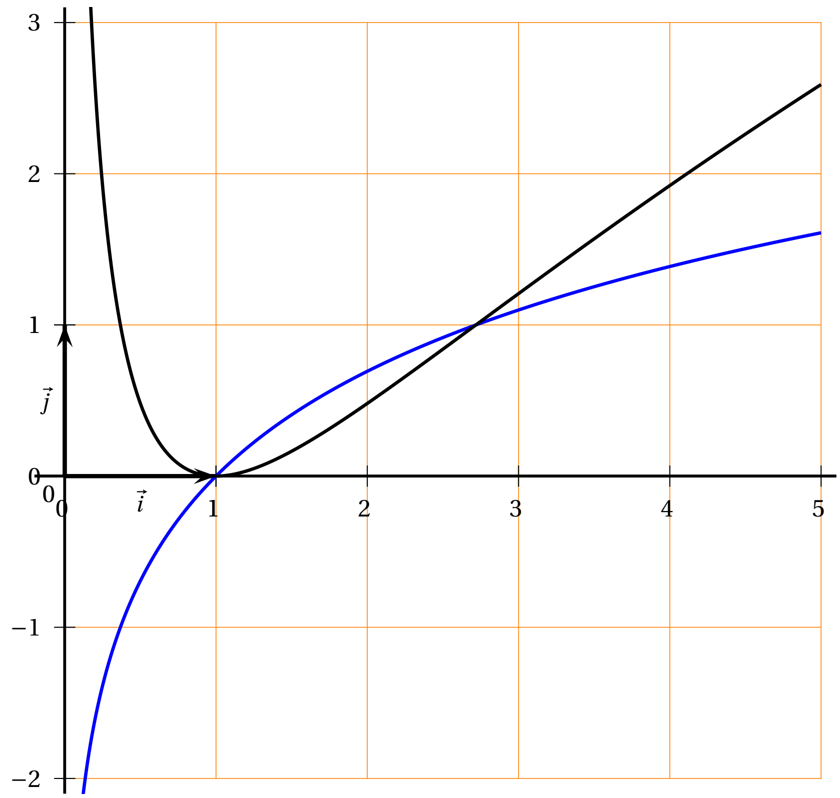
Le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
Pour z complexe non nul, on note $z = r\text{e}^{\text{i}\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z.

1. Montrer que $z' = (2 - r)\text{e}^{\text{i}\alpha}$.
2. Déterminer l'affixe a' du point A$'$, image par f du point A d'affixe $a = 3$.
3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + \text{i}$.
   a. Écrire b sous forme exponentielle.
   b. Déterminer l'affixe b' du point B$'$, image du point B par f.
4. Placer A, B, A$'$ et B$'$ sur la figure..
5. **a.** Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.
   b. Représenter E sur la figure.
6. Montrer que le cercle $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.
7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O, n' appartenant pas au cercle $\mathscr{C}_1$.
   On appelle I le milieu du segment $[MM']$ où M' est l'image de M par f.
   a. Montrer que I appartient à $\mathscr{C}_1$.
   b. Montrer que I appartient à la demi-droite $[\text{O}M)$.
   c. Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé M_1.
   Construire le point M_1', image par f du point M_1.

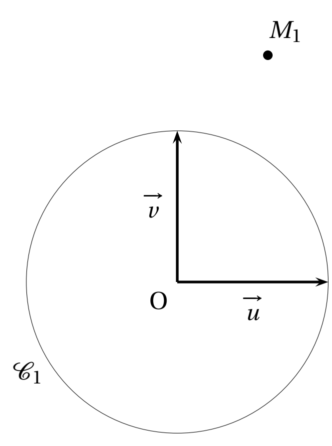
Annexe

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 1



EXERCICE 4



Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2007

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
   Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$.
   Soit A le point de coordonnées $(1\,;\,11\,;\,7)$.
   Proposition 1 :
   « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P), a pour coordonnées $(0\,;\,2\,;\,1)$ ».
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.
   On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0) = 0$.
   Proposition 2 : « On a $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ ».
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.
   Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 7$ ».

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Soit A le point d'affixe $z_A = \text{i}$ et B le point d'affixe $z_B = \text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.
   a. Déterminer une écriture complexe de r.
   b. Montrer que l'affixe de C est $z_C = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
   c. Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.
   d. Placer les points A, B et C.
2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.
   a. Montrer que l'affixe de D est $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$. Placer le point D.
   b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.
3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
   a. Déterminer une écriture complexe de h.
   b. Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.
4. **a.** Calculer le rapport $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle CDE.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3+5\text{i}$, $b = -4+2\text{i}$ et $c = 1+4\text{i}$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = (2-2\text{i})z+1.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. **a.** Déterminer l'affixe du point B′ image du point B par f.
   b. Montrer que les droites (CB′) et (CA) sont orthogonales.
3. Soit M le point d'affixe $z = x+\text{i}y$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
   Soit M' l' image de M par f.
   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{C}M'}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si $x+3y = 2$.
4. On considère l'équation (E) : $x+3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Vérifier que le couple $(-4 ; 2)$ est une solution de (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
   c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5 ; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{C}M'}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ soient orthogonaux.
   Placer ces points sur la figure.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

On appelle :
E_1 l'évènement « le joueur perd la première partie » ;
E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ;
E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Montrer que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à $0,031$ et que celle de l'évènement $(X = 3)$ est égale à $0,002$.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Calculer l'espérance de X.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'évènement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

b. En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

6. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ où A est un réel positif.

  Si pour tout x de $[A\ ;\ +\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe.

a. Montrer que f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathscr{C}$.

c. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

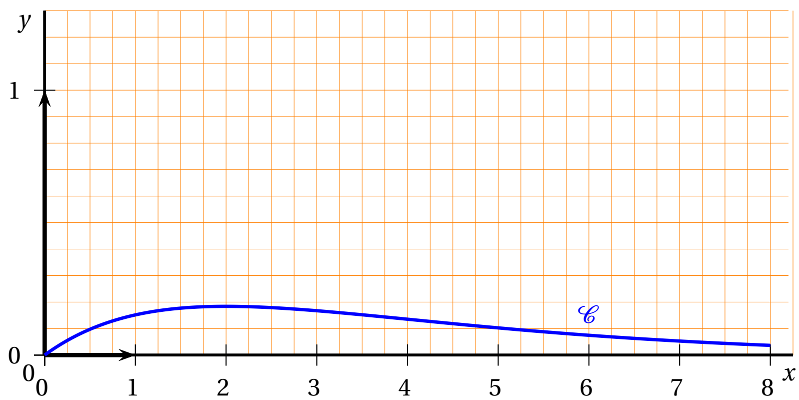
c. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geqslant 0,5$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie



∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2007 ∾

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.
Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
   Calculer en fonction de x l'intégrale $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1~;~+\infty[$, on a :
$$2 - t \leqslant \frac{1}{t}.$$
3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :
$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leqslant \ln x.$$

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1~;~4]$. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. **a.** Démontrer que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.
2. On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1~;~4]$.
   En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

$\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1+\mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que
$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right).$$

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.
   a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \dfrac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \dfrac{1}{2}(x+y)$.
   En déduire que le point M' appartient à la droite $(\mathrm{O}A)$.

   b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

   c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $\text{O}M_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

   a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + \text{i}$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.

   b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.

   c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

   d. Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2}\text{i}z_3$.

   En déduire que $MM' = \frac{1}{2}\text{O}M_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}\text{O}M$.

   Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'\text{O}M}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

$\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 1 + \text{i}$.

On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.

On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.
4. **a.** Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.

   b. Montrer que $z_B = -3\text{i}z_A$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
5. Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s. Montrer que la droite $(\text{O}P)$ est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de $[BC]$.
2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.

   b. Montrer que l'image de la droite $(\text{O}P)$ par s est la droite (OM).

   c. Que représente le point M pour le triangle $\text{O}BP$? Justifier.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

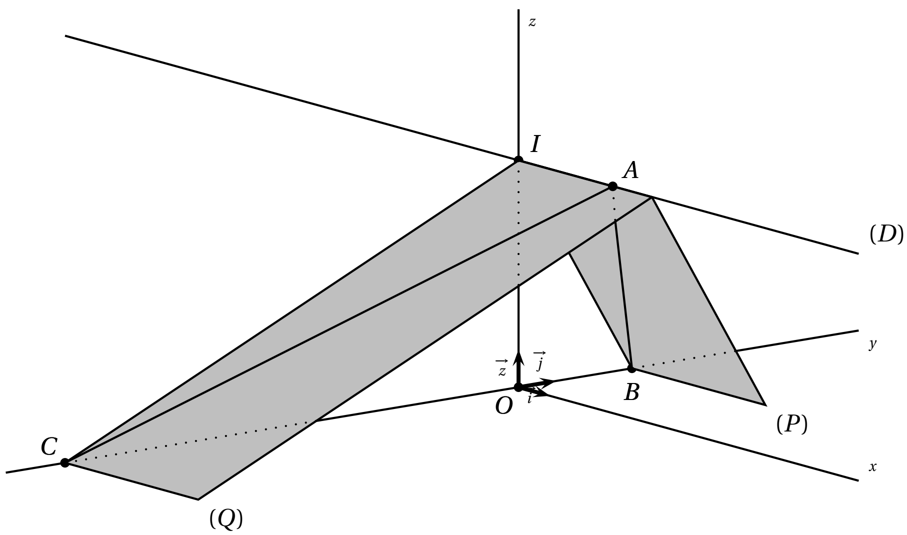
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points $A(3 ; 0 ; 6)$ et $I(0 ; 0 ; 6)$, et l'on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12 = 0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$.
4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est

$$x+4y+2z-12=0.$$

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).
   Démontrer que la droite $(\text{O}A)$ et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.
6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte aux questions 1 *et* 2 *rapporte* 0,5 *point et à la question* 3 *rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P1 et P2, qui entrent dans la fabrication d'une boite de vitesses automatique.
Une seule pièce de type P1 et une seule pièce de type P2 sont nécessaires par boîte.
L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement S1 et S2.
Le sous-traitant S1 produit 80 % des pièces de type P1 et 40 % de pièces de type P2.
Le sous-traitant S2 produit 20 % des pièces de type P1 et 60 % de pièces de type P2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P1 et P2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.
   Il tire une pièce au hasard.
   a. La probabilité que ce soit une pièce P1 est

0,8 0,5 0,2 0,4 0,6

b. La probabilité que ce soit une pièce P1 et qu'elle vienne de S1 est

0,1 0,2 0,3 0,4 0,5

c. La probabilité qu'elle vienne de S1 est

0,2 0,4 0,5 0,6 0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 est :

0,1588 0,2487 0,1683 0,0095

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 et P2 est :

0,5000 0,2513 0,5025

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\dfrac{357}{995}$ $\dfrac{103}{199}$ $\dfrac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P1 et P2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P1	P2
S1	0,2	0,25
S2	0,1	0,125

On rappelle que si X, durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P1 fabriquée par S1 dure moins de 5 ans est :

0,3679 0,6321

∾ Baccalauréat S Asie juin 2007 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si f est la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \sin^2 x$, alors sa fonction dérivée vérifie, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \sin 2x$.
2. Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle.
   Si $f(-1) = -f(1)$, alors :
   $\displaystyle\int_{-1}^{1} tf'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
   Si $\displaystyle\int_{0}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{0}^{3} g(t)\,\mathrm{d}t$, alors pour tout nombre réel x appartenant à $[0 ; 3]$: $f(x) \leqslant g(x)$.
4. Si f est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ et si f n'est pas une fonction constante, alors la représentation de f dans un repère du plan, n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \lambda \cdot z_n + \mathrm{i} \end{array}\right.$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calcul de z_n en fonction de n et de λ.
   - **a.** Vérifier les égalités : $z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = (\lambda + 1)\mathrm{i}$; $z_3 = \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)\mathrm{i}$.
   - **b.** Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i}$.
2. Étude du cas $\lambda = \mathrm{i}$.
   - **a.** Montrer que $z_4 = 0$.
   - **b.** Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.
   - **c.** Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   - **d.** Représenter les points M_0 , M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. Caractérisation de certaines suites (z_n).
   - **a.** On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.
     Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.
   - **a.** Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.
   - **b.** Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.
   - **c.** Déterminer le point $s \circ s(\text{B})$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.
2. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A$'$ et B$'$ les points d'affixes respectives $8 + 4\text{i}$ et $2 + \text{i}$.
   - **a.** Démontrer que les points A$'$ et B$'$ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite $\mathcal{D}$.
   - **b.** Vérifier que $s\left(\text{B}'\right) = \text{A}'$.
   - **c.** En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $\left[\text{A}'\text{B}'\right]$.

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. On note encore s la similitude directe telle que $s(\text{O}) = \text{A}$ et $s(\text{B}) = \text{O}$. Soit Ω son centre.
   - **a.** Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
   - **b.** Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].)

     En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. On désigne par $\mathcal{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB). On note A$'$ et B$'$ les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.
   - **a.** Déterminer les images des droites $\left(\text{BB}'\right)$ et $\mathcal{D}$ par la similitude s.
   - **b.** Déterminer le point $s\left(\text{B}'\right)$.
   - **c.** En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $\left[\text{A}'\text{B}'\right]$.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « *le jouet est sans défaut de finition* » ;
- S l'évènement : « *le jouet réussit le test de solidité* ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b. Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{1}{4}$.

c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Calcul de probabilités.

a. Démontrer que $p(S) = 0,934$.

b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)

3. Étude d'une variable aléatoire B.

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les solutions de l'équation

$$E_a : \quad x^a = a^x.$$

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.

2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.

3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_{e}.

On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.

a. **Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\text{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

b. Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.

c. Étudier les variations de h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_{e}.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

b. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

d. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (Unité : 2 cm).

3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) : si $a \in]0~;~1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;

(P_2) : si $a \in]1~;~\text{e}[\cup]\text{e}~;~+\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1~;~\text{e}[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]\text{e}~;~+\infty[$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 15 juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte $0,5$ *point . (Une réponse inexacte enlève* $0,25$ *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A. $\dfrac{1}{56}$ **B.** $\dfrac{1}{120}$ **C.** $\dfrac{1}{3}$

b. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

A. $\dfrac{11}{56}$ **B.** $\dfrac{11}{120}$ **C.** $\dfrac{16}{24}$

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a. La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A. $\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^3$ **B.** $\left(\dfrac{3}{8}\right)^5$ **C.** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

b. La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A. $\left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$ **B.** $2 \times \dfrac{5}{8} + 3 \times \dfrac{3}{8}$ **C.** $10 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :

— R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
— N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
— R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
— N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a. La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :

A. $\dfrac{5}{8}$ **B.** $\dfrac{4}{7}$ **C.** $\dfrac{5}{14}$

b. La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :

A. $\dfrac{16}{49}$ **B.** $\dfrac{15}{64}$ **C.** $\dfrac{15}{56}$

c. La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A. $\dfrac{5}{8}$ **B.** $\dfrac{5}{7}$ **C.** $\dfrac{3}{28}$

d. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A. $\dfrac{15}{56}$ **B.** $\dfrac{3}{8}$ **C.** $\dfrac{5}{7}$

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective $a,\ b,\ c$, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3+\text{i}, \quad b = -1+3\text{i}, \quad c = -\sqrt{5}-\text{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et $a,\ b,\ c$ sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :
   2. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.
   En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.
   b. Vérifier l'égalité : $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.
   c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.
3. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.
   a. Exprimer en fonction de $a,\ b$ et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$.
   b. Prouver que $\left(\overrightarrow{\text{CB}},\ \overrightarrow{\text{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.
   (On admet de même que $\left(\overrightarrow{\text{CA}},\ \overrightarrow{\text{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).
   c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = \text{i}\sqrt{2}\overline{z} + 2\text{i}\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.
Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de f

Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}z + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).
2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$,

III. Deuxième décomposition de f

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $y = x + 2$.
   Montrer que pour tout point N appartenant à $\mathscr{D}$, le point $f(N)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$.
3. Soit σ la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.
   a. Donner l'écriture complexe de σ.
      (Indication : on pourra poser $z' = a\overline{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.)
   b. En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.
   c. Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.
4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie,

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f et f' ne s'annulant pas sur l'intervalle I.
On note M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et d'ordonnée $y = f(x)$.
On désigne par $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M.
On rappelle qu'une équation de $\mathscr{T}$ est de la forme : $Y = f'(x)[X - x] + f(x)$.

I. Question préliminaire

1. Montrer que $\mathscr{T}$ coupe l'axe des abscisses en un point H dont l'abscisse X_T vérifie :

$$X_T = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

2. Montrer que $\mathscr{T}$ coupe l'axe des ordonnées en un point K dont l'ordonnée Y_T vérifie :

$$Y_T = f(x) - xf'(x).$$

II. k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $x - X_T$ est constante, et égale à k, pour tout nombre réel x. (Propriété 1)

1. Démontrer que f vérifie la propriété 1 si et seulement si f vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{1}{k}y$$

2. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 1 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(0) = 1$.

III. k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $y - Y_T$ est constante et égale à k, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\text{I} =]0\ ;\ +\infty[$. (Propriété 2)

1. Démontrer que f vérifie la condition posée si et seulement si f vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{k}{x}.$$

2. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 2 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie la condition : $f(1) = 0$.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $\text{e}^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \text{e}^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de la fonction f
   a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.
   d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+\text{e}^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Baccalauréat S Métropole 15 juin 2007

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soient (P) et (P′) les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$. Soit A le point de coordonnées $(0\,;1\,;1)$.

1. Démontrer que les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.
2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{3}+t \\ y & = & -\frac{1}{3} \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

   Démontrer que les plans (P) et (P′) se coupent selon la droite (d).
3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P′).
4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. **Restitution organisée de connaissances**

   Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
2. Soient les deux intégrales définies par

$$\text{I} = \int_0^{\pi} \text{e}^x \sin x\,\text{d}x \quad \text{et J} = \int_0^{\pi} \text{e}^x \cos x\,\text{d}x.$$

   a. Démontrer que $\text{I} = -\text{J}$ et que $\text{I} = \text{J} + \text{e}^{\pi} + 1$.

   b. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation :

$$\text{(E)} \quad z^3 - (4+\text{i})z^2 + (13+4\text{i})z - 13\text{i} = 0$$

où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+\text{i})z^2 + (13+4\text{i})z - 13\text{i} = (z-\text{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3\mathrm{i}$ et $2-3\mathrm{i}$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.
2. Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La figure est proposée en annexe 1. *Elle sera complétée tout au long de l'exercice.*

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5+6\mathrm{i}$, $-7-2\mathrm{i}$ et $3-2\mathrm{i}$. On admet que le point F, d'affixe $-2+\mathrm{i}$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1. Soit H le point d'affixe -5. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.
2. **a.** Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes.
   Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z}+b$ qui, au point M, associe le point M'.
   Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?
   b. En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).
   c. Vérifier que le point E est un point du cercle Γ.
3. Soit I le milieu du segment [AC].
   Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.
   Démontrer que les points H, G et F sont alignés.

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.
Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Un représentant de commerce propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2. Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

   a. 0,4 **b.** 0,04 **c.** 0,102 4 **d.** 0,204 8

2. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a. 0,043 **b.** 0,275 **c.** 0,217 **d.** 0,033

3. Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a. 0,100 **b.** 0,091 **c.** 0,111 **d.** 0,25

4. Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a. $\dfrac{5}{9}$ **b.** $\dfrac{9}{14}$ **c.** $\dfrac{4}{7}$ **d.** $\dfrac{1}{3}$

EXERCICE 5 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction *f*

1. Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \quad \text{et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.

c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

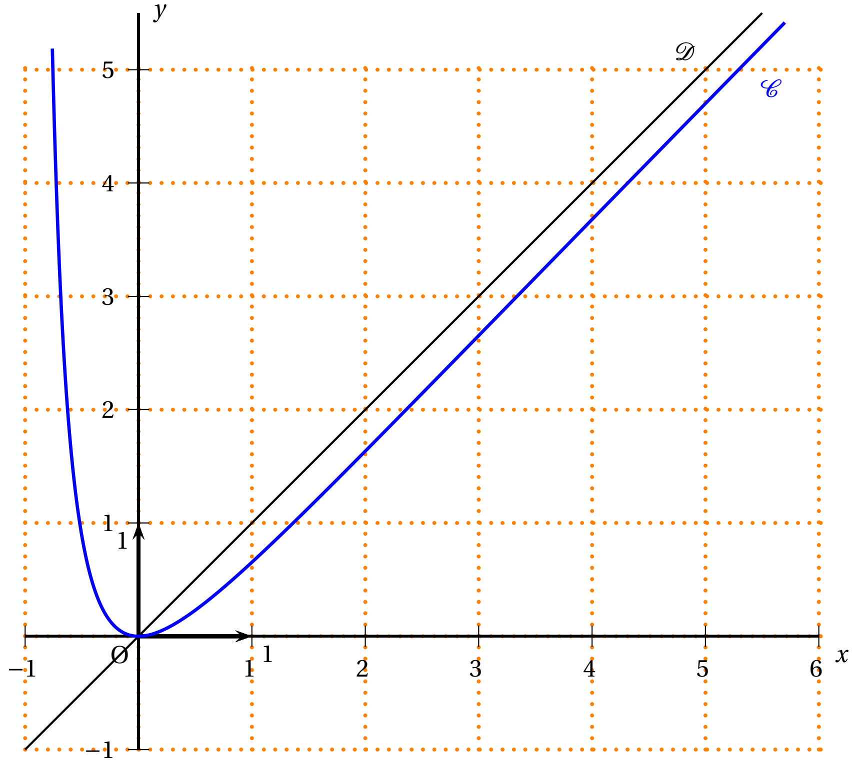
d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 5

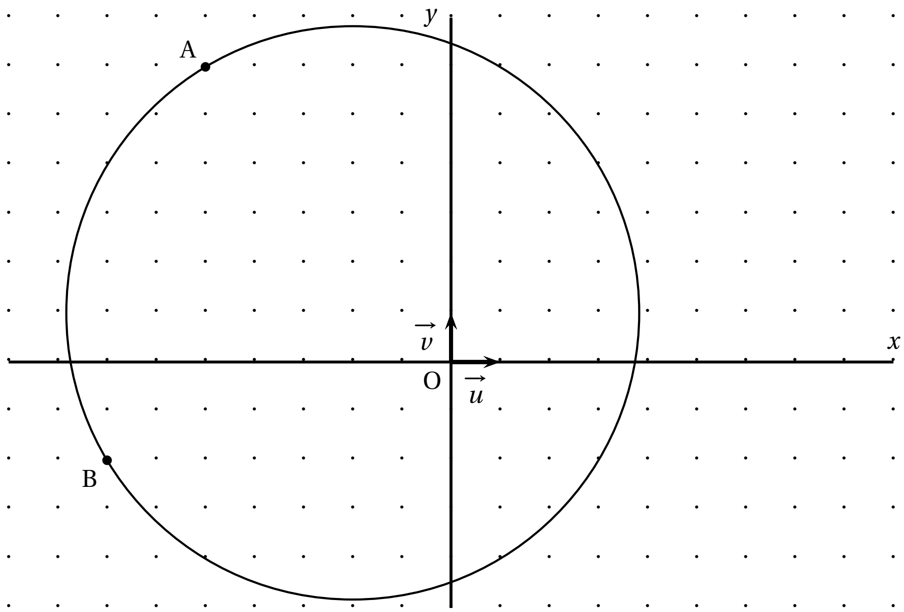


ANNEXE 1

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S La Réunion juin 2007 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.

   b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.

   Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T); la réaliser sur la figure en annexe).

2. **Restitution organisée de connaissances**

   On suppose connue la propriété :
   « Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
   En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.
On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1. Étudier la monotonie de la suite u.
2. **a.** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variations de la fonction h.

   En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.
3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\text{e}^x}{\text{e}^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x g(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\ ;\ f(x))$ et $M'(-x\ ;\ f(-x))$ de la courbe $\mathscr{C}$.

a. Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$ et $c = 2\mathrm{i}$.

1. **a.** Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.

Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

2. On désigne par E le barycentre du système {(A ; 1) ; (C ; 3)} et par F le barycentre du système {(A ; 2) ; (B ; 1)}.

a. Établir que l'affixe e du point E est égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

b. Déterminer l'affixe f du point F.

3. **a.** Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire $k\mathrm{i}$ où k est un nombre réel à déterminer.

En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point E sur le dessin.

b. Démontrer que le point F possède une propriété analogue. Placer F sur le dessin.

4. On désigne par H le barycentre du système {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 6)}. Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).

Qu'en déduit-on pour le point H ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

A, B, C, désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$ et $c = 2\mathrm{i}$.

1. **a.** Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ et de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

2. Les points E et F ont pour affixes respectives $e = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$ et $f = -\sqrt{3} - \text{i}$.

a. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés,

b. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.
Interpréter géométriquement ce résultat.
On admet que, de façon analogue, $\dfrac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire k'i où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

c. Placer les points E et F sur la figure.

3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est

$$z \longmapsto \frac{1}{2}\overline{z} - \sqrt{3}.$$

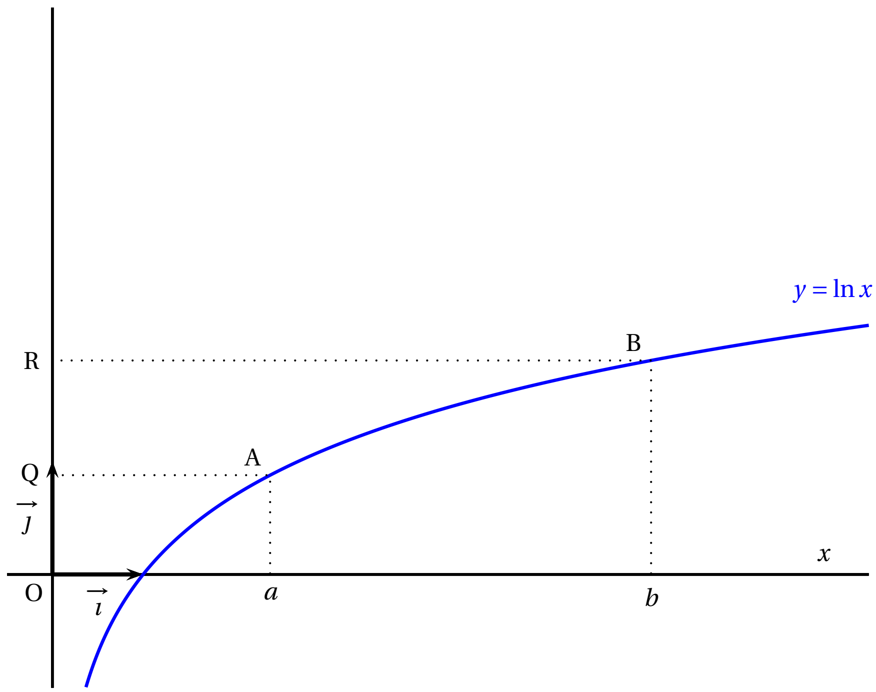
Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point S(H) sur la figure.

ANNEXE 1

(À rendre avec la copie)

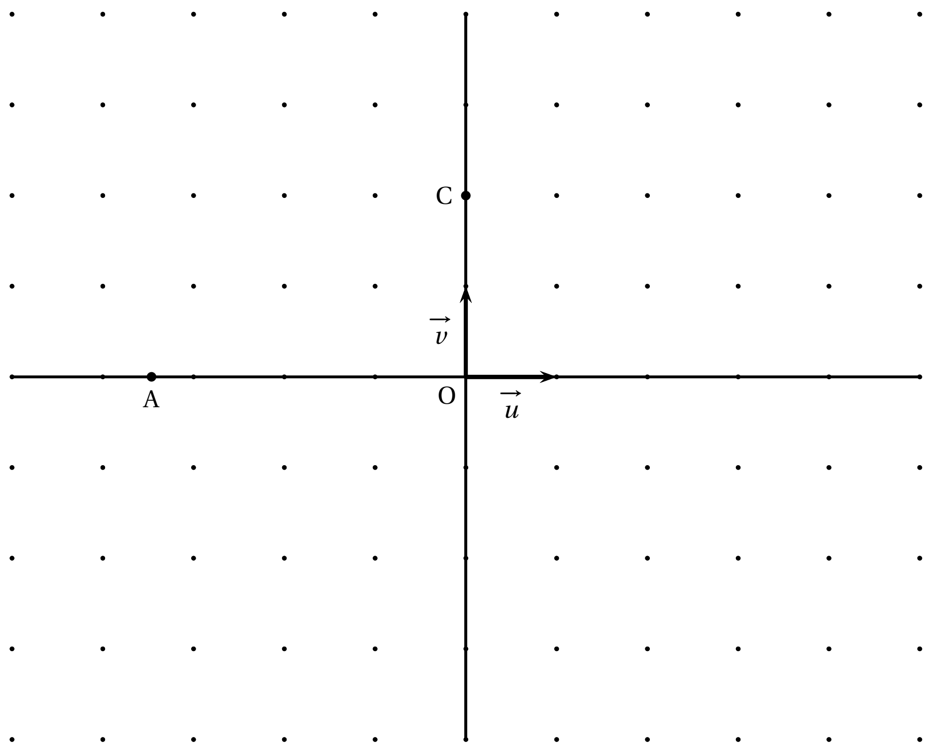
Exercice 1



ANNEXE 2

(À rendre avec la copie)

Exercice 4



∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2007 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'évènement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{E}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(E)$.

Partie A

1. Montrer que $p(G) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3}, près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\text{E}(X)$.
   b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\text{E}(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$\overline{z} - 3\text{i}z - 3 + 6\text{i} = 0,\ \overline{z} \text{ étant le conjugué de } z.$$

2. On considère le point A d'affixe $4 - 2\text{i}$.
   Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.
3. Soit D le point d'affixe 2i.
   a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de 2i tels que :
   $$\arg(z - 2\text{i}) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$
   b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2\text{i} + 2\text{e}^{\text{i}\theta}$, θ appartenant à $\mathbb{R}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-1}{\overline{z}+2}$.
   Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $|z'| = 1$.

Exercice 3 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. on considère les points A (1 ; 3 ; 2), B(4 ; 6 ; −4) et le cône (Γ) d'axe $\left(\text{O}, \vec{k}\right)$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}z^2$.
2. Soit (P) le plan parallèle au plan $(x\text{O}y)$ et contenant le point B.
   a. Déterminer une équation de (P).
   b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).
3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q).
   Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :
   - deux droites parallèles ;
   - deux droites sécantes ;
   - une parabole ;
   - une hyperbole ;
   - un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x ; y ; z)$. Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Résoudre l'équation (E).
   b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b. Montrer que si M est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q), alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

c. Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

EXERCICE 3 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\text{A}\left(\frac{2}{3}\ ;\ -3\ ;\ 2\right)$ et $\text{B}\left(-\frac{4}{3}\ ;\ 0\ ;\ -4\right)$.
On note I le milieu du segment [AB] et (S) la sphère de diamètre [AB].

1. Soit E le barycentre des points pondérés (A; 2) et (B; 1).

a. Calculer les coordonnées de E.

b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{M\text{O}}\right\|$ est le plan médiateur du segment [OE].

c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.

2. **a.** Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P).

En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est
$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12$.
En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 4\sqrt{3}-1\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).

b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

EXERCICE 4 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O; I, J)
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
On note M et N les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée en annexe.

1. **a.** Montrer que f est positive sur [1; 2].

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'abscisse $\dfrac{4}{\text{e}}$.

Montrer que, sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, le point E est l'unique point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à (MN).

d. On appelle T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E.

Montrer qu'une équation de T est : $y = (2\ln 2)x - \dfrac{4}{\text{e}} + 1$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,2]$ par : $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \dfrac{4}{\text{e}} + 1\right]$.

a. Montrer que pour tout x de $[1\,;\,2]$: $g'(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

b. Étudier les variations de g sur $[1\,;\,2]$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T sur cet intervalle.

3. Soient M$'$ et N$'$ les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T. On admet que la courbe $\mathcal{C}_f$ reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et que les points M$'$ et N$'$ ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes MNQP et M$'$N$'$QP.

b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

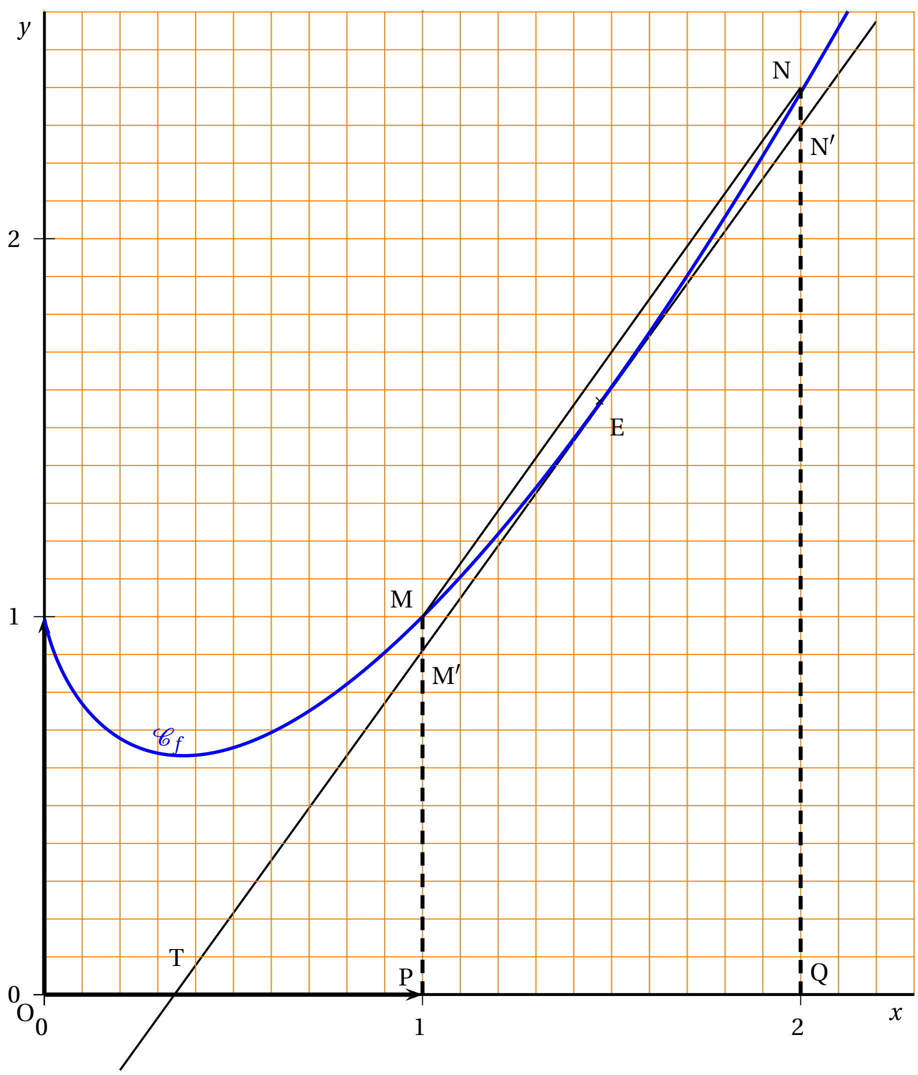
Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,\text{d}x$.

2. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie



Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

Partie B

On note $n,\ b$ et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n,\ b,\ r)$ la probabilité en fonction de $n,\ b$ et r de l'évènement G.

Démontrer que $g(n,\ b,\ r) = \dfrac{1}{210}[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)]$.

2. Le but de cette question est de déterminer $n,\ b$ et r afin que la probabilité $g(n,\ b,\ r)$ soit minimale.

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormal.

Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,15\,;\,0)$ et $(0\,;\,0\,;\,15)$ et soit M le point de coordonnées $(n,\ b,\ r)$. On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.

a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.

b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

c. Démontrer que $g(n,\ b,\ r) = \dfrac{1}{210}\left(\mathrm{O}M^2-15\right)$.

d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

e. En déduire tes valeurs de $n,\ b$ et r afin que la probabilité $g(n,\ b,\ r)$ soit minimale.

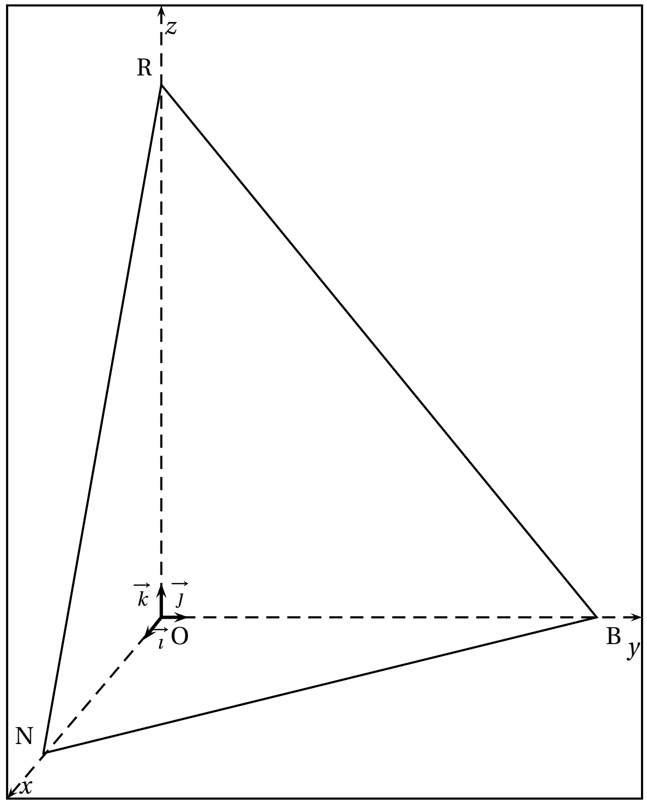
Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{2}{7}$.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit $\dfrac{2}{7}$.
Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable X en fonction de x et de k.

2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.



EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Déterminer le nombre complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+\mathrm{i}) & = & 1+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\alpha^2 & = & -4+3\mathrm{i} \end{cases}$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - (1+3\mathrm{i})z + (-4+3\mathrm{i})$.
Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\alpha)$.
En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique : 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+\mathrm{i}$ et $b = -1+2\mathrm{i}$.
Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
Montrer que $b = \mathrm{i}a$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit M le milieu de [CB]. On appelle $z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$. Prouver que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

4. Donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{OM}}\right)$.
5. Prouver que $\text{OM} = \dfrac{1}{2}\text{DA}$.
6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments [CD], [DA] et [AB].
   On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Soit t un nombre réel fixe et soient les points $M,\ N$ et P, deux à deux distincts, définis par

$$\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{B}N} = t\overrightarrow{\text{BC}} \text{ et } \overrightarrow{\text{C}P} = t\overrightarrow{\text{CA}}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement $M,\ N$ et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.
On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ direct.
On note $a,\ b,\ c,\ m,\ n$ et p, les affixes respectives des points A, B, C, $M,\ N$ et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.
   a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.
   b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.
      Ou notera G ce centre de gravité.
   c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.
2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{\text{A}(1-t)\ ;\ \text{B}(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$.
      On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.
   b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{\text{G}M}{\text{GA}}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{\text{GA}},\ \overrightarrow{\text{G}M}\right)$.
      Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement $M,\ N$ et P.
   c. Conclure sur l' existence et l'unicité de σ.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - f(1)]\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme népérien.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,2[$ on a $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.

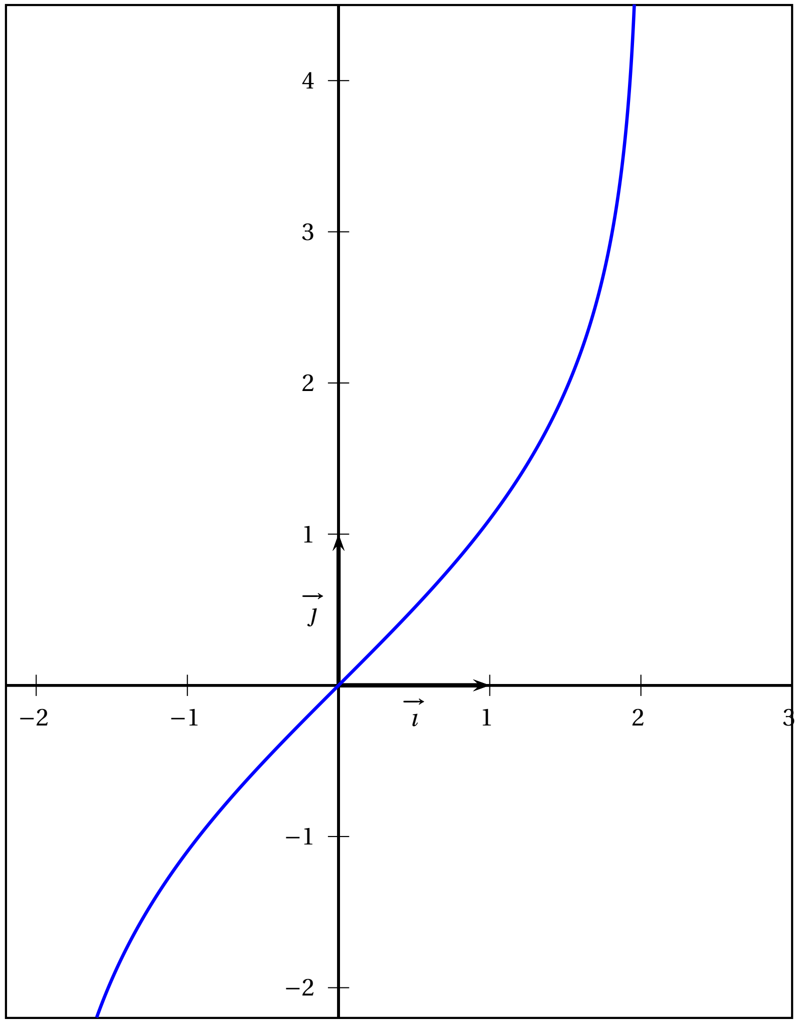
b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$.

Partie C

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur la feuille annexe.
Hachurer sur cette feuille la partie $\mathscr{P}$ du plan constituée des points $M(x\,;\,y)$ tels que

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant \ln 3.$$

En utilisant la partie A, calculer en cm^2 l'aire de $\mathscr{P}$.



Exercice 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit $v = (v_n)_{n \geqslant 0}$ une suite.
On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.
Une bonne réponse donne $0,75$ *point, une mauvaise réponse enlève* $0,25$ *point et l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Tout total négatif est ramené à zéro.

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Si $v_0 = \ln a$ alors :
   a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ **b.** $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ **c.** $u_0 = -a + 1$ **d.** $u_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$
2. Si v est strictement croissante, alors :
   a. u est strictement décroissante et majorée par 2
   b. u est strictement croissante et minorée par 1

c. u est strictement croissante et majorée par 2

d. u est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si v diverge vers $+\infty$, alors :

a. u converge vers 2

b. u diverge vers $+\infty$

c. u converge vers 1

d. u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$

4. Si v est majorée par 2, alors :

a. u est majorée par $1 + \text{e}^{-2}$

b. u est minorée par $1 + \text{e}^{-2}$

c. u est majorée par $1 + \text{e}^{2}$

d. u est minorée par $1 + \text{e}^{2}$

Partie B (1 point)
Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln\left(u_n\right) + v_n > 0$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2007

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. **Restitution organisée de connaissances**
   La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.
   Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.
   — P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
   — Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\ ;\ 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.
   On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\ ;\ 0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.
   a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.
   b. Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.
   a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan **en annexe**, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\,;\,0)$.
   Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.
   b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.
   d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.
2. **a.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \text{ c'est-à-dire que } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

b. La suite v est définie par $v_n = 1,2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.
En utilisant le **a** démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au **1** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6},\ z_2 = 2 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.

2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.

3. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'ensemble $\mathrm{A}_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe 2 l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \quad (\text{modulo } 7)$.

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 7)$ équivaut à $x \equiv 4 \quad (\text{modulo } 7)$.

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \quad (\text{modulo } 7)$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $\mathrm{A}_p = \{1 ; 2 ; \ldots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $ax \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \quad (\text{modulo } p)$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 (\text{modulo } 31)$ et $3x \equiv 1 \quad (\text{modulo } 31)$. À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 31)$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

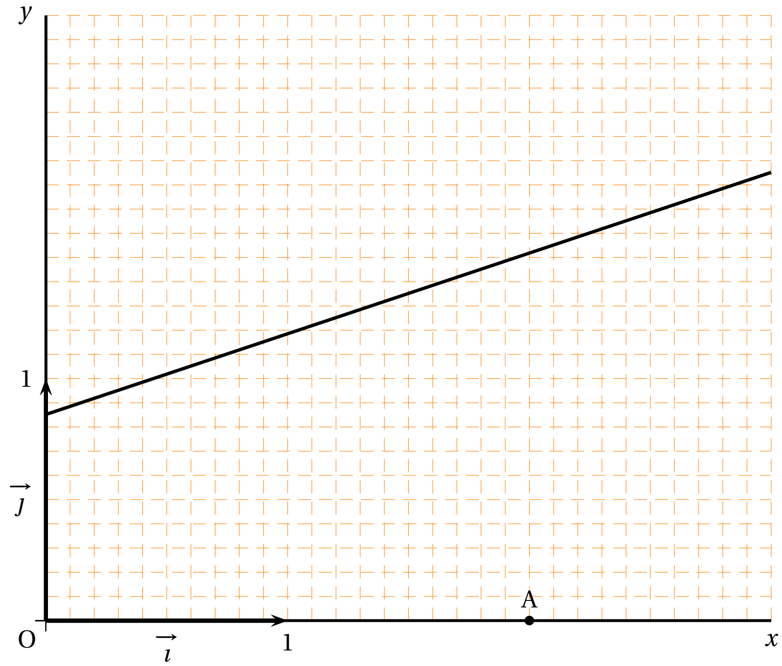
(E) : $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$
(E_0) : $y' + y = 1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.
   Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 2



ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 3 (spécialité)

a	1	2	3	4	5	6
y						6

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 2007

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

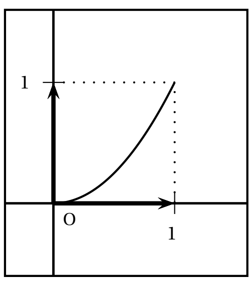
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et vérifiant les conditions (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes :

- (P_1) : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
- (P_2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- (P_3) : pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.

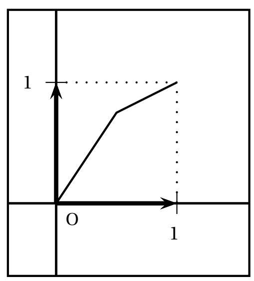
Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y = x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\,\text{d}x$.

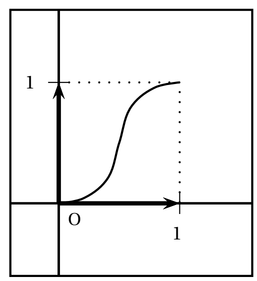
1. **a.** Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3

   b. Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geqslant 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $h(x) = 2^x - 1$. (On rappelle que, pour tout x réel, $2^x = \text{e}^{x\ln 2}$).

   a. Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P_1) et (P_2).

   b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $\varphi(x) = 2^x - x - 1$.
   Montrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $\varphi(x) \leqslant 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction φ sur $[0\,;\,1]$).
   En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

   c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_P = I_h$.

   a. Montrer que la fonction P vérifie la propriété (P_2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.
   Montrer que toute fonction P définie sur $[0\,;\,1]$ par $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).

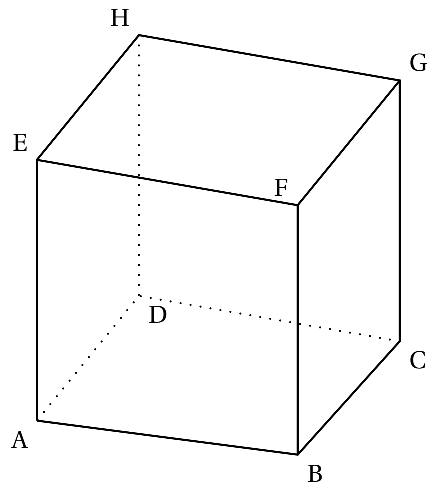
   b. Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P.

   c. Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $\left(D\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{\jmath}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{k}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

1. **a.** Donner les coordonnées des points A, C et E.

   b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C\,;\,2),\ (E\,;\,1)\}$.

   c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit $(a,\ b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN}=b\overrightarrow{DL}$.

   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple $(a,\ b)$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{rcl} -a+2b &=& 1\\ 3a-\ b &=& 0\end{array}\right.$

   b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

   c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :

40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

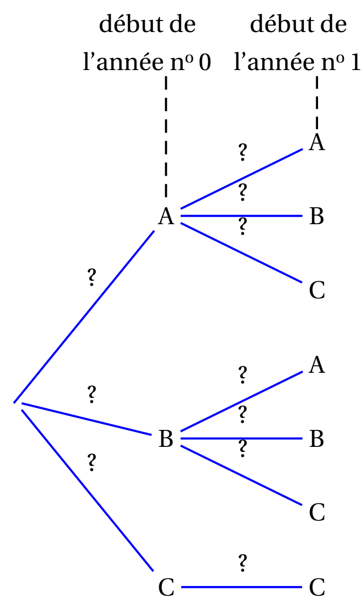
- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type B est $0,3$.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type A est $0,3$.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par $p_n,\ q_n$ et r_n les probabilités respectives des évènements $A_n,\ B_n$ et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40,\ q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.
2. **a.** Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$\left\{\begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} & = & 0,3p_n + 0,6q_n \end{array}\right.$$
3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.
   a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison $0,3$.
   b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).
   c. En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n).
   Interpréter le résultat.



EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ. Soit :

- les points A′ et B′, images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment [A′ B] et J, milieu du segment [A B′] ;
- le point M milieu du segment [AA′] ;

- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H′ image du point H par la similitude σ.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4\text{i}$, le point B a pour affixe $2+4\text{i}$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe 4i.
La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A′, B′ et H′.
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

Partie B. Étude du cas général

1. **a.** Montrer que H′ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A′ B′).
b. Montrer que $\overrightarrow{\text{MI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$. On admet que $\overrightarrow{\text{MJ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}$.
c. En déduire que $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}}$ et que $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}},\ \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

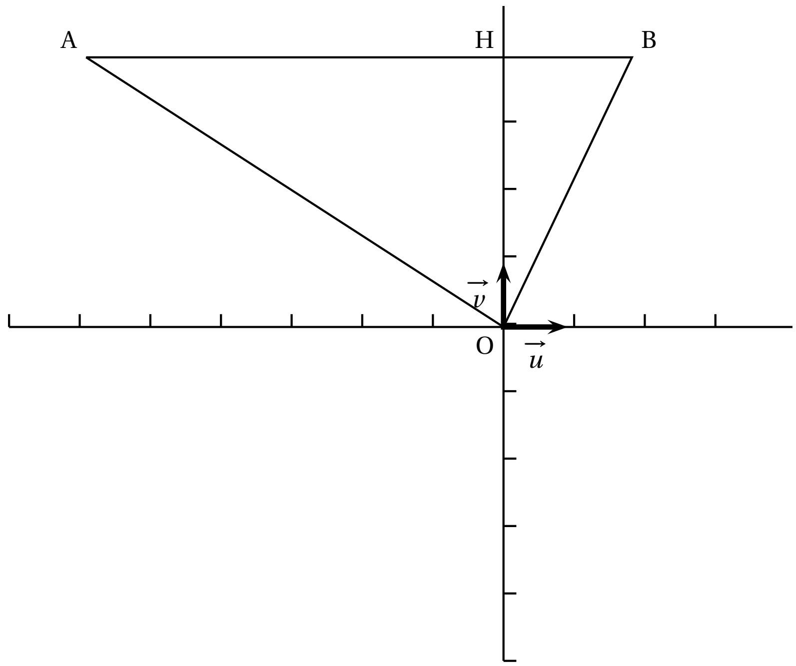
2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H.
On note K l'image du point J par la similitude s.
a. Montrer que OK= OH′, puis que $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OK}},\ \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
b. En déduire que le point H′ est l'image du point J par la similitude s.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{IJ}},\ \overrightarrow{\text{HH}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{OH}}\right) + k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

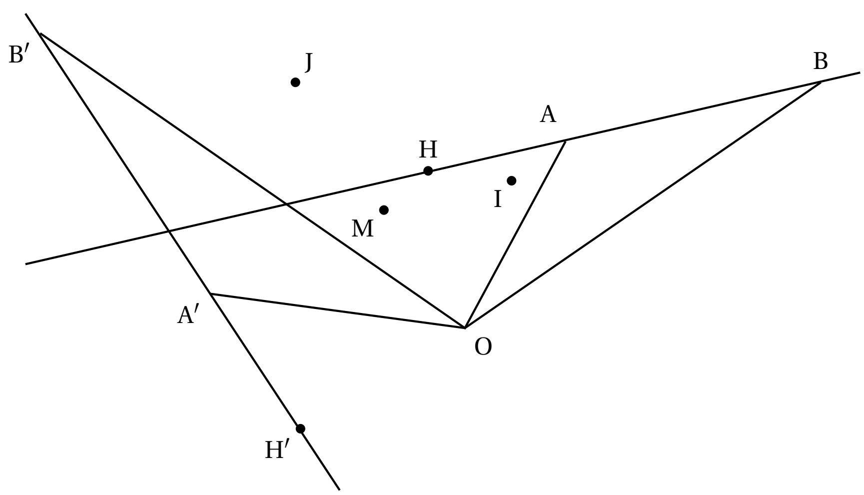
ANNEXE

Cette page ne sera pas remise avec la copie

Partie A



Partie B



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2007 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

On suppose connu le résultat suivant :

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = a\cos x + b\sin x$$

soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).

Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = 2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E$'$, image de E par f
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
   Soit M un point distinct des points O, A et B.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a :
   $$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$
   b. En déduire une expression de $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}}$ en fonction de $\dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M'\mathrm{B}}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$
4. Soit Δ la médiatrice du segment [A, B]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre [A, B].
   a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
   b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2~;~8~;~4)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1~;~5~;~-1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives
   $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.
   Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').
   Montrer que le vecteur de coordonnées $(2~;~1~;~1)$ est un vecteur directeur de (d').
3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.
4. On considère le point H de coordonnées $(-3~;~3~;~5)$ et le point H$'$ de coordonnées $(3~;~0~;~-4)$.
   a. Vérifier que H appartient à (d) et que H$'$ appartient à (d').
   b. Démontrer que la droite (HH$'$) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance HH$'$.

5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{M\mathrm{H}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HH}'} = 126$.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln\left(x^2 + 1\right).$$

a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1.

c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{n}.$$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0\ ;\ +\infty[$

d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2 + 1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte $0,5$ *point ; une réponse inexacte enlève* $0,25$ *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z+\overline{z}=9+\mathrm{i}$ est :

   a. 3 **b.** i **c.** $3+\mathrm{i}$

2. Soit z un nombre complexe ; $|z+\mathrm{i}|$ est égal à :

   a. $|z|+1$ **b.** $|z-1|$ **c.** $\left|\mathrm{i}\overline{z}+1\right|$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

   a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

   a. $n=3$ **b.** $n=6k+3$, avec k relatif **c.** $n=6k$ avec k relatif

5. Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1. l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ est :

   a. la droite (AB) **b.** le cercle de diamètre [AB] **c.** la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

6. Soit Ω le point d'affixe $1-\mathrm{i}$. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ vérifiant $|z-1+\mathrm{i}|=|3-4\mathrm{i}|$ a pour équation :

   a. $y=-x+1$ **b.** $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ **c.** $z=1-\mathrm{i}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3i. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

   a. $1-4\mathrm{i}$ **b.** $-3\mathrm{i}$ **c.** $7+4\mathrm{i}$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

   a. $\{1-\mathrm{i}\}$ **b.** L'ensemble vide **c.** $\{1-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\}$

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

— D l'évènement « le composant est défectueux » ;
— F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;
— F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. **a.** Dessiner un arbre pondéré.
   b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.
   c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.
2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
   a. Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.
   b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
   c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a~;~+\infty[$. Compléter la phrase suivante :
   « On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si … »
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a~;~+\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. On a représenté sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse $1{,}5$. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+\frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1-\frac{1}{n+1}.$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}.$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. **a.** Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
   b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontrera de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.
   c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).
   c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49}\ ;\ \frac{18}{49}\ ;\ \frac{12}{49}\right)$.
3. **a.** Calculer la distance du point O au plan (ABC).
   b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.
   c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
   b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   c. En déduire que $6^{40} \equiv 1\ [11]$ et que $6^{40} \equiv 1\ [5]$.

d. Démontrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation

$$(E) \qquad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation

$$(E') \qquad 17x - 40y = 1$$

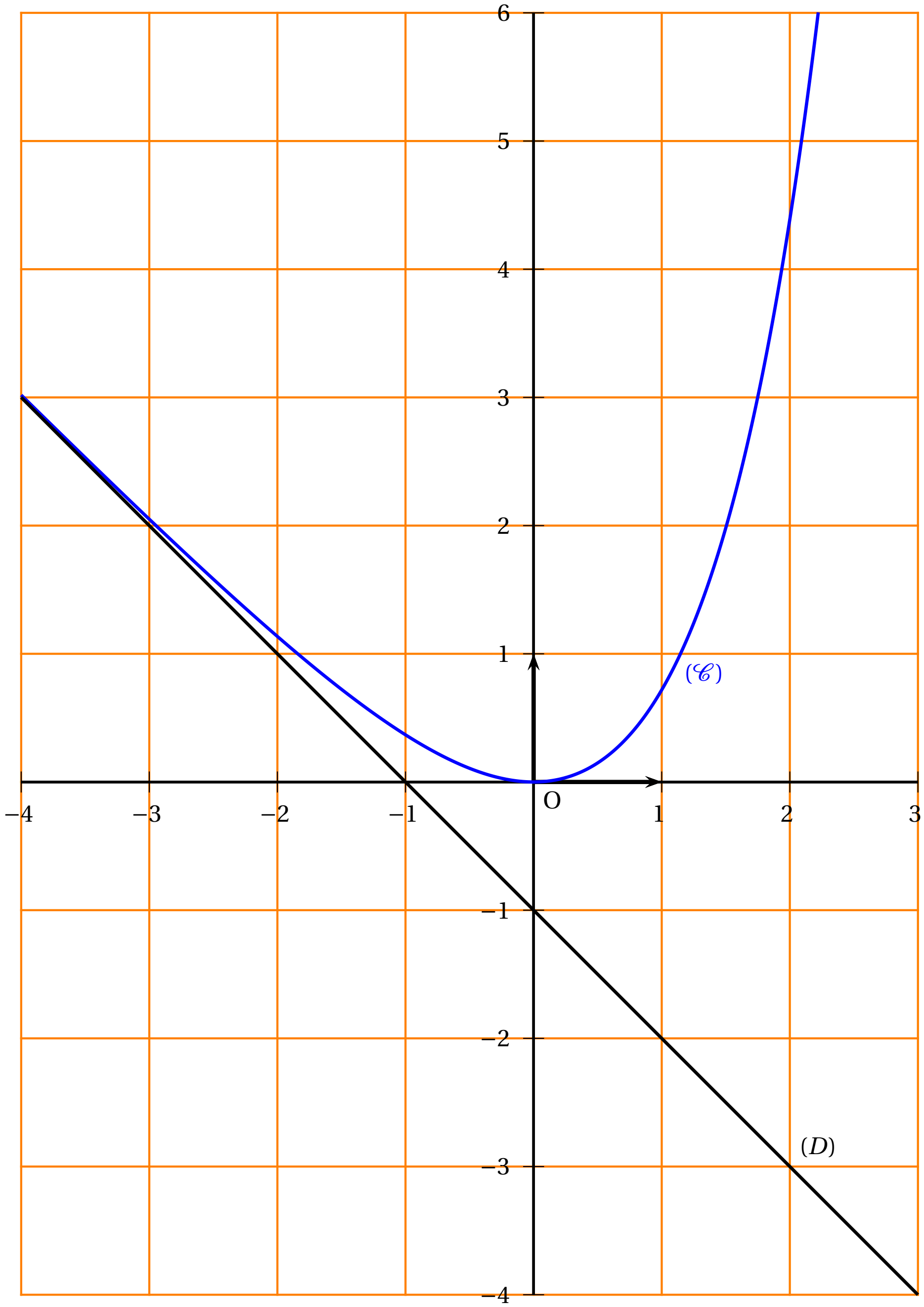
admet au moins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $\left(E'\right)$.

d. Résoudre l'équation $\left(E'\right)$.
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que
$17x_0 \equiv 1 \quad [40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b \quad [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 \quad [55]$, alors $b^{33} \equiv a \quad [55]$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2008 ∾ (spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & -3 \\ U_{n+1} & = & f(U_n) \end{array}\right.$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0(U_0\ ;\ 0)$, $M_1(U_1\ ;\ 0)$, $M_2(U_2\ ;\ 0)$, $M_3(U_3\ ;\ 0)$ et $M_4(U_4\ ;\ 0)$.
   Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?
2. **a.** Démontrer que si $x < 3$ a alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.
   En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).
   c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.
   a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. **a.** Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

   Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. **a.** Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. **a.** Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit t un nombre réel.
On donne le point A$(-1~;~2~;~3)$ et la droite $\mathcal{D}$ de système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 9+4t \\ y &=& 6+t \\ z &=& 2+2t \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite $\mathcal{D}$.

1. **a.** Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et passant par A.

   b. Vérifier que le point B$(-3~;~3~;~-4)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

   c. Calculer la distance d_{B} entre le point B et le plan $\mathcal{P}$.

   d. Exprimer la distance d en fonction de d_{B} et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$. Exprimer AM^2 en fonction de t. Retrouver alors la valeur de d.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

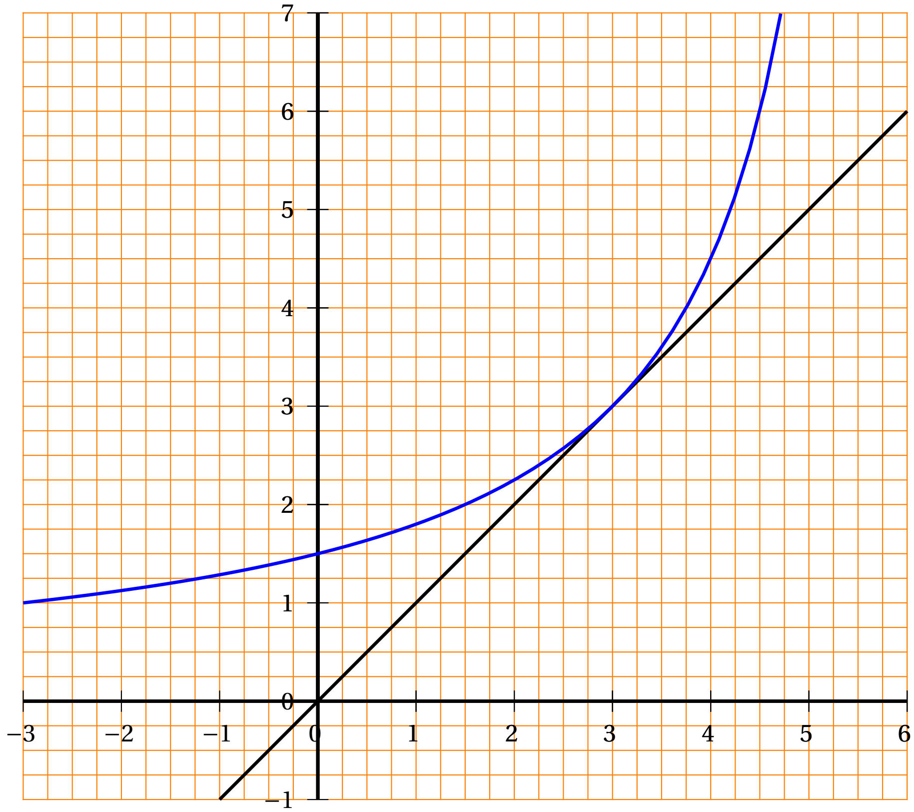


FIGURE 1 – Annexe (à rendre avec la copie)