

SUJET D'ENTRAÎNEMENT AU BREVET DES COLLEGES

Stéphane PASQUET

*Si vous souhaitez posséder ce sujet sans le fond de page, contactez-moi :
contact@mathweb.fr*

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

Exercice 1

Voici un programme de calculs :

- Choisir un nombre
- Ajouter 5 à ce nombre
- Élever au carré le résultat obtenu
- Soustraire 49 au dernier résultat

1. Quel est le résultat de ce programme de calculs si l'on choisit le nombre 3 au début ?
2. On décide de noter x le nombre choisi.
 - (a) Quelle est l'expression littérale développée qui donne le résultat final ?
 - (b) Quelle est l'expression littérale factorisée qui donne le résultat final ?
3. On pose $A = (x - 2)(x + 12)$.
Pour quelles valeurs de x a-t-on $A = 0$?
Que cela représente-t-il pour le programme de calculs précédent ?

Exercice 2

1. On considère les deux expressions suivantes :

$$A = \left(\frac{\frac{1}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{11}{5}} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{2}{3} \quad ; \quad B = \frac{18 \times (10^{-2})^3}{10^{-8} \times 6 \times 10^2}$$

- (a) Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
 - (b) Vérifier que B est un nombre entier. Écrire toutes les étapes du calcul.
 - (c) Évariste stipule que B est l'opposé de A . Est-ce exact ? Justifier.
2. On considère l'expression suivante :

$$C = \sqrt{405} + 2\sqrt{320} - \sqrt{500}$$

Mettre C sous la forme $a\sqrt{5}$, où a est un entier relatif.

Exercice 3

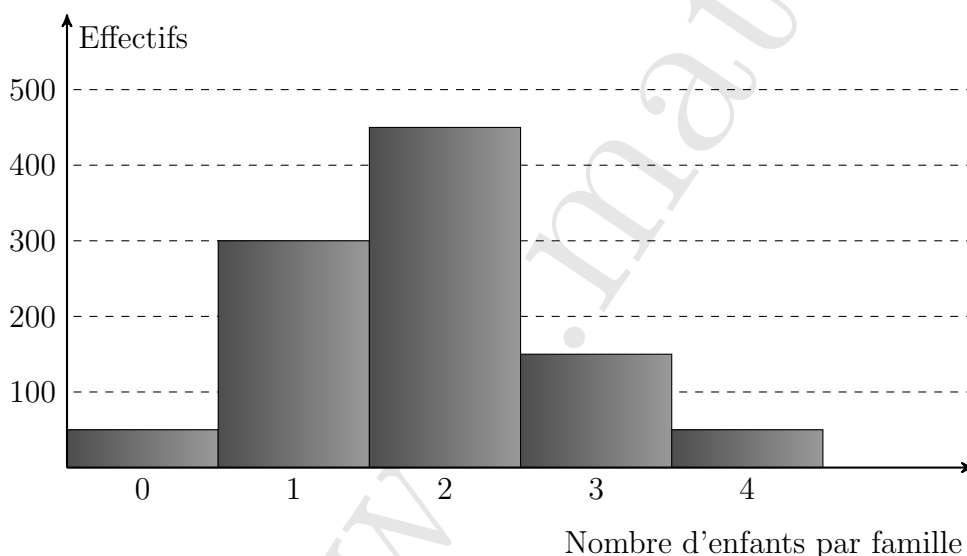
Un chocolatier désire préparer un assortiment de chocolats blancs et chocolats noirs, qu'il mettra dans des boîtes.

Pour cela, il dispose en tout de 3036 chocolats noirs et 1056 chocolats blancs et il souhaite tous les utiliser.

1. Combien de boîtes pourra-t-il constituer ?
2. Calculer le nombre de chocolats noirs et de chocolats blancs qu'il y aura dans chacune des boîtes.

Exercice 4

Nous avons représenté ci-dessous l'histogramme représentant le nombre d'enfants par couple d'un village :



1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre d'enfants par famille	0	1	2	3	4
Effectif					
Effectif cumulé croissant					

2. Quelle est la médiane du nombre d'enfants par famille dans ce village ?
3. Quelle est la moyenne du nombre d'enfants par famille dans ce village ?
4. Quelle est la fréquence du nombre d'enfants par famille inférieur ou égal à 2 ?

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 6,8$ cm et $BC = 5,1$ cm.

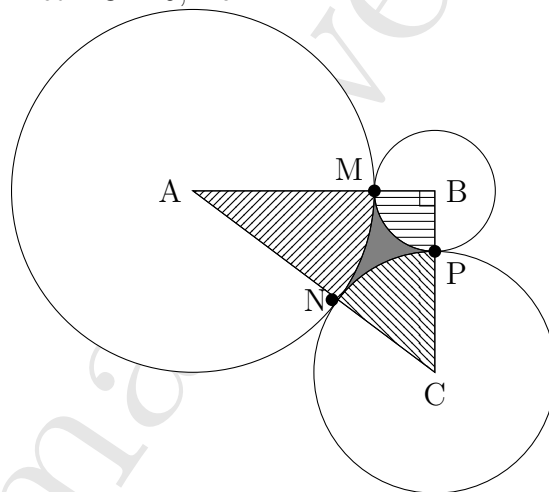
On souhaite tracer trois cercles :

- un cercle $\mathcal{C}_A$, de centre A,
- un cercle $\mathcal{C}_B$, de centre B,
- un cercle $\mathcal{C}_C$, de centre C,

de sorte que :

- $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ ait un seul point d'intersection, noté M,
- $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_C$ ait un seul point d'intersection, noté N,
- $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ ait un seul point d'intersection, noté P,

comme l'illustre la figure ci-contre.

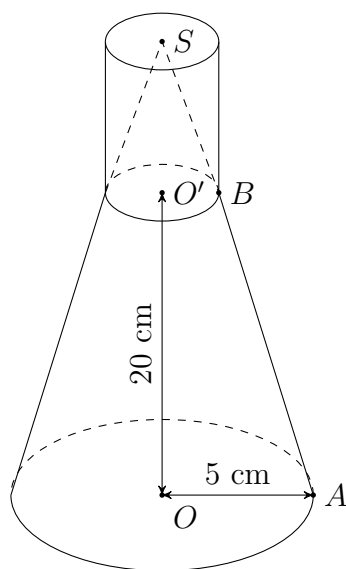


1. Calculer AC.
2. On note x le rayon de $\mathcal{C}_A$ et y celui de $\mathcal{C}_B$.
Montrer que l'on a le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 6,8 \\ x - y = 3,4 \end{cases}$$

3. Résoudre ce système.
4. Déterminer une valeur approchée (au degré près) de l'angle $\widehat{ACB}$.
En déduire une valeur approchée (au degré près) de l'angle $\widehat{CAB}$.
5. À l'aide de la proportionnalité, déterminez une valeur approchée au dixième de l'aire des surfaces hachurées BPM, AMN et CPN.
On rappelle que l'aire d'un disque de rayon r est donnée par la formule : πr^2 .
6. En déduire l'aire de la partie grisée entre les trois cercles.

Exercice 2



La carafe ci-contre est formée d'un morceau de cône (de sommet S) surmonté d'un cylindre.

- Le rayon de la base du tronc de cône est égal à 5 cm ;
- Le rayon de la base du cylindre est égal à 1 cm ;
- La hauteur du tronc du cône est égale à 20 cm ;

O , O' et S sont les centres des différentes bases comme l'indique la figure ci-contre. Toutes les bases sont parallèles.

On donnera les résultats exacts, sauf pour la question 4.

1. Déterminer la longueur OS .
2. (a) En déduire le volume du cône non tronqué.
(b) Calculer alors le volume du cône tronqué.
3. Calculer le volume du cylindre.
4. Quel est alors le volume de la carafe ? Vous arrondirez le résultat au cm^3 près.
Quelle fraction de litre cela représente-t-il ?

Exercice 3

On considère un triangle ABC tel que :

- $AB = 5$ cm ;
- $BC = 7$ cm ;
- $AC = 9$ cm.

Soit I le milieu de $[AC]$ et soit D le point d'intersection des droites (BI) et de la droite parallèle à (AB) passant par C .

1. Montrer que ABC n'est pas un triangle rectangle.
2. Faites une figure.
3. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

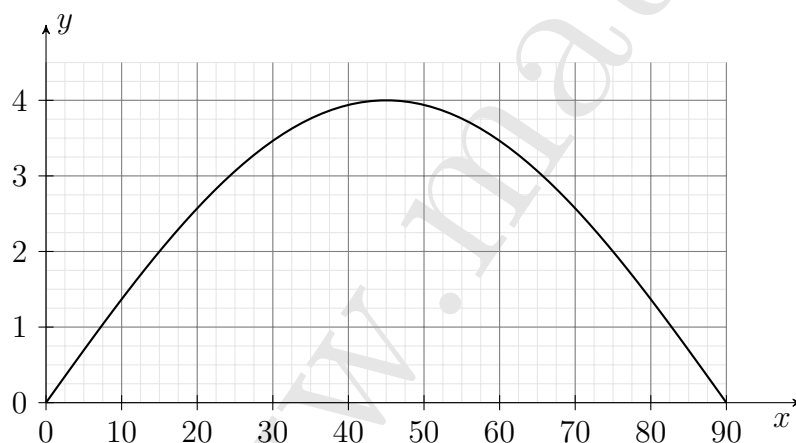
PROBLÈME

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, avec $AB = 8$ cm.

On considère alors un point M sur $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{BAC} = x$, angle exprimé en degrés.

Soit H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC .

1. Faites une figure en prenant $x = 30^\circ$.
2. Démontrer que le triangle ABC est toujours rectangle, quelle que soit la valeur de x .
3. Justifiez l'égalité : $\widehat{HOC} = 2x$.
4. Montrer alors que $CH = 4 \sin(2x)$.
5. On note $f(x)$ l'aire du triangle ABC .
Montrer que $f(x) = 16 \sin(2x)$.
6. Nous avons représenté ci-dessous la représentation de la fonction f :



- (a) Trouver graphiquement la valeur de l'aire du triangle ABC quand $x = 30^\circ$.
- (b) D'après cette courbe, pour quelle valeur de x l'aire du triangle ABC est-elle maximale ?
- (c) Existe-t-il une valeur de x autre que zéro telle que l'aire du triangle ABC soit égale au vingtième de cette valeur ? Si oui, en préciser une valeur approchée.

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES : CORRECTION

Exercice 1

1. On choisit le nombre « 3 » ; alors, le programme de calculs donne :

- On choisit : 3
- $3 + 5 = 8$
- $8^2 = 64$
- $64 - 49 = 15$

2. (a) Le programme de calculs donne, pour un nombre x quelconque :

- On choisit : x
- $x + 5$
- $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
- $x^2 + 10x + 25 - 49 = x^2 + 10x - 24$

Ainsi, l'expression littérale développée donnant le résultat final est :

$$x^2 + 10x - 24$$

(b) Nous l'avons vu dans la réponse précédente, une expression du résultat est :

$$(x + 5)^2 - 49$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}(x + 5)^2 - 49 &= (x + 5)^2 - 7^2 \\ &= [(x + 5) - 7][(x + 5) + 7] \\ &= (x + 5 - 7)(x + 5 + 7) \\ &= (x - 2)(x + 12)\end{aligned}$$

Ainsi, l'expression littérale factorisée donnant le résultat final est :

$$(x - 2)(x + 12)$$

3. Résolvons l'équation $A = 0$, soit $(x - 2)(x + 12) = 0$.

« Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. »

Ainsi, nous avons :

$$\begin{array}{lll}x - 2 = 0 & \text{ou} & x + 12 = 0 \\ x = 2 & \text{ou} & x = -12\end{array}$$

L'ensemble des solutions à l'équation $A = 0$ est donc :

$$S = \{-12 ; 2\}$$

A représente la forme factorisée de l'expression qui donne le résultat final du programme de calculs ; ainsi, ces solutions représentent les valeurs que l'on peut prendre au début pour obtenir un résultat égal à 0.

Exercice 2

$$\begin{aligned} 1. \quad (a) \quad A &= \left(\frac{\frac{1}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{11}{5}} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{\frac{4}{20} - \frac{15}{20}}{\frac{11}{5}} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{-\frac{11}{20}}{\frac{11}{5}} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(-\frac{11}{20} \times \frac{5}{11} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ A &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad C &= \sqrt{405} + 2\sqrt{320} - \sqrt{500} \\ &= \sqrt{5 \times 81} + 2\sqrt{5 \times 64} - \sqrt{5 \times 100} \\ &= \sqrt{5 \times 9^2} + 2\sqrt{5 \times 8^2} - \sqrt{5 \times 10^2} \\ &= 9\sqrt{5} + 2 \times 8\sqrt{5} - 10\sqrt{5} \\ C &= 15\sqrt{5} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Nous allons calculer PGCD(3 036 ; 1 056) à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE :

$$3\,036 = 2 \times 1\,056 + 924$$

$$1\,056 = 1 \times 924 + 132$$

$$924 = 7 \times 132 + 0$$

Ainsi, PGCD(3 036 ; 1 056) = 132.

Le chocolatier pourra donc constituer 132 boîtes.

$$2. \quad \frac{3\,036}{132} = 23 \text{ et } \frac{1\,056}{132} = 8.$$

Ainsi, il y aura 23 chocolats noirs et 8 chocolats blancs dans chacune des boîtes.

$$\begin{aligned} (b) \quad B &= \frac{18 \times (10^{-2})^3}{10^{-8} \times 6 \times 10^2} \\ &= \frac{18 \times 10^{-2 \times 3}}{6 \times 10^{-8+2}} \\ &= \frac{18}{6} \times \frac{10^{-6}}{10^{-6}} \\ B &= 3 \end{aligned}$$

(c) Nous constatons que B est l'inverse de A , et non son opposé.

Exercice 4

1. Le tableau complété est le suivant :

Nombre d'enfants par famille	0	1	2	3	4
Effectif	50	300	450	150	50
Effectif cumulé croissant	50	350	800	950	1 000

2. La moitié de l'effectif total est égale à 500. On atteint ce nombre pour 2 enfants.

Donc la médiane est égale à 2.

3. La moyenne du nombre d'enfant se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{0 \times 50 + 1 \times 300 + 2 \times 450 + 3 \times 150 + 4 \times 50}{1\,000} \\ \bar{x} &= \frac{1\,850}{1\,000} \\ \bar{x} &= 1,85\end{aligned}$$

4. L'effectif cumulé croissant correspondant à 2 enfants est 800.

$$\frac{800}{1\,000} = 0,8$$

Par conséquent, la fréquence du nombre d'enfants par famille inférieur ou égal à 2 est 0,8.

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES : CORRECTION

Exercice 1

1. Le triangle ABC est rectangle en B ; ainsi, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\&= 6,8^2 + 5,1^2 \\&= 46,24 + 26,01 \\&= 72,25 \\AC &= \sqrt{72,25} \\AC &= 8,5\end{aligned}$$

Ainsi, $AC = 8,5$ cm.

2. D'après la construction, $AM + MB = AB$, donc $x + y = 6,8$, d'où la première équation du système.
De plus :

$$\begin{aligned}CP &= CN \\CB - BP &= AC - AN \\5,1 - y &= 8,5 - x\end{aligned}$$

En réordonnant les termes de cette dernière équation, on a :

$$x - y = 8,5 - 5,1$$

Soit :

$$x - y = 3,4$$

D'où la seconde équation du système.

3. En additionnant terme à terme les deux équations, nous obtenons :

$$2x = 10,2$$

Soit :

$$x = \frac{10,2}{2} = 5,1$$

En remplaçant x par 5,1 dans la première équation, on a :

$$5,1 + y = 6,8$$

D'où :

$$y = 6,8 - 5,1 = 1,7$$

L'ensemble solution du système est donc :

$$S = \{(5,1 ; 1,7)\}$$

4. Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{BC}{AC} = \frac{5,1}{8,5}$$

D'où :

$$\widehat{ACB} = \cos^{-1} \left(\frac{5,1}{8,5} \right)$$

Soit :

$$\widehat{ACB} \approx 53^\circ$$

On en déduit alors :

$$\widehat{CAB} \approx 90 - 53$$

car dans un triangle rectangle, les deux angles autres que le droit sont complémentaires. D'où :

$$\widehat{CAB} \approx 37^\circ$$

5. • L'aire $\mathcal{A}_B$ de la partie hachurée BPM est le quart de l'aire du cercle $\mathcal{C}_B$.

L'aire de $\mathcal{C}_B$ est :

$$\frac{\pi \times 1,7^2}{4} = 2,89\pi$$

L'aire hachurée BPM est donc à peu près égale à $2,3 \text{ cm}^2$.

• Pour l'aire hachurée AMN, nous allons utiliser le tableau de proportionnalité suivant :

Angle	360°	37°
Aire du secteur angulaire	$\pi \times 5,1^2$	$\mathcal{A}_A$

$$\mathcal{A}_A = \frac{37 \times \pi \times 5,1^2}{360} \approx 8,4$$

L'aire hachurée AMN est donc à peu près égale à $8,4 \text{ cm}^2$.

• Le rayon de $\mathcal{C}_C$ est égale à :

$$5,1 - 1,7 = 3,4$$

Pour l'aire hachurée CPN, nous allons utiliser le tableau de proportionnalité suivant :

Angle	360°	53°
Aire du secteur angulaire	$\pi \times 3,4^2$	$\mathcal{A}_C$

$$\mathcal{A}_C = \frac{53 \times \pi \times 3,4^2}{360} \approx 5,3$$

L'aire hachurée CPN est donc à peu près égale à $5,3 \text{ cm}^2$.

6. L'aire grisée $\mathcal{A}$ est égale à l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle ABC à laquelle on soustrait la somme de l'aire des surfaces hachurées :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_{ABC} - (\mathcal{A}_A + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_C) \\ &\approx \frac{AB \times BC}{2} - (2,3 + 8,4 + 5,3) \\ &\approx 17,34 - 16 \\ &\approx 1,34 \end{aligned}$$

L'aire de la partie grisée est donc à peu près égale à $1,34 \text{ cm}^2$.

Exercice 2

1. Dans le triangle OAS,
- $(O'B) \parallel (OA)$
 - S, O' et O sont alignés dans cet ordre
 - S, B et A sont alignés dans cet ordre
- Ainsi, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'B}{OA}$$

Donc :

$$\frac{SO'}{SO' + 20} = \frac{1}{5}$$

Ainsi :

$$5SO' = SO' + 20$$

D'où :

$$4SO' = 20$$

Finalement, on a :

$$SO' = 5$$

Et donc :

$$SO = 25 \text{ cm}$$

2. (a) Le volume d'un cône est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

où r est le rayon de sa base et h sa hauteur.

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 25 \\ &= \frac{625}{3}\pi\end{aligned}$$

Le volume du cône non tronqué est donc $\mathcal{V} = \frac{625}{3}\pi \text{ cm}^3$.

- (b) Le volume du cône qui a été enlevé est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}' &= \frac{1}{3}\pi \times BO'^2 \times SO' \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 5 \\ &= \frac{5}{3}\pi\end{aligned}$$

Ainsi, le volume du cône tronqué est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} - \mathcal{V}' &= \frac{625}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi \\ &= \frac{620}{3}\pi\end{aligned}$$

Le volume du cône non tronqué est donc égal à $\frac{620}{3}\pi \text{ cm}^3$.

3. Le volume d'un cylindre est donné par la formule :

$$\mathcal{V}_{\text{cylindre}} = \pi r^2 h$$

où r est le rayon d'une base et h sa hauteur.

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\text{cylindre}} &= \pi \times 1^2 \times 5 \\ &= 5\pi\end{aligned}$$

Le volume du cylindre est donc égal à $5\pi \text{ cm}^3$.

4. Le volume de la carafe est :

$$\begin{aligned}(\mathcal{V} - \mathcal{V}') + \mathcal{V}_{\text{cylindre}} &= \frac{620}{3}\pi + 5\pi \\ &= \frac{620}{3}\pi + \frac{15}{3}\pi \\ &= \frac{635}{3}\pi \\ &\approx 665\end{aligned}$$

Le volume de la carafe est donc à peu près égal à 665 cm^3 , soit 0,663 L.

Cela représente à peu près $\frac{2}{3}$ de litre.

Exercice 3

1. D'une part,

- $AC^2 = 9^2 = 81$

D'autre part,

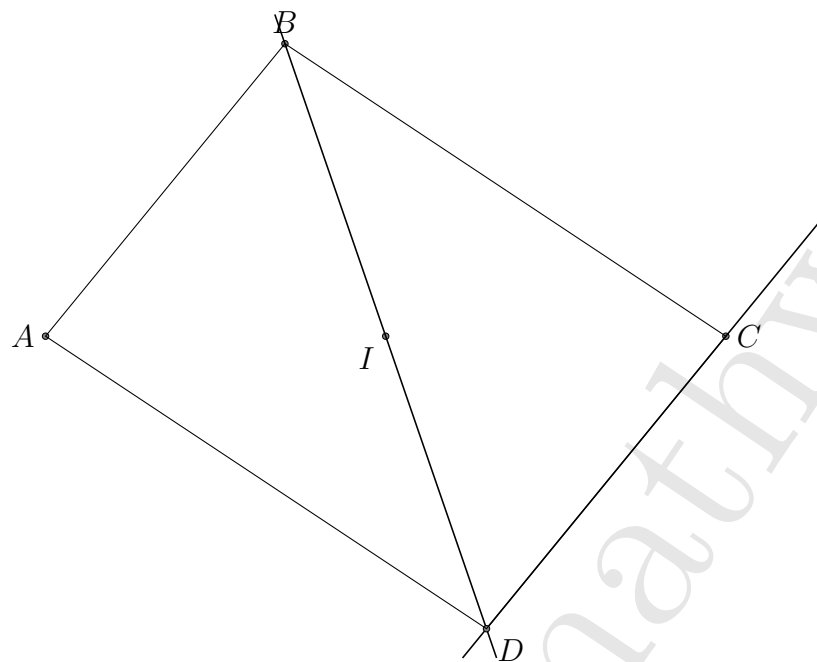
- $\begin{aligned}AB^2 + BC &= 5^2 + 7^2 \\ &= 25 + 49 \\ &= 74\end{aligned}$

Nous voyons alors que $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$.

Par conséquent, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

2. Pour construire le cercle circonscrit à un triangle, on trace deux médiatrices, qui se coupent en O, centre de ce cercle.

Voici la figure :



3. On sait que :

- C, I et A sont alignés dans cet ordre ;
- D, I et B sont alignés dans cet ordre ;
- (CD) et (AB) sont parallèles.

Ainsi, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB}$$

Or,

$$\frac{IC}{IA} = 1$$

car I est le milieu de [AC]. Ainsi,

$$\frac{ID}{IB} = 1$$

Soit :

$$ID = IB$$

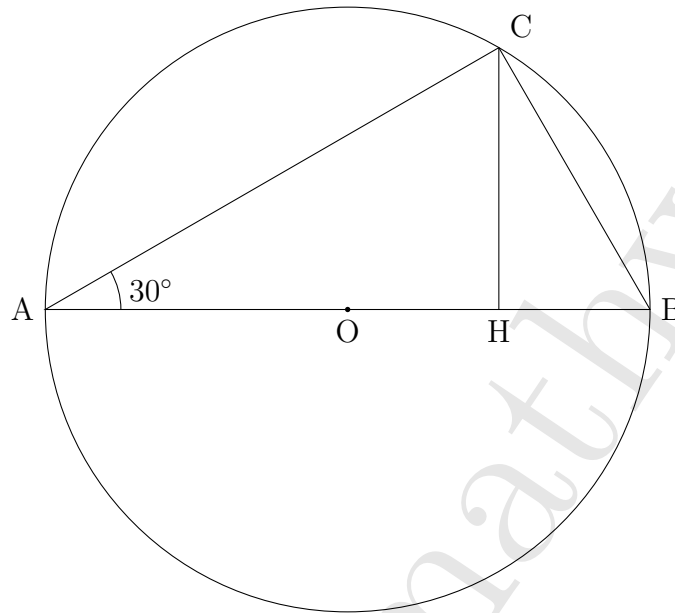
I est donc aussi le milieu de [BD].

Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

Ainsi, ABCD est un parallélogramme.

PROBLÈME : CORRECTION

1. On a, pour $x = 30^\circ$, la figure suivante :



2. On sait que :

- $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$;
- $C \in \mathcal{C}$.

Or, tout triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre de ce cercle est rectangle en le point extérieur au diamètre considéré.

Ainsi, ABC est rectangle en C , quelle que soit la valeur de x .

3. Les angles $\widehat{HOC}$ et $\widehat{BAC}$ interceptent le même arc, à savoir $\widehat{BC}$.

Ainsi, d'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{HOC}$ mesure le double de $\widehat{BAC}$.

Par conséquent, $\widehat{HOC} = 2x$.

4. Dans le triangle HOC rectangle en H ,

$$\sin \widehat{HOC} = \frac{CH}{OC}$$

Soit :

$$\sin(2x) = \frac{CH}{4}$$

À l'aide des produits en croix, on déduit alors :

$$CH = 4 \sin(2x)$$

5. L'aire d'un triangle se calcule à l'aide de la formule :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Donc l'aire de ABC est :

$$f(x) = \frac{AB \times CH}{2}$$

$$f(x) = \frac{8 \times 4 \sin(2x)}{2}$$

$$f(x) = 16 \sin(2x)$$

6. (a) Graphiquement, on peut lire : $f(30) \approx 3,5$.

Donc l'aire du triangle ABC est égale à environ $3,5 \text{ cm}^2$ quand $x = 30^\circ$.

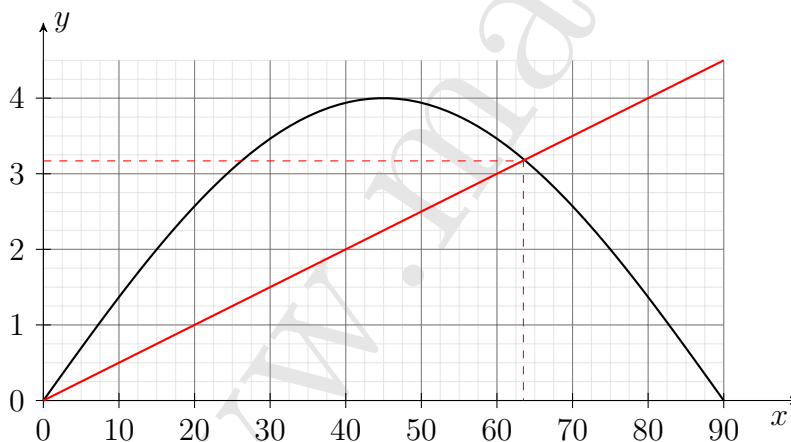
(b) La courbe atteint « son point le plus haut » pour $x = 45^\circ$ (pour cette valeur de x , l'aire du triangle est égale à 4 cm^2).

(c) On nous demande ici s'il existe une valeur de x telle que $f(x) = \frac{1}{20}x$.

Il faut donc tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{20}x$ et voir s'il existe au moins un point d'intersection de cette droite avec la courbe. Pour la tracer, on prend deux valeurs de x , choisies de façon à simplifier les calculs :

x	0	20
$\frac{1}{20}x$	0	1

Ainsi, la droite passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées $(20 ; 1)$:



Elle coupe bien la courbe en un point autre que l'origine. Ce point a pour abscisse environ 63 et pour ordonnée environ 3,15.

On vérifie alors qu'en effet, $\frac{63}{20} = 3,15$.