

SUJET METROPOLE 2013

Stéphane PASQUET
<http://www.mathweb.fr>

La présentation et la rédaction sont notées sur 4 points.

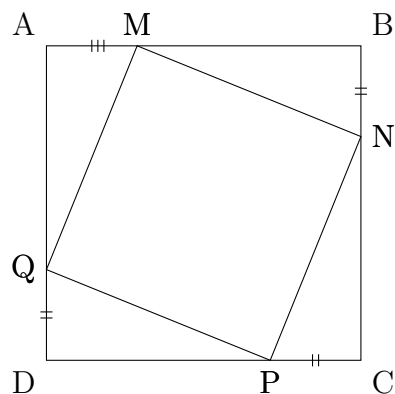
Indication portant sur l'ensemble du sujet

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.
Pour chaque question, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche.
Elle sera prise en compte dans la notation.

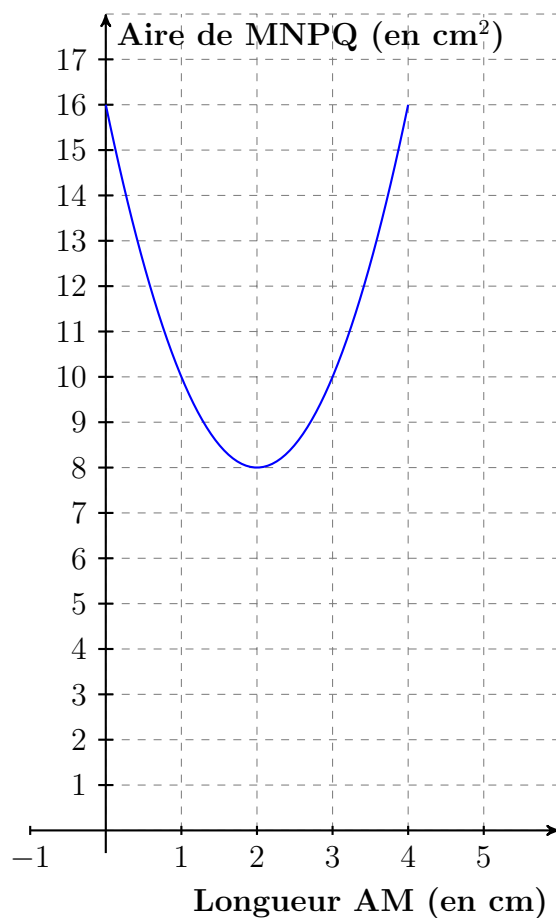
Exercice 1 (4 points)

Avec un logiciel :

- on a construit un carré ABCD, de côté 4 cm.
- on a placé un point M mobile sur [AB] et construit le carré MNPQ comme visualisé sur la copie d'écran ci-contre.
- on a représenté l'aire du carré MNPQ en fonction de la longueur AM.



On a obtenu le graphique ci-dessous :



En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes. **Aucune justification n'est attendue.**

- 1 Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de AM, l'aire de MNPQ est égale à 10 cm².
- 2 Déterminer l'aire de MNPQ lorsque AM est égale à 0,5 cm.

Exercice 2 (4 points)

On a utilisé un tableur pour calculer les images de différentes valeurs de x par une fonction affine f et par une autre fonction g . Une copie de l'écran obtenu est donnée ci-dessous.

	C2		fx	$=-5*C1+7$				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	f(x)	22	17	12	7	2	-3	-8
3	g(x)	13	8	5	4	5	8	13
4								

- 1 Quelle est l'image de -3 par f ?
- 2 Calculer $f(7)$.
- 3 Donner l'expression de $f(x)$.
- 4 On sait que $g(x) = x^2 + 4$. Une formule a été saisie dans la cellule B3 et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage de cellules C3 :H3. Quelle est cette formule ?

Exercice 3 (6 points)

Les informations suivantes concernent les salaires des hommes et des femmes d'une même entreprise :

Salaires des femmes :
1 200 € ; 1 230 € ; 1 250 € ; 1 310 € ; 1 376 € ; 1 400 € ; 1 440 € ; 1 500 € ; 1 700 € ; 2 100 €
Salaires des hommes :
Effectif total : 20
Moyenne : 1 769 €
Étendue : 2 400 €
Médiane : 2 000 €
Les salaires des hommes sont tous différents.

- 1 Comparer le salaire moyen des hommes et celui des femmes.
- 2 On tire au sort une personne dans l'entreprise. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
- 3 Le plus bas salaire de l'entreprise est de 1 000 €. Quel salaire est le plus élevé ?
- 4 Dans cette entreprise, combien de personnes gagnent plus de 2 000 € ?

Exercice 4 (6 points)

Trois figures codées sont données ci-dessous. Elles ne sont pas dessinées en vraie grandeur. Pour chacune d'elles, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

Figure 1

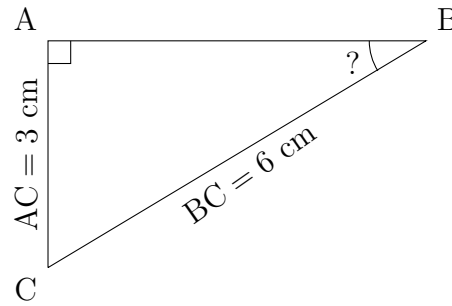
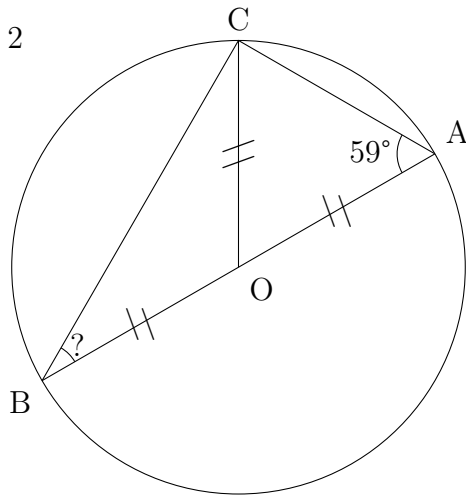
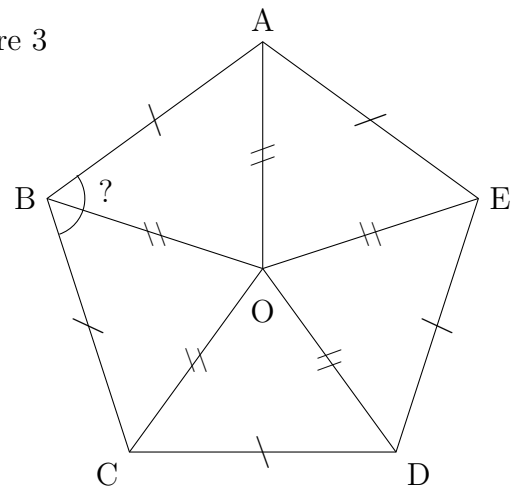


Figure 2



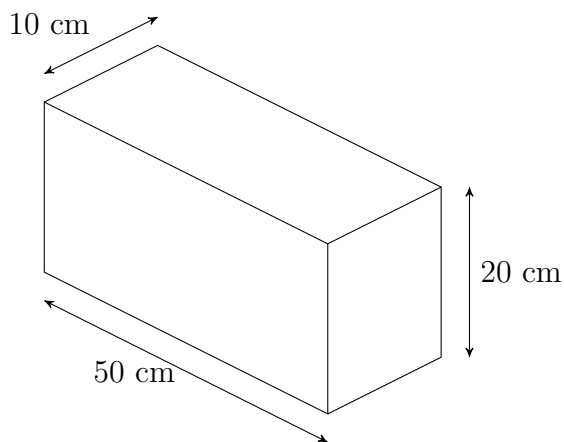
$[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O .

Figure 3



Exercice 5 (7 points)

Pour réaliser un abri de jardin en parpaing, un bricoleur a besoin de 300 parpaings de dimensions $50\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ pesant chacun 10 kg. Il achète les parpaings dans un magasin situé à 10 km de sa maison. Pour les transporter, il loue au magasin un fourgon.



Information 1 : Caractéristiques du fourgon.

- 3 places assises.
- Dimensions du volume transportable ($L \times l \times h$) : $2,60\text{ m} \times 1,56\text{ m} \times 1,84\text{ m}$.
- Charge pouvant être transportée : 1,7 tonne.
- Volume réservoir : 80 Litres.
- Diesel (consommation : 8 Litres aux 100 km).

Information 2 : Tarifs de location du fourgon.

1 jour 30 km maximum	1 jour 50 km maximum	1 jour 100 km maximum	1 jour 200 km maximum	km supplémentaire
48 €	55 €	61 €	78 €	2 €

Ces prix comprennent le kilométrage indiqué hors carburant.

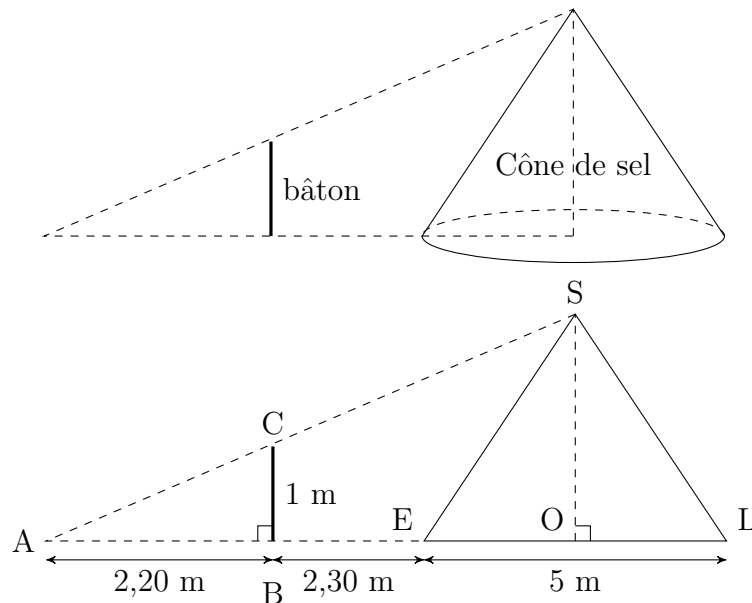
Information 3 : Un litre de carburant coûte 1,50 €.

- 1 Expliquer pourquoi il devra effectuer deux aller-retour pour transporter les 300 parpaings jusqu'à sa maison.
- 2 Quel sera le coût total du transport ?
- 3 Les tarifs de location du fourgon sont-ils proportionnels à la distance maximale autorisée par jour ?

Exercice 6 (5,5 points)

Dans les marais salants, le sel récolté est stocké sur une surface plane. On admet qu'un tas de sel a toujours la forme d'un cône de révolution.

- 1 (a) Pascal souhaite déterminer la hauteur d'un cône de sel de diamètre 5 mètres. Il possède un bâton de longueur 1 mètre. Il effectue des mesures et réalise les deux schémas ci-dessous :



Démontrer que la hauteur de ce cône de sel est égale à 2,50 mètres.

Dans cette question, on n'attend pas de démonstration rédigée. Il suffit d'expliquer brièvement le raisonnement suivi et de présenter clairement les calculs.

- (b) À l'aide de la formule $V_{\text{cône}} = \frac{\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}}{3}$, déterminer en m^3 le volume de sel contenu dans ce cône. Arrondir le résultat au m^3 près.

- 2 Le sel est ensuite stocké dans un entrepôt sous la forme de cônes de volume $1\,000 \text{ m}^3$. Par mesure de sécurité, la hauteur d'un tel cône de sel ne doit pas dépasser 6 mètres. Quel rayon faut-il prévoir au minimum pour la base ? Arrondir le résultat au décimètre près.

Exercice 7 (4,5 points)

Chacune des trois affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

Affirmation 1 :

Dans un club sportif, les trois quarts des adhérents sont mineurs et le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans. Un adhérent sur six a donc entre 18 ans et 25 ans.

Affirmation 2 :

Durant les soldes, si on baisse le prix d'un article de 30 % puis de 20 %, au final le prix de l'article a baissé de 50 %.

Affirmation 3 :

Pour n'importe quel nombre entier n , $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ est un multiple de 4.

Correction

Exercice 1 (4 points)

- 1 L'aire de MNPQ est égale à 10 cm^2 pour $AM = 1 \text{ cm}$ ou $AM = 3 \text{ cm}$.
- 2 Quand $AM = 0,5 \text{ cm}$, l'aire de MNPQ est égale à 13 cm^2 .

Exercice 2 (4 points)

- 1 L'image de -3 par f est contenu dans la cellule B2, et vaut 22.
- 2 Cette question est totalement stupide et aurait due être mise après la question suivante ! En effet, d'après la formule que l'on peut voir en face de fx , l'expression de la fonction f est :

$$f(x) = -5x + 7$$

$$\begin{aligned}\text{Donc, } f(7) &= -5 \times 7 + 7 \\ &= -35 + 7 \\ &= -28\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathbf{f(7) = -28}.$$

- 3 $f(x) = -5x + 7$.
- 4 La formule entrée dans la cellule B3 est : `=B1*B1+4`.

Exercice 3 (6 points)

- 1 Calculons la moyenne des salaires :

$$\begin{aligned}m &= \frac{1\,200 + 1\,230 + 1\,250 + \dots + 2\,100}{10} \\ m &= \frac{14\,506}{10} \\ m &= 1\,450,6\end{aligned}$$

Le salaire moyen des femmes est donc égal à 1 450,6 €.

Ainsi, le salaire moyen des hommes est supérieur à celui des femmes.

- 2 Il y a 30 salariés en tout, dont 10 femmes.

Ainsi, la probabilité que la personne choisie soit une femme est égale à $\frac{1}{3}$.

- 3 L'étendue est la différence entre le plus grand et le plus petit salaire.
De plus,

$$2\,400 + 1\,000 = 3\,400$$

Ainsi, le salaire le plus élevé est 3 400 €.

- 4** La médiane est la valeur qui partage la série en deux séries de même effectif, et elle vaut ici 2 000 €. Ainsi, la moitié des salariés (soit 15 personnes) gagnent plus de 2 000 €.

Exercice 4 (6 points)

Figure 1.

Le triangle ABC est rectangle en A. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sin \widehat{ABC} &= \frac{AC}{BC} \\ &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \\ \widehat{ABC} &= 30^\circ\end{aligned}$$

Figure 2.

Le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AB]. Il est donc rectangle en C.

Or, dans un triangle rectangle, la somme de la mesure des deux angles aigus est égale à 90° . Donc, $\widehat{ABC} = 90^\circ - 59^\circ$, soit $\widehat{ABC} = 31^\circ$.

Figure 3.

ABCDE est un pentagone régulier, donc $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

De plus, AOB et BOC sont identiques et isocèles en O donc $\widehat{OBC} = \widehat{OBA}$.
Donc, $\widehat{ABC} = 180^\circ - 72^\circ$, soit $\widehat{ABC} = 108^\circ$.

Exercice 5 (7 points)

- 1** La charge pouvant être transportée est de 1,7 tonne.
Or, 300 parpaings pèsent en tout 3 000 kg, soit 3 tonnes.
Il est donc impossible de tout transporter en une seule fois. Il faut donc faire 2 voyages (car la moitié de 3 tonnes est égale à 1,5 tonne, donc cela est possible).
- 2** Il faut 2 aller-retour, donc parcourir 80 km, donc dépenser 61 € pour la location du fourgon.
La consommation est de 8 litres pour 100 km, donc pour 80 km :

$$8 \times \frac{80}{100} = 6,4.$$

Il consommera donc 6,4 litres.

$$6,4 \times 1,50 = 9,6$$

Il devra donc dépenser 9,60 € pour le carburant.

$$9,60 + 61 = 70,60$$

Ainsi, le coût total du transport est égal à 70,60 €.

- 3** Pour 50 km maximum, on doit payer 55 €. Donc si les tarifs étaient proportionnels à la distance maximum, on devrait payer le double pour 100 km, ce qui n'est pas le cas.
Donc les tarifs ne sont pas proportionnels à la distance maximale autorisée.

Exercice 6 (5,5 points)

- 1** (a) Les hauteurs sont perpendiculaires au sol, donc parallèles entre elles. Ainsi, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AO} = \frac{BC}{OS}$$

soit :

$$\frac{3,2}{3,2 + 2,3 + 2,5} = \frac{1}{OS}$$

Et donc :

$$OS = \frac{8}{3,2}$$

Ainsi, OS = 2,5 m.

$$(b) V_{\text{cône}} = \frac{\pi \times 2,5^2 \times 2,5}{3}$$
$$\approx 16,362447917$$

Ainsi, le volume de sel est d'environ 16 m³.

- 2** On a :

$$V_{\text{cône}} = 1\,000$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi \times r^2 \times 6}{3} = 1\,000 \text{ car on prend la hauteur maximale autorisée } h = 6$$
$$\Leftrightarrow \pi \times r^2 \times 2 = 1\,000$$
$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1\,000}{2\pi}$$
$$\Leftrightarrow r^2 \approx 159,16$$
$$\Leftrightarrow r \approx \sqrt{159,16}$$
$$\Leftrightarrow r \approx 12,62$$

Il faut donc que le rayon soit au plus égal à 12,6 m.

Exercice 7 (4,5 points)

Affirmation 1.

$\frac{2}{3}$ des adhérents majeurs, donc du quart qu'il reste, soit $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ donc $\frac{1}{6}$ ont entre 18 et 25 ans.

L'affirmation 1 est donc VRAIE.

Affirmation 2.

On ne peut pas ajouter deux pourcentages.

L'affirmation 2 est donc FAUSSE.

Affirmation 3.

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = [(n+1) - (n-1)][(n+1) + (n-1)]$$
$$= 2(2n)$$
$$= 4n$$

Or, $4n$ est un multiple de 4.

L'affirmation 3 est donc VRAIE.