

Limites de fonctions

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 6 mai 2021

(<https://coursapasquet.fr>)

(<https://mathweb.fr>)

Limites usuelles

Fractions

$$n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$$

$$n \in \mathbb{N}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty$$

$$n \in \mathbb{N}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Exponentielle & logarithme népérien

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^x = 0$$

$$n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

Formes indéterminées

$\infty - \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$ (quand x tend vers un infini)

On factorise par le terme « le plus fort » (de plus haut degré dans le cas des polynômes).

Exemple 1. $f(x) = x^2 e^x - x e^{2x} = x e^{2x} (x e^{-x} - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \text{(par produit)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemple 2. $f(x) = \frac{x e^x + 1}{e^{2x} + 3} = \frac{x e^x (1 + \frac{1}{x e^x})}{e^{2x} (1 + 3 e^{-2x})} = \frac{x (1 + \frac{1}{x e^x})}{e^x (1 + 3 e^{-2x})}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 e^{-2x} = 0 \end{array} \right\} \text{(par produit)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

$0 \times \infty$

On se ramène au cas « $\frac{\infty}{\infty}$ » car « $0 \times \infty = \frac{1}{\infty} \times \infty = \frac{\infty}{\infty}$ ».

$\frac{0}{0}$ (quand x tend vers un nombre fini)

On peut se ramener à un taux d'accroissement ou, si c'est possible, multiplier par l'expression conjuguée (quand il y a au moins une racine carrée).

Exemple 3. Limite quand $x \rightarrow 0$ de $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4} + 2}$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{0+4} + 2} = 0$.

Exemple 4. Limite quand $x \rightarrow 0$ de $f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \times \frac{x - 0}{\sin x - \sin 0}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = u'(0) = 1$ avec $u(x) = e^x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = v'(0) = 1$ avec $v(x) = \sin x$ et $v'(x) = \cos x$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{\sin x - \sin 0} = \frac{1}{1} = 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{\sin x - \sin 0} = 1 \times 1 = 1$.

Théorème de composition

$f(x) = u[v(x)]$. Si $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = b$ et si $\lim_{X \rightarrow b} u(X) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemple 5. $f(x) = e^{\frac{x+3}{x-5}}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{x+3}{x-5}}_X = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} e^X = e^1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(par composition)} \\ \implies \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^1.$$

Théorème de comparaison

$$f(x) \leq u(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$v(x) \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} v(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Exemple 6. $f(x) \geq e^x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème des gendarmes (théorème d'encadrement)

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = \ell \text{ donc } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

Exemple 7. $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Asymptotes

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ alors la droite d'équation $y = a$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f .

Si $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = b$ est asymptote (verticale) à la courbe représentative de f .