

DIPLÔME NATIONAL DU BREVET

SESSION 2012

★ ★ ★ ★ ★ ★

MATHÉMATIQUES

SÉRIE COLLÈGE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 h 00

Coefficient 2

Le candidat répondra sur une copie Éducation Nationale.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet et qu'il correspond à votre série.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée (*circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999*).

L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé.

I - Activités numériques	12 points
II - Activités géométriques	12 points
III - Problème	12 points
Qualité de rédaction et présentation	4 points

Activités Numériques

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

Exercice 1

Pour chacune des deux questions suivantes, plusieurs propositions de réponse sont faites. Une seule des propositions est exacte.

Aucune justification n'est attendue.

- 1) Alice participe à un jeu télévisé. Elle a devant elle trois portes fermées. Derrière l'une des portes, il y a une voiture ; derrière les autres, il n'y a rien.
Alice doit choisir l'une de ces portes. Si elle choisit la porte derrière laquelle il y a la voiture, elle gagne cette voiture.

Alice choisit au hasard une porte. Quelle est la probabilité qu'elle gagne la voiture ?

- a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3}$ d. On ne peut pas savoir

- 2) S'il y a quatre portes au lieu de trois et toujours une seule voiture à gagner, comment évolue la probabilité qu'a Alice de gagner la voiture ?

- a. augmente b. diminue c. reste identique d. On ne peut pas savoir

Exercice 2

- 1) Quelle est l'écriture décimale du nombre $\frac{10^5 + 1}{10^5}$?

- 2) Antoine utilise sa calculatrice pour calculer le nombre suivant : $\frac{10^{15} + 1}{10^{15}}$. Le résultat affiché est 1.
Antoine pense que ce résultat n'est pas exact. A-t-il raison ?

Exercice 3

Lors d'un marathon, un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après un kilomètre de course, elle lui indique qu'il court depuis quatre minutes et trente secondes.

La longueur officielle d'un marathon est de 42,195 km. Si le coureur garde cette allure tout au long de sa course, mettra-t-il moins de 3 h 30 pour effectuer le marathon ?

Exercice 4

On cherche à résoudre l'équation $(4x - 3)^2 - 9 = 0$.

- 1) Le nombre $\frac{3}{4}$ est-il solution de cette équation ? et le nombre 0 ?

- 2) Prouver que, pour tout nombre x , $(4x - 3)^2 - 9 = 4x(4x - 6)$.

- 3) Déterminer les solutions de l'équation $(4x - 3)^2 - 9 = 0$.

Activités Géométriques

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

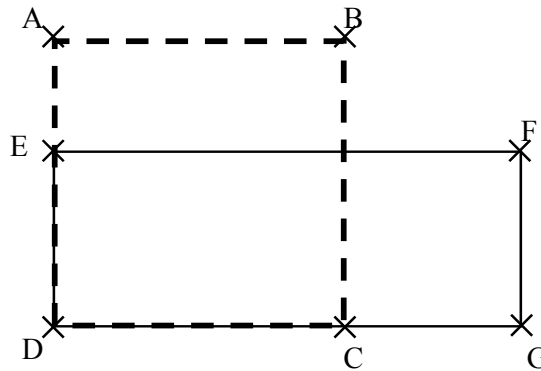
Exercice 1

Le dessin ci-dessous représente une figure composée d'un carré ABCD et d'un rectangle DEFG.

E est un point du segment [AD].

C est un point du segment [DG].

Dans cette figure la longueur AB peut varier mais on a toujours : $AE = 15$ cm et $CG = 25$ cm.



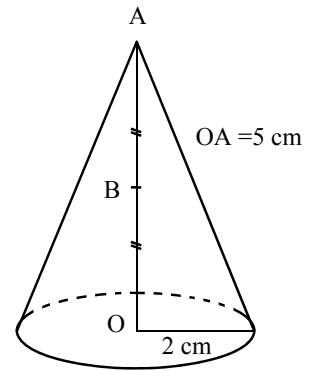
- 1) Dans cette question on suppose que : $AB = 40$ cm
 - a) Calculer l'aire du carré ABCD.
 - b) Calculer l'aire du rectangle DEFG.
- 2) Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG ?

Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Exercice 2

On considère un cône de révolution de hauteur 5 cm et dont la base a pour rayon 2 cm. Le point A est le sommet du cône et O le centre de sa base. B est le milieu de [AO].



- 1) Calculer le volume du cône en cm^3 . On arrondira à l'unité.

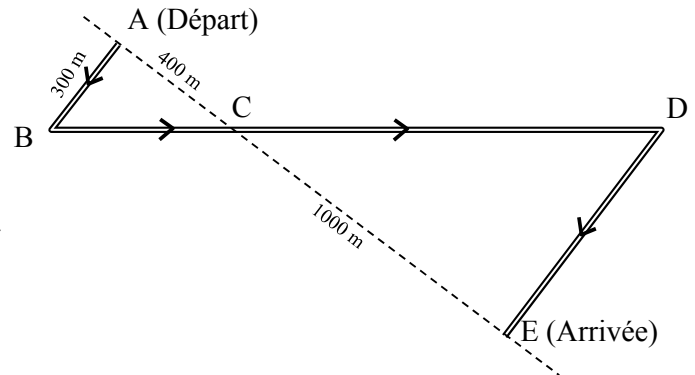
On rappelle que la formule est : $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

où h désigne la hauteur et R le rayon de la base.

- 2) On effectue la section du cône par le plan parallèle à la base qui passe par B. On obtient ainsi un petit cône. Est-il vrai que le volume du petit cône obtenu est égal à la moitié du volume du cône initial ?

Exercice 3

Des élèves participent à une course à pied. Avant l'épreuve, un plan leur a été remis. Il est représenté par la figure ci-contre.



On convient que :

- Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.
- Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
- ABC est un triangle rectangle en A.

Calculer la longueur réelle du parcours ABCDE.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Problème

Les trois parties de ce problème sont indépendantes. Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

PARTIE I

À partir du 2 Janvier 2012, une compagnie aérienne teste un nouveau vol entre Nantes et Toulouse. Ce vol s'effectue chaque jour à bord d'un avion qui peut transporter au maximum 190 passagers.

- 1) L'avion décolle chaque matin à 9 h 35 de Nantes et atterrit à 10 h 30 à Toulouse.
Calculer la durée du vol.
- 2) Le tableau suivant donne le nombre de passagers qui ont emprunté ce vol pendant la première semaine de mise en service. L'information concernant le mercredi a été perdue.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche	Total
Nombre de passagers	152	143		164	189	157	163	1113

- a) Combien de passagers ont emprunté ce vol le mercredi ?
b) En moyenne, combien y avait-il de passagers par jour dans l'avion cette semaine là ?
- 3) À partir du mois de Février, on décide d'étudier la fréquentation de ce vol pendant douze semaines. La compagnie utilise une feuille de calcul indiquant le nombre de passagers par jour. Cette feuille de calcul est donnée en **ANNEXE page 7/7**.
- a) Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule I2 pour obtenir le nombre total de passagers au cours de la semaine 1 ?
b) Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule J2 pour obtenir le nombre moyen de passagers par jours au cours de la semaine 1 ?
- 4) Le nombre moyen de passagers par jour au cours de ces douze semaines est égal à 166. La compagnie s'était fixé comme objectif d'avoir un nombre moyen de passagers supérieur aux 80 % de la capacité maximale de l'avion.

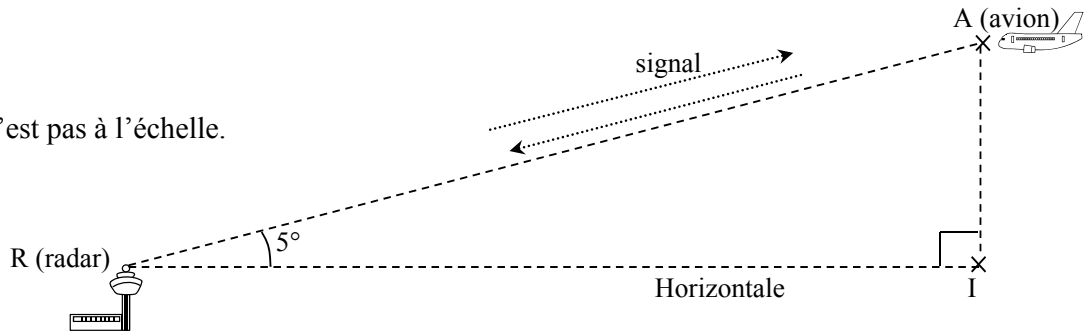
L'objectif est-il atteint ?

PARTIE II

Quand l'avion n'est plus très loin de l'aéroport de Toulouse, le radar de la tour de contrôle émet un signal bref en direction de l'avion. Le signal atteint l'avion et revient au radar 0,0003 secondes après son émission.

- 1) Sachant que le signal est émis à la vitesse de 300 000 kilomètres par seconde, vérifier qu'à cet instant, l'avion se trouve à 45 kilomètres du radar de la tour de contrôle.

Le dessin n'est pas à l'échelle.



- 2) La direction radar–avion fait un angle de 5° avec l'horizontale.
Calculer alors l'altitude de l'avion à cet instant. On arrondira à la centaine de mètres près.
On négligera la hauteur de la tour de contrôle.

PARTIE III

En phase d'atterrissage, à partir du moment où les roues touchent le sol, l'avion utilise ses freins jusqu'à l'arrêt complet. Le graphique en **ANNEXE** représente la distance parcourue par l'avion sur la piste (en mètres) en fonction du temps (en secondes) à partir du moment où les roues touchent le sol. En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :

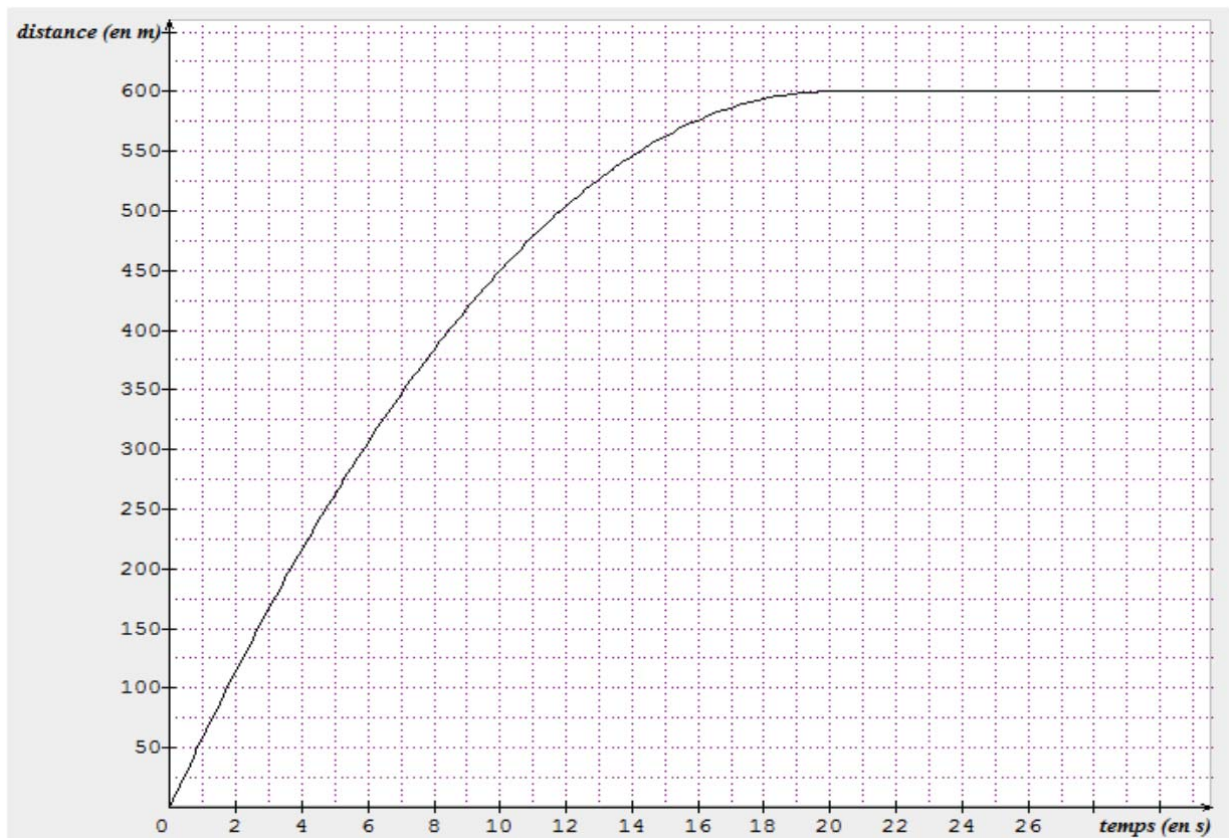
- 1) Quelle distance l'avion aura-t-il parcourue 10 s après avoir touché le sol ?
- 2) Expliquer pourquoi au bout de 22 s et au bout de 26 s la distance parcourue depuis le début de l'atterrissage est la même.
- 3) À partir du moment où les roues touchent le sol, combien de temps met l'avion pour s'arrêter ?

ANNEXE

Problème Partie I

J14	=MOYENNE (J2 : J13)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche	TOTAL	MOYENNE
2	Semaine 1	157	145	142	159	190	156	161	1110	159
3	Semaine 2	147	158	156	141	141	152	155	1050	150
4	Semaine 3	153	148	162	149	160	146	163	1081	154
5	Semaine 4	168	156	162	157	166	158	161	1128	161
6	Semaine 5	163	169	170	162	167	169	162	1162	166
7	Semaine 6	156	167	171	173	165	165	162	1159	166
8	Semaine 7	173	172	168	173	161	162	167	1176	168
9	Semaine 8	168	166	170	173	168	176	165	1186	169
10	Semaine 9	176	175	175	171	172	178	173	1220	174
11	Semaine 10	185	176	172	180	185	171	171	1240	177
12	Semaine 11	178	181	183	172	178	172	173	1237	177
13	Semaine 12	171	183	171	184	172	176	173	1230	176
14								moyenne sur trois mois :		166

Problème Partie III



Document réalisé le 30 juin 2012.
Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Si une erreur s'est glissée, n'hésitez pas à me contacter par email :

contact@mathweb.fr

ACTIVITES NUMERIQUES

Exercice 1

1. La probabilité est égale à $\frac{1}{3}$ car il y a 1 porte derrière laquelle la voiture se trouve sur 3 au total.

Réponse c.

2. Si on augmente le nombre de portes, la probabilité diminuera.

Réponse b.

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned}\frac{10^5 + 1}{10^5} &= \frac{10^5}{10^5} + \frac{1}{10^5} \\ &= 1 + \frac{1}{10^5} \\ &= 1 + 0,00001 \\ &= \underline{1,00001}\end{aligned}$$

2. Un raisonnement analogue à celui qui précède montre l'égalité suivante :

$$\frac{10^{15} + 1}{10^{15}} = 1 + 10^{-15}$$

Ainsi, le résultat n'est pas égal à 1. **Antoine a donc raison.**

Exercice 3

Nous sommes dans une situation de proportionnalité. Nous avons le tableau suivant :

Distance parcourue (en km)	1	42,195
Temps (en minutes)	4,5	x

où x représente le temps (en minutes) qu'il faudra pour parcourir 42,195 km.

$$\begin{aligned}x &= \frac{4,5 \times 42,195}{1} \\&= 189,8775 \text{ min} \\&= \frac{189,8775}{60} \text{ h} \\&\approx 3,16 \text{ h}\end{aligned}$$

Il faudra donc moins de 3h30 pour effectuer le marathon.

Exercice 4

1. Si $x = \frac{3}{4}$, alors :

$$\begin{aligned}(4x - 3)^2 - 9 &= \left(4 \times \frac{3}{4} - 3\right)^2 - 9 \\&= (3 - 3)^2 - 9 \\&= 0^2 - 9 \\&= -9 \\&\neq 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{3}{4}$ n'est pas solution de cette équation.

Si $x = 0$, alors :

$$\begin{aligned}(4x - 3)^2 - 9 &= (4 \times 0 - 3)^2 - 9 \\&= (-3)^2 - 9 \\&= 9 - 9 \\&= 0\end{aligned}$$

Ainsi, 0 est solution de cette équation.

2. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}(4x - 3)^2 - 9 &= (4x - 3)^2 - 3^2 \\&= [(4x - 3) - 3][(4x - 3) + 3] \\&= (4x - 3 - 3)(4x - 3 + 3) \\&= \underline{4x(4x - 6)}\end{aligned}$$

3. D'après l'égalité suivante, et d'après le théorème du produit nul, on a :

$$\begin{aligned}(4x - 3)^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow 4x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x = 6 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions à l'équation « $(4x - 3)^2 - 9 = 0$ » sont $x = 0$ et $x = \frac{3}{2}$.

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Exercice 1

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}AB^2 &= 40^2 \\ &= 1600\end{aligned}$$

Ainsi, l'aire du carré ABCD est 1 600 cm².

(b) On a :

$$\begin{aligned}ED \times EF &= (AD - AE)(DC + CG) \\ &= (40 - 15)(40 + 25) \\ &= 25 \times 65 \\ &= 1625\end{aligned}$$

Ainsi, l'aire du rectangle DEFG est 1 625 cm².

2. Notons x la longueur AB. Si l'aire du carré ABCD est égale à celle du rectangle DEFG, alors :

$$\begin{aligned}AB^2 &= EF \times ED \\ \Leftrightarrow x^2 &= (x + 25)(x - 15) \\ \Leftrightarrow x^2 &= x^2 - 15x + 25x - 25 \times 15 \\ \Leftrightarrow x^2 &= x^2 + 10x - 375 \\ \Leftrightarrow 0 &= 10x - 375 \\ \Leftrightarrow 375 &= 10x \\ \Leftrightarrow 37,5 &= x\end{aligned}$$

Ainsi, il est possible que l'aire du carré ABCD soit égale à celle du rectangle DEFG pour $x = 37,5$ cm.

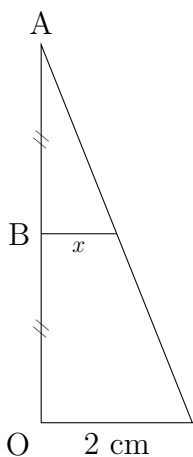
Exercice 2

1. Le volume du cône est :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi R^2 \times OA}{3} \\ &= \frac{\pi \times 2^2 \times 5}{3} \\ &= \frac{20\pi}{3} \\ &\approx 20,94 \end{aligned}$$

Ainsi, le volume du cône est d'à peu près **21 cm³**.

2. Si on fait une coupe transversale, on obtient le schéma suivant :



D'après le théorème des milieux, x est égal à la moitié de 2 cm.

Donc le nouveau cône aura pour base un cercle de rayon 1 cm.

Le volume du petit cône obtenu est donc :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi R^2 \times AB}{3} \\ &= \frac{\pi \times 1^2 \times 2,5}{3} \\ &= \frac{1,5\pi}{3} \\ &\approx 1,57 \end{aligned}$$

Ainsi, le volume n'est pas la moitié de celui du cône précédent.

Exercice 3

Nous savons que le triangle ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\&= 300^2 + 400^2 \\&= 250\,000\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{250\,000} \\&= 500\end{aligned}$$

De plus, nous sommes dans une configuration de Thalès :

- (AB) // (ED)
- A, C et E sont alignés dans cet ordre
- B, C et D sont alignés dans cet ordre

Ainsi, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE}$$

Soit :

$$\frac{400}{1000} \stackrel{(1)}{=} \frac{500}{CD} \stackrel{(2)}{=} \frac{300}{DE}$$

L'égalité (1) nous donne :

$$\begin{aligned}CD &= \frac{1000 \times 500}{400} \\&= 1\,250\end{aligned}$$

L'égalité (2) nous donne :

$$\begin{aligned}DE &= \frac{300 \times 1250}{500} \\&= 750\end{aligned}$$

Et on a donc :

$$\begin{aligned}AB+BC+CD+DE &= 300 + 500 + 1\,250 + 750 \\&= 2\,800\end{aligned}$$

Ainsi, le parcours total a une longueur de 2 800 mètres.

PROBLEME

PARTIE I

1. La durée du vol correspond à la différence entre 10h30 et 9h35, soit **55 minutes**.
2. (a) On a :

$$1\,113 - (152 + 143 + 164 + 189 + 157 + 163) = 1\,113 - 968 \\ = 145$$

Ainsi, **il y avait 145 passagers dans le vol du mercredi**.

- (b) Calculons la moyenne de passagers :

$$\frac{1\,113}{7} = 159$$

Ainsi, **en moyenne, il y a avait 159 passagers par jour cette semaine là**.

3. (a) Dans la cellule I2, on a rentré la formule : `=SOMME(B2:H2)`.
(b) Dans la cellule J2, on peut rentrer la formule : `=MOYENNE(B2:H2)` mais on peut aussi saisir la formule : `=I2/7`.
4. La capacité totale d'un avion est 190 passagers. Calculons 80% de 190 :

$$190 \times \frac{80}{100} = 152$$

166 étant supérieur à 152, la compagnie a atteint ses objectifs.

PARTIE II

1. Nous sommes dans une situation de proportionnalité. Nous pouvons alors construire le tableau suivant :

Distance parcourue (en km)	300 000	$2x$
Temps (en secondes)	1	0,0003

où x représente la distance de l'avion à la tour (le signal parcourt deux fois la distance). Ainsi :

$$2x = \frac{300\,000 \times 0,0003}{1} \\ 2x = 90$$

D'où :

$$x = \frac{90}{2} \\ x = 45$$

L'avion se trouve donc à 45 km de la tour.

2. Dans le triangle RAI rectangle en I, on a :

$$\begin{aligned}\sin(5^\circ) &= \frac{AI}{AR} \\ \Leftrightarrow AI &= AR \times \sin(5^\circ) \\ \Leftrightarrow AI &= 45\,000 \sin(5^\circ) \\ \Leftrightarrow AI &\approx 3\,922\end{aligned}$$

Ainsi, la hauteur à laquelle se trouve l'avion est d'à peu près **3 922 mètres**.

PARTIE III

1. La distance qu'aura parcourue l'avion au bout de 10 secondes est **450 mètres**.
Pour le lire sur le graphique, on regarde l'ordonnée du point de la courbe qui a pour abscisse 10.
2. On peut dire qu'à 22 secondes et 26 secondes, **l'avion est arrêté**. C'est la raison pour laquelle les distances sont les mêmes.
3. On voit que la courbe se stabilise à partir de 20 secondes.
Il faut donc 20 secondes à l'avion pour s'arrêter.