Baccalauréat S 2008

L'intégrale d'avril 2008 à mars 2009

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\text{e}^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\text{d}t$.
   a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1~;~+\infty[$
   b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?
   c. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.
2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.
   a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{\text{e}^x - 1} = x \times \dfrac{\text{e}^{-x}}{1 - \text{e}^{-x}}$.
   b. En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x = 3\ln\left(1 - \frac{1}{\text{e}^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\text{e}}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - \text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x$.
   c. Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}}\right) \leqslant \ln\left(1 - \text{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}^3}\right)$.
   d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - \text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x$ puis de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
   Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA},~\overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = \text{e}^{\text{i}\alpha}(z - \omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \text{i},~ z_B = 1 - \text{i}\sqrt{3},~ z_C = \sqrt{3} + \text{i} \text{ et } z_D = -1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

1. **a.** Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
   b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$?

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a. Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

b. Donner l'écriture complexe de r.

c. Déterminer l'affixe du point E.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :
Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \text{i},\ z_B = 1 - \text{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \text{i} \text{ et } z_D = -1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

1. a. Donner le module et un argument-de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est
$z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

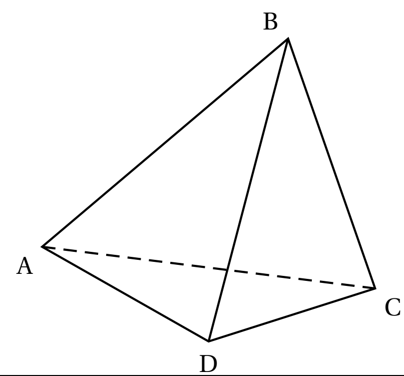
b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.

c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un tétraèdre $ABCD$.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

   b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. **a.** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

   b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

   c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

   d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n\left(20 - u_n\right).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0~;~20]$ par

   $$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

   a. Étudier les variations de f sur $[0~;~20]$.

   b. En déduire que pour tout $x \in [0~;~20]$, $f(x) \in [0~;~10]$.

   c. On donne en **annexe** la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0~;~+\infty[$, de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0~;~+\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0~;~+\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

ANNEXE

À rendre avec la copie

Baccalauréat S Liban juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :
s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A,
sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement « le joueur obtient une boule rouge ».
   Montrer que $p(R) = 0,15$.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Exprimer l'espérance $\text{E}(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\text{E}(G) \geqslant 0$?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

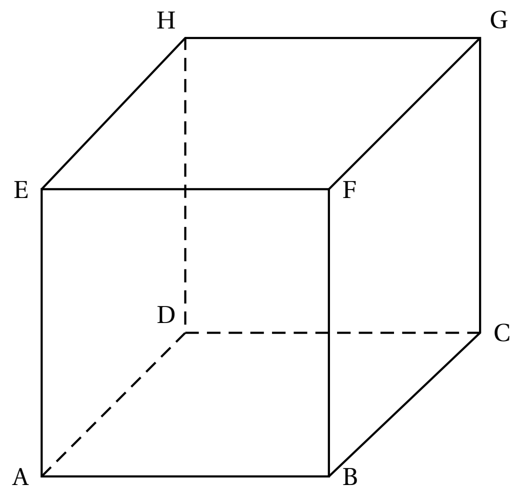
1. Soit z un nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.
   Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».
2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$.
   Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».
3. Soit r la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+\text{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $\left(1-\sqrt{3}\right)+\text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$.

   Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, représenté ci-dessous.
Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (BDE) ».
Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

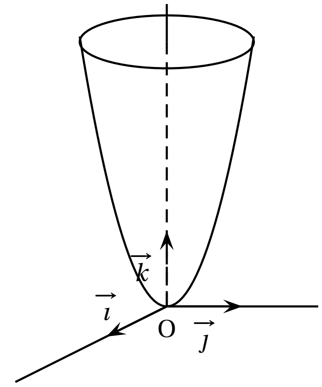
1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe

$$z \mapsto \frac{3}{2}(1 - \text{i})z + 4 - 2\text{i}.$$

   Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2\text{i}$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :
   Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».
   Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».
3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.
   Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14 ; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

La surface Σ ci-contre a pour équation $z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel : Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 9$.
V est donné par la formule $V = \displaystyle\int_a^b S(k)\,\mathrm{d}k$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a~;~b]$.

EXERCICE 3 — 6 points

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».
Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

3. **a.** Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n \geqslant 1$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   d. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **5 points**

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty~;~+\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty~;~+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $(\mathscr{C})$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. **a.** Interpréter graphiquement $g(2)$.
   b. Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.
3. **a.** Soit x un réel supérieur à 2.
   Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty~;~+\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel t,

$$f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t} + 1.$$

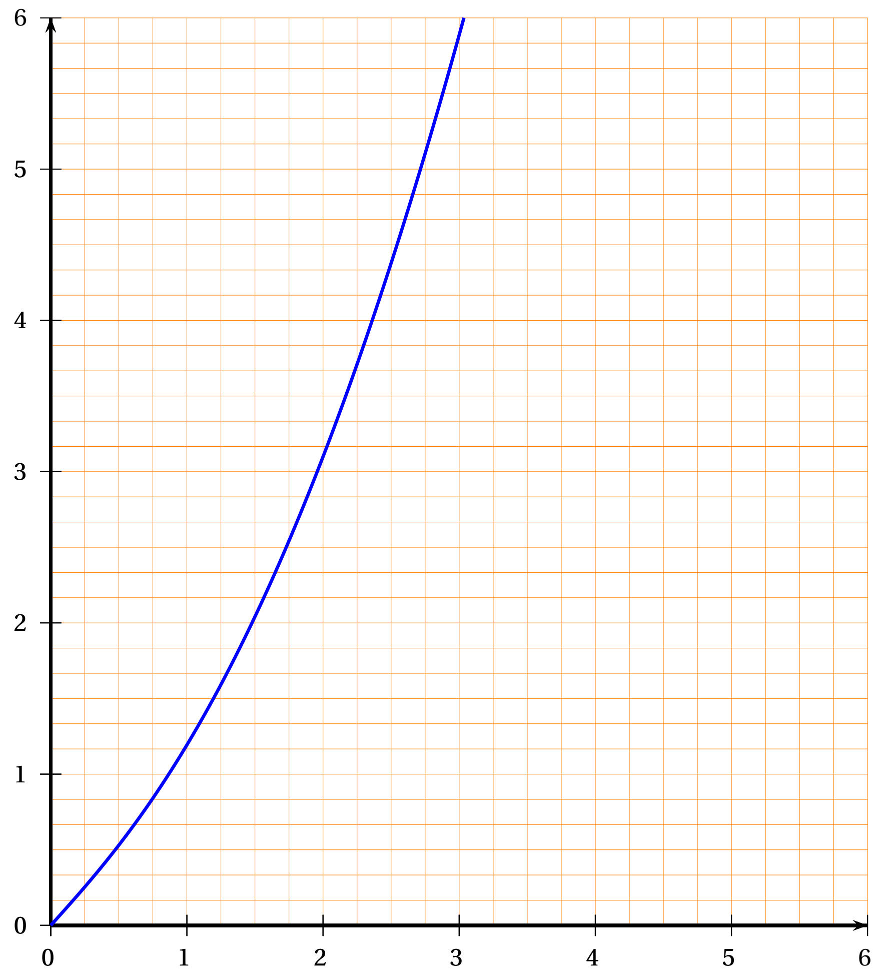
1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que pour tout réel x, $g(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur



∽ Baccalauréat S Amérique du Nord 29 mai 2008 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ unité graphique : 4 cm.
On considère le point A d'affixe $z_{\text{A}} = 2 + \text{i}$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.
2. **a.** Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $\left(\text{O} ; \vec{u}\right)$.

   b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_{\text{B}} = 1$ et $z_{\text{C}} = 3$.
   Déterminer l'affixe z_{D} du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).
3. Soit M le point d'affixe $\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}$.

   a. Calculer le nombre complexe $\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{M}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{M}}}$.

   b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{M}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{M}}}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).
4. On note (Γ') le cercle de diamètre [AB].
   La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

   a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

   b. Déterminer l'affixe du point N.
5. On désigne par M′ l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Déterminer l'affixe du point M′.

   b. Montrer que le point M′ appartient au cercle (Γ').

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{\text{MD}} \cdot \overrightarrow{\text{MA}} = \text{MI}^2 - \text{IA}^2$.
2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{\text{MD}} \cdot \overrightarrow{\text{MA}} = 0$.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$\text{A}(3 ; 0 ; 0),\ \text{B}(0 ; 6 ; 0),\ \text{C}(0 ; 0 ; 4) \text{ et } \text{D}(-5 ; 0 ; 1).$$

1. **a.** Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   b. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

d. Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la partie A.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3\,;\ 1\,;\ -3)$ et $(-1\,;\ 1\,;\ 1)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
   b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).
4. **a.** On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
   b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
   On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient de entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a\,;\ b) = 440$, c'est-à-dire tel que $(a\,;\ b)$ soit solution du système

$$(1) : \left\{\begin{array}{l} a < b \\ a^2 + b^2 = 4\,625 \\ \text{ppcm}(a\,;\ b) = 440 \end{array}\right.$$

   Montrer que si $(a\,;\ b)$ est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a\,;\ b)$ est égal à 1 ou 5.
   Conclure

   Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x]$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
   b. Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et de Γ.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par le point O.
   a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que la tangente $\mathcal{T}_a$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par
   $$g(x) = f(x) - xf'(x).$$
   b. Montrer que sur $]1\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.
   c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
   d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par le point O.
   La courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe Γ sont données en annexe.
   Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.
4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.
   Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1\,;\,10]$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

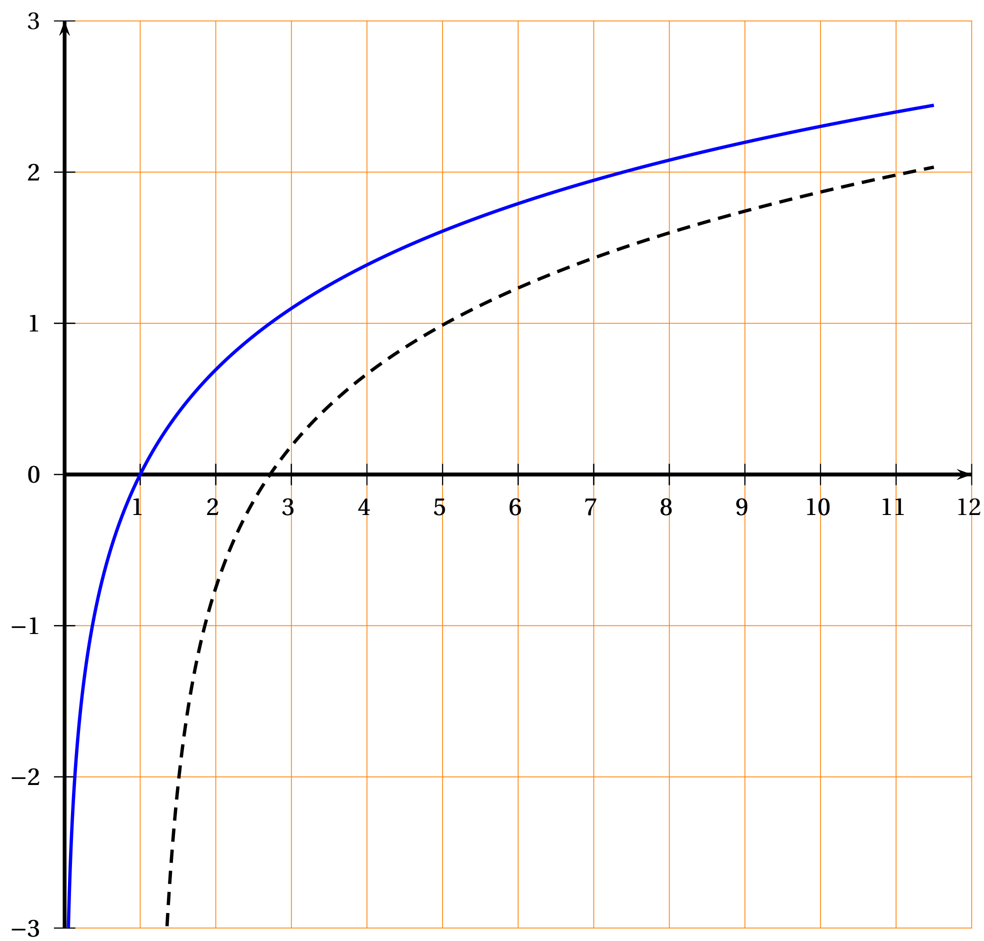
$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b. Étudier les variations de la suite (x_n).
   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).
3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
   b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nx_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ny_n$.

Annexe

Cette page est à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3
Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur



Courbe Γ représentative de la fonction ln

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2008 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E$'$).
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.
6. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

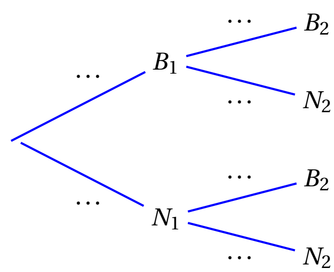
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. **a.** Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
   Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
   Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

   a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
   d. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
   Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
   Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
   Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation

$$\text{(E)} : \qquad 11x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\,;\,-3)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

— on calcule $11x+8$

— on calcule le reste de la division euclidienne de $11x+8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11+8 = 129$ or
$129 \equiv 25$ (0 modulo 26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$$11x \equiv j \quad \text{(modulo 26) équivaut à } x \equiv 19j \text{(modulo 26)}.$$

b. En déduire un procédé de décodage.

c. Décoder la lettre W.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point ;*
une réponse inexacte enlève 0,25 *point ;*
l'absence de réponse est comptée 0 *point.*
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-6y+2z-7 & = & 0 \\ -x+3y-z+5 & = & 0 \end{array}\right.$ est :

Réponse **A** : l'ensemble vide — Réponse **B** : une droite
Réponse **C** : un plan — Réponse **D** : réduit à un point

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 2-3t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & -2-t \\ z & = & 4+2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ sont :}$$

Réponse **A** : parallèles et distinctes — Réponse **B** : confondues
Réponse **C** : sécantes — Réponse **D** : non coplanaires

3. La distance du point A(1 ; −2 ; 1) au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ est égale à :

Réponse **A** : $\dfrac{3}{11}$ — Réponse **B** : $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
Réponse **C** : $\dfrac{1}{2}$ — Réponse **D** : $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$

4. Le projeté orthogonal du point B(1 ; 6 ; 0) sur le plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

Réponse **A** : (3 ; 1 ; 5) Réponse **B** : (2 ; 3 ; 1)
Réponse **C** : (3 ; 0 ; 2) Réponse **D** : (−2 ; 3 ; −6)

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

La feuille annexe donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.
Cette feuille est à rendre avec la copie.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, le point A a pour affixe i.
On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq \text{i}$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z-\text{i}}$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

1. Un exemple

On considère le point K d'affixe $1+\text{i}$.

a. Placer le point K.

b. Déterminer l'affixe du point K′ image de K par f.

c. Placer le point K′.

2. Des points pour lesquels le problème ne se pose pas

a. On considère le point L d'affixe $\dfrac{\text{i}}{2}$. Déterminer son image L′ par f. Que remarque-t- on ?

b. Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3. Un procédé de construction

On nomme G l'isobarycentre des points A, M, et M', et g l'affixe de G.

a. Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3(z-\text{i})}$.

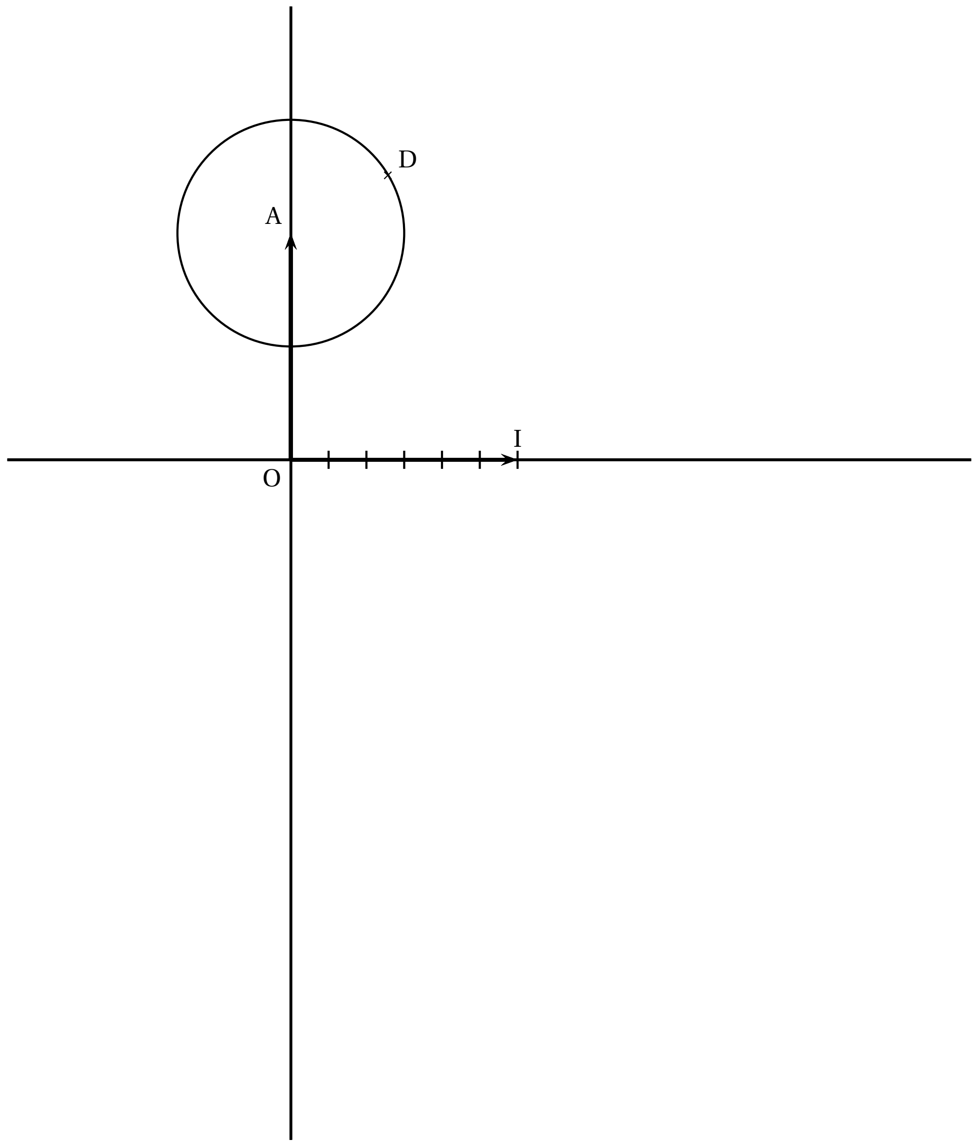
b. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r , alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

c. Démontrer que $\arg g = -\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

d. Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
On nomme D′ l'image de D par f . Déduire des questions précédentes la construction du point D′ et la réaliser sur **la figure annexe à rendre avec la copie.**

Annexe à rendre avec la copie

Sur la figure ci-dessous le segment [OI] tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$ est partagé en six segments d'égale longueur.



∽ Baccalauréat S Asie 18 juin 2008 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

A -Vrai ou faux ?
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exempte.

Rappel des notations :

- $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ *désigne l'ensemble des points communs aux plans* $\mathscr{P}_1$ *et* $\mathscr{P}_2$.
- *L'écriture* $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ *signifie que les plans* $\mathscr{P}_1$ *et* $\mathscr{P}_2$ *n'ont aucun point commun.*

1. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.

2. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$.

3. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.

4. Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset$

B - Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

- $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$
- $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathscr{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.

2. En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ tels que :

— le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
— chacun des suivants, $S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

— on tire au hasard une bille dans S_1 ;
— on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
— on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
— etc.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\overline{E_1}}(E_2)$.
En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \text{ pour tout } n \geqslant 1. \end{array}\right.$

a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

b. Démontrer que (u_n) est croissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Évolution des probabilités $p(E_n)$

a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0,49999 \leqslant p(E_n) \leqslant 0,5$?

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x ; y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$. On note $R_{a,\,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe n° 1 à rendre avec la copie.
Représenter graphiquement les points $M(x ; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 1 de la feuille annexe

2. $x + y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 2 de la feuille annexe ;

3. $x \equiv y \pmod 3$, sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0 ; y_0)$ solution de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\ ;\ y)$ pour laquelle le point $M(x\ ;\ y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[\mathrm{O}A]$ du réseau $R_{a,\ b}$, avec $\mathrm{O}(0\,;\,0)$ et $A(a\ ;\ b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[\mathrm{O}A]$ sont caractérisés par les conditions :

$$0 \leqslant x \leqslant a\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant b\ ;\ ay = bx.$$

2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[\mathrm{O}A]$ appartenant au réseau $R_{a,\ b}$.
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[\mathrm{O}A]$ contient au moins un autre point du réseau.
   (On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour le dessin : $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 4$ cm.
M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}}.$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A - Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.
2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité :
   $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

B - Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$?
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z, distinct du point O.
   a. Démontrer que $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
   b. Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$?
3. Tracer l'ensemble $\mathscr{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathscr{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

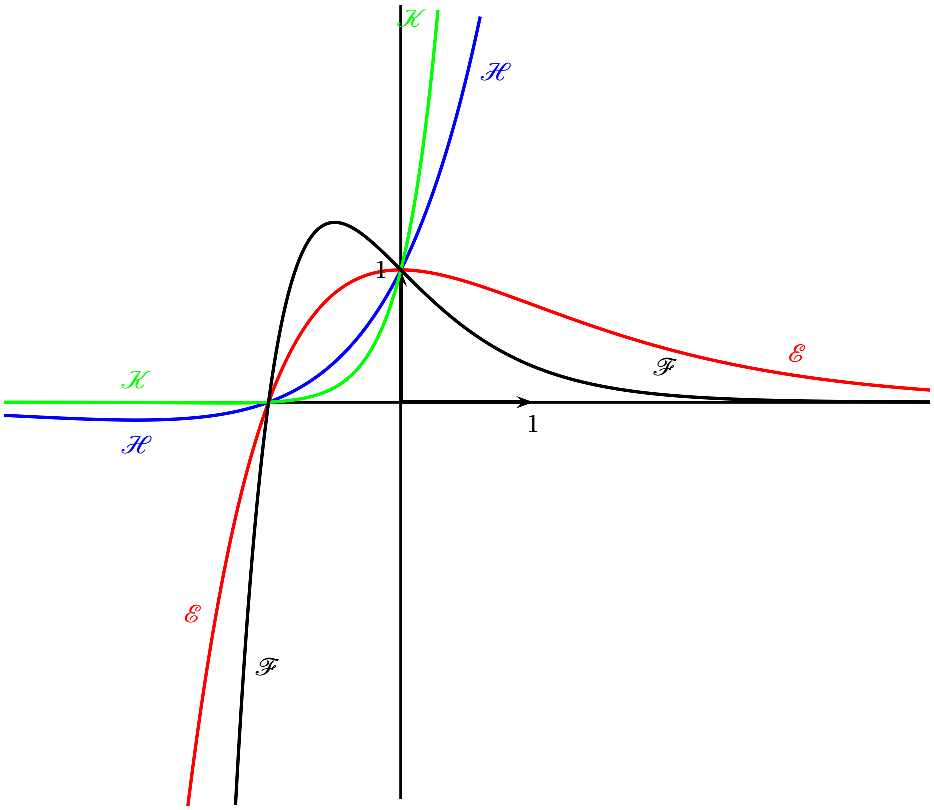
$$f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1. **a.** Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   b. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)
4. Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.
   Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

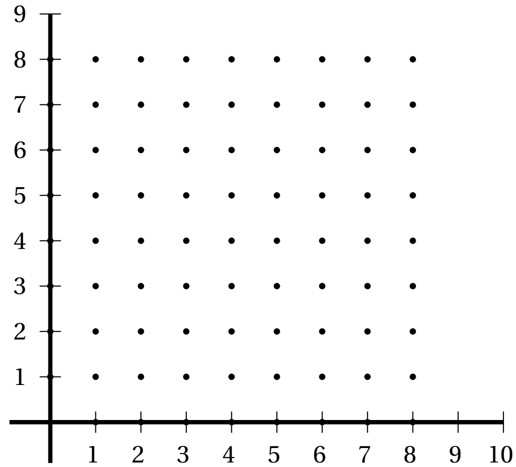


D - Calcul d'une aire plane

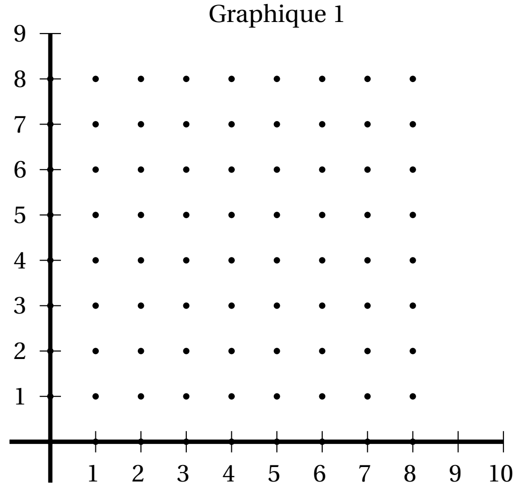
Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est celle définie dans la partie B.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer ce nombre : $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.

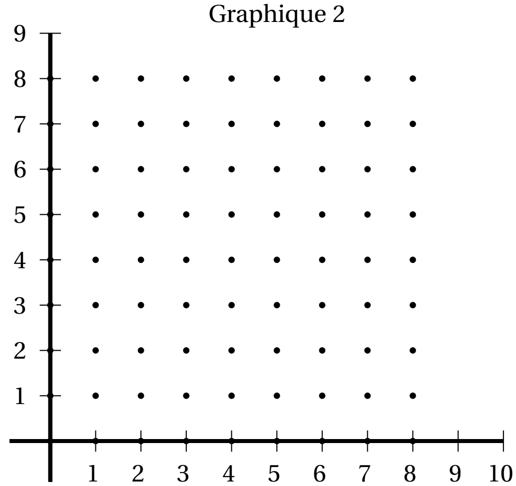
Annexe 1 - exercice 3 (spécialité mathématique) - À rendre avec la copie



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 17 juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points :

$$\text{A}(2\,;\,1\,;\,-1),\quad \text{B}(-1\,;\,2\,;\,4),\quad \text{C}(0\,;\,-2\,;\,3),\quad \text{D}(1\,;\,1\,;\,-2)$$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-2y+z+1=0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots **VRAI** *ou* **FAUX** *correspondant à la réponse choisie.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.
2. Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
3. Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x+8y-z-11=0$.
4. Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2k\\ y &=& 2+3k\\ z &=& 3-4k\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{R}).$$

5. Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
6. Affirmation 6 : la distance du point C au plan $\mathcal{P}$ est égale à $4\sqrt{6}$
7. Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathcal{P}$.
8. Affirmation 8 : le point $\text{E}\left(-\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; l'unité graphique est 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^2+4z+8=0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a=2-2\text{i}$ et $b=-a$.
Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.
   a. Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   b. On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d=2-6\text{i}$.

c. Placer les points C et D sur le graphique Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système :

$$\{(\text{A}\,;\,1)\,;\,(\text{B}\,;\,-1)\,;\,(\text{C}\,;\,\alpha)\}.$$

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{C}G_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{BA}}$.

b. En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

c. Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha = \text{D}$?

4. On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}} \right\| = 4\sqrt{2}.$$

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ l'unité graphique est 2 cm.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2,\quad b = 2+3\text{i},\quad c = 3i,\ \ d = -\frac{5}{2} + 3\text{i et } e = -\frac{5}{2}.$$

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

2. On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.

Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.

3. Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.

b. Démontrer que la similitude s transforme OABC en ABDE.

c. Quel est l'angle de la similitude s ?

d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s \circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω.

4. Étude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED

a. Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est :

$$z' = -\frac{3}{2}\text{i}\overline{z} + 2 + 3\text{i}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

b. Montrer que s' transforme OABC en BAED.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

I. Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.
On note :

- M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Calculer la probabilité d'interroger :

  a. un agent de maintenance ;

  b. une femme agent de maintenance ;

  c. une femme,

II. Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$.

On note :

- A l'évènement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'évènement : « une panne se produit » ;

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.

2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

II. Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

  a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

  b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Étude de la fonction f

  a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

  b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f.

3. Éléments graphiques et tracés.

  a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$.

  b. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (Δ).

  c. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la droite (Δ).

Calculs d'aires

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

  a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\mathcal{A}(\alpha) = 1 - \dfrac{\ln \alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}$.

  b. Déterminer la limite ℓ de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que $\ell = \mathcal{A}\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$.

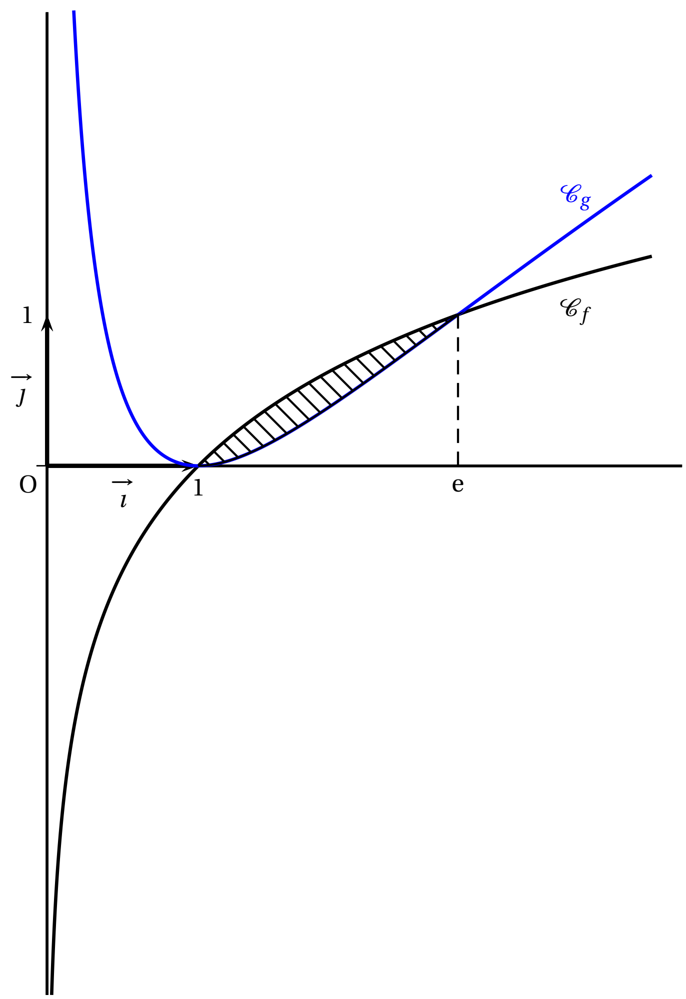
∽ Baccalauréat S Métropole 19 juin 2008 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I = \displaystyle\int_1^{\text{e}} \ln x \,\text{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\text{e}} (\ln x)^2 \,\text{d}x$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \text{e} - 2I$.

c. En déduire J.

d. Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(1\,;\,1\,;\,0),\quad \mathrm{B}(1\,;\,2\,;\,1)\quad \text{et}\quad \mathrm{C}(3\,;\,-1\,;\,2).$$

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne
   $2x+y-z-3=0$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+2y-z-4=0$ et $2x+3y-2z-5=0$.
   Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique est :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+t \\ y &=& 3 \\ z &=& t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$
3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances
   a. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   b. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}000\,26$.
   a. Calculer $P(X \leqslant 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.
   b. Sachant que l'évènement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2\,000)$.
   c. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives 1 + i, 3 − i et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.
2. Calculer les affixes des points A′ et B′, images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe −5.
4. **a.** Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.

   b. En déduire une relation entre $\left|z'+4\right|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg\left(z'+4\right)$ et $\arg\left(z-2\right)$,

   c. Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 ?
5. Soient E le point d'affixe $2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe −4 et E′ l'image de E.

   a. Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{IE}}\right)$.

   b. Calculer la distance JE′ et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{JE}'}\right)$.

   c. Construire à la règle et au compas le point E′ ; on laissera apparents les traits de construction.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - \mathrm{i}$ et $z_B = 7 + \dfrac{7}{2}\mathrm{i}$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.

   Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1\ ;\ -4k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.
2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2\ ;\ 3)$.
3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2}{3}\mathrm{i}z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}.$$

   Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.
4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

   a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

   b. À partir de quel entier n le point B_n, appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

   c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement « le stylo présente un défaut », et E l'évènement « le stylo est accepté ».

a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

Comparer ce résultat avec la probabilité de l'évènement A calculée à la question **1. b.**. Quel commentaire peut-on faire ?

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés en annexe,

1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.

Énoncer puis démontrer ces propriétés.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-t-il des tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,\infty[$ par

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Que représente f pour la fonction g ?
   b. En déduire le sens de variations de g sur $]0\,;\,\infty[$.
2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $g(x) = 1 - \dfrac{\ln x + 1}{x}$.
   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. **a.** Calculer u_1.
   b. Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.
On considère le point A de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer l'affixe z_{B} du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe z_{C} du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
2. **a.** Justifier que $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

a. Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

b. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

a. Donner l'écriture complexe de h.

b. Calculer $z_{\text{A}} + z_{\text{B}} + z_{\text{C}}$. En déduire que A est le milieu du segment [QR].

c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle $(\mathscr{C})$?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2 + \text{i}, \quad z_{\text{B}} = 5 + 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = \text{i}.$$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)\overline{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)$$

b. En déduire l'affixe de C$'$, symétrique de C par rapport à (AB).

c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$.

d. Vérifier que le point C$'$ appartient à $(\mathscr{D})$.

2. **a.** Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathscr{D})$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

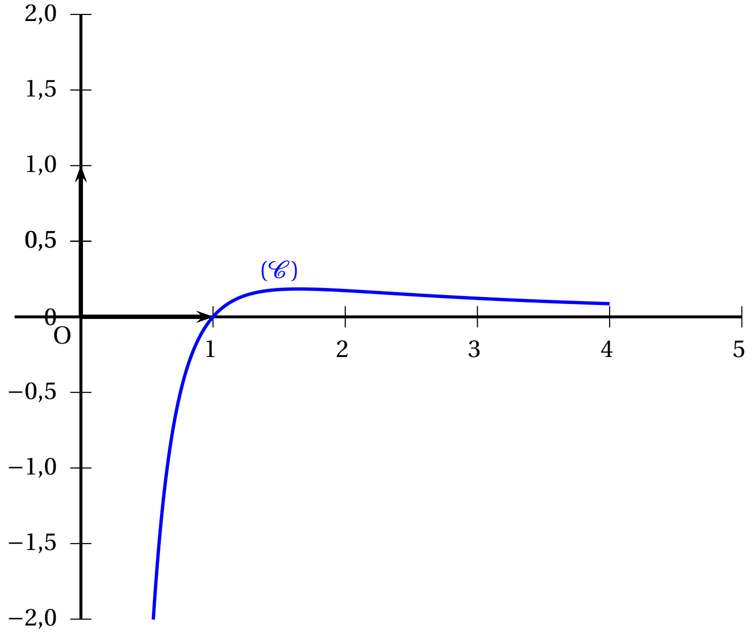
d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x~;~y)$ solutions de l'équation : $4x + 3y = 1$.

b. Déterminer les points de $(\mathscr{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

ANNEXE exercice 2



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2008 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives

$$a = 3 - 2\text{i}, \quad b = 3 + 2\text{i}, \quad c = 4\text{i}.$$

2. Faire une figure et placer les points A, B, C.

3. Montrer que OABC est un parallélogramme.

4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.

5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{M\text{O}} + \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 12$.

6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M. On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Montrer que N a pour affixe $\dfrac{5}{2} - \beta + \dfrac{5}{2}\text{i}$.

b. Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

EXERCICE 2 **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(0 ; 1 ; 4), C(−1 ; −3 ; 2), D(4 ; −2 ; 5) et le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$.

1. a. Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-2t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 4-t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit f la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

   Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ « .

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

   Proposition 2 : « Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$ ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.

   Sa masse initiale est de 10 kg.

   Proposition 3 : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 g ».

4. Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

   Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(A) = p(B) = 0,4$ alors $p(A \cup B) = 0,8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.

   On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

   Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,950 8 ».

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n+1$ sont premiers entre eux. »

2. Soit x un entier relatif.

   Proposition 2 : « $x^2 + x + 3 = 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5). »

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

   Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - \text{i}$ a pour écriture complexe $z' = \left(\sqrt{3} + \text{i}\right)z + \sqrt{3} - \text{i}\sqrt{3}$. »

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   On considère un point A. On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ et s_A la symétrie centrale de centre A.

   Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_{\text{A}} = s_{\text{A}} \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

EXERCICE 4 **7 points**

Partie A

Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

— Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

— Pour tous réels α et β $\displaystyle\int_a^b \left[\alpha u(x) + \beta v(x)\right]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$ sont données ci-dessous dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite (D).

b. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

3. Soit I l'intégrale définie par : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer I.

a. Donner une interprétation géométrique de I.

b. Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\ln(1+t) \leqslant t$. (On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \ln(1+t) - t$.) On admettra que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leqslant \ln(1+t)$.

c. En déduire que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, on a :
$\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} \leqslant \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

d. Montrer que $\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right) \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

e. En déduire un encadrement de I d'amplitude 0,4 par deux nombres décimaux.

4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et (D).

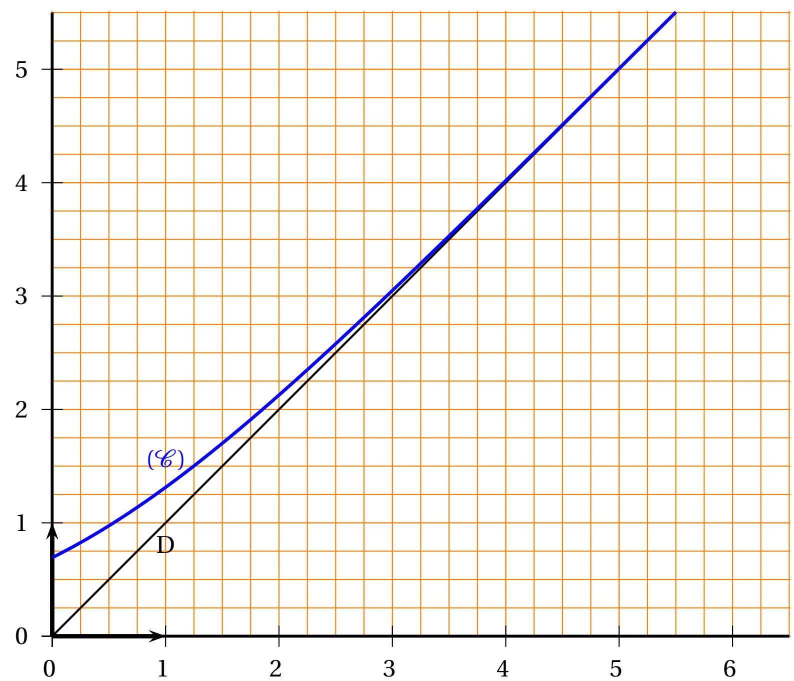
On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE à rendre avec la copie

EXERCICE 4



∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∾ septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

— la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$.

— la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

2. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Calculer S_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Étant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.

Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2. On considère les points A d'affixe $z_{\text{A}} = \sqrt{3} - \text{i}$, B d'affixe $z_{\text{B}} = \sqrt{3} + \text{i}$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_{C}.

a. Déterminer la forme exponentielle de z_{A}, z_{B} et z_{C}.

b. Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.

c. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

3. Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$.

a. Placer les points D et E sur une figure.

b. Montrer que l'affixe z_{E} du point E vérifie : $z_{\text{E}} = \dfrac{1}{2}\left[1 + \text{i}\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$.

c. Montrer que $\text{OE} = \text{BE} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

4. Montrer que les points A, C et E sont alignés.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)}\\ n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)}\end{array}\right., \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n-11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}z \quad \text{et} \quad z'' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2\text{e}^{-2\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $b_0 = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{5}}$.

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f\left(A_n\right) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = g\left(B_n\right).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

a. Quelle est la nature de chacun des triangles $\text{O}A_nA_{n+1}$?

b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}B_n},\ \overrightarrow{\text{O}B_{n+2}}\right)$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x+2-\frac{4\text{e}^x}{\text{e}^x+3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{\text{e}^x - 3}{\text{e}^x + 3}\right)^2$$

   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?

   b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.

4. **a.** Montrer que la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln 3]$.

   On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{12\text{e}^x\left(\text{e}^x - 3\right)}{\left(\text{e}^x + 3\right)^3}.$$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.

6. **a.** Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x + 3}$.

   b. Soit λ un réel strictement négatif.

   On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

   Montrer que $\mathscr{A}(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln\left(\text{e}^\lambda + 3\right)$.

   c. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'urne U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.
À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.
On note

V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »

V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».

Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0,06$.

2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?

3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.

On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.

4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.

On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.

Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geqslant 0,99$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(E) = 0,02$ et $p(F) = 0,17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - (0,9)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E)~:\qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E')~:\quad y' = 2y + 8$.

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E),

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $\text{A}(\ln 2\ ;\ 0)$? Si oui la préciser.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2. **a.** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{DB}}$.

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{C}}\| = \text{AB}$ est :

a. la médiatrice de [AC].

b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

c. la médiatrice de [AI].

d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right) = 0$$

est :

a. la médiatrice de [AC].

b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

c. la médiatrice de [AI].

d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n \text{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\text{d}t.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)\text{e}^{-t}\,\text{d}t.$$

a. Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

b. En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_\text{A} = 1$, $z_\text{B} = 5$ et $z_\text{I} = 3+\text{i}$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.
À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z-5}{z-1}.$$

Le point M' est appelé l'image de M.

Partie A

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I′ image de I.
Vérifier que I′ appartient à $(\mathscr{C})$.

2. **a.** Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $\text{O}M' = \dfrac{M\text{B}}{M\text{A}}$.

b. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a :
$\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}},\ \overrightarrow{M\text{B}}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image M'.

1. Démontrer que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

2. On note (d) la droite symétrique de la droite $(\text{A}M)$ par rapport à la tangente (T). (d) recoupe $(\mathscr{C})$ en N.

a. Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.
Après avoir justifié que $\left(\overrightarrow{\text{AO}},\ \overrightarrow{\text{A}N}\right) = \left(\overrightarrow{\text{A}M},\ \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ démontrer que $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{O}N}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}},\ \overrightarrow{M\text{B}}\right)$.

b. En déduire une construction de M'.

EXERCICE 5 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_\text{A} = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On note $\text{A}_0 = \text{A}$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

1. **a.** Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

   b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \text{e}^{\frac{\text{i}n\pi}{3}}$.

   b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $\left[\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B
Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.
3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $\left[\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

On rappelle que la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

- B_1 l'évènement : « on obtient une boule blanche au premier tirage »
- B_2 l'évènement : « on obtient une boule blanche au second tirage »
- A l'évènement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

a. Calculer la probabilité $p(B_1 \cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \dfrac{3}{4}$.

b. Calculer $p_{B_2}(B_1)$.

c. Montrer que $p(A) = \dfrac{3}{10}$.

2. On prend toujours $n = 10$.

Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'évènement A.

a. Déterminer $p(X = 3)$. (On donnera la réponse à 10^{-2} près).

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3. Dans cette question n est un entier supérieur ou égal à 1.

Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $p(A) = \dfrac{1}{4}$?

EXERCICE 2 **5 points**

On donne la propriété suivante :

« par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.

En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).
4. **a.** Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.
   b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).
On note $(x\,;\ y\,;\ 0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
2. **a.** Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
   b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{G}N}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{G}N}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ en fonction de x et y.
   c. Déterminer les coordonnées du point N.
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.

EXERCICE 3 **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul,}\quad x_{n+1}-x_n=0,24x_{n-1}.$$

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n=\lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2-\lambda-0,24=0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).
   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :
   $$u_n=\alpha(1,2)^n+\beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$
2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0=6$ et $u_1=6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{39}{7}(1,2)^n+\dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0=6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1}=1,4v_n-0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1,4x-0,05x^2$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $0\leqslant v_n<v_{n+1}\leqslant 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

EXERCICE 4 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Partie A - Étude de fonction f.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + \mathrm{e}^{2x}\right)$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (d).
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d$'$) d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
4. Étudier les variations de la fonction f.
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.
5. Tracer les droites (d) et (d$'$) sur la feuille annexe.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

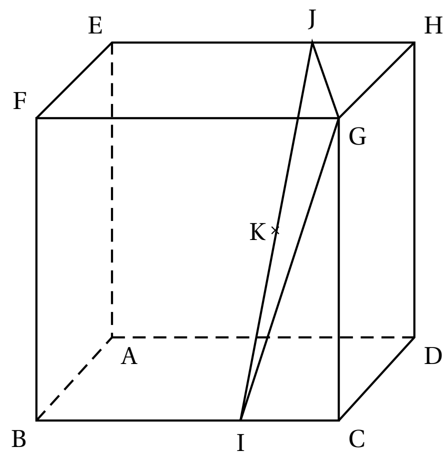
On pose $I = \displaystyle\int_{2}^{3} [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.
2. Montrer que, pour tout $X \in [0\,;\,+\infty[$, $\ln(1 + X) \leqslant X$.
3. En déduire que $0 \leqslant I \leqslant \displaystyle\int_{2}^{3} 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ et donner un encadrement de I d'amplitude $0,02$.

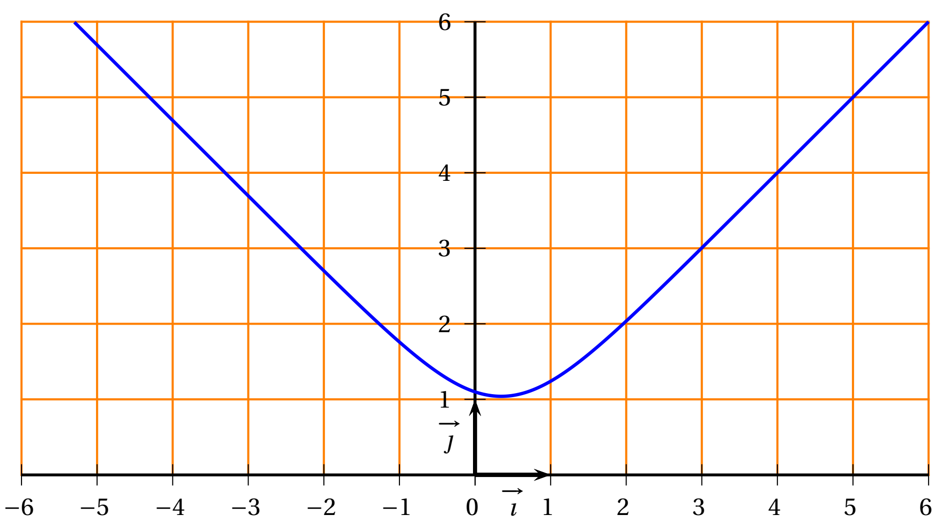
Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 2



EXERCICE 4



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2008 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

A(3 ; −2 ; 1) B(5 ; 2 ; −3)
C(6 ; −2 ; −2) D(4 ; 3 ; 2)

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).
   c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.
3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.
   La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K,
   a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.
   b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.
   c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

$$z_K = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad z_H = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

   Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. **a.** Déterminer et placer les points images de B et C par f.
   b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image.
   Déterminer les points invariants par f.
3. **a.** Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

$$OM \times OM' = 4.$$

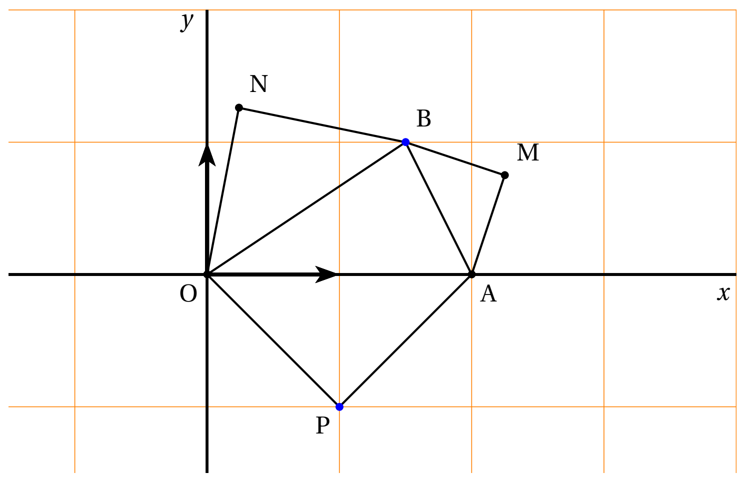
   b. Déterminer $\arg\left(z'\right)$ en fonction de $\arg(z)$.
4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.
   a. Calculer OK′ et OH′.
   b. Démontrer que $z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   c. Expliquer comment construire les points K′ et H′ en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\text{OI}}~;~\overrightarrow{\text{OJ}}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$ et $z_{\text{B}} = \dfrac{3}{2} + \text{i}$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

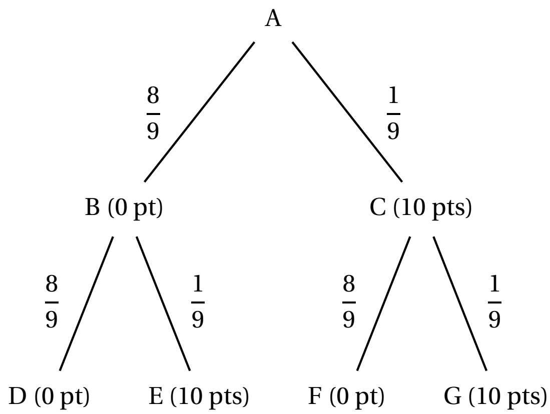
Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. **À l'aide des transformations**
   - **a.** Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.
   - **b.** Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.
   - **c.** Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
   - **d.** Quelle est l'image du point O par r ?
   - **e.** En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.
2. **En utilisant les nombres complexes**
   - **a.** Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a.
   - **b.** En déduire les affixes z_{M} et z_{N} des points M et N.
   - **c.** Donner, sans justification, l'affixe z_{P} du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.
Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance de X.
   c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième
   b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A

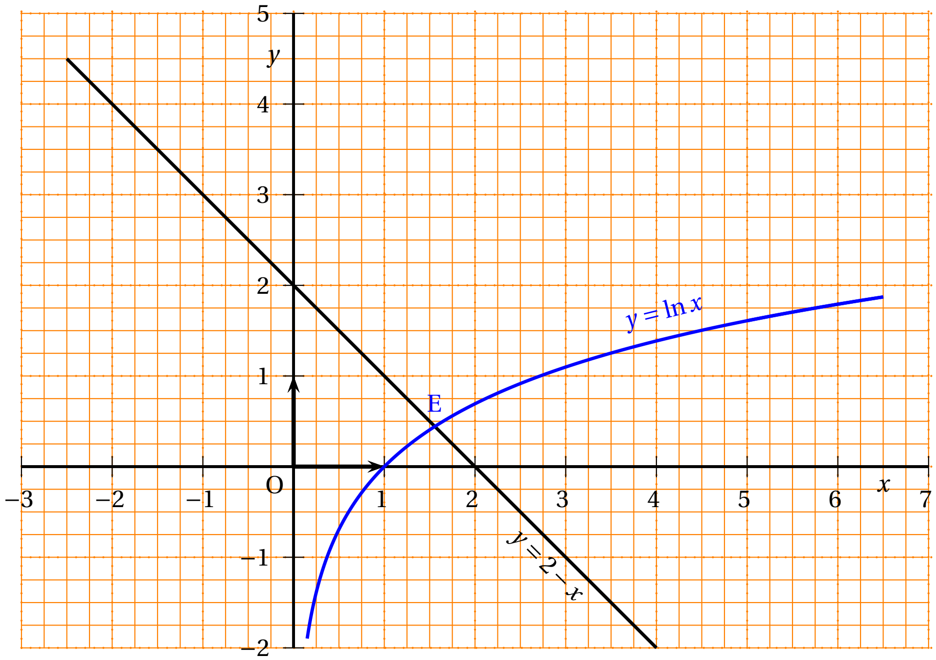
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - 2 + x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln, ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.



On considère l'aire en unités d'aire, notée $\mathscr{A}$, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

1. Déterminer les coordonnées du point E.
2. Soit $I = \displaystyle\int_1^{\alpha} \ln x \, \mathrm{d}x$.
   - **a.** Donner une interprétation géométrique de I.
   - **b.** Calculer I, en fonction de α, à l'aide d'une intégration par parties.
   - **c.** Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de α.

EXERCICE 5 — 3 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. **Restitution organisée de connaissances :**
   La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcll} g'(x) & = & g(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) & = & 1 & \end{array}\right.$$

   Démontrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. Démontrer que $1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n=(\mathrm{e}-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire, en utilisant aussi la **PARTIE A**, que la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}-1$.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2008 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

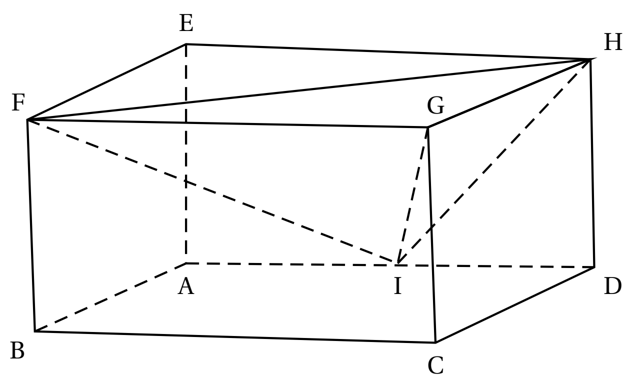
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + 2\text{i}$, $b = 1 + 3\text{i}$, $c = 4\text{i}$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit I le milieu de [BC] et z_{I} son affixe.
   a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z - z_{\text{I}}}{z - a}$ soit un réel ?
   b. Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x - z_{\text{I}}}{x - a}$ soit un réel.
   c. Soit $z_{\overrightarrow{\text{AI}}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{\text{AI}}}$.
3. a. Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.
   b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.
   Déterminer l'écriture complexe de r_1.
4. Soit A′, B′ et C′ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.
   Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?
   En déduire que $b' = \overline{c'}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AI}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.
2. a. Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.
   b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
   En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

4. a. La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

Soit Γ la sphère de centre G passant par K.

Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?

(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1\,;1\,;0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t' \\ y &=& -t' \\ z &=& -2 \end{array}\right. \qquad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. Une équation de S

a. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite D.

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-x+y}{2}\ ;\ \dfrac{x-y}{2}\ ;\ 2-z\right)$.

En déduire MH^2 en fonction de $x,\ y$ et z.

Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}xy$.

2. Étude de la surface S d'équation $z = -\dfrac{1}{4}xy$

a. On coupe S par le plan $(x\text{O}y)$. Déterminer la section obtenue.

b. On coupe S par un plan P parallèle au plan $(x\text{O}y)$.

Quelle est la nature de la section obtenue ?

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$, positive sur $[1~;~+\infty[$, et vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l}\ln 1 = 0\\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y\\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}\\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}\end{array}\right.$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad \text{(E)},$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad \text{(E')}$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de (E').}$$

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).

Résoudre l'équation (E').

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

a. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3+4i$.
Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3})$ et
$z_D = -2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3})$.
L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. **a.** Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.

   b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

   a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

   b. Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].

   c. Montrer que $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
   Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points :

$$A(4\,;\,0\,;\,0),\quad B(0\,;\,2\,;\,0),\quad C(0\,;\,0\,;\,3)\quad \text{et } E\left(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit $(\mathscr{P})$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $\left(x_M\,;\,y_M\,;\,z_M\right)$ la distance δ_M du point M au plan $(\mathscr{P})$ est égale à :

$$\frac{\left|ax_M + by_M + cz_M + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

   b. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3;6;4)$.
   Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x+6y+4z-12=0$.

   d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. **a.** Montrer que la droite ($\mathcal{D}$) de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_{E}.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\dfrac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte ».
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1.
   Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$,
   puis : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}$
3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

   a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
   On précisera la raison et le premier terme U_1.

   b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

   d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2~;~5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\mathrm{e}^{-b} + (2+a)\mathrm{e}^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.
Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?