

SUJET AMÉRIQUE DU NORD 2013

Stéphane PASQUET

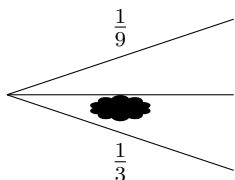
<http://www.mathweb.fr>

La présentation et la rédaction sont notées sur 4 points.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des quatre questions suivantes, plusieurs propositions de réponse sont faites. Une seule des propositions est exacte. Aucune justification n'est attendue. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse rapporte 0 point. Reporter sur votre copie le numéro de la question et donner la bonne réponse.

- 1 L'arbre ci-dessous est un arbre de probabilité. La probabilité manquante sous la tache est :



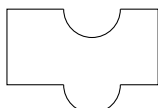
- a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{5}{9}$

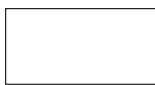
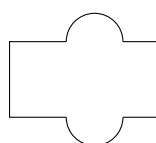
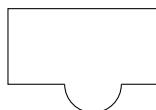
- 2 Dans une salle, il y a des tables à 3 pieds et à 4 pieds. Léa compte avec les yeux bandés 169 pieds. Son frère lui indique qu'il y a 34 tables à 4 pieds. Sans enlever son bandeau, elle parvient à donner le nombre de tables à 3 pieds qui est de :

- a) 135 b) 11 c) 166

- 3 90 % du volume d'un iceberg est situé sous la surface de l'eau. La hauteur totale d'un iceberg dont la partie visible est 35 m est d'environ :

- a) 350 m b) 3 500 m c) 31,5 m

- 4  a le même périmètre que :

- a)  b)  c) 

Exercice 2 (4 points)

Arthur vide sa tirelire et constate qu'il possède 21 billets.

Il a des billets de 5 € et des billets de 10 € pour une somme totale de 125 €.

Combien de billet de chaque sorte possède-t-il ?

Si le travail n'est pas terminé, laisse tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 3 (6 points)

Caroline souhaite s'équiper pour faire du roller.

Elle a le choix entre une paire de rollers gris à 87 € et une paire de rollers noirs à 99 €.

Elle doit aussi acheter un casque et hésite entre trois modèles qui coûtent respectivement 45 €, 22 € et 29 €.

- 1 Si elle choisit son équipement (un casque et une paire de rollers) au hasard, quelle est la probabilité pour que l'ensemble lui coûte moins de 130 € ?
- 2 Elle s'aperçoit qu'en achetant la paire de rollers noirs et le casque à 45 €, elle bénéficie d'une réduction de 20 % sur l'ensemble.
 - (a) Calculer le prix en euros et centimes de cet ensemble après réduction.
 - (b) Cela modifie-t-il la probabilité obtenue à la question 1 ? Justifier la réponse.

Exercice 4 (5 points)

Flavien veut répartir la totalité des 760 dragées au chocolat et 1 045 dragées aux amandes dans des sachets ayant la même répartition de dragées au chocolat et amandes.

- 1 Peut-il faire 76 sachets ?
- 2
 - (a) Quel nombre maximal de sachets peut-il réaliser ?
 - (b) Combien de dragées de chaque sorte y aura-t-il dans chaque sachet ?

Exercice 5 (4 points)

Tom doit calculer $3,5^2$.

« Pas la peine de prendre la calculatrice » lui dit Julie. Tu n'as qu'à effectuer le produit de 3 par 4 et rajouter 0,25.

- 1 Effectuer le calcul proposé par Julie et vérifier que le résultat obtenu est bien le carré de 3,5.
- 2 Proposer une façon simple de calculer $7,5^2$ et donner le résultat.
- 3 Julie propose la conjecture suivante : $(n + 0,5)^2 = n(n + 1) + 0,25$.
 n est un nombre entier positif.
Prouver que la conjecture de Julie est vraie (quel que soit le nombre n).

Exercice 6 (4 points)

On dispose d'un carré de métal de 40 cm de côté. Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on enlève à chaque coins un carré de côté x et on relève les bords par pliage.

- 1 Quelles sont les valeurs possibles de x ?
- 2 On donne $x = 5$ cm. Calculez le volume de la boîte.

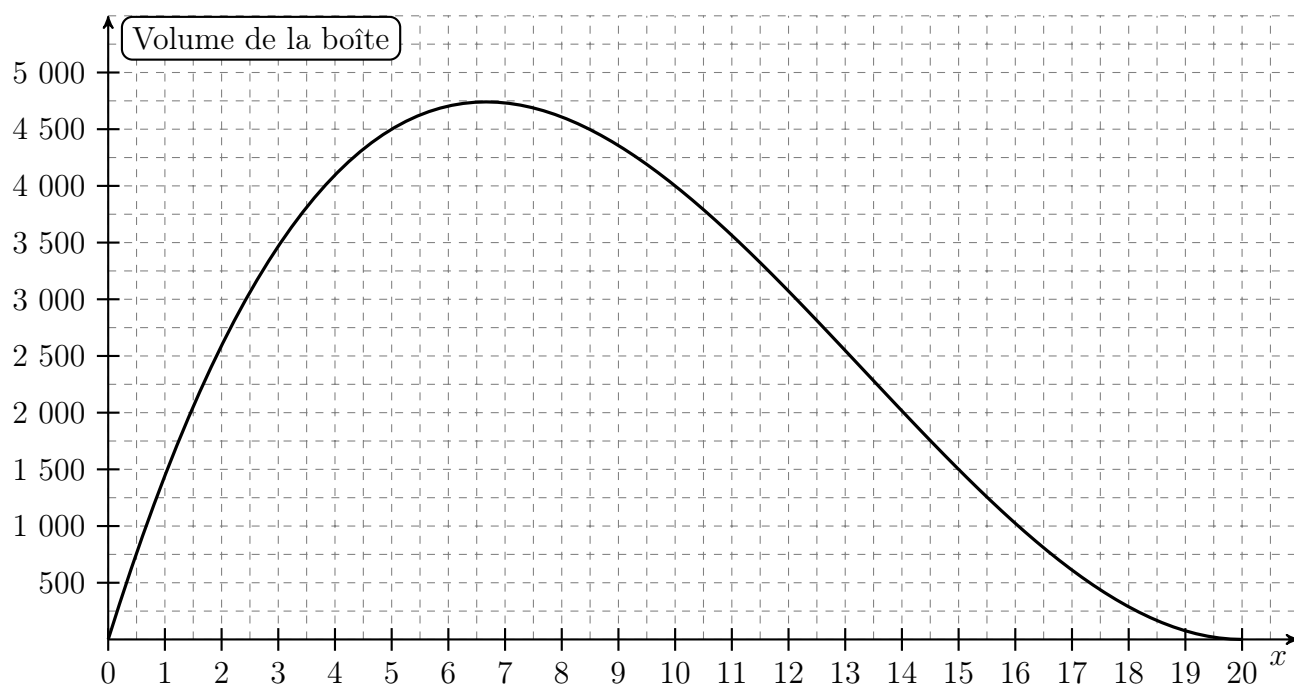
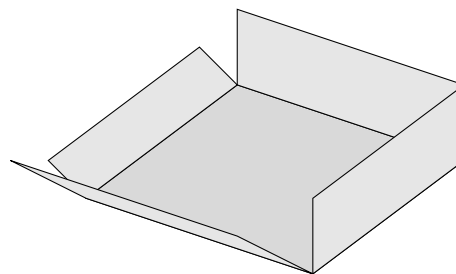
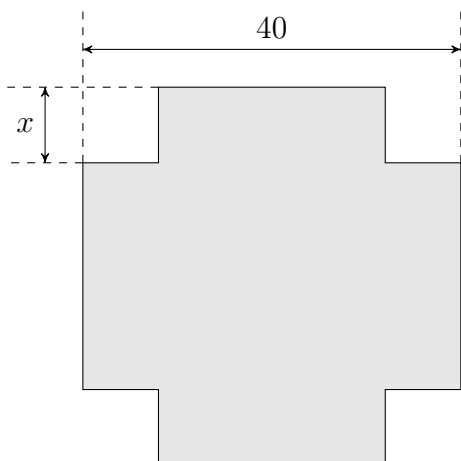
3 Le graphique suivant donne le volume de la boîte en fonction de la longueur x .

On répondra aux questions à l'aide du graphique.

(a) Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximum ?

(b) On souhaite que le volume de la boîte soit 2 000 cm³.

Quelles sont les valeurs possibles de x ?

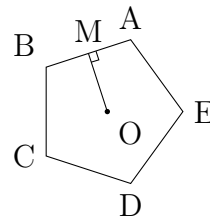


Exercice 7 (5 points)

Le Pentagone est un bâtiment hébergeant le ministère de la défense des Etats-Unis.

Il a la forme d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $OA = 238$ m.

Il est représenté par le schéma ci-contre.

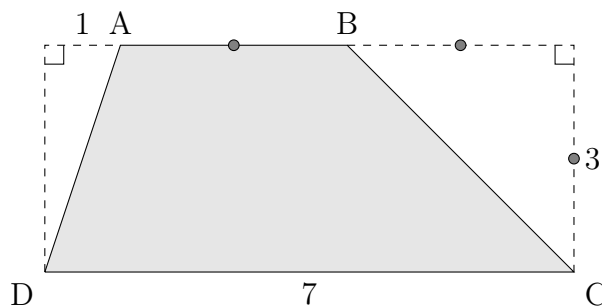


- 1 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
- 2 La hauteur issue de O dans le triangle AOB coupe le côté $[AB]$ au point M.
 - (a) Justifier que (OM) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de $[AB]$.
 - (b) Prouver que $[AM]$ mesure environ 140 m.
 - (c) En déduire une valeur approchée du périmètre du Pentagone.

Exercice 8 (4 points)

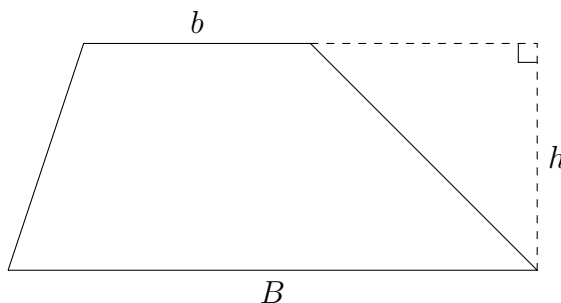
Les longueurs sont données en centimètres.
ABCD est un trapèze.

- 1
 - (a) Donner une méthode permettant de calculer l'aire du trapèze ABCD.
 - (b) Calculer l'aire de ABCD.



- 2 *Dans cette question, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.*

L'aire d'un trapèze A est donnée par l'une des formules suivantes.
Retrouver la formule juste en expliquant votre choix.



$$A = \frac{(b \cdot B)h}{2}$$

$$A = \frac{(b + B)h}{2}$$

$$A = 2(b + B)h$$

CORRECTION

Exercice 1 (4 points)

- 1** La somme des probabilités doit être égale à 1. Donc $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + x = 1$, soit $x = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$.

Réponse c.

- 2** $34 \times 4 + 3x = 169$, où x représente le nombre de table à 3 pieds.

On a donc : $136 + 3x = 169$, soit $3x = 169 - 136$, donc $3x = 33$. Ainsi, $x = 11$.

Réponse b.

- 3** 35 m représente 10 % de la hauteur h de l'iceberg. Donc $\frac{10}{100}h = 35$, soit $\frac{h}{10} = 35$. Donc $h = 350$.

Réponse a.

- 4** Réponse b.

Exercice 2 (4 points)

Posons x le nombre de billets de 5 € et y le nombre de billets de 10 €.

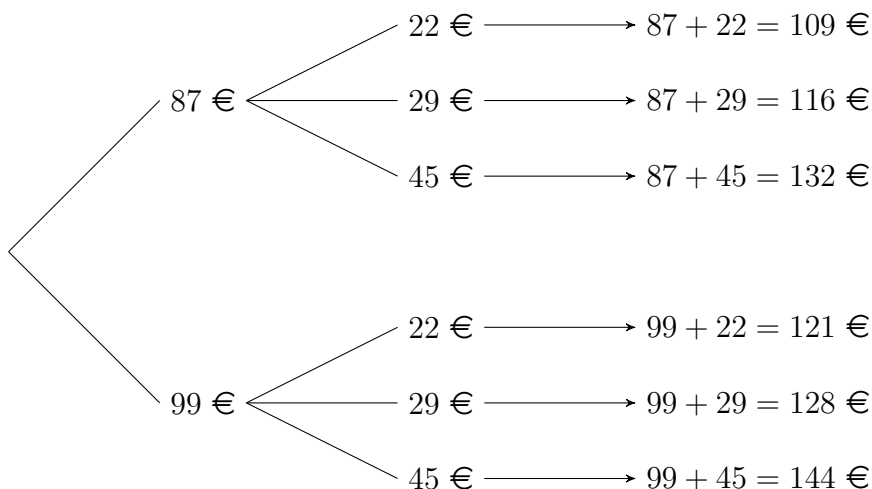
On a alors le système :

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 21 \\ 5x + 10y = 125 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{Nombre total de billets} \\ \text{Somme totale en euros} \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} 5x + 5y = 105 \\ 5x + 10y = 125 \end{array} \right. & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} 5x + 5y = 105 \\ 5y = 20 \end{array} \right. & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 21 - y \\ y = 4 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = 21 - 4 \\ y = 4 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 17 \\ y = 4 \end{array} \right. \end{array} \end{array}$$

Il y a donc 17 billets de 5 € et 4 billets de 10 €.

Exercice 3 (6 points)

- 1 L'arbre des événements est le suivant :



Sur les 6 sommes totales, il y en a 4 qui sont inférieures à 130 €.

La probabilité pour que l'ensemble lui coûte moins de 130 € est égale à $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$.

- 2 (a) Le prix « normal » est :

$$99 + 45 = 144 \text{ €}$$

De plus,

$$\frac{20}{100} \times 144 = \frac{144}{5} = 28,8$$

et :

$$144 - 28,8 = 115,2.$$

Ainsi, l'ensemble coûtera après réduction 115,20 €.

- (b) Ce résultat modifie en effet la probabilité car on obtient une somme inférieure à 130 € alors que la somme avant réduction était supérieure à 130 €.

Exercice 4 (5 points)

- 1 76 est un diviseur de 760 (car $760 = 76 \times 10$) mais ce n'est pas un diviseur de 1 045 (car $1\,045 \div 76 = 13,75$).

Donc Flavien ne pourra pas faire 76 sachets.

- 2 (a) Calculons le PGCD de 760 et 1 045 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$1\,045 = 1 \times 760 + 285$$

$$760 = 2 \times 285 + 190$$

$$285 = 1 \times 190 + 95$$

$$190 = 2 \times 95 + 0$$

Ainsi, $\text{pgcd}(1\,045; 760) = 95$.

Flavien pourra donc faire au maximum 95 sachets.

(b) $\frac{760}{95} = 8$ et $\frac{1\,045}{95} = 11$.

Ainsi, il pourra faire des sachets où il y aura 8 dragées au chocolat et 11 dragées aux amandes.

Exercice 5 (5 points)

1 $3 \times 4 + 0,25 = 12 + 0,25 = 12,25$.

La calculatrice nous donne : $3,5^2 = 12,25$.

Le calcul de Julie est donc juste.

2 $7,5^2 = 7 \times (7 + 1) + 0,25 = 7 \times 8 + 0,25 = 56,25$.

3 $(n + 0,5)^2 = n^2 + 2 \times n \times 0,5 + 0,5^2$
 $= n^2 + n + 0,25$
 $= n(n + 1) + 0,25$.

La conjecture est donc vraie.

Exercice 6 (4 points)

1 Comme sur un côté on enlève deux carrés de côté x , x ne peut pas dépasser la moitié de 40. Donc, il faut que $x \leq 20$.

2 Le volume de la boîte se calcule avec la formule :

$$V = \ell \times L \times h$$

Soit :

$$\begin{aligned} V &= (40 - 2 \times 5)^2 \times 5 = 30^2 \times 5 \\ &= 900 \times 5 \\ &= 4\,500 \end{aligned}$$

Le volume de la boîte est donc égal à 4 500 cm².

3 (a) La courbe atteint son maximum pour $x = 6,5$.

(b) On regarde les points de la courbe qui ont une ordonnée égale à 2 000 ; on voit alors que les abscisses possibles sont $x = 1,5$ ou $x = 14$.

Exercice 7 (5 points)

1 $\widehat{\text{AOB}} = \frac{360}{5} = 72$. En effet, l'angle au centre (360° doit être divisé par 5).

Ainsi, **$\widehat{\text{AOB}} = 72^\circ$.**

2 (a) AOM est isocèle en O. Or, dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet principal est confondu avec la médiatrice du côté opposé.

Ainsi, la bissectrice de $\widehat{\text{AOB}}$ est aussi la médiatrice de [AB].

(b) Dans le triangle AMO rectangle en M, on a :

$$\sin \widehat{AOM} = \frac{AM}{AO}$$

soit :

$$\sin 36 = \frac{AM}{238}$$

ou encore :

$$AM = 238 \sin 36 \approx 139,89$$

On peut alors dire que AM mesure à peu près 140 mètres.

(c) On a :

$$AM \times 10 = 1\,400$$

Le périmètre du Pentagone est donc égal à 1 400 mètres.

Exercice 8 (4 points)

- 1** (a) On peut calculer l'aire du trapèze ABCD en calculant l'aire du rectangle de dimensions 7 et 3 et en lui soustrayant l'aire des deux triangles rectangles aux coins.

(b) On a :

$$\begin{aligned} & 7 \times 3 - \frac{1 \times 3}{2} - \frac{3 \times 3}{2} \\ &= 21 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \\ &= 21 - \frac{12}{2} \\ &= 21 - 6 \\ &= 15 \end{aligned}$$

L'aire du trapèze ABCD est donc égale à 15 cm².

- 2** En s'inspirant de la question précédente, on peut dire que l'aire d'un trapèze est :

$$B \times h - \frac{(B - b) \times h}{2}$$

En effet, on soustrait à l'aire du rectangle la somme des aires des triangles rectangles, soit $\frac{a \times h}{2} + \frac{c \times h}{2} = \frac{(a + c) \times h}{2}$, en convenant de noter a et c les côtés des triangles rectangles autres que celui de mesure h .

Or, $a + c + b = B$, donc $a + c = B - b$. Donc l'aire des deux triangles rectangles est $\frac{(B - b) \times h}{2}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A &= B \times h - \frac{(B - b) \times h}{2} \\ &= h \left(B - \frac{B - b}{2} \right) \\ &= h \left(\frac{2B - B + b}{2} \right) \\ &= \frac{(B + b)h}{2} \quad (2^{\text{e}} \text{ réponse}) \end{aligned}$$