

Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$ et $C(-2; -5; 1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x + y - 2z + 5 = 0$$

4. On considère le point $S(1; -2; 4)$.
Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ) , passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
Montrer que les coordonnées de H sont $(0; -1; 2)$.
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathcal{D}$.