Nombres complexes

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 27 janvier 2026

(https://courspasquet.fr) (https://mathweb.fr)

Ensemble des nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \quad , \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1\}$$

Les différentes formes

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = a + \mathrm{i}b$	$a = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$	$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

Exemple.

$$z = 1 + \mathrm{i} \Longrightarrow r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Définitions

Parties réelles et imaginaires

$$z = a + \mathrm{i}b \iff \begin{cases} a = \Re\mathrm{e}(z) \\ b = \Im\mathrm{m}(z) \end{cases}$$

Conjugué

$$z = a + \mathrm{i}b \iff \overline{z} = a - \mathrm{i}b$$

Module

$$z = a + \mathrm{i}b \Longrightarrow \mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Arguments

$$z = a + \mathrm{i}b \Longrightarrow \arg(z) = \theta,$$

$$\text{où } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\mid z \mid} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\mid z \mid} \end{cases}$$

Propriétés

Conjugué

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\dfrac{z}{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Module

- $\mid z \mid = |\overline{z}|$
- $\mid z \times z' \mid = \mid z \mid \times \mid z' \mid$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{\mid z \mid}{\mid z' \mid}$
- $\mid z^n \mid = \mid z \mid^n$

Arguments

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$

Polynômes

Équations du second degré

$$\begin{cases} az^2+bz+c=0 \\ \Delta = b^2-4ac<0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{\mid \Delta \mid}}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{\mid \Delta \mid}}{2a} = \overline{z_1} \end{cases}$$

Factorisation de $z^n - a^n$

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k-1}$$

Trigonométrie

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

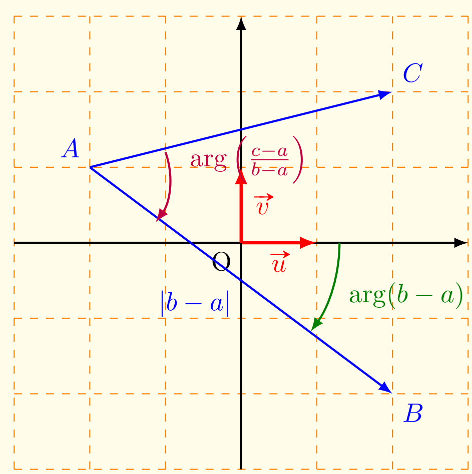
Formules de duplication

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
  $= 2\cos^2(a) - 1$
  $= 1 - 2\sin^2(a)$

Distances et angles

Soient A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

- $\mid b-a \mid \, = AB$
- $\arg(b-a) = \left(\vec{\mathrm{u}}\,,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$
- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{AC}{AB}$
- $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$



Racines n-ièmes de l'unités

Pour n entier naturel, on appelle *racines n-ième* de l'unité tous les nombres complexes z tels que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de toutes ces valeurs :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\,,\, k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\right\}$$