Matrices

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 29 janvier 2026

(https://courspasquet.fr) (https://mathweb.fr)

Définitions

Dimensions d'une matrice

Une matrice est de dimensions $n \times m$ si elle a n lignes et m colonnes, $n \neq 0$ et $m \neq 0$.

- Si $n = 1$, on dira que A est une *matrice ligne*.
- Si $m = 1$, on dira que A est une *matrice colonne*.
- Si $n = m$, on dira que A est une *matrice carrée*.

Notation

On pourra noter une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice de dimensions $n \times m$, ou plus simplement : $A = (a_{i,j})$, avec $\dim(A) = n \times m$.

Matrices identités

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices diagonales

$$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Puissances d'une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow D^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^p & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^p \end{pmatrix}$$

Matrices inversibles et matrice inverse

On appelle *matrice inverse de A*, quand elle existe, l'unique matrice, notée A^{-1}, telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n.$$

Matrices d'ordre 2

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ ad - bc \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Écritures matricielles

Systèmes linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \iff AX = B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Résolution

$$AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

Suites

On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ \vdots \\ u_n^{(p)} \end{pmatrix}$ où les $u_n^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont p suites numériques et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$ et :

$$U_{n+1} = AU_n.$$

Résolution

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$