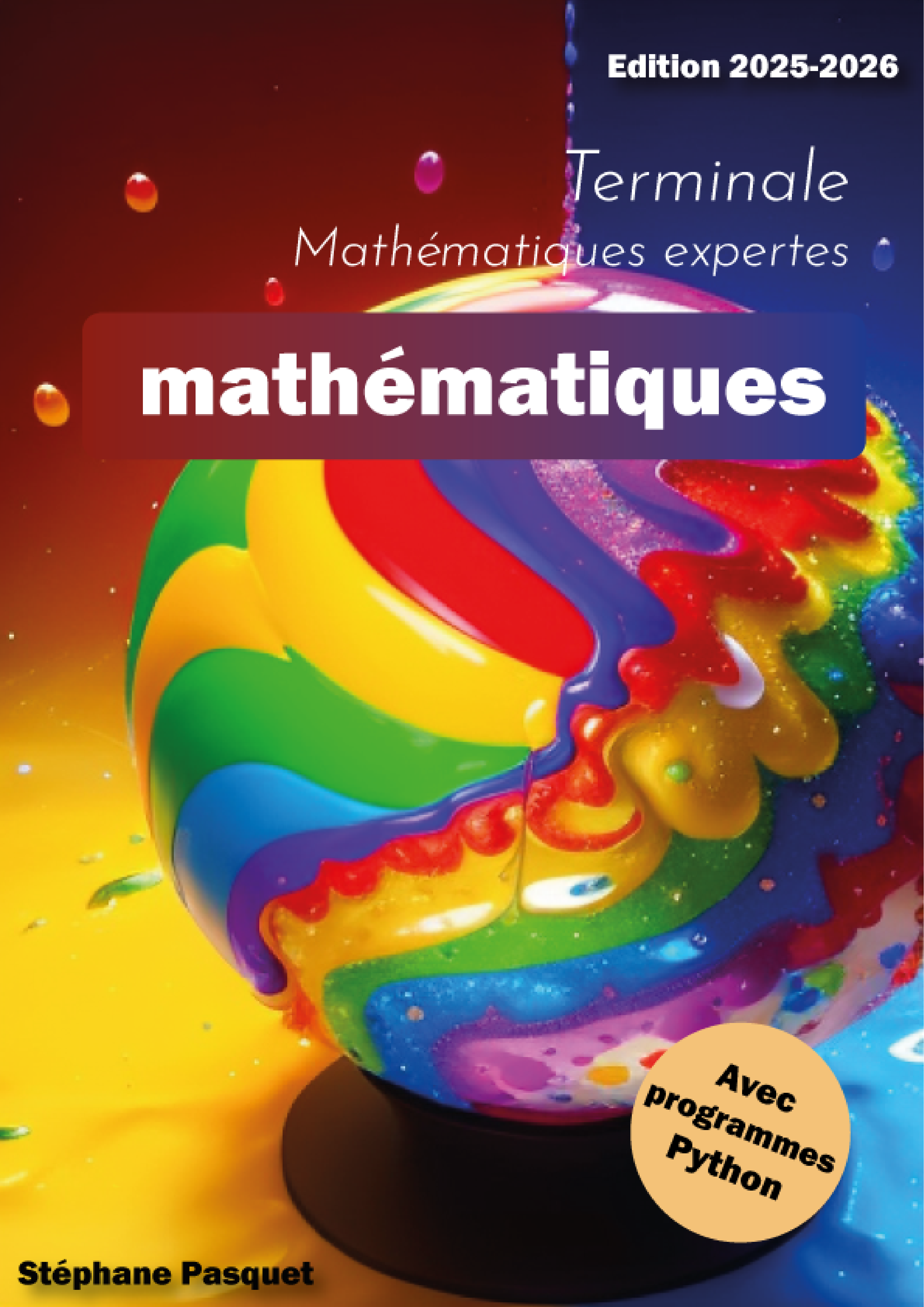
Edition 2025-2026

Terminale

Mathématiques expertes

mathématiques



Avec programmes Python

Stéphane Pasquet

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS

Ce livre est un recueil de cours et d'exercices corrigés basé sur le programme mis en place à la rentrée 2020 en Terminale, option Mathématiques Expertes.
Le programme est structuré autour de quatre grands thèmes mathématiques :

- les nombres complexes ;
- l'arithmétique ;
- les matrices ;
- les graphes.

J'ai donc pris la décision de ne faire que quatre chapitres, mais dans les deux premiers sont réunies toutes les notions essentielles.

Les exercices sont classés par niveau de difficultés.

★ exercices d'application des notions du cours, exercices d'un niveau facile ;

★★ exercice d'un niveau intermédiaire, où il faut mobiliser les notions du cours et réfléchir un peu ;

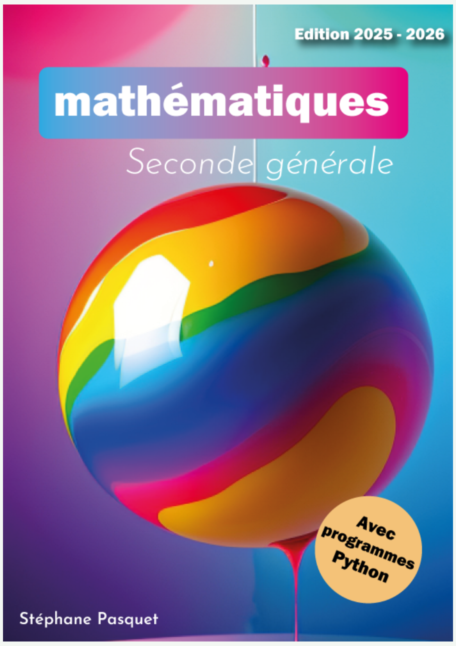
★★★ exercices de réflexion, niveau élevé.

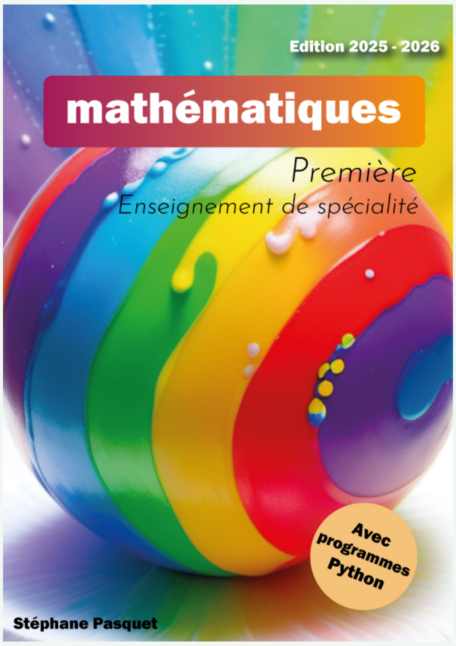
De plus, pour chaque exercice, vous aurez la possibilité de signaler une erreur, ou de laisser un commentaire en cliquant sur l'icône ⚠.

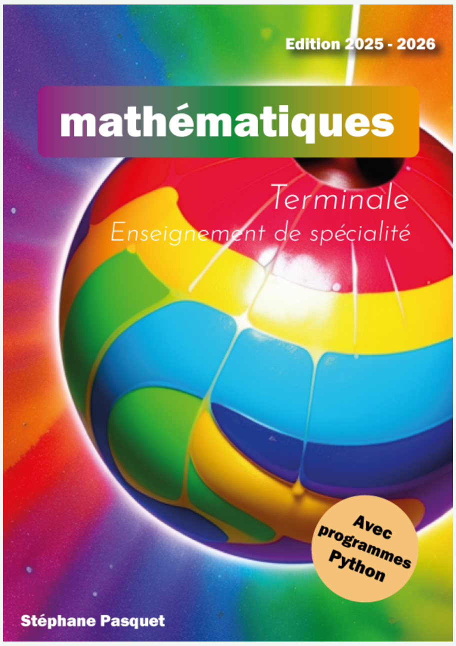
Stéphane Pasquet.

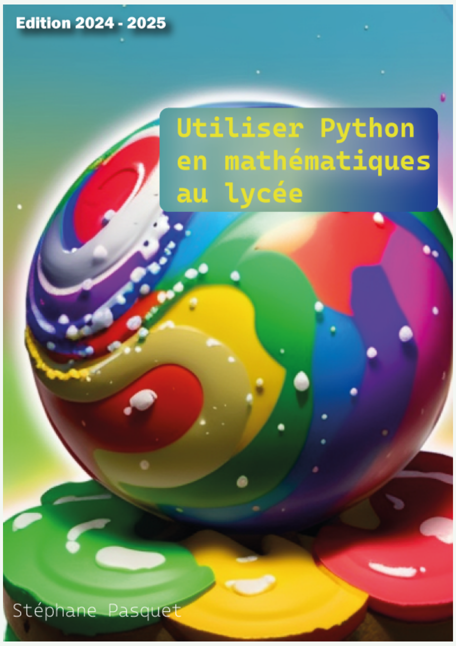
Dernière date d'édition : 14 décembre 2025.

AUTRES OUVRAGES









Aussi disponibles sur https://mathweb.fr

SITES INTERNET

https://courspasquet.fr

Cours particuliers de mathématiques en ligne

https://mathweb.fr

Ressources mathématiques et Python

https://rezoprof.mathweb.fr

Mise en relation entre professeurs et élèves , toutes disciplines – 100 % GRATUIT !

1

Nombres complexes

Plan du chapitre

I - Introduction historique

On souhaite résoudre l'équation :

$$x^3 = 15x + 4.$$

Nous sommes au XVIe siècle (en 1545 plus exactement) et nous sommes Jérôme Cardan, mathématicien italien.
Nous avons travaillé dur pour établir une formule qui pourrait donner une solution à toute équation de la forme $x^3 = px + q$. Il s'agit de la formule suivante :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Si l'on considère l'équation que l'on souhaite résoudre, on prend $p = 15$ et $q = 4$, puis on applique cette formule :

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}. \qquad (1)$$

Diantre ! Nous avons affaire à $\sqrt{-121}$... Cette formule serait-elle fausse ?
Qu'à cela ne tienne ! Nous sommes un grand mathématicien et nous sommes sûrs de notre formule ! Nous allons donc aller au-delà de nos connaissances et créer une nouvelle mathématique dans laquelle nous pourrons calculer une racine carrée d'un nombre négatif !

Pour cela, commençons par considérer que $\sqrt{-1}$ existe, et notons-le « i » de sorte que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Alors,

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121 \times \mathrm{i}^2} = \sqrt{(11\mathrm{i})^2} = 11\mathrm{i}.$$

Ainsi,

$$(1) \iff x = \sqrt[3]{2 + 11\mathrm{i}} - \sqrt[3]{-2 + 11\mathrm{i}}.$$

Par intuition (n'oublions pas que nous sommes un grand mathématicien), en considérant les mêmes règles de calculs que nous connaissons déjà, utilisons la distributivité pour développer :

$$\begin{aligned}
(2+\mathrm{i})^3 &= (2+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})^2 \\
&= (2+\mathrm{i})(2^2 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2) \\
&= (2+\mathrm{i})(4 + 4\mathrm{i} - 1) \\
&= (2+\mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i}) \\
&= 6 + 8\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 \\
&= 6 + 11\mathrm{i} - 4 \\
&= 2 + 11\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2 + \mathrm{i} = \sqrt[3]{2 + 11\mathrm{i}}.$$

On démontrerait de même que :

$$-2 + \mathrm{i} = \sqrt[3]{-2 + 11\mathrm{i}}.$$

Finalement,

$$(1) \iff x = 2 + \mathrm{i} - (-2 + \mathrm{i}) = 4.$$

Fichtre! Une solution bien réelle alors que nous sommes passés par une mathématique hypothétique en introduisant ce maudit nombre i? Vérifions tout de même si cette valeur est bien solution de l'équation initiale :

$$x^3 = 4^3 = 64 \qquad \text{et} \qquad 15x + 4 = 15 \times 4 + 4 = 60 + 4 = 64.$$

La valeur trouvée est donc bien une solution! La mathématique créée pour l'occasion est donc utile... Cela mérite développement!

II - Construction algébrique des nombres complexes

II . 1 - Base des nombres complexes

Nous avons inventé un nombre i telle que $i^2 = -1$. Ce nombre n'est bien entendu pas réel (ça se saurait...).
On va donc imaginer un ensemble de nombres obtenus par *combinaison linéaire* du nombre réel « 1 » et du nom *imaginaire* « i », c'est-à-dire des nombres de la forme $a \times 1 + b \times \mathrm{i}$, où a et b sont réels.

Définition 1

On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme :

$$z = a + \mathrm{i}b$$

où a et b sont deux nombres réels, et où $\mathrm{i}^2 = -1$.
On dira alors que :

- a est la *partie réelle* de z, notée $\Re\mathrm{e}(z)$;
- b est la *partie imaginaire* de z, noté $\Im\mathrm{m}(z)$.

Attention 1

La partie imaginaire ne contient pas le « i ».

Exemple 1

1. $z_1 = 3 + \mathrm{i}$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 3$ et la partie imaginaire est $b = 1$.
2. $z_2 = -\mathrm{i}$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 0$ et la partie imaginaire est $b = -1$.
3. $z_3 = 7$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 7$ et la partie imaginaire est $b = 0$.

Remarque 1

Tout nombre réel est aussi un nombre complexe.

Définition 2

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\} = \{a + \mathrm{i}b,\ (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$$

II . 2 - Opérations algébriques

Comme tout ensemble, il faut que $\mathbb{C}$ soit muni de certaines opérations algébriques. Munissons alors $\mathbb{C}$ est mêmes opérations algébriques que $\mathbb{R}$.

Considérons deux nombres complexes $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

On définit alors :

1. **la somme :** $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$;
2. **le produit :** $$\begin{aligned} z \times z' &= (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') \\ &= aa' + \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' + bb'\mathrm{i}^2 \\ &= (aa' - bb') + \mathrm{i}(ba' + ab'). \end{aligned}$$

À partir de ces deux opérations, on peut alors définir :

3. **l'opposé :** $-z = -a - \mathrm{i}b$;
4. **la différence :** $z - z' = z + (-z') = (a - a') + \mathrm{i}(b - b')$.

Définition 3 (conjugué)

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z le nombre :

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b.$$

Propriété 1

Pour tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$,

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2.$$

Démonstration 1

Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) &= a^2 - (\mathrm{i}b)^2 \quad \text{(identités remarquables)} \\ &= a^2 - \mathrm{i}^2 b^2 \\ &= a^2 - (-1)b \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

On peut alors s'aider de cela pour définir :

5 **l'inverse :** $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$;

6 **le quotient :** $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}=\dfrac{aa'-bb'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{ab'+ba'}{a'^2+b'^2}\mathrm{i}$.

Remarque 2

Il n'est pas demandé d'apprendre par cœur ces formules, mais juste de retenir les modes opératoires.

► Voir les exercices 1.1 et 1.2.

II . 3 - Propriétés sur les conjugués

Propriété 2

Soient z et z' deux nombres complexes, $z'\neq 0$.

1 $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$

2 $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$

3 $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \overline{z^n}=\overline{z}^n$

4 $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

5 $\overline{\overline{z}}=z$

6 $\overline{z}=z \iff z\in\mathbb{R}$

7 $\Re\mathrm{e}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

8 $\Im\mathrm{m}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$

Démonstration 2

Posons $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$.

1
$$\begin{aligned}\overline{z+z'}&=\overline{(a+a')+\mathrm{i}(b+b')}\\&=(a+a')-\mathrm{i}(b+b')\\&=(a-\mathrm{i}b)+(a'-\mathrm{i}b')\\&=\overline{z}+\overline{z'}.\end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned}\overline{z\times z'}&=\overline{(a+\mathrm{i}b)(a'+\mathrm{i}b')}\\&=\overline{(aa'-bb')+i(ab'+ba')}\\&=(aa'-bb')-\mathrm{i}(ab'+ba').\end{aligned}$$

De plus,
$$\begin{aligned}\overline{z}\times\overline{z'}&=\overline{a+\mathrm{i}b}\times\overline{a'+\mathrm{i}b'}\\&=(a-\mathrm{i}b)(a'-\mathrm{i}b')\\&=(aa'-bb')-\mathrm{i}(ab'+ba')\\&=\overline{z\times z'}.\end{aligned}$$

3 Démontrons l'égalité par récurrence.

- **Initialisation :** pour $n=0$, $\overline{z^n}=\overline{z^0}=\overline{1}=1=\overline{z}^0$.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $\overline{z^k}=\overline{z}^k$ (HR).

$$\begin{aligned}\overline{z^{k+1}}&=\overline{z^k\times z}\\&=\overline{z^k}\times\overline{z}\text{ d'après l'item précédent)}\\&=\overline{z}^k\times\overline{z}\text{ d'après (HR)}\\&=\overline{z}^{k+1}.\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

L'égalité est alors vraie pour $n\in\mathbb{N}$.

4 $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{a'}{a'^2+b'^2} + \dfrac{b'}{a'^2+b'^2}\mathrm{i}$

et $\dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{1}{a'-\mathrm{i}b'} \times \dfrac{a'+\mathrm{i}b'}{a'+\mathrm{i}b'}$

$= \dfrac{a'+\mathrm{i}b'}{a'^2+b'^2}$

$= \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}.$

Ainsi, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \dfrac{1}{z'}}$

$= \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}$ d'après l'item 2 de cette propriété

$= \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}}$ d'après ce qui a été fait en amont au début de cet item

$= \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$

5 $\overline{\overline{z}} = \overline{a-\mathrm{i}b} = a+\mathrm{i}b = z.$

6 $\overline{z} - z = (a-\mathrm{i}b)-(a+\mathrm{i}b) = -2\mathrm{i}b.$

Ainsi, $\overline{z} = z \iff \overline{z} - z = 0$

$\iff -2\mathrm{i}b = 0$

$\iff b = 0$

$\iff z \in \mathbb{R}.$

7 $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{(a+\mathrm{i}b)+(a-\mathrm{i}b)}{2}$

$= \dfrac{2a}{2}$

$= a$

$= \Re\mathrm{e}(z).$

8 $\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{(a+\mathrm{i}b)-(a-\mathrm{i}b)}{2\mathrm{i}}$

$= \dfrac{2b\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$

$= b$

$= \Im\mathrm{m}(z).$

► Voir les exercices 1.3 et 1.6.

II . 4 - Formule du binôme de Newton

Définition 4

On désigne par *coefficient binomial* « k parmi n » le nombre :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Il désigne par exemple le nombre de sous-ensembles à k éléments pris parmi n éléments distincts.

Propriété 3 (admise)

Pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

À l'aide de cette propriété, nous pouvons « construire » une visualisation des premiers coefficients binomiaux :

Valeurs de n

Valeurs de k

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3 +	3	1		
4	1	4	= 6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Chaque nombre en noir est obtenu en ajoutant le nombre au-dessus et celui qui est à gauche du nombre au-dessus, comme le montre l'exemple du $6 = 3+3$ qui illustre l'égalité : $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$.

Propriété 4 (formule du binôme de Newton)

Pour tous nombres complexes a et b, et pour tout entier naturel n non nul,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration 3

Démontrons cette égalité par récurrence.

- **Initialisation :** $(a+b)^1 = a+b$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b+a = a+b$.

- Hérédité : supposons que pour un entier p fixé, $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{p+1} &= (a+b)(a+b)^p \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k b^{p-k} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= a\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k b^{p-k} + b\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k b^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{k+1} b^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k b^{p-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1}\binom{p}{k-1}a^k b^{p-(k-1)} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k b^{p-k+1} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k-1}a^k b^{p-k+1} + \binom{p}{p}a^{p+1}b^{p-(p+1-1)}\right] + \left[\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}a^k b^{p-k+1} + \binom{p}{0}a^0 b^{p-0+1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right)a^k b^{n_k+1} + a^{p+1}b^0 + a^0 b^{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}a^k b^{n_k+1} + a^{p+1} + b^{p+1} \quad \text{car } \binom{p}{k-1}+\binom{p}{k} = \binom{p+1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}a^k b^{n_k+1} + \underbrace{\binom{p+1}{p+1}}_{=1}a^{p+1} + \underbrace{\binom{p+1}{0}}_{=0}b^{p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}a^k b^{n_k+1}.
\end{aligned}$$

L'égalité est alors vraie au rang $p+1$. L'hérédité est alors vérifiée.

Remarque 3

Cette démonstration est extrêmement compliquée. Il ne faut pas se décourager si vous ne la comprenez pas immédiatement.

Propriété 5

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ \mathrm{i} & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \\ -\mathrm{i} & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration 4

Raisonnons par disjonction de cas sur n :

- si $n = 4k$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k} = (\mathrm{i}^4)^k = \left[(\mathrm{i}^2)^2\right]^k = \left[(-1)^2\right]^k = \left[1\right]^k = 1$.
- si $n = 4k+1$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}^{4k} \times \mathrm{i}^1 = 1 \times \mathrm{i} = \mathrm{i}$.
- si $n = 4k+2$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+1} \times \mathrm{i}^1 = \mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$.
- si $n = 4k+3$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+2} \times \mathrm{i}^1 = -1 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}$.

Propriété 6

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe, et soit n un entier naturel. Alors,

$$z^n = (a+\mathrm{i}b)^n = \sum_{\substack{k=4p\\k\leqslant n}} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k - \sum_{\substack{k=4p+2\\k\leqslant n}} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \mathrm{i}\left(\sum_{\substack{k=4p+1\\k\leqslant n}} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k - \sum_{\substack{k=4p+3\\k\leqslant n}} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\right)$$

où $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Exemple 2

Calculons $(2+3\mathrm{i})^6$:

$$\begin{aligned}
(2+3\mathrm{i})^6 &= \sum_{\substack{k=4p\\k\leqslant 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k}3^k - \sum_{\substack{k=4p+2\\k\leqslant 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k}3^k + \mathrm{i}\left(\sum_{\substack{k=4p+1\\k\leqslant 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k}3^k - \sum_{\substack{k=4p+3\\k\leqslant 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k}3^k\right)\\
&= \binom{6}{0}2^6 3^0 + \binom{6}{4}2^{6-4}3^4 - \binom{6}{2}2^{6-2}3^2 + \binom{6}{6}2^{6-6}3^6 + \mathrm{i}\left(\binom{6}{1}2^{6-1}3^1 + \binom{6}{5}2^{6-5}3^5 - \binom{6}{3}2^{6-3}3^3\right)\\
&= 1 \times 2^6 + 15 \times 2^2 \times 3^4 - 15 \times 2^4 \times 3^2 + 1 \times 3^6 + \mathrm{i}\left(6 \times 2^5 \times 3 + 6 \times 2^1 \times 3^5 - 20 \times 2^3 \times 3^3\right)\\
&= 4\,924 - 2\,889 + \mathrm{i}(3\,492 - 4\,320)\\
&= 2035 - 828\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Remarque 4

Pour la plupart des personnes, dans la pratique, il est préférable d'utiliser la formule du binôme de Newton vue dans la propriété 4.

► Voir l'exercice 1.4.

II . 5 - Équations

II . 5 . a - Équations du premier degré

Propriété 7

Soient a et b deux nombres complexes.
L'équation $az+b=0$, d'inconnue z, admet pour solution dans $\mathbb{C}$:

$$z=-\frac{b}{a}.$$

Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathrm{i}z+(1+\mathrm{i})=0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}z+(1+\mathrm{i})=0 &\iff z=-\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\
&\iff z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\
&\iff z=-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}-1\\
&\iff z=-1+\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

II . 5 . b - Équation du second degré

Propriété 8

Soient a, b et c rois nombres réels.
Si $\Delta=b^2-4ac<0$ alors l'équation $az^2+bz+c=0$ admet deux solutions complexes :

$$z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Remarque 5

Dans ce cas, $z_2=\overline{z_1}$.

Exemple 4

Le polynôme z^2+z+1 a pour discriminant $\Delta=-3$ donc ses racines sont :

$$z_1=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

► Voir les exercices 1.5.

III - Du point de vue géométrique

III . 1 - Image d'un nombre complexe

Définition 5 (image d'un nombre complexe)

On muni le plan d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Dans ce repère, on décide de représenter tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ par le point de coordonnées $\mathrm{M}(x; y)$.
Ce point est appelé l'*image* de z.
Ce plan est appelé *plan d'Argand-Cauchy*.
L'axe horizontal est appelé l'*axe des réels*.
L'axe vertical est appelé l'*axe des imaginaires*.

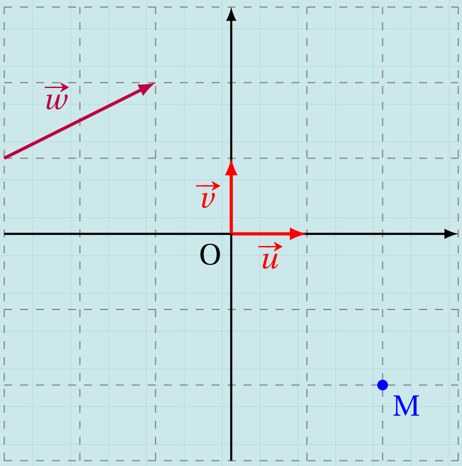
Remarque 6

Jean-Robert Argand était un mathématicien suisse de la fin du XVIII$^{\mathrm{e}}$ et du début du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle (1768 – 1822).
Il introduisit en 1806 la représentation des nombres complexes, mais ce ne fut pas le premier.
En effet, le mathématicien danois Caspar Wessel le fit un peu avant dans un de ses articles, qui passa inaperçu jusqu'en 1897 où on le retrouva.
On peut donc supposer qu'Argand eut une idée analogue à celle de Wessel sans pour autant le copier.

Définition 6 (affixe)

Dans le plan d'Argand-Cauchy, on considère un point $\mathrm{M}(x; y)$ et un vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Alors le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est appelé l'*affixe* du point M et l'affixe du vecteur $\vec{w}$.

Exemple 5



Le point M a pour affixe $z_{\mathrm{M}} = 2 - 2\mathrm{i}$ car $\mathrm{M}(2; -2)$.

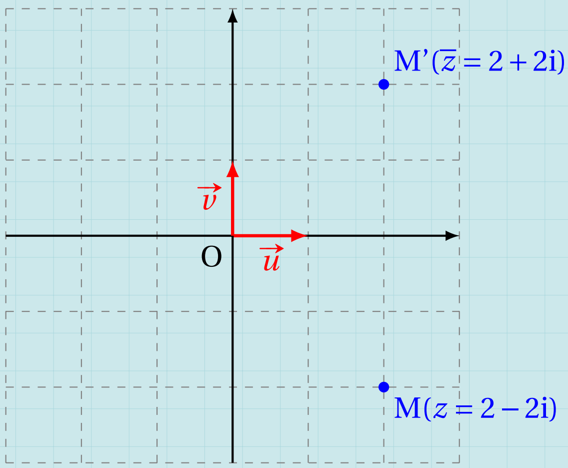
Le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z_{\vec{w}} = 2 + \mathrm{i}$ car $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

► Voir l'exercice 1.13.

Propriété 9 (image du conjugué)

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe et soit M son image dans le plan d'Argand-Cauchy.
L'image de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

Exemple 6

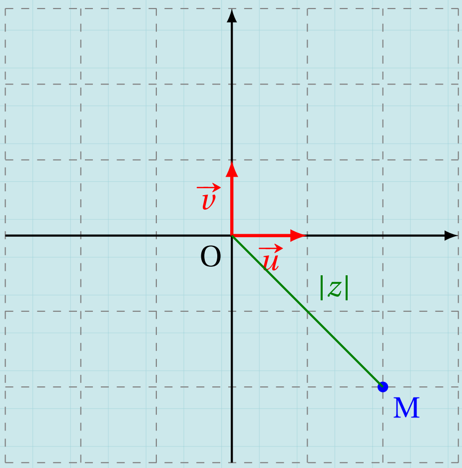


III . 2 - Module d'un nombre complexe

Définition 7

Soient $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe et M son image dans le plan d'Argand-Cauchy.
On appelle *module* de z, et on note $|z|$, la distance entre l'origine du repère et le point M.

Exemple 7



Propriété 10

Soit $z = x + \mathrm{i}y$.
Alors,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La démonstration tient en une ligne en utilisant le théorème de Pythagore.

Propriété 11 (module du conjugué)

$$|z| = |\overline{z}|.$$

La démonstration tient en une ligne en considérant la symétrie par rapport à l'axe des réels.

► Voir l'exercice 1.14.

Propriété 12

Pour tous nombres complexes z et $z' \neq 0$, et pour tout entier naturel n :

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $|zz'| = |z| \times |z'|$
3. $|z^n| = |z|^n$
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Démonstration 5

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$.

1. $|z|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$.
   $z\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 - (-y^2) = x^2 + y^2$.
   Donc $|z|^2 = z\overline{z}$.
2. $$\begin{aligned} |zz'| &= |(x+\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y')| \\ &= |xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + x'y)| \\ &= \sqrt{(xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2} \\ &= \sqrt{(xx')^2 - 2xx'yy' + (yy')^2 + (xy')^2 + 2xy'x'y + (x'y)^2} \\ &= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2} \end{aligned}$$
   De plus, $$\begin{aligned} |z| \times |z'| &= \sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)\left((x')^2+(y')^2\right)} \\ &= \sqrt{(xx')^2 + (xy')^2 + (yx')^2 + (yy')^2} \end{aligned}$$
   Donc $|zz'| = |z| \times |z'|$.

3 Démontrons par récurrence sur n que $|z^n| = |z|^n$.

- **Initialisation :** pour $n=0$, $|z^n| = |z^0| = |1| = 1 = |z|^0$.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $|z^k| = |z|^k$. Alors,

$$\begin{aligned}
|z^{k+1}| &= |z^k \times z^1| \\
&= |z^k| \times |z| \text{ d'après le point 2 précédemment démontré} \\
&= |z|^k \times |z| \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= |z|^{k+1}.
\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$.

4

- Montrons avant tout que $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{z}\right| &= \left|\frac{1}{x+\mathrm{i}y}\right| \\
&= \left|\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}\right| \\
&= \left|\frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{|z|}.
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\left|\frac{z}{z'}\right| &= \left|z \times \frac{1}{z'}\right| \\
&= |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| \text{ d'après le point 2 précédemment démontré} \\
&= |z| \times \frac{1}{|z'|} \\
&= \frac{|z|}{|z'|}
\end{aligned}$$

▶ Voir l'exercice 1.15.

Définition 8

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes dont le module est égal à 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Propriété 13

$\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse.
Autrement dit, pour tous nombres z et z' de $\mathbb{U}$,

- $zz' \in \mathbb{U}$
- $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Démonstration 6

C'est une conséquence directe de la propriété précédente.
En effet, si z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$, alors

$$|z| = |z'| = 1$$

et donc

$$|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1.$$

Ainsi, $zz' \in \mathbb{U}$.

De plus,

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$$

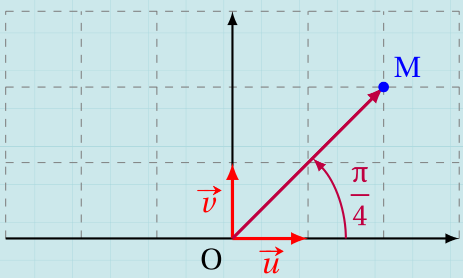
donc $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

III . 3 - Arguments d'un nombre complexe

Définition 9

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe d'image M dans le plan d'Argand-Cauchy.
On désigne par *arguments* tous les angles (exprimés en radians) $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Exemple 8



Un argument du nombre complexe $z = 2 + 2\mathrm{i}$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

On notera alors : $\quad \arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \mod 2\pi$

ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

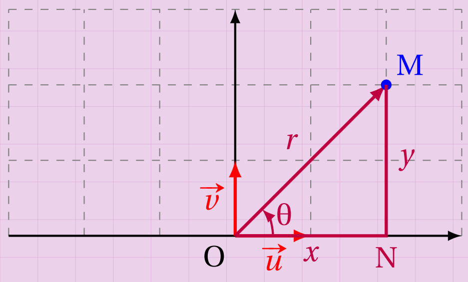
pour désigner le fait que l'angle est défini à 2π près.

Propriété 14

Soit $z = x + iy$. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Alors,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Démonstration 7



Dans le triangle OMN, rectangle en N,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \iff x = r\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \iff y = r\sin\theta$$

Définition 10

Soit z un nombre complexe de module r et dont un argument est égal à θ.
La *forme trigonométrique* de z est :

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

▶ Voir l'exercice 1.16.

Propriété 15 (admise)

Pour tous nombres complexes z et z',

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
2. $\arg\left(z^n\right) = n \times \arg(z)$
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

▶ Voir les exercices 1.17 et 1.18.

IV - Forme exponentielle d'un nombre complexe

IV . 1 - Définition

Définition 11 (forme exponentielle)

Soit z un nombre complexe. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
La *forme exponentielle* de z est :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Remarque 7

Ainsi, on a :

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Cette égalité est très importante.

Propriété 16

Pour tous nombres complexes $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, $r' \neq 0$:

1. $zz' = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
2. $z^n = r^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}$
3. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$

IV . 2 - Formules d'Euler

Propriété 17

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Démonstration 8

On a :

$$\begin{cases} \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \end{cases}$$

En additionnant les deux lignes, on obtient :

$$2\cos\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \qquad \text{soit} \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}.$$

En soustrayant la seconde ligne à la première, on obtient :

$$2\mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \qquad \text{soit} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

IV . 3 - Formules d'addition et de duplication

Propriété 18 (formules d'addition)

Pour tous réels a et b,

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
2. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

Démonstration 9

Utilisons les formules d'Euler pour calculer :

1.
$$\begin{aligned}
&\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
&= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \times \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} - \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \times \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}\\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{i(-a+b)}+e^{i(-a-b)}}{4} - \frac{e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{i(-a+b)}+e^{i(-a-b)}}{-4}\\
&= \frac{2e^{i(a+b)}+2e^{i(-a-b)}}{4}\\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}\\
&= \cos(a+b).
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\\
&= \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \times \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} + \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} \times \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}-e^{i(-a+b)}-e^{i(-a-b)}}{4i} + \frac{e^{i(b+a)}+e^{i(b-a)}-e^{i(-b+a)}-e^{i(-b-a)}}{4i}\\
&= \frac{2e^{i(a+b)}-2e^{i(-a-b)}}{4i}\\
&= \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i}\\
&= \sin(a+b).
\end{aligned}$$

Propriété 19 (formules de duplication)

Pour tout nombre réel a,

1. $$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(a)\end{aligned}$$
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstration 10

Dans les formules d'addition, on prend $b = a$, ce qui donne :

1 $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.
On n'oublie pas que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, donc :

- $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$; ainsi,

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - \left(1 - \cos^2(a)\right) = 2\cos^2(a) - 1.$$

- $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$; ainsi,

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \left(1 - \sin^2(a)\right) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$$

2 $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

► Voir les exercices 1.21 et 1.22.

IV . 4 - Formules de Moivre

Propriété 20

Pour tout entier relatif n, pour tout réel θ,

$$\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Démonstration 11

$\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\theta\mathrm{i}} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.
C'est tout...

► Voir l'exercice 1.23.

V - Équations polynomiales complexes

Nous avons vu précédemment comment résoudre les équations polynômiales de degré 1 et 2.
Nous allons apporter ici quelques compléments.

V . 1 - Factorisation de $z^n - a^n$

Propriété 21

Soient z et a deux nombres complexes, et soit n un entier naturel non nul.
Alors,

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k-1}.$$

Démonstration 12

Développons :

$$\begin{aligned}
(z-a)\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} &= z\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} - a\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} \times z^1 - \sum_{k=0}^{p-1} a^k \times a^1 z^{p-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k} - \sum_{k=0}^{p-1} a^{k+1} z^{p-k-1} \\
&= \left(a^0 z^p + a^1 z^{p-1} + a^2 z^{p-2} + \cdots + a^{p-1} z^1\right) \\
&\qquad - \left(a^1 z^{p-1} + a^2 z^{p-2} + a^3 z^{p-3} + \cdots + a^{p-1} z^1 + a^p z^0\right)
\end{aligned}$$

Tous les termes s'éliminent deux à deux sauf le premier et le dernier :

$$\begin{aligned}
(z-a)\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} & a^0 z^p - a^p z^0 \\
&= z^p - a^p.
\end{aligned}$$

Exemple 9

On peut factoriser $z^4 - 16$ sous la forme :

$$z^4 - 2^4 = (z-2)(z^3 + 2z^2 + 4z + 8).$$

► Voir l'exercice 1.32.

V . 2 - Factorisation polynomiale

Définition 12

On note $\mathbb{C}_n[z]$ l'ensemble des polynômes de degré n à coefficients complexes :

$$\mathbb{C}_n[z] = \left\{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 \,,\, c_k \in \mathbb{C}, \,,\, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}.$$

Si un polynôme P, à variable z, est de degré n et est à coefficients complexes, on écrira :

$$\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[z].$$

Propriété 22 (admise)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[z]$.

$$\mathrm{P}(a) = 0 \iff \mathrm{P}(z) = (z-a)\mathrm{Q}(z) \quad , \quad \mathrm{Q} \in \mathbb{C}_{n-1}[z].$$

Exemple 10

Soit $\mathrm{P}(z) = 3z^3 - 5z^2 + 7z - 5$.

$$\mathrm{P}(1) = 3 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 7 \times 1 - 5 = 0.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\mathrm{P}(z) = (z-1)(az^2 + bz + c).$$

Pour trouver les valeurs de a, b et c, on développe la forme factorisée :

$$\mathrm{P}(z) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c$$

puis on regroupe les termes de mêmes puissances :

$$\mathrm{P}(z) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$$

et enfin, on identifie les coefficients de chaque puissance de z à ceux de la forme développée initiale :

$$\begin{cases} a & = 3 \\ b-a & = -5 \\ c-b & = 7 \\ -c & = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

Finalement, on peut écrire :

$$\mathrm{P}(z) = (z-1)(3z^2 - 2z + 5).$$

Il est désormais aisé de résoudre l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

▶ Voir les exercices 1.33 et 1.34.

Théorème 1

Tout polynôme de degré n admet au plus n racines complexes.

Démonstration 13

Nous allons ici démontrer que tout polynôme de degré n admet un nombre de racines inférieur ou égal à n.

Soit $\mathrm{P}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ un polynôme de $\mathrm{C}_n[z]$.
Supposons qu'il existe $n+1$ racines à P, et notons-les $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$.
Alors, $\mathrm{P}(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)(z-r_{n+1})$.
Or, en développant, on obtient un terme en z^{n+1}, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[z]$.

Par conséquent, il y a moins de $n+1$ racines à P.

Remarque 8 (pourquoi "au plus")

Il existe des cas où les racines sont *multiples*.
Par exemple, $(z-1)^3$ est un polynôme de degré 3 qui n'admet que 1 comme racine. Mais comme le facteur $z-1$ apparaît trois fois dans la factorisation, on dit que la racine « 1 » est triple.

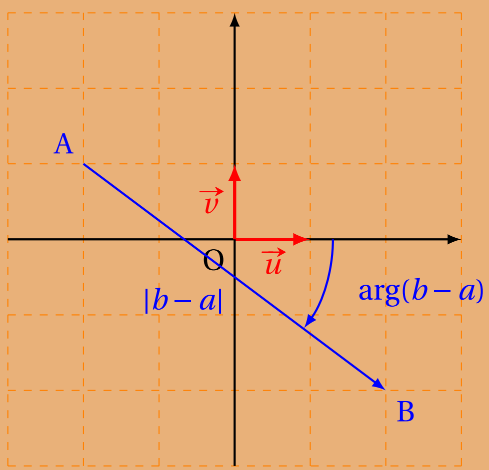
VI - Utilisation des nombres complexes en géométrie

VI . 1 - Distance et angles

Propriété 23

On se place dans le plan d'Argand-Cauchy.
Soient A et B d'affixes respectives a et b.

- $|b-a| = \mathrm{AB}$;
- $\arg(b-a) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$



VI . 2 - Quotient de deux complexes

Propriété 24

Soient a, b et c trois nombres complexes, affixes respectives des points A, B et C dans le plan d'Argand-Cauchy.

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$;
- $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

Démonstration 14

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$.
- $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

Exemple 11

Soient $a = -4 + \mathrm{i}$, $b = 3 - 3\mathrm{i}$ et $c = 7 + 4\mathrm{i}$ les affixes respectives de trois points A, B et C dans le plan d'Argand-Cauchy.
Calculons :

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) &= \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \\
&= \arg\left(\frac{-7+4\mathrm{i}}{4+7\mathrm{i}}\right) \\
&= \arg\left(\frac{-7+4\mathrm{i}}{4+7\mathrm{i}} \times \frac{4-7\mathrm{i}}{4-7\mathrm{i}}\right) \\
&= \arg\left(\frac{65\mathrm{i}}{65}\right) \\
&= \arg(\mathrm{i}) \\
&= \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].
\end{aligned}$$

De plus,

$$\left|\frac{a-b}{c-b}\right| = |\mathrm{i}| = 1$$

donc BC = BA.

On peut alors conclure que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

► Voir les exercices 1.37, 1.38 et 1.39.

VI . 3 - Racines n-ième de l'unité

Définition 13

Soit n un entier naturel.
On appelle *racines n-ième* de l'unité tous les nombres complexes z tels que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de toutes ces valeurs :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Pour construire $\mathbb{U}_n$, il est nécessaire de voir « 1 » comme un nombre complexe, et non plus comme un nombre réel.

Propriété 25

Soit n un entier naturel.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}},\ k \in [\![0\,;\,n-1]\!] \right\}$$

Démonstration 15

Notons que $1 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi}$ pour tout entier relatif k ; par conséquent,

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff \forall\, k \in \mathbb{Z},\ z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi} \\ &\iff \forall\, k \in \mathbb{Z},\ (z^n)^{\frac{1}{n}} = \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\iff \forall\, k \in \mathbb{Z},\ z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}(k+n)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \times \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}n\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \times \underbrace{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}}_{=1} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}.$$

Par conséquent,

$$z^n = 1 \iff \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}.$$

Remarque 9

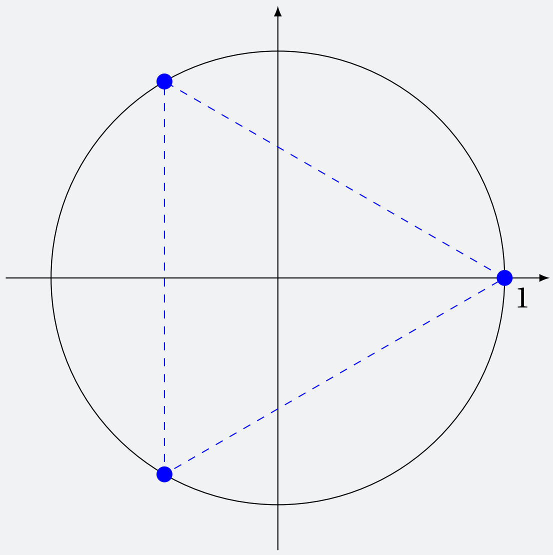
On a pris ici $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, mais on aurait aussi très bien pu prendre tout autre intervalle d'entiers d'amplitude n, comme par exemple $[\![7\,;\,n+6]\!]$, mais avouez que c'est moins fun...

Exemple 12

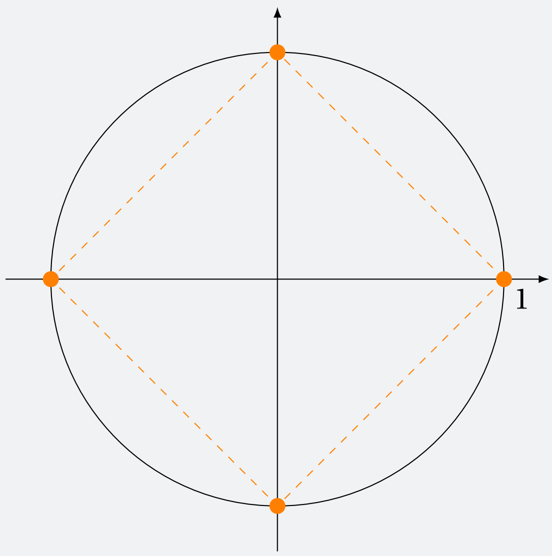
On a ainsi :

- $\mathbb{U}_2 = \left\{1\,;\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{2}}\right\} = \{1\,;\,-1\}$.
- $\mathbb{U}_3 = \left\{1\,;\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\,;\,\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}\right\} = \{1\,;\,\jmath\,;\,\jmath^2\}$.
- $\mathbb{U}_4 = \left\{1\,;\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{4}}\,;\,\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{4}}\,;\,\mathrm{e}^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{4}}\right\} = \{1\,;\,\mathrm{i}\,;\,-1\,;\,-\mathrm{i}\}$.

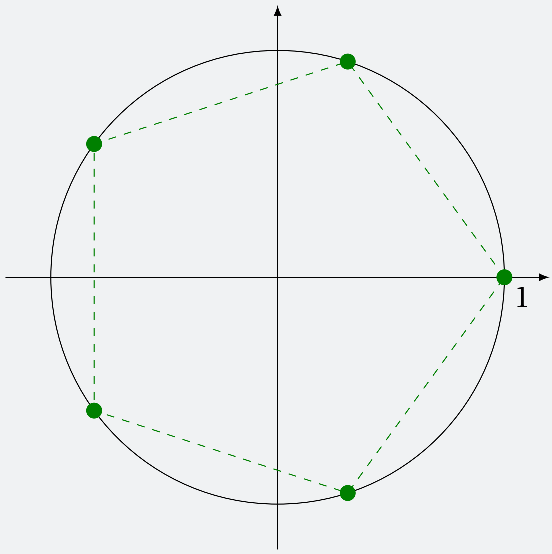
On peut représenter $\mathbb{U}_n$ à l'aide d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité :



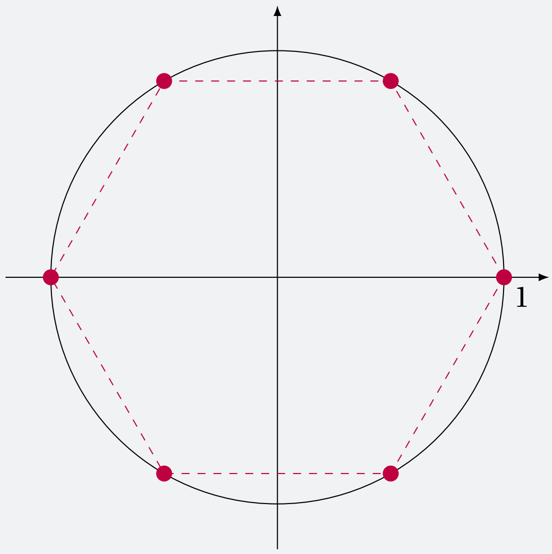
$\mathbb{U}_3$: triangle équilatéral



$\mathbb{U}_4$: carré



$\mathbb{U}_5$: pentagone régulier



$\mathbb{U}_6$: hexagone régulier

▶ Voir les exercices 1.40 et 1.41.

VII - Python et les nombres complexes

Pour faire des calculs sur les nombres complexes à l'aide de Python, il faut appeler le module `cmath` :

```
from cmath import *
```

Voici les quelques opérations possibles :

Déclaration d'un nombre complexe.
On déclare ici $z = 3 - 5\mathrm{i}$.

```
>>> z = complex(3,-5)
```

Calcul d'un argument.
La valeur retournée est en radians.

```
>>> phase(z)
 -1.0303768265243125
```

Module et argument.
La valeur retournée est de la forme $(|z|, \arg(z))$.

```
>>> polar(z)
(5.830951894845301,
    -1.0303768265243125)
```

Forme algébrique d'un nombre sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Dans l'exemple contre, on prend $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
Le résultat est de la forme $a + b\jmath$, mais attention : ici, $\jmath$ représente i.

```
>>> rect(1,pi/4)
(0.7071067811865476+0.7071067811865476j)
```

Produit : $(1+\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})$.
Donne : $7 + \mathrm{i}$.

```
>>> complex(1,1)*complex(4,-3)
(7+1j)
```

Quotient : $\dfrac{1+\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$.
Donne : $0,04 + 0,28\mathrm{i}$.

```
>>> complex(1,1)/complex(4,-3)
(0.04+0.28j)
```

Exercices de base du point de vue algébrique

Exercice 1.1 (somme et produits)

Effectuez les opérations suivantes en mettant le résultat sous la forme $a+\mathrm{i}b$, a et b étant deux réels :

1. $(7+2\mathrm{i})+(9-4\mathrm{i})$
2. $(2\mathrm{i}-3)-(8+4\mathrm{i})$
3. $(2+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$
4. $(-2+4\mathrm{i})(\mathrm{i}-5)$
5. $(4-3\mathrm{i})^2$
6. $(1+\mathrm{i})^3$

Solution page 41

Exercice 1.2 (quotients)

Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
2. $\dfrac{1}{3+5\mathrm{i}}$
3. $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$
4. $\dfrac{\mathrm{i}-1}{3+2\mathrm{i}}$
5. $\dfrac{5+3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}$
6. $\dfrac{3\mathrm{i}-4}{4\mathrm{i}-3}$

Solution page 41

Exercice 1.3 (équation avec conjugué)

Soit $z=a+\mathrm{i}b$ un nombre complexe. Montrer l'équivalence suivante :

$$z^2+\overline{z}^2=1 \iff b^2=a^2-\frac{1}{2}.$$

Solution page 42

Exercice 1.4 (puissance d'un nombre complexe)

Donner la forme algébrique des nombres suivants.

1. $(2-\mathrm{i})^5$
2. $(2+\mathrm{i})^5$
3. $(1+2\mathrm{i})^4$
4. $(1+2\mathrm{i})^8$

Solution page 42

Exercice 1.5 (équations de degré 1 et 2)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(1+\mathrm{i})z=2$
2. $(3-5\mathrm{i})z=3+5\mathrm{i}$
3. $z^2+3z+\frac{25}{4}=0$
4. $-3z^2+5z-6=0$
5. $2z^2-3z+\dfrac{17}{4}=0$
6. $100z^2+20z+37=0$

Solution page 43

Exercice 1.6 (conjugués)

Soit z un nombre complexe non nul.
Montrer que $\mathrm{i}\overline{z} + \dfrac{z + 2\Re\mathrm{e}(z) - \overline{z}}{\mathrm{i}z} = -\mathrm{i}\overline{z} - 2\mathrm{i}$.

Solution page 44

Exercices d'approfondissement : point de vue algébrique

Exercice 1.7 (application complexe : iz)

Soit f l'application complexe qui à tout nombre complexe z associe le nombre iz : $f(z) = \mathrm{i}z$.
En posant $z = a + \mathrm{i}b$, donner la forme algébrique de $f(z)$ en fonction de a et b.

Solution page 44

Exercice 1.8 (somme géométrique)

Donner la forme algébrique de la somme :

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{100} \mathrm{i}^k = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^{100}.$$

Solution page 44

Exercice 1.9 (produit)

Donnez la forme algébrique du produit :

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \times \frac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}.$$

Solution page 45

Exercice 1.10 (équation de degré 3)

On considère l'équation suivante :

$$z^3 - 3z + 4\mathrm{i} = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Montrer que i est une solution de (E).
2. Trouver les nombres complexes b et c tels que :

$$z^3 - 3z + 4\mathrm{i} = (z - \mathrm{i})(z^2 + bz + c).$$

3. Donner les solutions de (E) sous la forme algébrique.

Solution page 45

Exercice 1.11 (racine carrée de i)

On cherche à déterminer $\sqrt{\mathrm{i}}$.
Pour cela, on considère le nombre $z = a + b\mathrm{i}$ tel que $z^2 = \mathrm{i}$.
Trouver les valeurs possibles de a et b.

Solution page 46

Exercice 1.12 (racine carrée d'un nombre complexe)

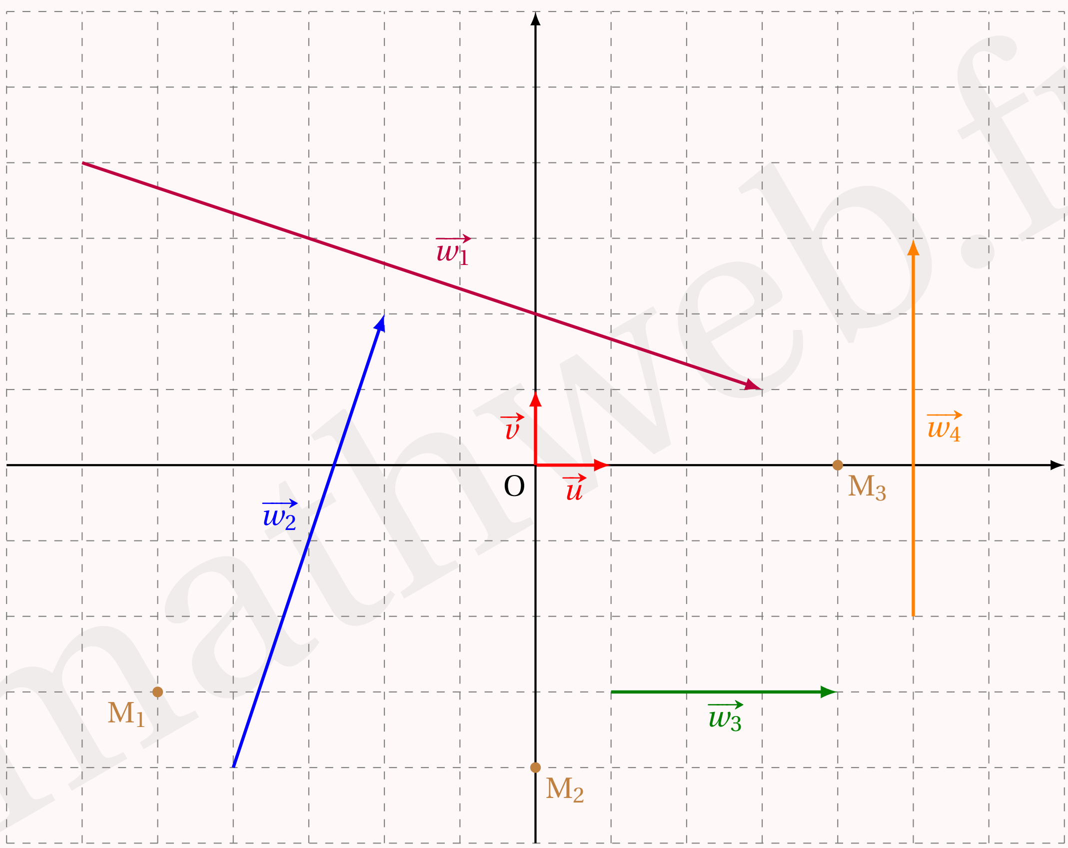
Déterminer la forme algébrique de $\sqrt{-7+24\mathrm{i}}$.

Solution page 47

Exercices de base du point de vue géométrique

Exercice 1.13 (affixe)

Donner l'affixe des points et vecteurs de la figure ci-dessous :



Solution page 48

Exercice 1.14 (module d'un complexe)

Calculer la valeur du module de chacun des nombres complexes suivants.

1. i
2. $1+\mathrm{i}$
3. $1-\mathrm{i}$
4. $-3+2\mathrm{i}$
5. -4
6. $3+4\mathrm{i}$
7. $5-2\mathrm{i}$
8. $4{,}5+6\mathrm{i}$

Solution page 48

Exercice 1.15 (utilisation des propriétés sur le module)

Calculer :

1. $\left|(1+\mathrm{i})^{16}\right|$
2. $\left|(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\right|$
3. $\left|\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$
4. $(5-3\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})$

Solution page 48

Exercice 1.16 (arguments et forme trigonométrique)

Pour chacun des nombres complexes suivants, trouver le module et un argument, puis écrire sa forme trigonométrique.

1. $z_1 = 1+\mathrm{i}$
2. $z_2 = 2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$
3. $z_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
4. $z_4 = -2+2\mathrm{i}$

Solution page 48

Exercice 1.17 (propriétés sur les arguments)

1. Déterminer simplement le module et un argument de $z_1 = (1+\mathrm{i})^4$, puis en déduire la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer simplement le module et un argument de $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, puis en déduire la forme algébrique de z_2.

Solution page 50

Exercice 1.18 (calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$)

On pose $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ et $z' = \cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

1. Donner la forme trigonométrique de zz'.
2. Donner la forme algébrique de zz'.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Solution page 50

Approfondissement : point de vue géométrique

Exercice 1.19 (le nombre j)

On considère le nombre complexe $\jmath$ tel que :

$$\jmath^2 + \jmath + 1 = 0 \quad , \quad \Im m(\jmath) > 0.$$

Montrer que $\jmath = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et que $\bar{\jmath}^2 + \bar{\jmath} + 1 = 0$.

Solution page 51

Exercice 1.20 (suite arithmético-géométrique complexe)

On considère la suite (z_n) définie par son premier terme $z_0 = i$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}iz + 1 - i.$$

1. Calculer z_1 et z_2.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = z_n - \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i.$$

2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. En déduire une expression de v_n, puis de z_n, en fonction de n.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} |v_n| = 0$. Que peut-on en déduire pour $\lim_{n\to+\infty} z_n$?

Solution page 51

Exercices de base sur la forme exponentielle

Exercice 1.21 (reconnaître une écriture exponentielle)

Les nombres complexes suivants sont-il donnés en écriture exponentielle ?
Dans la négative, transformer l'écriture afin qu'elle devienne exponentielle.

1. $3ie^{i\pi}$
2. $-2e^{i\frac{\pi}{3}}$
3. $\pi e^{i\frac{\pi}{6}}$
4. 5
5. $4e^{\frac{\pi}{5}}$
6. $-\pi$

Solution page 52

Exercice 1.22 (formule de duplication)

À l'aide de la formule de duplication et des valeurs de $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$, trouver les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Solution page 53

Exercice 1.23 (formules d'addition)

Déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Solution page 53

Exercice 1.24 (formule de Moivre)

À l'aide de la formule de Moivre, donner la forme algébrique des nombres suivants.

1. $(1+\mathrm{i})^9$
2. $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6$
3. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^9$

Solution page 53

Approfondissement : forme exponentielle

Exercice 1.25 (racines cubiques de l'unité)

Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$ et donnez leur forme exponentielle.

Solution page 54

Exercice 1.26 (récréation)

Montrer que $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.

Solution page 54

Exercice 1.27 (linéarisation d'une puissance de cosinus)

À l'aide des formules d'Euler, écrire $\cos^3(x)$ sous la forme d'une expression linéarisée (sans puissance).

Solution page 54

Exercice 1.28 (linéarisation d'une puissance de sinus)

À l'aide des formules d'Euler, écrire $\sin^5(x)$ sous la forme d'une expression linéarisée (sans puissance).

Solution page 55

Exercice 1.29 ($\cos\frac{\pi}{24}$ et $\sin\frac{\pi}{24}$)

On donne :

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

On pourra voir dans l'exercice 1.21 une démonstration de cette égalité.

1. Montrer l'égalité suivante :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}.$$

2 Montrer que :

$$\frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}+\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}i.$$

3 En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{24}$ et $\sin\frac{\pi}{24}$.

Solution page 55

Exercice 1.30 (vers le cosinus de $\frac{2\pi}{5}$)

On pose :

$$w=e^{i\frac{2\pi}{5}}.$$

1 Simplifier w^5 puis calculer $1+w+w^2+w^3+w^4$.

2 Monter que pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1.$$

3 **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2+Z-1=0.$$

b. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Solution page 57

Exercice 1.31 (une somme géométrique)

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$C_n=1+\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos(nx)$$

et

$$S_n=\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin(nx).$$

En considérant le nombre complexe $z_n=C_n+iS_n$, montrer que :

$$C_n=\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}$$

puis trouver une expression analogue pour S_n.

Aide : on pourra penser à utiliser l'égalité suivante :

$$e^{ix}-1=e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right).$$

Solution page 58

Équations polynomiales complexes

Exercice 1.32 (factorisation de $z^n - a^n$)

Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes suivants par un monôme de degré 1.

1. $z^3 - 27$
2. $z^5 - i$
3. $z^4 - 4$
4. $z^6 + 64$

Solution page 59

Exercice 1.33 (équation polynomiale de degré 3)

Soit $P(z) = \frac{1}{2}z^3 + 5z + \frac{11}{2}$.

Montrer que $P(-1) = 0$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Solution page 59

Exercice 1.34 (équation polynomiale de degré 4)

On considère l'équation :

$$z^4 + 3z^3 - z - 3 = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Montrer que -3 est solution de (E).
2. Trouver une autre solution simple de (E).
3. Résoudre (E).

Solution page 60

Approfondissements : équations polynomiales

Exercice 1.35 (coefficients complexes)

Résoudre l'équation :

$$3iz^2 + 2z + i = 0. \qquad \text{(E)}$$

Solution page 61

Exercice 1.36

On souhaite résoudre l'équation :

$$2z^2 - 3z + 3 - i = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Trouver les réels a et b tels que $(a + ib)^2 = -15 + 8i$.
2. En déduire les solutions de (E).

Solution page 61

Utilisation des complexes en géométrie

Exercice 1.37 (nature d'un triangle)

Dans le plan d'Argand-Cauchy, on considère les nombres $a = -3+3i$, $b = -2-6i$ et $c = 6+4i$, affixes respectives des points A, B et C.

Calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$ et en déduire la nature de ABC.

Solution page 62

Exercice 1.38 (triangle équilatéral)

Soit a un nombre complexe. On pose alors $b = \jmath a$ et $c = \jmath^2 a$, où $\jmath = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.

Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

Solution page 62

Exercice 1.39 (nature d'un triangle)

Soient $a = 2+2i$, $b = 5-i$ et $c = -1-i$ les affixes des points A, B et C dans le plan d'Argand-Cauchy.
Quelle est la nature du triangle que ABC ?

Solution page 63

Exercice 1.40 (racines cubiques de l'unité)

On considère trois nombres complexes a, b et c, affixes respectives de A, B, C dans le plan d'Argand-Cauchy, tels que $a + b\jmath + c\jmath^2 = 0$, où 1, $\jmath$ et $\jmath^2$ sont les éléments de $\mathbb{U}_3$.

1. Montrer que $\jmath^2 = -1-\jmath$.
2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

Solution page 63

Exercice 1.41 (somme des racines n-ièmes de l'unité)

Soient n un entier naturel, $n \geqslant 3$, et $\{\omega_k\}_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ les n racines n-ièmes de l'unité.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

   Peut-on calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$?

Solution page 64

Approfondissement : application à la géométrie

Exercice 1.42

Soient $a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $b = -\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$ et $g = \dfrac{4b}{3\sqrt{3}a}$ les affixes respectives des points A, B et G dans le plan d'Argand-Cauchy.

1. Calculer le module et un argument de a, b et g.
2. Quelle est la nature du triangle OAB ?
3. Soit I le milieu de [AB]. Montrer que I, I et G sont alignés.
4. Montrer que G est le centre de gravité du triangle AOB.

Solution page 64

Exercice 1.43 (ensemble de points)

On considère les points A, B et C d'affixes respectives dans le plan d'Argand-Cauchy :

$$z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_c = 2$$

1. **a.** Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
   c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.
2. **a.** Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient : $2\left(z + \overline{z}\right) + z\overline{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon.
   b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

Solution page 65

Exercice 1.44 (application complexe)

Soit f l'application qui, à tout nombre complexe z différent de $-2\mathrm{i}$, associe le nombre :

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + \mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}.$$

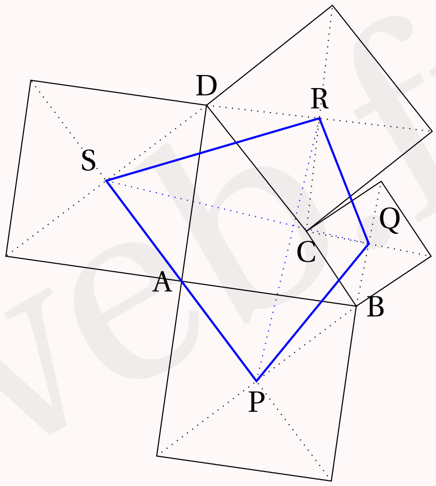
On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$ dans le plan d'Argand-Cauchy.

1. Si $z = x + \mathrm{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction x et y. En déduire la nature de :
   a. l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit un réel ;
   b. l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur, éventuellement nul ;
   c. l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.
2. Déterminer les ensembles $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sans utiliser les parties réelle et imaginaire de Z.
3. Calculer $|Z - 1| \times |z + 2\mathrm{i}|$ et en déduire que les points M′ d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ sont tous sur un même cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.

Solution page 67

Exercice 1.45 (théorème de Van Aubel)

Soit ABCD un quadrilatère quelconque de sens direct.
Sur [AB], [BC], [CD] et [DA], on construit quatre carrés (extérieurs à ABCD) de centres respectifs P, Q, R et S.
Le but de l'exercice est de démontrer que les diagonales de PQRS sont perpendiculaires et de même longueur.



On note a, b, c, d, p, q, r et s les affixes respectives des points A, B, C, D, P, Q, R et S dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ de sens direct.

1 Démontrer que dans le carré construit sur [AB], on a : $p = \dfrac{a - ib}{1 - i}$.

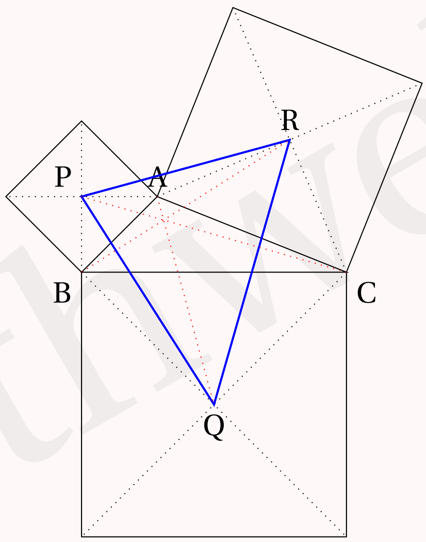
Établir des relations analogues pour q, r et s.

2 Calculer $\dfrac{s-q}{r-p}$ puis conclure.

Solution page 67

Exercice 1.46 (point de Vecten)

Soit ABC un triangle quelconque de sens direct.
On construit trois carrés de centres respectifs P, Q et R qui s'appuient extérieurement sur les côtés [AB], [BC] et [CA].



On note a, b, c, p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, P, Q et R dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ de sens direct.

1 Démontrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.

2 Démontrer que dans le carré construit sur [AB], on a : $p = \dfrac{a - \mathrm{i}b}{1 - \mathrm{i}}$.

Établir des relations analogues pour q et r.

3 Démontrer que les droites (AQ) et (PR) sont perpendiculaires.

En déduire que les droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes. Ce point de concours est appelé le *point de Vecten* du triangle ABC.

Solution page 68

Exercice 1.47 (équation et transformation)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'équation (E) : $(z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0$, où z est un nombre complexe.

1 Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

On notera a, b et c les solutions de (E), avec $a \in \mathbb{R}$ et $\Im\mathrm{m}(b) > 0$.

2 Soient A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.

- **a.** Donner la forme exponentielle de b et c.
- **b.** Calculer $|a - b|$ et $|a - c|$.
- **c.** Quelle est la nature du triangle ABC ?

3 Soit f l'application définie par : $f \quad : \quad z \longmapsto 1 + z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

- **a.** Donner l'écriture algébrique de $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$.
- **b.** L'image du triangle ABC par f est-elle de même nature que ABC lui-même ?

Solution page 68

Exercice 1.48 (racine n-ième d'un nombre complexe)

1 Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = x^4 + 1$.

Déterminer les racines quatrièmes de (-1), c'est-à-dire les nombres complexes z tels que $z^4 = -1$, puis en déduire que f peut s'écrire comme un produit de deux fonctions polynômes de degré 2 à coefficients réels.

2 Soit z un nombre complexe tel que $1 + z^4 + z^8 = 0$.

Démontrer que z est une racine douzième de l'unité.

Solution page 70

Exercice 1.49 (inversion)

On considère l'application suivante dans le plan d'Argand-Cauchy :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

1 Montrer que l'image du cercle unité (de centre O et de rayon 1) est lui-même.

2 On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+1$.

a. Justifier que tout point $M(z)$ sur $\mathscr{D}$ vérifie :

$$z = x + (x+1)\mathrm{i} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que l'image de z par f est :

$$z' = \frac{x}{2x^2+2x+1} - \frac{x+1}{2x^2+2x+1}\mathrm{i}.$$

c. Calculer $\left(\frac{x}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{x+1}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2}\right)^2$.

d. En déduire l'ensemble image de $\mathscr{D}$.

Solution page 70

Exercice 1.50 (théorème de Napoléon)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$de sens direct.

Partie A

On note $\jmath = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Soient U, V et W trois points du plan d'affixes respectives u, v et w.

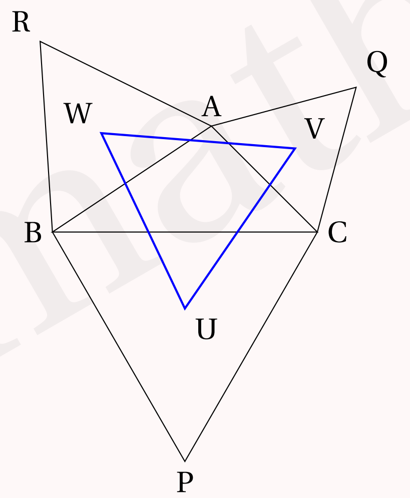
1 Démontrer l'équivalence suivante :

$$\text{UVW équilatéral de sens direct} \iff u - v = -\jmath^2(w-v).$$

2 Démontrer l'équivalence suivante :

$$\text{UVW équilatéral de sens direct} \iff u + \jmath v + \jmath^2 w = 0.$$

Partie B



Soit ABC un triangle quelconque de sens direct. On construit les points P, Q et R tels que BPC, CQA et ARB soient équilatéraux de sens direct.
On note U, V et W les centres de gravité respectifs de BPC, CQA et ARB.

Démontrer que UVW est équilatéral de même centre de gravité que ABC.

Solution page 71

Exercice 1.51 (avec les racines n-ièmes de l'unité)

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1 Montrer que pour $z \neq 1$,

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

2 On admet que cette dernière égalité reste vraie pour $z = 1$.
En déduire que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Solution page 72

Corrigé de l'exercice 1.1 page 27

1 $(7+2\mathrm{i})+(9-4\mathrm{i}) = 7+9+2\mathrm{i}-4\mathrm{i} = \underline{16-2i}$.

2 $(2\mathrm{i}-3)-(8+4\mathrm{i}) = -3-8+2\mathrm{i}-4\mathrm{i} = \underline{-11-2\mathrm{i}}$.

3 $(2+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 2\times 1+3\mathrm{i}^2+2\times\mathrm{i}+3\mathrm{i}\times 1 = 2-3+5\mathrm{i} = \underline{-1+5\mathrm{i}}$.

4 $(-2+4\mathrm{i})(\mathrm{i}-5) = -2\times(-5)+4\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}+4\mathrm{i}\times(-5) = 10-4-2\mathrm{i}-20\mathrm{i} = \underline{6-22\mathrm{i}}$.

5 $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2+(3\mathrm{i})^2-2\times 4\times 3\mathrm{i} = 16-9-24\mathrm{i} = \underline{7-24\mathrm{i}}$.

6 $(1+\mathrm{i})^3 = (1+\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (1+\mathrm{i}^2+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = \underline{-2+2\mathrm{i}}$.

Remarque 24 (méthode de développement)

Lorsque je développe :

$$(a+b\mathrm{i})(a'+b'\mathrm{i})$$

je choisis d'écrire en premier : $aa'+bb'\mathrm{i}^2 = aa'-bb'$ afin d'avoir la partie réelle en premier et d'un seul coup. Ensuite, je considère les produits d'un réel par un imaginaire : $ab'\mathrm{i}+ba'\mathrm{i}$ afin d'avoir la partie imaginaire d'un coup.

Corrigé de l'exercice 1.2 page 27

1 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{2\mathrm{i}}{2} = \boxed{\mathrm{i}}$.

2 $\dfrac{1}{3+5\mathrm{i}} = \dfrac{1(3-5\mathrm{i})}{(3+5\mathrm{i})(3-5\mathrm{i})} = \dfrac{3-5\mathrm{i}}{3^2+5^2} = \boxed{\dfrac{3}{34}-\dfrac{5}{34}\mathrm{i}}$.

3 $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} = \dfrac{(2+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \dfrac{2+11\mathrm{i}}{3^2+4^2} = \boxed{\dfrac{2}{25}+\dfrac{11}{25}\mathrm{i}}$.

4 $\dfrac{\mathrm{i}-1}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{(-1+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})} = \dfrac{-1+5\mathrm{i}}{3^2+2^2} = \boxed{-\dfrac{1}{13}+\dfrac{5}{13}\mathrm{i}}$.

5 $\dfrac{5+3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1} = \dfrac{(5+3\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})}{(-1+2\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})} = \dfrac{1-13\mathrm{i}}{(-1)^2+2^2} = \boxed{\dfrac{1}{5}-\dfrac{13}{5}\mathrm{i}}$.

6 $\dfrac{3\mathrm{i}-4}{4\mathrm{i}-3} = \dfrac{(-4+3\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})} = \dfrac{24+7\mathrm{i}}{(-3)^2+4^2} = \boxed{\dfrac{24}{25}+\dfrac{7}{25}\mathrm{i}}$

Corrigé de l'exercice 1.3 page 27

On a :

$$\begin{aligned} z^2+\overline{z}^2=1 &\iff (a+\mathrm{i}b)^2+(a-\mathrm{i}b)^2=1\\ &\iff a^2+2ab\mathrm{i}+(\mathrm{i}b)^2+a^2-2ab\mathrm{i}+(\mathrm{i}b)^2=1\\ &\iff a^2+2ab\mathrm{i}-b^2+a^2-2ab\mathrm{i}-b^2=1\\ &\iff 2a^2-2b^2=1\\ &\iff a^2-b^2=\frac{1}{2}\\ &\iff b^2=a^2-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.4 page 27

Remarque 25

Pour calculer $(a+\mathrm{i}b)^n$, on peut bien entendu utiliser la propriété 6 du cours, mais on peut aussi utiliser directement le binôme de Newton, ce qui est peut-être plus simple.

1

$$\begin{aligned} (2-\mathrm{i})^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^k\times(-\mathrm{i})^{5-k}\\ &= \binom{5}{0}2^0(-\mathrm{i})^5+\binom{5}{1}2^1(-\mathrm{i})^4+\binom{5}{2}2^2(-\mathrm{i})^3+\binom{5}{3}2^3(-\mathrm{i})^2+\binom{5}{4}2^4(-\mathrm{i})^1+\binom{5}{5}2^5(-\mathrm{i})^0\\ &= -\mathrm{i}+10+40\mathrm{i}-80-80\mathrm{i}+32 \end{aligned}$$

$$\boxed{(2-\mathrm{i})^5=-38-41\mathrm{i}}$$

2

$$\begin{aligned} (2+\mathrm{i})^5 &= \overline{(2-\mathrm{i})}^5\\ &= \overline{(2-\mathrm{i})^5}\\ &= \overline{-38-41\mathrm{i}} \quad \text{d'après la question 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{(2+\mathrm{i})^5=-38+41\mathrm{i}}$$

3

$$\begin{aligned} (1+2\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}1^k\times(2\mathrm{i})^{4-k}\\ &= \binom{4}{0}1^0\times(2\mathrm{i})^4+\binom{4}{1}1^1\times(2\mathrm{i})^3+\binom{4}{2}1^2\times(2\mathrm{i})^2+\binom{4}{3}1^3\times(2\mathrm{i})^1+\binom{4}{4}1^4\times(2\mathrm{i})^0\\ &= 16-32\mathrm{i}-24+8\mathrm{i}+1 \end{aligned}$$

$$\boxed{(1+2\mathrm{i})^4=-7-24\mathrm{i}}$$

4

$$\begin{aligned} (1+2\mathrm{i})^8 &= \left[(1+2\mathrm{i})^4\right]^2\\ &= (-7-24\mathrm{i})^2 \quad \text{d'après la question 3}\\ &= 49+2\times7\times24\mathrm{i}+(24\mathrm{i})^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(1+2\mathrm{i})^8=-527+336\mathrm{i}}$$

Corrigé de l'exercice 1.5 page 27

1 $(1+\mathrm{i})z = 2 \iff z = \dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$

$$\iff z = \frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$$

$$\iff z = \frac{2-2\mathrm{i}}{1^2+1^2}$$

$$\boxed{z = 1-\mathrm{i}}$$

2 $(3-5\mathrm{i})z = 3+5\mathrm{i} \iff z = \dfrac{3+5\mathrm{i}}{3-5\mathrm{i}}$

$$\iff z = \frac{(3+5\mathrm{i})^2}{3^2+5^2}$$

$$\iff z = \frac{9-25+30\mathrm{i}}{34}$$

$$\iff \boxed{z = -\frac{8}{17}+\frac{15}{14}\mathrm{i}}$$

3 $z^2+3z+\frac{25}{4}$ a pour discriminant :

$$\Delta = 3^2 - 4\times 1\times\frac{25}{4} = 9-25 = -16 < 0$$

donc les solutions de l'équation $z^2+3z+\frac{25}{4} = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-3-\mathrm{i}\sqrt{16}}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}-2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \boxed{-\frac{3}{2}+2\mathrm{i}}$$

4 $-3z^2+5z-6 = 0$. Le discriminant de $-3z^2+5z-6$ est :

$$\Delta = 5^5 - 4\times(-3)\times(-6) = 25-72 = -47 < 0$$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-5-\mathrm{i}\sqrt{47}}{-6} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-5+\mathrm{i}\sqrt{47}}{-6}$$

soit :

$$\boxed{z_1 = \frac{5+\mathrm{i}\sqrt{47}}{6} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{5-\mathrm{i}\sqrt{47}}{6}}$$

5 $2z^2-3z+\dfrac{17}{4} = 0$. Le discriminant de $2z^2-3z+\dfrac{17}{4}$ est :

$$\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times\frac{17}{4} = 9-34 = -25 < 0$$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{3-\mathrm{i}\sqrt{25}}{4} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{25}}{4}$$

soit :

$$\boxed{z_1 = \frac{3-5\mathrm{i}}{4} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+5\mathrm{i}}{4}}$$

6 $100z^2+20z+37=0$. Le discriminant de $100z^2+20z+37$ est :

$$\Delta=(20)^2-4\times100\times37=400-400\times37=-400\times36=-(20\times6)^2=-120^2<0$$

donc l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1=\frac{-20-120\text{i}}{200}\qquad\text{et}\qquad z_2=\frac{-20+120\text{i}}{200}$$

soit :

$$\boxed{z_1=\frac{-1-6\text{i}}{10}\qquad\text{et}\qquad z_2=\frac{-1+6\text{i}}{10}}$$

Corrigé de l'exercice 1.6 page 28

$$\begin{aligned}
\overline{\text{i}z}+\frac{z+2\Re\text{e}(z)-\overline{z}}{\text{i}z}&=\overline{\text{i}z}+\frac{2}{z}\times\frac{z-\overline{z}}{2\text{i}}+\frac{2\Re\text{e}(z)}{\text{i}z}\\
&=\overline{\text{i}z}+\frac{2}{z}\times\Im\text{m}(z)+\frac{2\Re\text{e}(z)}{\text{i}z}\times\frac{\text{i}}{\text{i}}\\
&=\overline{\text{i}z}+\frac{2\Im\text{m}(z)}{z}-\frac{2\text{i}\Re\text{e}(z)}{z}\\
&=\overline{\text{i}z}+\frac{2\text{i}}{z}\left(-\Re\text{e}(z)+\frac{\Im\text{m}(z)}{\text{i}}\right)\\
&=\overline{\text{i}z}+\frac{2\text{i}}{z}\left(-\Re\text{e}(z)+\frac{\text{i}\Im\text{m}(z)}{\text{i}^2}\right)\\
&=\overline{\text{i}z}+\frac{2\text{i}}{z}\left(-\Re\text{e}(z)-\text{i}\Im\text{m}(z)\right)\\
&=\overline{\text{i}z}-\frac{2\text{i}}{z}\left(\Re\text{e}(z)+\text{i}\Im\text{m}(z)\right)\\
&=\overline{\text{i}z}-\frac{2\text{i}}{z}\times z\\
&=-\text{i}\overline{z}-2\text{i}.\qquad(\text{car }\overline{\text{i}}=-\text{i})
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.7 page 28

Posons $z=a+\text{i}b$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(z)&=\text{i}(a+\text{i}b)\\
&=a\text{i}+\text{i}^2b\\
\end{aligned}$$
$$\boxed{f(z)=-b+\text{i}a}$$

Corrigé de l'exercice 1.8 page 28

Nous allons utiliser la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

En effet, en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \mathrm{i}u_n$, nous avons une suite géométrique de raison i et :

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} = \mathrm{S} &= \frac{1-\mathrm{i}^{100+1}}{1-\mathrm{i}} \\
&= \frac{1-\mathrm{i}^{101}}{1-\mathrm{i}} \\
&= \frac{1-\mathrm{i}^{25\times 4+1}}{1-\mathrm{i}} \\
&= \frac{1-\left(\mathrm{i}^4\right)^{25}\times\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \\
&= \frac{1-1^{25}\times\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \text{ car } \mathrm{i}^4 = 1 \\
&= \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \\
\boxed{\mathrm{S} = 1}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.9 page 28

Il y a deux façons de calculer ce produit : en considérant le quotient du produit des numérateur et dénominateur :

$$\frac{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}$$

ou en déterminant avant tout la forme algébrique de chacun des quotient, puis en les multipliant.

Je vais opter pour la première façon, bien plus rapide car nous voyons des identités remarquables.

$$\begin{aligned}
\frac{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} &= \frac{1^2-\mathrm{i}^2}{1^2-(2\mathrm{i})^2} \\
&= \frac{1+1}{1+4} \\
\boxed{\frac{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.10 page 28

1 On calcule :

$$\mathrm{i}^3 - 3\mathrm{i} + 4\mathrm{i} = -\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 4\mathrm{i} = 0.$$

i est donc bien une solution de (E).

2 Développons :

$$\begin{aligned}
(z-\mathrm{i})(z^2+bz+c) &= z^3 + bz^2 + cz - \mathrm{i}z^2 - b\mathrm{i}z + c\mathrm{i} \\
&= z^3 + (b-\mathrm{i})z^2 + (c-b\mathrm{i})z - c\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
z^3-3z+4\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})(z^2+bz+c) &\iff z^3-3z+4\mathrm{i}=z^3+(b-\mathrm{i})z^2+(c-b\mathrm{i})z-c\mathrm{i}\\
&\iff \begin{cases} b-\mathrm{i} &=0\\ c-b\mathrm{i} &=-3\\ -c\mathrm{i} &=4\mathrm{i}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} b=\mathrm{i}\\ c=-4\end{cases}
\end{aligned}$$

D'où :

$$(\mathrm{E}) \iff (z-\mathrm{i})(z^2+\mathrm{i}z-4)=0.$$

3 Le discriminant de $z^2+\mathrm{i}z-4$ est :

$$\Delta=b^2-4ac=(\mathrm{i})^2-4\times(-4)=-1+16=15.$$

Donc ses racines sont :

$$z_1=\frac{-\mathrm{i}+\sqrt{15}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{15}}{2}.$$

Les solutions de (E) (sous la forme algébrique) sont donc :

$$\boxed{\mathrm{i} \quad ; \quad -\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \quad ; \quad \frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}}$$

Corrigé de l'exercice 1.11 page 29

$$\begin{aligned}
(a+\mathrm{i}b)^2=\mathrm{i} &\iff a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=\mathrm{i}\\
&\iff \begin{cases} a^2-b^2=0\\ 2ab=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a^2-b^2=0\\ b=\dfrac{1}{2a}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a^2-\left(\frac{1}{2a}\right)^2=0\\ b=\dfrac{1}{2a}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 2a^4-1=0\\ b=\dfrac{1}{2a}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a^4=\frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad a^2=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{soit} \quad a=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\\ b=\dfrac{1}{2a}\end{cases}
\end{aligned}$$

Simplifions l'écriture de a en considérant que $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, et donc que $\sqrt{\sqrt{2}} = \left(2^{1/2}\right)^{1/2} = 2^{1/4}$.

Ainsi, $a = \pm\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{2^{1/4}}{2^{1/2}} = \pm 2^{-1/2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Alors, $b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On obtient finalement :

$$\boxed{\sqrt{\mathrm{i}} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)}$$

Corrigé de l'exercice 1.12 page 29

Nous allons nous inspirer de ce qui a été fait dans l'exercice permettant d'obtenir $\sqrt{\mathrm{i}}$.
Cherchons les réels a et b tels que $(a + \mathrm{i}b)^2 = -7 + 24\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}
(a+\mathrm{i}b)^2 = -7+24\mathrm{i} &\iff a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i} = -7 + 24\mathrm{i} \\
&\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = 24 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 - \left(\frac{12}{a}\right)^2 = -7 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^4 - 144 = -7a^2 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^4 + 7a^2 - 144 = 0 \\ b = \frac{12}{a} \end{cases}
\end{aligned}$$

Considérons l'équation :

$$a^4 + 7a^2 - 144 = 0 \qquad \text{(E)}$$

En posant $\mathrm{A} = a^2$,

$$\text{(E)} \iff \mathrm{A}^2 + 7\mathrm{A} - 144 = 0.$$

Le discriminant de cette dernière équation est :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times (-144) = 625 = 25^2$$

donc :

$$\mathrm{A} = \frac{-7 \pm 25}{2} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{A} = -16 \text{ ou } \mathrm{A} = 9.$$

Or, $\mathrm{A} = a^2 \geqslant 0$ donc seule $\mathrm{A} = 9$ est possible, soit $a = \pm 3$. Ainsi, $b = \pm\dfrac{12}{3} = \pm 4$.
Finalement,

$$\boxed{\sqrt{-7 + 24\mathrm{i}} = \pm(3 + 4\mathrm{i})}$$

Corrigé de l'exercice 1.13 page 29

- L'affixe de $\overrightarrow{w_1}$ est : $9-3\mathrm{i}$.
- L'affixe de $\overrightarrow{w_2}$ est : $2+6\mathrm{i}$.
- L'affixe de $\overrightarrow{w_3}$ est : $3+0\mathrm{i}=3$.
- L'affixe de $\overrightarrow{w_4}$ est : $0+5\mathrm{i}=5\mathrm{i}$.
- L'affixe de M_1 est : $-5-3\mathrm{i}$.
- L'affixe de M_2 est : $0-4\mathrm{i}=-4\mathrm{i}$.
- L'affixe de M_1 est : $4+0\mathrm{i}=4$.

Corrigé de l'exercice 1.14 page 30

1 $|\mathrm{i}|=1$ car l'image de i est le point de coordonnées $(0;1)$ et la distance qui le sépare de l'origine du repère est égale à 1.

2 $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

3 $|1-\mathrm{i}|=\left|\overline{1-\mathrm{i}}\right|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.

4 $|-3+2\mathrm{i}|=\sqrt{(-3)^3+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

5 $|-4|=4$ car la distance qui sépare O du point image de $z=-4$ est égale à 4. On s'aperçoit d'ailleurs ici que le module est égal à la valeur absolue quand le complexe est réel.

6 $|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

7 $|5-2\mathrm{i}|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

8 $|4,5+6\mathrm{i}|=\sqrt{(4,5)^2+6^2}=\sqrt{56,25}=7,5$.

Corrigé de l'exercice 1.15 page 30

1 $\left|(1+\mathrm{i})^{16}\right|=|1+\mathrm{i}|^{16}=\left(\sqrt{2}\right)^{16}=2^8=256$.

> **Remarque 26**
>
> À mon avis, il est important que savoir que $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$ car il revient assez souvent dans les calculs.

2 $\left|(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\right|=|2-\mathrm{i}|\times|1+\mathrm{i}|=\sqrt{4+1}\times\sqrt{2}=\sqrt{10}$.

3 $\left|\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|1-\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.

4 $(5-3\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})=|5+3\mathrm{i}|^2=5^2+3^2=34$.

Corrigé de l'exercice 1.16 page 30

1 $z_1=1+\mathrm{i}$.
$|z_1|=\sqrt{2}$. On factorise alors z_1 par $\sqrt{2}$:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Un argument θ de z_1 est donc tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi].$$

Finalement,

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

2 $z_2 = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$.
$|\,z_2\,| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$. Alors,

$$z_2 = 4\left(\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}\mathrm{i}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

$$\theta = \arg(z_2) \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi].$$

Finalement,

$$\boxed{z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

3 $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Remarque 27

Dans cette question, il n'était pas utile de calculer le module car si on connaît les sinus et cosinus des angles remarquables, on trouve directement un argument.
Ici, $\arg(z_3) = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

4 $z_4 = -2 + 2\mathrm{i}$.
$|\,z_4\,| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Alors,

$$z_4 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\theta = \arg(z_4) \iff \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{3\pi}{2} \quad [2\pi].$$

Finalement,

$$\boxed{z_4 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]}$$

Corrigé de l'exercice 1.17 page 30

1 $|z_1| = |1+\mathrm{i}|^4 = (\sqrt{2})^4 = 4.$

$\arg(z_1) = \arg\left[(1+\mathrm{i})^4\right] = 4\arg(1+\mathrm{i}) = 4\times\dfrac{\pi}{4} \mod 2\pi = \pi \mod 2\pi.$

Donc $z_1 = 4\big(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)\big) = 4(-1+\mathrm{i}\times 0)$, soit $\boxed{z_1=-4}$.

2 $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|1+\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}|} = 1.$

$\arg\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right) = \arg(1+\mathrm{i}) - \arg(1-\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi.$

On en déduit alors que $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$, soit $\boxed{z_2 = \mathrm{i}}$.

Corrigé de l'exercice 1.18 page 30

1 $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ et $z' = \cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right).$

Ainsi, $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}.$

De plus, $|z| = |z'| = 1$ donc $|zz'| = 1$.

Finalement,

$$\boxed{zz' = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}.$$

2 $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$

$z' = \cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} zz' &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \boxed{zz'} &\boxed{= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}} \end{aligned}$$

3 Des questions précédentes, on déduit :

$$zz' = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$$

et donc :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

Remarque 28

On voit ici l'une des grandes applications des nombres complexes : obtenir des valeurs exactes d'angles non remarquables.

Corrigé de l'exercice 1.19 page 31

Le polynôme z^2+z+1 a pour discriminant :

$$\Delta = -3$$

donc ses racines sont :

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$$

et son conjugué :

$$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

Or, par définition, $\jmath$ est une racine de ce polynôme : c'est celle dont la partie imaginaire est strictement positive, donc $\jmath = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.

Ainsi, l'autre racine correspond à $\bar{\jmath}$, ce qui justifie que $\bar{\jmath}^{\,2}+\bar{\jmath}+1=0$.

Corrigé de l'exercice 1.20 page 31

1

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\mathrm{i}z_0+1-\mathrm{i}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\times\mathrm{i}+1-\mathrm{i}\\ &= -\frac{1}{2}+1-\mathrm{i}\\ &= \frac{1}{2}-\mathrm{i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{2}\mathrm{i}z_1+1-\mathrm{i}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\times\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)+1-\mathrm{i}\\ &= \frac{1}{4}\mathrm{i}+\frac{1}{2}+1-\mathrm{i}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{3}{4}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= z_{n+1}-\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}z_n+1-\mathrm{i}-\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}z_n-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(z_n-\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\mathrm{i}}-\frac{\frac{3}{5}\mathrm{i}}{\frac{1}{2}\mathrm{i}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(z_n+\frac{2}{5}\mathrm{i}-\frac{6}{5}\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{2}\mathrm{i}$ et de premier terme :

$$\begin{aligned} v_0 &= z_0-\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\\ v_0 &= -\frac{6}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

3 On déduit de la question précédente que :

$$v_n = v_0\times q^n = \left(-\frac{6}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}\right)\times\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n$$

et donc :

$$z_n = v_n+\frac{6}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i} = \left(-\frac{6}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}\right)\times\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n+\frac{6}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$$

4 $\mid v_n \mid = \mid v_0 \mid \times \left|\frac{1}{2}\text{i}\right|^n = \mid v_0 \mid \times \frac{1}{2^n} = \frac{\mid v_0 \mid}{2^n}$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid v_n \mid = 0$.

On peut alors en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Or, $z_n = v_n + \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\text{i}$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\text{i}}$$

Corrigé de l'exercice 1.21 page 31

Rappelons que l'écriture exponentielle d'un nombre complexe est $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+$.

1 $3\text{i}\text{e}^{\text{i}\pi}$ n'est pas une forme complexe car $3\text{i} \notin \mathbb{R}$. On doit alors modifier cela :

$$3\text{i}\text{e}^{\text{i}\pi} = 3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}\text{e}^{\text{i}\pi} = 3\text{e}^{\frac{3\pi}{2}\text{i}}.$$

2 $-2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ n'est pas une écriture exponentielle car $-2 \notin \mathbb{R}_+$.

$$-2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = 2\text{e}^{\text{i}\pi}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = 2\text{e}^{\frac{4\pi}{3}\text{i}}.$$

3 $\pi\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ est l'écriture exponentielle du nombre complexe de module $\pi \in \mathbb{R}_+$ et dont un argument est $\theta = \frac{\pi}{6}$.

4 $5 = 5\text{e}^{0\text{i}}$ donc c'est bien une forme exponentielle du nombre complexe de module 5 et dont un argument est 0.

5 $4\text{e}^{\frac{\pi}{5}} = 4\text{e}^{\frac{\pi}{5}}\text{e}^{0\text{i}}$ est bien l'écriture exponentielle du nombre complexe de module $4\text{e}^{\frac{\pi}{5}}$ et dont un argument est 0.

6 $-\pi$ n'est pas une écriture exponentielle :

$$-\pi = \pi\text{e}^{\text{i}\pi}$$

représente le nombre complexe de module π et dont un argument vaut π.

Remarque 29

Le nombre complexe $-\pi$ est d'ailleurs appelé le *nombre incontinent* du fait que $(r, \theta) = (\pi, \pi)$...
Mais non ! Ceci est un calembour bien sûr ! Nous, les matheux, sommes connus pour notre sens de l'humour...

Corrigé de l'exercice 1.22 page 31

- $$\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1 \iff \cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1$$
$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1$$
$$\iff \cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$$
$$\iff \boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}$$

- $$\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \iff \frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\iff \sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$
$$\iff \boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

Remarque 30

On prend ici la valeur positive du sinus et du cosinus car $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 1.23 page 32

Remarquons que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$. Ainsi,

- $$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12}&=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$
$$\boxed{\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

- $$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{12}&=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$
$$\boxed{\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

Corrigé de l'exercice 1.24 page 32

1 $$\begin{aligned}(1+i)^9&=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^9\\&=16\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)\\&=16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$
$$\boxed{(1+i)^9=16+16i}$$

2 $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6 = \left[2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right]^6$

$$= \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^6$$

$$= 2^6\big(\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)\big)$$

$\boxed{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6 = -64}$

3 $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^9 = \left[2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right]^9$

$$= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}\mathrm{i}\sin+\frac{\pi}{3}\right)\right]^9$$

$$= 2^9\left(\cos\frac{9\pi}{3}\mathrm{i}\sin+\frac{9\pi}{3}\right)$$

$$= 512\big(\cos(3\pi)+\mathrm{i}\sin(3\pi)\big)$$

$$= 512\big(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)\big)$$

$\boxed{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^9 = -512}$

Corrigé de l'exercice 1.25 page 32

Posons $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. En effet, $z^3=1 \iff |z|^3=1 \iff |z|=1$.
Alors,

$$z^3=1 \iff \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+2k\pi)},\ k\in\mathbb{Z} \iff \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

- Si $k=3p$, $p\in\mathbb{Z}$, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 2p\pi}=1$;
- si $k=3p+1$, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+2p\pi\right)}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}=\jmath$;
- si $k=3p+2$, $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}+2p\pi\right)}=\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}=\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}=\bar{\jmath}$.

Finalement, il n'y a que trois complexes dont le cube est égal à 1 : 1, $\jmath=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $\bar{j}=\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ (rencontrés dans l'exercice 1.19).

Corrigé de l'exercice 1.26 page 32

Nous savons que :

$$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\times\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\in\mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 1.27 page 32

Nous allons ici avoir besoin du binôme de Newton, et plus particulièrement du développement :

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\
&= \frac{e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8}\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]\\
\cos^3(x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(3x)+3\cos(x)\right]\\
&\boxed{\cos^3(x) = \frac{1}{2}\cos(3x)+\frac{3}{2}\cos(x)}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.28 page 32

Nous allons ici avoir besoin du binôme de Newton, et plus particulièrement du développement :

$$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.$$

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5\\
&= \frac{e^{5ix}-5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}-10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}-e^{-5ix}}{32i}\\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}-5\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+10\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right]\\
&= \frac{1}{16}\big(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\big)\\
&\boxed{\sin^5(x) = \frac{1}{16}\sin(5x)-\frac{5}{16}\sin(3x)+\frac{5}{8}\sin(x)}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.29 page 32

1 On a : $\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{\pi}{8}}-e^{i\frac{\pi}{8}}\right)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{8}}}\times\frac{2i\times\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i}}{2i\times\frac{e^{-i\frac{\pi}{8}}-e^{i\frac{\pi}{8}}}{2i}}\\
&= e^{i\frac{\pi}{24}}\times\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{8}}\\
&= e^{i\frac{\pi}{24}}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}e^{i\frac{\pi}{24}}}$$

2 On a :

$$\frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

(on a multiplié par le conjugué du dénominateur)

$$= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}\right)}{\frac{4-4\sqrt{2}+2+2}{4}}$$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i\right)\times\frac{4}{8-4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8-4\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{8-4\sqrt{2}}i\times\frac{8+4\sqrt{2}}{8+4\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}+\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}i}$$

3 Des questions 1 et 2, on déduit l'égalité suivante :

$$\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}+\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}e^{i\frac{\pi}{24}}$$

soit :

$$e^{i\frac{\pi}{24}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}+\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}i\right)$$

D'où :

$$\cos\frac{\pi}{24} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}.$$

et :

$$\sin\frac{\pi}{24} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}.$$

Corrigé de l'exercice 1.30 page 33

1 $w^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i\frac{2\pi}{5}\times 5} = e^{2i\pi} = 1.$

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{w^5 - 1}{w - 1} = 0.$$

2 On développe le second membre de l'égalité :

$$\begin{aligned}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 &= z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} - 1\\ &= z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1.\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1}$$

3 **a.** Le polynôme $Z^2 + Z - 1$ a pour discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-1) = 5.$$

Il admet donc deux racines réelles distinctes :

$$Z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

b. D'après la question 1,

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0\,,$$

donc

$$\frac{1}{w^2}\left(1+w+w^2+w^3+w^4\right) = 0\,,$$

soit, d'après la question 2 :

$$\left(w+\frac{1}{w}\right)^2 + \left(w+\frac{1}{w}\right) - 1 = 0.$$

ou encore :

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}}\right) - 1 = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} &= \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\\ &= 2\cos\frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0. \qquad (1)$$

$2\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $Z^2+Z-1=0$ donc, d'après la question précédente :

$$2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad 2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

soit :

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Or, $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ car $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ d'où :

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

Corrigé de l'exercice 1.31 page 33

Par définition,

$$z_n=(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)+\big(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)\big)+\cdots+\big(\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)\big)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{k\mathrm{i}x}.$$

On va ici utiliser la formule :

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad , \quad q\neq 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left[\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-(n+1)\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right]}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right]} \\ &= \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\frac{x}{2}}\times\frac{\cancel{2\mathrm{i}}\sin\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\cancel{2\mathrm{i}}\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$C_n=\Re\mathrm{e}(z_n)=\cos\left(n\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}$$

et

$$S_n=\Im\mathrm{m}(z_n)=\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Corrigé de l'exercice 1.32 page 34

1 $$\begin{aligned} z^3-27 &= z^3-3^3 \\ &= \underline{(z-3)(z^2+3z+9)}. \end{aligned}$$

2 $$\begin{aligned} z^5-\mathrm{i} &= z^5-\mathrm{i}^5 \\ &= (z-\mathrm{i})(z^4+\mathrm{i}z^3+\mathrm{i}^2z^2+\mathrm{i}^3z+\mathrm{i}^4) \\ &= \underline{(z-\mathrm{i})(z^4+\mathrm{i}z^3-z^2-\mathrm{i}z+1)}. \end{aligned}$$

3 $$\begin{aligned} z^4-4 &= (z^4-\left(\sqrt{2}\right)^4 \\ &= \left(z-\sqrt{2}\right)\left(z^3+\sqrt{2}z^2+(\sqrt{2})^2z+(\sqrt{2})^3\right) \\ &= \underline{\left(z-\sqrt{2}\right)\left(z^3+\sqrt{2}z^2+2z+2\sqrt{2}\right)}. \end{aligned}$$

4 $$\begin{aligned} z^6+64 &= z^6-(2\mathrm{i})^6 \\ &= (z-2\mathrm{i})\left(z^5+2\mathrm{i}z^4+(2\mathrm{i})^2z^3+(2\mathrm{i})^3z^2+(2\mathrm{i})^4z+(2\mathrm{i})^5\right) \\ &= \underline{(z-2\mathrm{i})\left(z^5+2\mathrm{i}z^4-4z^3-8\mathrm{i}z^2+16z+32\mathrm{i}\right)}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1.33 page 34

$\mathrm{P}(z)=\dfrac{1}{2}z^3+5z+\dfrac{11}{2}$ donc :

$$\mathrm{P}(-1)=\frac{1}{2}\times(-1)^3+5\times(-1)+\frac{11}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$$

On en déduit alors que :

$$\mathrm{P}(z)=(z-(-1))(az^2+bz+c)=(z+1)(az^2+bz+c).$$

En développant, on trouve :

$$\mathrm{P}(z)=az^3+(a+b)z^2+(b+c)z+c.$$

En identifiant les coefficients, on a :

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ a+b &= 0 \\ b+c &= 5 \\ c &= \frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{11}{2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathrm{P}(z)=(z+1)\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z+\frac{11}{2}\right).$$

Le discriminant de $\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z+\frac{11}{2}$ est :

$$\Delta=-\frac{43}{4}$$

donc ses racines complexes sont :

$$z_1=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{43}}{2}\mathrm{i}}{2\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{43}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{43}}{2}\mathrm{i}.$$

Les solutions de l'équation $\mathrm{P}(z)=0$ sont donc -1, z_1 et z_2.

Corrigé de l'exercice 1.34 page 34

$$z^4+3z^3-z-3=0. \qquad \text{(E)}$$

1 En remplaçant z par -3 dans le membre de gauche de (E), on obtient :

$$\begin{aligned}(-3)^4+3(-3)^3-(-3)-3 &= 81-81+3-3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, -3 est bien solution de (E).

On peut alors en déduire que :

$$z^4+3z^3-z-3=(z+3)\mathrm{Q}(z).$$

Remarque 31

On pouvait aussi le voir en écrivant :

$$z^4+3z^3-z-3=z^3(z+3)-(z+3)=(z+3)(z^3-1).$$

2 Cette question, consistant à trouver nous-même une solution de (E), nous pousse à nous dire qu'il en existe une évidente. Commençons donc par remplacer z par 1 :

$$\begin{aligned}1^4+3\times1^3-1-3 &= 1+3-1-3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc 1 est solution de (E).

Remarque 32

On pouvait aussi s'aider de la factorisation trouvée dans la remarque précédente :

$$z^4+3z^3-z-3=0 \iff (z+3)(z^3-1)=0$$

Une valeur de z qui annule le second facteur est $z=1$.

3 D'après la remarque précédente, on sait que $z^4+3z^3-z-3=(z+3)(z^3-1)$. De plus,

$$1+z+z^2=\frac{z^3-1}{z-1}$$

donc :

$$z^4+3z^3-z-3=(z+3)(z-1)(z^2+z+1).$$

Les racines de z^2+z+1 sont $\jmath=\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{\jmath}=\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}=\jmath^2$.

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont :

$$-3\,;\,1\,;\,\jmath\,;\,\jmath^2.$$

Corrigé de l'exercice 1.35 page 34

Le discriminant de $3\mathrm{i}z^2+2z+\mathrm{i}$ est :

$$\Delta = 2^2-4\times 3\mathrm{i}\times\mathrm{i} = 4-12\mathrm{i}^2 = 4+12 = 16.$$

Il y a donc deux solutions à (E) :

$$z_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = \mathrm{i}$$

et

$$z_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3\mathrm{i}} = \frac{1}{3\mathrm{i}} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}.$$

Corrigé de l'exercice 1.36 page 34

1 $(a+\mathrm{i}b)^2 = -15+8\mathrm{i} \iff a^2-b^2+2ab\mathrm{i} = -15+8\mathrm{i}$

$$\iff \begin{cases} a^2-b^2 & = -15 \\ 2ab & = 8 \end{cases}$$

De la seconde égalité, on peut écrire :

$$b = \frac{4}{a}$$

et déduire, à partir de la première :

$$a^2-\frac{16}{a^2} = -15 \iff a^4+15a^2-16 = 0.$$

En posant $x = a^2$, on a : $x^2+15x-16 = 0$, de racine évidente $x_1 = 1$ et donc de seconde racine $x_2 = \frac{c}{a} = -16$.

Ainsi, $a^2 = 1$, soit $a = 1$ ou $a = -1$, ou $a^2 = 16$, soit $a = 4$ ou $a = -4$.

- Si $a = 1$, $b = 4$; dans ce cas, $(a+\mathrm{i}b)^2 = (1+4\mathrm{i})^2 = -15+8\mathrm{i}$.
- Si $a = -1$, $b = -4$; dans ce cas, $(a+\mathrm{i}b)^2 = (-1-4\mathrm{i})^2 = -15+8\mathrm{i}$.
- Si $a = 4$, $b = 1$; dans ce cas, $(a+\mathrm{i}b)^2 = (4+\mathrm{i})^2 = 15+8\mathrm{i}$.
- Si $a = -4$, $b = -1$; dans ce cas, $(a+\mathrm{i}b)^2 = (-4-\mathrm{i})^2 = 15+8\mathrm{i}$.

Nous voyons alors qu'il n'y a que deux possibilités : $1+4\mathrm{i}$ et $-1-4\mathrm{i}$.

2 Le discriminant de $2z^2-3z+3-\mathrm{i}$ est :

$$\Delta = (-3)^2-4\times 2\times(3-\mathrm{i}) = 9-24+8\mathrm{i} = -15+8\mathrm{i}.$$

Les deux solutions complexes de (E) sont alors :

$$z_1 = \frac{3-\sqrt{-15+8\mathrm{i}}}{4} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+\sqrt{-15+8\mathrm{i}}}{4}.$$

Or, $(1+4\mathrm{i})^2 = -15+8\mathrm{i}$ et $(-1-4\mathrm{i})^2 = -15+8\mathrm{i}$ donc $\sqrt{-15+8\mathrm{i}} = 1+4\mathrm{i}$ et $\sqrt{-15+8\mathrm{i}} = -1-4\mathrm{i}$.

- Si $\sqrt{-15+8i} = 1+4i$,

$$z_1 = \frac{3-(1+4i)}{4} = \frac{2-4i}{4} = \frac{1}{2} - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+(1+4i)}{4} = 1+i.$$

- Si $\sqrt{-15+8i} = -1-4i$,

$$z_1 = \frac{3-(-1-4i)}{4} = 1+i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+(-1-4i)}{4} = \frac{1}{2} - i.$$

Finalement, les deux solutions de (E) sont $1+i$ et $\frac{1}{2} - i$.

Corrigé de l'exercice 1.37 page 35

On a : $a = -3+3i$, $b = -2-6i$ et $c = 6+4i$. Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{c-a} &= \frac{-2-6i-(-3+3i)}{6+4i-(-3+3i)}\\ &= \frac{1-9i}{9+i}\\ &= \frac{i(9+i)}{9+i}\\ &= i.\end{aligned}$$

Remarque 33

Quand on remarque que les parties réelles et imaginaires sont inversées au numérateur et au dénominateur, et que le signe entre les deux parties n'est pas le même, c'est que le numérateur est égal à i fois le dénominateur.

On conclut donc que $\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = |i| = 1$ et $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Par conséquent, ABC est un triangle isocèle rectangle en A.

Corrigé de l'exercice 1.38 page 35

On a :

$$\frac{b}{a} = j \qquad \text{donc} \qquad \arg\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ et } |a| = |b|.$$

Par conséquent, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$ et OA = OB.

Le triangle OAB est donc isocèle en O et $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

De plus,

$$\frac{c}{b} = j \qquad \text{donc} \qquad \arg\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ et } |c| = |b|.$$

Par conséquent, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$ et OC = OB.

Le triangle OBC est donc isocèle en O et $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Ainsi,

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = \frac{\pi}{3}.$$

On démontre de même que $\widehat{BCA} = \dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est donc équilatéral.

Remarque 34

Avec les données OA = OB = OC et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, on peut aussi conclure que ABC est équilatéral.

Corrigé de l'exercice 1.39 page 35

$a = 2+2\mathrm{i}$, $b = 5-\mathrm{i}$ et $c = -1-\mathrm{i}$. Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{c-a} &= \frac{3-3\mathrm{i}}{-3-3\mathrm{i}}\\ &= \frac{1-\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} \times \frac{-1+\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}\\ &= \frac{2\mathrm{i}}{2}\\ &= \mathrm{i}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. Donc $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui justifie que ABC est rectangle en A.

De plus, $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{|1-\mathrm{i}|}{|-1-\mathrm{i}|} = 1$. On peut alors compléter en disant que ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

Corrigé de l'exercice 1.40 page 35

1. On sait que $1 + \jmath + \jmath^2 = 0$ (par définition de $\jmath$), ce qui équivaut à dire que $\jmath^2 = -1 - \jmath$.
2. Par hypothèse, $a + b\jmath + c\jmath^2 = 0$. D'après la question précédente, cela revient à écrire :

$$a + b\jmath + c(-1-\jmath) = 0 \quad \text{soit :} \quad a - c + (b-c)\jmath = 0 \quad \text{ou encore :} \quad \jmath = -\frac{a-c}{b-c}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\arg(\jmath) = \arg\left(-\frac{a-c}{b-c}\right) &\iff \frac{2\pi}{3} = \pi + \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)\\ &\iff \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = \frac{\pi}{3}\\ &\iff \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

De plus, $\left|\dfrac{a-c}{b-c}\right| = |\jmath| = 1$ donc AC = BC.

On en déduit alors que ABC est isocèle en C et comme $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, il est équilatéral.

Corrigé de l'exercice 1.41 page 35

1
$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k = 1+e^{\frac{2i\pi}{n}}+e^{\frac{4i\pi}{n}}+e^{\frac{6i\pi}{n}}+\dots+e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$$
$$=\frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$
$$=\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$
$$=\frac{1-1}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$
$$=0.$$

2 On souhaite calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^p = 1+e^{\frac{2pi\pi}{n}}+e^{\frac{4pi\pi}{n}}+e^{\frac{6pi\pi}{n}}+\dots+e^{\frac{2pi(n-1)\pi}{n}}$$
$$=\frac{1-\left(e^{\frac{2pi\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$
$$=\frac{1-e^{2pi\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$
$$=\frac{1-\left(e^{2i\pi}\right)^p}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$
$$=\frac{1-1^p}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$
$$=0.$$

Corrigé de l'exercice 1.42 page 36

1

- $|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$

  $a = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right] = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$

  Donc $\arg(a) = -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

- $|b| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$

  $b = 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$

  Donc $\arg(b) = -\dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

- $|g| = \dfrac{4|b|}{3\sqrt{3}|a|} = \dfrac{4\times 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times 2} = \dfrac{4}{3}.$

$$\begin{aligned}\arg(g) &= \arg\left(\frac{4b}{3\sqrt{3}a}\right) \qquad .\\ &= \arg(4b) - \arg(3\sqrt{3}a)\\ &= \arg(b) - \arg(a)\\ &= -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\\ \arg(g) &= -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]\end{aligned}$$

2 $|a| \neq |b|$ donc OAB n'est pas isocèle en O, ni équilatéral.

De plus, nous avons vu précédemment que $\arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$, ce qui signifie que OAB est rectangle en O.

3 I est le milieu de [AB] donc son affixe est :

$$z_I = \frac{a+b}{2} = -2i.$$

D'après la question précédente,

$$g = \frac{4}{3}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -\frac{4}{3}i.$$

Par conséquent, I et G appartiennent à l'axe des imaginaires ; O, I et G sont donc alignés.

4 Calculons :

$$\frac{a+b+0}{3} = -\frac{4}{3}i = g.$$

Donc G est bien le centre de gravité du triangle OAB.

Remarque 35

On n'oublie pas que le centre de gravité d'un triangle ABC, où a, b et c sont les affixes respectives de A, B et C, a pour affixe $\dfrac{a+b+c}{3}$.

Corrigé de l'exercice 1.43 page 36

1 **a.**

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}\\ &= \frac{\left(-3 - i\sqrt{3}\right)^2}{\left(-3 + i\sqrt{3}\right)\left(-3 - i\sqrt{3}\right)} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}\\ &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

b. De la question précédente, on déduit que $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Or, $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$. Donc, $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

De plus, $z_A = \overline{z_B}$, ce qui signifie que A et B sont symétriques par rapport à $\left(O;\ \vec{u}\right)$, et C se trouve sur $\left(O;\ \vec{u}\right)$ donc CA = CB. Le triangle ABC est donc isocèle en C. Et comme l'angle au sommet principal est égal à $\dfrac{\pi}{3}$, on en déduit que <u>ABC est équilatéral.</u>

c. Si z représente l'affixe de ce centre :

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>Ainsi, O est le centre du cercle circonscrit à ABC.</u>
Le rayon de Γ_1 est donc OC, soit 2.

2 **a.** Posons $z = x + iy$. Alors,

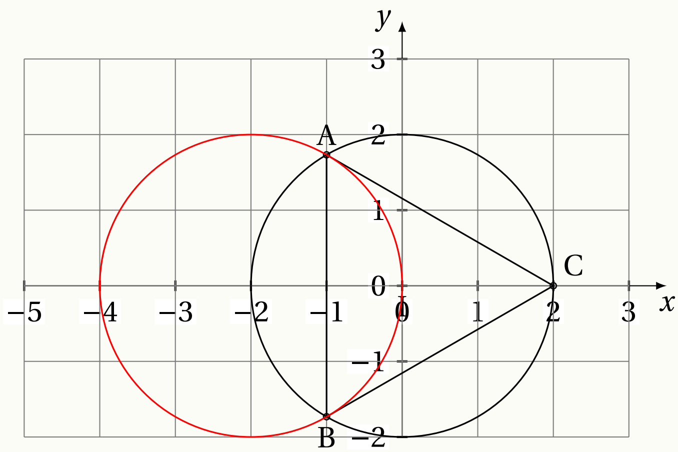
$$\begin{aligned} 2\left(z + \overline{z}\right) + z\overline{z} = 0 &\iff 2(x + iy + x - iy) + (x + iy)(x - iy) = 0 \\ &\iff 4x + x^2 + y^2 = 0 \\ &\iff (x+2)^2 - 4 + (y-0)^2 = 0 \\ &\iff (x+2)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \end{aligned}$$

<u>Ainsi, l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation est le cercle de centre $\Omega(-2; 0)$ et de rayon $r = 2$.</u>

b. On remplace z par z_A dans l'expression $2(z + \overline{z}) + z\overline{z}$:

$$\begin{aligned} 2(z_A + \overline{z_A}) + z_A\overline{z_A} &= 4\mathrm{Re}(z_A) + |\, z_A \,|^2 \\ &= -4 + ((-1)^2 + \sqrt{3}^2 \\ &= -4 + 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

z_A satisfait l'équation donc $A \in \Gamma_2$.
Comme $z_B = \overline{z_A}$ et que l'équation est symétrique en z et $\overline{z}$, $B \in \Gamma_2$.



Corrigé de l'exercice 1.44 page 36

1 $Z = \dfrac{[x-2+\mathrm{i}(y+1)](x-(y+2)\mathrm{i})}{(x+(y+2)\mathrm{i})(x-(y+2)\mathrm{i})}$

$= \dfrac{x(x-2)+(y+1)(y+2)+\mathrm{i}[x(y+1)-(x-2)(y+2)]}{x^2-(y-2)^2}$

Donc $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2-(y-2)^2}$ et $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{-x+2y+4}{x^2-(y-2)^2}$.

a. $Z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(Z) = 0 \Rightarrow -x+2y+4 = 0$.

Ainsi, $\mathscr{E}$ est la droite d'équation cartésienne $-x+2y+4=0$.

b. $Z = k\mathrm{i},\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

$\mathscr{F}$ est donc le cercle de centre d'affixe $1-\frac{3}{2}\mathrm{i}$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c. $|Z| = 1 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$.

$\mathscr{G}$ est donc la médiatrice de [AB].

2 **a.** $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right)$. $Z \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(Z) = 0 \mod \pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \mod \pi$.

Donc, A, B et M sont alignés. $\mathscr{E}$ est donc la droite (AB).

b. $Z = k\mathrm{i},\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \mod \pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$.

Ainsi, BAM est un triangle rectangle en M. Donc $\mathscr{F}$ est le cercle de diamètre [AB].

c. $|Z| = 1 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$.

$\mathscr{G}$ est donc la médiatrice de [AB].

3 $Z-1 = \dfrac{z-2+\mathrm{i}-z-2\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}} = \dfrac{-2-\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}$ donc $|Z-1| \times |z+2\mathrm{i}| = |-2-\mathrm{i}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Si $M \in \mathscr{C}_{(B,\sqrt{5})}$, alors $z = z_B + \sqrt{5}e^{\mathrm{i}\theta}$ et donc $|z+2\mathrm{i}| = |\sqrt{5}e^{\mathrm{i}\theta}| = \sqrt{5}$.

Ainsi, $|Z-1| = 1$. Donc M′ sera sur le cercle de centre d'affixe 1 et de rayon 1.

Corrigé de l'exercice 1.45 page 37

1 Par construction, on peut dire que A est l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Donc :

$$PA = PB \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA}\right) = \frac{\pi}{2}$$

soit :

$$|a-p| = |b-p| \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{a-p}{b-p}\right) = \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$\frac{a-p}{b-p} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$$

et donc :

$$\begin{aligned} & a-p = \mathrm{i}(b-p) \\ \iff\ & a-\mathrm{i}b = p-\mathrm{i}p \\ \iff\ & \boxed{p = \frac{a-\mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}}} \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$q = \frac{b - \mathrm{i}c}{1-\mathrm{i}} \quad , \quad r = \frac{c - \mathrm{i}d}{1-\mathrm{i}} \quad , \quad s = \frac{d - \mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}}.$$

2 $\dfrac{s-q}{r-p} = \dfrac{d-b+\mathrm{i}(c-a)}{c-a+\mathrm{i}(b-d)} = \mathrm{i}.$

Donc $\arg\left(\dfrac{s-q}{r-p}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\left|\dfrac{s-q}{r-p}\right| = 1.$

On en déduit que (PR) et (QS) sont perpendiculaires et que PR = QS.

Corrigé de l'exercice 1.46 page 37

1 A étant l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, on peut écrire :

$a - p = \mathrm{i}(b-p)$ (voir correction de la question 1 de l'exercice 1.46 pour plus de détails).

De même, $b - q = \mathrm{i}(c-q)$ et $c - r = \mathrm{i}(a-r)$.

En additionnant membre à membre ces trois égalités, on a :

$$a+b+c-(p+q+r) = \mathrm{i}(a+b+c-(p+q+r)),$$

soit :

$$\underline{a+b+c = p+q+r}.$$

2 De l'égalité $a - p = \mathrm{i}(b-p)$, on en déduit que $p = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}}$.

De même, à partir des autres égalités, on a : $q = \dfrac{b-\mathrm{i}c}{1-\mathrm{i}}$ et $r = \dfrac{c-\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}}$.

3 On a :

$$\frac{r-p}{q-a} = \frac{c-a+\mathrm{i}(b-a)}{b-a+\mathrm{i}(a-c)} = \mathrm{i}.$$

Ainsi (PR) et (AQ) sont perpendiculaires ; donc (AQ) est la hauteur issue de A de PQR.
Par un raisonnement analogue, on démontre que (BR) et (CP) sont les deux autres hauteurs de PQR.

(AQ), (BR) et (CP) sont donc concourantes.

Corrigé de l'exercice 1.47 page 38

1
$$\begin{aligned}(z+2)(z^2-2z+4)=0 &\iff z+2=0 \quad \text{ou} \quad z^2-2z+4=0\\ &\iff z=-2 \text{ ou } z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{\Delta}}{2} \text{ avec } \Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12\\ &\iff z=-2 \text{ ou } z=1-\mathrm{i}\sqrt{3} \text{ ou } z=1+\mathrm{i}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de (E) est donc : $\{-2\,;\,1-\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\,1+\mathrm{i}\sqrt{3}\}$.

$a=-2$, $b=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2 **a.** $|b| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ et donc :

$$b = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

donc :

$$\boxed{b = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$$

De plus, $c = \overline{b}$ donc $\boxed{c = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.

b. $|a-b| = |-2-1-\mathrm{i}\sqrt{3}|$
$= |-3-\mathrm{i}\sqrt{3}|$
$= \sqrt{9+3}$

$\boxed{|a-b| = 2\sqrt{3}}$

De plus, $|a-c| = |\overline{a}-\overline{b}|$
$= |\overline{a-b}|$
$= |a-b|$ $\boxed{|a-c| = 2\sqrt{3}}$

c. $|a-b| = |a-c|$ donc ABC est au moins isocèle en A (car AB = AC).

Calculons CB : $|b-c| = |1+\mathrm{i}\sqrt{3}-1+\mathrm{i}\sqrt{3}|$
$= |2\mathrm{i}\sqrt{3}|$

$\boxed{|b-c| = 2\sqrt{3}}$

Ainsi, BC = AB = AC donc ABC est équilatéral.

3 **a.** $f(a) = f(-2)$
$= 1 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
$= 1 - 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

$\boxed{f(a) = 1 - \sqrt{3} - \mathrm{i}}$

$f(b) = f\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$
$= 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
$= 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}$
$= 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{f(b) = 1 + 2\mathrm{i}}$

$f(c) = f\left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$
$= 1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
$= 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}$
$= 1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
$= 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

$\boxed{f(c) = 1 + \sqrt{3} - \mathrm{i}}$

b. $|f(a) - f(b)|^2 = |1 - \sqrt{3} - \mathrm{i} - 1 - 2\mathrm{i}|^2$
$= |-\sqrt{3} - 3\mathrm{i}|^2$
$= 12.$

$|f(c) - f(b)|^2 = |1 + \sqrt{3} - \mathrm{i} - 1 - 2\mathrm{i}|^2 = |\sqrt{3} - 3\mathrm{i}|^2 = 12.$

$|f(a) - f(c)|^2 = |1 - \sqrt{3} - \mathrm{i} - 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}|^2 = |-2\sqrt{3}|^2 = 12.$

Ainsi, l'image de ABC par f est aussi équilatéral.

Corrigé de l'exercice 1.48 page 38

1 Les racines quatrièmes de l'unité sont : $1, -1, \mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$.

On connaît une racine quatrième particulière de -1 : $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ car $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

Les racines quatrièmes de -1 sont obtenues en multipliant les racines quatrièmes de l'unité par z_0. En effet, si $\omega_4^4 = 1$ alors :

$$(z_0\omega_4)^4 = z_0^4 \times \omega_4^4 = -1 \times 1 = -1.$$

Ce qui donne :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad , \quad -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad , \quad \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad , -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{4}} \quad , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \quad , \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Or, les racines de $x^4 + 1$ sont précisément les racines quatrièmes de -1 d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 1 \\ &= \left(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\left(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right) \\ &= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{4} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{4} + 1\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)}$$

2 On sait que $1 + z^4 + z^8 = 0$. Donc, en multipliant par z, z^2 et z^3, on a :

$$z + z^5 + z^9 = 0 \quad ; \quad z^2 + z^6 + z^{10} = 0 \quad ; \quad z^3 + z^7 + z^{11} = 0.$$

En sommant les quatre égalités, on a :

$$\sum_{k=1}^{11} z^k = 0.$$

z étant différent de 1, cela nous donne :

$$\frac{1 - z^{12}}{1 - z} = 0\,,$$

soit :

$$z^{12} = 1.$$

<u>z est donc une racine douzième de l'unité.</u>

Corrigé de l'exercice 1.49 page 38

1 On considère un point $\mathrm{M}(z)$ sur le cercle unité ; donc :

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \bar{z}.$$

L'image de M est donc son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
L'image du cercle unité est donc le cercle unité lui-même.

2 **a.** Tout point M de la droite $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $\mathrm{M}(x\,;x+1)$ donc son affixe est $z = x+(x+1)\mathrm{i}$.

b. Soit $z = x+(x+1)\mathrm{i}$. Alors,

$$\begin{aligned} z' = \frac{1}{z} &= \frac{1}{x+(x+1)\mathrm{i}} \\ &= \frac{x-(x+1)\mathrm{i}}{x^2+(x+1)^2} \\ &= \boxed{\frac{x}{2x^2+2x+1} - \frac{x+1}{2x^2+2x+1}\mathrm{i}} \end{aligned}$$

c. On a :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{x+1}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{(2x^2+2x+1)^2}+\frac{x}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{4}+\frac{x^2+2x+1}{(2x^2+2x+1)^2}-\frac{x+1}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2x^2+2x+1}-\frac{1}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d. Si on note $\mathrm{M}'(z')$ et $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ alors, quel que soit le réel x,

$$\mathrm{M'A}^2 = \left(\frac{x}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{x+1}{2x^2+2x+1}+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\mathrm{M'A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui signifie que M′ est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

L'image de $\mathscr{D}$ est donc $\mathscr{C}$.

Corrigé de l'exercice 1.50 page 39

Partie A

1 UVW est équilatéral de sens direct donc U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Ainsi :

$$u-v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(w-v) = -\jmath^2(w-v).$$

La réciproque est évidente.

2 D'après ce qui précède, on a $u-v = -\jmath^2(w-v)$. Donc :

$$u+(-1-\jmath^2)v+\jmath^2 w = 0.$$

Or, $1+\jmath+\jmath^2=0$ donc :

$$\boxed{u+\jmath v+\jmath^2 w=0}.$$

Partie B

Par hypothèse, on a :

$$a-w=\jmath(b-w) \tag{1.4}$$
$$b-u=\jmath(c-u) \tag{1.5}$$
$$c-v=\jmath(a-v) \tag{1.6}$$

D'où :

$$a+b+c-(u+v+w)=\jmath\big(a+b+c-(u+v+w)\big).$$

Donc :

$$a+b+c=u+v+w.$$

Ainsi, ABC et UVW ont le même centre de gravité.

De l'égalité (1.4), on déduit :

$$w=\frac{a-\jmath b}{1-\jmath}.$$

De l'égalité (1.5), on déduit :

$$u=\frac{b-\jmath c}{1-\jmath}.$$

De l'égalité (1.6), on déduit :

$$v=\frac{c-\jmath a}{1-\jmath}.$$

D'où :

$$u+\jmath v+\jmath^2 w=\frac{a-\jmath b+\jmath b-\jmath^2 c+\jmath^2 c-a}{1-\jmath}=0.$$

Donc UVW est équilatéral de sens direct.

Remarque 36

Ce théorème n'a pas été découvert par Napoléon Bonaparte, même si ce dernier était assez bon mathématicien. Il semblerait que cette appellation soit plutôt un hommage à l'empereur.

Corrigé de l'exercice 1.51 page 40

1 On sait que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k=\frac{z^n-1}{z-1}$$

Or, le polynôme z^n-1 admet pour racines toutes les racines de l'unité ω_k, pour $0\leqslant k\leqslant n-1$. Par conséquent, il se factorise sous la forme :

$$z^n-1=(z-\omega_1)(z-\omega_2)\cdots(z-\omega_{n-1})=\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k).$$

De plus, $\omega_1 = \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\omega_k = \omega^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Rappelons que $\omega_0 = 1$.
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} z^n - 1 &= \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k) \\ &= (z - \omega_0) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) \\ &= (z-1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1}{z-1} \times (z-1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k)$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k).$$

2 Si $z = 1$ alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

et

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} -e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} -e^{\frac{ik\pi}{n}} \times 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} -2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

On a alors l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n-1} -2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n.$$

Comme n est un réel, on peut aussi écrire :

$$\left| \prod_{k=1}^{n-1} -2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \right| \times \left| \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| = n$$

et donc :

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=n.$$

Ainsi,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}}$$

Remarque 37

Pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, $0<\dfrac{k\pi}{n}<\pi$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)>0$.

2

Arithmétique

Plan du chapitre

I - Divisibilité

Définition 14

Un nombre relatif a est *divisible* par un entier naturel n non nul s'il existe un entier k tel que $a = kn$.

$$a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*,\ a \text{ divisible par } n \iff \exists k \in \mathbb{N}^*,\ a = kn.$$

n est alors appelé un *diviseur* de a.

Exemple 13

- 786 est divisible par 2 et par 3 car $786 = 2 \times 393$ et $786 = 3 \times 262$.
- 0 est divisible par tout entier naturel n non nul car $0 = k \times 0$.

Définition 15

L'ensemble des entiers naturels compris entre deux entiers naturels a et b est noté :

$$[\![a\,;\,b]\!].$$

Exemple 14

$[\![0\,;\,5]\!] = \{0;1;2;3;4;5\}$.

Propriété 26

Soit n un entier relatif non nul.
L'ensemble des diviseurs positifs de n est un ensemble fini.

Démonstration 16

$[\![1\,;\,|n|]\!]$ est un ensemble fini et si n possède des diviseurs alors ils appartiennent à cet ensemble.
Par conséquent, l'ensemble des diviseurs positifs de n est un sous-ensemble de $[\![1\,;\,|n|]\!]$, et est donc fini.

► Voir les exercices 2.1 et 2.2.

Propriété 27

Soient a, b et c trois entiers relatifs, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

1. Si a divise b et b divise c alors a divise c.
2. Si a divise b et c alors a divise toute combinaison linéaire de b et c.

Démonstration 17

« a divise b » peut aussi s'écrire « $a \mid b$ ».

1. $a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{N}^*,\ b = ka.$
   $b \mid c \iff \exists k' \in \mathbb{N}^*,\ c = k'b.$

Ainsi,
$$\exists (k, k') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ c = k' \times ka = (kk')a.$$
Par conséquent, il existe un entier $\mathrm{K} = kk'$ tel que $c = \mathrm{K}a$, donc $a \mid c$.

2 $a \mid b$ et $a \mid c$ donc il existe deux entiers k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'a$.
Une combinaison linéaire de b et c est $pb + qc$, p et q étant deux entiers relatifs.
$$pb + qc = p(ka) + q(k'a) = (pk + qk')a.$$
Par conséquent, $a \mid (pb + qc)$.

► Voir les exercices 2.3 à 2.18.

II - Division euclidienne

Théorème 2

Soient a et b deux entiers naturels.
Il existe un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers naturels tels que :
$$a = bq + r \qquad , \qquad 0 \leqslant r < b.$$
Cette dernière écriture est appelée la *division euclidienne de a par b*.
q est alors le *quotient* et r le *reste* de cette division.

Exemple 15

La division euclidienne de 37 par 11 est :
$$37 = 3 \times 11 + 4.$$
Le quotient de cette division est 3, et le reste 4.

► Voir les exercices 2.19 à 2.24.

III - Congruences

Définition 16

Soient a et b deux entiers relatifs On dira que a est congru à r modulo n si :
$$a = nq + r \qquad , \qquad 0 \leqslant r < n.$$
On note alors :
$$a \equiv r \quad [n] \qquad \text{ou} \qquad a \equiv r \quad (n) \qquad \text{ou} \qquad a \equiv r \mod n.$$

Exemple 16

On a :

$$17 = 3 \times 5 + 2$$

donc :

$$17 \equiv 2 \quad [3] \qquad \text{et} \qquad 17 \equiv 2 \quad [5].$$

Propriété 28

Soient a et b deux entiers relatifs, et n un entier naturel.

1. **[divisibilité]** $a \equiv b \quad (n) \iff n \mid (a-b)$.
2. **[transitivité]** Si $a \equiv c \quad (n)$ et $c \equiv b \quad (n)$ alors $a \equiv b \quad (n)$, pour $c \in \mathbb{Z}$.
3. **[somme]**
   a. $a \equiv b \quad (n) \iff a+k \equiv b+k \quad (n)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
   b. $\begin{cases} a \equiv b \quad (n) \\ a' \equiv b' \quad (n) \end{cases} \implies a+a' \equiv b+b' \quad (n)$.
4. **[produit]**
   a. $a \equiv b \quad (n) \iff ka \equiv kb \quad (n)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
   b. $\begin{cases} a \equiv b \quad (n) \\ a' \equiv b' \quad (n) \end{cases} \implies aa' \equiv bb' \quad (n)$.
5. **[puissance]** $a \equiv b \quad (n) \implies a^k \equiv b^k \quad (n)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 17

On a : $17 \equiv 1 \quad (4)$. Par conséquent,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad 17^k \equiv 1^k \quad (4)$$

soit :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad 17^k \equiv 1 \quad (4)$$

► Voir les exercices 2.25 à 2.40.

IV - PGCD de deux entiers

IV . 1 - Notion de PGCD

Définition 17

Soient a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls.
Le *plus grand commun diviseur* de a et b, noté $\operatorname{pgcd}(a;b)$ ou $\operatorname{PGCD}(a;b)$, est le plus grand diviseur de a et de b.

Exemple 18

Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5.
Ainsi, $\text{pgcd}\,(12\,;\,15) = 3$ car c'est 3 divise 12 et 15, et c'est le plus grand des diviseurs qui apparaît dans les deux listes.

IV . 2 - Algorithme d'Euclide

Propriété 29

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que :

$$\exists q \in \mathbb{N}^*,\ a = bq + r \quad , \quad 0 \leqslant r < b.$$

Alors, $\text{pgcd}\,(a\,;\,b) = \text{pgcd}\,(b\,;\,r)$.

De cette propriété, on déduit ce que l'on appelle l'algorithme d'Euclide.

Exemple 19

Prenons $a = 1\,386$ et $b = 1\,092$.

- $1\,386 = 1 \times 1\,092 + 294$.
  Ainsi, $\text{pgcd}\,(1\,386\,;\,1\,092) = \text{pgcd}\,(1\,092\,;\,294)$.
- $1\,092 = 3 \times 294 + 210$.
  Ainsi, $\text{pgcd}\,(1\,092\,;\,294) = \text{pgcd}\,(294\,;\,210)$.
- $294 = 1 \times 210 + 84$.
  Ainsi, $\text{pgcd}\,(294\,;\,210) = \text{pgcd}\,(210\,;\,84)$.
- $210 = 2 \times 84 + 42$.
  Ainsi, $\text{pgcd}\,(210\,;\,84) = \text{pgcd}\,(84\,;\,42)$.
- $84 = 2 \times 42 + 0$.
  Ainsi, $\text{pgcd}\,(84\,;\,42) = \text{pgcd}\,(42\,;\,0) = 42$.

On en déduit alors que :

$\text{pgcd}\,(1\,386\,;\,1\,092) = 42$.

► Voir les exercices 2.41 et 2.42.

Propriété 30

Soient a et b deux entiers naturels.

1. Les diviseurs communs à a et b divisent $\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$.
2. Si d divise a et d divise b alors d divise $\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$.
3. Il existe deux entiers naturels a' et b' tels que $a = a' \times \text{pgcd}\,(a\,;\,b)$ et $b = b' \times \text{pgcd}\,(a\,;\,b)$, avec $\text{pgcd}\left(a'\,;\,b'\right) = 1$.

► Voir les exercices 2.43 à 2.47.

V - Théorème de Bézout et théorème de Gauss

Définition 18 (entiers premiers entre eux)

On dit que deux entiers sont *premiers entre eux* quand leur PGCD est égal à 1.

Théorème 3 (de Bézout)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

$$\operatorname{pgcd}(a\,;\,b)=1 \iff \exists\,(u\,;v)\in\mathbb{Z}^2,\ au+bv=1.$$

Démonstration 18

- Démontrons d'abord que si il existe un couple $(u\,;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv=1$ alors $\operatorname{pgcd}(a\,;\,b)=1$.

  Supposons donc qu'il existe un couple $(u\,;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv=1$.
  $\operatorname{pgcd}(a\,;\,b)$ divise a et b, donc divise $au+bv$, donc 1. Or, 1 n'a qu'un diviseur : lui-même. Donc $\operatorname{pgcd}(a\,;\,b)=1$.

- Supposons maintenant que $\operatorname{pgcd}(a\,;\,b)=1$.
  Notons E l'ensemble des combinaisons linéaires de a et b. E n'est pas vide car $a=1\times a+0\times b$ appartient à E.
  E a donc un plus petit élément, que l'on va noter $c=au+bv$.
  La division euclidienne de a par c est : $a=cq+r \quad , \quad 0\leqslant r<c$.
  Ainsi,
  $$r=a-cq=a-(au+bv)q=(1-uq)a+(-vq)b.$$
  r est donc une combinaison linéaire de a et b, donc appartient à E. Mais $r<c$, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse. Cela implique alors que $r=0$, et donc c divise a.

  De manière analogue, on montre que c divise b et donc que c est un diviseur commun à a et b. Or, $\operatorname{pgcd}(a\,;\,b)=1$ donc $c=1$, soit $au+bv=1$.

Propriété 31 (corollaire du théorème de Bézout)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

$$\operatorname{pgcd}(a\,;\,b)=d \iff \begin{cases} d\mid a \text{ et } d\mid b \\ \exists\,(u\,;v)\in\mathbb{Z}^2,\ au+bv=d. \end{cases}$$

► Voir les exercices 2.48 à 2.55.

Théorème 4 (de Gauss)

Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.
Si a divise bc et si $\text{pgcd}(a\,;\,b) = 1$ alors a divise c.

Démonstration 19

a divise bc donc il existe un entier k non nul tel que $bc = ak$.
$\text{pgcd}(a\,;\,b) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que $au + bv = 1$, soit en multipliant par c :

$$acu + bcv = c \iff acu + akv = c \iff a(cu + kv) = c.$$

Ainsi, a divise c.

► Voir les exercices 2.56 à 2.58.

VI - Nombres premiers

Définition 19

Un entier naturel est premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Remarque 38

Notez bien dans la définition la présence de la conjonction « et » qui induit nécessairement que le nombre doit admettre exactement deux diviseurs.
Ainsi, le nombre 1 n'est pas premier car il n'admet qu'un diviseur : lui-même.

Théorème 5

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration 20

Supposons que l'ensemble des nombres premiers soit fini. Notons alors cet ensemble :

$$\{p_1\,;\,p_2\,;\cdots;\,p_n\}.$$

Considérons alors le nombre :

$$\mathrm{N} = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1.$$

Il est immédiat que N n'appartient pas à l'ensemble des nombres premiers considéré.
Or, N n'est divisible par aucun des p_k, pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
Par conséquent, il est premier... ce qui est contradictoire avec le fait que N n'appartienne pas à l'ensemble des nombres premiers considéré.

Ainsi, notre hypothèse selon laquelle l'ensemble des nombres premiers est fini est fausse.

Remarque 39

L'ensemble des nombres premiers est souvent noté $\mathbb{P}$.

Théorème 6

Soit n un entier naturel non nul.
Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ alors n est premier.

Exemple 20

$\sqrt{137} \approx 11,7$.
De plus, 137 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7 et 11 donc $137 \in \mathbb{P}$.

▶ Voir les exercices 2.59 à 2.66.

Théorème 7 (décomposition en produit de facteurs premiers)

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

où k est un entier naturel non nul et $p_i \in \mathbb{P}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Cette écriture est appelée la décomposition en produit de facteurs premiers de n et elle est unique.

▶ Voir les exercices 2.67 à 2.70.

Théorème 8 ("petit" théorème de Fermat)

Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exemple 21

Prenons $a = 27$ et $p = 5$.
p est premier et a n'est pas divisible par p donc $27^4 \equiv 1 \mod 5$.

Remarque 40

La congruence de ce théorème est aussi présentée sous la forme suivante :

$$a^p \equiv a \mod p.$$

▶ Voir les exercices 2.71 à 2.77.

Divisibilité

Exercice 2.1 (ensemble des diviseurs)

Pour chacun des nombres suivants, donner la liste de ses diviseurs positifs.

1. 123
2. 56
3. 78
4. 1517

Solution page 99

Exercice 2.2 (programme Python)

Compléter le programme Python suivant afin que la fonction `liste_diviseurs(n)` retourne la liste de tous les diviseurs positifs de l'entier relatif n.

Code Python 2-1

```python
def liste_diviseurs(n):
    L = []
    for k in range(... , ...):
        if ...:
            L.append(k)

    return L
```

Solution page 99

Exercice 2.3 (combinaison linéaire)

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $n+7$ soit un multiple de 5.
2. Montrer que $51n+4$ n'est jamais divisible par 17.

Solution page 99

Exercice 2.4

Montrer que la somme de quatre entiers consécutifs est divisible par 2.

Solution page 100

Exercice 2.5

Résoudre l'équation $n^2 = m^2 + 11$, où m et n sont deux entiers relatifs.

Solution page 100

Exercice 2.6

Démontrer que pour tout entier relatif p, $p(p^2-1)$ est divisible par 2 et par 3.

Solution page 100

Exercice 2.7

Démontrer que pour tout entier naturel n impair, n^2-1 est divisible par 8.

Solution page 101

Exercice 2.8 (combinaison linéaire)

Soient $a = 2n+1$ et $b = n+13$, $n \in \mathbb{Z}$.
Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $a \mid b$ (a divise b).

Solution page 101

Exercice 2.9 (combinaison linéaire)

Déterminer les entiers relatifs n tels que $a = n-4$ divise $b = 3n-17$.

Solution page 102

Exercice 2.10

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $n+1$ est un diviseur de n^3+n^2+n+1.
2. En déduire deux diviseurs de 1 111.

Solution page 102

Exercice 2.11

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que si n est impair alors 4 divise n^2-1.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Solution page 102

Exercice 2.12

On pose $A_n = 2n^2+11n+32$ et $B_n = n+3$ pour tout entier relatif n.
On se demande pour quelles valeurs de n B_n divise A_n.

1. Montrer que $A_n = (n+3)(2n+5)+17$.
2. Conclure.

Solution page 103

Exercice 2.13 (avec une somme géométrique)

On souhaite démontrer que $5^n + 19$ est toujours divisible par 4 pour tout entier naturel n.

1. Exprimer de façon plus simple la somme $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1}$ en fonction de n.
2. Conclure.

Solution page 103

Exercice 2.14

1. On considère un nombre à deux chiffres. On note d le chiffre des dizaines et u celui des unités.
   Montrer qu'il est divisible par 7 si et seulement si $3d + u$ est divisible par 7.
2. Comment appliqueriez-vous ce critère pour vérifier que 392 est bien divisible par 7 ?
3. Le nombre 6 119 est-il divisible par 7 ?

Solution page 103

Exercice 2.15

1. Soit a un entier naturel.
   Montrer que $a^5 - a$ est divisible par 10.
2. Soient a et b deux entiers naturels tels que $a \geqslant b$.
   Démontrer que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10, alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

Solution page 104

Exercice 2.16

Soit n un entier relatif.

1. Montrer que si d divise $12n + 7$ et $3n + 1$ alors d divise 3.
2. Montrer que $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

Solution page 105

Exercice 2.17

Calculer la plus grande valeur de l'entier naturel n telle que 3^n divise $1\,000!$.

Solution page 105

Division euclidienne

Exercice 2.18

Donner la division euclidienne de a par b dans chaque cas suivant.

1. $a = 345$ et $b = 12$
2. $a = 76$ et $b = 67$
3. $a = 1\,001$ et $b = 101$
4. $a = 673$ et $b = 97$.

Solution page 106

Exercice 2.19

Soit n un entier naturel.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$ suivant les valeurs de n.

Solution page 106

Exercice 2.20

Soit n un entier naturel.
Quand on le divise par 4, le reste est 3.
Quand on le divise par 5, le reste est 1.
Dans les deux cas, le quotient est le même.

Quelle est la valeur de n ?

Solution page 106

Exercice 2.21

Soit n un entier naturel tel que le reste de la division euclidienne de n par 17 est égal à 7.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de n^2 par 17 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de n^3 par 17 ?

Solution page 106

Exercice 2.22 (division par 11)

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 100 par 11, de 1 000 par 11, de 10 000 par 11, de 100 000 par 11.
   Quelle conjecture peut-on alors faire ?
2. Démontrer la conjecture.

Solution page 107

Exercice 2.23

Soit n un nombre entier inférieur à 100.
Le reste de la division euclidienne de n par 2 est 1.
Le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2.
Le reste de la division euclidienne de n par 5 est 4.
Écrire un programme Python permettant de trouver toutes les valeurs de n possibles.

Solution page 108

Congruences

Exercice 2.24

Calculer le reste de la division euclidienne de 13^{1789} par 14.

Solution page 108

Exercice 2.25

Quel est le reste de la division par 7 du nombre 32^{45} ?

Solution page 108

Exercice 2.26

Trouver tous les entiers naturels n tels que le reste de la division euclidienne de 24^n par 7 soit égal à 3.

Solution page 109

Exercice 2.27

Soient a et b deux nombres relatifs, tous les deux non divisibles par 3.
Montrer que $a^6 - b^6$ est divisible par 3.

Solution page 109

Exercice 2.28

Soit n tel que $n \equiv 1 \mod 2$, $n \equiv 2 \mod 3$ et $n \equiv 5 \mod 7$.

Quel est le reste de la division euclidienne de n par 42 ?

Solution page 109

Exercice 2.29 (critère de divisibilité par 3)

« Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3. »

En notant :

$$x = \sum_{k=0}^{n} x_k \times 10^k$$

démontrer cette propriété.

Démontrer que le critère de divisibilité par 9 est semblable.

Solution page 109

Exercice 2.30

Trouver les chiffres a et b tels que le nombre $1a4b$ soit divisible par 45.
Proposer un code Python qui affiche tous les nombres possibles.

Solution page 110

Exercice 2.31

Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Solution page 110

Exercice 2.32 (montrer une équivalence)

Soient x et y deux entiers relatifs. Montrer l'équivalence suivante :

$$11 \mid (7x+4y) \iff 11 \mid (x+10y).$$

Solution page 111

Exercice 2.33

Quel est le reste de la division euclidienne de 73^{37} par 5 ?

Solution page 111

Exercice 2.34

Calculer le reste de la division euclidienne de 17^{548} par 7.

Solution page 111

Exercice 2.35 (équation $ax \equiv 1 \mod p$)

Soient a et p deux entiers naturels non nuls. Un inverse de a modulo p, s'il existe, est un nombre x tel que $ax \equiv 1 \mod p$.
Trouver tous les inverses, s'ils existent, de a modulo p dans les cas suivants :

1. $a = 5$, $p = 7$
2. $a = 3$, $p = 5$
3. $a = 6$, $p = 15$

Solution page 112

Exercice 2.36

Montrer que si 7 divise $a^2 + b^2$, alors 7 divise a et b.
La réciproque est-elle vraie ?

Solution page 113

Exercice 2.37

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -11 \mod 100$.

Solution page 113

Exercice 2.38

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1 + 3n \mod 9$.
2. En déduire que $2^{2n} + 15n - 1 \equiv 0 \mod 9$ pour tout entier naturel n.

Solution page 113

Exercice 2.39 (démonstration par récurrence)

Montrer que pour tout entier naturel n, $(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\times 2n$ est divisible par 2^n et trouver le quotient correspondant.

Solution page 114

Exercice 2.40

Montrer que $ab(a^2-b^2)$ est divisible par 3, quels que soient les entiers relatifs a et b.

Solution page 114

Exercice 2.41 (critère de divisibilité par 11)

Soit x un enter naturel s'écrivant :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \times 10^k.$$

Établir un critère de divisibilité par 11 de x en partant de la congruence :

$$10 \equiv -1 \mod 11.$$

Tester le critère obtenu avec les nombres 37653 et 7432.

Solution page 115

PGCD

Exercice 2.42 (algorithme d'Euclide)

En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD des nombres suivants.

1. 2 070 et 432
2. 1 065 et 235
3. 363 et 792
4. 858 et 910

Solution page 115

Exercice 2.43 (algorithme d'Euclide)

En utilisant l'algorithme d'Euclide de manière astucieuse, trouver un couple d'entiers $(x;y)$ tel que $23x+32y=1$.

Solution page 116

Exercice 2.44 (système avec PGCD)

Déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls x et y tels que $\begin{cases} x+y=5664 \\ \operatorname{pgcd}(x;y)=354 \end{cases}$.

Solution page 116

Exercice 2.45 (système avec PGCD)

Déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls x et y tels que $\begin{cases} xy = 1\,734 \\ \text{pgcd}\,(x\,;\,y) = 17 \end{cases}$.

Solution page 116

Exercice 2.46

Soient $a = 3n + 1$ et $b = 5n - 1$, où n est un entier naturel.

1. Montrer que pgcd $(a\,;\,b)$ divise 8.
2. Montrer que si $n = 8k + 5$, $k \in \mathbb{N}$, alors pgcd $(a\,;\,b) = 8$.

Solution page 117

Exercice 2.47

Soient n, a et b trois entiers naturels.
Montrer que si n divise pgcd$(a\,;b)$ alors n divise x, où $x \equiv a \mod b$.

Solution page 117

Exercice 2.48

On pose $x = 9(k+3)$ et $y = 4k$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Montrer que pgcd $(x\,;\,y)$ divise 108.

Solution page 117

Théorème de Bézout

Exercice 2.49

Trouver deux entiers u et v tels que $99u + 56v = 1$.

Solution page 118

Exercice 2.50

1. Calculer pgcd $(550\,;\,693)$.
2. Déterminer un couple $(u\,;\,v)$ tel que $550u + 693v = 11$.

Solution page 118

Exercice 2.51

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.
Montrer que n et $n^2 - 1$ sont premiers entre eux.

Solution page 118

Exercice 2.52

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $3n+7$ et $n+2$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que $3n+4$ et $2n+3$ sont premiers entre eux.

Solution page 119

Exercice 2.53

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $2n+1$ et $3n+2$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que $7n+4$ et $5n+3$ sont premiers entre eux.

Solution page 119

Exercice 2.54 (condition d'inversibilité)

1. Soient a et p deux entiers naturels non nuls. a est dit *inversible modulo* p, s'il existe un nombre x tel que $ax \equiv 1 \mod p$.
   Montrer que a est inversible modulo p si et seulement si $\text{pgcd}\left(a\,;\,p\right) = 1$.
2. Trouver un inverse de 77 modulo 125.

Solution page 119

Exercice 2.55

Soient a, b et c trois entiers naturels tels que $bc > a$.
Montrer que $\text{pgcd}\,(bc-a\,;\,b) = \text{pgcd}\,(a\,;\,b)$ à l'aide du théorème de Bézout.

Solution page 120

Exercice 2.56

Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $3a+5b$ et $a+2b$ sont également premiers entre eux.

Solution page 120

Théorème de Gauss

Exercice 2.57

1. Déterminer $\text{pgcd}\,(31\,;\,28)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
   Trouver alors deux nombres relatifs x et y tels que $31x - 28y = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $31x - 28y = 1$.

Solution page 121

Exercice 2.58

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $108x + 55y = 1$.

Solution page 121

Exercice 2.59 (trouver le nombre d'hommes et de femmes)

Au 8e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Solution page 122

Exercice 2.60 (système de congruences)

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 18 \\ x \equiv 5 \mod 24 \end{cases}$$

Solution page 123

Exercice 2.61 (système de congruences)

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 17 \\ x \equiv 4 \mod 19 \end{cases}$$

Solution page 123

Nombres premiers

Exercice 2.62

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants, puis calculer le nombre de leurs diviseurs.

1. 1 345
2. 456
3. 1 650
4. 360

Solution page 124

Exercice 2.63

Soient $x = 280\,280$, $y = 347\,116$ et $z = 740\,278$.

1. Décomposer en produit de facteurs premiers x, y et z.
2. En déduire $\text{pgcd}(x ; y)$, $\text{pgcd}(y ; z)$ et $\text{pgcd}(x ; z)$.
3. Peut-on calculer un PGCD de x, y et z ?

Solution page 124

Exercice 2.64

1 789 est-il un nombre premier ?

Solution page 125

Exercice 2.65

1. Établir la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
2. Le nombre 1 517 est-il premier ?
3. Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $a^2 = b^2 + 1517$.

Solution page 125

Exercice 2.66

En utilisant l'égalité :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

trouver les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $n^3 - 27$ est un nombre premier.

Solution page 125

Exercice 2.67

Pour quel(s) nombre(s) premier(s) p l'entier naturel $7p + 1$ est-il un carré parfait ?

Solution page 126

Exercice 2.68

1. Montrer que pour tout entier naturel n, les nombres n, $n+2$ et $n+10$ sont distincts modulo 3.
2. En déduire que l'on ne peut pas trouver un entier naturel $n > 3$ tel que n, $n+2$ et $n+10$ soient tous les trois premiers.

Solution page 126

Exercice 2.69

Montrer que si p et $8p^2 + 1$ sont premiers alors $p = 3$.

Solution page 126

Exercice 2.70

Montrer par l'absurde que si p est un nombre premier, alors il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = p$.

Solution page 127

Exercice 2.71

Soit n un entier naturel non nul. On pose alors $a_n = 2n$ et $b_n = 3n + 1$.
Démontrer l'équivalence suivante :

$$\operatorname{pgcd}(a_n ; b_n) = 1 \iff n \in 2\mathbb{N}^*$$

où $2\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels pairs non nuls.

Solution page 127

Exercice 2.72

On rappelle que la factorielle de n est le nombre :

$$n! = 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n.$$

1 Combien y a-t-il de nombres pairs strictement compris entre 2^k et 2^{k+1}, pour $k \in \mathbb{N}^*$?

2 Par quelle puissance de 2 au maximum peut-on diviser $n!$ si $n = 2^4$?

3 Imaginer un programme Python, composé de deux fonctions :

- une fonction `fact(n)` qui retourne $n!$;
- une fonction `maxpow(n)` qui retourne le plus grand exposant de 2 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $(2^n)!$.

Solution page 128

Exercice 2.73

Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle retourne un dictionnaire dont les clés sont les diviseurs de n et leur valeur, les exposants des diviseurs dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

Code Python 2-5

```python
def decomp(n):
    D = dict() # dictionnaire vide

    k = 2

    while n ...:
        exposant = 0
        while n%k == 0:
            exposant = ...
            n = ...
        if exposant != 0:
            D[k] = exposant
        k = k+1
        j = 2
        while k%j == 0:
            k = k + 1

    return D

    return D
```

Solution page 129

Petit théorème de Fermat

Exercice 2.74

Soit p un nombre premier différent de 3.
Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p.

Solution page 129

Exercice 2.75

Montrer que pour tout entier naturel a, $a^{13} - a$ est divisible par 26.

Solution page 129

Exercice 2.76

Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{6n} - 1$ est divisible par 7.

Solution page 130

Exercice 2.77 (théorème des restes chinois)

Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux.

1. Démontrer que si $(a\,;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, alors le système $\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ x \equiv b \mod n \end{cases}$ admet une unique solution x modulo mn.
2. Application : dans une boutique qui vend des macarons, il y a des boîtes de rangement par 5 et par 9.
   Une société souhaite acheter un certain nombre de macarons. La préparatrice constate que si elle ne prend que des rangements par 5, il lui reste à la fin 3 macarons. Si elle ne prend que des rangements par 9, il lui reste au final 2 macarons.
   Combien la société a-t-il commandé de macarons sachant que ce nombre est compris entre 100 et 140 ?

Solution page 130

Exercice 2.78 (nombres de Carmichael)

Un entier naturel n est appelé *nombre de Carmichael* si pour tout entier a, $a^n \equiv a \mod n$.

1. Montrer que si $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, où les p_k sont des nombres premiers distincts, et si $p_i - 1$ divise $n - 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, alors n est un nombre de Carmichael.
2. Montrer que 561 est un nombre de Carmichael.

Solution page 131

Exercice 2.79

On considère la fonction Python suivante :

Code Python 2-7

```
def test(n):
    if 2**(n-1)%n == 1:
        return True
    else:
        return False
```

Expliquer en quoi cette fonction peut nous aider à savoir si un nombre n est premier ou pas. Proposer une légère modification afin qu'elle remplisse son rôle sans ambiguïté.

Solution page 132

Exercice 2.80 (démonstration du petit théorème de Fermat)

Soient p un nombre premier, n un entier naturel et a non divisible par p.

1. Montrer par l'absurde que le reste des divisions euclidiennes par p de $a, 2a, \dots, (p-1)a$ sont tous distincts.
2. En déduire que $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
3. Montrer que la réciproque est fausse en utilisant le nombre $p = 3 \times 11 \times 17 = 561$.

Solution page 132

Chiffrement

Exercice 2.81 (chiffrement affine)

Le chiffrement affine consiste à attribuer à chaque lettre de l'alphabet un nombre (sa position) en convenant d'avoir 0 pour A, 1 pour B, etc.
On choisit deux nombres a et b. On note x le rang d'une lettre et $r(x)$ tel que $ax + b \equiv r(x) \mod 26$. La lettre correspondant à $r(x)$ est la lettre codée.

1. Dans cette question, on prend $a = 17$ et $b = 2$.
   Montrer que la lettre « Q » est chiffrée en la lettre « O ».
2. Montrer que le déchiffrement n'est pas possible si a et 26 ne sont pas premiers entre eux.
3. En utilisant le théorème de Gauss, justifier que si $\text{pgcd}(a; 26) = 1$ alors le déchiffrement est possible.
4. En prenant $a = 17$ et $b = 2$, retrouver la lettre qui, une fois chiffrée, donne « Q ».
5. Proposer une fonction Python `chiffrement_affine(a,b,lettre)` qui prend en argument a et b, ainsi que la lettre que l'on souhaite chiffrer.
6. Proposer une fonction Python `dechiffrement_affine(a,b,lettre)` qui permet de déchiffrer une lettre.

Solution page 134

Exercice 2.82 (chiffrement de Vigenère)

Le chiffrement de Vigenère nécessite un « mot-clé ».
Comme dans le chiffrement affine, chaque lettre est affectée de son rang (0 pour « A », 1 pour « B », etc.). Nous allons noter rg(...) le rang de la lettre entre parenthèses. Donc rg(A) = 0.
Notons le message à chiffrer : $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\cdots\mathrm{M}_n$ comportant $n+1$ lettres.
Notons le mot-clé : $\mathrm{C}_0\mathrm{C}_1\cdots\mathrm{C}_p$ comportant $p+1$ lettres.
Si $p<n$ alors on répète k fois le mot-clé jusqu'à ce que sa longueur soit au moins égale à $n+1$, et on le tronque de sorte que sa longueur soit exactement égale à $n+1$.
Ainsi, le mot-clé devient : $\mathrm{C}_0\mathrm{C}_1\cdots\mathrm{C}_p\mathrm{C}_0\cdots\mathrm{C}_p\mathrm{C}_0\cdots\mathrm{C}_j$, tel que $n+1=k(p+1)+j+1$.

Le message chiffré sera alors de la forme $\mathrm{M}'_0\mathrm{M}'_1\cdots\mathrm{M}'_n$ tel que :

$$\forall\, i\in[\![0;n]\!],\ \mathrm{rg}(\mathrm{M}'_i)\equiv\mathrm{rg}(\mathrm{M}_i)+\mathrm{rg}(\mathrm{C}_i)\quad\text{mod } 26.$$

Prenons le message « MATHEMATIQUES » et le mot-clé « SYMPA ». Cela donne :

M	A	T	H	E	M	A	T	I	Q	U	E	S
12	0	19	7	4	12	0	19	8	16	20	4	18
S	Y	M	P	A	S	Y	M	P	A	S	Y	M
18	24	12	15	0	18	24	12	15	0	18	24	12
$12+18$ $=30$ $\equiv 4$	$0+24$ $=24$ $\equiv 24$	$19+12$ $=31$ $\equiv 5$	$7+15$ $=22$ $\equiv 22$	$4+0$ $=4$ $\equiv 4$	$12+18$ $=30$ $\equiv 4$	$0+24$ $=24$ $\equiv 24$	$19+12$ $=31$ $\equiv 5$	$8+15$ $=23$ $\equiv 23$	$16+0$ $=16$ $\equiv 16$	$20+18$ $=38$ $\equiv 12$	$4+24$ $=28$ $\equiv 2$	$18+12$ $=30$ $\equiv 4$
E	Y	F	W	E	E	Y	F	X	Q	M	C	E
$4-18$ $\equiv 12$	$24-24$ $\equiv 0$	$5-12$ $\equiv 19$	$22-15$ $\equiv 7$	$4-0$ $\equiv 4$	$4-18$ $\equiv 12$	$24-24$ $\equiv 0$	$5-12$ $\equiv 19$	$23-15$ $\equiv 8$	$16-0$ $\equiv 16$	$12-18$ $\equiv 20$	$2-24$ $\equiv 4$	$4-12$ $\equiv 18$
M	A	T	H	E	M	A	T	I	Q	U	E	S

Légende :

Message décodé
Clé
Message codé

Toutes les congruences sont modulo 26.

Proposer une fonction Python `chiffrement_vigenere(message,key)` qui renvoie le message passé en argument avec le mot-clé passé en second argument.

Solution page 136

Exercice 2.83 (code barre)

Les codes EAN 13 sont des codes constitué de 13 chiffres, le dernier étant appelé la *clé* du code, et permet de vérifier l'exactitude des 12 premiers.
Si $a_1a_2\cdots a_{12}a_{13}$ désigne l'un de ces codes, a_{13} est déterminé de sorte que :

$$3\sum_{k=1}^{6}a_{2k}+\sum_{k=0}^{6}a_{2k+1}\equiv 0\quad\text{mod } 10.$$

1. Calculer la clé du code commençant par « 301776063299 ».
2. Proposer une fonction Python `ean13_key(code)` renvoyant la clé de contrôle du code mis en argument.
   On pourra convertir le code en chaîne de caractère avec la fonction `str(code)`, et parcourir cette chaîne de caractères en convertissant chaque caractères en un entier avec la fonction `int(caractère)`.

3 Montrer que si un seul chiffre est erroné dans un code EAN13 alors l'erreur est détectée.

4 Supposons que deux chiffres consécutifs a_{2k-1} et a_{2k} soient permutés (erreur fréquente).

Montrer alors que, pour que l'erreur ne soit pas détectée, il faut et il suffit que $a_{2i-1} \equiv a_{2i} \mod 5$.

En déduire que ce type d'erreur n'est pas détectée une fois sur dix.

Solution page 136

Exercice 2.84 (chiffrement RSA)

Soient p et q deux nombres premiers distincts.
On pose $\mathrm{N} = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$.

Partie A

1 À l'aide du petit théorème de Fermat, montrer que pour tout entier naturel a premier avec p et q,

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod p \qquad \text{et} \qquad a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod q.$$

2 En déduire que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod \mathrm{N}$.

3 Démontrer que pour tout entier naturel a, si k est un entier qui vérifie $k \equiv 1 \mod n$, alors $a^k \equiv a \mod \mathrm{N}$.

Partie B

Soit c un entier premier avec n et strictement inférieur à n.

1 Justifier que l'équation (E) : $cx - ny = 1$ admet des solutions.

2 Soit $(x_0 ; y_0)$ une solution de (E).

Prouver que $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $x = x_0 + kn$ et $y = y_0 + kc$, où $k \in \mathbb{Z}$.

3 En déduire qu'il existe un unique entier naturel $d < n$ tel que $cd \equiv 1 \mod n$.

Partie C

Déduire des parties A et B que, quels que soient les entiers naturels a et b, on a l'implication suivante :

$$b \equiv a^c \mod \mathrm{N} \Rightarrow b^d \equiv a \mod \mathrm{N}.$$

Remarque 43 (principe du chiffrement RSA)

Un message a doit être envoyé par Alice à Bob, avec une clé publique c.
Alice calcule b tel que $b \equiv a^c \mod \mathrm{N}$. b est alors transmis à Bob.
Bob calcule ensuite $b^d \equiv a \mod \mathrm{N}$, où d est la clé privée que seul Bob détient.

Solution page 138

Corrigé de l'exercice 2.1 page 83

1 $123 = 3 \times 41$ donc les diviseurs de 123 sont : 1, 3, 41, 123.

2 $56 = 2^3 \times 7$ donc les diviseurs de 56 sont :

- **les facteurs premiers et 1 :** 1, 2, 7 ;
- **les produits à deux facteurs premiers** : $2 \times 2 = 4$, $2 \times 7 = 14$;
- **les produits à 3 facteurs premiers :** $2^3 = 8$ et $2^2 \times 7 = 28$;
- **les produits à 4 facteurs premiers :** $2^3 \times 7 = 56$.

L'ensemble des diviseurs de 56 est donc : $\{1;2;4;7;8;14;28;56\}$.

3 $78 = 2 \times 3 \times 13$ donc les diviseurs de 78 sont :

- **les facteurs premiers et 1 :** 1, 2, 3, 13 ;
- **les produits à deux facteurs premiers** : $2 \times 3 = 6$, $2 \times 13 = 26$ et $3 \times 13 = 39$;
- **les produits à 3 facteurs premiers :** $2 \times 3 \times 13 = 78$.

L'ensemble des diviseurs de 78 est donc : $\{1;2;3;6;13;26;39;78\}$.

4 $1\,517 = 37 \times 41$ donc les diviseurs de 1 517 sont 1, 37, 41 et 1 517.

Corrigé de l'exercice 2.2 page 83

Voici le programme complété :

Code Python 2-13

```python
def liste_diviseurs(n):
    L = []
    for k in range(1,abs(n)+1):
        if n%k == 0:
            L.append(k)

    return L
```

Comme n est un entier relatif, il ne faut pas oublier de faire appel à sa valeur absolue dans la boucle qui parcourt tous les entiers naturels de 1 à n.
Ainsi, dans ce programme, k désigne un entier de $[\![1;n]\!]$ (n'oublions pas qu'en Python, `range(a,b)` désigne la liste des entiers de a (compris) à $b-1$ (compris).
Dans la boucle, on teste si n est divisible par k (avec le test « `if n%k == 0` ») ; si tel est le cas, on ajoute à la liste `L` le nombre k (qui fait donc partie des diviseurs de n).

Corrigé de l'exercice 2.3 page 83

1 $n+7$ multiple de 5 signifie qu'il existe un entier k tel que $n+7 = 5k$, soit $n = 5k-7$.

Les entiers naturels n tels que $n+7$ soit un multiple de 5 sont les entiers n s'écrivant $n = 5k-7$, $k \geqslant 2$.

2 $51n = 17 \times 3n$ donc $51n$ est divisible par 17. Or, 4 n'est pas divisible par 17 donc $51n+4$ n'est pas divisible par 17.

Corrigé de l'exercice 2.4 page 83

Posons n un entier relatif. Alors, $n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6 = 2(n+3)$.
On constate alors que la somme des quatre entiers consécutifs est un multiple de 2.

Corrigé de l'exercice 2.5 page 83

Avant tout, remarquons que :

$$n^2 = m^2 + 11 \iff n^2 - m^2 = 11 \iff (n+m)(n-m) = 11.$$

Ainsi, il est nécessaire que $n+m$ ou $n-m$ divise 11. Or, 11 est un nombre premier donc :

$$\begin{cases} n+m = 11 \\ n-m = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n-m = 11 \\ n+m = 1 \end{cases}.$$

Autrement dit,

$$n = 6 \qquad \text{et} m = 5 \text{ ou } m = -5.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $n^2 = m^2 + 11$ sont les couples $(6;-5)$ et $(6;5)$.

Corrigé de l'exercice 2.6 page 84

1 Divisibilité par 2. Deux cas se présentent :

- p est pair : $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, $p(p^2-1) = 2k(4k^2-1)$ est divisible par 2.
- Si p est impair : $p = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} p(p^2-1) &= (2k+1)\left[(2k+1)^2 - 1\right] \\ &= (2k+1)(4k^2+2k+1-1) \\ &= (2k+1)(4k^2+2k) \\ &= 2(2k+1)(2k^2+k) \end{aligned}$$

Ainsi, $p(p^2-1)$ est divisible par 2.

Dans tous les cas, le résultat est démontré.

2 Divisibilité par 3. Trois cas se présentent :

- $p = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors, $p(p^2-1) = 3k(9k^2-1)$ est divisible par 3.
- $p = 3k+1$. Alors,

$$\begin{aligned} p(p^2-1) &= (3k+1)\left[(3k+1)^2 - 1\right] \\ &= (3k+1)(9k^2+6k) \\ &= 3k(3k+2)(3k+1). \end{aligned}$$

Donc $p(p^2-1)$ est divisible par 3.

- $p = 3k+2$. Alors,

$$\begin{aligned} p(p^2-1) &= (3k+2)\left[(3k+2)^2-1\right] \\ &= (3k+2)(9k^2+12k+3) \\ &= 3(3k^2+4k+1)(3k+2). \end{aligned}$$

Donc $p(p^2-1)$ est divisible par 3.

Dans tous les cas, $p(p^2-1)$ est divisible par 3.

Corrigé de l'exercice 2.7 page 84

n est impair donc $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} n^2-1 &= (2k+1)^2-1 \\ &= 4k^2+4k \\ &= 4k(k+1). \end{aligned}$$

k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair ; ainsi, leur produit est pair et s'écrit donc $k(k+1) = 2q$, $q \in \mathbb{N}$.
On a donc : $n^2-1 = 4 \times 2q = 8q$, ce qui prouve que n^2-1 est divisible par 8.

Corrigé de l'exercice 2.8 page 84

Avant tout, écrivons :

$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ b = ka \iff n+13 = k(2n+1) \iff (2k-1)n = 13-k.$$

Cela ne nous avance pas à grand-chose... Il faut donc s'y prendre autrement !

Cherchons une combinaison linéaire de a et b indépendante de n. Notons-la $pa+qb$. Comme $a \mid a$ et $a \mid b$, $a \mid (pa+qb)$. Comme $pa+qb$ est indépendante de n, cela signifie que a est un diviseur de cette combinaison linéaire, et on pourra exploiter cela.

$$pa+qb = 2pn+p+qn+13q = (2p+q)n+p+13q.$$

$pa+bq$ indépendante de $n \iff 2p+q=0 \iff q=-2p$. On peut alors prendre $p=1$ et $q=-2$.

$$a-2b=-25.$$

Par conséquent, $a \mid 25$, donc $a \in \{-25;-5;-1;1;5;25\}$.

- si $a=-25$, alors $2n+1=-25$ et $n=-13$;
- si $a=-5$, alors $2n+1=-5$ et $n=-3$;
- si $a=-1$, alors $2n+1=-1$ et $n=-1$;
- si $a=1$, alors $2n+1=1$ et $n=0$;
- si $a=5$, alors $2n+1=5$ et $n=2$;
- si $a=25$, alors $2n+1=25$ et $n=12$.

On doit maintenant vérifier que pour toutes les valeurs de n trouvées, a divise b, ce qui se fait rapidement.

Les valeurs de n cherchées sont donc : -13, -3, -1, 0, 2 et 12.

Corrigé de l'exercice 2.9 page 84

$a \mid b \iff a \mid (pa+qb)$, où p et q sont deux entiers relatifs.
$pa+qb = (p+3q)n-(4p+17q)$ est indépendante de n si $p+3q=0$, soit $p=-3q$. Prenons alors $p=-3$ et $q=1$:

$$pa+qb = -3a+b = -3(n-4)+3n-17 = -5.$$

Ainsi, $a \mid 5$, donc

- $a=1$, et dans ce cas, $n-4=1$, soit $n=5$;
- $a=5$, et dans ce cas, $n-4=5$, soit $n=9$.

Si $n=5$, $a=1$ et $b=2$ ey a divise bien b.
Si $n=9$, $a=5$ et $b=10$ et a divise bien b.

Ainsi, les valeurs de n telles que a divise b sont 5 et 9.

Corrigé de l'exercice 2.10 page 84

1
$$\begin{aligned} n^3+n^2+n+1 &= \frac{n^4-1}{n-1} \\ &= \frac{(n^2-1)(n^2+1)}{n-1} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)(n^2+1)}{n-1} \\ &= (n+1)(n^2+1). \end{aligned}$$

Donc n^3+n^2+n+1 est bien divisible par $n+1$.

2 $1\,111 = 10^3+10^2+10+1$ est divisible par $10+1=11$.
De plus, d'après la question précédente, $10^2+1=101$ est aussi un diviseur de $1\,111$.

Deux diviseurs non triviaux de 1 111 sont donc 11 et 101.

Corrigé de l'exercice 2.11 page 84

1 Supposons que n soit pair. Alors, il existe un entier k tel que $n=2k+1$.
Ainsi, $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k+1-1)(2k+1+1)=(2k)(2k+2)=4k(k+1)$.
Par conséquent, 4 divise bien n^2-1.

2 Supposons que 4 divise n^2-1. Alors, il existe un entier k tel que $n^2-1=4k$, soit $n^2=4k+1$.
On se demande si n est nécessairement impair. Supposons donc qu'il ne le soit pas, et qu'il existe un entier p tel que $n=2p$.
Alors, $n^2=4k+1 \iff 4p^2=4k+1 \iff 4(p^2-k)=1$, ce qui est impossible (car cela voudrait dire que 1 est divisible par 4).
Ainsi, la réciproque est vraie.

Corrigé de l'exercice 2.12 page 84

1 $(n+3)(2n+5)+17 = 2n^2+5n+6n+15+17$
$= 2n^2+11n+32$
$= \mathrm{A}_n.$

2 B_n divise A_n si $\dfrac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{B}_n} \in \mathbb{Z}$, pour $n \neq -3$. Or,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{B}_n} &= \frac{(n+3)(2n+5)+17}{n+3}\\ &= \frac{(n+3)(2n+5)}{n+3} + \frac{17}{n+3}\\ &= 2n+5+\frac{17}{n+3}.\end{aligned}$$

$(2n+5) \in \mathbb{Z}$ donc $\dfrac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{B}_n} \in \mathbb{Z} \iff (n+3)|17$.

17 étant un nombre premier, il n'est divisible que par 1 et 17 donc il faut que $n+3 = \pm 1$ (i.e. $n = 1-3 = -2$ ou $n = -1-3 = -4$) ou $n+3 = \pm 17$ (i.e. $n = 17-3 = 14$ ou $n = -17-3 = -20$).

$\underline{\mathrm{B}_n \text{ divise } \mathrm{A}_n \text{ pour } n = -2 \text{ et } n = 14.}$

Corrigé de l'exercice 2.13 page 85

1 On sait que $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$. Ainsi,

$$1+5+5^2+\cdots+5^{n-1} = \frac{1-5^n}{1-5} = \frac{5^n-1}{4}.$$

2 La somme $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}$ est entière donc 5^n-1 est divisible par 4.
Ainsi, $5^n-1+4k \in \mathbb{N}$ pour tout entier relatif k.
En prenant $k=5$, on obtient $5^n-1+4\times 5 = 5^n+19$, donc 5^n+19 est toujours divisible par 4.

Corrigé de l'exercice 2.14 page 85

1 $x = 10d+u = (7d+3d)+u = 7d+(3d+u)$.
x est divisible par 7 équivaut à dire que $7d+(3d+u)$ l'est aussi, i.e. que $3d+u$ est divisible par 7 car $7d$ l'est toujours.

2 On peut s'inspirer du raisonnement précédent en posant :

$$\begin{aligned}x &= 392\\ &= 39\times 10+2\\ &= 39\times(7+3)+2\\ &= 39\times 7+3\times 39+2\end{aligned}$$

392 est divisible par 7 si et seulement si $3 \times 39 + 2$ l'est aussi.

$$3 \times 39 + 2 = 3 \times (40 - 1) + 2 = 120 - 3 + 2 = 119.$$

On recommence avec 119 :

$$119 = 11 \times 7 + 11 \times 3 + 9.$$

119 est divisible par 7 si et seulement si $11 \times 3 + 9$ l'est aussi.

$$11 \times 3 + 9 = 33 + 9 = 42 = 7 \times 6.$$

Ainsi, 119 est divisible par 7, donc 392 aussi.

3 $611 \times 3 + 9 = 1833 + 9 = 1\,842$.
$184 \times 3 + 2 = 552 + 2 = 554$
$55 \times 3 + 4 = 165 + 4 = 169$
$16 \times 3 + 9 = 48 + 9 = 57$
57 n'est pas divisible par 7 donc 6 119 non plus.

Corrigé de l'exercice 2.15 page 85

1 $a \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^4 - 1) \\ &= a(a^2 - 1)(a^2 + 1) \\ &= a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1). \end{aligned}$$

Entre a et $a + 1$, il y a un nombre pair ; donc $a^5 - a$ est divisible par 2.

$a - 1$, a et $a + 1$ sont trois nombres consécutifs. Si l'un deux est divisible par 5, alors $a^5 - 1$ l'est aussi et donc au final, il est divisible par 10.

Si aucun des nombres $a - 1$, a et $a + 1$ n'est divisible par 5, alors notons r le reste de la division euclidienne de a par 5 : $a = 5q + r$, $0 < r < 5$, $q \in \mathbb{N}$.

Si $a - 1$ n'est pas divisible par 5, alors $r \neq 1$;

si $a + 1$ n'est pas divisible par 5, alors $r \neq 4$.

Alors, $a^2 + 1 = (5q + r)^2 + 1 = 25q^2 + 10qr + r^2 + 1$, avec $r = 2$ ou $r = 3$.

- Si $r = 2$, $r^2 + 1 = 5$;
- Si $r = 3$, $r^2 + 1 = 10$.

Dans les deux cas, $a^2 + 1$ est divisible par 5.

<u>Ainsi, $a^5 - a$ est divisible par 5 et par 2, donc par 10.</u>

2 $a^5 - b^5$ divisible par 10.

Or, on peut écrire :

$$a^5 - b^5 = a^5 - a + a - (b^5 - b) - b = (a^5 - a) - (b^5 - b) + (a - b).$$

$a^5 - a$ et $b^5 - b$ sont divisibles par 10 d'après la question précédente ; ainsi, si $a^5 - b^5$ est divisible par 10, $a - b$ doit l'être aussi.

Ainsi, $a-b=10q$, $q\in\mathbb{N}$ et donc $a=10q+b$. En ajoutant b dans les deux membres, on obtient $a+b=10q+2b=2(5q+b)$, et donc $a+b$ est divisible par 2.

$a-b$ est divisible par 10 et $a+b$ est divisible par 2, donc $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ est divisible par 20.

Corrigé de l'exercice 2.16 page 85

1 Supposons que d divise $a=12n+7$ et $b=3n+1$. Alors, d divise toute combinaison linéaire de a et b :

$$\forall\,(\lambda;\mu)\in\mathbb{Z}^2,\ d\mid\lambda(12n+7)+\mu(3n+1).$$

Choisissons $(\lambda;\mu)$ de sorte que la combinaison linéaire de dépende plus de n. Prenons alors $\lambda=1$ et $\mu=-4$.

Alors, d divise $12n+7-4(3n+1)$, soit $\underline{d\text{ divise }3}$.

2 Faisons un raisonnement par l'absurde : supposons que $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ ne soit pas irréductible.

Alors, il existe un enter d qui divise $12n+7$ et $3n+1$, donc qui divise 3 (d'après la question précédente).

Ainsi, $d=1$ ou $d=3$ ou $d=-1$ ou $d=-3$.

Les cas $d=1$ et $d=-1$ ne sont pas possibles car la fraction est supposée simplifiable.

Si $d=3$ ou $d=-3$ alors 3 divise $12n+7$, ce qui est impossible car 3 divise $12n$ mais pas 7.

Il y a donc contradiction ; notre hypothèse de départ est alors fausse : $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

Corrigé de l'exercice 2.17 page 85

Remarquons que :

$$1\,000! = (1\times2\times3\times\cdots\times10)\times(11\times\cdots\times20)\times\cdots\times(991\times\cdots\times1\,000)\,.$$

Combien de multiples de 3 avons-nous ici ? Il y en a 333 ($999\div3$).

On peut donc factoriser ainsi :

$$\begin{aligned}1\,000! &= 3^{333}(1\times2\times1\times4\times5\times2\times7\times8\times3\times10)\times\cdots\times(991\times992\times331\cdots\times333\times1\,000)\\ &= 3^{333}\times1\times2\times\cdots\times333\times\underbrace{1\times2\times4\times5\times\cdots\times1\,000}_{\text{aucun multiples de 3}}\\ &= 3^{333}\times333!\times\mathrm{N}_1,\quad\text{avec }\mathrm{N}_1\text{ non multiple de 3.}\end{aligned}$$

De plus, dans 333!, il y a 111 multiples de 3 donc, avec un même raisonnement, on a :

$$333! = 3^{111}\times111!\times\mathrm{N}_2,\quad\text{avec }\mathrm{N}_2\text{ non multiple de 3.}$$

On voit apparaître 111! dans lequel il y a 37 multiples de 3 (3, 6, 9, ..., 99, 102, 105, 108, 111).

On peut donc écrire :

$$111! = 3^{37}\times37!\times\mathrm{N}_3,\quad\text{avec }\mathrm{N}_3\text{ non multiple de 3.}$$

De même, on voit $37!$ apparaître, où il y a 12 multiples de 3 donc on peut écrire :

$$37! = 3^{12} \times 12! \times N_4, \quad \text{avec } N_4 \text{ non multiple de } 3.$$

On voit $12!$ apparaître, où il y a 4 multiples de 3 donc on peut écrire :

$$12! = 3^4 \times 4! \times N_5, \quad \text{avec } N_5 \text{ non multiple de } 3.$$

On voit apparaître $4!$ où il y a 1 multiple de 3 et on peut écrire :

$$4! = 3^1 (1 \times 2 \times 1 \times 4)\,.$$

Finalement, dans $1\,000!$, on peut mettre en facteur $3^{333+111+37+12+4+1} = 3^{498}$.
Ainsi, le plus grand entier n tel que 3^n divise $1\,000!$ est $n = 498$.

Corrigé de l'exercice 2.18 page 86

1. $345 = 28 \times 12 + 9$.
2. $76 = 1 \times 67 + 9$.
3. $1\,001 = 9 \times 101 + 92$.
4. $673 = 6 \times 97 + 91$.

Corrigé de l'exercice 2.19 page 86

On écrit $a = bq + r$ avec $a = 7n + 5$ et $b = 3n + 1$:

$$7n + 5 = 2(3n + 1) + n + 3 \qquad , \qquad 0 \leqslant n + 3 < 3n + 1.$$

La condition sur le reste $0 \leqslant n + 3 < 3n + 1$ équivaut à écrire que $n > 1$. Donc,

- si $n > 1$ le quotient est égal à 2 et le reste à $n + 3$;
- si $n = 0$, $a = bq + r \iff 5 = 5 \times 1 + 0$ donc dans ce cas, le quotient est égal à 5 et le reste à 0 ;
- si $n = 1$, $a = bq + r \iff 12 = 3 \times 4 + 0$ donc ici, le quotient est égal à 3 et le reste à 0.

Corrigé de l'exercice 2.20 page 86

D'après l'énoncé, on a : $\begin{cases} n = 4q + 3 \\ n = 5q + 1 \end{cases}$, donc $4q + 3 = 5q + 1 \iff q = 2$.
Par conséquent, $n = 4q + 3 = 11$.

Corrigé de l'exercice 2.21 page 86

1. Le reste de la division euclidienne de n par 17 est égal à 7 :

$$n = 17q + 7.$$

Par conséquent, $n^2 = (17q+7)^2$
$$= 17^2 q^2 + 17 \times 14q + 49$$
$$= 17(17q^2 + 14q) + 17 \times 2 + 15$$
$$= 17(17q^2 + 14q + 2) + 15.$$
On s'est ici arrangé pour écrire n^2 sous la forme $17Q + r$, $0 \leqslant r < 17$, afin d'avoir une division euclidienne.
Ainsi, le reste de la division euclidienne de n^2 par 17 est 15.

2 Procédons de même avec n^3 :

$$\begin{aligned} n^3 &= (17q+7)^3 \\ &= 17^3 q^3 + 3 \times 17^2 \times q^2 \times 7 + 3 \times 17q \times 7^2 + 7^3 \\ &= 17(17^2 q^3 + 3 \times 17 \times 7q^2 + 3q \times 7^2) + 20 * 17 + 3 \\ &= 17(289q^3 + 357q^2 + 147q + 20) + 3. \end{aligned}$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de n^3 par 17 est 3.

Corrigé de l'exercice 2.22 page 86

1
$$10^2 = 100 = 9 \times 11 + 1$$
$$10^3 = 1\,000 = 90 \times 11 + 10$$
$$10^4 = 10\,000 = 909 \times 11 + 1$$
$$10^5 = 100\,000 = 9\,090 \times 11 + 10$$
On peut conjecturer que lorsque n est pair, le reste de la division euclidienne de 10^n par 11 est égal à 1 et lorsqu'il est impair, ce reste est égal à 10.

2
- Supposons que n soit un entier naturel pair. Alors, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ et $10^n = 10^{2k} = 100^k = (99+1)^k$.
  Or, $(a+b)^k = \sum_{p=0}^{k} c_p a^p b^{k-p}$, où les c_p sont des coefficients entiers.
  Autrement dit, $(99+1)^k = 99^k + 99^{k-1}c_1 + 99^{k-2}c_2 + \cdots + 99c_{p-1} + 1$.
  Chaque terme de cette somme (sauf le dernier) étant un multiple de 99, le reste de la division euclidienne de 100^k par 11 est égale à 1 (le dernier terme de la somme).
  Cela montre que si n est pair, alors le reste de la division euclidienne de 10^n par 11 est égal à 1.
- Supposons que n soit impair. Alors, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ et $10^n = 10^{2k+1} = 10^{2k} \times 10$.
  D'après ce qui a été fait précédemment, on peut alors écrire :
  $$10^{2k} \times 10 = 10 \times 99^k + 10 \times 99^{k-1}c_1 + 10 \times 99^{k-2}c_2 + \cdots + 10 \times 99c_{p-1} + 10.$$
  Ainsi, le reste de la division euclidienne de 10^{2k+1} par 11 est égal à 10.

La conjecture est alors démontrée.

Corrigé de l'exercice 2.23 page 86

Voici une suggestion, qui fait appel aux *listes construites par compréhension* :

Code Python 2-14

```python
L = [ 2*q+1 for q in range(50) ]
P = [ 3*q+2 for q in range(33) ]
Q = [ 5*q+4 for q in range(20) ]
N = [ n for n in L if n in P and n in Q ]
print( N )
```

```
[29, 59, 89]
```

La liste L est construite en prenant tous les entiers naturels q de 0 à 49 (`range(0,50)`), et en ajoutant 1 à leur double. $2\times 49+1=99$ et $2\times 50+1=101>100$, ce qui justifie que l'on prend $q\leqslant 49$.
Cette liste contient alors tous les entiers de 0 à 100 dont le reste est 1 dans la division euclidienne par 2.

Vous l'aurez compris, les listes P et Q sont construites sur un modèle similaire par rapport aux conditions de l'énoncé sur les autres divisions euclidiennes.

La liste N contient toutes les valeurs de n dans L qui sont aussi dans les autres listes. C'est donc l'intersection des trois listes, et c'est ce que nous voulions.
Une autre suggestion est la suivante :

```python
for n in range(101):
    if n%2 == 1 and n%3 == 2 and n%5 == 4:
        print(n)
```

qui affiche les mêmes nombres (29, 59 et 89).
Ici, on fait une simple boucle pour parcourir tous les entiers naturels de 0 à 100, et on teste pour chacun d'eux leur reste dans la division euclidienne par 2, 3 et 5. S'ils coïncident avec ce que l'on veut, on les affiche.

Corrigé de l'exercice 2.24 page 87

$13\equiv -1 \mod 14$ donc $13^{1789}\equiv(-1)^{1789}\equiv -1\equiv 13 \mod 14$.

<u>Le reste de la division euclidienne de 13^{1789} par 14 est donc 13.</u>

Corrigé de l'exercice 2.25 page 87

Nous savons que $32=4\times 7+4$ donc $32\equiv 4 \mod 7$.
Ainsi, $32^{45}\equiv 4^{45} \mod 7$.
Or, $4^2=16\equiv 2 \mod 7$ et $4^3=64\equiv 1 \mod 7$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} 32^{45} &\equiv 4^{3\times 15} \mod 7 \\ &\equiv \left(4^3\right)^{15} \mod 7 \\ &\equiv 1^{15} \mod 7 \\ &\equiv 1 \mod 7. \end{aligned}$$

Le reste de la division euclidienne de 32^{45} par 7 est donc 1.

Corrigé de l'exercice 2.26 page 87

Remarquons que $24 \equiv 3 \mod 7$ car $24 = 3\times 7 + 3$.

Ainsi, $24^1 \equiv 3^1 \equiv 3 \mod 7$

$24^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \mod 7$

$24^3 \equiv 3^3 \equiv 6 \mod 7$

$24^4 \equiv 3^4 \equiv 4 \mod 7$

$24^5 \equiv 3^5 \equiv 5 \mod 7$

$24^6 \equiv 3^6 \equiv 1 \mod 7$

$24^7 \equiv 3^7 \equiv 3 \mod 7$

La boucle est bouclée pour l'exposant 7 et on peut en conclure que $24^{6k+1} \equiv 3 \mod 7$, où $k \in \mathbb{N}$.

Ainsi, le reste de la division euclidienne de 24^n par 7 est égal à 3 pour $n \equiv 1 \mod 6$.

Corrigé de l'exercice 2.27 page 87

a n'est pas divisible par 3 donc $a \equiv 1 \mod 3$ ou $a \equiv 2 \mod 3$.

Ainsi, $a^6 \equiv 1^6 \equiv 1 \mod 3$ ou $a \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 1 \mod 3$ car $64 = 3\times 21 + 1$.

Ainsi, $a^6 - b^6 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \mod 3$ et donc $a^6 - b^6$ est divisible par 3.

Corrigé de l'exercice 2.28 page 87

Nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} n \equiv 1 \mod 2 \iff 21n \equiv 21 \mod 42 \\ n \equiv 2 \mod 3 \iff 14n \equiv 28 \mod 42 \\ n \equiv 5 \mod 7 \iff 6n \equiv 30 \mod 42 \end{array}\right\} \Rightarrow 41n \equiv 79 \mod 42.$$

Or, $41 \equiv -1 \mod 42$ et $79 \equiv -5 \mod 42$ donc $-n \equiv -5 \mod 42$, soit $n \equiv 5 \mod 42$.

Le reste de la division euclidienne de n par 42 est donc égal à 5.

Corrigé de l'exercice 2.29 page 87

On sait que $10 \equiv 1 \mod 3$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 10^k \equiv 1 \mod 3$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \times 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} x_k \mod 3.$$

$$\begin{aligned} x \text{ est divisible par } 3 &\iff x \equiv 0 \mod 3 \\ &\iff \sum_{k=0^{\mathrm{N}}} x_k \equiv 0 \mod 3 \\ &\iff \text{la somme des chiffres de x divise 3.} \end{aligned}$$

$10 \equiv 1 \mod 9$ donc le critère de divisibilité par 9 est identique : un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres l'est aussi.

Corrigé de l'exercice 2.30 page 87

On a :

$$\begin{aligned} 1a4b \text{ divisible par } 45 &\iff 1a4b \text{ divisible par 5 et 9} \\ &\iff 1a4b \equiv 0 \mod 5 \text{ et } 1a4b \equiv 0 \mod 9 \\ &\iff b = 0 \text{ ou } b = 5 \text{ et } 1 + a + 4 + b \equiv 0 \mod 9 \\ &\iff b = 0 \text{ ou } b = 5 \text{ et } a + b \equiv -5 \equiv 4 \mod 9. \end{aligned}$$

- si $b = 0$ alors $a = 4$;
- si $b = 5$ alors $a = 8$.

Les deux nombres possibles sont alors 1845 et 1440.

Pour contrôler nos résultats, on va utiliser le programme suivant.
Dans ce programme, on va se servir de la conversion des nombres en chaîne de caractères : si `n` est un objet de type `int` (entier) alors `str(n)` est le même nombre, mais vu comme une chaîne de caractères, où `str(n)[0]` est le premier chiffre en partant de la gauche.

```
>>> for n in range(10000):
        if n%45==0 and str(n)[0]=='1' and str(n)[2]=='4':
            print(n)

1440
1845
```

Corrigé de l'exercice 2.31 page 88

Soit n un entier naturel.
$3^2 = 9 \equiv 2 \mod 7$ donc $\left(3^2\right)^n \equiv 2^n \mod 7$, soit $3^{2n} \equiv 2^n \mod 7$.
On en déduit alors que $3^{2n} - 2^n \equiv 0 \mod 7$, et donc que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par n.

Corrigé de l'exercice 2.32 page 88

$$\begin{aligned} 11 \mid (7x+4y) &\iff 7x+4y \equiv 0 \mod 11 \\ &\iff 8\times(7x+4y) \equiv 0 \mod 11 \\ &\iff 56x+32y \equiv 0 \mod 11 \\ &\iff x+10y \equiv 0 \mod 11 \quad \text{car } 56 \equiv 1 \mod 11 \text{ et } 32 \equiv 10 \mod 11. \end{aligned}$$

Remarque 44

On a multiplié par 8 car c'est l'inverse de 7 modulo 11.

Corrigé de l'exercice 2.33 page 88

Remarquons que :

$$73 \equiv 3 \quad (5)$$

donc :

$$73^{37} \equiv 3^{37} \quad (5).$$

Regardons les premières puissances de 3 modulo 5 :

- $3^1 \equiv 3 \quad (5)$
- $3^2 \equiv 9 \equiv 4 \quad (5)$
- $3^3 \equiv 27 \equiv 2 \quad (5)$
- $3^4 \equiv \left(3^2\right)^2 \equiv 4^2 \equiv 1 \quad (5)$

Ce dernier reste est intéressant car il signifie que $\left(3^4\right)^k \equiv 1 \quad (5)$ pour tout entier naturel k.

Or,

$$3^{37} = 3^{4\times9+1}$$

donc :

$$73^{37} \equiv 3^{4\times9+1} \quad (5)$$

soit :

$$73^{37} \equiv \left(3^4\right)^9 \times 3^1 \quad (5)$$

donc :

$$73^{37} \equiv 1 \times 3^1 \quad (5).$$

Finalement,

$$\boxed{73^{37} \equiv 3 \quad (5).}$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de 73^{37} par 5 est 3.

Corrigé de l'exercice 2.34 page 88

$17 \equiv 3 \mod 7$ car $17 = 2\times7+3$. Ainsi, $17^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \mod 7$, et donc $17^6 \equiv 2^3 \equiv 1 \mod 7$.

On écrit 548 sous la forme : $548 = 6\times91+2$ donc : $\begin{aligned}[t] 17^{548} &= \left(17^6\right)^{91} \times 17^2 \\ &\equiv 1^{91} \times 2 \mod 7 \\ &\equiv 2 \mod 7 \end{aligned}$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de 17^{548} par 7 est égal à 2.

Corrigé de l'exercice 2.35 page 88

1 On cherche x tel que $5x \equiv 1 \mod 7$. On constate que :

$$\begin{aligned} 5\times 1 &\equiv 5 \mod 7\\ 5\times 2 &\equiv 3 \mod 7\\ 5\times 3 &\equiv 1 \mod 7 \end{aligned}$$

Donc, si $x \equiv 3 \mod 7$ alors $5x \equiv 5\times 3 \equiv 1 \mod 7$.

De plus, si $5x \equiv 1 \mod 7$ alors $3\times 5x \equiv 3 \mod 7$, soit $15x \equiv 3 \mod 7$ donc $x \equiv 3 \mod 3$.

On a alors l'équivalence suivante : $x \equiv 3 \mod 7 \iff 5x \equiv 1 \mod 7$.

Par conséquent, les inverses de 5 modulo 7 sont toutes les valeurs de x telles que $x \equiv 3 \mod 7$.

2 On cherche x tel que $3x \equiv 1 \mod 5$.

On constate que :

$$\begin{aligned} 3\times 1 &\equiv 3 \mod 5\\ 3\times 2 &\equiv 1 \mod 5 \end{aligned}$$

On peut alors raisonner de la même façon qu'à la question précédente.

Par conséquent, un inverse de 3 modulo 5 sont toutes les valeurs de x telles que $x \equiv 2 \mod 5$.

3 On cherche x tel que $6x \equiv 1 \mod 15$.

On constate que :

$$\begin{aligned} 6\times 1 &\equiv 6 \mod 15\\ 6\times 2 &\equiv 12 \mod 15\\ 6\times 3 &\equiv 3 \mod 15\\ 6\times 4 &\equiv 9 \mod 15\\ 6\times 5 &\equiv 0 \mod 15\\ 6\times 6 &\equiv 6 \mod 15 \end{aligned}$$

On constate alors que c'est un cas particulier :

$$\begin{cases} 6\times(1+5k) \equiv 1 \mod 15,\ k\in\mathbb{N}\\ 6\times(2+5k) \equiv 12 \mod 15,\ k\in\mathbb{N}\\ 6\times(3+5k) \equiv 3 \mod 15,\ k\in\mathbb{N}\\ 6\times(4+5k) \equiv 9 \mod 15,\ k\in\mathbb{N}\\ 6\times(5+5k) \equiv 0 \mod 15,\ k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Par conséquent, il n'existe pas d'inverse à 6 modulo 15.

Remarque 45

Cela vient du fait que 6 et 15 ne sont pas premiers entre eux.

Corrigé de l'exercice 2.36 page 88

Supposons que 7 divise a^2+b^2.

Les restes possibles de la division euclidienne de a par 7 sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

$$\begin{aligned}
a &\equiv 0 \mod 7 \Rightarrow a^2 \equiv 0 \mod 7\\
a &\equiv 1 \mod 7 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \mod 7\\
a &\equiv 2 \mod 7 \Rightarrow a^2 \equiv 4 \mod 7\\
a &\equiv 3 \mod 7 \Rightarrow a^2 \equiv 9 \equiv 2 \mod 7\\
a &\equiv 4 \mod 7 \Rightarrow a^2 \equiv 16 \equiv 2 \mod 7\\
a &\equiv 5 \mod 7 \Rightarrow a^2 \equiv 25 \equiv 4 \mod 7\\
a &\equiv 6 \mod 7 \Rightarrow a^2 \equiv 36 \equiv 1 \mod 7
\end{aligned}$$

Il n'y a donc que 4 restes possibles dans la division euclidienne de a^2 par 7 : 0, 1, 2 ou 4.

Il en est de même pour b^2.

Or, $a^2+b^2 \equiv 0 \mod 7$ donc seul le couple $(0;0)$ convient.

Ainsi $a \equiv 0 \mod 7$ et $b \equiv 0 \mod 7$, soit 7 divise a et b.

La réciproque est vraie car si 7 divise a et b, alors $a^2 \equiv 0 \mod 7$ et $b^2 \equiv 0 \mod 7$, donc $a^2+b^2 \equiv 0 \mod 7$.

Corrigé de l'exercice 2.37 page 88

$$\begin{aligned}
x^2 \equiv -11 \mod 100 &\iff x^2 \equiv 300-11 \mod 100\\
&\iff x^2 \equiv 289 \mod 100\\
&\iff x^2 \equiv 17^2 \mod 100\\
&\iff x^2 - 17^2 \equiv 0 \mod 100\\
&\iff (x-17)(x+17) \equiv 0 \mod 100\\
&\iff x \equiv 17 \mod 100 \quad \text{ou} \quad x \equiv -17 \mod 100\\
&\iff \boxed{x \equiv 17 \mod 100 \quad \text{ou} \quad x \equiv 83 \mod 100}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.38 page 88

1
- Initialisation : $4^0 = 1$ et $1+3\times 0 = 1$ donc $4^n \equiv 1+3n \mod 9$ est vraie pour $n=0$.
- Hérédité : supposons que pour un entier n fixé, $4^n \equiv 1+3n \mod 9$.

  Alors, $4^{n+1} \equiv 4\times(1+3n) \mod 9$, soit $4^{n+1} \equiv 4+12n \equiv 4+3n \equiv 1+3(n+1) \mod 9$.

  L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1+3n \mod 9$.

2
$$\begin{aligned}
2^{2n}+15n-1 &\equiv 4^n+15n-1 \mod 9\\
&\equiv 1+3n+15n-1 \mod 9\\
&\equiv 18n \mod 9\\
&\equiv 0\times n \mod 9\\
&\equiv 0 \mod 9.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.39 page 89

Posons :

$$\mathscr{P}_n \quad : \quad (n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\times 2n \equiv 0 \mod 2^n.$$

Notons :

$$\mathrm{A}_n = (n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\times 2n.$$

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie car $\mathrm{A}_0 = 1$ et $2^0 = 1$. On a donc bien $\mathrm{A}_0 \equiv 0 \mod 1$.

- Supposons que pour un entier n fixé, $\mathscr{P}_n$ est vraie, donc que $\mathrm{A}_n = 2^n\mathrm{B}_n$.

  $$\begin{aligned}\mathrm{A}_{n+1} &= \mathrm{A}_n \times (2n+1)(2n+2)\\ &= 2^n\mathrm{B}_n \times 2(2n+1)(n+1)\\ &= 2^{n+1}\mathrm{B}_n(2n+1)(n+1).\end{aligned}$$

  Ainsi, A_{n+1} est divisible par 2^{n+1}. L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\mathrm{A}_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$ donc $\dfrac{\mathrm{A}_n}{2^n} = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)} = 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)$.

Le quotient de A_n par 2^n est donc égal à $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$.

Corrigé de l'exercice 2.40 page 89

- Si $a \equiv 0 \mod 3$ ou $b \equiv 0 \mod 3$:

  $$ab \equiv 0 \mod 3 \Longrightarrow ab(a^2-b^2) \equiv 0 \mod 3.$$

- Si a et b ne sont pas congrus à 0 modulo 3 alors :
  - → si $a \equiv 1 \mod 3$ et $b \equiv 1 \mod 3$:

    $$a^2-b^2 \equiv 0 \mod 3 \Longrightarrow ab(a^2-b^2) \equiv 0 \mod 3.$$

  - → si $a \equiv 1 \mod 3$ et $b \equiv 2 \mod 3$), ou l'inverse :

    $$a^2-b^2 \equiv 1-4 \equiv 0 \mod 3 \Longrightarrow ab(a^2-b^2) \equiv 0 \mod 3.$$

Corrigé de l'exercice 2.41 page 89

$$10 \equiv -1 \quad \text{mod } 11 \iff \forall\, k \in \mathbb{N},\; 10^k \equiv (-1)^k \quad \text{mod } 11.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x \text{ est divisible par } 11 &\iff \sum_{k=0}^{n} x_k \times 10^k \equiv 0 \quad \text{mod } 11\\
&\iff \sum_{k=0}^{n} x_k \times (-1)^k \equiv 0 \quad \text{mod } 11\\
&\iff \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} x_{2p} - \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} x_{2p+1} \equiv 0 \quad \text{mod } 11\\
&\iff \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} x_{2p} \equiv \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} x_{2p+1} \quad \text{mod } 11.
\end{aligned}$$

Ici, nous convenons de noter $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ la partie entière inférieure de $\dfrac{n}{2}$.

Par exemple, $\left\lfloor \dfrac{7}{2} \right\rfloor = 3$.

Nous arrivons alors au critère de divisibilité suivant : « un nombre est divisible par 11 si et seulement si la somme des chiffres de rangs pairs et congrue à celle des chiffres de rangs impairs modulo 11 ».

Essayons avec :

- **37653 :** $3+6+3 = 12$ et $5+7 = 12$. Nous obtenons la même somme donc 37653 est divisible par 11.
- **7432 :** $2+4 = 6$ et $3+7 = 10$; les deux sommes ne sont pas congrues modulo 11 donc 7432 n'est pas divisible par 11.

Corrigé de l'exercice 2.42 page 89

1

$$\begin{aligned}
2\,070 &= 4 \times 432 + 342\\
432 &= 1 \times 342 + 90\\
342 &= 3 \times 90 + 72\\
90 &= 1 \times 72 + 18\\
72 &= 4 \times 18 + 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{pgcd}\,(2\,070\,;\,432) = 18$.

2

$$\begin{aligned}
1\,065 &= 4 \times 235 + 125\\
235 &= 1 \times 125 + 110\\
125 &= 1 \times 110 + 15\\
110 &= 7 \times 15 + 5\\
15 &= 3 \times 5 + 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{pgcd}\,(1\,065\,;\,235) = 5$.

3

$$\begin{aligned}
792 &= 2 \times 363 + 66\\
363 &= 5 \times 66 + 33\\
66 &= 2 \times 33 + 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{pgcd}\,(792\,;\,363) = 33$.

4

$$\begin{aligned}
910 &= 1 \times 858 + 52\\
858 &= 16 \times 52 + 26\\
52 &= 2 \times 26 + 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{pgcd}\,(910\,;\,858) = 26$.

Corrigé de l'exercice 2.43 page 89

On a : $32 = 1 \times 23 + 9$

$$\begin{aligned} 23 &= 2 \times 9 + 5 \\ 9 &= 1 \times 5 + 4 \\ 5 &= 1 \times 4 + 1 \\ 4 &= 4 \times 1 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, de l'avant dernière ligne, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 4 \\ &= (23 - 2 \times 9) - (9 - 5) \\ &= 23 - 2 \times (32 - 23) - (32 - 23) + (23 - 2 \times 9) \\ &= 23 - 2 \times (32 - 23) - (32 - 23) + 23 - 2 \times (32 - 23) \\ &= 23 - 2 \times 32 + 2 \times 23 - 32 + 23 + 23 - 2 \times 32 + 2 \times 23 \\ &= 7 \times 23 - 5 \times 32. \end{aligned}$$

Un couple solution de l'équation $23x + 32y = 1$ est donc $(7; -5)$.

Corrigé de l'exercice 2.44 page 89

$\text{pgcd}\left(x; y\right) = 354 \iff \exists \left(x'; y'\right) \in \mathbb{N},\ x = 354x',\ y = 354y',\ \text{pgcd}\left(x'; y'\right) = 1.$

Ainsi, $x + y = 5664 \iff 354x' + 354y' = 5664 \iff x' + y' = 16$.

On cherche donc deux entiers x' et y' premiers entre eux dont la somme vaut 16. On peut en faire la liste :

- $\left(x'; y'\right) = (1; 15)$
- $\left(x'; y'\right) = (3; 13)$
- $\left(x'; y'\right) = (5; 11)$
- $\left(x'; y'\right) = (7; 9)$
- $\left(x'; y'\right) = (9; 7)$
- $\left(x'; y'\right) = (11; 5)$
- $\left(x'; y'\right) = (13; 3)$
- $\left(x'; y'\right) = (15; 1)$

En multipliant ces valeurs par 354, on obtient tous les couples $\left(x; y\right)$:

- $\left(x; y\right) = (354; 5310)$
- $\left(x; y\right) = (1062; 4602)$
- $\left(x; y\right) = (1770; 3894)$
- $\left(x; y\right) = (2478; 3186)$
- $\left(x; y\right) = (3186; 2478)$
- $\left(x; y\right) = (3894; 1770)$
- $\left(x; y\right) = (4602; 1062)$
- $\left(x; y\right) = (5310; 354)$

Corrigé de l'exercice 2.45 page 90

$\text{pgcd}\left(x; y\right) = 17 \iff \exists \left(x'; y'\right) \in \mathbb{N},\ x = 17x',\ y = 17y',\ \text{pgcd}\left(x'; y'\right) = 1.$

Ainsi,

$$xy = 1734 \iff 17x' + 17y' = 1734 \iff x'y' = 102.$$

On cherche donc deux entiers x' et y' premiers entre eux dont le produit vaut $102 = 2 \times 3 \times 17$. Les possibilités sont les suivantes :

- $\left(x'; y'\right) = (6; 17)$
- $\left(x'; y'\right) = (2; 51)$
- $\left(x'; y'\right) = (1; 102)$
- $\left(x'; y'\right) = (102; 1)$
- $\left(x'; y'\right) = (51; 2)$
- $\left(x'; y'\right) = (17; 6)$

En multipliant par 17 toutes ses possibilités, on obtient les couples $(x;y)$:

- $(x';y') = (102;289)$
- $(x';y') = (17;1734)$
- $(x';y') = (867;34)$
- $(x';y') = (34;867)$
- $(x';y') = (1734;17)$
- $(x';y') = (289;102)$

Corrigé de l'exercice 2.46 page 90

1 $\operatorname{pgcd}(a;b)$ divise a et b, donc divise $a+b=8n$, multiple de 8.
Par conséquent, $\operatorname{pgcd}(a;b)$ divise 8.

2 $n=8k+5$ donc :

- $a = 3(8k+5)+1 = 24k+16 = 8(3k+2)$,
- $b = 5(8k+5)-1 = 40k+24 = 8(5k+3)$.

Ainsi, 8 divise a et b, donc 8 divise $\operatorname{pgcd}(a;b)$.
Or, $\operatorname{pgcd}(a;b)$ divise 8 d'après la question précédente.
Par conséquent, $\operatorname{pgcd}(a;b)=8$.

Corrigé de l'exercice 2.47 page 90

n divise $\operatorname{pgcd}(a;b) \Rightarrow n \equiv 0 \mod a$ et $n \equiv 0 \mod b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = kn \\ b = k'n \end{cases}, \quad (k;k') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

Or, $x \equiv a \mod b$ donc $x = bq+a$, $q\in\mathbb{N}$, soit $x = k'nq+kn = n(k'q+k)$.
Ainsi, n divise x.

Corrigé de l'exercice 2.48 page 90

Utilisons l'algorithme des différences (et donc la propriété : $\operatorname{pgcd}(a;b) = \operatorname{pgcd}(a;b-a)$) pour démontrer le résultat :

$$\begin{aligned}
\operatorname{pgcd}(x;y) = \operatorname{pgcd}(9k+27;4k) &= \operatorname{pgcd}(4k;9k+27-4k)\\
&= \operatorname{pgcd}(4k;5k+27)\\
&= \operatorname{pgcd}(5k+27;5k+27-4k)\\
&= \operatorname{pgcd}(5k+27;k+27)\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;5k+27-(k+27))\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;4k)\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;4k-(k+27))\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;3k-27)\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;3k-27-(k+27))\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;2k-54)\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;2k-54-(k+27))\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;k-81)\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;k+27-(k-81))\\
&= \operatorname{pgcd}(k+27;108).
\end{aligned}$$

Or, $\operatorname{pgcd}(k+27;108)$ divise 108 (par définition) donc $\operatorname{pgcd}(x;y)$ divise 108.

Corrigé de l'exercice 2.49 page 90

On a : $99 = 1\times 56+43$

$$\begin{aligned}56 &= 1\times 43+13\\ 43 &= 3\times 13+4\\ 13 &= 3\times 4+1\\ 4 &= 4\times 1+0.\end{aligned}$$

En « remontant », on a : $1 = 13-3\times 4 = (56-43)-3(43-3\times 13)$

$$\begin{aligned}&= 56-4\times 43+9\times 13\\ &= 56-4\times(99-56)+9(56-43)\\ &= 14\times 56-4\times 99-9\times 43\\ &= 14\times 56-4\times 99-9(99-56)\\ &= 23\times 56-13\times 99.\end{aligned}$$

Il existe donc un couple $(u;v) = (-13;23)$ tel que $99u+56v = 1$.

Ainsi, d'après le théorème de Bézout, $\mathrm{pgcd}(99;56) = 1$.

Corrigé de l'exercice 2.50 page 90

1 $693 = 1\times 550+143$

$550 = 3\times 143+121$

$143 = 1\times 121+22$

$121 = 5\times 22+11$

$22 = 2\times 11+0.$

Ainsi, $\mathrm{pgcd}(550;693) = 11$.

2 $11 = 121-5\times 22$

$$\begin{aligned}&= (550-3\times 143)-5\times(143-121)\\ &= 550-3\times(693-550)-5\left[(693-550)-550+3(693-550)\right]\\ &= 550-3\times 693+3\times 550-5\times 693+10\times 550-15\times 693+15\times 550\\ &= 29\times 550-23\times 693.\end{aligned}$$

Un couple $(u;v)$ tel que $550u+693v = 11$ est donc $(29;-23)$.

Corrigé de l'exercice 2.51 page 90

On a :

$$n\times n-(n^2-1) = 1.$$

Donc il existe un couple $(u;v) = (n;-1)$ tel que $nu+(-1)(n^2-1) = 1$.

Ainsi, d'après le théorème de Bézout, n et n^2-1 sont premiers entre eux.

Corrigé de l'exercice 2.52 page 91

1 Pour $n=0$, $3n+7=7$ et $n+2=2$ sont bien premiers entre eux.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Nous allons chercher une combinaison linéaire de $3n+7$ et $n+2$ qui est égale à 1 : on regarde les termes en n et on s'aperçoit qu'en multipliant par 3 le deuxième nombre, on a :

$$(3n+7)-3(n+2)=1.$$

Il existe donc une combinaison linéaire de ces deux nombres qui est égale à 1 ; par conséquent, ils sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

2 De la même façon que dans la question précédent, on a :

$$-2(3n+4)+3(2n+3)=1.$$

Donc $3n+4$ et $2n+3$ sont premiers entre eux pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour $n=0$, 4 et 3 sont bien premiers entre eux.

Corrigé de l'exercice 2.53 page 91

1 On a : $-3(2n+1)+2(3n+2)=1$.

Il existe une combinaison linéaire de $2n+1$ et $3n+2$ égale à 1. Donc, d'après le théorème de Bézout, $2n+1$ et $3n+2$ sont premiers entre eux.

2 On a :

$$-5(7n+4)+7(5n+3)=1.$$

Il existe une combinaison linéaire de $7n+4$ et $5n+3$ égale à 1.

Donc, d'après le théorème de Bézout, $7n+4$ et $5n+3$ sont premiers entre eux.

Corrigé de l'exercice 2.54 page 91

1 On a :

$$\begin{aligned}
a \text{ est inversible modulo } p &\iff \exists\ x\in\mathbb{N}^* \mid ax\equiv 1 \mod p\\
&\iff \exists\ (x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N} \mid ax=py+1\\
&\iff \exists\ (x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N} \mid ax-py=1\\
&\iff \exists\ (x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N} \mid ax+p(-y)=1\\
&\iff \operatorname{pgcd}(a;p)=1 \text{ d'après le théorème de Bézout.}
\end{aligned}$$

2 L'équation $77u+125v=1$ admet $(13;-8)$ comme solution (voir exercice précédent pour la méthode). Ainsi,

$$13\times77-8\times125=1 \iff 13\times77\equiv 1 \mod 125.$$

Ainsi, 13 est un inverse de 77 modulo 125.

Corrigé de l'exercice 2.55 page 91

Notons $d = \text{pgcd}\,(bc-a\,;\,b)$.

- D'après l'égalité de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;v)$ tel que $(bc-a)\,u+bv=d$.

$$\begin{aligned}(bc-a)\,u+bv=d &\iff bcu-au+bv=d\\ &\iff a(-u)+b(cu+v)=d\end{aligned}$$

  $-u\in\mathbb{Z}$ et $(cu+v)\in\mathbb{Z}$ donc il existe un couple d'entiers relatifs $(u'\,;\,v')$, avec $u'=-u$ et $v'=cu+v$, tel que $au'+bv'=d$.
  Donc $\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$ divise d.

- De plus, $d=\text{pgcd}\,(bc-a\,;\,b)\Rightarrow d\mid b$ et $d\mid(bc-a)\Rightarrow d\mid a$ car si $d\mid b$, alors $d\mid(bc)$ donc si $d\mid(bc-a)$, alors nécessairement, $d\mid a$.
  Ainsi, $d\mid a$ et $d\mid b$ donc $d\mid\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$

Finalement, $\text{pgcd}\,(a\,;\,b)\mid d$ et $d\mid\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$ donc $d=\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$.

Corrigé de l'exercice 2.56 page 91

$\text{pgcd}\,(a\,;\,b)=1$ donc il existe un couple d'entiers relatifs uv tel que :

$$au+bv=1.$$

Nous allons montrer qu'il existe un couple d'entiers relatifs u'v' tel que :

$$(3a+5b)\,u'+(a+2b)\,v'=1.$$

$$\begin{aligned}(3a+5b)\,u'+(a+2b)\,v' &= 3au'+5bu'+av'+2bv'\\ &= a(3u'+v')+b(5u'+2v').\end{aligned}$$

Pouvons-nous choisir u' et v' de sorte que $\begin{cases}3u'+v'=u & (\text{L}_1)\\ 5u'+2v'=v & (\text{L}_2)\end{cases}$?

Pour répondre à cette question, cherchons à résoudre ce dernier système.

En faisant $2(\text{L}_1)-(\text{L}_2)$, on obtient :

$$u'=2u-v$$

et en faisant $-5(\text{L}_1)+3(\text{L}_2)$, on obtient :

$$v'=-5u+3v.$$

En prenant ces valeurs de u' et v', on a $(3a+5b)\,u'+(a+2b)\,v'=au+v=1$.
Ainsi, d'après le théorème de Bézout, $\text{pgcd}\,(3a+5b\,;\,a+2b)=1$.

Corrigé de l'exercice 2.57 page 91

1 $31 = 1 \times 28 + 3$

$28 = 9 \times 3 + 1$

$3 = 3 \times 1 + 0$

Donc pgcd$(31;28) = 1$.

De l'algorithme précédent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 1 &= 28 - 9 \times 3 \\ &= 28 - 9 \times (31 - 28) \\ &= 10 \times 28 - 9 \times 31 \end{aligned}$$

Ainsi, si $x = -9$ et $y = -10$, $31x - 28y = 1$.

2 On a :

$$\begin{array}{rcrcl} 31 \times & (-9) & -\,28 \times & (-10) & = 1 \\ 31 \times & x & -\,28 \times & y & = 1 \\ \hline 31 \times & (-9-x) & -\,28 \times & (-10-y) & = 0 \end{array}$$

Ainsi :

$$31(-9-x) = 28(-10-y).$$

Or, pgcd$(31;28) = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, 31 divise $(-10-y)$ et 28 divise $(-9-x)$:

$$\begin{cases} -9-x & = 28k \\ -10-y & = 31k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$\boxed{\begin{cases} x & = -9-28k \\ y & = -10-31k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Corrigé de l'exercice 2.58 page 92

1 $108 = 1 \times 55 + 53$

$55 = 1 \times 53 + 2$

$53 = 26 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

Donc pgcd$(108;55) = 1$. De l'algorithme précédent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 1 &= 53 - 26 \times 2 \\ &= (108-55) - 26 \times (55-53) \\ &= 108 - 55 - 26 \times 55 + 26 \times 53 \\ &= 108 - 27 \times 55 + 26(108-55) \\ &= 27 \times 108 - 53 \times 55 \end{aligned}$$

Ainsi, si $x_0 = 27$ et $y_0 = -53$ sont deux solutions particulières de l'équation diophantienne $108x + 55y = 1$.

2 On a :

$$\begin{array}{rcrcrl} 108 \times & 27 & + 55 \times & (-53) & = 1 \\ 108 \times & x & + 55 \times & y & = 1 \\ \hline 108 \times & (27-x) & + 55 \times & (-53-y) & = 0 \end{array}$$

Ainsi :

$$108(27-x) = 55(53+y).$$

Or, pgcd (108 ; 55) = 1 donc d'après le théorème de Gauss, 108 divise $(53+y)$ et 55 divise $(27-x)$:

$$\begin{cases} 27-x & = 55k \\ 53+y & = 108k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$\boxed{\begin{cases} x & = 27-55k \\ y & = -53+108k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Corrigé de l'exercice 2.59 page 92

Notons x le nombre d'hommes et y celui de femmes.
L'énoncé nous donne alors l'équation :

$$8x + 5y = 100.$$

Avant tout, trouvons une solution particulière à cette équation.
Il faut que $y = \dfrac{100-8x}{5} = \dfrac{100}{5} - \dfrac{8x}{5} = 20 - \dfrac{8x}{5}$ soit entier, donc que $8x$ soit un multiple de 5.
Prenons alors $x = 5$ et donc $y = 20 - 8 = 12$.
Une solution particulière est donc $(x_0 ; y_0) = (5 ; 12)$.
On a alors :

$$\begin{array}{rcrcrl} 8 \times & 5 & + 5 \times & 12 & = 100 \\ 8 \times & x & + 5 \times & y & = 100 \\ \hline 8 \times & (5-x) & + 5 \times & (12-y) & = 0 \end{array}$$

soit :

$$8(5-x) = 5(y-12).$$

pgcd (8 ; 5) = 1 donc d'après le théorème de Gauss, 8 divise $(y-12)$ et 5 divise $(5-x)$:

$$\begin{cases} 5-x & = 5k \\ y-12 & = 8k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$\begin{cases} x & = 5-5k \\ y & = 12+8k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On sait que $(x ; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ce qui nous laisse peu de choix quant aux valeurs de k :

- $k = 0$: on a alors $x = 5$ et $y = 12$;
- $k = -1$: on a alors $x = 10$ et $y = 4$.

Il y avait donc 5 hommes et 12 femmes, ou 10 hommes et 4 femmes.

Corrigé de l'exercice 2.60 page 92

$$\begin{cases} x \equiv 5 \quad \text{mod } 18 \\ x \equiv 5 \quad \text{mod } 24 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 18p+5 \\ x = 24q+5 \end{cases} \quad , \quad (p,q) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\implies 18p+5 = 24q+5$$
$$\implies 18p = 24q$$
$$\implies 3p = 4q.$$

Or, $\text{pgcd}\,(3\,;4) = 1$ donc $3 \mid q$ et $4 \mid p$, i.e.

$$\exists\,(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \begin{cases} q = 3m \\ p = 4n \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x = 18 \times 4n + 5 = 72n + 5 \\ x = 24 \times 3m + 5 = 72m + 5 \end{cases}$$

Les solutions du système $\begin{cases} x \equiv 5 \quad \text{mod } 18 \\ x \equiv 5 \quad \text{mod } 24 \end{cases}$ sont donc tous les x tels que $x \equiv 5 \quad \text{mod } 72$.

Corrigé de l'exercice 2.61 page 92

$$\begin{cases} x \equiv 3 \quad \text{mod } 17 \\ x \equiv 4 \quad \text{mod } 19 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 17p+3 \\ x = 19q+4 \end{cases} \quad , \quad (p,q) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\implies 17p+3 = 19q+4$$
$$\implies 17p - 19q = 1.$$

$(9\,;8)$ est solution de cette dernière équation (voir exercice 2.42 pour la méthode).

$$\begin{array}{llllll} 17 & p & - & 19 & q & = 1 \\ 17 & \times 9 & - & 19 & \times 8 & = 1 \\ \hline 17 & (p-9) & - & 19 & (q-8) & = 0 \end{array} \quad \text{soit : } 17(p-9) = 19(q-8).$$

$\text{pgcd}\,(17\,;19) = 1$ donc $17 \mid (q-8)$ et $19 \mid (p-9)$. Ainsi,

$$\exists\, n \in \mathbb{Z} \mid \begin{cases} q - 8 = 17n \\ p - 9 = 19n \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} p = 19n + 9 \\ q = 17n + 8 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x = 17(19n+9) + 3 = 323n + 156 \\ x = 19(17n+8) + 4 = 323n + 156 \end{cases} \iff \boxed{x \equiv 156 \quad \text{mod } 323}$$

Corrigé de l'exercice 2.62 page 92

1

1345	5
269	269
1	

Ainsi, 1 345 admet 4 diviseurs :
1, 5, 269 et 1 345

2

456	2
228	2
114	2
57	3
19	19
1	

Ainsi, $456 = 2^3 \times 3 \times 19$.

Les diviseurs de 456 sont alors de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 19^\gamma$ avec $\alpha \in \{0;1;2;3\}$, $\beta \in \{0;1\}$ et $\gamma \in \{0;1\}$.

Il y a alors 4 choix pour α, 2 pour β et γ et donc $4 \times 2 \times 2 = 16$ diviseurs de 456.

3

1650	2
825	3
275	5
55	5
11	11
1	

Ainsi, $1\,650 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 11$. Les diviseurs de 1 650 sont donc de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 11^\delta$, avec α, β et δ dans $\{0;1\}$ et $\gamma \in \{0;1;2\}$.

Par conséquent, 1 650 possède alors $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ diviseurs.

4

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Ainsi, $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et donc, 360 admet $4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs.

Corrigé de l'exercice 2.63 page 92

1 On a :

- $x = 280\,280 = 2^3 \times 5^1 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1$.
- $y = 347\,116 = 2^2 \times 7^3 \times 11^1 \times 23^1$.
- $z = 740\,278 = 2^1 \times 7^1 \times 11^2 \times 19^1 \times 23^1$.

2 On peut alors déduire que :

- $d_1 = \text{pgcd}\left(x\,;\,y\right) = 2^2 \times 7^2 \times 11^1$.
- $d_2 = \text{pgcd}\left(y\,;\,z\right) = 2^1 \times 7^1 \times 11^1 \times 23^1$.

- $d_3 = \text{pgcd}(x; z) = 2^1 \times 7^1 \times 11^1$.

3 Le PGCD de x, y et z peut se calculer à partir de la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres.
Ce la donne : $\text{pgcd}((x; y; y)) = 2^1 \times 7^1 \times 11^1$.

Corrigé de l'exercice 2.64 page 93

Rappelons que si p est un nombre premier, alors il n'admet aucun diviseurs inférieurs à $\sqrt{p}$.
$\sqrt{1789} \approx 42,3$.
Les nombres premiers inférieurs à 42 sont :

$$2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41.$$

On vérifie que aucun d'entre eux ne divisent 1 789.
Par conséquent, 1 789 est un nombre premier.

Corrigé de l'exercice 2.65 page 93

1 La liste des nombres premiers inférieurs à 50 est :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

2 $\sqrt{1517} \approx 38,95$.
On teste alors si les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 divisent 1 517.

```
>>> L = [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37]
>>> for i in L:
      if 1517%i == 0: print(i)
 37
```

On trouve que 37 divise 1 517 donc 1 517 n'est pas premier.

3
$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + 1517 &\iff a^2 - b^2 = 1517 \\ &\iff (a-b)(a+b) = 37 \times 41 \\ &\iff \begin{cases} a - b = 37 \\ a + b = 41 \end{cases} \\ &\iff a = 39 \text{ et } b = 2. \end{aligned}$$

Ainsi, le seul couple $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a^2 = b^2 + 1517$ est $(39; 2)$.

Corrigé de l'exercice 2.66 page 93

On a : $n^3 - 27 = n^3 - 3^3 = (n-3)(n^2 + 3n + 9)$.
Ainsi, $n^3 - 27 \in \mathbb{P} \iff n - 3 = 1$ ou $n^2 + 3n + 9 = 1 \iff n = 4$.

Corrigé de l'exercice 2.67 page 93

$$\begin{aligned}
7p+1 \text{ est un carré parfait} &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ 7p+1 = n^2 \\
&\iff n^2 - 1 = 7p \\
&\iff (n+1)(n-1) = 7p \\
&\iff \begin{cases} n+1 = 7 \\ n-1 = p \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n+1 = p \\ n-1 = 7 \end{cases} \\
&\iff n = \frac{p+7}{2}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.68 page 93

1 Rappelons que a et b sont distincts modulo 3 si et seulement si $(a-b)$ n'est pas un multiple de 3.

$n-(n+2) = -2$ n'est pas un multiple de 3, donc n n'est pas congru à $n+2$ modulo 3.
$n-(n+10) = -10$ donc même conclusion.
$(n+2)-(n+10) = -8$ donc même conclusion.

Ainsi, n, $n+2$ et $n+10$ sont distincts modulo 3.

2 Notons $n \equiv r_1 \mod 3$, $n+2 \equiv r_2 \mod 3$ et $n+10 \equiv r_3 \mod 3$.
D'après la question précédente, r_1, r_2 et r_3 dont deux à deux distincts. Or, il n'existe que 3 restes possibles dans la division euclidienne par 3 : 0, 1 ou 2.
Par conséquent, l'un des restes est nul et donc, l'un des nombres n, $n+2$ et $n+10$ est divisible par 3. Ce nombre n'est donc pas premier car il ne peut pas être égal à 3 (par hypothèse : $n > 3$).

Corrigé de l'exercice 2.69 page 93

- Si $p \equiv 0 \mod 3$, alors p est un multiple de 3. Or, p est premier donc $p = 3$ nécessairement.

- Si $p \equiv 1 \mod 3$, alors $p^2 \equiv 1 \mod 3$ et donc $8p^2 \equiv 8 \equiv 2 \mod 3$, soit $8p^2+1 \equiv 0 \mod 3$.
  Donc $8p^2+1$ est un multiple de 3 et aussi premier. Donc $8p^2+1 = 3$, ce qui est impossible car $p \in \mathbb{N}$.
  Ainsi, p ne peut pas être congru à 1 modulo 3.

- Si $p \equiv 2 \mod 3$, alors $8p^2+1 \equiv 0 \mod 3$, ce qui nous ramène à la même conclusion qu'au point précédent.

Ainsi, $p \in \mathbb{P}$ et $8p^2+1 \in \mathbb{P} \iff p = 3$.

Corrigé de l'exercice 2.70 page 93

Raisonnons par l'absurde ; supposons donc qu'il existe un rationnel $x = \dfrac{a}{b}$ tel que $x^2 = p$ et $\text{pgcd}\,(a\,;\,b) = 1$.

Alors, $\dfrac{a^2}{b^2} = p$, soit $a^2 = pb^2$.

D'après le théorème de Gauss, p divise donc a^2, donc p divise a et alors p^2 divise a^2, donc divise pb^2. Ainsi, p divise b^2, donc p divise b.

Or, $pgcd\,(a\,;b) = 1$ donc il n'est pas possible que p divise à la fois a et b.

On aboutit à une contradiction ; par conséquent, notre hypothèse de départ est fausse.
Ainsi, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = p$.

Corrigé de l'exercice 2.71 page 93

$$3n+1 = 2n+(n+1) \quad , \quad n+1 < 2n \text{ donc } n > 1 \tag{2.4}$$
$$2n = 1\times(n+1)+(n-1) \quad , \quad n-1 < n+1 \text{(toujours vrai)} \tag{2.5}$$
$$n+1 = 1\times(n-1)+2 \quad , \quad 2 < n-1 \text{ donc } n > 3. \tag{2.6}$$

Deux cas se présentent pour $n > 3$:

- $n \in 2\mathbb{N} \iff n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$. Alors, l'égalité 2.6 donne :

$$2k+1 = (2k-1)+2$$
$$2k-1 = k+(k-1)$$
$$k = (k-1)+\mathbf{1}$$

  Dans ce cas, $\text{pgcd}\,(a_n\,;\,b_n) = 1$.

- $n \notin 2\mathbb{N} \iff n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$. Alors, l'égalité 2.6 donne :

$$(2k+1)+1 = (2k+1-1)+\mathbf{2}$$
$$2k = 2k+0$$

  Dans ce cas, $\text{pgcd}\,(a_n\,;\,b_n) = 2$.

De plus,

- Pour $n = 1$: $a_1 = 2$ et $b_1 = 4$ donc $\text{pgcd}\,(a_1\,;\,b_1) = 2$.
- Pour $n = 2$: $a_2 = 4$ et $b_2 = 7$ donc $\text{pgcd}\,(a_2\,;\,b_2) = 1$.
- Pour $n = 3$: $a_3 = 6$ et $b_3 = 10$ donc $\text{pgcd}\,(a_3\,;\,b_3) = 2$.

On a donc bien :

$$\text{pgcd}\,(a_n\,;\,b_n) = 1 \iff n \in 2\mathbb{N}^*.$$

Corrigé de l'exercice 2.72 page 94

1 Entre 2^k et 2^{k+1} (non compris), il y a $2^{k+1}-2^k=2^k-1$ nombres. Le nombre avant 2^{k+1} étant nécessairement pair, on peut alors dire qu'il y a :

$$\frac{2^k-2}{2}=2^{k-1}-1$$

nombres pairs, pour $k\in\mathbb{N}^*$.

2 $(2^4)!=2^1\times3\times2^2\times5\times6\times7\times2^3\times\cdots\times2^4$.
Dans cette décomposition, il y a d'une part toutes les puissances de 2, mais aussi les nombres pairs entre ces puissances, nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $q\times2^p$, $p\geqslant1$.

- Entre 2^2 et 2^3, il y a 1 multiple de 2 : $6=2\times3$.
- Entre 2^3 et 2^4, il y a 3 multiples de 2 : $10=2\times5$, $12=2^2\times3$ et $14=2\times7$.

Finalement, l'exposant de 2 dans la décomposition de $(2^4)!$ le plus grand est :

$$(1+2+3+4)+1+1+1+2+1=15.$$

3 Voici un programme possible :

Code Python 2-15

```python
def fact(n):
    f = 1
    for i in range(1,n+1):
        f = f * i
    return f

def maxpow(n):
    N = fact(2**n)
    p = 0
    while N%2 == 0:
        p = p+1
        N = N//2
    return p
```

Ces fonctions ont tout de même leur limite (surtout `fact(n)`. En effet, à partir de $n=15$, cette dernière fonction est longue pour renvoyer le résultat. On peut tout de même contrôler que $2^{65\,535}$ est la plus grande puissance de 2 qui divise $(2^{16})!$.

Corrigé de l'exercice 2.73 page 94

Voici le programme complété :

Code Python 2-16

```python
def decomp(n):
    D = dict() # dictionnaire vide
    k = 2
    while n > 1:
        exposant = 0
        while n%k == 0:
            exposant = exposant + 1
            n = n/k
        if exposant != 0:
            D[k] = exposant
        k = k+1
        j = 2
        while k%j == 0:
            k = k + 1
    return D
```

On a par exemple :

```
>>> decompose(360)
{2: 3, 3: 2, 5: 1}
```

qui nous dit alors que $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$.

Corrigé de l'exercice 2.74 page 95

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} 3^{n+p} - 3^{n+1} \text{ est divisible par } p &\iff 3^{n+p} - 3^{n+1} \equiv 0 \mod p \\ &\iff 3^{n+p} \equiv 3^{n+1} \mod p \\ &\iff 3^n \times 3^p \equiv 3^n \times 3 \mod p \\ &\iff 3^p \equiv 3 \mod p \qquad \text{car } p \neq 3. \end{aligned}$$

Cette dernière congruence est vraie d'après le petit théorème de Fermat (car p est premier et p ne divise pas 3).

Par conséquent, pour tout entier naturel n, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p.

Corrigé de l'exercice 2.75 page 95

- Si a est divisible par 13 alors $a^{13} - a = a\left(a^{12} - 1\right)$ aussi.
  De plus, a et a^{13} ont la même parité. En effet, le produit de deux nombres impairs est impair et celui de deux nombres pairs est pair.

Ainsi, $a^{13}-a$ est divisible par 2 (la différence de deux nombres de même parité est paire).
2 et 13 étant premiers entre eux, on en conclut que $a^{13}-a$ est divisible par 2×13, donc par 26.

- Si a n'est pas divisible par 13, d'après le petit théorème de Fermat,

$$a^{13}\equiv a \mod p$$

donc

$$a^{13}-a\equiv 0 \mod p,$$

ce qui signifie que $a^{13}-a$ est divisible par 13.
De plus, il est divisible par 2 (pour les raison évoquées précédemment), donc divisible par 26.

Corrigé de l'exercice 2.76 page 95
D'après le petit théorème de Fermat,

$$3^6\equiv 3^{7-1}\equiv 1 \mod 7.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$3^{6n}\equiv\left(3^6\right)^n\equiv 1^n\equiv 1 \mod 7$$

et donc :

$$3^{6n}-1\equiv 0 \mod 7.$$

$3^{6n}-1$ est donc bien divisible par 7, quel que soit l'entier naturel n.

Corrigé de l'exercice 2.77 page 95

1 Nous allons démontrer l'équivalence entre le système et l'unicité de la solution en démontrant la double implication.

- Montrons que $\begin{cases} x\equiv a \mod m\\ x\equiv b \mod n\end{cases} \Rightarrow x\equiv x_0 \mod (mn).$

  m et n sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que $um+vn=1$.
  Le système $\begin{cases} x\equiv a \mod m\\ x\equiv b \mod n\end{cases}$ peut s'écrire :

$$\begin{cases} x=mk+a\\ x=nk'+b\end{cases},\quad (k\,;k')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

  soit, en multipliant la 1re ligne par nv et la 2e par mu :

$$\begin{cases} (nv)x=(nv)mk+(nv)a\\ (mu)x=(mu)nk'+(mu)b\end{cases},\quad (k\,;k')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

En ajoutant les deux lignes, on obtient :

$$(nv+mu)x = mn(vk+uk')+nva+mub$$

soit :

$$x = mn(vk+uk')+nva+mub.$$

Ainsi, si x est solution du système $\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ x \equiv b \mod n \end{cases}$,
alors $x \equiv nva+mub \mod (mn)$.

- Montrons maintenant que $x \equiv nva+mub \mod (mn) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \equiv a \mod m \\ x \equiv b \mod n \end{cases}$.

  Puisque m et n sont premiers entre eux, il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que $um+vn=1$, soit $nv = 1-mu$.
  Ainsi,

$$\begin{aligned} x \equiv nva+mub \mod (mn) &\Rightarrow x \equiv nva \mod m \\ &\Rightarrow x \equiv (1-mu)a \mod m \\ &\Rightarrow x \equiv a \mod m. \end{aligned}$$

  De même,

$$x \equiv b \mod n.$$

  x est donc solution du système $\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ x \equiv b \mod n \end{cases}$.

2 Notons x le nombre de macarons commandés par la société. D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 9 \end{cases}$$

5 et 9 étant premiers entre eux, on utilise le théorème des restes chinois : il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que $5u+9v=1$.
On trouve facilement $(u\,;v) = (2\,;-1)$.
Dans ce cas, $x \equiv 9\times(-1)\times 3+5\times 5\times 2 \mod (5\times 9)$, soit $x \equiv 23 \mod 45$.
Le nombre compris entre 100 et 140 correspondant est $x = 23+2\times 45 = 113$.

La société a donc commandé 113 macarons.

Corrigé de l'exercice 2.78 page 95

1 Soit a un entier premier avec $n = p_1p_2\cdots p_k$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, p_i ne divise par a donc d'après le petit théorème de Fermat,

$$a^{p_i-1} \equiv 1 \mod p_i.$$

Or, par hypothèse, $p_i - 1$ divise $n-1$ donc :

$$a^{n-1} \equiv a^{q_i(p_i-1)} \equiv \left(a^{p_i-1}\right)^{q_i} \equiv 1^{q_i} \equiv 1 \mod p_i.$$

Ainsi, p_i divise $a^{n-1}-1$.

Les p_i étant premiers entre eux, $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ divise $a^{n-1}-1$ et donc $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$.

n est donc un nombre de Carmichael.

2 $561 = 3 \times 11 \times 17$.

- $3-1$ divise $561-1 = 560$;
- $11-1 = 10$ divise $561-1 = 560$;
- $17-1 = 16$ divise 560.

Ainsi, 561 est bien un nombre de Carmichael.

Corrigé de l'exercice 2.79 page 96

Dans cette fonction, « `2**(n-1)%n` » représente le reste de la division euclidienne de 2^{n-1} par n. Autrement dit, cela représente la congruence de 2^{n-1} modulo n.

D'après le petit théorème de Fermat, si n est premier (donc ne divise par 2) alors $2^{n-1} \equiv 1 \mod p$.
Ainsi, si le reste calculé est différent de 1, alors n n'est pas premier. Par conséquent, si `test(n)` renvoie « False », n n'est assurément pas premier.
Mais attention, si la fonction renvoie « True », cela ne signifie pas nécessairement que n est premier.
En effet, `test(341)` renvoie « True » et pourtant, $341 = 11 \times 31$.

Ce test n'est donc pas fait pour prouver qu'un nombre est premier mais au contraire pour prouver qu'un nombre n'est pas premier.
On peut alors modifier cette fonction afin qu'elle soit moins ambigüe :

Code Python 2-17

```python
def test(n):
    if 2**(n-1)%n != 1:
        return f"{n} n'est assurément pas un nombre premier."
    else:
        return f"{n} est potentiellement premier, mais il faut effectuer
    d'autres tests pour s'en assurer."
```

Corrigé de l'exercice 2.80 page 96

1 Montrons ce résultat par l'absurde. Supposons qu'il existe deux restes égaux r et r' et notons pour $k \in [\![0;p-1]\!]$ et $k' \in [\![0;p-1]\!]$ différent de k :

$$\begin{aligned} ka &= pq + r & q \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < p \\ k'a &= pq' + r & q' \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < p \end{aligned}$$

Ainsi, par différence :

$$(k-k')a = (q-q')p.$$

p divise donc $(k-k')a$.

Or, $(k-k')<p$ donc p ne peut pas diviser $(k-k')$ et donc p divise a, ce qui est contradictoire avec nos hypothèses.

Par conséquent, il ne peut pas exister deux restes égaux dans la division euclidienne par p de a, $2a$, ... , $(p-1)a$.

2 D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \mod p \\ 2a &\equiv r_2 \mod p \\ &\vdots \\ (p-1)a &\equiv r_{p-1} \mod p \end{aligned}$$

D'où, par produit :

$$(p-1)!a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \cdots r_{p-1} \mod p\,.$$

Comme les r_i sont tous distincts, $r_1 r_2 \cdots r_{p-1} = (p-1)!$ et comme $\mathrm{pgcd}\big(p;(p-1)!\big)$=1, on peut diviser chacun des membres de la congruence par $(p-1)!$, ce qui donne :

$$\boxed{a^{p-1} \equiv 1 \mod p}$$

3 Pour tout entier a tel que $pgcd(a;561)=1$, il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tel que $au+561v=1$, soit tel que $au \equiv 1 \mod 561$.
On utilise 3 fois le petit théorème de Fermat :

$$\begin{cases} u^2 \equiv 1 \mod 3 \iff u^{560} \equiv 1 \mod 3 \\ u^{10} \equiv 1 \mod 11 \iff u^{560} \equiv 1 \mod 11 \\ u^{16} \equiv 1 \mod 17 \iff u^{560} \equiv 1 \mod 17 \end{cases}$$

D'où :

$$u^{560} \equiv r \mod 561 \quad \text{avec} \quad r \equiv 1 \mod 3,\ r \equiv 1 \mod 11,\ r \equiv 1 \mod 17\,.$$

On a alors :

$$r = 3k+1 = 11k'+1 = 17k''+1\,,$$

soit :

$$3k = 11k' = 17k''.$$

Ainsi, 11 divise k et 17 divise k', soit $k=11m$ et $k'=17m'$.
Alors,

$$r = 3\times 11m+1 = 11\times 17m'+1$$

soit :

$$3\times 11m = 11\times 17m'$$

et donc $3m = 17m'$. Ainsi, 17 divise m et on peut écrire $m=17\lambda$.
On arrive ainsi à : $r = 3\times 11\times 17\lambda+1$, soit $r\equiv 1 \mod 561$ et donc $u^{560} \equiv 1 \mod 561$.

Or, nous avons vu que $au \equiv 1 \mod 561$ donc $(au)^{560} \equiv 1 \mod 561$.
Comme $u^{560} \equiv 1 \mod 561$, cela nous donne : $a^{560} \equiv 1 \mod 561$, où 561 n'est pas un nombre premier.
Ceci prouve que la réciproque du petit théorème de Fermat est fausse.

Corrigé de l'exercice 2.81 page 96

1 La lettre « Q » occupe la place 16; donc $x = 16$. On calcule alors :

$$ax + b \equiv 17 \times 16 + 2 \equiv 14 \mod 26.$$

14 est la position de la lettre « O ».
Ainsi, « Q » est chiffrée en « O ».

2 Raisonnons par l'absurde.
Supposons donc que $\operatorname{pgcd}(a;26) \neq 1$. Notons x et x' les rangs de deux lettres différentes.

$$\begin{cases} ax+b \equiv r(x) \mod 26 \\ ax'+b \equiv r(x') \mod 26 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ax+b &= 26q + r(x),\ q \in \mathbb{N}^* \\ ax'+b &= 26q' + r(x'),\ q' \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} r(x) - r(x') &= 26(q'-q) + a(x-x') \\ &= 26(q'-q) + a\frac{26}{\operatorname{pgcd}(a;26)} \quad \text{en prenant } x \text{ et } x' \text{ tels que } x - x' = \frac{26}{\operatorname{pgcd}(a;26)} \\ &= 26\left(q' - q + \frac{a}{\operatorname{pgcd}(a;26)}\right) \\ &\equiv 0 \mod 26. \end{aligned}$$

Il est donc possible de trouver deux x et x' différents tels que $r(x) \equiv r(x') \mod 26$.
Dans ce cas, le décryptage est impossible.
Par conséquent, si $\operatorname{pgcd}(a;26) \neq 1$, une lettre chiffrée peut corresponde à plusieurs lettres.

3 Supposons que $\operatorname{pgcd}(a;26) = 1$. Soient deux nombres x et x' tels que $r(x) = r(x')$.

$$\begin{cases} ax+b \equiv r(x) \mod 26 \\ ax'+b \equiv r(x') \mod 26 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ax+b &= 26q + r(x),\ q \in \mathbb{N}^* \\ ax'+b &= 26q' + r(x),\ q' \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Alors,

$$a(x-x') = 26(q-q').$$

Or, $\operatorname{pgcd}(a;26) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 26 divise $(x - x')$.
De plus, $0 \leqslant x \leqslant 25$ et $0 \leqslant x' \leqslant 25$.
Par conséquent, $-25 \leqslant x - x' \leqslant 25$.
On en déduit alors que $x - x' = 0$ (seul 0 est divisible par 26 sur $[\![-25;25]\!]$).
Dans ce cas, on est assuré que le décryptage est possible (à une lettre codée ne correspond qu'une solution décodée).

4 On part du principe que $y \equiv ax + b \mod 26$ est le rang de la lettre codée. Alors, en convenant de noter a' l'inverse de a modulo 26, on a :

$$\begin{aligned} ax + b \equiv y \mod 26 &\Leftrightarrow aa'x + ba' \equiv a'y \mod 26 \\ &\Leftrightarrow x \equiv a'(y-b) \mod 26. \end{aligned}$$

Pour décoder la lettre « Q », dont le rang est $y = 16$, on fait :

$$\begin{aligned} x &\equiv 23(16-2) \mod 26 \\ &\equiv 322 \mod 26 \\ &\equiv 12 \times 26 + 10 \mod 26 \\ &\equiv 10 \mod 26. \end{aligned}$$

Et 10 est le rang de la lettre « K ».

5 Voici une fonction possible.

Code Python 2-18

```
from string import ascii_uppercase
def chiffrement_affine(a,b,lettre):
    lettre = lettre.upper() # on convertir la lettre en majuscule... au cas où...
    x = ascii_uppercase.index(lettre)
    r = (a * x + b) % 26
    return ascii_uppercase[r]
```

J'ai ici fait appel à `ascii_uppercase` (du module `string`) qui désigne la chaîne de caractères « ABC...XYZ ».

6 Voici une fonction possible :

Code Python 2-19

```
def dechiffrement_affine(a,b,lettre):
    lettre = lettre.upper()
    x = ascii_uppercase.index(lettre)
    i = 0 # calcule l'inverse de a modulo 26
    while (a*i%26 != 1):
        i = i + 1
    y = ( i * (x-b) ) % 26 # calcule le rang de la lettre initiale
    return ascii_uppercase[y]
```

Corrigé de l'exercice 2.82 page 97

Code Python 2-20

```
from string import ascii_uppercase
def chiffrement_vigenere(message,key):
    message = message.upper()
    key = key.upper()
    chiffrement = ''
    if len(key) > len(message):
        key = key[:len(message)]
    elif len(key) < len(message):
        while len(key) < len(message):
            key += key
        key = key[:len(message)]
    for p in range( len(message) ):
        x = ascii_uppercase.index(message[p])
        y = ascii_uppercase.index(key[p])
        r = (x+y)%26
        chiffrement += ascii_uppercase[r]
    return chiffrement
```

Corrigé de l'exercice 2.83 page 97

1 On cherche a_{13} de sorte que :

$$3(0+7+6+6+2+9)+(3+1+7+0+3+9+a_{13}) \equiv 0 \mod 10.$$

On a alors : $113+a_{13} \equiv 0 \mod 10$, et donc : $a_{13} \equiv 7 \mod 10$.
La clé de ce code est donc égale à 7.

2 Voici une proposition de code :

Code Python 2-21

```
def ean13_key(code):
    code = str(code)
    if len( code ) != 12:
        return False
    else:
        s = 0
        for k in range(len(code)):
            if k%2 != 0:
                s = s + 3 * int( code[k] )
            else:
                s = s + int( code[k] )

        return 10 - s%10
```

Il faut ici faire attention au fait que le premier chiffre (à gauche) n'est pas a[1] mais a[0]. Il y a donc un décalage : ici, ce sont les chiffres de rang impairs que l'on multiplie par 3.

3 Supposons qu'un seul chiffre est erroné dans un code $a_1 a_2 \cdots a_{12} a_{13}$.
La question est : est-il possible que ce code produise la même clé de contrôle ?
Supposons que ce soit le cas.

- Supposons que le chiffre erroné soit $a'_{11} \neq a_{11}$ (ou n'importe quel chiffre de rang impair).

$$3\sum_{k=1}^{6} a_{2k} + \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1} \equiv 0 \mod 10$$
$$3\sum_{k=1}^{6} a_{2k} + \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} + a'_{11} + a_{13} \equiv 0 \mod 10.$$

En soustrayant les deux congruences, on a :

$$a_{11} - a'_{11} \equiv 0 \mod 10 \qquad \text{soit} \qquad a'_{11} \equiv a_{11} \mod 10.$$

Or, $0 \leqslant a_k \leqslant 9$ et $0 \leqslant a'_k \leqslant 9$ donc cela implique que $a_{11} = a'_{11}$, ce qui est impossible par hypothèse.

- Supposons que le chiffre erroné soit $a'_2 \neq a_2$.

$$3a_2 + 3\sum_{k=2}^{6} a_{2k} + \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1} \equiv 0 \mod 10$$
$$3a'_2 + 3\sum_{k=2}^{6} a_{2k} + \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1} \equiv 0 \mod 10.$$

En soustrayant, on obtient :

$$3(a_2 - a'_2) \equiv 0 \mod 10.$$

3 et 10 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss,

$$a_2 - a'_2 \equiv 0 \mod 10 \qquad \text{et donc} \qquad a_2 \equiv a'_2 \mod 10.$$

Donc $a_2 = a'_2$, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse.

Ainsi, s'il n'y a qu'un seul chiffre erroné, l'erreur est détectée.

4 Supposons que deux chiffres consécutifs a_{2i-1} et a_{2i} soient permutés (erreur fréquente).
On note :

$$\mathrm{S} = 3\sum_{k=2}^{6} a_{2k} + \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1} = \cdots + a_{2i-1} + 3a_{2i} + \cdots$$

et

$$\mathrm{S}' = \cdots + a_{2i} + 3a_{2i-1} + \cdots$$

$$\text{L'erreur n'est pas détectée} \iff \begin{cases} S \equiv 0 \mod 10 \\ S' \equiv 0 \mod 10 \end{cases}$$

$$\iff S - S' = a_{2i-1} - a_{2i} + 3\left(a_{2i} - a_{2i-1}\right) \equiv 0 \mod 10$$

$$\iff 2a_{2i-1} \equiv 2a_{2i} \mod 10$$

$$\iff a_{2i-1} \equiv a_{2i} \mod 5.$$

(2 et 10 ne sont pas premiers entre eux donc quand on divise par 2, on divise aussi le modulo par 2).

Ainsi, étant donné par exemple a_{2i} la probabilité pour que $a_{2i} \equiv a_{2i-1} \mod 5$ tout en ayant $a_{2i} \neq a_{2i-1}$ est $\dfrac{1}{10}$.
Il y a en effet deux chiffres congrus à a_{2i} modulo 5 : : a_{2i} et $a_{2i} \pm 5$, mais a_{2i-1} doit être différent de a_{2i} sans quoi, la permutation des deux chiffres ne change rien au code et donc, celui-ci n'est pas erroné.

Corrigé de l'exercice 2.84 page 98

Partie A

1 a est premier avec p donc, d'après le théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
Ainsi, par exponentiation,

$$\left(a^{p-1}\right)^{q-1} \equiv 1 \mod p$$

soit :

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod p.$$

Par symétrie du problème, comme a et q sont premiers entre eux, on a de même :

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod q.$$

2 p et q étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss,

$$\begin{cases} a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod p \\ a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod q \end{cases} \Rightarrow a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod pq \Rightarrow a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod N.$$

3 Soit k tel que $k \equiv 1 \mod n$, avec $n = (p-1)(q-1)$.
Alors, $k = 1 + (p-1)(q-1)m$, $m \in \mathbb{N}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} a^k &= a^{1+(p-1)(q-1)m} \\ &= a \times a^{(p-1)(q-1)m} \\ &= a \times \left(a^{(p-1)(q-1)}\right)^m \\ &\equiv a \times 1^m \mod N \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\equiv a \mod N. \end{aligned}$$

Partie B

1 c et n sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, l'équation $cu + nv = 1$ admet au moins une solution, où u et v sont deux entiers relatifs.

En posant $u = x$ et $y = -v$, on obtient que l'équation $cx - ny = 1$ admet au moins une solution.

2
- $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $x = x_0 + kn$ et $y = y_0 + kc$, où $k \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$\begin{aligned} cx + ny &= c(x_0 + kn) - n(y_0 + kc) \\ &= \underbrace{cx_0 - ny_0}_{=1} + kcn - kcn \\ &= 1. \end{aligned}$$

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $(x_0\,;y_0)$ est solution de l'équation $cx - ny = 1$. Alors,

$$\begin{cases} cx - ny = 1 \\ cx_0 - ny_0 = 1 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations, on a :

$$c(x - x_0) - n(y - y_0) = 0 \qquad \text{soit} \qquad c(x - x_0) = n(y - y_0).$$

Or, c et n sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x - x_0 = kn \\ y - y_0 = kc \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + kn \\ y = y_0 + kc \end{cases}$$

3 L'équation $cx - ny = 1$ admet des solutions entières de la forme :

$$\begin{cases} x = x_0 + kn \\ y = y_0 + kc \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Notons $d = x_0 + kn$ tel que $0 \leqslant d < n$. Cet entier est unique.
Or,

$$cx - ny = 1 \iff cx \equiv 1 \mod n.$$

Donc il existe bien un unique entier d solution de l'équation $cx \equiv 1 \mod n$.

Partie C

Soient a et b deux entiers naturels et c un nombre premier avec n, $c < n$.
D'après la partie B, il existe un entier naturel $d < n$ tel que $cd \equiv 1 \mod n$.
Ainsi, d'après la partie A, $a^{cd} \equiv a \mod \mathrm{N}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} b \equiv a^c \mod \mathrm{N} &\Longrightarrow b^d \equiv a^{cd} \mod \mathrm{N} \\ &\Longrightarrow b^d \equiv a \mod \mathrm{N}. \end{aligned}$$

3

Matrices

Plan du chapitre

I - Introduction

I . 1 - Définition

Dans divers domaines (mathématiques, SVT, science sociale et sciences physiques par exemple), certaines situations peuvent être représentées de façons schématique par un tableau de nombre.

Exemple 22

En algèbre, le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x+5y=-1 \\ 2x-7y=11 \end{cases}$$

peut être représenté par les tableaux :

3	5
2	-7

et

-1
11

Le premier représente les coefficients respectifs de x et y et le second, les constantes à droite des signes « = ».

De tels tableaux sont appelés des *matrices*.

I . 2 - Notation et vocabulaire

Une matrice n'est en général pas notée comme un tableau, car trop compliqué et long à écrire. En général, on notera une matrice sans les traits du tableau, le tout entre parenthèses.

Exemple 23

Les matrices correspondant au système de l'exemple précédente sont :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Définition 20

Soit une matrice A ayant n lignes et m colonnes, $n \neq 0$ et $m \neq 0$.
On dira que $n \times m$ sont les dimensions de la matrice A.

- Si $n = 1$, on dira que A est une matrice ligne.
- Si $m = 1$, on dira que A est une matrice colonne.
- Si $n = m$, on dira que A est une matrice carrée.

On pourra noter une matrice :

$$\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$$

une matrice de dimensions $n \times m$, ou plus simplement : $\mathrm{A} = (a_{i,j})$, avec $\dim(\mathrm{A}) = n \times m$.

II - Opérations sur les matrices

II . 1 - Somme et différence

Définition 21

Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})$ deux matrices de mêmes dimensions $\dim(\mathrm{A}) = \dim(\mathrm{B}) = n \times m$.
On définit la somme de A et B par la matrice :

$$\mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{B} = (a_{i,j} + b_{i,j}) \qquad , \qquad \dim(\mathrm{S}) = n \times m$$

et leur différence par la matrice :

$$\mathrm{D} = \mathrm{A} - \mathrm{B} = (a_{i,j} - b_{i,j}) \qquad , \qquad \dim(\mathrm{S}) = n \times m.$$

Exemple 24

Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de dimensions 2×3.
Elles sont les mêmes dimensions donc on peut les ajouter :

$$\mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3+5 & -1+7 & 5+(-5) \\ -5+4 & 2+(-4) & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

et les soustraire :

$$\mathrm{D} = \mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3-5 & -1-7 & 5-(-5) \\ -5-4 & 2-(-4) & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 10 \\ -9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 46

Quelle que soit la matrice A,

$$\mathrm{A} - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est appelée la *matrice nulle*. C'est une matrice remplie de « 0 ».

II . 2 - Produit d'une matrice par un réel

Définition 22

Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ une matrice de dimensions $n \times m$ et $k \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $k\mathrm{A}$ par :

$$k\mathrm{A} = (ka_{i,j}) = \begin{pmatrix} ka_{1,1} & ka_{1,2} & \cdots & ka_{1,m} \\ ka_{2,1} & ka_{2,2} & \cdots & ka_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n,1} & ka_{n,2} & \cdots & ka_{n,m} \end{pmatrix}$$

Exemple 25

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$.
On a multiplier tous les coefficients de A par 3.

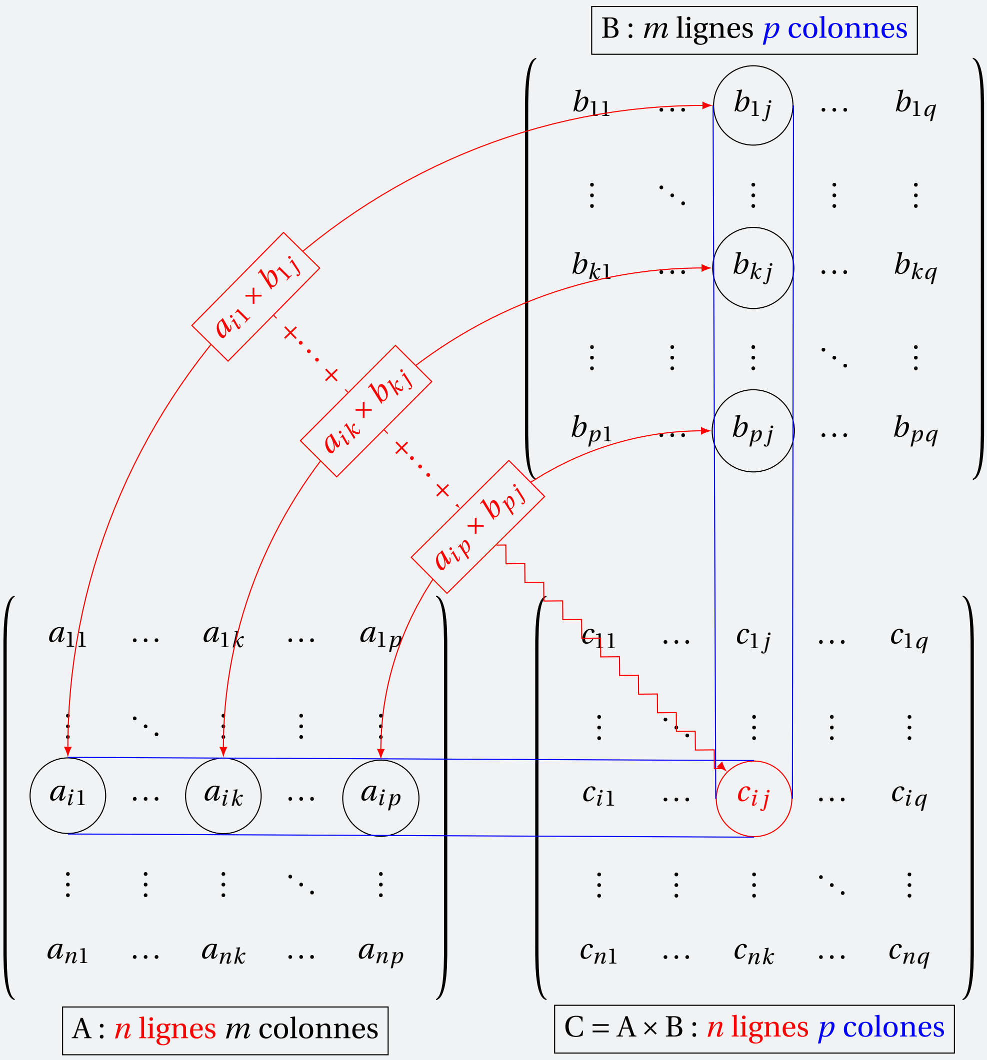
▶ Voir l'exercice 3.1.

III - Produit de matrices

III . 1 - Définition

Définition 23

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times m$, et $B = (b_{i,j})$ une matrice $m \times p$. On définit le produit $A \times B$ par la matrice $C = (c_{i,j}$ de dimensions $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \times b_{k,j}$.



Exemple 26

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 11 & -11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 1\times 7+(-1)\times 11+2\times 13 & 1\times(-7)+(-1)\times(-11)+2\times(-13) \\ 3\times 7+(-2)\times 11+5\times 13 & 3\times(-7)+(-2)\times(-11)+5\times(-13) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & -22 \\ 64 & -64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\dim(A) = 2 \times 3$, $\dim(B) = 3 \times 2$ et $\dim(C) = 2 \times 2$.

Remarque 47

Le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet, $A \times B \neq B \times A$. Il suffit de prendre le cas où $\dim(A) = n \times m$ et $\dim(B) = m \times p$, où n, m et p sont différents, pour s'en convaincre : $A \times B$ est possible alors que $B \times A$ ne l'est pas.
Cependant, il existe des cas où $A \times B = B \times A$.

► Voir les exercices 3.2 et 3.3.

III . 2 - Matrices identité et matrices diagonales

Définition 24 (matrices identité)

On appelle *matrice identité d'ordre n* la matrice carrée de dimensions $n \times n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 48

Une matrice identité ne contient que des « 0 » sauf en diagonale où il n'y a que des « 1 ».

Définition 25 (matrices diagonales)

On appelle *matrices diagonales* toutes matrices carrées de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Propriété 32

Pour toute matrice carrée A d'ordre n,

$$\mathrm{A} \times \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n \times \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

Remarque 49

La matrice identité joue le même rôle dans le produit de matrices que le réel « 1 » dans le produit des nombres : on dit que c'est l'*élément neutre* du produit.

III . 3 - Puissances d'une matrice carrée

Définition 26

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit la puissance p-ième de A par :

$$\mathrm{A}^p = \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \cdots \times \mathrm{A}}_{p \text{ facteurs}}$$

en convenant d'avoir : $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$.

Propriété 33

Soit $\mathrm{D} = (d_i)$ une matrice carrée diagonale d'ordre n. Alors,

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mathrm{D}^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^p & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^p \end{pmatrix}.$$

Remarque 50

La démonstration peut se faire par récurrence.

III . 4 - Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition 27

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
On appelle *matrice inverse de* A l'unique matrice, notée A^{-1}, telle que :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

Remarque 51

Attention : toutes les matrices carrées ne possèdent pas d'inverse.
Par exemple, la matrice nulle (constituée uniquement de « 0 ») ne possède pas d'inverse.
On dit dans ce cas que la matrice n'est pas inversible.

Exemple 27

Dans l'exercice 3.2, nous avons vu que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\mathrm{I}_2.$$

On peut alors en déduire que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

On peut alors conclure que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

► Voir l'exercice 3.4.

Trouver l'inverse d'une matrice

Considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = \lambda \\ cx + dy = \mu \end{cases}$$

Il peut être représenté de façon matricielle par :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}, \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \iff \mathrm{A}^{-1}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \iff \mathrm{I}_2\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \iff \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}.$$

Ainsi, si on résout le système linéaire, on aura la matrice inverse.

$$\begin{cases} ax + by = \lambda & (\mathrm{L}_1) \\ cx + dy = \mu & (\mathrm{L}_2) \end{cases} \iff \begin{cases} acx + bcy = \lambda c & (\mathrm{L}_1) \leftarrow c \times (\mathrm{L}_1) \\ acx + ady = \mu a & (\mathrm{L}_2) \leftarrow a \times (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

En soustrayant, on obtient :

$$(\mathrm{L}_2) - (\mathrm{L}_1) \iff (ad - bc)y = \mu a - \lambda c \iff y = \frac{\mu a - \lambda c}{ad - bc}.$$

De même,

$$\begin{cases} ax + by = \lambda & (\mathrm{L}_1) \\ cx + dy = \mu & (\mathrm{L}_2) \end{cases} \iff \begin{cases} adx + bdy = \lambda d & (\mathrm{L}_1) \leftarrow d \times (\mathrm{L}_1) \\ bcx + bdy = \mu b & (\mathrm{L}_2) \leftarrow b \times (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

En soustrayant, on obtient :

$$(\mathrm{L}_1) - (\mathrm{L}_2) \iff (ad - bc)x = \lambda d - \mu b \iff x = \frac{\lambda d - \mu b}{ad - bc}.$$

Ainsi,

$$X = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d\lambda - b\mu \\ -c\lambda + a\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} B.$$

Or,

$$X = A^{-1}B$$

donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bien sûr, il est ici nécessaire que $ad - bc \neq 0$.

Propriété 34

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $ad - bc \neq 0$.
Alors, l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

► Voir l'exercice 3.5.

IV - Applications

IV . 1 - Résolution de systèmes linéaires

Considérons un système linéaire de n équations à n inconnues x_1, x_2,... , x_n :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Alors, ce système peut être écrit de façon matricielle sus la forme :

$$AX = B$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, si A est inversible,

$$AX = B \iff \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Exemple 28

Le système :

$$\begin{cases}3x-5y=13\\4x+7y=-10\end{cases}$$

peut s'écrire :

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B}\quad,\quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&-5\\4&7\end{pmatrix}\quad,\quad \mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad,\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}13\\-10\end{pmatrix}.$$

A est inversible et

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{41}&\frac{5}{41}\\-\frac{4}{41}&\frac{3}{41}\end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{41}&\frac{5}{41}\\-\frac{4}{41}&\frac{3}{41}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

► Voir les exercices 3.9 et 3.10.

IV . 2 - Suites numériques imbriquées

Définition 28

On pose : $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix}u_n^{(1)}\\u_n^{(2)}\\\vdots\\u_n^{(p)}\end{pmatrix}$ où les $u_n^{(k)}$ $(1\leqslant k\leqslant p)$ sont p suites numériques.

Ces p suites sont dites imbriquées s'il existe deux matrices :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,p}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{p,1}&a_{p,2}&\cdots&a_{p,p}\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_p\end{pmatrix}$$

telles que :

$$\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n+\mathrm{B}.$$

Exemple 29

Les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0=a,\ v_0=b\qquad,\qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n+v_n)\\[2mm]v_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n-v_n)\end{cases}$$

sont imbriquées car :

$$U_{n+1} = AU_n + B \quad , \quad \text{avec} \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété 35

Soit un système de suites imbriquées représenté par l'écriture matricielle $U_{n+1} = AU_n$, U_0 étant donné. Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$

Exemple 30

Si on reprend les suites de l'exemple précédent, alors :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

- $A^{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}} \times 2^n I_2 = \dfrac{1}{2^n} I_2$;
- $A^{2n+1} = \dfrac{1}{2^{2n+1}} \times 2^n A = \dfrac{1}{2^{n+1}} A$.

Ainsi, pour tout entier naturel n,

- $U_{2n} = \dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;
- $U_{2n+1} = \dfrac{1}{2^{p+1}} \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$.

► Voir les exercices 3.11 à 3.14.

V - Python et les matrices

On peut effectuer des calculs sur les matrices avec le module `numpy`.

V . 1 - Définir une matrice

Définir la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

```python
from numpy import array

A = array([ [1,-1,2],
          [0,-1,1],
          [2,-2,3] ])
```

V . 2 - Somme, différence et produit de deux matrices

Ajouter, soustraire et multiplier les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Code Python 3-22

```python
from numpy import array, add, subtract, dot

A = array([ [1,-1,2],
          [0,-1,1],
          [2,-2,3] ])

B = array([ [-3,5,2],
          [6,-1,0],
          [3,2,-1] ])

S = add(A,B) # A + B
D = subtract(A,B) # A - B
P = dot(A,B) # A x B
print(f'S = {S} ,\n\n D = {D},\n\n P = {P}')
```

```
S = [[-2  4  4]
 [ 6 -2  1]
 [ 5  0  2]] ,

 D = [[ 4 -6  0]
 [-6  0  1]
 [-1 -4  4]],

 P = [[-3 10  0]
 [-3  3 -1]
 [-9 18  1]]
```

V . 3 - Inverse d'une matrice

Inverser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Code Python 3-23

```python
from numpy import array
from numpy.linalg import inv

A = array([ [1,-1,2],
            [0,-1,1],
            [2,-2,3] ])

print( inv(A) )
```

```
[[-1. -1.  1.]
 [ 2. -1. -1.]
 [ 2.  0. -1.]]
```

V . 4 - Puissance d'une matrice

Code Python 3-24

```python
from numpy import array
from numpy.linalg import matrix_power as matpow

A = array( [[1,0],[1,1]] )
print( matpow(A,5) )
```

```
[[1 0]
 [5 1]]
```

Appliquer le cours

Exercice 3.1 (somme de matrices et produit par un réel)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les dimensions de ces matrices.
2. Effectuer toutes les sommes de matrices possibles.
3. Calculer $B + 2D$.

Solution page 159

Exercice 3.2 (produit de matrices)

Effectuer, quand cela est possible, les produits de matrices suivants.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Solution page 159

Exercice 3.3 (non commutativité du produit matriciel)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer $A \times B$ puis $B \times A$ et constater la non commutativité du produit matriciel dans un cas général.

Solution page 160

Exercice 3.4 (matrices inverses)

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Solution page 160

Exercice 3.5 (matrices inverses)

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice inverse de A quand cela est possible.

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3 $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution page 160

Exercice 3.6 (puissances d'une matrice)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Calculer A^2, puis A^3 à l'aide de la calculatrice (par exemple).

2 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Si on remplace n par -1 dans l'expression précédente, obtient-on l'inverse de A ?

Solution page 161

Exercice 3.7 (matrice inversible)

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

1 Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.

2 En déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

Solution page 162

Exercice 3.8 (matrice nilpotente)

On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer N^2 puis N^3.
2. En remarquant que $A = N + I_3$, I_3 étant la matrice identité d'ordre 3, donner une expression de A^n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

Remarque 54

N est qualifiée de *nilpotente* car il existe un entier naturel k (ici, $k = 3$) pour lequel $N^k = 0$.

Solution page 162

Applications algébriques

Exercice 3.9 (systèmes linéaires)

Résoudre de façon matricielle les systèmes linéaires suivants.
On pourra effectuer les calculs à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'inverse des matrices utilisées.

1. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y - 3z = -6 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Solution page 163

Exercice 3.10 (systèmes linéaires)

À l'aide de votre calculatrice et en associant à chacun des systèmes suivant sa matrice, trouver leurs solutions.

1. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x - 7y = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 5x + 4y = -3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

Solution page 164

Exercice 3.11 (suites imbriquées)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0,3$, $b_0 = 0,7$ et :

$$\begin{cases} a_{n+1} & = 0,7a_n + 0,6b_n \\ b_{n+1} & = 0,3a_n + 0,4b_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A telle que $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$.
3. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, calculer A^2, A^3 et A^4.
   Que peut-on conjecturer quant à $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}^n$, et donc sur la limite des suites (a_n) et (b_n) ?

Solution page 165

Exercice 3.12 (suites imbriquées)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} & = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A telle que $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$.
3. On définit les matrices $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   Montrer que P et Q sont inverses l'une de l'autre.
4. Déterminer la matrice diagonale D telle que $\mathrm{QDP} = \mathrm{A}$.
5. En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.
6. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Solution page 165

Exercice 3.13 (suites imbriquées)

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par leur premier terme $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n + 1 \\ v_{n+1} = -u_n - 2v_n - 1 \end{cases}$$

Ces conditions peuvent s'écrire de façon matricielle sous la forme $U_{n+1} = AU_n + B$, avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver la matrice colonne C telle que $C = AC + B$.
2. On pose $X_n = U_n - C$.
   Montrer que $X_{n+1} = AX_n$, puis en déduire que $X_n = A^n X_0$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Vérifiez que $A = PDP^{-1}$, puis en déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour $n \geqslant 0$.
4. En déduire alors une expression de X_n, puis de U_n, et donc de u_n et v_n.

Solution page 166

Exercice 3.14 (suites imbriquées)

Soient les deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = v_0 = 1$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -8u_n - 6v_n + 1 \\ v_{n+1} = 9u_n + 13v_n - 1 \end{cases}$$

En vous aidant de l'exercice précédent, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \frac{22}{5}(-5)^n - \frac{26}{45} \times 10^n + \frac{1}{9} \\ v_n = -\frac{11}{15}(-5)^n + \frac{26}{15} \times 10^n \end{cases}.$$

On pourra utiliser un logiciel de calcul formel si besoin pour aller plus vite.

Solution page 167

Aller plus loin dans les applications

Exercice 3.15

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

1 Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

2 En considérant la somme des $u_{n+1} - u_n$, exprimer u_n en fonction de n, puis A^n.

Solution page 168

Exercice 3.16

On considère un polynôme de degré 3 dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées :

$$A(-2;-1) \quad , \quad B(-1;3) \quad , \quad C(1;5) \quad , \quad D(2;34).$$

Donner l'expression de ce polynôme.

Solution page 169

Exercice 3.17 (matrice de rotation dans le plan)

On considère la matrice suivante :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $M(x;y)$ et le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Montrer que M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ.

Solution page 169

Exercice 3.18 (chiffrement de Hill)

On considère un mot constitué de lettres : $L_1 L_2 \cdots L_n$, n étant pair.
Soient 4 nombres a, b, c et d qui vont constituer la clé du chiffrement.
On remplace L_i par sa position dans l'alphabet en convenant d'avoir 0 pour A, 1 pour B, etc.
On obtient alors une suite de nombres : $u_1, u_2, \cdots, u_n$. On pose alors :

$$\forall k \in \left[\!\left[1 ; \frac{n}{2} \right]\!\right], \begin{pmatrix} c_{2k-1} \\ c_{2k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \mod 26$$

On obtient une suite de nombres $c_1, c_2, \cdots, c_n$ qui correspond à une suite de lettres.

1 Choisissons la clé matricielle $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$.

a. Expliquer comment obtenir le chiffrement du mot « CRYP ».

b. Expliquer le déchiffrement.

Solution page 170

Exercice 3.19 (une suite linéaire d'ordre 2)

On considère la suite (u_n) définie par ses deux premiers termes $u_0 = 3$ et $u_1 = 1$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

On pose alors :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

et la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

1 Donner l'expression de A.

2 Calculer A^2, puis A^3.
En déduire l'inverse de A.

3 En déduire l'expression de u_n en fonction de n suivant les valeurs de n.

Solution page 171

Corrigé de l'exercice 3.1 page 152

1 $\dim(A) = \dim(C) = 2 \times 3$.
$\dim(B) = \dim(D) = 3 \times 2$.

2 Les seules sommes que l'on peut faire avec ces matrices sont :

- $A + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- $B + D = B + (-B) = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3
$$\begin{aligned} B + 2D &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 2 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = D. \end{aligned}$$

Remarque 57

On aurait aussi pu écrire :

$$B + 2D = B + 2(-B) = B - 2B = -B = D.$$

Corrigé de l'exercice 3.2 page 152

1
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 & (-1) \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times (-1) \\ 1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 1 & 1 \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 3 \times (-1) \\ -2 \times 3 + 4 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$.

3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ Ce produit est impossible à faire car le nombre de lignes de la première matrice est différent du nombre de colonnes de la seconde.

4 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times (-2) & 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) \\ -2 \times 1 + (-1) \times (-2) & -2 \times (-2) + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

mathweb.fr

Corrigé de l'exercice 3.3 page 152

- $A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$
- $B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$

On peut alors constater que $AB \neq BA$, ce qui signifie que dans un cas général, le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Corrigé de l'exercice 3.4 page 152

On calcule :

- $AB = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-20 & 28-28 \\ -15+15 & -20+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$
- $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-20 & -12+12 \\ 35-35 & -20+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$

Ainsi, A et B sont inverses l'une de l'autre.

Corrigé de l'exercice 3.5 page 153

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$

$ad - bc = 3 - (-24) = 27 \neq 0$ donc A^{-1} existe et :

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

$ad - bc = 1 - 1 = 0$ donc A n'est pas inversible.

3 $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$

$ad - bc = -35 - 4 = -39 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = -\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$ad - bc = 0 - 1 = -1 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Remarque 58

Vous voyez à travers ce dernier cas que les matrices identité ne sont pas les seules à posséder une inverse égale à elles-mêmes.

Corrigé de l'exercice 3.6 page 153

1 On obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

- **Initialisation :** l'égalité est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 1+k+\frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & (k+1)\left[1+\frac{k}{2}\right] \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

L'égalité est donc vraie pour tout entier naturel n.

3 Si $n = -1$, l'égalité précédente devient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi, A^{-1} désigne bien l'inverse de A.

Corrigé de l'exercice 3.7 page 153

1 On trouve : $A^2-3A+2I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, que l'on peut aussi noter :

$$A^2-3A+2I_3=0.$$

2 De l'égalité obtenue précédemment, on peut en déduire que :

$$A^2-3A=-2I_3$$

soit :

$$A(A-3I_3)=-2I_3 \qquad \text{ou} \qquad (A-3I_3)A=-2I_3$$

et donc :

$$A\times\left[-\frac{1}{2}(A-3I_3)\right]=I_3 \qquad \text{ou} \qquad \left[-\frac{1}{2}(A-3I_3)\right]\times A=I_3.$$

On en déduit alors que A est inversible et que son inverse est :

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3I_3)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0-3&1&-1\\-3&4-3&-3\\-1&1&0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 3.8 page 154

1 On vérifie que $N^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\6&18&-18\\6&18&-18\end{pmatrix}$ et $N^3=0$ (matrice nulle).

2 $A^n=(N+I_3)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kI_3^{n-k}$.

Remarque 59

Attention : la formule du binôme de Newton fonctionne ici car $N\times I_3=I_3\times N$. Dans un cas général, le produit matriciel étant non commutatif, elle ne fonctionne pas.

Or,

$$\forall k\geqslant 3, N^3=0$$

donc :

$$A^n=\binom{n}{0}N^0I_3^n+\binom{n}{1}N^1I_3^{n-1}+\binom{n}{2}N^2I_3^{n-2}=I_3+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2$$

$$A^n=\begin{pmatrix}3n+1&9n&-9n\\3n^2-n&9n^2-9n+1&-9n^2+9n\\3n^2&9n^2-6n&-9n^2+6n+1\end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 3.9 page 154

1 $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ -4x+2y=1 \end{cases} \iff \mathrm{AX}=\mathrm{B}$, avec $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{19}{14} \\ -\frac{31}{14} \end{pmatrix}$.

On trouve alors $x=-\dfrac{19}{14}$ et $y=-\dfrac{31}{14}$.

2 $\begin{cases} 5x+4y=-1 \\ 3x-\ \ y=2 \end{cases} \iff \mathrm{AX}=\mathrm{B}$, avec $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ -\frac{3}{17} & -\frac{5}{17} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{17} \\ -\frac{13}{17} \end{pmatrix}$.

On trouve alors $x=\dfrac{7}{17}$ et $y=-\dfrac{13}{17}$.

3 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=3 \end{cases} \iff \mathrm{AX}=\mathrm{B}$, avec $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

On trouve alors $x=\dfrac{5}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$ et $z=-1$.

4 $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x-2y-3z=-6 \\ x+\ \ y-2z=0 \end{cases} \iff \mathrm{AX}=\mathrm{B}$, avec $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$.

On trouve : $x=0$, $y=\dfrac{12}{7}$ et $z=\dfrac{6}{7}$.

Corrigé de l'exercice 3.10 page 154

1 Le système $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle AX = B avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'unique solution du système est donc le couple $(-1;1)$.

2 Le système $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 2x-7y=5 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle AX = B avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 24 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'unique solution du système est donc le couple $\left(\frac{24}{11};-\frac{1}{11}\right)$.

3 Le système $\begin{cases} -x+2y=-1 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle AX = B avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'unique solution du système est donc le couple $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{8}\right)$.

4 Le système $\begin{cases} 5x+4y=-3 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle AX = B avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

L'unique solution du système est donc le couple $\left(-4;\frac{17}{4}\right)$.

5 Le système $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-3y+z=-1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle AX = B avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'unique solution du système est donc le triplet $\left(\frac{2}{3} ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.

6 Le système $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+2y+\ \ z=0 \\ x-\ \ y+\ \ z=1 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle AX = B avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -8 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

L'unique solution du système est donc le triplet $\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{3}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 3.11 page 155

1 $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

2
- **Initialisation :** $U_1 = AU_0$ par définition de A donc l'initialisation est réalisée.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel k fixé, $U_k = A^k U_0$.
  Alors, $U_{k+1} = AU_k = A \times A^k U_0 = A^{k+1} U_0$.
  L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

3 $A^2 = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,66 \\ 0,33 & 0,34 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0,667 & 0,666 \\ 0,333 & 0,334 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 0,6667 & 0,6666 \\ 0,3333 & 0,3334 \end{pmatrix}$.

On peut supposer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 3.12 page 155

1 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2
- **Initialisation :** $U_1 = AU_0$ par définition de A donc l'initialisation est réalisée.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel k fixé, $U_k = A^k U_0$.
  Alors, $U_{k+1} = AU_k = A \times A^k U_0 = A^{k+1} U_0$.
  L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

3 À la calculatrice (par exemple), on vérifie que $PQ = QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc P et Q sont inverses l'une de l'autre.

4 Si $A = QDP = P^{-1}DP$, alors $PA = PP^{-1}DP = DP$ et $PAP^{-1} = DPP^{-1} = D$.

On trouve alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

5 On en déduit que $A^n = (QDP)^n = QD^nP$ et donc $U_n = A^nU_0 = QD^nPU_0$.
En effectuant le calcul, on trouve ce qui est demandé.

6 On trouve alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{5}$.

Corrigé de l'exercice 3.13 page 156

1 Posons $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} C = AC + B &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = 2x - 3y + 1 \\ y = -x - 2y - 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 3y = -1 \\ -x - 3y = 1 \end{cases} \\ &\iff x = -1,\ y = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

2 On a : $\begin{cases} U_{n+1} = AU_n + B \\ C \quad\;\; = AC + B \end{cases}$ donc, par soustraction, on a :

$$U_{n+1} - C = AU_n - AC \quad \text{soit} \quad U_{n+1} - C = A(U_n - C) \quad \text{soit} \quad \boxed{X_{n+1} = AX_n}$$

3 D'après la question précédente, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison A et de premier terme $X_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = \cdots = A^nX_0$.

4 $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = A$ (avec la calculatrice).

- Initialisation : $A^1 = PD^1P^{-1}$, évident.
- Hérédité : supposons qu'à un certain rang k, $A^k = PD^kP^{-1}$.
  Alors, $A^{k+1} = A^kA = PD^k\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$.

  L'hérédité est alors vérifiée. L'égalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour $n = 0$, l'égalité est évidente : $A^0 = I = PP^{-1}$.

Notons que $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

5 On sait que $X_n = A^n X_0$ donc :

$$\begin{aligned}
X_n &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2} & \frac{3(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} & \frac{3}{2} + \frac{3(-1)^{n+1}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{2} + \frac{5(-1)^{n+1}}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5(-1)^n}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$U_n = X_n + C = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} + \frac{5(-1)^{n+1}}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5(-1)^n}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{U_n = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} + \frac{5(-1)^{n+1}}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5(-1)^n}{2} \end{pmatrix}}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{u_n = \frac{7}{2} + \frac{5(-1)^{n+1}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_n = -\frac{3}{2} + \frac{5(-1)^n}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 3.14 page 156

En s'inspirant de l'exercice précédent, on peut écrire que si :

$$U_{n+1} = AU_n + B,$$

alors :

$$U_n = A^n(U_0 - C) + C \quad , \quad C = (I_2 - A)^{-1}B.$$

Ainsi, dans cet exercice, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}^n \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

À l'aide de XCAS (par exemple), on trouve

$$\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(-5)^n & -10^n \\ -(-5)^n & 3 \times 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}(-5)^n - \frac{1}{5} \times 10^n & \frac{2}{5}(-5)^n - \frac{2}{5} \times 10^n \\ -\frac{3}{5}(-5)^n + \frac{3}{5} \times 10^n & -\frac{1}{5}(-5)^n + \frac{6}{5} \times 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{22}{5}(-5)^n - \frac{26}{45} \times 10^n + \frac{1}{9} \\ -\frac{11}{15}(-5)^n + \frac{26}{15} \times 10^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en conclut alors que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_n = \frac{22}{5}(-5)^n - \frac{26}{45} \times 10^n + \frac{1}{9} \\ v_n = -\frac{11}{15}(-5)^n + \frac{26}{15} \times 10^n \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 3.15 page 157

1 Raisonnons par récurrence.

- Initialisation : évidente car $u_1 = 1$ et $2^1 = 2$.
- Hérédité : on suppose que pour un entier $k \geqslant 1$ fixé, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k + 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{k+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

L'hérédité est alors vérifiée. L'égalité est alors vraie pour tout $n \geqslant 1$.

2 $u_{n+1} - u_n = 2^n$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$. Ainsi, $u_n - u_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$.

Par conséquent, $u_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$.

On a alors :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{n+1}-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 3.16 page 157

Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ le polynôme cherché, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

- $A(-2;-1) \in \mathscr{C} \iff P(-2) = -1$
$$\iff a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -1$$
$$\iff -8a + 4b - 2c + d = -1.$$
- $B(-1;3) \in \mathscr{C} \iff P(-1) = 3$
$$\iff a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 3$$
$$\iff -a + b - c + d = 3.$$
- $C(1;5) \in \mathscr{C} \iff P(1) = 5$
$$\iff a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 5$$
$$\iff a + b + c + d = 5.$$
- $D(2;34) \in \mathscr{C} \iff P(2) = 34$
$$\iff a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 34$$
$$\iff 8a + 4b + 2c + d = 34.$$

En notant :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$$

On a :

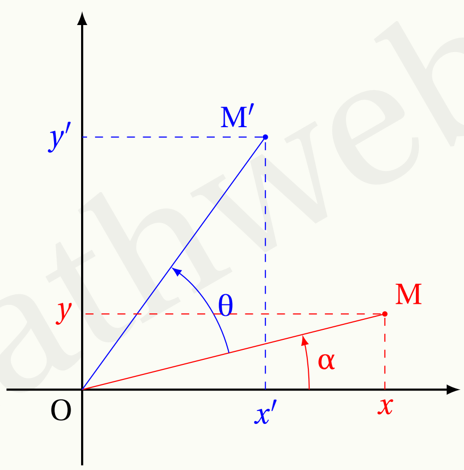
$$AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{P(x) = \frac{31}{12}x^3 + \frac{25}{6}x^2 - \frac{19}{12}x - \frac{1}{6}}$$

Corrigé de l'exercice 3.17 page 157

Faisons un schéma :



Dans le triangle rectangle rouge, on a :

$$\begin{cases} x = \mathrm{OM}\cos\alpha \\ y = \mathrm{OM}\sin\alpha \end{cases}. \tag{1}$$

Dans le triangle rectangle bleu, on a :

$$\begin{cases} x' = \mathrm{OM}'\cos(\alpha+\theta) = \mathrm{OM}\big(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\big) \\ y' = \mathrm{OM}'\sin(\alpha+\theta) = \mathrm{OM}\big(\sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha\big) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x' = (\mathrm{OM}\cos\alpha)\cos\theta - (\mathrm{OM}\sin\alpha)\sin\theta \\ y' = (\mathrm{OM}\sin\alpha)\cos\theta + (\mathrm{OM}\cos\alpha)\sin\theta \end{cases}$$

et donc, en tenant compte des égalités (1) :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 3.18 page 157

1 **a.** On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 125 \\ 225 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \text{mod } 26 \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathrm{V} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 177 \\ 243 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{mod } 26 \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathrm{V} \\ \mathrm{J} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, « CRYP » est chiffré en « VRVJ ».

b. Le déchiffrement consiste à trouver les u_k avec la relation :

$$\forall k \in \left[\!\left[1\,;\frac{n}{2}\right]\!\right],\ \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c_{2k-1} \\ c_{2k} \end{pmatrix} \quad \text{mod } 26$$

On trouve : $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Il nous faut trouver la valeur de $\frac{1}{25}$ modulo 26, c'est-à-dire le nombre x tel que $25 \times x \equiv 1 \mod 26$. Or, $25 \equiv -1 \mod 26$ donc $25 \times 25 \equiv 1 \mod 26$. Ainsi, l'inverse de 25 modulo 26 est égal à 25 (ou -1 si on veut ... ce qui va nous arranger pour le calcul suivant).
On a alors :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 13\end{pmatrix}^{-1} &\equiv 25\begin{pmatrix}13 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix} \mod 26\\ &\equiv -1\begin{pmatrix}13 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix} \mod 26\\ &\equiv \begin{pmatrix}-13 & 7\\ 2 & -3\end{pmatrix} \mod 26\\ &\equiv \begin{pmatrix}13 & 7\\ 2 & 23\end{pmatrix} \mod 26\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3.19 page 158

1 On a : $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. En effet,

$$\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}.$$

2 On a :

- $A^2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;
- $A^3 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -I_2$.

On peut alors en déduire que $(-A^2)A = I_2$ et $A(-A^2) = I_2$ donc l'inverse de A est :

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

3 De la question précédente, on peut déduire que :

- $A^4 = A \times A^3 = A \times (-I_2) = -A$;
- $A^5 = A^4 \times A = -A \times A = -A^2$;
- $A^6 = A^5 \times A = -A^2 \times A = -A^3 = -(-I_2) = I_2$.

On en déduit alors que, pour tout entier naturel k,

- $A^{6k} = I_2$;
- $A^{6k+1} = A$;
- $A^{6k+2} = A^2$;
- $A^{6k+3} = A^3 = -I_2$;
- $A^{6k+4} = -A$;
- $A^{6k+5} = -A^2$.

Or, $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$.

- Si $n \equiv 0 \mod 6$, $U_n = \begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$;

- Si $n \equiv 2 \mod 6$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$;
- Si $n \equiv 4 \mod 6$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

D'où :

$$u_{6k} = 1,\ u_{6k+1} = 3,\ u_{6k+2} = -2,\ u_{6k+3} = -3,\ u_{6k+4} = -1,\ u_{6k+5} = 2.$$

Remarque 60

On dit qu'une telle suite est *périodique* de période 6, c'est-à-dire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+6} = u_n.$$

4

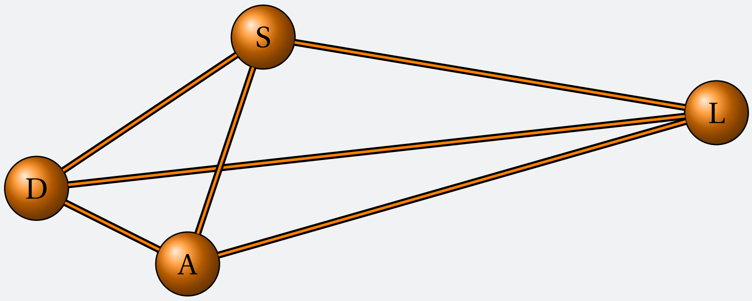
Graphes

Plan du chapitre

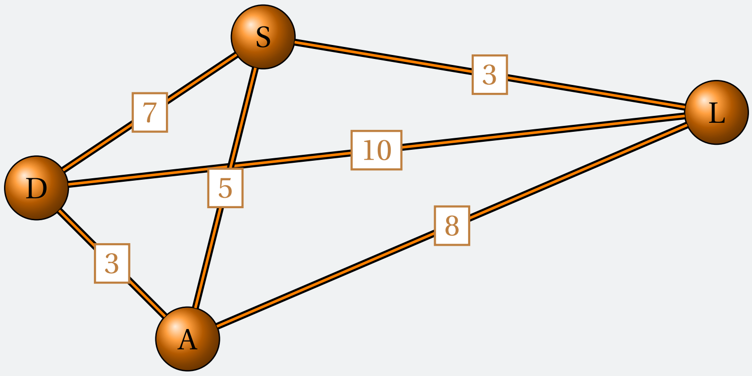
I - Introduction

I . 1 - Approche intuitive

Hugo doit partir de son domicile pour aller chez Sylvain, Lucie et Aude. Il souhaite schématiser les différents parcours. Pour cela, il peut utiliser le schéma suivant :



Ce schéma lui montre tous les chemins qu'il peut emprunter. De plus, s'il connaît les distances entre chacune des maisons, il peut les reporter dessus :



Cette représentation est celle de ce que l'on appelle un *graphe*.

I . 2 - Définitions

Définition 29

Un *graphe* $\mathscr{G}$ est la donnée de deux ensembles : l'un est constitué de points, appelés *sommets*, l'autre est constitué de couples de points, appelés *arêtes*.

Exemple 31

Dans l'exemple précédent, $\mathscr{G} = (\mathscr{S};\mathscr{A})$ où :

- $\mathscr{S} = \{D;A;S;L\}$;
- $\mathscr{A} = \{(D;S),(D;L),(D;A),(A;S),(A;L),(S;L)\}$.

Remarque 61

Attention : il ne faut pas confondre « graphe » (donnée formelle) et « représentation d'un graphe » (plus visuelle que le graphe lui-même).

II - Vocabulaire

II . 1 - Sommets adjacents

Définition 30

Dans un graphe, deux sommets sont dits *adjacents* s'il existe une arête entre eux.

Exemple 32

Dans l'exemple précédent, tous les sommets sont adjacents car il existe une arête entre chacun d'eux.

II . 2 - Graphe complet

Définition 31

Une graphe est *complet* si tous les sommets sont adjacents deux à deux.

C'est le cas de notre exemple de départ.

Propriété 36

Soit $\mathscr{G}$ un graphe complet à n sommets. Alors, le nombre d'arêtes de $\mathscr{G}$ est :

$$\mathrm{K}_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration 21

Numérotons les sommets de 1 à n.

- Le sommet 1 est relié aux $n-1$ autres sommets ; il y a donc $n-1$ arêtes qui partent de ce sommet.
- Le sommet 2 est lui aussi relié à $n-1$ sommets, mais nous avons déjà compté l'arête qui le relie au sommet 1 ; il y a donc (en plus des $n-1$ arêtes précédentes) $n-2$ arêtes issues du sommet 2.
- etc. jusqu'au commet $n-1$ qui est relié au sommet n par une arête (distinctes des autres).

Ainsi,

$$\mathrm{K}_n = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

► Voir l'exercice 4.1.

II . 3 - Ordre d'un graphe

Définition 32

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Exemple 33

L'ordre du graphe de notre exemple est égal à 4.

II . 4 - Chaîne d'un graphe

Définition 33

Une chaîne d'un graphe est une liste ordonnée de sommets adjacents deux à deux.
Le nombre de sommets de cette liste est appelé la *longueur* de la chaîne.

Exemple 34

Dans l'exemple de départ,

- D – S – A – L est une chaîne de longueur 4.
- A – D – S est une chaîne de longueur 3.

II . 5 - Graphe connexe

Définition 34

Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques de ce graphe peuvent être reliés par au moins une chaîne.

Il est assez facile de voir si un graphe est connexe ou non : si sa représentation comporte au moins un sommet isolé alors il n'est pas connexe.

III - Différents types de graphes

III . 1 - Graphes non orientés et orientés

Définition 35

Un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{S} ; \mathcal{A})$ est *non orienté* si les couples de $\mathcal{A}$ peuvent être inversés.

Exemple 35

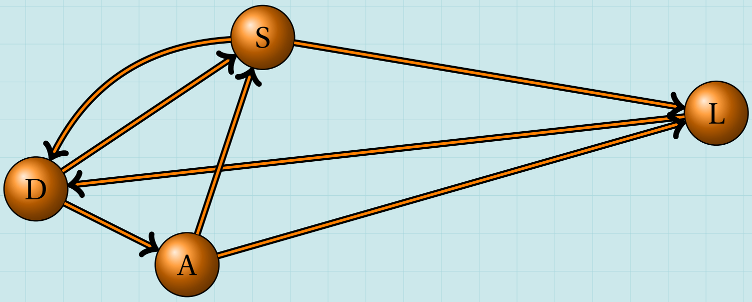
Dans notre exemple précédent, Hugo peut aller de la maison de Sylvain à celle de Lucie, mais aussi de la maison de Lucie à celle de Sylvain : il n'y a pas de sens imposé.
Le graphe représentant la situation est non non orienté.

Définition 36

Un graphe $\mathscr{G} = (\mathscr{S} ; \mathscr{A})$ est *orienté* si les couples de $\mathscr{A}$ ne peuvent pas être inversés.

Exemple 36

Supposons que dans notre exemple de Départ, Hugo ne puisse pas aller de S à A mais uniquement de A à S, et qu'il y ait d'autres contraintes du même type.
Supposons que la représentation de la situation soit alors celle-ci :



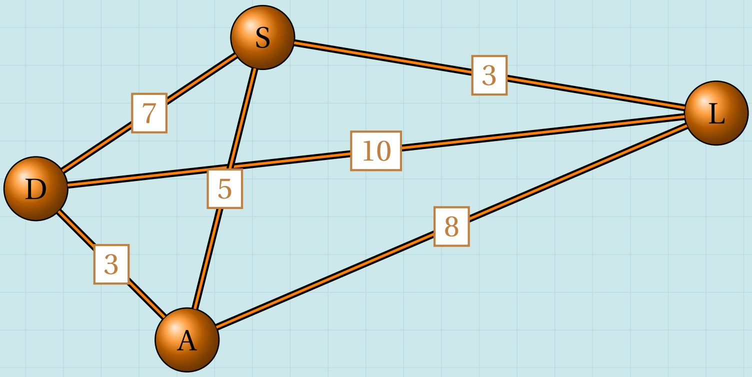
Nous avons alors ici la représentation d'un graphe orienté.

III . 2 - Graphe pondéré

Définition 37

Un graphe est dit *pondéré* si ses arêtes sont munies de nombres positifs, appelés *étiquettes* ou *pondérations*.

Exemple 37



Ceci est la représentation d'un graphe pondéré. Ici, les pondérations représente la distance (en kilomètre) entre chaque maison représentées par les sommets.

Remarque 62

Les pondérations peuvent représenter n'importe quoi : distances, temps, probabilités,...

III . 3 - Graphe probabiliste

Définition 38

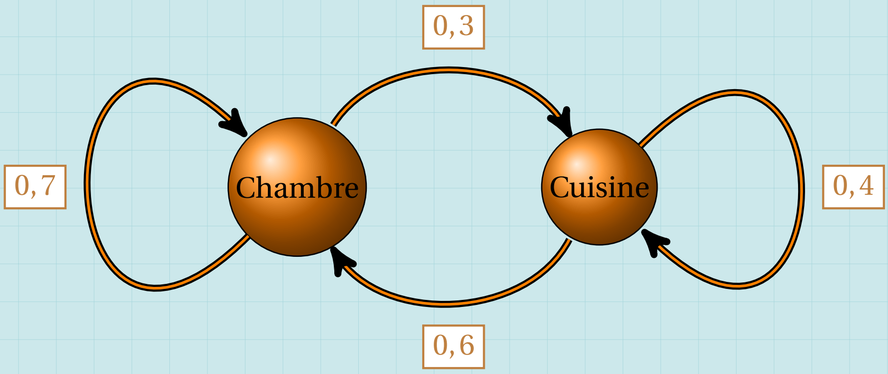
Un graphe probabiliste est un graphe orienté où la somme des pondérations des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Exemple 38

Pendant les vacances, Louis est soit dans sa chambre, soit dans la cuisine.

- S'il est dans sa chambre, la probabilité qu'il y soit encore 10 minutes plus tard est égale à 0,7.
- S'il est dans la cuisine, la probabilité qu'il y soit encore 10 minutes plus tard est égale à 0,4.

Cette situation peut alors correspondre à un graphe dont une représentation est la suivante :



IV - Graphes et matrices

IV . 1 - Matrice d'adjacence d'un graphe

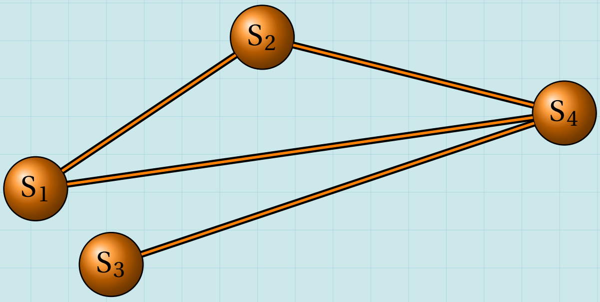
Définition 39

Soit $\mathscr{G}$ un graphe non pondéré, de sommets S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.
La *matrice d'adjacence* de $\mathscr{G}$ est la matrice $(a_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ telle que :

- s'il existe une arête allant de S_i à S_j alors $a_{i,j} = 1$;
- sinon, $a_{i,j} = 0$.

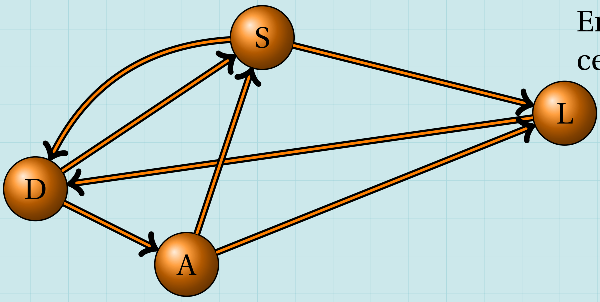
Exemple 39

1 Graphe non orienté :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Graphe orienté :



En convenant de classer les sommets dans cet ordre :

$$\begin{array}{c} \mathrm{D-S-A-L} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété 37

La matrice d'adjacence $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ d'un graphe non orienté d'ordre n est symétrique : pour tous i et j compris entre 1 et n,

$$a_{i,j} = a_{j,i}.$$

Propriété 38

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non pondéré d'ordre n de matrice d'adjacence $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

On note S_k les sommets de $\mathcal{G}$.

Le nombre de chaînes de longueur k reliant S_i à S_j est le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice A^k.

Exemple 40

Reprenons l'exemple du graphe orienté précédent.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & \color{red}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors qu'il existe deux chaînes de longueur 3 reliant A à S.

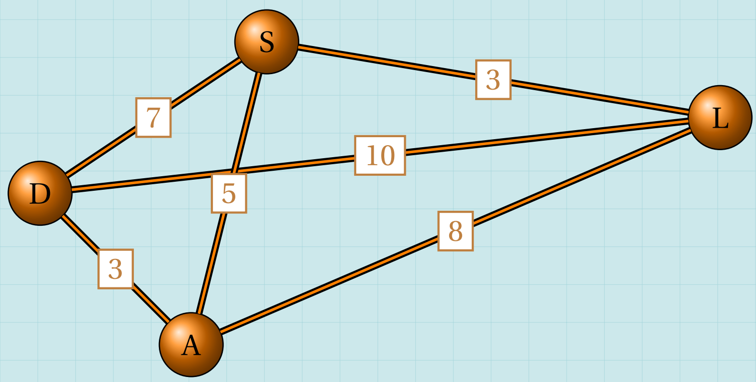
► Voir l'exercice 4.2.

IV . 2 - Matrice d'un graphe pondéré ou probabiliste

Définition 40

La matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ d'un graphe pondéré ou probabiliste est la matrice telle que $a_{i,j}$ correspond à la pondération de l'arête reliant le sommet i au sommet j.

Exemple 41 (graphe pondéré)



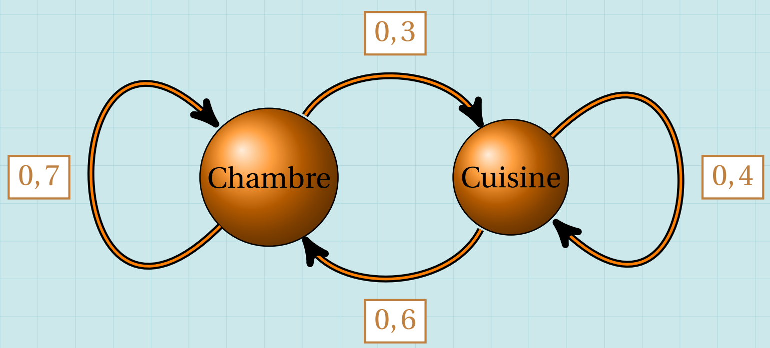
En convenant d'ordonner les sommets de la manière suivante :

$$\mathrm{D}-\mathrm{S}-\mathrm{A}-\mathrm{L}$$

la matrice d'adjacence du graphe ci-contre est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 10 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 10 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 42 (graphe probabiliste)



En convenant d'ordonner les sommets du graphe ci-contre comme ceci :

Chambre – Cuisine

la matrice du graphe ci-contre est :

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Remarque 63 (chaîne de Markov)

L'exemple 42 illustre ce que l'on appelle une *chaîne de Markov* à deux états : « Chambre » et « Cuisine ».
Dans un cas général, une chaîne de Markov est une suite d'événements $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque X_n ne dépend que de X_{n-1}, pour $n>0$

Définition 41 (état stable)

Soit $\mathscr{G}$ un graphe probabiliste de matrice M.
L'*état stable* du graphe est la matrice ligne $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ telle que $\mathrm{P} = \mathrm{PM}$, avec $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Exemple 43

Reprenons le graphe de l'exemple 42.
L'état stable de ce graphe est la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = \mathrm{PM} &\iff \mathrm{PI}_2 = \mathrm{PM} \\
&\iff \mathrm{P}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_2) = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7-1 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4-1 \end{pmatrix} = 0 \qquad , \qquad a + b = 1 \\
&\iff \begin{cases} -0,3a + 0,6b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

L'état stable du graphe est donc $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Cela signifie qu'à très termes, la probabilité que Louis soit dans sa chambre est égale à $\dfrac{2}{3}$.

► Voir les exercices 4.3 à 4.7.

Applications du cours

Exercice 4.1 (nombre d'arêtes)

Soit $\mathscr{G}$ un graphe complet avec n sommets. Dans chacun des cas suivants, donner le nombre d'arêtes.

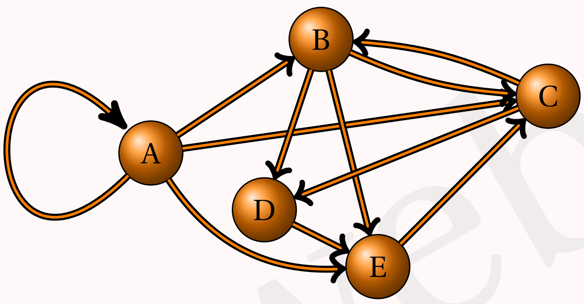
1. $n = 10$
2. $n = 5$
3. $n = 300$
4. $n = 75$

Solution page 195

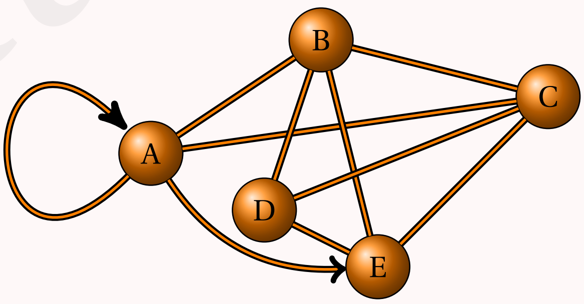
Exercice 4.2 (matrice d'adjacence)

Pour chacun des graphes suivants, donner la matrice d'adjacence correspondant à l'ordre indiqué des sommets, puis déterminer le nombre de chaînes de longueur p demandé.

1. Ordre des sommets pour la matrice d'adjacence : A, B, C, D, E. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 qui vont de A à E ?



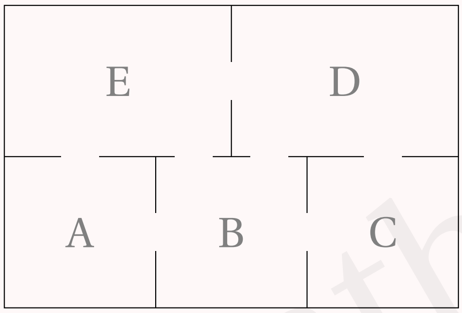
2. Ordre des sommets pour la matrice d'adjacence : A, B, C, D, E. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 qui vont de C à C ?



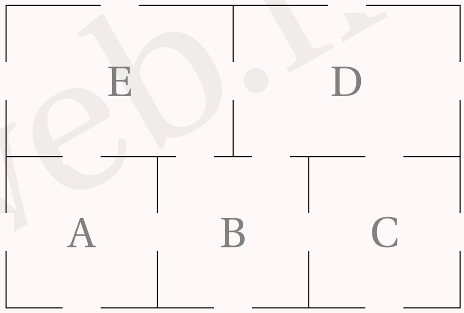
Solution page 195

Exercice 4.3 (graphe d'une situation)

Voici le plan de deux maisons :



Maison 1



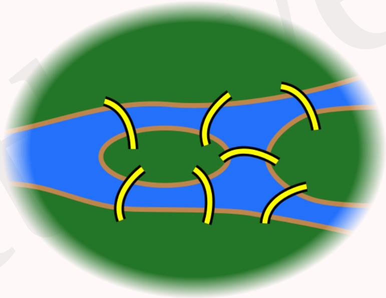
Maison 2

Donner un graphe représentant ces deux maisons, où les arêtes représentent un passage d'une pièce à l'autre.

Solution page 196

Exercice 4.4 (les ponts de Königsberg)

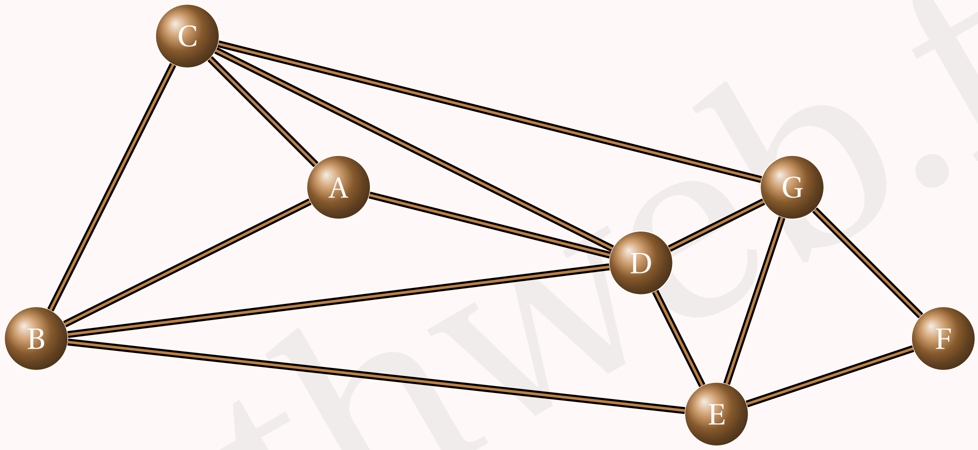
La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le dessin ci-dessuus.
Représenter par un graphe la situation, où les arêtes représentent le passage d'une berge à l'autre.



Solution page 196

Exercice 4.5 (parc d'attractions)

Un parc est composé de 7 attractions principales A, B, C, D, E, F et G.
Le graphe ci-dessous représente les liaisons entre elles :

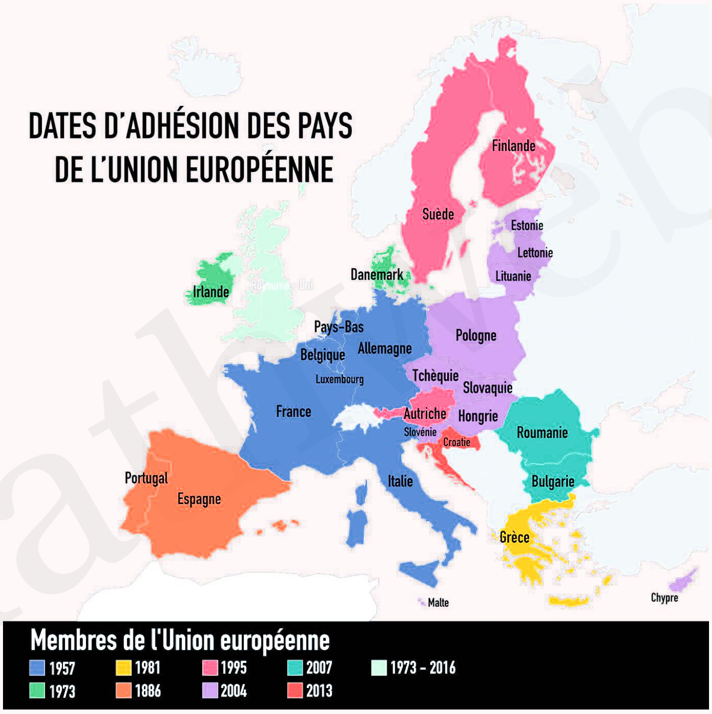


1. Ce graphe est-il complet ?
2. Quel est l'ordre de ce graphe ?
3. Écrire la matrice d'adjacence de ce graphe (en ordonnant les sommets dans l'ordre alphabétique).
4. À l'aide de votre calculatrice, trouver le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à C.

Solution page 196

Exercice 4.6 (pays de l'Union Européenne)

Voici la carte de l'Union Européenne (U.E.) en 2017 :



On désire construire un graphe où les sommets sont les pays suivants : France, Portugal, Espagne, Belgique, Luxembourg, Italie, Allemagne, Tchèquie, et où les arêtes représentent l'existence d'une frontière entre deux pays.

1. Représenter ce graphe. Chaque sommet aura pour lettre l'initiale du pays représenté.
2. Quelle est sa matrice d'adjacence ?
3. Combien de voyages (passant au maximum deux fois par le même pays) où il faut traverser 4 frontières existent-ils entre l'Espagne et l'Allemagne ?

Solution page 197

Exercice 4.7 (pages d'un site internet)

Une site internet est composée de 5 pages, notées A, B, C, D et E.

- Sur la page A, sont mis des liens vers les pages B et C ;
- Sur la page B, sont mis des liens vers les pages A, C et E ;
- Sur la page C, sont mis des liens vers les pages A et D ;
- Sur la page D, sont mis des liens vers les pages A, B, C et E ;
- Sur la page E, est mis un lien vers la page A.

1. Construire le graphe correspondant à ce site, où les sommets désignent les pages, et les arêtes désignent les liens.
2. Écrire la matrice d'adjacence de ce graphe.
3. Le webmaster se trouve sur la page A. Combien de chemins de longueur 4 existent pour revenir sur cette page ?
4. Proposer un chemin pour tester tous les liens de ce site en partant de la page A.

Solution page 198

Exercice 4.8 (le jeu du Fan Tan)

Deux joueurs disposent de 2 ou plusieurs tas d'allumettes. À tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

1. Modéliser ce jeu à l'aide d'un graphe $\mathscr{G}$ dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant chacun trois allumettes et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois.
2. Soit c une chaîne allant du premier sommet au dernier.
   À quelle condition sur la longueur de c le premier joueur gagne-t-il la partie ?
3. Écrire la matrice d'adjacence $\mathscr{A}$ de $\mathscr{G}$.
4. À l'aide de votre calculatrice, calculer les puissances successives de $\mathscr{A}$ jusqu'à prouver qu'il existe bien un « premier coup gagnant ».
5. En observant ce dernier résultat, pouvez-vous dire quel premier coup le joueur doit faire pour être assuré de gagner ?

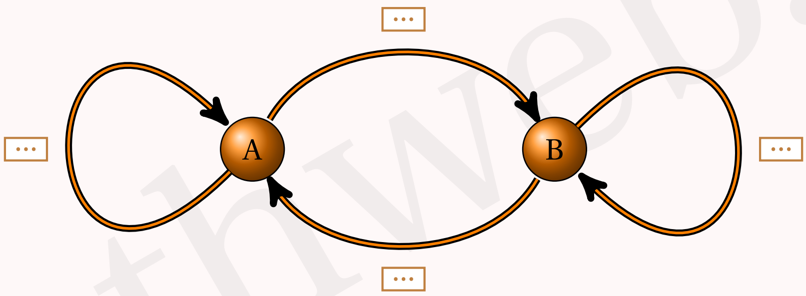
Solution page 199

Exercice 4.9 (état stable)

Le jeu « SimulTown Pro » permet à un joueur de gérer deux villes, désignées par la suite par les lettres A et B. Il peut, entre autre, gérer les flux migratoires des villes A et B.
Un joueur décide que chaque année :

- 30 % des habitants de la ville A déménagent pour aller dans la ville B ;
- 10 % des habitants de la ville B déménagent pour aller dans la ville A ;
- les autres habitants restent dans leur ville.

1 Compléter le graphe probabiliste suivant représentant la situation :



2 Écrire la matrice de transition M de ce graphe.

3 On suppose qu'il y a 150 000 habitants dans la ville A et 350 000 dans la ville B en début de partie.
À l'aide de votre calculatrice, déterminer le nombre d'habitants des villes A et B après 5 ans.

4 Déterminer l'état stable de ce graphe et interpréter ce résultat.

Solution page 200

Exercice 4.10 (opérateurs téléphoniques)

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.
En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.
On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.
On estime que, chaque année :

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.

On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo :

- A est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Alpha » ;
- B est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Bravo ».

1 Dessiner ce graphe probabiliste.

On admet que la matrice de transition de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est : $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année $2015 + n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année $2015 + n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.

2 Donner a_0 et b_0.

3 Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

4 Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme. On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des abonnés.

a. Montrer que les nombres x et y sont solutions du système $\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$

b. Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.

c. Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.

Solution page 201

Exercice 4.11 (liens d'un site internet)

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.
On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi, $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1 Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.

2 Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).

3 On donne :

$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}.$$

Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.

4 Calculer $\mathrm{N}_0 \times \mathrm{M}^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.

5 Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.

a. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?

b. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

Solution page 202

Exercice 4.12 (compétition de tir à l'arc (avec suites))

Alice participe à une compétition de tir à l'arc; elle effectue plusieurs lancers de flèches. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;
- b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;
- $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1 **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).

b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

c. Justifier que $\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.

2 **a.** Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$.

b. En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

3 **a.** Compléter le programme fourni en annexe (page suivante) de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.

b. Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.

4 **a.** On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0,8$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.

c. À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?

d. Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Programme à compléter :

Code Python 4-25

```python
def stable(n):
    a = 0.5
    b = 0.5
    for i in range(2,n+1):
        a = ...
        b = ...

    return a,b
```

Solution page 203

Exercice 4.13 (flux migratoires entre deux régions)

Une région se divise en deux zones :

- une zone A à proximité d'une grande agglomération
- une zone B à proximité de la mer

Chaque année, 20% des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.

On sait de plus qu'en 2010, 40% de la population habitait dans la zone A.
On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste correspondant à l'année $2010 + n$ est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

1 Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état initial.

2 Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3 **a.** Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

b. Donner la répartition de la population en 2012.

4 Dans la question suivante, on considère la matrice ligne $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a + b = 1$.

a. Déterminer a et b pour que $\mathrm{P} = \mathrm{PM}$.

b. Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75% de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures. A-t-il raison ?

Solution page 205

Exercice 4.14 (entreprises de couches-culottes)

Deux entreprises A et B se disputent le marché innovateur des couches-culottes en papier recyclé.
Les études de marché ont montrées que d'une année à l'autre :

- l'entreprise A perd 13 % de ses clients au profit de l'entreprise B ;
- l'entreprise B perd 15 % de ses clients au profit de l'entreprise A.

Les autres clients restent fidèles à leur marque.

L'année de lancement de ces produits, les deux entreprises avaient chacune d'elles 50 % du marché.
On désigne par $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant la répartition du marché sur ces deux entreprises. Ainsi, $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1 Construire le graphe probabiliste de cette situation.

2 Donner la matrice de transition de ce graphe.

3 Quelle sera la répartition du marché 1 année après le lancement du produit ? Après 5 années ?

4 Déterminer l'état stable de ce marché, puis interpréter ce résultat.

Solution page 207

Exercice 4.15 (Lucas le glandeur)

Quand Lucas est en vacances, s'il n'est pas sur son lit en train d'écouter de la musique, il peut être devant un jeu vidéo ou en train de manger.
D'une heure à l'autre,

- la probabilité qu'il passe de son lit à la cuisine est égale à 0,2 ;
- la probabilité qu'il passe de son lit au jeu vidéo est égale à 0,5 ;
- la probabilité qu'il passe de son jeu vidéo à la cuisine est égale à 0,6 ;
- la probabilité qu'il passe de son jeu vidéo à son lit est égale à 0,3 ;
- la probabilité qu'il passe de la cuisine à son lit est égale à 0,7 ;
- la probabilité qu'il passe de la cuisine au jeu vidéo est égale à 0,2.

1 Construire le graphe de cette situation.

2 Donner la matrice de transition de ce graphe, puis éterminer son état stable. Interpréter.

Solution page 208

Exercice 4.16 (notoriété de Squeezie (avec une suite))

Dans cet exercice, on s'intéresse à la notoriété de Squeezie, le youtuber.
Cette année, en France, sur l'ensemble des personnes interrogées connaissant le personnage, 78 % affirmaient qu'ils l'aimaient bien.
Les statistiques montrent que d'une année sur l'autre :

- 7 % des personnes qui l'aimaient bien ne l'aiment plus ;
- 30 % de celles qui ne l'aimaient pas l'aiment bien.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité qu'une personne aime bien Squeezie dans n années ;
- $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste dans n années.

1 Trouver P_0, l'état probabiliste initial.

2 Déterminer le graphe probabiliste traduisant la notoriété de notre ami Squeezie auprès de la population française, puis en donner la matrice de transition.

3 Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard en France aime Squeezie dans 4 ans ?

4 **a.** On note $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe.
Montrer que $a = 0,63a + 0,3$.

b. À longs termes, selon ce modèle mathématique, montrer que plus de 80 % des français aimeront le youtuber.

Solution page 209

Exercice 4.17 (fumeurs et non fumeurs (avec des suites))

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1 Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

2 Justifier l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times \mathrm{A}, \quad \text{où A désigne la matrice : } \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

3 Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

4 Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

5 Montrer que pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1$.

6 On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0,2$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.

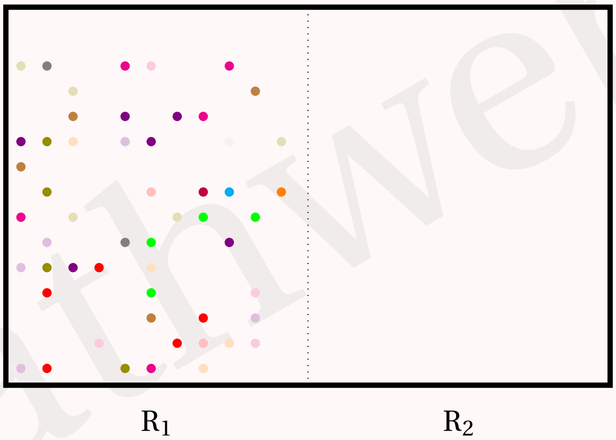
d. Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

Solution page 210

Exercice 4.18 (modèle d'Ehrenfest)

On considère un espace clos composé de deux parties R_1, initialement remplie de k particules que l'on suppose numérotées de 1 à k, et R_2, initialement vide, ces deux parties étant séparées par une membrane poreuse.
À chaque étape (par exemple chaque seconde), un nombre x compris entre 1 et k est choisi au hasard et la particule x traverse la membrane pour aller de l'autre côté. Ainsi, à l'étape 1, si on choisi le nombre p, la boule portant le numéro p passera de R_1 à R_2.

État initial :



1 **Simulation informatique**.

a. Expliquer en quoi le programme page suivante permet de simuler l'expérience.

b. Effectuer plusieurs simulations avec des valeurs de k supérieures à 100 et des valeurs de n supérieures à 1 000.
Que peut-on conjecturer quant à l'état des parties R_1 et R_2 ?

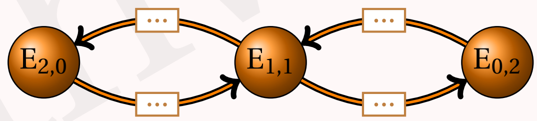
Code Python 4-27

```python
from random import choice

def Ehrenfest(k,n):
    # k : nombre de particules
    # n : nombre d'étapes
    R1 = [ i for i in range(1,k+1) ]
    R2 = []
    for i in range(n):
        j = choice( range(1,k+1) )
        if j in R1:
            R1.remove( j )
            R2.append( j )
        else:
            R2.remove( j )
            R1.append( j )

    return len(R1),len(R2)
```

2 **Étude mathématique pour $k = 2$.**

On considère ici que $k = 2$ par soucis de simplification. On note $E_{i,j}$ l'état : « il y a i particules dans R_1 et j particules dans R_2 ».

a. Compléter le graphe suivant, qui représente la situation :



b. On pose :

- a_n la probabilité d'être dans l'état $E_{2,0}$ à l'étape n;
- b_n la probabilité d'être dans l'état $E_{1,1}$ à l'étape n;
- c_n la probabilité d'être dans l'état $E_{0,2}$ à l'étape n.

On note alors $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Spécifier la valeur de U_0 et donner la matrice M du graphe (que l'on appelle *matrice de transition*) de sorte que $U_{n+1} = MU_n$.

c. Montrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $U_{2k} = U_2$ et $U_{2k+1} = U_1$.

3 **Étude mathématique pour $k = 4$.**

On considère ici que qu'il y a initialement 4 particules dans la partie de gauche. On note cette fois-ci R_k l'événement : « Il y a k particules dans la partie de gauche. ».
On note ensuite X_n la variable aléatoire donnant le nombre de particules dans la partie de gauche après n étapes.
On note : $U_n = \big(P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4)\big)$.

a. Que vaut U_0 ?

b. Représenter la situation par un graphe probabiliste à 5 sommets correspondant aux 5 états possibles.

Donner alors la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

On admet que pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 M^n$.

On admet aussi que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$:

$$U_{2p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{2^{2p+1}} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{2p+1}} \end{pmatrix}$$

et

$$U_{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2p+1}} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

(On pourrait le démontrer par récurrence)

c. Calculer l'espérance mathématique de X_n suivant la parité de n.

Déterminer alors sa limite quand n tend vers $+\infty$ et conclure.

Solution page 212

Corrigé de l'exercice 4.1 page 182

On va ici appliquer la formule de la propriété **??** : $K_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, où K_n est le nombre d'arêtes du graphe complet à n sommets.

1. $n = 10$ donc $K_{10} = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$.
2. $n = 5$ donc $K_5 = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$.
3. $n = 300$ donc $K_{100} = \dfrac{100 \times 99}{2} = 4\,950$.
4. $n = 75$ donc $K_{75} = \dfrac{75 \times 74}{2} = 2\,775$.

Corrigé de l'exercice 4.2 page 182

1. La matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc 5 chaînes de longueur 3 qui vont de A à E.

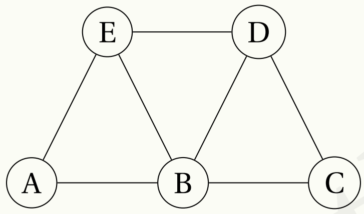
2. La matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } M^3 = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 13 & 9 & 13 \\ 13 & 11 & 12 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 11 & 10 & 12 \\ 9 & 10 & 10 & 6 & 10 \\ 13 & 12 & 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

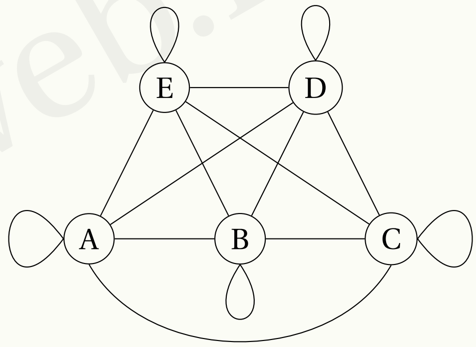
Il y a donc 11 chaînes de longueur 3 qui vont de C à C.

Corrigé de l'exercice 4.3 page 183

Maison 1. Le graphe est le suivant :

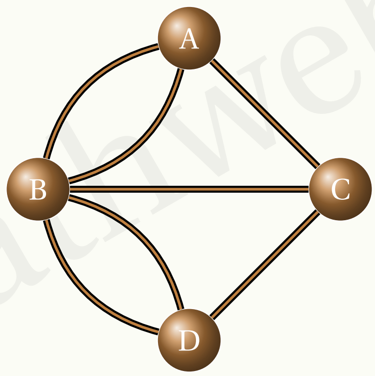


Maison 2. Le graphe est le suivant :



Corrigé de l'exercice 4.4 page 183

Représentons cette situation à l'aide d'un graphe où les parties de terre seront représentées par des sommets et où les ponts seront représentés par des arêtes :



Corrigé de l'exercice 4.5 page 184

1 Un graphe est *complet* s'il est simple (sans double liaison entre deux même sommets) et si tous les sommets peuvent être reliés deux à deux.
Ce n'est pas le cas ici car B n'est pas relié à G par exemple.

<u>Ce graphe n'est donc pas complet.</u>

2 L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.
Donc ici, <u>l'ordre du graphe est égal à 7</u>.

3 La matrice d'adjacence du graphe est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 La calculatrice nous donne :

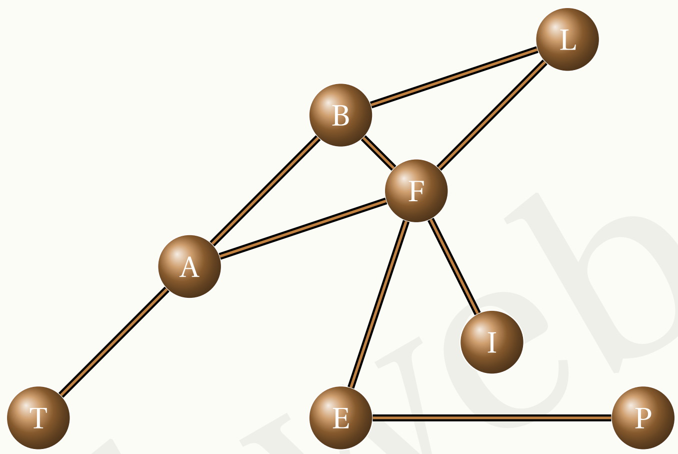
$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 & 11 & 6 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 12 & 12 & 11 & 4 & 7 \\ 9 & 12 & 8 & 12 & 7 & 4 & 11 \\ 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 4 & 12 \\ 6 & 11 & 7 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 7 & 11 & 12 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi, il y a 7 chemins de longueur 3 reliant E à C.

Rappel. Le coefficient de M^n situé à la i-ème ligne et j-ème colonne (ou à la j-ème ligne et i-ème colonne) est le nombre de chemins de longueur n reliant les sommets ayant pour position i et j dans la matrice d'adjacence.

Corrigé de l'exercice 4.6 page 184

1 Le graphe est le suivant :



2 La matrice d'adjacence de ce graphe est (en mettant les sommets dans l'ordre alphabétique :

A, B, E, F, I, L, P et T.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

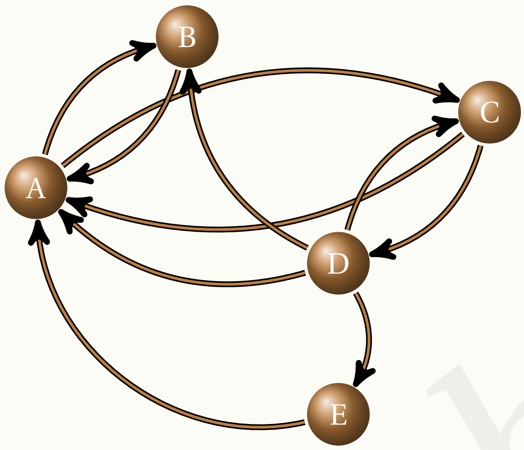
3 En calculant M^4, on voit que le coefficient à la 3e ligne et 1re colonne est 9, donc il y a 9 voyages comportant 4 traversées de frontières entre l'Espagne et l'Allemagne :

E-P-E-F-A	E-F-L-F-A	E-F-A-B-A
E-F-I-F-A	E-F-L-B-A	E-F-A-F-A
E-F-B-F-A	E-F-A-T-A	E-F-E-F-A

Parmi ces voyages, tous comportent au maximum deux pays identiques.

Corrigé de l'exercice 4.7 page 185

1 Le graphe est le suivant :



2 En convenant de respecter l'ordre alphabétique, la matrice d'adjacence de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 lien de C vers D

3 Après avoir calculé M^4, on voit que le coefficient de la 1re ligne et 1re colonne est 7. Il y a donc 7 chemins possibles pour passer de la page A à la page A en 4 clics.

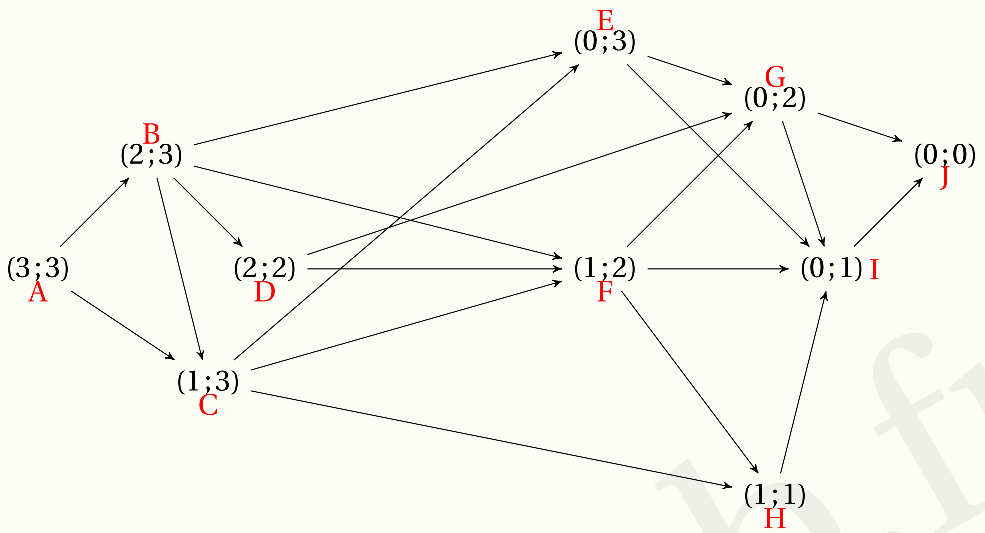
4 Le chemin :

$$A \to B \to A \to C \to D \to E \to A \to C \to A \to C \to D \to B \to A \to C \to D \to C \to D \to A$$

convient, même s'il passe plusieurs fois par les mêmes sommets et s'il emprunte plusieurs fois les mêmes arêtes.

Corrigé de l'exercice 4.8 page 185

1 Si chaque sommet est un couple $(i\,;j)$ où i désigne le nombre d'allumettes du premier tas et j celui du second tas, alors le graphe est le suivant :



2 Pour que le premier joueur gagne, il faut que l'autre joueur jour en dernier, ce qui nécessite un nombre pair de coups. Il faut donc que la longueur de c soit paire.

3 La matrice d'adjacence du graphe est la suivante, en convenant de classer les sommets par ordre alphabétique :

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 À l'aide du logiciel Xcas, on cherche la plus petite puissance paire de $\mathscr{A}$ telle que $a_{1,10} \neq 0$. Pour $\mathscr{A}^2$, $a_{1,10} = 0$ mais pour $\mathscr{A}^4$, on a $a_{1,10} = 10$.

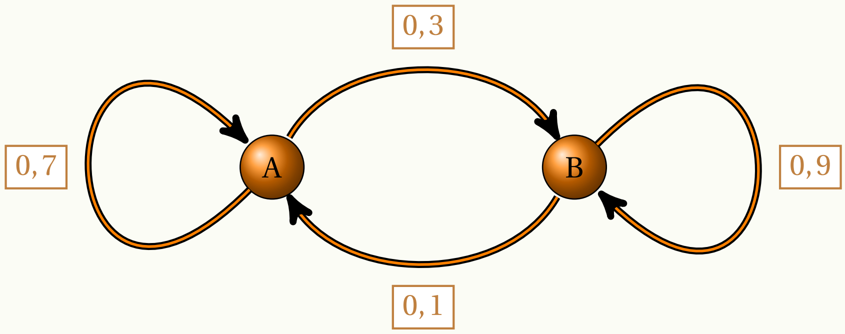
On peut donc dire qu'il y a 10 chaînes de longueur 4 qui mènent du premier sommet au dernier. Par exemple : $(3;3) \to (1;3) \to (0;3) \to (0;2) \to (0,0)$.

5 Sur le graphe $\mathscr{G}$, on peut observer que si le joueur retire deux allumettes, alors il est assuré de gagner.

En effet, la chaîne $(3;3) \to (2;3) \to (2;2) \to (1;2) \to (0;1) \to (0;0)$ à une longueur impaire, donc ne convient pas. Par contre, toutes les chaînes commençant par $(3;3) \to (1;3)$ ont une longueur paire.

Corrigé de l'exercice 4.9 page 186

1 Le graphe probabiliste représentant la situation est le suivant :



2 La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

3 On calcule : $\begin{pmatrix} 150\,000 & 350\,000 \end{pmatrix} M^5 = \begin{pmatrix} 126\,944 & 373\,056 \end{pmatrix}$.

<u>Il y aura donc 126 944 habitants dans la ville A et 373 056 dans la ville B.</u>

4 L'état stable P du graphe est tel que $P = PM$, soit $PI = PM$ (où I est la matrice identité). Alors, $PI - PM = 0$ et donc $P(I - M) = 0$.

$$I - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,3 \\ -0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec $a + b = 1$:

$$P(I - M) = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & -0,3 \\ -0,1 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a + b = 1$$

soit :

$$\begin{cases} 0,3a - 0,1b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,3a = 0,1b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{0,1b}{0,3} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{1b}{3} \\ \dfrac{b}{3} + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{1b}{3} \\ \dfrac{b}{3} + \dfrac{3b}{3} = \dfrac{3}{3} \end{cases}$$

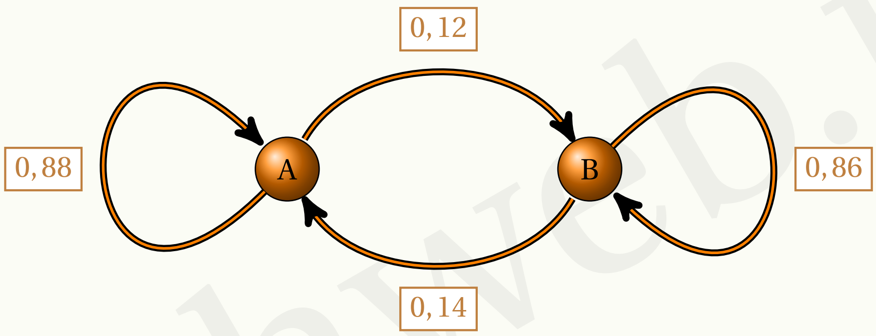
$$\begin{cases} 0,3a - 0,1b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1b}{3} \\ 4b = 3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{3}b \\ b = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

L'état stable du graphe est donc $\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$, ce qui signifie qu'à longs termes, un quart de la population totale des deux villes se trouvera dans la ville A et les autres dans la villes B.
La population totale des deux villes est $150\,000 + 350\,000 = 500\,000$ habitants et $500\,000 \div 4 = 125\,000$.

<u>Donc 125 000 habitants seront dans la ville A et 375 000 seront dans la ville B.</u>

Corrigé de l'exercice 4.10 page 186

1 Le graphe représentant la situation est le suivant :



2 D'après l'énoncé, $a_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.
Alors,
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,362 & 0,638 \end{pmatrix}.$$

3 On a :
$$P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,4418 & 0,5582 \end{pmatrix}$$
Ainsi, en $2015 + 3 = 2018$, il y aura bien 44,2 % d'abonnés chez l'opérateur Alpha.

4 **a.** x et y sont deux probabilités dont la somme doit être égale à 1 car nous ne considérons pas d'autres opérateurs ; donc $\boxed{x+y=1}$. De plus, l'état stable est défini par l'égalité :

$$\mathrm{P} = \mathrm{PM} \qquad \text{donc} \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88x+0,14y & 0,12x+0,86y \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad \begin{cases} x = 0,88x+0,14y \\ y = 0,12x+0,86y \end{cases}$$

En mettant x et y à droite des signes « = », on obtient :

$$\begin{cases} 0 = (0,88-1)x+0,14y \\ 0 = 0,12x+(0,86-1)y \end{cases}$$

La deuxième équation donne : $\boxed{0,12x-0,14y=0}$.

Les deux équations encadrées donnent bien le système demandé.

b. Le système s'écrit de façon matricielle ainsi :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \quad , \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,12 & -0,14 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

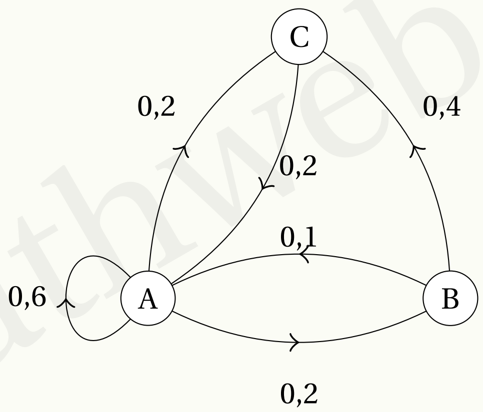
donc :

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \approx \begin{pmatrix} 0,538 \\ 0,462 \end{pmatrix}$$

c. De la question précédente, on déduit qu'à longs termes, 53,8 % des abonnés seront chez Alpha, et 46,2 % seront chez Bravo.

Corrigé de l'exercice 4.11 page 187

1 On a le graphe suivant :



2 La matrice M de transition est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

3 $N_2 = N_0M^2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 22 & 36 \end{pmatrix}$.

Cela signifie qu'après 2 minutes, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

4 $N_0 \times M^{20} \approx \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix} = N_{20}$.

« 20 » est assez grand pour que l'on puisse assimiler N_{20} à l'état stable.

Cela signifie alors qu'à long terme, il y aura 31,25 % des internautes sur le site A, 12,5 % sur le site B et 56,25 % sur le site C (quel que soit le nombre d'internautes au départ).

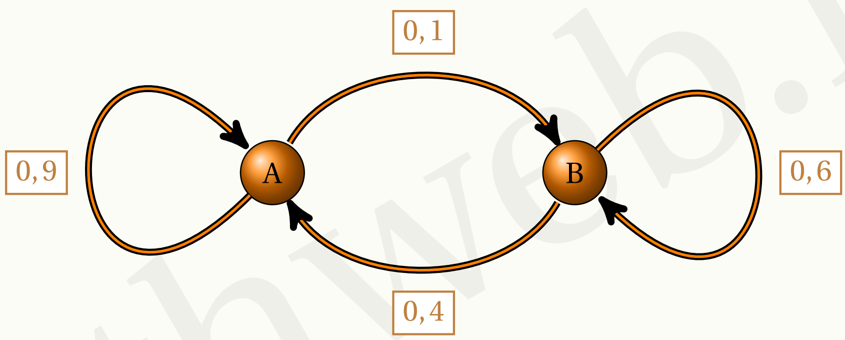
5 **a.** D'après le graphe, la probabilité de passer de C à A en 1 minute est égale à 0,2. Ainsi, la probabilité pour qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté est égale à 0,2.

b. Pour que les trois sites soient infectés, il faut que l'internaute utilise le chemin $C \to B \to A$ (ce qui est impossible car il ne peut pas passer de C à B) ou le chemin $C \to A \to B$, avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.

La probabilité pour que les 3 sites soient infectés à l'instant $t = 2$ est égale à 0,04.

Corrigé de l'exercice 4.12 page 188

1 **a.** Le graphe probabiliste est le suivant :



b. La matrice de transition M associé au graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

c. Au premier lancer,Alice a autant de chances d'atteindre sa cible que de la manquer ; ainsi, $a_1 = b_1 = 0,5$ donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
P_2 &= P_1 M \\
&= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,5 \times 0,9 + 0,5 \times 0,4 & 0,5 \times 0,1 + 0,5 \times 0,6 \end{pmatrix} \\
P_2 &= \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2 **a.** Pour tout entier naturel n, on a :

$$P_{n+1} = P_n M$$

d'où :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,4b_n & 0,1a_n + 0,6b_n \end{pmatrix}$$

Le premier coefficient de P_{n+1} étant a_{n+1}, on a bien :

$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n.$$

b. On sait que $a_n + b_n = 1$, donc $b_n = 1 - a_n$. Ainsi, la relation trouvée précédemment donne :

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 0,9a_n + 0,4b_n \\
&= 0,9a_n + 0,4(1 - a_n) \\
&= 0,9a_n + 0,4 - 0,4a_n \\
\end{aligned}
$$
$$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4}$$

3 **a.** On a l'algorithme complété suivant :

Code Python 4-28

```python
def stable(n):
    a = 0.5
    b = 0.5
    for i in range(2,n+1):
        a = 0.5 * a + 0.4
        b = 1 - a

    return a,b
```

b. Pour $n = 5$, l'algorithme affiche $a = 0{,}78125$ et $b = 0{,}21875$.

4 **a.**
$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,8 \\
&= 0,5a_n + 0,4 - 0,8 \\
&= 0,5a_n - 0,4 \\
&= 0,5(a_n - 0,8) \\
&= 0,5u_n
\end{aligned}
$$

Cette dernière relation de récurrence montre que (u_n) est géométrique de raison $q = 0,5$.

Son premier terme est $u_1 = a_1 - 0,8 = 0,5 - 0,8 = -0,3$.

b. D'après le cours, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, donc $u_1 = -0,3 \times 0,5^{n-1}$.
$u_n = a_n - 0,8$ donc $a_n = u_n + 0,8$, c'est-à-dire $\underline{a_n = 0,8 - 1,3 \times 0,5^{n-1}}$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ car $0 < 0,5 < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,8$.
À long terme, on peut donc penser qu'il y a 8 chances sur 10 pour qu'Alice atteigne la cible.

d. On aurait pu chercher l'état stable $\mathrm{P}_\infty = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que :

$$\mathrm{P}_\infty = \mathrm{P}_\infty \mathrm{M}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

On arrive alors au système :

$$\begin{cases} a & = 0,9a + 0,4b \\ b & = 0,1a + 0,6b \end{cases}$$

Le deux équations sont équivalentes en théorie; on doit donc remplacer l'une d'elles (par exemple la deuxième) par l'équation : $b = 1 - a$, ce qui donne :

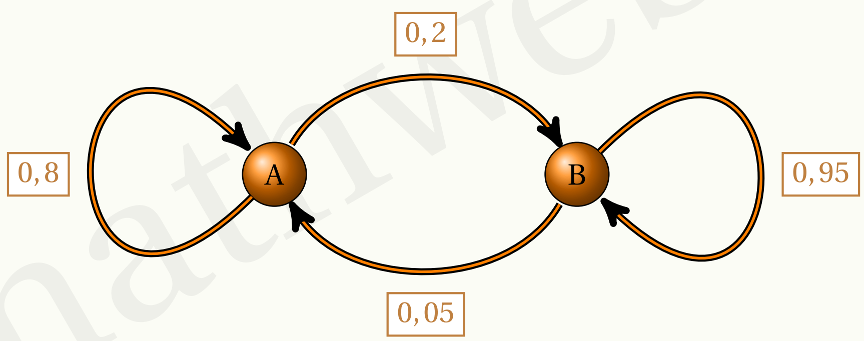
$$\begin{cases} 0,1a & = 0,4(1-a) \\ b & = 1 - a \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} 0,5a & = 0,4 \\ b & = 1 - a \end{cases}$$

La première équation donne alors $a = 0,8$, ce qui correspond au résultat trouvé à la question c..

Corrigé de l'exercice 4.13 page 189

1 D'après l'énoncé, $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
En effet, en 2010, 40% de la population était dans la zone A, ce qui correspond à une proportion de 0,4.

2 Le graphe est le suivant :



3 **a.** La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$.

b. La répartition de la population en 2012 est donnée par P_2.

$$P_1 = P_0M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1M = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,6875 \end{pmatrix}$$

Ainsi, 31,25% de la population habitera en zone A et 68,75% en zone B.

4 **a.** On a :

$$\begin{aligned} P = PM &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a + 0,05b & 0,2a + 0,95b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} 0,8a + 0,05b = a \\ 0,2a + 0,95b = b \end{cases}$$

Soit : $0,05b = 0,2a$. Donc : $b = 4a \qquad (1)$.

De plus,

$$a + b = 1 \iff a = 1 - b.$$

Ainsi :

$$(1) \iff b = 4(1 - b)\,,$$

d'où :

$$b = 4 - 4b.$$

On a alors :

$$b = \frac{4}{5} \qquad \text{et donc} \qquad a = \frac{1}{5}.$$

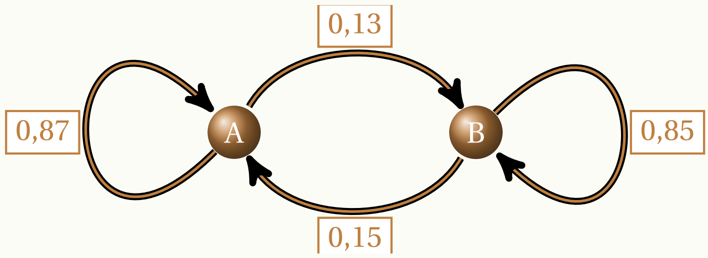
Finalement, on a :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

b. Le maire a en effet raison de prévoir de nouvelles infrastructures car la proportion d'habitants dans la zone B se rapprochera des 80%.

Corrigé de l'exercice 4.14 page 190

1 Le graphe correspondant à cette situation est le suivant :



2 La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

3
- On souhaite calculer P_1 :

$$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0,51 & 0,49 \end{pmatrix} = P_1}$$

<u>Ainsi, après 1 année, l'entreprise A détiendra 51 % du marché.</u>
- On souhaite calculer P_5 :

$$P_5 = P_0 \times M^5 = \boxed{\begin{pmatrix} 0,5288 & 0,4712 \end{pmatrix} = P_5}$$

<u>Ainsi, après 5 années, l'entreprise A détiendra 52,88 % du marché.</u>

4 Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe. Alors, par définition :

$$P = PM \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

On arrive ainsi au système suivant :

$$\{[\ :]0,87a + 0,15b = a : 0,13a + 0,85b = b$$

ou encore, en faisant tout passer à gauche :

$$\{[\ :]-0,13a + 0,15b = 0 : 0,13a - 0,15b = 0$$

On obtient ainsi deux équations équivalentes (car la 1re est l'opposée de la 2nde). De plus, $a + b = 1$ car a et b sont les deux seules probabilités de notre situation. On a finalement le système suivant :

$$\{[\ :]a + b = 1 : 0,13a - 0,15b = 0$$

que l'on peut aussi écrire de façon matricielle :

$$AX = B \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,13 & -0,15 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

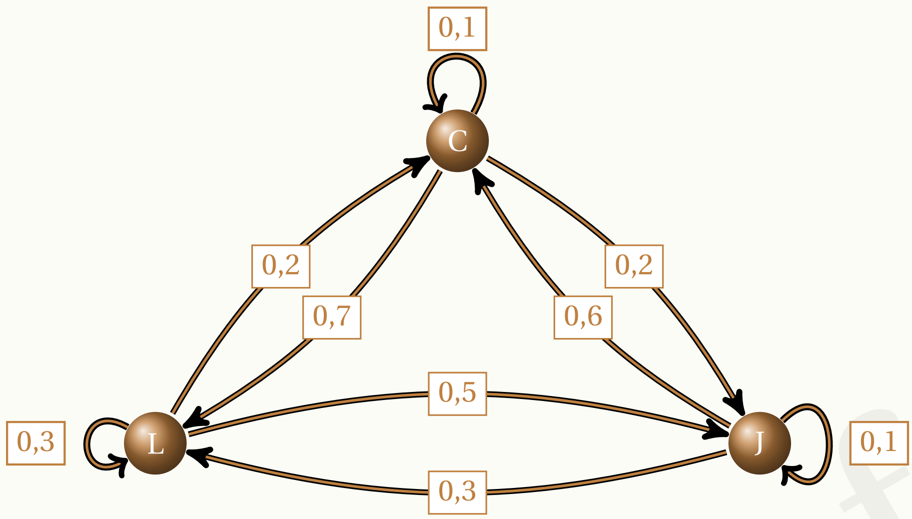
Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \boxed{\begin{pmatrix} 0,5357 \\ 0,4643 \end{pmatrix}}$$

ce qui signifie qu'<u>à longs termes, l'entreprise A possèdera 53,57 % du marché.</u>

Corrigé de l'exercice 4.15 page 190

1 Le graphe est le suivant :



2 La matrice de transition de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

en convenant de mettre les sommet dans l'ordre alphabétique : C, J, L.

Notons $P = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe. Alors, par définition,

$$P = P \times M \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

d'où le système suivant :

$$\{[\ :]0,1a+0,6b+0,2c=a:0,2a+0,1b+0,5c=b:0,7a+0,3b+0,3c=c$$

En mettant tout à gauche, on obtient :

$$\{[\ :]-0,9a+0,6b+0,2c=0:0,2a-0,9b+0,5c=0:0,7a+0,3b-0,7c=0$$

En ajoutant les deux dernières équations, on obtient :

$$0,9a-0,6b-0,2c=0$$

c'est-à-dire la 1re équation. On peut donc supprimer cette dernière et ajouter au système l'équation : $a+b+c=1$ (somme des probabilités).
On obtient alors le système :

$$\{[\ :]a+b+c=1:0,2a-0,9b+0,5c=0:0,7a+0,3b-0,7c=0$$

On peut multiplier par 10 les deux dernières équations (pour enlever les virgules) :

$$\{[\ :]a+b+c=1:2a-9b+5c=0:7a+3b-7c=0$$

et écrire de façon matricielle ce dernier système :

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B} \quad , \quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -9 & 5\\ 7 & 3 & -7\end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{X}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{pmatrix}\frac{24}{83}\\ \frac{49}{166}\\ \frac{69}{166}\end{pmatrix}$$

L'état stable du graphe est donc :

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}\dfrac{24}{83} & \dfrac{49}{166} & \dfrac{69}{166}\end{pmatrix}$$

ce qui signifie qu'à longs termes,

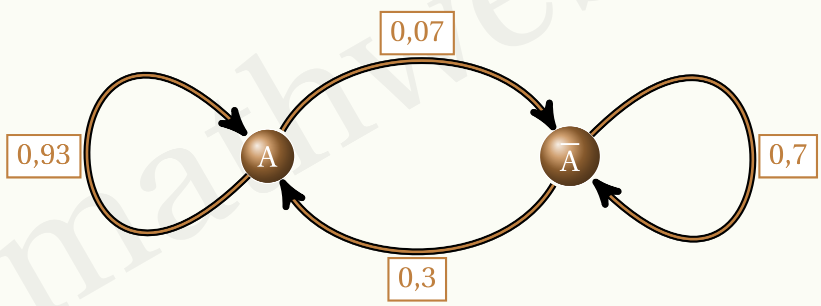
- la probabilité que Lucas soit dans la cuisine en train de manger est égale à $\dfrac{24}{83}\approx 0,289$,
- la probabilité que Lucas soit en train de jouer au jeu vidéo est égale à $\dfrac{49}{166}\approx 0,295$,
- la probabilité que Lucas soit sur son lit est égale à $\dfrac{69}{166}\approx 0,416$.

Quel glandeur ce Lucas !

Corrigé de l'exercice 4.16 page 191

1 D'après l'énoncé, $\boxed{\mathrm{P}_0=\begin{pmatrix}0,78 & 0,22\end{pmatrix}}$.

2 Le graphe est le suivant, où A est l'événement : « Le jeune aime Squeezie » :



La matrice de transition est alors :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,30 & 0,70 \end{pmatrix}}$$

3 $P_4 = P_0 \times M^4 = \begin{pmatrix} 0,80 & 0,20 \end{pmatrix}$.
Ainsi, dans 4 ans, 80 % des personnes aimeront Squeezie.

4 **a.** Par définition, $P = P \times M$ donc :

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93a+0,3(1-a) & 0,07a+0,7(1-a). \end{pmatrix}$$

En ne regardant que la première composante des deux matrices de part et d'autre du signe « = », on a :

$$\begin{aligned} a = 0,93a+0,3(1-a) &\iff a = 0,93a+0,3-0,3a \\ &\iff \boxed{a = 0,63a+0,3} \end{aligned}$$

b. De la question précédente, on déduit que :

$$0,37a = 0,3$$

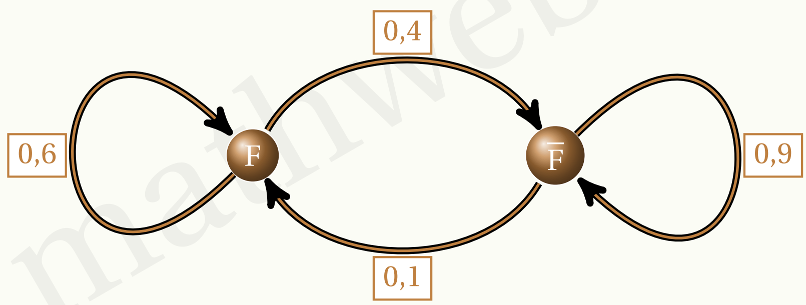
et donc que :

$$a = \frac{0,3}{0,37} \approx 0,8108.$$

Ainsi, à longs termes, il y aura à peu près 81 % des français aimeront Squeezie selon ce modèle mathématique.

Corrigé de l'exercice 4.17 page 191

1 Le graphe probabiliste est le suivant, où F représente l'état « fumeur » et $\overline{F}$ l'état « non-fumeur » :



2 La matrice de transition de ce graphe est : $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$, et par définition, si on note $P_n = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix}$, alors $P_{n+1} = P_n \times A$.

3 On cherche f_2, donc P_2.

$$P_2 = P_0 \times A^2 = \begin{pmatrix} 0,275 & 0,725 \end{pmatrix}.$$

<u>Ainsi, à la génération de rang 2, il y a 27,5 % de fumeurs.</u>

4 Notons $P = \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe. Alors, par définition, $P = P \times A$:

$$\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6f + 0,1g & 0,4f + 0,9g \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} 0,6f + 0,1g = f \\ 0,4f + 0,9g = g \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -0,4f + 0,1g = 0 \\ 0,4f - 0,1g = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont équivalentes car l'une est l'opposée de l'autre, donc on peut n'en prendre qu'une des deux.
De plus, $g = 1 - f$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0,4f - 0,1g = 0 &\iff 0,4f - 0,1(1-f) = 0 \\ &\iff 0,4f - 0,1 + 0,1f = 0 \\ &\iff 0,5f = 0,1 \\ &\iff f = \frac{0,1}{0,5} \\ &\iff f = 0,2. \end{aligned}$$

L'état stable est donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$, ce qui signifie qu'<u>à longs termes, il y aura 20 % de fumeurs et donc 80 % de non-fumeurs.</u>

5 De la question 2, on déduit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} &\Longrightarrow f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1g_n \\ &\iff f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1(1 - f_n) \\ &\iff f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1 - 0,1f_n \\ &\iff \boxed{f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1} \end{aligned}$$

6 **a.** $$\begin{aligned} u_{n+1} &= f_{n+1} - 0,2 \\ &= 0,5f_n + 0,1 - 0,2 \\ &= 0,5f_n - 0,1 \\ &= 0,5\left(f_n - \frac{0,1}{0,5}\right) \\ &= 0,5(f_n - 0,2) \\ &= 0,5u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$. Son premier terme est alors :

$$u_0 = f_0 - 0,2 = 0,5 - 0,2 = 0,3.$$

b. D'après le cours, $u_n = u_0 \times q^n$, donc $\boxed{u_n = 0,3 \times 0,5^n}$.

c. On sait que $u_n = f_n - 0,2$, donc $f_n = u_n + 0,2$, c'est-à-dire :

$$f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$$

d. $0 < 0,5 < 1$ donc d'après le cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0,3 \times 0,5^n\right) = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = 0,2}$.

On peut interpréter ce dernier résultat en disant qu'à longs termes, il y aura 20 % de fumeurs, ce qui n'est pas une surprise dans la mesure où on l'avait déjà trouvé à la question 4.

Corrigé de l'exercice 4.18 page 192

1 **a.** Dans ce programme, `R1` est une liste initialement composée des nombres 1, 2, ..., n. Elle représente ainsi la partie de gauche de l'espace séparé en deux, les n nombres distincts représentant les n particules. `R2` est une liste vide représentant ainsi la partie de droite, qui est initialement vide.

On entre ensuite dans une boucle dans laquelle on exécute n fois la même chose : on choisit un nombre aléatoire `j` entre 1 et n ; si la particule j est dans R_1, on la transfert dans R_2 en l'ajoutant dans la liste `R2` et en la supprimant de la liste `R1`.

Une fois hors de la boucle, la fonction retourne la longueur des deux lites, soit le nombre de particules dans chacune des parties.

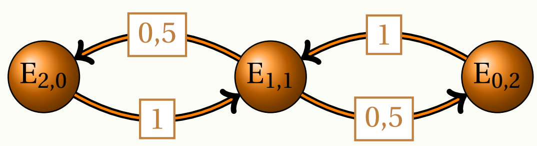
b. Effectuons plusieurs simulations :

```
>>> Ehrenfest(200,2000)
(100,100)
>>> Ehrenfest(900,2000)
(424, 476)
>>> Ehrenfest(900,5000)
(460, 440)
```

On peut alors conjecturer qu'à longs termes (après un très grand nombre d'étapes), les particules se répartissent de façon équitable.

2 **Étude mathématique pour $k = 2$.**

a. Le graphe complété est le suivant :



En effet, le passage de $E_{2,0}$ à $E_{1,1}$ est inéluctable, d'où une probabilité de passage de l'état $E_{2,0}$ à $E_{1,1}$ égale à 1.
De même pour le passage de $E_{0,2}$ à $E_{1,1}$.
Quant aux probabilités de passage de $E_{1,1}$ à l'un des états $E_{0,2}$ ou $E_{2,0}$, elles sont identiques, donc égales à 0,5.

b. $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Montrons par récurrence ces égalités.

- **Initialisation.**

  → $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  → $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

  → $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U_1$.

  → $U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} = U_2$.

- **Hérédité.** Supposons que pour un entier p fixé, $U_{2p} = U_2$ et $U_{2p+1} = U_1$.

  → $U_{2p+2} = MU_{2p+1} = MU_1 = U_2$ et donc $U_{2(p+1)} = U_2$;

  → $U_{2p+3} = MU_{2p+2} = MU_2 = U_3 = U_1$ et donc $U_{2(p+1)+1} = U_1$.

  L'hérédité est alors vérifiée.

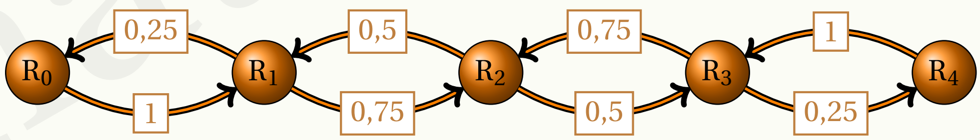
Ainsi, les égalités sont vraies pour tout entier $k \geqslant 1$.

3 Étude mathématique pour $k = 4$.

a. $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet, initialement, il y a 4 particules dans la partie de gauche donc $P(X_0 = 4) = 1$.

b. Le graphe complété est le suivant :



La matrice de transition du graphe est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Calculons l'espérance mathématique de X_n :

- si $n = 2p$: $E(X_{2p}) = \frac{3}{4} \times 2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{2p+1}}\right) \times 4 = 2 + \frac{1}{2^{2p-1}}$;
- si $n = 2p+1$: $E(X_{2p+1}) = 1 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2p+1}}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}}\right) = 2 - \frac{2}{2^{2p}}$.

On constate alors que l'espérance tend vers 2 lorsque n tend vers l'infini, ce qui signifie qu'à longs termes, il ne restera que deux particules dans la partie de gauche.