Graphes & matrices

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet – Mise à jour : 28 janvier 2026

(https://courspasquet.fr) (https://mathweb.fr)

Graphes

Définition

Un *graphe* $\mathcal{G}$ est la donnée de deux ensembles : l'un est constitué de points, appelés *sommets*, l'autre est constitué de couples de points, appelés *arêtes*.

Vocabulaire

- Deux sommets sont *adjacents* s'il existe une arête entre eux.
- Une graphe est *complet* si tous les sommets sont adjacents deux à deux.

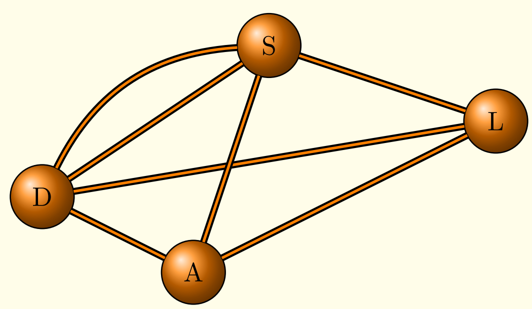
  Propriété : un graphe complet à n sommets compte $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.
- L'*ordre* d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Une *chaîne* d'un graphe est une liste ordonnée de sommets adjacents deux à deux.
  Le nombre de sommets de cette liste est appelé la *longueur* de la chaîne.
- Un graphe est *connexe* si deux sommets quelconques de ce graphe peuvent être reliés par au moins une chaîne.

Types de graphes

Graphes non orientés

$\mathcal{G} = (\mathcal{S};\mathcal{A})$ est *non orienté* si les couples de $\mathcal{A}$ peuvent être inversés.

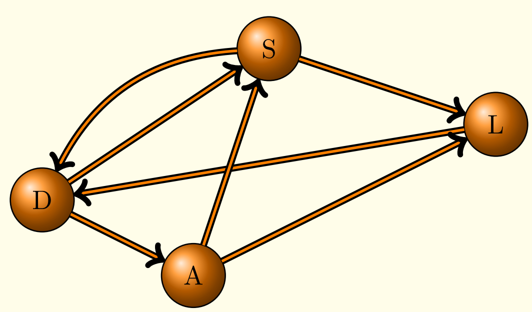
Une représentation sagittale d'un tel graphe peut-être celle ci-contre : les arêtes ne comportent pas de flèches.



Graphes orientés

$\mathcal{G} = (\mathcal{S};\mathcal{A})$ est *orienté* si les couples de $\mathcal{A}$ ne peuvent pas être inversés.

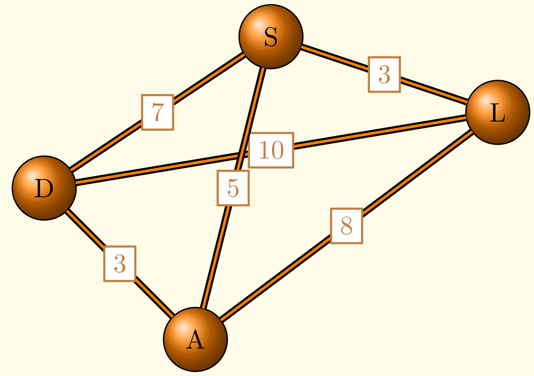
Une représentation sagittale d'un tel graphe peut-être celle ci-contre : les arêtes ont un « sens », représenté par une flèche.



Graphes pondérés

Un graphe est dit *pondéré* si ses arêtes sont munies de nombres positifs, appelés *étiquettes* ou *pondérations*.

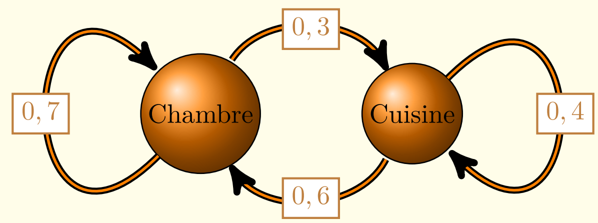
Une représentation sagittale d'un tel graphe peut-être celle ci-contre : chaque arêtes est étiquetée d'un nombre (représentant ce que l'on veut).



Graphes probabilistes

Un graphe probabiliste est un graphe orienté où la somme des pondérations des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

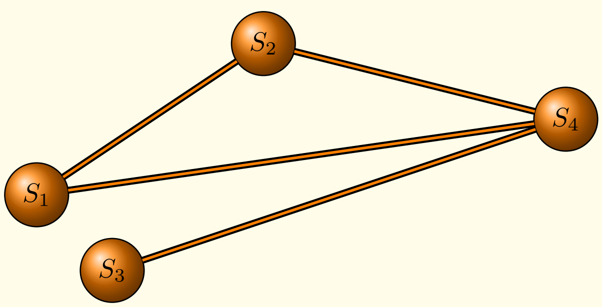
Une représentation sagittale d'un tel graphe peut-être celle ci-contre.



Matrices

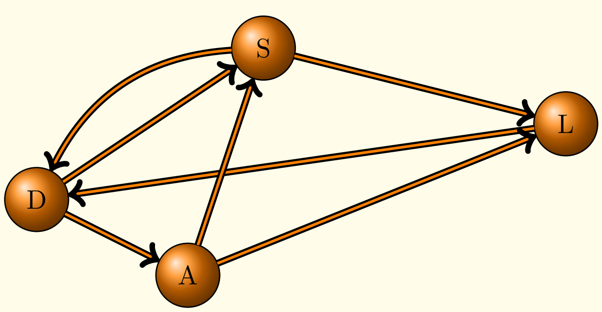
Matrice d'adjacence d'un graphe

Graphe non orienté



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe orienté



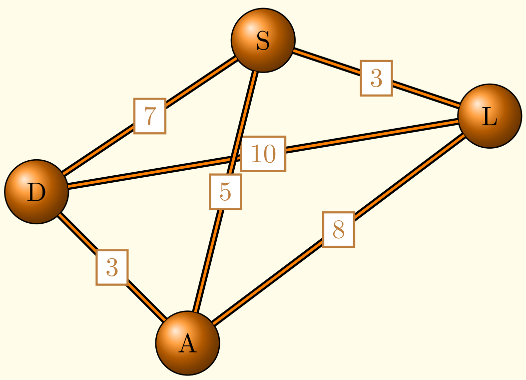
En convenant de classer les sommets dans cet ordre :

D – S – A – L

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nombre de chaînes d'un graphe non pondéré : le nombre de chaînes de longueur k reliant deux sommets S_i et S_j est le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice A^k.

Graphe pondéré



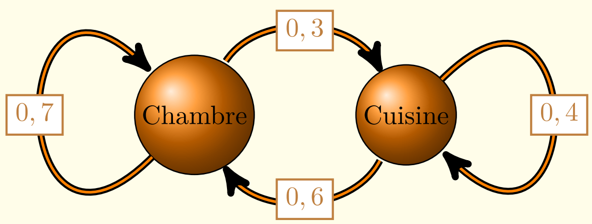
En convenant d'ordonner les sommets de la manière suivante :

D – S – A – L

la matrice d'adjacence du graphe ci-contre est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 10 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 10 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe probabiliste



En convenant d'ordonner les sommets du graphe ci-contre comme ceci :

Chambre – Cuisine

la matrice du graphe ci-contre est :

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est une suite d'événements $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque X_n ne dépend que de X_{n-1}, pour $n > 0$.
La représentation sagittale précédente du graphe probabiliste représente uen chaine de Markov à 2 états.

État stable

Soit $\mathcal{G}$ un graphe probabiliste de matrice M.

L'*état stable* du graphe est la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ telle que $P = PM$, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Exemple : si on considère le graphe probabiliste précédent, l'état stable de ce graphe est la matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{aligned} P = PM &\iff PI_2 = PM \\ &\iff P(M - I_2) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7-1 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4-1 \end{pmatrix} = 0 \qquad , \qquad a + b = 1 \\ &\iff \begin{cases} -0,3a + 0,6b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

L'état stable du graphe est donc $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Cela signifie qu'à très termes, la probabilité que Louis soit dans sa chambre est égale à $\dfrac{2}{3}$.