∽ Baccalauréat S 2010 ∽

L'intégrale d'avril 2010 à mars 2011

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Pondichéry 21 avril 2010 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a~;~b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b \left[f(t)+g(t)\right]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- Si pour tout $t \in [a~;~b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Montrer que : si pour tout $t \in [a~;~b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f_n(x) = \ln\left(1+x^n\right)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x.$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de f_1 sur $[0~;~+\infty[$.

   c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

   (Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant :
   pour tout $x \in [0~;~1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.

   b. Étudier les variations de la suite (I_n).

   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

   $$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

   a. Étudier le sens de variation de g sur $[0~;~+\infty[$.

   b. En déduire le signe de g sur $[0~;~+\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a

   $$\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n.$$

   c. En déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&t+2\\ y&=&-2t\\ z&=&3t-1\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.
2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&2-3t\\ y&=&1+t\\ z&=&-3+2t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&7+2u\\ y&=&2+2u\\ z&=&-6-u\end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.
4. On considère les points :
   A, de coordonnées $(-1\,;\,0\,;\,2)$, B, de coordonnées $(1\,;\,4\,;\,0)$ et C, de coordonnées $(3\,;\,-4\,;\,-2)$.
   Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.
5. On considère les points :
   A, de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$, B, de coordonnées $(2\,;\,1\,;\,0)$ et C, de coordonnées $(4\,;\,-1\,;\,5)$.
   On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.*

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples $(a,\ b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3.$$

Soit $(a,\ b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a,\ b)$. On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1. Montrer que $u^2 = dv^3$.
2. En déduire que v divise u, puis que $v = 1$.
3. Soit $(a,\ b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
   Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors

   $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

Partie B

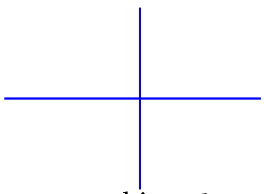
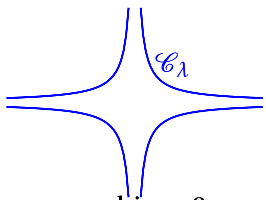
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère la surface S d'équation

$$x^2 \times y^2 = z^3.$$

Pour tout réel λ, on note $\mathscr{C}_\lambda$ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de $\mathscr{C}_\lambda$ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ.

   Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.

 graphique 1	(pas de courbe visible) graphique 2	 graphique 3

2. **a.** Déterminer le nombre de points de $\mathscr{C}_{25}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

   b. *Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question* 3 *de la partie* A.

   Déterminer le nombre de points de $\mathscr{C}_{2010}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

   a. Démontrer que : $P(X = -1) = \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

   b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1\,000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}01x}\,\mathrm{d}x.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.

b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Nord 3 juin 2010 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}(1~;~-2~;~4)\quad \mathrm{B}(-2~;~-6~;~5)\quad \mathrm{C}(-4~;~0~;~-3).$$

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(1~;~-1~;~-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point O′ projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur La droite (BC).

Soit t le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

a. Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|^2}$.

b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\dfrac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

a. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

b. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe -2i et D d'affixe 1.
On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z $(z \neq \text{i})$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - \text{i}}{\text{i}z + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \text{i})$.
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D′ associé au point D par l'application f.
3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $\left(z' + 2\text{i}\right)(z - \text{i}) = 1$.
   b. En déduire que pour tout point M d'affixe $z (z \neq \text{i})$:

   $\text{B}M' \times \text{A}M = 1$
   et $\left(\vec{u},\,\overrightarrow{\text{B}M'}\right) = -\left(\vec{u},\,\overrightarrow{\text{A}M}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
4. **a.** Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E′ associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle BD′ E′ ?

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\,y)$ solutions de l'équation

$$(\text{E}) : \quad 16x - 3y = 4.$$

1. Vérifier que le couple (1, 4) est une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d' affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \sqrt{2}\text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{8}} z.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
le point M_0 a pour affixe $z_0 = \text{i}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f\left(M_n\right)$.
On note z_n l'affixe du point M_n
Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.
   - **a.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
   - **b.** En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{O}M_{n+4} = 4\mathrm{O}M_n$ et que $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}, \overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+4}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
   - **c.** Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.
4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$.
   - **a.** Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_p}, \overrightarrow{\mathrm{O}M_n}\right)$.
   - **b.** Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$. On pourra utiliser la partie A.

EXERCICE 4 — 8 points

Commun à tous les candidats

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{4\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx} + 7}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 7}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7\mathrm{e}^{-x}}$.
2. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
   - **b.** Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.
3. **a.** Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7\,;\, 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.
   - **b.** Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point I_1.
   - **c.** Tracer la droite (T_1).
4. **a.** Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   - **b.** Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0\,;\, \ln 7]$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $\mathrm{A}\left(0\,;\, \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathcal{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l' abscisse.

   On note I_n ce point d'intersection.

   b. Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I_n.

   c. Tracer les droites (T_2) et (T_3).

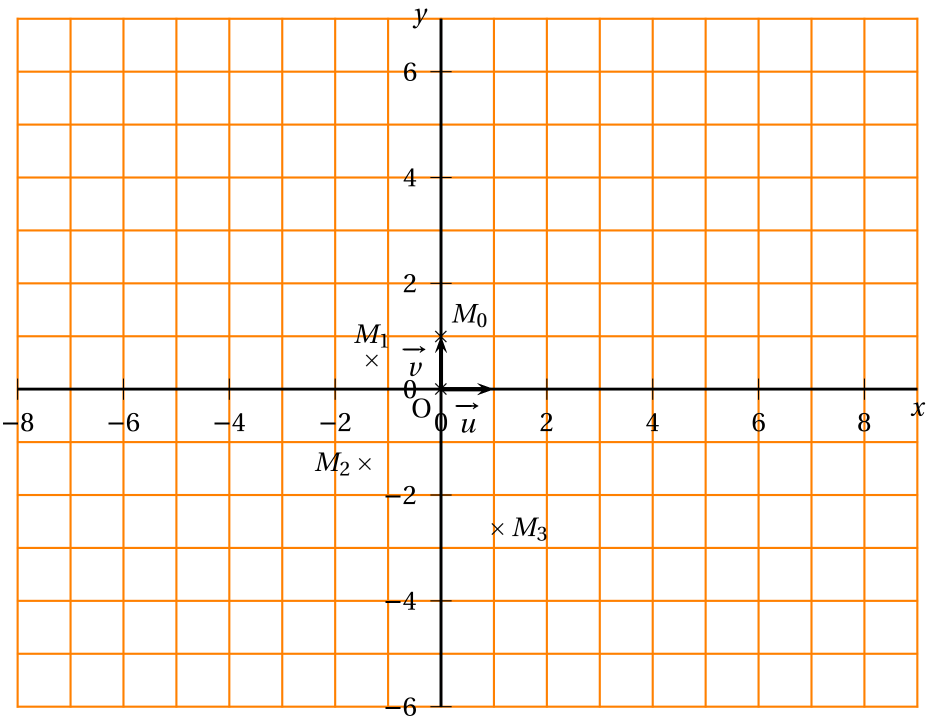
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

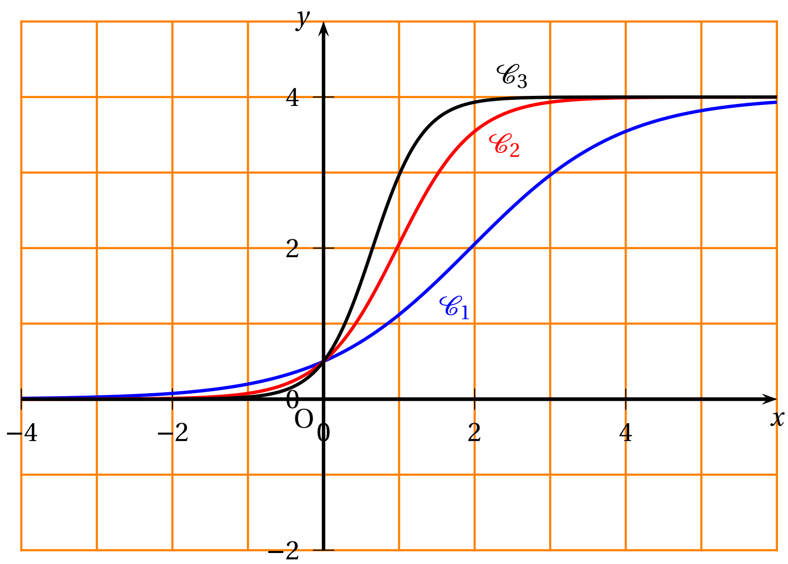
Montrer que la suite (u_n) est constante.

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3 (enseignement de spécialité)



Exercice 4



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Liban 3 juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée de connaissances On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

1. **a.** Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b. Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n \geqslant 0$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On note (D) la droite passant par les points A$(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et B$(3\,;\,-5\,;\,-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& -2-3t\\ z &=& -1-\ t\end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-k\\ y &=& 1+2k\\ z &=& k\end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.
   a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).
   b. Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.
4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}(1 ; 1 ; -1)$.
   a. Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.
   b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$. »
2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
   On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

   Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. »
3. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : « Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel. »
4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, le point A d'affixe $a = 2 - i$ et le point B d'affixe $b = \frac{1+i}{2}a$.
   Proposition 4 : « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »
5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.
   Proposition 5 : « Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés. »

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, le point A d'affixe $2-\mathrm{i}$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note I le milieu du segment [AB].
   Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1+\mathrm{i})z - 1 - 2\mathrm{i}$. »
2. On appelle S l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.
   Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k-1\ ;\ 3k-1)$ où k est un entier relatif. »
3. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 0 \quad$ modulo 3, où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   Proposition 3 : « Il existe des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »
4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k $(2 \leqslant k \leqslant n)$, le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »
5. On considère l'équation (E′) : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.
   Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E′). »

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   On note α cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\,;\,2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $\text{A}M = \sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que $\text{AP} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2010 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, ***une ou deux des réponses*** *proposées sont correctes. Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.*

Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.

Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.

Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

   A : $\frac{5}{8}$ **B :** $\frac{21}{32}$ **C :** $\frac{11}{32}$ **D :** $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

   A : $\frac{105}{248}$ **B :** $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ **C :** $\frac{21^2}{32^2}$ **D :** $\frac{5^2}{8^2}$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
   La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

   A : $\frac{1}{3}$ **B :** $\frac{1}{5}$ **C :** $\frac{1}{12}$ **D :** $\frac{1}{4}$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
   La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

   A : 0,35 à 10^{-2} près **B :** $0,85^9$ **C :** $0,85^9 \times 0,15$ **D :** $0,85^9 \times 0,15 \times 10$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

1. **Restitution organisée de connaissances**

   Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' &=& \Omega M & (1)\\ \left(\overrightarrow{\Omega M} ; \overrightarrow{\Omega M'}\right) &=& \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2)\end{array}\right.$$

a. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2\,\text{i}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\,\text{i}$.

a. Écrire a et b sous forme exponentielle.

b. Faire une figure et placer les points A et B.

c. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $c = -8\,\text{i}$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Placer les points C et D.
Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4\imath$.

5. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

6. Montrer que OAD est un triangle rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété 2 : Soit C une point d'affixe c. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe d et pour tout point E, distinct de C, d'affixe e, on a :

$$\left(\overrightarrow{\text{CD}}\,;\,\overrightarrow{\text{CE}}\right) = \arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right)\quad(2\pi).$$

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points C et D d'affixes respectives $c = 3$ et $d = 1 - 3\imath$, et $\mathscr{S}_1$ la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{u}\right)$ des réels.

a. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par $\mathscr{S}_1$. On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.

b. Donner l'expression complexe de $\mathscr{S}_1$.

3. Soit $\mathscr{S}_2$ la similitude directe définie par :

— le point C_1 et son image C' d'affixe $c' = 1 + 4\,\text{i}$;

— le point D_1 et son image D' d'affixe $d' = -2 + 2\,\mathrm{i}$.

a. Montrer que l'expression complexe de $\mathcal{S}_2$ est : $z' = \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$.

b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

4. Soit $\mathcal{S}$ la similitude définie par $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$.
Déterminer l'expression complexe de $\mathcal{S}$.

5. On pourra admettre désormais que $\mathcal{S}$ est la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = \mathrm{i}\,\overline{z} + 1 + \mathrm{i}.$$

a. Quelle est l'image de C par $\mathcal{S}$? Quelle est l'image de D par $\mathcal{S}$?

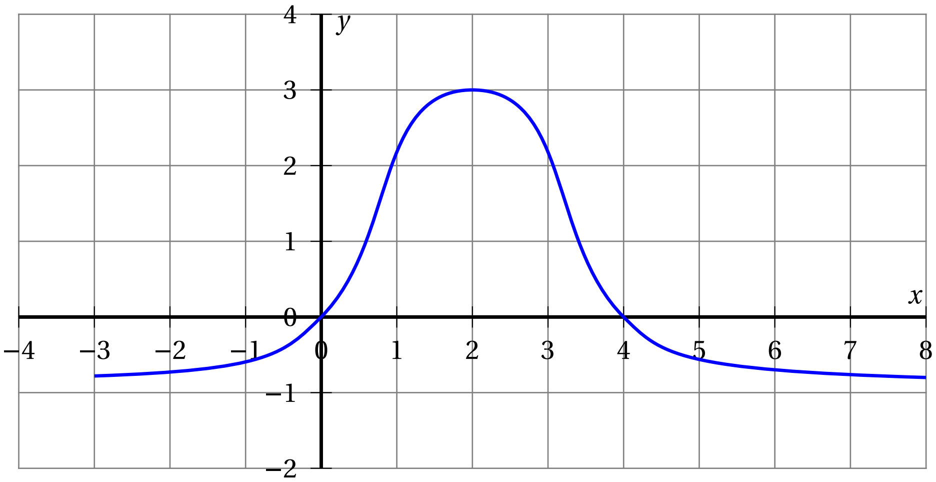
b. Soit H le point d'affixe h tel que : $h - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(d - c)$.
Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.

c. Soit H' l'image de H par $\mathcal{S}$. Préciser la nature du triangle $C'D'H'$ et construire le point H' (on ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H').

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3 ; 8]$.



On définit la fonction F sur I, par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. a. Que vaut $F(0)$?

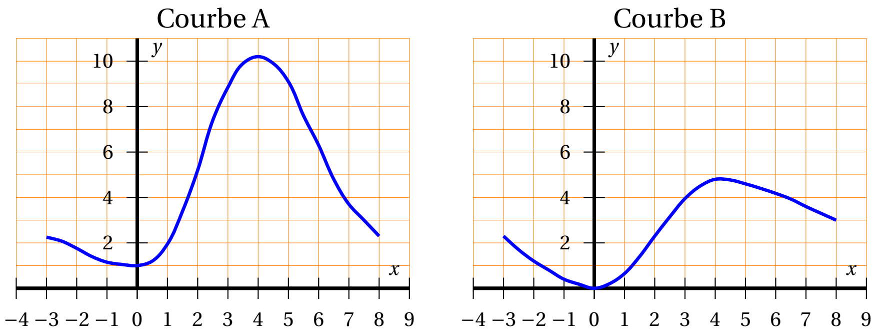
b. Donner le signe de $F(x)$:
— pour $x \in [0 ; 4]$;
— pour $x \in [-3 ; 0]$.
Justifier les réponses.

c. Faire figurer sur le graphique donné en **ANNEXE** les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.

2. a. Que représente f pour F ?

b. Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I. Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f.

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.



L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - x\ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :

a. le sens de variation de la suite (u_n) ;

b. la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.

a. Montrer que $v_n = n - n\ln n$.

b. En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

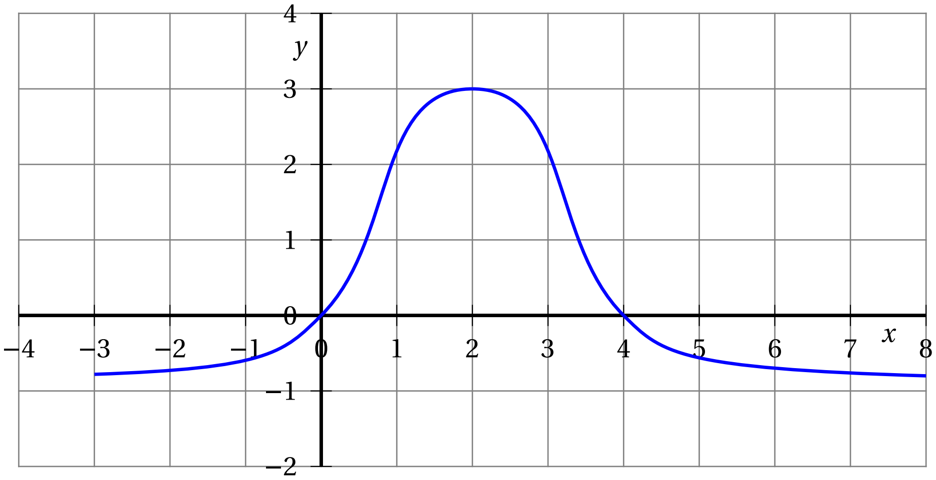
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3

Commun à tous les candidats



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Asie 21 juin 2010 ∾

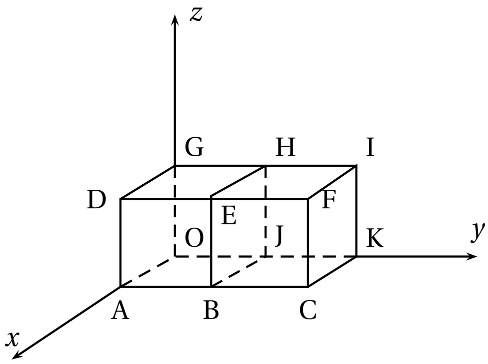
EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points : A(1; 0; 0), B(1; 1; 0), C(1; 2; 0), D(1; 0; 1), E(1; 1; 1), F(1; 2; 1), G(0; 0; 1), H(0; 1; 1), I(0; 2; 1), J(O; 1; 0), K(0; 2; 0) comme indiqués sur la figure ci -contre :



1. Question 1 : Le triangle GBI est :

   Réponse **a** : isocèle. Réponse **b** : équilatéral. Réponse **c** : rectangle.

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés {(O, 2), (A, −1), (C, 1)} est :

   Réponse **a** : le point K. Réponse **b** : le point I. Réponse **c** : le point J.

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FC}}$ est égal à :

   Réponse **a** : 1. Réponse **b** : −1. Réponse **c** : 2.

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

Réponse a :	**Réponse b :**	**Réponse c :**
sont non coplanaires.	forment un rectangle.	forment un carré.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

   Réponse a :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 2+t \\ z & = & t \end{array}\right..$$

   Réponse b :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+4t \\ y & = & t \\ z & = & 4t \end{array}\right..$$

   Réponse c :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 1-t \end{array}\right..$$

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

Réponse a :	**Réponse b** :	**Réponse c** :
$2x+2y-z-2=0$.	$x+y-3=0$.	$x+y+2z=2$.

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse **a** : $\sqrt{2}$. Réponse **b** : 2. Réponse **c** : $\dfrac{1}{2}$.

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

Réponse **a** : $\dfrac{1}{2}$. Réponse **b** : $\dfrac{1}{6}$. Réponse **c** : $\dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a=-2,\quad b=2-2\text{i}\sqrt{3},\quad c=3+3\text{i}\sqrt{3}\quad\text{et}\quad p=10.$$

PARTIE A Étude de la configuration

1. Construction de la figure.
   a. Placer les points A et P dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   b. Déterminer les modules des nombres complexes b et c.
   c. Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.
2. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.
3. On note r_{A} la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Vérifier que l'image Q du point C par r_{A} a pour affixe : $q=-4+4\text{i}\sqrt{3}$.
   b. Vérifier l'égalité : $q=-2b$.
   Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?
4. Soit R le symétrique de C par rapport à O.
   a. Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.
   b. Établir que : AP = BQ = CR.

PARTIE B

On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M)=M\text{A}+M\text{B}+M\text{C}.$$

1. Calculer $f(\text{O})$.

2. Soient M un point quelconque et N son image par la rotation r_{A}.
   Démontrer que : $M\text{A} = MN$ puis que $M\text{C} = N\text{Q}$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan, $f(M) \geqslant 12$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points B, C et H d'affixes respectives :

$$b = 5\text{i},\quad c = 10 \quad \text{et} \quad h = 2 + 4\text{i}.$$

Construire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Étude de la position du point H
   a. Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).
   b. Calculer $\dfrac{h}{h-c}$, et en déduire que $\left(\overrightarrow{\text{HC}}\,;\,\overrightarrow{\text{HA}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
2. Étude d'une première similitude
   a. Calculer les rapports : $\dfrac{\text{BH}}{\text{AH}}$, $\dfrac{\text{BA}}{\text{AC}}$ et $\dfrac{\text{AH}}{\text{CH}}$.
   b. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.
   c. Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.
3. Étude d'une seconde similitude
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation
   On note S_2 la similitude qui à tout point M d'affixe z associie le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (-1 - 2\text{i})\overline{z} + 10.$$

   Démontrer que S_2 est composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ), et d'une similitude directe dont le centre Ω appartient à (Δ). Préciser (Δ).
4. Étude d'une composée
   a. Calculer le rapport de la similitude composée $S_2 \circ S_1$.
   b. En déduire le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

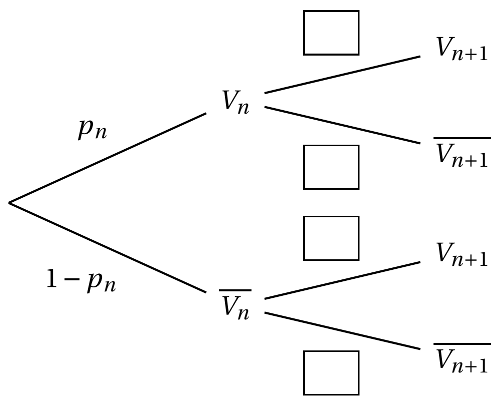
1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

a. A : « les 2ᵉ et 3ᵉ sondages sont positifs » ;

b. B : « les 2ᵉ et 3ᵉ sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3ᵉ sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites

a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Étude des variations de la fonction f

a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_2.

2. Une relation de récurrence

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

b. Calculer I_3.

3. Étude de la limite de la suite de terme général I_n

a. Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a : $0 \leqslant \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^n}$.

b. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 14 juin 2010

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathcal{D}_1)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1+2t\\ y &=& -3t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2t\\ y &=& 5-t\\ z &=& -2+t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :

Les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(2 ; -1 ; 3)$ et la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathcal{D})\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+4t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& 3-2t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :

Le plan $(\mathcal{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$ a pour équation : $2x+y-z=0$.

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0003$.

On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Affirmation :

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à 0,5.

Question 4

A et B sont deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0{,}4, \quad p_A(B) = 0{,}7 \quad \text{et} \quad p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}1.$$

Affirmation :

La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{41}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f, du plan $(\mathcal{P})$ dans lui-même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\text{i}z}{z+1}.$$

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M' = M$.
2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$\text{O}M' = \frac{\text{O}M}{\text{A}M} \text{ et } \left(\vec{u},\,\overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}},\,\overrightarrow{M\text{O}}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. **a.** Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + \text{i}$.
   Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA].
   b. Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B′ image du point B par f.
   Établir que B′ appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.
   Placer le point B′ et tracer le cercle $(\mathcal{C})$ dans le repère.
   c. En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle $(\mathcal{C})$.
   d. Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
   En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (On laissera apparents les traits de construction.)
4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.
   Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.
   a. On pose $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels tels que $(x,\,y) \neq (-1,\,0)$ et $(x,\,y) \neq (0,\,0)$.
   Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :

$$\text{Im}\left(z'\right) = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$$

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.
   b. À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1 + \text{i},\ b = -1 + 2\text{i},\ c = 2 + 3\text{i},\ m = 7 - 5\text{i},\ n = 5 - \text{i},\ p = 9 + \text{i}.$$

1. **a.** Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.

b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.

c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC *en le triangle* MNP.

2. Une similitude directe

Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}.$$

b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s.

c. Vérifier que la similitude s transforme le point C en M.

3. Une similitude indirecte

Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est :

$$z' = 2\mathrm{i}\overline{z} + 3 - 3\mathrm{i}.$$

a. Vérifier que : $\left\{\begin{array}{lcl} s'(\mathrm{A}) & = & \mathrm{N} \\ s'(\mathrm{B}) & = & \mathrm{M} \\ s'(\mathrm{C}) & = & \mathrm{P} \end{array}\right.$

b. Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k = 1 - \mathrm{i}$.

c. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2.

On pose : $f = s' \circ h$.

Déterminer les images des points K et J par la transformation f. En déduire la nature précise de la transformation f.

d. Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathscr{T}$ commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

a. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_\mathrm{A})$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A.

b. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_\mathrm{B})$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B.

c. En déduire que les droites $(\mathcal{T}_{\text{A}})$ et $(\mathcal{T}_{\text{B}})$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{e}^a & = & -2b \\ \text{e}^a - a\text{e}^a & = & b^2-1 \end{array}\right. .$$

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S′) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{e}^a & = & -2b \\ \text{e}^{2a} + 4a\text{e}^a - 4\text{e}^a - 4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$\text{(E)} \quad : \quad \text{e}^{2x} + 4x\text{e}^x - 4\text{e}^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{2x} + 4x\text{e}^x - 4\text{e}^x - 4.$$

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0[$, $\text{e}^{2x} - 4 < 0$ et $4\text{e}^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

4. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathcal{T}_{\text{A}})$ et $(\mathcal{T}_{\text{B}})$ sont confondues.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.

De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a. Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.

Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

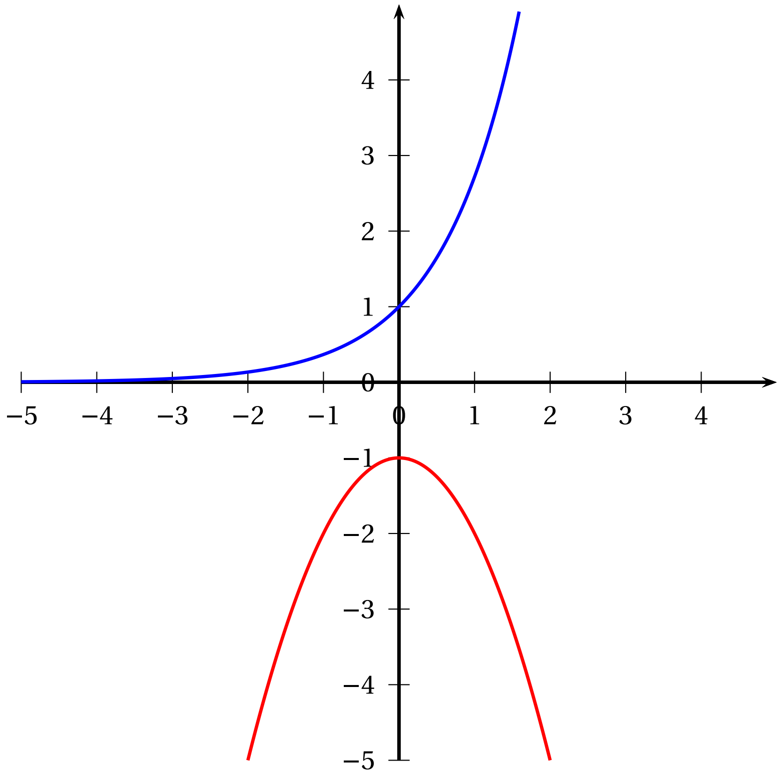
3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

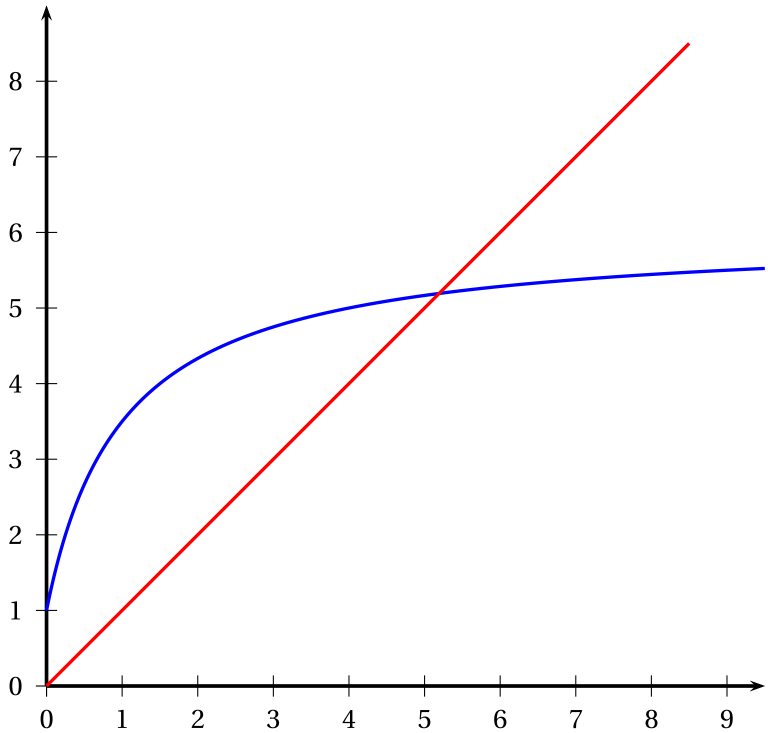
Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe 1 (Exercice 3, question 1)



Annexe 2 (Exercice 4, question 2. a.)



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S La Réunion 22 juin 2010 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

   a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -1} g(x)$.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2~;~3]$.
   e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\frac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.
Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;
- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, vérifiant la condition (E) :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } xf'(x) - f(x) = x^2\text{e}^{2x}.$$

1. Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ vérifie :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } g'(x) = \text{e}^{2x}.$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ qui vérifient la condition (E).

3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?

Partie B

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2}x.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

2. **a.** Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe $1+\mathrm{i}$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z-1-\mathrm{i}}{z}.$$

Le point M' est appelé le point image du point M.

1. **a.** Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.

b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $\left|z'\right| = 1$.

3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie 1 : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Prérequis :

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.
Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.
Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(\text{A}) = \text{B}$ et $s(\text{C}) = \text{D}$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$;
$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
On considère le point C tel que ABCD est un carré.
Soit E le milieu du segment [AD], on considère le carré EDGF tel que
$\left(\overrightarrow{\text{ED}}, \overrightarrow{\text{EF}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

1. **a.** Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.
   b. Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.
   c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(\text{D}) = \text{F}$ et $s(\text{B}) = \text{D}$.
2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.
   a. Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s.
   b. Donner l'écriture complexe de cette similitude.
   c. Déterminer, le centre Ω de la similitude directe s.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole 22 juin 2010 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad y' + y = \text{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\text{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E′) : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E′).
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E′).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_k(x) = (x + k)\text{e}^{-x}$$

où k est un nombre réel donné.
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.
2. On note M_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = \text{e}^{-x}$.
3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y = \text{e}^{-x}$;
   - la courbe $\mathcal{C}_k$ d'équation $y = (x + k)\text{e}^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).
   b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^2 (x + 2)\text{e}^{-x}\,\text{d}x$.
   Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. **Restitution organisée de connaissances**

   Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

   Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.
   Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.
   Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ?
   Justifier les réponses.
   a. $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;
   b. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;
   c. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.
   Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.
Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :
   - $\dfrac{21}{40}$
   - $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{1}{3}$
   - $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{3}$
2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :
   - $\dfrac{3^3 \times 7^2}{10^5}$
   - $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^3$
   - $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.

   Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

   - $\dfrac{7}{60}$
   - $\dfrac{14}{23}$
   - $\dfrac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'évènement $[1 \leqslant X \leqslant 3]$ est égale à :

   - $\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-3\lambda}$
   - $\mathrm{e}^{-3\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}$
   - $\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}}$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.
Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1. **a.** Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

   b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2. Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi~;~\pi]$.

   a. Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   b. Justifier que le point E a pour affixe $z_{\mathrm{E}} = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

3. Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

   a. Justifier que le point F a pour affixe $z_{\mathrm{F}} = \dfrac{\alpha}{2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   b. On admet que le point G a pour affixe $z_{\mathrm{G}} = \dfrac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\overline{\alpha}}{2}$.

   Démontrer que $\dfrac{z_{\mathrm{G}}-2}{z_{\mathrm{F}}-2} = \dfrac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1. a.

   En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du côté AF du triangle AFG est minimale.

   On admet que $\mathrm{AF}^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$.
Compléter ce tableau de variations. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		↘		↗		↘	

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).
On désigne par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1$.

1. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z} + 2$.

a. Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + \text{i}\sqrt{3}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.

c. Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

2. $\mathscr{C}'$ désigne le cercle de centre O$'$ d'affixe 2 et de rayon 1.

a. Construire le point A$'$ appartenant au cercle $\mathscr{C}'$ tel que :
$\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{O}'\text{A}'}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad [\text{modulo } 2\pi]$.

b. À tout point M du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe z, on associe le point M' du cercle $\mathscr{C}'$ d'affixe z' tel que : $\left(\overrightarrow{\text{O}M},\ \overrightarrow{\text{O}'M'}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad [\text{modulo } 2\pi]$.

Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z' - 2}{z}$.

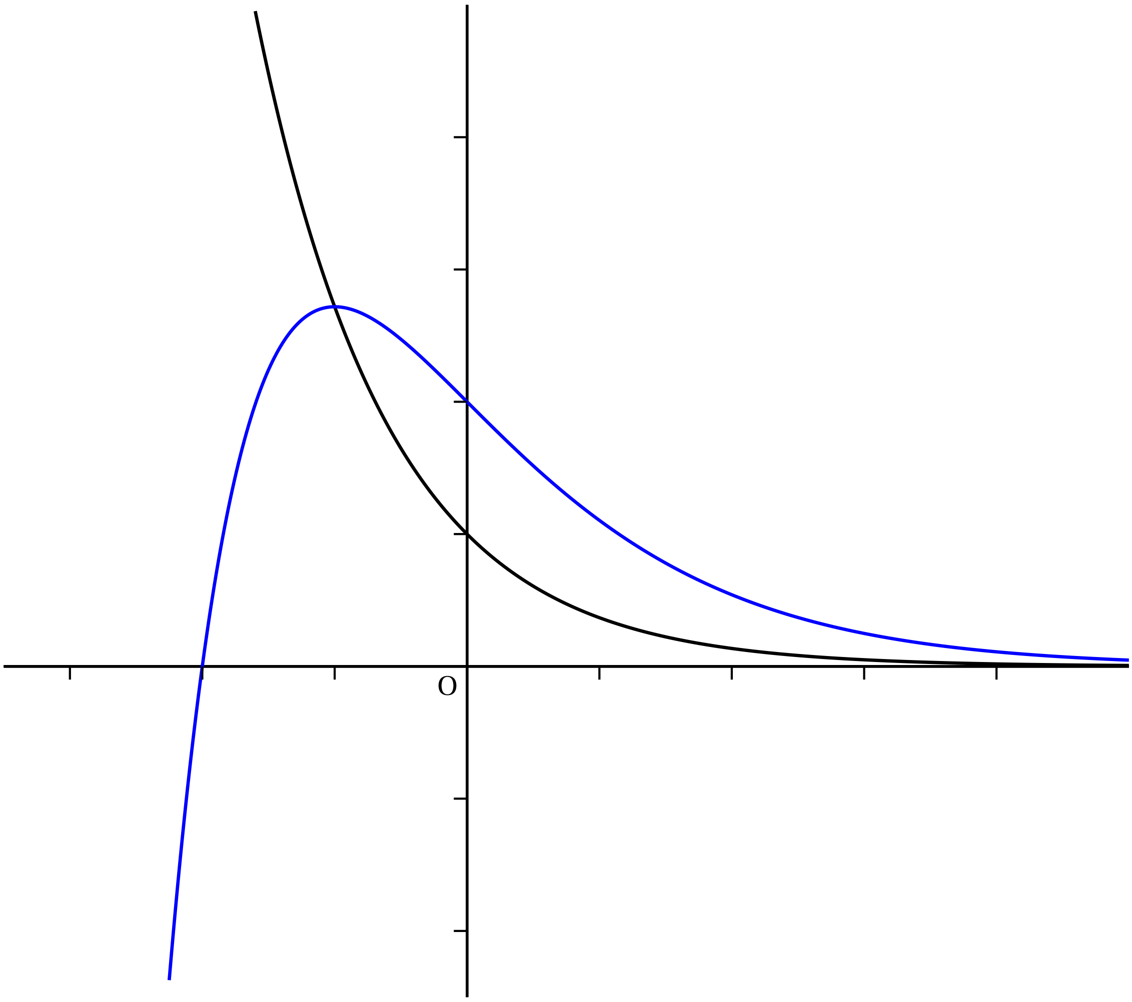
En déduire que $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.

c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.

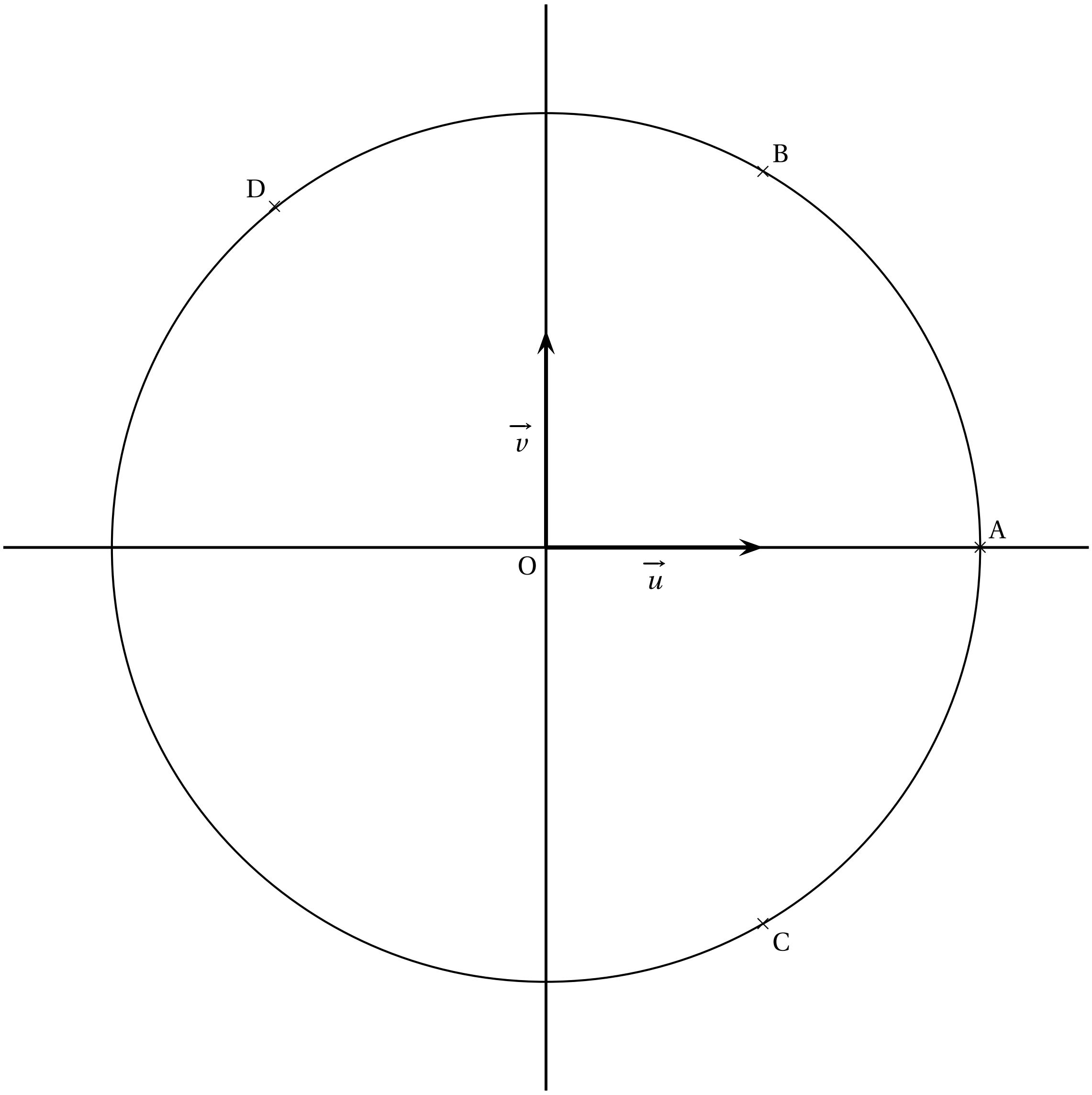
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$.
Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(**à rendre avec la copie**)



ANNEXE 2 (Exercice 4)
(**à rendre avec la copie**)



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie 10 juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + b\mathrm{i}$ où a et b sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
   a. Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.
   b. Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}\,;\; z_{\mathrm{B}} = -1 + \mathrm{i}\,;\; z_{\mathrm{C}} = -1 - \mathrm{i} \text{ et } z_{\mathrm{D}} = 1 - \mathrm{i}.$$

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.
On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.
2. **a.** Démontrer que l'affixe du point E, notée z_{E}, est égale à $-1 + \sqrt{3}$.
   b. Déterminer l'affixe z_{F} du point F.
   c. Démontrer que le quotient $\dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{F}}}$ est un nombre réel.
   d. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.
Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

— à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
— les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
— les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
— on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.
2. On note E l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».
   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.
3. On note F l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».
   Déterminer la probabilité de F.

Partie B - Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.
Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'évènement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

— les points A(1 ; 1 ; 1) et B(3 ; 2 ; 0) ;
— le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
— le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
— la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$
2. Déterminer une équation de la sphère (S).
3. **a.** Calculer la distance du point A au plan (Q).
   En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).
   b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées (0 ; 2; −1).
   a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
   b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
   $\left\{\begin{array}{l c r}x &=& t\\ y &=& 12-5t\\ z &=& 4-3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D).
   d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
   L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
   « Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».
   Justifier votre réponse.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \quad \text{(F)}.$$

1. On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
   a. Montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   c. En déduire que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod 5$.
   d. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\ ;\ +\infty[$ une unique solution notée α.

b. Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x)+1$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

a. En utilisant la courbe (Γ), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\text{e}^{1-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\text{d}t = \int_1^x (t-1)\text{e}^{1-t}\,\text{d}t$$

a. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$, $F(x) = -x\text{e}^{1-x} + 1$.

c. Démontrer que sur $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

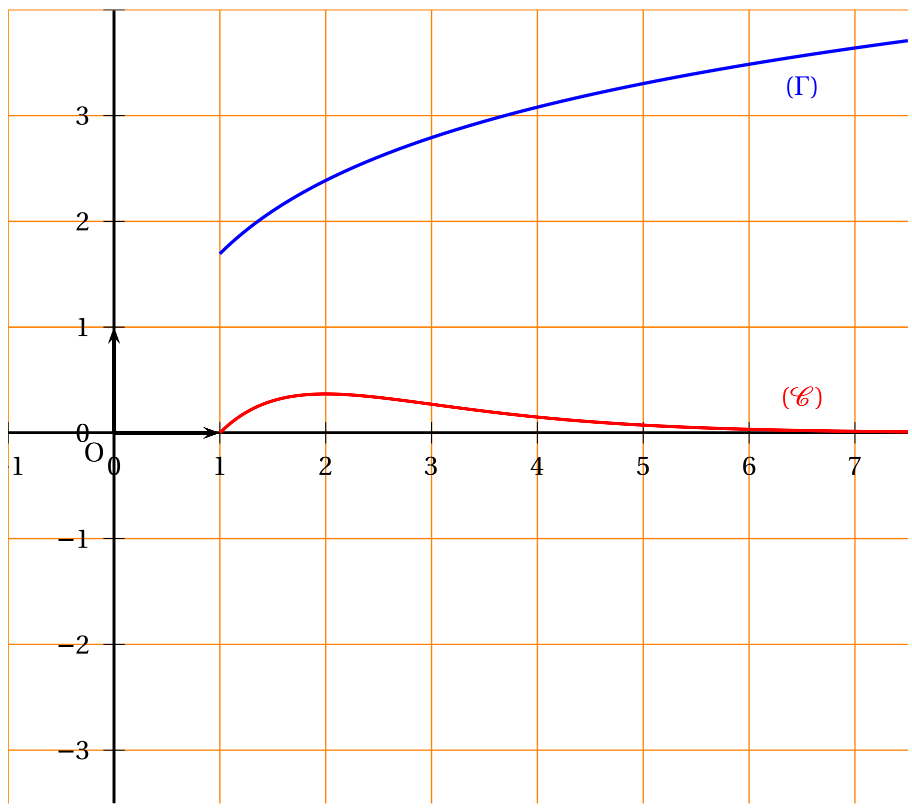
2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie $\mathscr{D}_a$ du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de $\mathscr{D}_a$, soit égale à $\dfrac{1}{2}$ et hachurer $\mathscr{D}_a$ sur le graphique.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 4



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2010

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n.$$

Proposition 2 : Si les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Proposition 3 : Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2+4\text{i}$, $b = -4+2\text{i}$, $s = -5+5\text{i}$ et $\omega = -2+2\text{i}$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. **a.** Déterminer l'écriture complexe de h.
   b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4+2\text{i}$ et que le point D a pour affixe $d = -2-4\text{i}$.
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Démontrer que la droite (SΩ) est la médiatrice du segment [AB].
4. Soit P le milieu du segment [AC].
   a. Déterminer l'affixe p du point P.

b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}\text{i}$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{BD}}\ ;\ \overrightarrow{\text{P}\Omega}\right)$.

5. Soit Q le milieu du segment [BD].
Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement N.
b. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{3}{10}$.On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3. Soit n un entier naturel non nul.
On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à 0,999.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \text{e}^x - x\text{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.

4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0~;~+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Démontrer que $\text{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\text{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0~;~+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\text{e}^x + 1}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
La figure est donnée en annexe.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x~;~f(x))$,

P le point de coordonnées $(x~;~0)$,

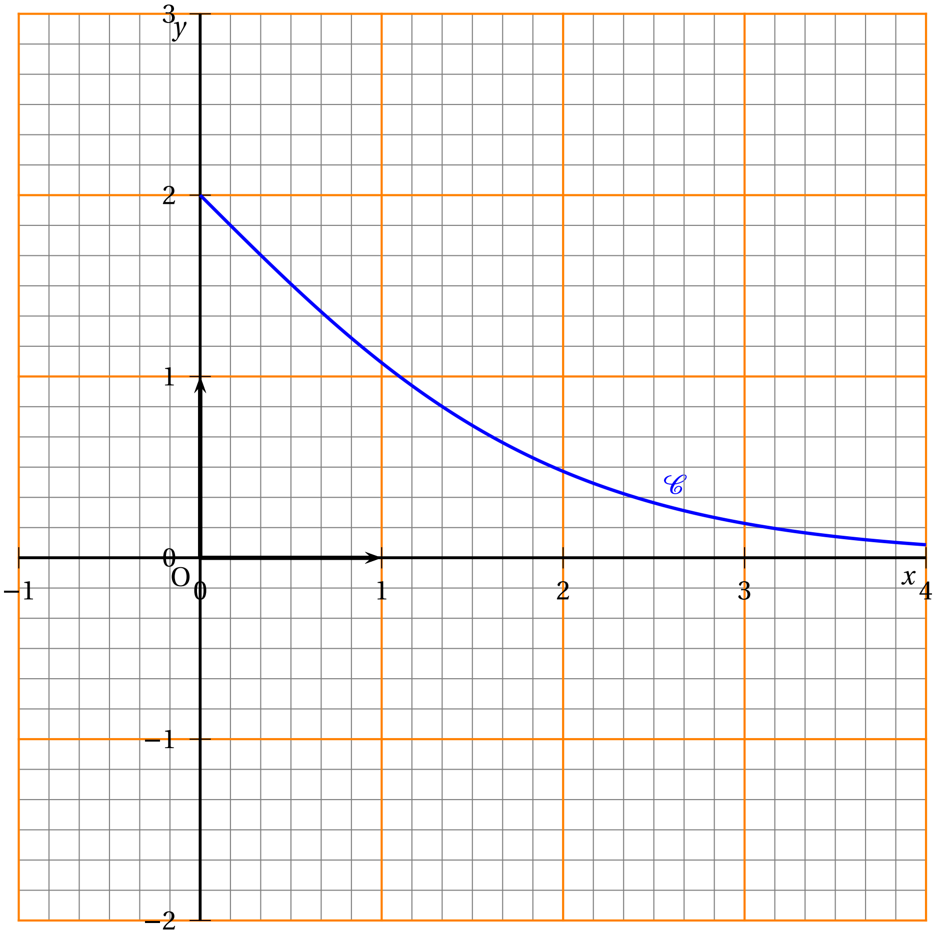
Q le point de coordonnées $(0~;~f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S La Réunion septembre 2010 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives :

$$x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+3y+z-4=0.$$

1. Montrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -4-2t \\ y &=& 4+t \\ z &=& t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

2. Soit λ un nombre réel.

On considère le plan $\mathcal{P}_\lambda$ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\,(1+\lambda\,;\ 1+2\lambda\,;\ 1)$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_\lambda$.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$, intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{-1}$.

Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère le point A$(1\,;\,1\,;\,1)$.

Déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :
Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

- Si le jeton tiré est bleu. Luc gagne et le jeu s'arrête; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.
- Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.
- Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :
- $\dfrac{19}{15}$ • $\dfrac{2}{5}$ • $\dfrac{11}{15}$ • $\dfrac{4}{15}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :
- $\dfrac{1}{5}$ • $\dfrac{1}{2}$ • $\dfrac{2}{15}$ • $\dfrac{1}{9}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :
- $\dfrac{3}{5}$ • $\dfrac{4}{15}$ • $\dfrac{7}{15}$ • $\dfrac{1}{3}$

4. La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :
- $\dfrac{7}{10}$ • $\dfrac{7}{15}$ • $\dfrac{11}{15}$ • $\dfrac{5}{9}$

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

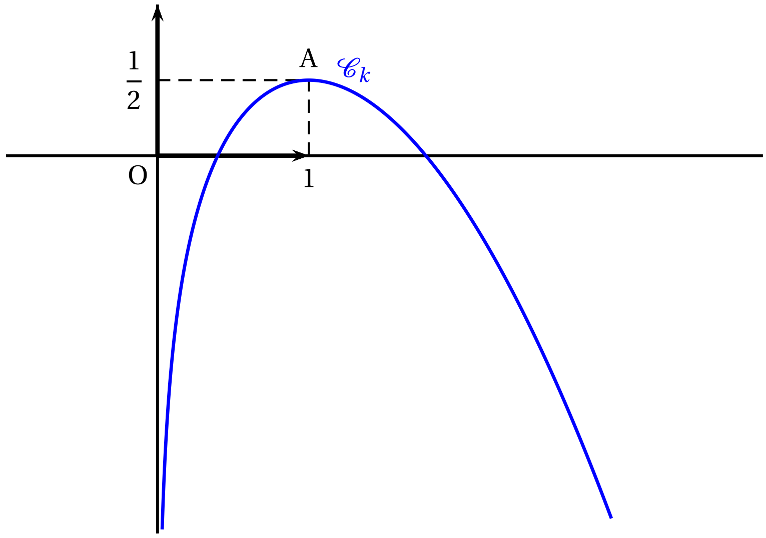
3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.

4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f_k(x)$	‖	↗	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	↘	

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_k$ représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $\text{A}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_k$.
Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,\text{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; unité graphique : 8 centimètres.
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1 + \text{i})z.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.

b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 4 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})z.$$

1. Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

- **a.** Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.
- **b.** Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
- **c.** Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole 16 septembre 2010 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
   a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A$'$, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.
   b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \text{e}$.

1. Justifier que $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$, en distinguant le cas $a < \text{e}$ et le cas $a > \text{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathscr{A}(a)$ en fonction de a.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe 2 (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(\mathscr{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -t+1 \\ y &=& 2t \\ z &=& -t+2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1. **a.** Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(\mathscr{P})$? Justifier.

   b. Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.

2. Soit $(\mathscr{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$.

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$.

   b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathscr{Q})$ et de la droite $(\mathscr{D})$.

   c. Montrer que $\text{CI} = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(-t+1~;~2t~;~-t+2)$.

   a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $\text{C}M_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

   b. Montrer que CI est la valeur minimale de $\text{C}M_t$ lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_{\text{A}} = \sqrt{3} + 2\text{i}$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + i\left(\sqrt{3} + 1\right)$.

Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives

$$z_A = -2, \quad z_B = -2 + i, \quad z_C = i, \quad z_D = 1, z_E = 1 + 3i, \quad z_F = \frac{5}{2} + 3i, \quad z_G = \frac{5}{2}.$$

Voir la figure donnée en annexe 3.

1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

a. Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\dfrac{3}{2}iz + 1$.

b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

c. Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude s ?

2. On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe $z' = -\dfrac{2}{3}\,i\,\overline{z} + \dfrac{5}{3}i$.

a. Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude s'.

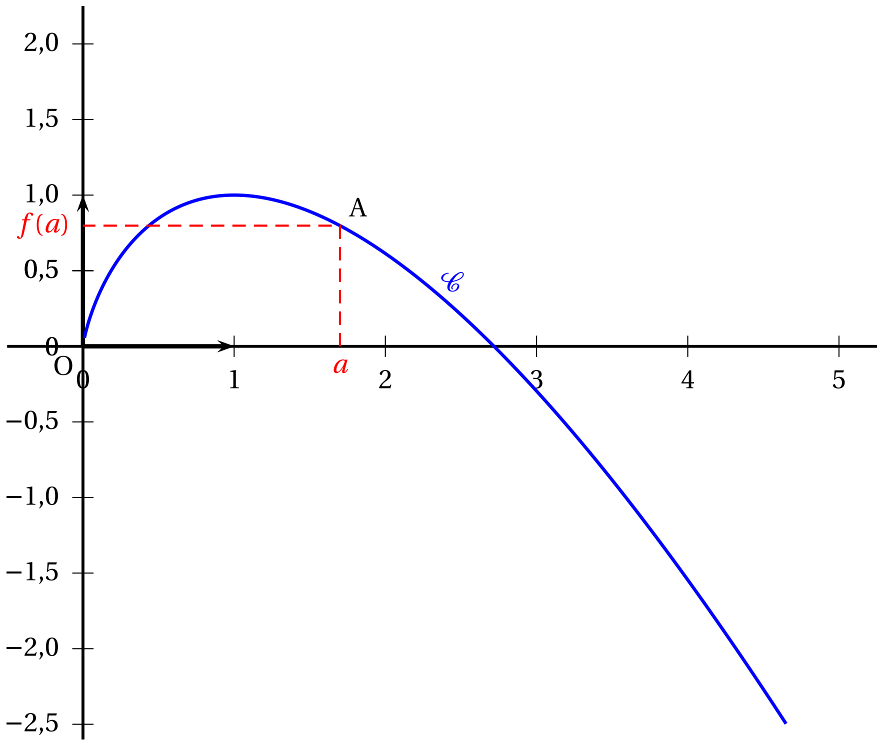
b. On considère la similitude $g = s' \circ s$.

Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g.

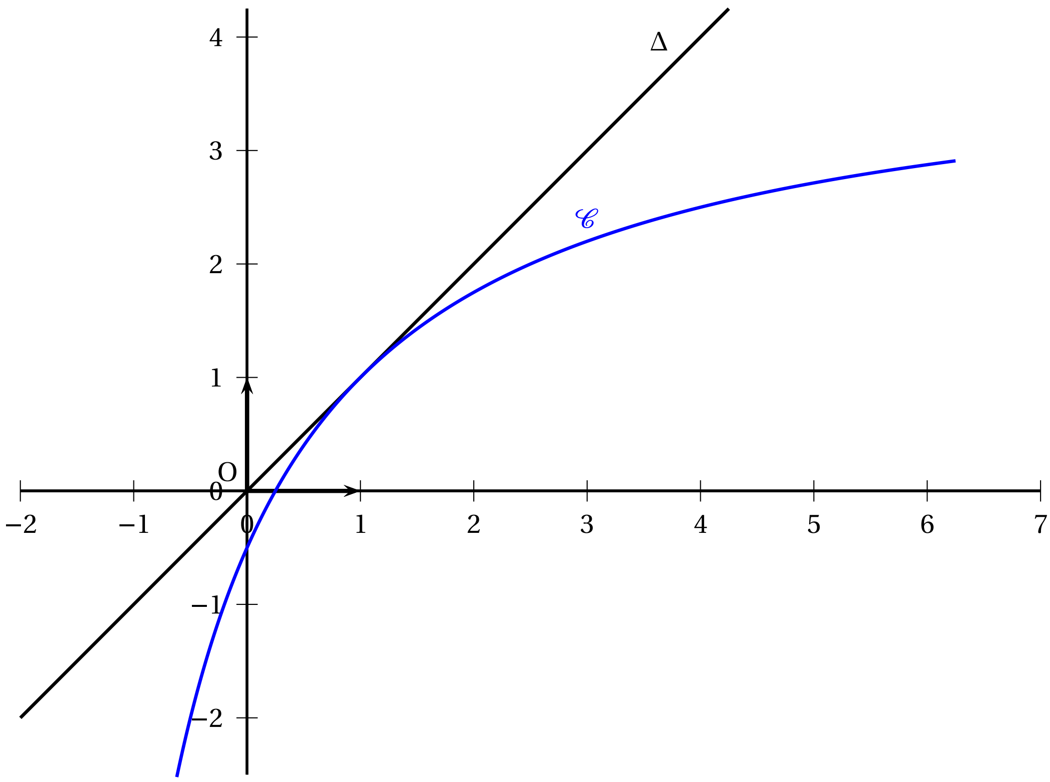
c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

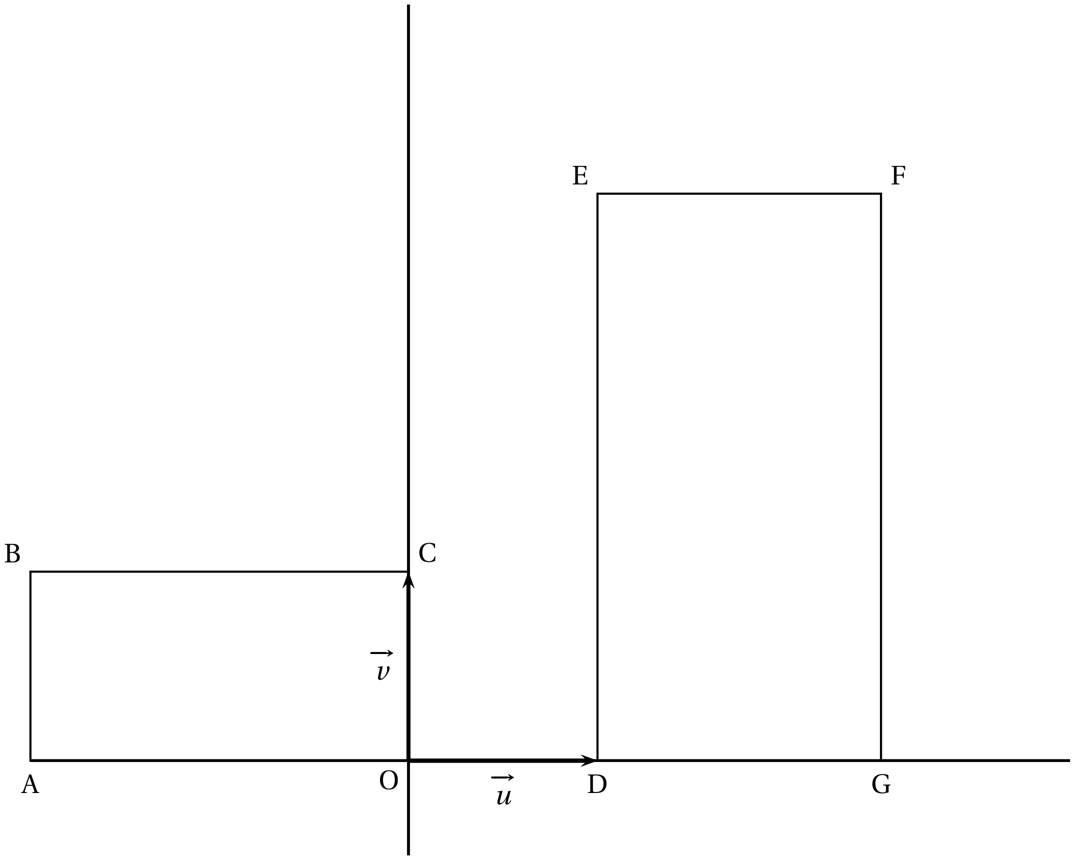
ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 2 (Exercice 2)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 3 (Exercice 4)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾
septembre 2010

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n.$$

Proposition 2 : Si les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Proposition 3 : Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2+4\text{i}$, $b = -4+2\text{i}$, $s = -5+5\text{i}$ et $\omega = -2+2\text{i}$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. **a.** Déterminer l'écriture complexe de h.

   b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4+2\text{i}$ et que le point D a pour affixe $d = -2-4\text{i}$.

2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Démontrer que la droite (SΩ) est la médiatrice du segment [AB].

4. Soit P le milieu du segment [AC].

   a. Déterminer l'affixe p du point P.

b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}\text{i}$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{BD}}\ ;\ \overrightarrow{\text{P}\Omega}\right)$.

5. Soit Q le milieu du segment [BD].
Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement N.

b. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{3}{10}$.On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3. Soit n un entier naturel non nul.
On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à 0,999.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \text{e}^x - x\text{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g.

3. Donner le tableau de variations de g.

4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0~;~+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Démontrer que $\text{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\text{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0~;~+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\text{e}^x + 1}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
La figure est donnée en annexe.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x~;~f(x))$,

P le point de coordonnées $(x~;~0)$,

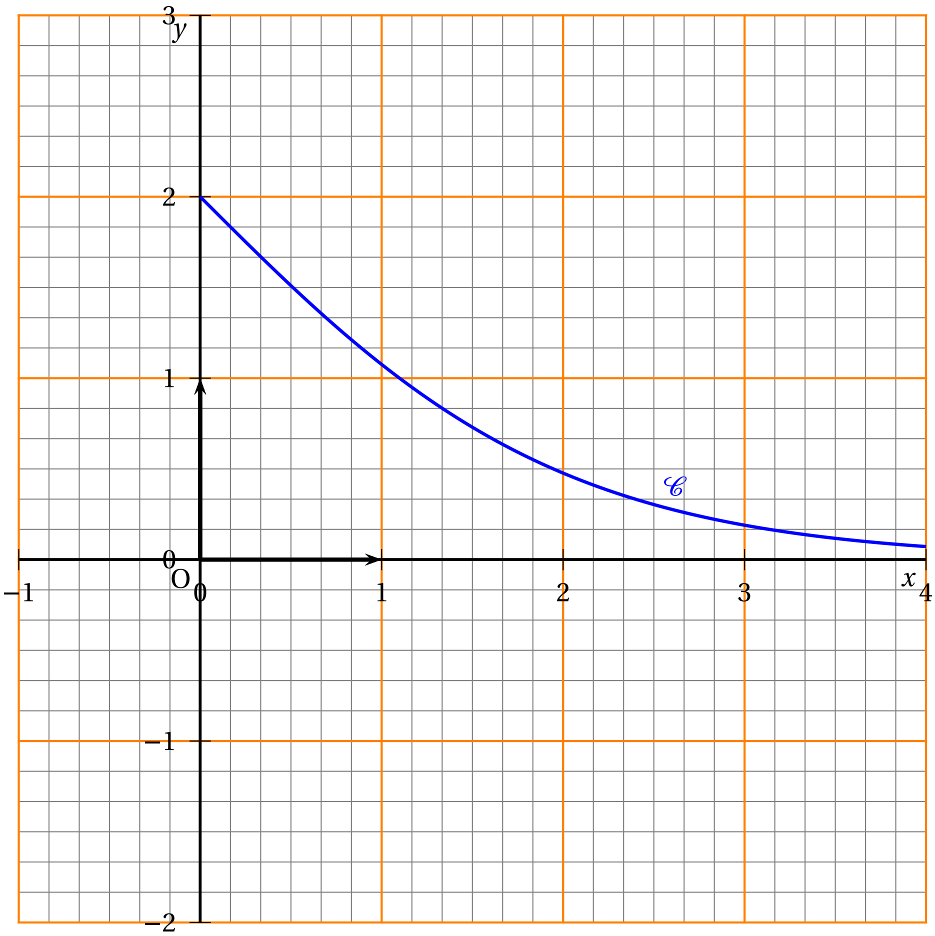
Q le point de coordonnées $(0~;~f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud ∾
Novembre 2010

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On admet que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Si Δ coupe $\mathscr{D}$ en le point I et $\mathscr{D}'$ en le point J, la distance IJ est appelée distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite des abscisses et $\mathscr{D}'$, la droite de représentation paramétrique

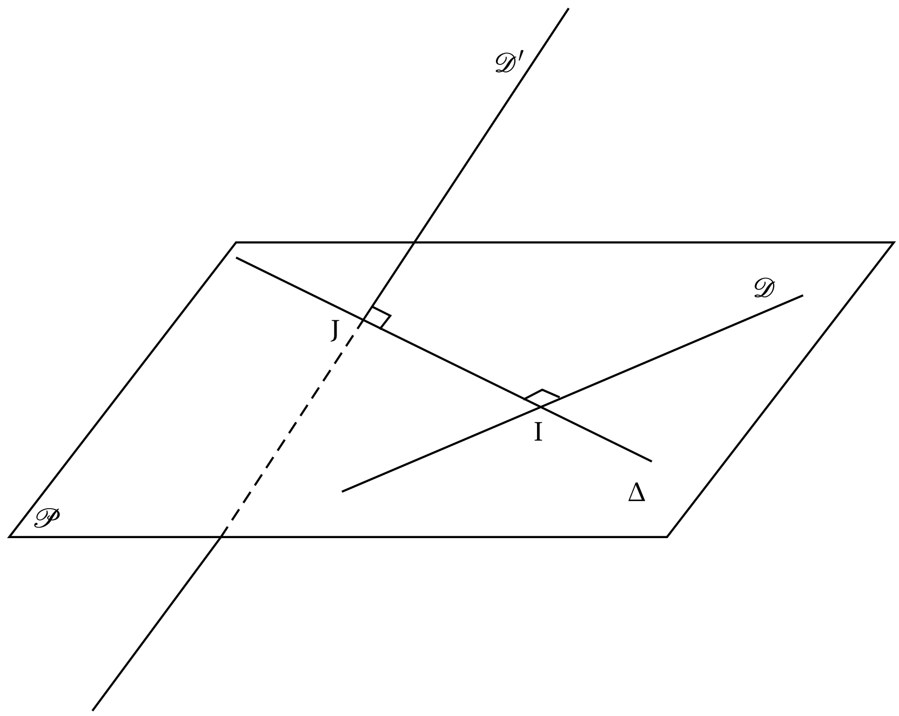
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -t\\ y &=& 3+3t\\ z &=& 1-t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.
3. **a.** Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

   c. Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur $\vec{w}$ est sécante à $\mathscr{D}$ en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

   d. En déduire la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.


$\mathscr{D}'$
$\mathscr{D}$
J
I
Δ
$\mathscr{P}$

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a = 5+5\text{i}$, $b = 5-5\text{i}$ et $p = 10$.
On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.
On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_{A} de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation R_{B} de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u = \text{i}(10-z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\overline{z}-5z-5\overline{z} = 0$.
   Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.
3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.
   a. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.
   b. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.
   Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4+1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats
   a. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
   b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
   c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
   d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
   $$n^8 \equiv 1 \quad \text{mod } d.$$
2. Recherche de critères
   Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \quad \text{mod } d$.

a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

b. En déduire que s est un diviseur de 8.

c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d-1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.
Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s=1$, $s=2$ puis $s=4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.
Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \quad \text{et} \quad P(C) = P(I).$$

1. Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.

2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$$P_F(S) = 0{,}2 \quad ; \quad P_A(S) = 0{,}5 \quad ; \quad P_C(S) = 0{,}1 \quad ; \quad P_I(S) = 0{,}4$$

a. Déterminer $P(S \cap A)$.

b. Montrer que $p(S) = \dfrac{17}{60}$.

c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :
$d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3} \left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$. Calculer d^2 puis $1\,000d^2$.

b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi {1 ; 2 ; 3} avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1\,000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$.

2. On pose, pour tout entier naturel $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.

a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

b. En déduire que : $\dfrac{1}{5} S_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}\left(S_5 - 1\right)$.

c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire l'encadrement : $1{,}091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1{,}164$.

3. a. Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.

b. Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + I$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

d. En déduire un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾
15 novembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a~;~b]$ avec $a < b$

- ⋆ si pour tout $x \in [a~;~b]$ $\quad u(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b [u(x) + v(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b \alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a~;~b]$ avec $a < b$ et si pour tout x de $[a~;~b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
   b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

   $$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.

   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1 + x^2\right)^2}$.
   b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
   c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1~;~+\infty[$ on a :

   $$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

d. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_{\mathrm{C}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

1. a. Écrire z_{A}, z_{B} et z_{C} sous forme exponentielle.

b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2. a. Écrire le quotient $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

a. Montrer que le point O$'$, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

b. Démontrer que les points C et O$'$ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4. a. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right|.$$

b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe

$$z' = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Soient les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$.

On note A′ et B′ les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. **a.** Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
   b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
   c. En déduire la nature du triangle OA′B′.
   d. Montrer que l'affixe $z_{A'}$ de A′ vérifie l'égalité : $z_{A'} = 2z_A$.
   En déduire la construction de A′ et B′.
2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(O\ ;\ \overrightarrow{u}\right)$. On pose $g = r \circ s$.
   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.
   b. Montrer que les points O et A sont invariants par g.
   c. En déduire la nature de la transformation g.
3. **a.** Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
   b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C′ de C par la transformation f.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   a. Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne; si elle est verte, on ne la remet pas.
   a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :

   B : « seule la première boule tirée est verte »,
   C : « une seule des deux boules tirées est verte ».

   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée?

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

$\mathscr{P}$ est le plan passant par A(3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;\,-4\,;\,1)$;

$\mathscr{D}$ est la droite passant par B(1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;\,1\,;\,3)$.

$\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1\,;\,9\,;\,0)$ passant par A.

1. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

  a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-4y+z-1=0$.

  b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

2. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

  a. Calculer la distance d du point Ω au plan $\mathscr{P}$.

  b. Calculer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

3. Intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

  a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

  b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

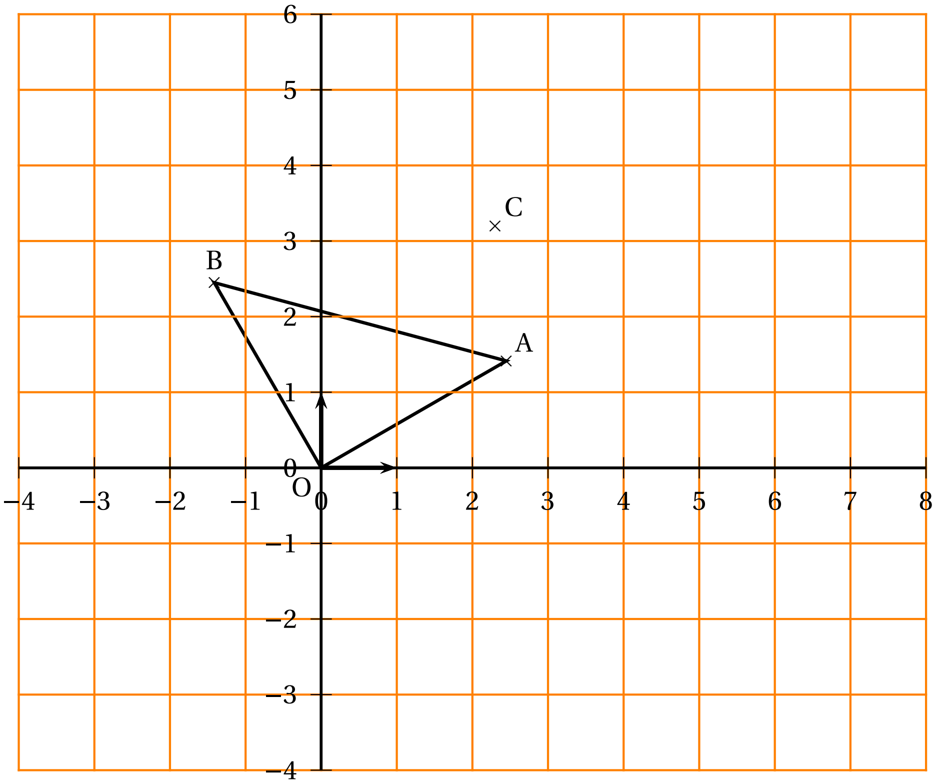
  c. En déduire que la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

ANNEXE

EXERCICE 2

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ mars 2011

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\text{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \text{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.

2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\text{d}t$.

Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.
3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?
4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.
   L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.
   Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$.
   En déduire que si $x \in [0~;~1]$ alors $f(x) \in [0~;~1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0~;~1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-2 ; 0 ; 1)$, B$(1 ; 2 ; -1)$ et C$(-2 ; 2 ; 2)$.

1. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$ puis les longueurs AB et AC.
   b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.
   c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
3. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
   Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2 \\ y &=& -1+3t \\ z &=& t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(1 ; -3 ; 1)$ et de rayon $r = 3$.
   a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

   Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   b. Étudier l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
   c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.