

Suites

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 6 mai 2021

(<https://coursapasquet.fr>)

(<https://mathweb.fr>)

Principe de récurrence

Une propriété $\mathcal{P}_n$ dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ si et seulement si :

- $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie (initialisation)
- pour un entier $k \geq n_0$ fixé, si on suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie alors $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi (hérédité).

Exemple de rédaction. On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

Pour tout entier naturel n , $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

Démontrons-la par récurrence :

- **Initialisation** : pour $n = 0$, la propriété donne :

$$1 = (0 + 1)^2$$

ce qui est vrai.

- **Hérédité** : supposons que pour un entier naturel k fixé, $\mathcal{P}_k$ soit vraie. On a alors :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Ainsi, en ajoutant $(2k + 3)$ à chaque membre, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + (2k + 1) + (2k + 3) &= (k + 1)^2 + (2k + 3) \\ &= k^2 + 2k + 1 + (2k + 3) \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k + 2)^2. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est exactement $\mathcal{P}_{k+1}$ donc l'hérédité est vérifiée.

Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie et, pour un entier k fixé, $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Limites d'une suite

Convergence et divergence

On dit qu'une suite (u_n) **converge** si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est un nombre fini.

On dit qu'une suite (u_n) **diverge** si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ n'existe pas.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, la suite n'est considérée ni comme convergente, ni comme divergente au lycée.

Limites de référence

$$k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$$

$$k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Théorème de comparaison

- Si, pour tout $n \geq n_0$, $\begin{cases} v_n \geq u_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si, pour tout $n \geq n_0$, $\begin{cases} v_n \leq u_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement (théorème des gendarmes)

Si, pour tout $n \geq n_0$, $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ (ℓ étant un nombre fini).

Limite de q^n

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q < -1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas.

Suite majorée, suite minorée, suite bornée

- Une suite (u_n) est *majorée* par M si tous ses termes sont inférieurs à M : $u_n \leq M$ pour tout entier n .
- Une suite (u_n) est *minorée* par m si tous ses termes sont supérieurs à m : $u_n \geq m$ pour tout entier n .
- Une suite (u_n) est *bornée* par m et M si tous ses termes sont compris entre m et M : $m \leq u_n \leq M$ pour tout entier n .

Théorème de convergence des suites monotones

- Toute suite strictement décroissante et minorée converge.
- Toute suite strictement croissante et majorée converge.

Opérations sur les limites

- On peut ajouter deux limites sauf si l'une est « $+\infty$ » et l'autre « $-\infty$ ».
- On peut multiplier deux limites sauf si l'une est « 0 » et l'autre « ∞ » (peu importe le signe).
- On peut diviser deux limites sauf si elles sont toutes les deux infinies ou si elles sont toutes les deux nulles.

Ces cas impossibles sont appelés « formes indéterminées » :

$$\ll +\infty - \infty \gg$$

$$\ll 0 \times \infty \gg$$

$$\ll \frac{\infty}{\infty} \gg$$

$$\ll \frac{0}{0} \gg$$