

Géométrie dans l'espace

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 19 avril 2021

(<https://coursapasquet.fr>)

(<https://mathweb.fr>)

Représentation paramétrique d'une droite

(d) est une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Sa représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Position relative de deux droites

Soient $(d_1) : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 5 + 2t' \\ y = -5 + 3t' \\ z = 4t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$ deux droites.

Pour connaître leur position relative :

- On commence par vérifier si elles sont parallèles ou orthogonales à l'aide de leur vecteur directeur.

$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de (d_1) , $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est celui de (d_2) .

→ Ils ne sont pas colinéaires car $\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{3}$.

→ Ils sont orthogonaux car $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -1 \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 4 = -2 + 6 - 4 = 0$.

- On regarde ensuite si elles sont sécantes.

On résout le système : $\begin{cases} 3 - t = 5 + 2t' \\ -1 + 2t = -5 + 3t' \\ 2 - t = 4t' \end{cases}$ en résolvant un système formé de deux de ces équations, par exemple :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 - t = 5 + 2t' \\ 2 - t = 4t' \end{cases} &\iff \begin{cases} 2t' + t = -2 & (E_1) \\ 4t' + t = 2 & (E_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2t' + t = -2 & (E_1) \\ 2t' = 4 & (E_2) \leftarrow (E_2) - (E_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t' = 2 & (E_2) \\ 4 + t = -2 & (E_1) \end{cases} \\ &\iff t = -6, \quad t' = 2 \end{aligned}$$

S'il n'y a pas de solutions, les deux droites ne sont pas sécantes.

S'il y a des solutions, comme ici, on vérifie si la troisième équation est vérifiée :

$$-1 + 2t = -5 + 3t' \iff -1 + 2 \times (-6) = -5 + 3 \times 2 \iff -13 = 1$$

La troisième équation n'est pas vérifiée donc les droites ne sont pas sécantes.

Si la troisième équation avait été vérifiée, les droites auraient été sécantes.

Donc ici, (d_1) et (d_2) sont orthogonales, sans être perpendiculaires.

Équation cartésienne d'un plan

$$(\mathcal{P}) : ax + by + cz = 0 \iff \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan.}$$

Position relative de deux plans

Soient deux plans d'équations cartésiennes respectives : $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : ax + by + cz = 0 \\ (\mathcal{P}_2) : a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$.

$\rightarrow (\mathcal{P}_1) // (\mathcal{P}_2) \iff \vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.

$\rightarrow (\mathcal{P}_1) \perp (\mathcal{P}_2) \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Pour savoir si deux plans sont sécants : on « résout » le système formé par les deux équations cartésiennes en conservant une inconnue et en la considérant comme un paramètre (dans l'exemple suivant, z est conservé) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y - z = -5 & (E_1) \\ x + y = -1 & (E_2) \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + 3y = z - 5 & (L_1) \\ 2x + 2y = -2 & (L_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = z - 3 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2) \\ x = -1 - (z - 3) & (L_2) \leftarrow (E_2) \text{ en remplaçant } y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = z - 3 \\ x = -z + 2 \end{cases} \quad (z \text{ est considéré comme un paramètre } t) \\ &\iff \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'intersection des deux plans existe : c'est la droite passant par le point $A(2; -3; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 1; 1)$.

Intersection d'un plan et d'une droite

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(0; 1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 0; 3)$.

- **On vérifie d'abord que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un point.**

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}(5; 1; -1)$; donc, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 5 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 3 = 2 \neq 0$ donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$: il y a donc un point unique d'intersection.
Appelons-le I.

- **Déterminons les coordonnées de I.**

La représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Étant donné que I appartient à $\mathcal{D}$, il existe un réel k tel que $I(k; 1; 3k + 3)$.

En substituant les valeurs de x , y et z en fonction de k dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned} 5k + 1 - (3 + 3k) + 3 &= 0 \\ \iff 2k + 1 &= 0 \\ \iff k &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement, on a : $I\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$.

Distance

Entre deux points

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

D'un point à un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point quelconque de l'espace. La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$