

DIPLOME NATIONAL DU BREVET

SESSION 2011

* * * * *

MATHÉMATIQUES

SÉRIE COLLÈGE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 h 00

Coefficient 2

Le candidat répondra sur une copie modèle Éducation Nationale.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet et qu'il correspond à votre série.

La page 7/7 est à remettre impérativement avec la copie.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée (*circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999*).

L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé.

I - Activités numériques	12 points
II - Activités géométriques	12 points
III - Problème	12 points
Qualité de rédaction et présentation	4 points

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

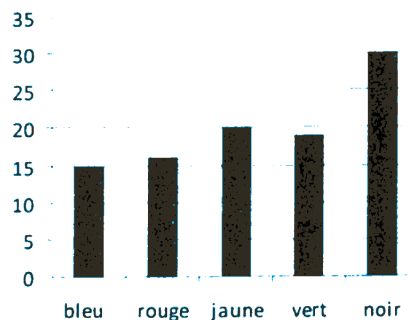
Activités numériques

Exercice 1

Un dé cubique a 6 faces peintes : une en bleu, une en rouge, une en jaune, une en vert et deux en noir.

1. On jette ce dé cent fois et on note à chaque fois la couleur de la face obtenue. Le schéma ci-contre donne la répartition des couleurs obtenues lors de ces cent lancers.

- Déterminer la fréquence d'apparition de la couleur jaune.
- Déterminer la fréquence d'apparition de la couleur noire.



2. On suppose que le dé est équilibré.

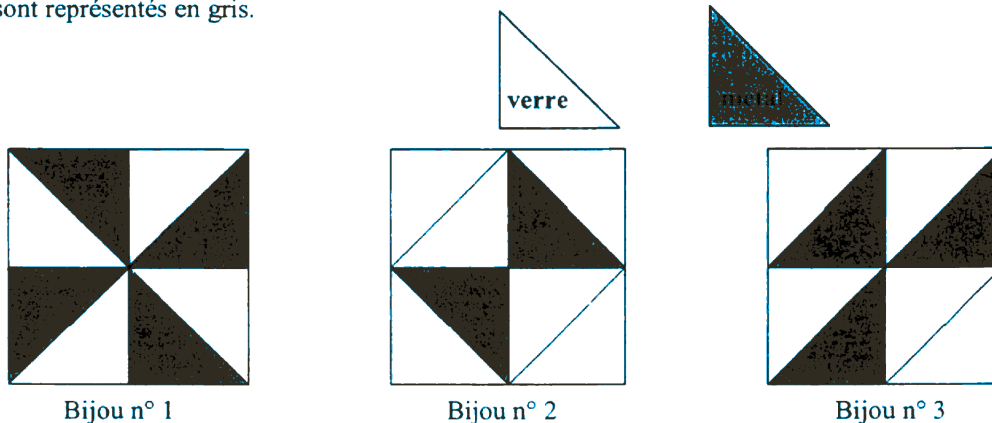
- Quelle est la probabilité d'obtenir la couleur jaune ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir la couleur noire ?

3. Expliquer l'écart entre les fréquences obtenues à la question 1 et les probabilités trouvées à la question 2.

Exercice 2

On fabrique des bijoux à l'aide de triangles qui ont tous la même forme. Certains triangles sont en verre et les autres sont en métal.

Trois exemples de bijoux sont donnés ci-dessous. Les triangles en verre sont représentés en blanc ; ceux en métal sont représentés en gris.



Tous les triangles en métal ont le même prix. Tous les triangles en verre ont le même prix.

Le bijou n° 1 revient à 11 € ; le bijou n° 2 revient à 9,10 €.

A combien revient le bijou n° 3 ?

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Exercice 3

1. Deux affirmations sont données ci-dessous.

Affirmation 1

Pour tout nombre a : $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 9$.

Affirmation 2

Augmenter un prix de 20 % puis effectuer une remise de 20 % sur ce nouveau prix revient à redonner à l'article son prix initial.

Pour chacune, indiquer si elle est vraie ou fausse **en argumentant la réponse**.

2. Deux égalités sont données ci-dessous.

Égalité 1

$$\frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Égalité 2

$$10^5 + 10^{-5} = 10^0$$

Pour chacune, indiquer si elle est vraie ou fausse.

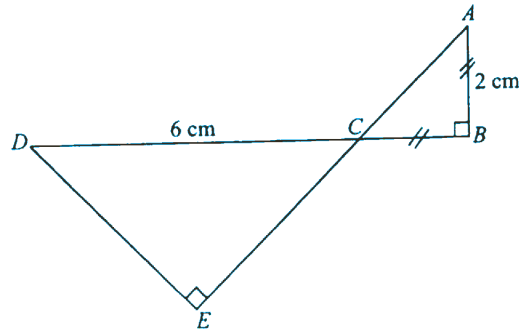
Si elle est vraie, **écrire les étapes des calculs** qui permettent de l'obtenir.

Si elle est fausse, **la transformer pour qu'elle devienne vraie**.

Activités géométriques

Exercice 1

Le dessin ci-contre représente une figure géométrique dans laquelle on sait que :



- ABC est un triangle rectangle en B .
- CED est un triangle rectangle en E .
- Les points A, C et E sont alignés.
- Les points D, C et B sont alignés.
- $AB = CB = 2$ cm.
- $CD = 6$ cm.

Le dessin n'est pas en vraie grandeur.

1. Représenter sur la copie la figure en vraie grandeur.
2. a) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$?
b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DCE}$.
3. Calculer une valeur approchée de DE à 0,1 cm près.
4. Où se situe le centre du cercle circonscrit au triangle DCE ? Tracer ce cercle, que l'on notera $\mathcal{C}$, puis tracer $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle ABC .
5. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points : le point C et un autre point noté M . Les points D, A et M sont-ils alignés ?

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Exercice 2

1. Dessiner un pavé droit en perspective cavalière.
2. Un aquarium a la forme d'un pavé droit de longueur 40 cm, de largeur 20 cm et de hauteur 30 cm.
 - a) Calculer le volume, en cm^3 , de ce pavé droit.
 - b) On rappelle qu'un litre correspond à 1000 cm^3 . Combien de litres d'eau cet aquarium peut-il contenir ?
Aucune justification n'est demandée.

3. Parmi les formules suivantes, recopier celle qui donne le volume, en cm^3 , d'une boule de diamètre 30 cm :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 30^3$$

$$4\pi \times 15^2$$

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 15^3$$

4. Un second aquarium contient un volume d'eau égal aux trois quarts du volume d'une boule de diamètre 30 cm.

On verse son contenu dans le premier aquarium. A quelle hauteur l'eau monte-t-elle ? Donner une valeur approchée au millimètre.



Problème

Une famille envisage d'installer une citerne de récupération d'eau de pluie. Pour pouvoir choisir une installation efficace, la famille commence par déterminer sa capacité à récupérer de l'eau de pluie. Elle estime ensuite ses besoins en eau avant de choisir une citerne.



Partie I - La capacité à recueillir de l'eau de pluie

1. Dans cette partie il s'agit de calculer le volume d'eau de pluie que cette famille peut espérer recueillir chaque année. Dans la ville où réside cette famille, on a effectué pendant onze années un relevé des précipitations. Ces relevés sont donnés dans le tableau suivant.

Années	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Précipitations en litres par mètre carré (ℓ / m^2)	1087	990	868	850	690	616	512	873	810	841	867

- a) En quelle année y a-t-il eu le plus de précipitations ? *Aucune justification n'est demandée.*
 - b) En 2009, combien de litres d'eau sont tombés sur une surface de $5 m^2$?
2. Sur les onze années présentées dans le tableau, quelle est la quantité moyenne d'eau tombée en une année ?
 3. Calculer la surface au sol d'une maison ayant la forme d'un pavé droit (surmonté d'un toit) de 13,9 m de long, 10 m de large et 6 m de haut.
 4. Une partie de l'eau de pluie tombée sur le toit ne peut pas être récupérée. La famille utilise une formule pour calculer le volume d'eau qu'elle peut récupérer :

$$V = P \times S \times 0,9$$

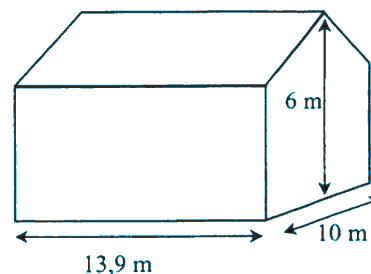
V : volume d'eau captée en litre,

P : précipitations en litre par mètre carré,

S : surface au sol en mètre carré.

Calculer ce volume en litres pour l'année 2009.

Montrer que $108 m^3$ en est une valeur approchée à $1 m^3$ près.



Partie II - Les besoins en eau

La famille est composée de quatre personnes.

La consommation moyenne d'eau par personne et par jour est estimée à 115 litres.

1. Chaque jour, l'eau utilisée pour les WC est en moyenne de 41 litres par personne. Calculer le pourcentage que cela représente par rapport à la consommation moyenne en eau par jour d'une personne.
2. On estime que 60% de l'eau consommée peut être remplacée par de l'eau de pluie. Montrer que les besoins en eau de pluie de toute la famille pour une année de 365 jours sont d'environ 100 m^3 .
3. L'eau de pluie récupérée en 2009 aurait-elle pu suffire aux besoins en eau de pluie de la famille ?

Partie III - Le coût de l'eau

1. Le graphique donné en ANNEXE, page 7/7, représente le coût de l'eau en fonction de la quantité consommée.
 - a) En utilisant ce graphique, déterminer une valeur approchée du prix payé pour 100 m^3 d'eau.
Aucune justification n'est demandée.
 - b) On note $p(x)$ le prix en euros de la consommation pour x mètres cube d'eau. Proposer une expression de $p(x)$ en fonction de x en expliquant la démarche.

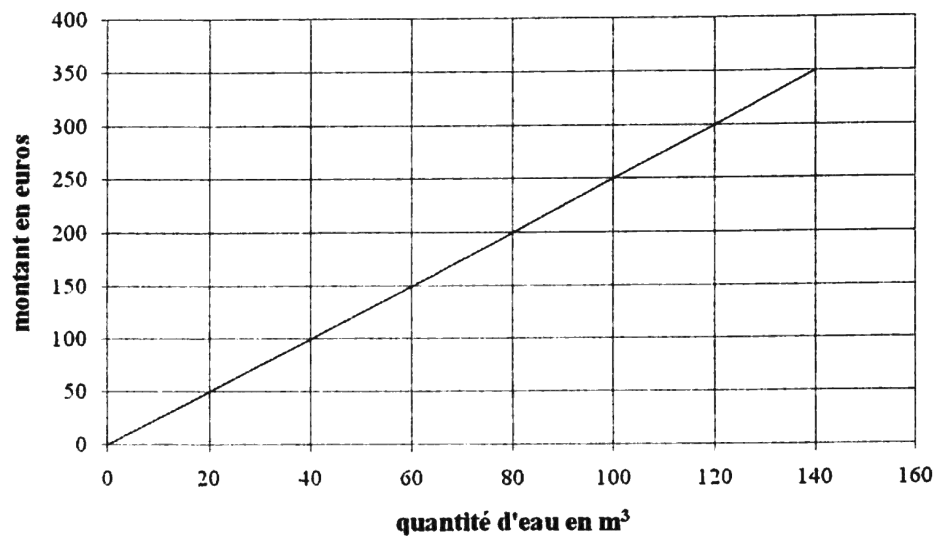
Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.
 - c) Au prix de la consommation vient s'ajouter le prix de l'abonnement. L'abonnement est de 50 euros par an. Représenter sur le même graphique donné en ANNEXE la fonction donnant le prix en euros, abonnement inclus, en fonction du volume d'eau consommé en mètres cube.
2. La famille espère économiser 250 euros par an grâce à la récupération de l'eau de pluie. Elle achète une citerne 910 euros. Au bout de combien d'années les économies réalisées pourront-elles compenser l'achat de la citerne ?

ANNEXE

à rendre avec la copie

Problème

Coût de l'eau



Document réalisé le 30 juin 2012.
Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Si une erreur s'est glissée, n'hésitez pas à me contacter par email :

contact@mathweb.fr

ACTIVITES NUMERIQUES

Exercice 1

1. (a) La fréquence de la couleur jaune est égale à $\frac{20}{100}$, soit à **0,2**, ou $\frac{1}{5}$ si on écrit le résultat sous forme fractionnaire.
(b) La fréquence de la couleur noire est égale à $\frac{30}{100}$, soit à **0,3**, ou $\frac{3}{10}$.
2. Si le dé est équilibré, alors toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître.
(a) La probabilité d'obtenir la couleur jaune est égale à $\frac{1}{6}$ car il n'y a qu'une face jaune sur les 6 faces du dé.
(b) La probabilité d'obtenir la couleur noire est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car il y a deux faces noires sur les 6 faces du dé.
3. On suppose que le dé est équilibré donc la différence entre les fréquences observées et les probabilités ne vient pas du fait que le dé est pipé (bien que cette hypothèse ne soit énoncée qu'à la question 2, on peut supposer qu'elle reste valable pour tout l'exercice).
La différence s'explique alors par le nombre insuffisants de lancers : **il aurait fallu jeter le dé beaucoup plus de fois.**

Exercice 2

Notons :

- x le prix d'un triangle en verre
- y le prix d'un triangle en métal

Alors :

- le prix du bijou n° 1 s'exprime par : $4x + 4y$ et vaut 11 €.
- le prix du bijou n° 2 s'exprime par : $6x + 2y$ et vaut 9,10 €.

On a alors le système suivant :

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 4x + 4y = 11 & (\times 2) \\ 6x + 2y = 9,1 & (\times 4) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 8x + 8y = 22 & (1) \\ 24x + 8y = 36,4 & (2) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 8x + 8y = 22 \\ 16x = 14,4(2)-(1) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 8x + 8y = 22 \\ x = \frac{14,4}{16} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 8x + 8y = 22 \\ x = 0,9 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 8y = 22 - 8x \\ x = 0,9 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 8y = 22 - 7,2 \\ x = 0,9 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 8y = 14,8 \\ x = 0,9 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y = \frac{14,8}{8} \\ x = 0,9 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 1,85 \\ x = 0,9 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, le prix du bijou n° 3 est :

$$5 \times 0,90 + 3 \times 1,85 = 10,05$$

Le prix du bijou n°3 est donc **10,05 €**.

Exercice 3

1. **Affirmation 1** : $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 9$.

Cette affirmation est fausse car en développant $(2a + 3)^2$ à l'aide d'une identité remarquable, on obtient $4a^2 + 9 + 12a$.

Affirmation 2 : Augmenter de 20% puis diminuer de 20% revient au prix initial.

Cette affirmation est fausse. En effet, notons x le prix initial. Après une augmentation de 20%, le prix sera égal à $x + \frac{20}{100}x = 1,2x$.

Le prix final n'est pas égal au prix initial.

3. Le triangle DEC est rectangle en E. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{DCE}) &= \frac{DE}{DC} \\ \Leftrightarrow DE &= \sin(\widehat{DCE}) \times DC \\ \Leftrightarrow DE &= \sin(45^\circ) \times 6 \\ \Leftrightarrow DE &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 \\ \Leftrightarrow DE &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ainsi, **DE $\approx$ 4,2 cm.**

4. Le triangle DCE est rectangle en E donc [DC] est un diamètre du cercle circonscrit à DCE. Ainsi, **le centre du cercle circonscrit au triangle DCE est le milieu du segment [DC]**. Pour le tracé de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, voir figure question 1.

5. Le segment [DC] est un diamètre de $\mathcal{C}$ et M appartient à $\mathcal{C}$.

Tout triangle inscrit dans un cercle dont un côté coïncide avec un diamètre de ce cercle est rectangle en le point extérieur au diamètre.

Ainsi, DMC est un triangle rectangle en M.

Par un raisonnement analogue, on conclut que dans $\mathcal{C}'$, CMA est un triangle rectangle en M.

On a alors :

- (MC) $\perp$ (DM)
- (MC) $\perp$ (MA)

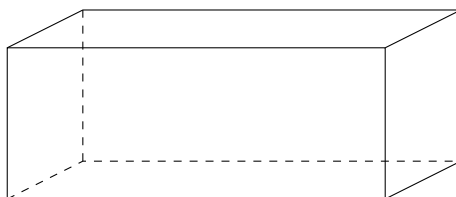
Or, *si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.*

Ainsi, (MA) et (MD) sont parallèles.

Mais elles ont un point en commun : M. Par conséquent, elles sont confondues, ce qui signifie alors que **D, M et A sont alignés.**

Exercice 2

1. Un pavé droit en perspective cavalière est par exemple :



2. (a) Le volume d'un pavé droit est donné par la formule : $\mathcal{V} = L \times \ell \times h$.

$$40 \times 20 \times 30 = 24\,000$$

Ainsi, **le volume de l'aquarium est égal à 24 000 cm³.**

(b) L'aquarium peut alors contenir 24 litres.

3. Le volume d'une boule de rayon r est : $\frac{4}{3}\pi \times r^3$.

Ainsi, le volume d'une boule de diamètre 30 cm (donc de rayon 15 cm) est $\frac{4}{3}\pi \times 15^3$

4. Les trois quarts du volume de l'aquarium en forme de boule est :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\pi \times 15^3 &= 3\,375\pi \\ &\approx 10\,602,875\end{aligned}$$

On cherche donc la valeur de h pour que :

$$40 \times 20 \times h = 10\,602,875$$

Soit :

$$h = \frac{10\,602,875}{800} \approx 13,253$$

Ainsi, la hauteur de l'eau s'élèvera à environ **133 mm**.

PROBLEME

PARTIE I

1. (a) Il y a eu le plus de précipitations en **1999**.

(b) En 2009, il est tombé 867 ℓ/m^2 . Donc, dans 5 m^2 , il est tombé 5 fois plus d'eau, soit **4 335 litres**.

2. On a :

$$\frac{1\,087 + 990 + 868 + 850 + 690 + 616 + 512 + 873 + 810 + 841 + 867}{11} \approx 818,55$$

Ainsi, la quantité moyenne d'eau qui est tombée sur ces 11 années est d'environ **818,55 ℓ/m^2** .

3. La surface au sol est celle d'un rectangle. On a :

$$13,9 \times 10 = 139$$

Ainsi, la surface au sol est égale à **139 m^2** .

4. Si on applique la formule donnée pour 2009, on a :

$$\begin{aligned}V &= 867 \times 139 \times 0,9 \\ &= 108\,461,7 \ell\end{aligned}$$

Or, nous savons que 1 litre est égal à 1 000 cm^3 , donc à 0,001 m^3 . Donc :

$$\begin{aligned}V &= 108\,461,7 \times 0,001 \\ &= 108,461 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Le volume peut donc être arrondi à **108 m^3** .

PARTIE II

1. On a :

$$\frac{41}{115} \times 100 \approx 35,652$$

Ainsi, **le pourcentage d'eau utilisée pour les WC est d'environ 35,66 %**.

2. Si 115 litres sont consommées par jour et par personne, alors, sur 365 jours, on a :

$$365 \times 4 \times 115 = 167\,900$$

Donc la famille consomme 167 900 litres d'eau. Or :

$$\frac{60}{100} \times 167\,900 = 100\,740$$

Donc 100 740 litres d'eau de pluie sont nécessaires, ce qui correspond à 100,74 m³.

Ainsi, **les besoins en eau de pluie sont d'environ 100 m³ pour un an**.

3. Nous avons trouvé dans la partie précédente que le volume d'eau récupéré était de 108 m³.

Ainsi, **en 2009, l'eau récupérée était suffisante puisqu'égale à 108 m³**.

PARTIE III

1. (a) Par lecture graphique, on voit que **100 m³ valent 250 €**.
(b) La représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère. Ainsi, le prix (en euros) est une fonction linéaire de la quantité (en m³). Pour trouver le coefficient directeur, on fait :

$$\frac{250}{100} = 2,5$$

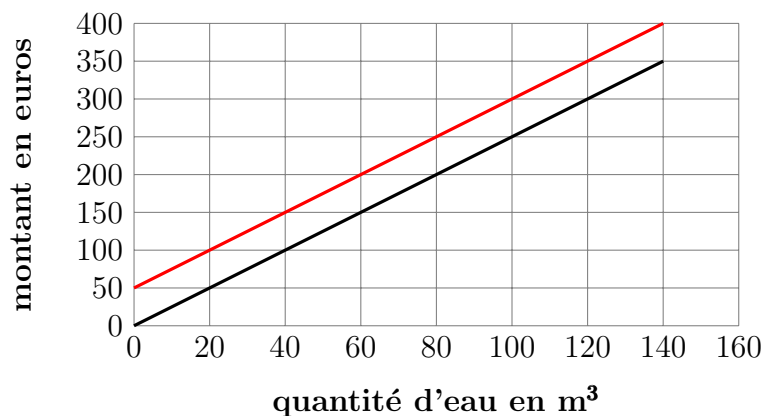
On peut donc proposer comme expression :

$$p(x) = 2,5x$$

- (c) Si l'on ajoute le prix de l'abonnement, la fonction devient affine :

$$50 + 2,5x$$

Sa représentation est alors une droite parallèle à la droite tracée en annexe, passant par le point de coordonnées (0;50). On a alors le graphique suivant (la droite demandée est en rouge) :



2. On a :

$$\frac{910}{250} = 3,64$$

Ainsi, **au bout de 4 années, la famille aura compensé l'achat de la citerne**.