

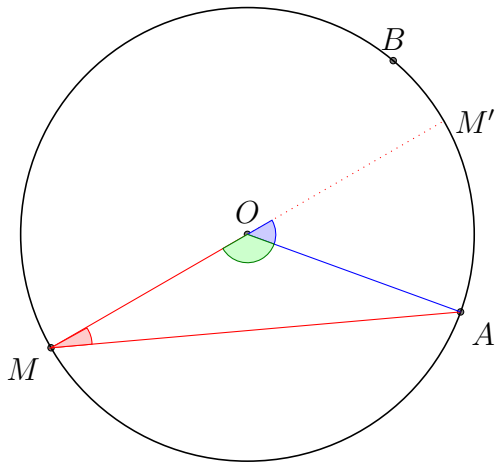
Théorème de l'angle au centre

Enoncé du théorème

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O . Soient alors A et B deux points sur $\mathcal{C}$ et M un point sur le grand arc $\widehat{AB}$.

Alors, $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$.

Voici sa démonstration :



Soit M' le symétrique de M par rapport à O . Dans le triangle AOM isocèle en O , la somme de la mesure des angles est égale à 180° et les angles à la base ont la même mesure ; donc :

$$\widehat{AOM} = 180^\circ - 2\widehat{AMO}.$$

De plus, $\widehat{AOM} + \widehat{AOM'} = 180^\circ$ car ce sont deux angles adjacents supplémentaires. D'où :

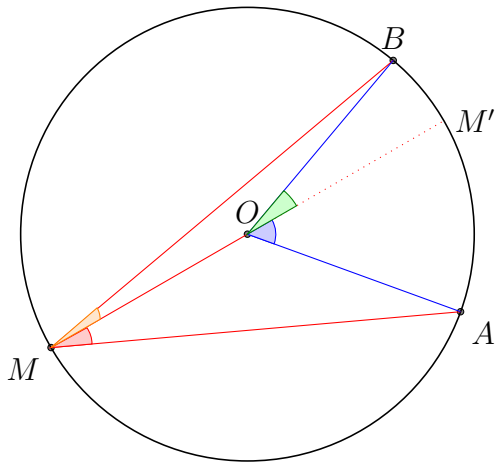
$$\widehat{AOM} = 180^\circ - \widehat{AOM'}.$$

On en déduit alors l'égalité suivante :

$$180^\circ - \widehat{AOM'} = 180^\circ - 2\widehat{AMO},$$

d'où :

$$2\widehat{AMO} = \widehat{AOM'}.$$



Examinons le cas où A et B sont de part et d'autre de $[MM']$: On remarque que :

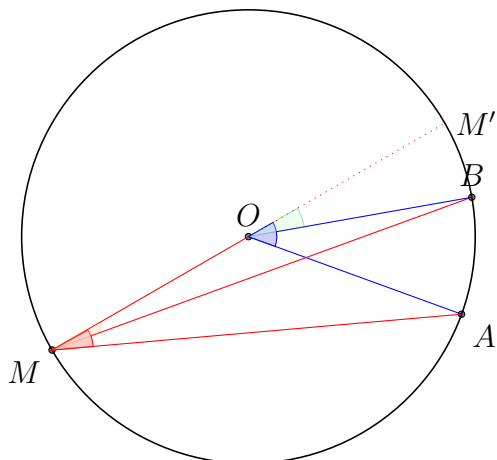
$$\widehat{AMB} = \widehat{AMO} + \widehat{BMO}$$

et

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOM'} + \widehat{BOM'}?$$

Ainsi :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMO} + 2\widehat{BMO} = 2(\widehat{AMO} + \widehat{BMO}) = 2\widehat{AMB}.$$



Examinons le cas est le cas où A et B sont du même côté par rapport à $[MM']$: On remarque que :

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMO} - \widehat{BMO}$$

et

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOM'} - \widehat{BOM'}.$$

Or, ce que nous avons fait dans la première partie pour A, nous pouvons aussi le faire pour B et montrer alors que :

$$2\widehat{BMO} = \widehat{BOM'}.$$

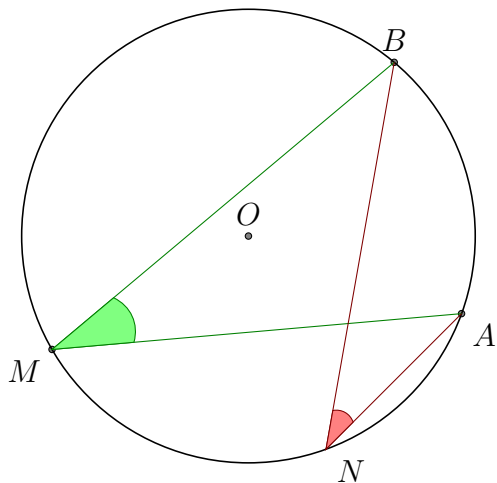
Ainsi, on a :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMO} - 2\widehat{BMO} = 2(\widehat{AMO} - \widehat{BMO}) = 2\widehat{AMB}.$$

Quelle que soit la position des points A et B, on démontre ainsi que :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB},$$

c'est-à-dire que l'angle au centre a une mesure double par rapport à l'angle inscrit qui intercepte le même arc de cercle.



Un corollaire (c'est-à-dire une propriété qui découle) de ce théorème est que :

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$

En effet, à l'aide du théorème, on montre que ces deux angles ont une mesure double de celle de l'angle au centre et qu'en conséquence, ils ont la même mesure.